第一章 课时练习

学校:___________姓名:___________班级:___________考号:___________

一、单选题（本大题共 7 小题）

1．已知函数 $y=f(x)=x^2+1$，则在 $x=2$，$\Delta x=0.1$ 时，Δy 的值为(　　)

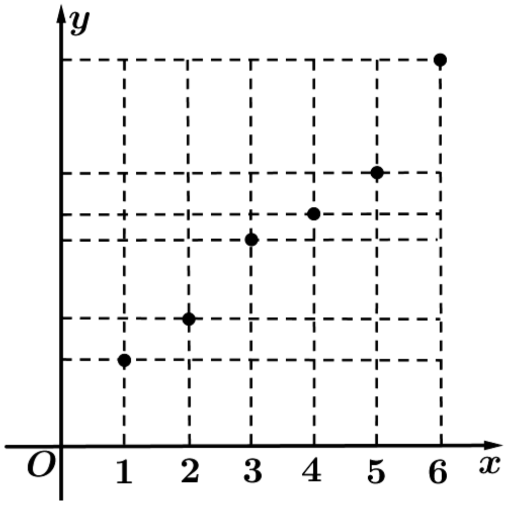
A．0.40　　B．0.41

C．0.43　　D．0.44

2．函数 $f(x)=x^2+1$，当自变量 x 由 1 变到 1.1 时，函数 $f(x)$ 的平均变化率为（　　）

A．2.1　　B．1.1　　C．2　　D．1

3．某地区在六年内第 x 年的生产总值 y（单位：亿元）与 x 之间的关系如图所示，则下列四个时段中，生产总值的年平均增长率最高的是



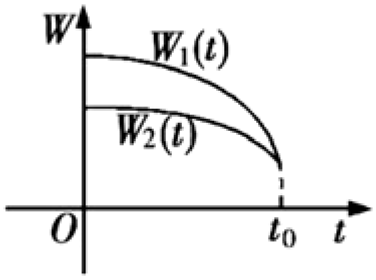
A．第一年到第三年　　B．第二年到第四年

C．第三年到第五年　　D．第四年到第六年

4．某企业近几年的年产值如图，则年增长率最高的是（　　）

A．2015 年　　B．2016 年　　C．2017 年　　D．2018 年

5．两个学校 W_1、W_2 开展节能活动，活动开始后两学校的用电量 $W_1(t)$、$W_2(t)$ 与时间 t（天）的关系如图所示，则一定有（　　）



A． W_1比W_2节能效果好

B． W_1的用电量在$[0,t_0]$上的平均变化率比W_2的用电量在$[0,t_0]$上的平均变化率大

C．两学校节能效果一样好

D． W_1与W_2自节能以来用电量总是一样大

6．某物体沿水平方向运动，其前进距离s（米）与时间t（秒）的关系为$s(t)=5t+2t^2$，则该物体在运动前 2 秒的平均速度为（　　）

A．18 米/秒　　B．13 米/秒　　C．9 米/秒　　D．$\frac{13}{2}$米/秒

7．对于以下四个函数：①$y=x$；②$y=x^2$；③$y=x^3$；④$y=\frac{1}{x}$．在区间$[1,2]$上函数的平均变化率最大的是（　　）

A．①　　B．②　　C．③　　D．④

二、解答题（本大题共 1 小题）

8．求函数$f(x)=x^2$在区间$[t,t+1]$上的平均变化率．

参考答案

1．【答案】B

【详解】$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f(2+0.1)-f(2)=(2.1)^2+1-(2^2+1)=0.41$.故选 B.

2．【答案】A

【分析】

根据函数平均变化率的求法即可得到答案.

【详解】

由题意，函数的平均变化率为：$\dfrac{f\left(1.1\right)-f\left(1\right)}{1.1-1}=\dfrac{1.1^2-1^2}{0.1}=2.1$.

故选：A.

3．【答案】A

【详解】

试题分析：由图可知 3-4-5 这一段，增长率明显偏低，5-6 虽然高，但“分散到”六年平均就不高了.

故选：A.

考点：年平均增长率

4．【答案】B

【分析】

分别求出 2015，2016，2017，2018 四年的大致增长率，即可得出答案.

【详解】

解：2015 年的增长率大约为 $\dfrac{100-50}{50}=100\%$，

2016 年的增长率约为 $\dfrac{300-100}{100}=200\%$，

2017 年的增长率约为 $\dfrac{510-300}{300}=70\%$，

2018 年的增长率约为 $\dfrac{950-510}{510}\approx 85\%$，

所以年增长率最高的为 2016 年.

故选：B.

