变化率与导数

相信大家在高一学习物理的时候，都遇到过这样的问题：瞬时变化率和平均变化率到底是什么，为什么就这么突然的给出了这样的一个定义？

当时我们是借助实际生活中的问题，如汽车加速等具体的例子展示的，而现在，我们则要从更加**微观**、**普遍**的视角对待这两个概念。

1、变化量和变化率

首先我们给出变化量的概念：

一个函数$y=f(x)$其**定义域为D**，且$x_1,x_2\in D,\quad x_1\neq x_2,\quad y_1=f(x_1),\quad y_2=f(x_2)$,则**自变量变化量**为
$\Delta x=x_2-x_1$
因变量变化量为

$$\Delta y=y_2-y_1$$

那么**平均变化率**就是：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

平均变化率的实际意义有很多，以我们物理课中所学到的，路程的平均变化率，就是速度大小，这代表着一个单位时间内，路程的变化量.例如，5m/s的质点匀速运动，那么在每个单位时间（即1s内），变化的路程为5m.

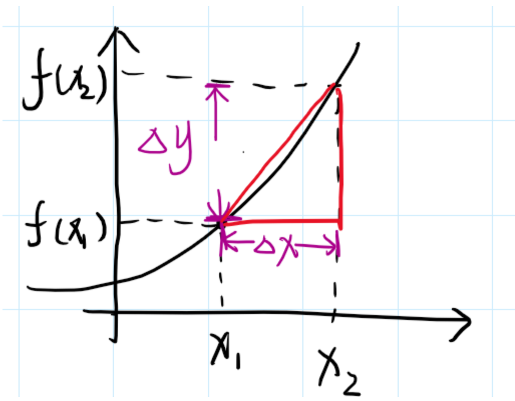
如果仔细观察上述的式子，我们很容易发现如下的关系：

$$x_2=x_1+\Delta x$$

那么我们便可以用更加优美的式子表达上述的关系。

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

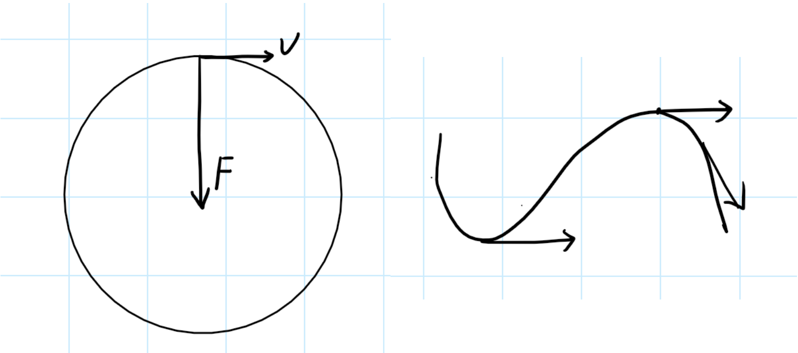
你可能会认为这两种表达方式没有本质区别，那么你就对了，确实没有本质区别，但是采用这种形式，将第二个看似无关的变量与第一个变量利用Δx相关联，这样有利于我们进行接下来的研究。



在上述图片中，我们可以直观的看到函数曲线之中变化率的意义——即两个函数上的点所连直线的**斜率**，更简单一些——**切线的斜率**。
函数的变化率，可以直观地表现函数在一定区间内的变化趋势。

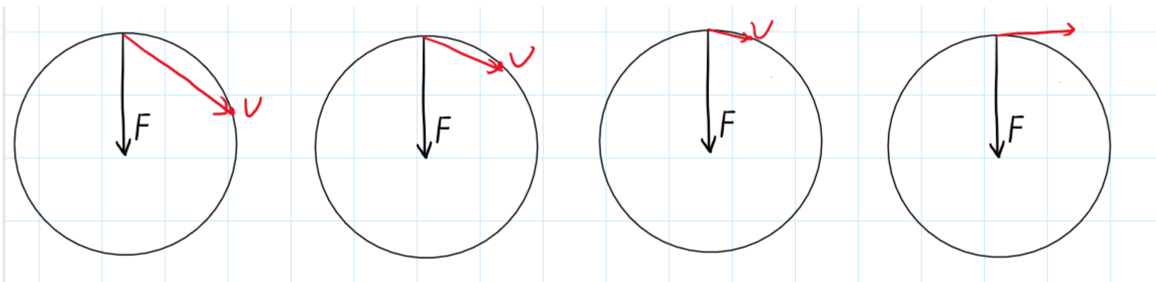
2、导数的定义

相信大家都在学习曲线运动的时候都遇到过这样类似的图景：



在当时，我们都依靠直觉认为，这个时刻的速度方向与圆相切，那么，这是为什么呢？

瞬时速度，就是在一个瞬间内的速度。我们已经知道了在一段时间内的速度方向就是两个端点之间**割线的方向**，现在，我们让两个点不断靠近，靠近，直到...