5．【答案】A

【详解】

根据两函数切线斜率的变化以及切线斜率的几何意义、平均变化率的定义对各选项的正误进行判断，可得出正确选项.

【详解】

由图象可知，对任意的 $t_1\in\left(0,t_0\right)$，曲线 $W=W_1\left(t\right)$ 在 $t=t_1$ 处的切线比曲线 $W=W_2\left(t\right)$ 在 $t=t_1$ 处的切线要“陡”，所以，W_1 比 W_2 节能效果好，A 正确，C 错误；

由图象可知，$\frac{W_1(t_0)-W_1(0)}{t_0}<\frac{W_2(t_0)-W_2(0)}{t_0}$，则$W_1$的用电量在$[0,t_0]$上的平均变化率比$W_2$的用电量在$[0,t_0]$上的平均变化率要小，B 选项错误；

由于曲线$W=W_1(t)$和曲线$W=W_2(t)$不重合，D 选项错误.

故选：A.

【点睛】

本题考查切线斜率的实际应用，要理解瞬时变化率与切线斜率之间的关系，同时也要理解平均变化率的定义，考查分析问题和解决问题的能力，属于基础题.

6. 【答案】C

【分析】

利用平均变化率的定义可得出该物体在运行前2秒的平均速度为$\frac{s(2)-s(0)}{2}$，进而可求得结果.

【详解】

$\because s(t)=5t+2t^2$，

$\therefore$该物体在运动前 2 秒的平均速度为$\frac{s(2)-s(0)}{2}=\frac{18}{2}=9$（米/秒）.

故选：C.

7. 【答案】C

【分析】

分析求出四个函数的平均变化率，然后比较即可.

【详解】

①$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2-1}{2-1}=1$，②$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{4-1}{2-1}=3$，③$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{8-1}{2-1}=7$，④$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{2}-1}{2-1}=-\frac{1}{2}$.

故选：C.

8. 【答案】$2t+1$

【分析】

利用平均变化率的定义求解即可

【详解】

因为$f(x)=x^2$，

所以$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{(t+1)^2-t^2}{t+1-t}=2t+1$.

第二章 课时练习

学校:___________姓名:___________班级:___________考号:___________

一、 填空题

写出以下函数的导数

$$C' =$$
$$(x^{\alpha})' =$$
$$(a^{x})' =$$
$$(\log_a x)' =$$
$$(\sin x)' =$$
$$(\cos x)' =$$

二、 解答题

1. $\sin x \cos x$
2. $\sin^2 x$
3. $\cos^2 x$
4. $\tan x$
5. $\sin 5x$
6. $x \ln x$
7. $e^x \ln x$
8. e^{ax}
9. $\frac{\ln x}{x}$
10. $\frac{e^x}{x}$
11. $x^2 + x^3 + x \ln x$
12. $x\sqrt{x + \ln x}$
13. $x^2 - \cos x$
14. $x^e + e^9$
15. $a^2 + x^2$
16. $e^{ax} \ln ax$
17. $(x-3)^{99}$
18. $(x-5)^e$
19. e^{6+x}
20. $\ln x + e$

$$C' = 0$$
$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$$
$$(a^{x})' = a^{x} l\, n\, a$$
$$(log_{a}\ x)' = \frac{1}{xl\, n\, a}$$
$$(si\, n\, x)' = co\, s\, x$$
$$(cos\ \ x)' = sin\ \ x$$

参考答案

1. 【答案】B

【详解】$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f(2+0.1)-f(2)=(2.1)^2+1-(2^2+1)=0.41$.故选 B.

2. 【答案】A

【分析】

根据函数平均变化率的求法即可得到答案.

【详解】

由题意，函数的平均变化率为：$\dfrac{f\left(1.1\right)-f\left(1\right)}{1.1-1}=\dfrac{1.1^2-1^2}{0.1}=2.1$.

故选：A.

3. 【答案】A

【详解】

试题分析：由图可知 3-4-5 这一段，增长率明显偏低，5-6 虽然高，但“分散到”六年平均就不高了.

故选：A.

考点：年平均增长率

4. 【答案】B

【分析】

分别求出 2015，2016，2017，2018 四年的大致增长率，即可得出答案.

【详解】

解：2015 年的增长率大约为 $\dfrac{100-50}{50}=100\%$，

2016 年的增长率约为 $\dfrac{300-100}{100}=200\%$，

2017 年的增长率约为 $\dfrac{510-300}{300}=70\%$，

2018 年的增长率约为 $\dfrac{950-510}{510}\approx 85\%$，

所以年增长率最高的为 2016 年.

故选：B.