看到第四幅图了吗，当我们将两个端点移到几乎重合的时候，此时速度的方向就好像**切线的方向**一样。
让我们想象一下，当这两个端点接着靠近，那么在靠近间隔到**无穷小**的距离的时候，这个速度的方向，就是**切线的方向**了。

Δt	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
区间	$[1.9, 2]$	$[1.99, 2]$	$[1.999, 2]$	$[2, 2.001]$	$[2, 2.01]$	$[2, 2.1]$
平均速度 $2+0.5\Delta t$	1.95	1.995	1.999 5	2.000 5	2.005	2.05

在这个表格（人教版B教材P69页)中，我们不难发现，当Δt越接近于0，此时**平均速度大小**就越精确，当$\Delta t \to 0$时，这个极其精确的速度，我们就称之为**瞬时速度的大小**。

在上述的例子当中，我们其实在使用一种叫做极限的思想，在B部分中我们将进行更加严谨的论述，但在这里，我们仅仅需要掌握这种感性的直觉就好。

同样的，假若我们让上一个part里面出现的

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

也进行类似的操作，我们就可以有如下的结论：
当存在一个x_0在$f(x)$定义域内的时候，我们取$\Delta x \to 0$（此处箭头表示趋近于），此时变化率为**瞬时变化率**，其大小记作k（这里的k叫做k并非巧合哦），我们这样子的式子叫做**导函数**，，简称**导数**记作

$$f'(x_0) = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = k$$

完整的符号表述：

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

根据上述式子，我们很容易推出，当Δx很小很小的时候，可以看作近似有如下关系：

$$f'(x)\Delta x = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

即，**函数值的变化量等于导数与自变量变化量的乘积。**
此性质常用来估算函数数值大小，在以直代曲的时候将会有意想不到的用处。

3、导数的几何意义

经过上面的学习，相信大家都对导数有了基本的感性认识，接下来，我们将会着重讲解导数的几何意义，请注意，这一部分将会对未来的做题思维路径产生深远影响，对于大多数同学，这样的过度并不简单，假若没有看懂，请反复理解.

让我们先做一道题吧！

例题1 已知函数$f(x) = x^2$，设$x = 0$处变化量为Δx.

(I)依照上一章的定义求出$f'(1)$的值；

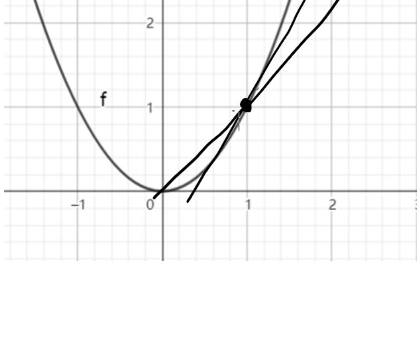
(II)设$A(1,1); B(1+\Delta x, 1+f(\Delta x))$.求当$\Delta x \to 0$的时候，两点连成直线的斜率.

解答：

(I)

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{(1+\Delta x)^2 - (1)}{\Delta x} = \frac{2(\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2 + \Delta x$$

(II)



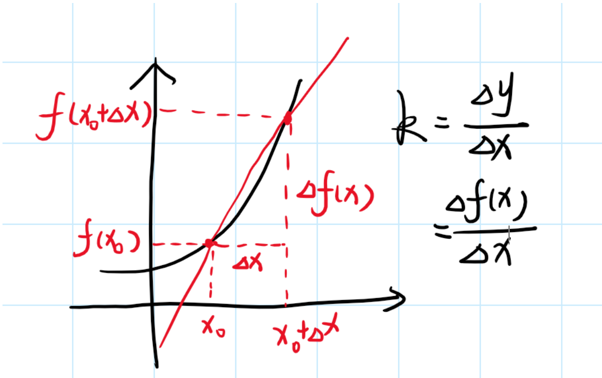
通过上述图片，我们令Δx从负无穷接近0，根据上一章的感觉可以得到，此时两点几乎重合，两点无限接近，至此直线的斜率就是在A点**切线**的斜率.

而从理性上讲，有如下关系：

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=2+0=2$$

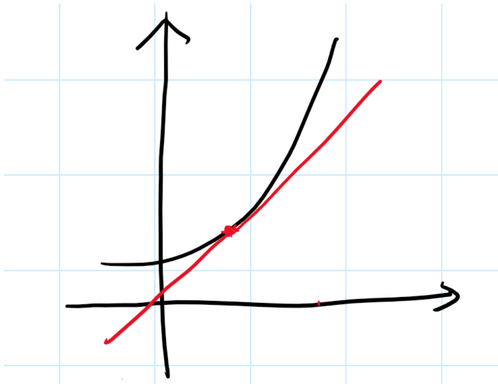
在数学上，切线的导出与割线密切相关，割线是指图像上两个靠近的点的连线，其性质是直线。当割线的**两个定点无限靠近**，那么此时两个点可以看作一个点，满足这样关系的割线叫做**切线**.

我们给出任意一个函数$f(x)$，图上两点$(x_0,f(x_0))$，$(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$，过两点的割线一定满足斜率为$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.



根据例题的启发，我们让$\Delta x\to 0$，此时两个点无限靠近，其斜率就变成了切线的斜率

$$k=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$



我们既有了斜率，又有了切点，那么我们很容易想到可以写出这样的直线的方程

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

$$y-f(x_0)=f'(x)(x-x_0)$$

以例一为例，我们可以写出此函数在$(1,1)$处的切线方程.

$$f(1)=1,f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=2$$

$$y-1=2(x-1)$$

$$y=2x-1$$

借助其切线，我们可以具象地体会瞬时变化率的实际含义。

至此，本章结束，这是最轻松愉快的一章呢，我们在这章中主要发掘了一种潜藏的极限思想，请保持这种感觉，接下来的几章我们会反复使用这个直觉。