5. 【答案】A

【详解】

根据两函数切线斜率的变化以及切线斜率的几何意义、平均变化率的定义对各选项的正误进行判断，可得出正确选项.

【详解】

由图象可知，对任意的 $t_1\in\left(0,t_0\right)$，曲线 $W=W_1\left(t\right)$ 在 $t=t_1$ 处的切线比曲线 $W=W_2\left(t\right)$ 在 $t=t_1$ 处的切线要“陡”，所以，W_1 比 W_2 节能效果好，A 正确，C 错误；

由图象可知，$\frac{W_1(t_0)-W_1(0)}{t_0}<\frac{W_2(t_0)-W_2(0)}{t_0}$，则$W_1$的用电量在$[0,t_0]$上的平均变化率比$W_2$的用电量在$[0,t_0]$上的平均变化率要小，B 选项错误；

由于曲线$W=W_1(t)$和曲线$W=W_2(t)$不重合，D 选项错误.

故选：A.

【点睛】

本题考查切线斜率的实际应用，要理解瞬时变化率与切线斜率之间的关系，同时也要理解平均变化率的定义，考查分析问题和解决问题的能力，属于基础题.

6. 【答案】C

【分析】

利用平均变化率的定义可得出该物体在运行前2秒的平均速度为$\frac{s(2)-s(0)}{2}$，进而可求得结果.

【详解】

$\because s(t)=5t+2t^2$，

$\therefore$该物体在运动前 2 秒的平均速度为$\frac{s(2)-s(0)}{2}=\frac{18}{2}=9$（米/秒）.

故选：C.

7. 【答案】C

【分析】

分析求出四个函数的平均变化率，然后比较即可.

【详解】

①$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2-1}{2-1}=1$，②$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{4-1}{2-1}=3$，③$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{8-1}{2-1}=7$，④$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{2}-1}{2-1}=-\frac{1}{2}$.

故选：C.

8. 【答案】$2t+1$

【分析】

利用平均变化率的定义求解即可

【详解】

因为$f(x)=x^2$，

所以$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{(t+1)^2-t^2}{t+1-t}=2t+1$.

	$f(x) = \dots$	$f'(x)$
1.	$\sin x \cos x$	$-\sin x \cos x - \cos x \sin x = -2\sin x \cos x$
2.	$\sin^2 x$	$2\cos x$
3.	$\cos^2 x$	$-2\sin x$
o 4.	$\tan x$	$\frac{\sin x}{\cos x}$ $\frac{-2\sin x \cos x}{\cos^2 x}$
5.	$\sin 5x$	$5\cos x$
6.	$x \ln x$	$\ln x + 1$
7.	$e^x \ln x$	$e^x(\ln x + 1)$
8.	e^{ax}	ae^{ax}
o 9.	$\frac{\ln x}{x}$	$\frac{1+\ln x}{x^2}$
o 10.	$\frac{e^x}{x}$	$\frac{e^x(x+1)}{x^2}$
11.	$x^2+x^3+x\ln x$	$2x+3x^2+\ln x+1$
12.	$x\sqrt{x+\ln x}$	$\sqrt{x+\ln x} + x \cdot (-\frac{1}{(x+\ln x)^2}) \cdot (1+\frac{1}{x})$
13.	$x^2 - \cos x$	$2x + \sin x$
14.	$x^e + e^9$	ex^{e-1}
15.	$a^2 + x^2$	$2x$
16.	$e^{ax} \ln ax$	$u' = ae^{ax}$, $v' = \frac{1}{x}$ $ae^{ax}(\ln ax) + e^{ax}(\frac{1}{x})$
17.	$(x-3)^{99}$	$99(x-3)^{98}$
18.	$(x-5)^e$	$e(x-5)^{e-1}$
19.	e^{6+x}	$e^6 \cdot e^x = e^{6+x}$
20	$\ln x + e$	$\frac{1}{x}$

1.2017年北京市海淀区高考数学零模试卷（理科）

已知函数． $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=kx$ 相切于点P，求点P的坐标；

（Ⅱ）当 $a\le e$ 时，证明：当 $x\in(0,+\infty)$， $f(x)\ge a(x-\ln x)$

2. **怀柔区2016—2017学年度高三第二学期适应性练习数学（文史类）**

已知函数 $f\left(x\right)=ax+\ln x(a\in R)$.

（1）若 $a=2$，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

（2）求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（3）若对任意 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f\left(x\right)<2$ 成立，求实数 a 的取值范围.

3.怀柔区2016—2017学年度高三第二学期适应性练习数学（理工类）

已知函数 $f\left(x\right)=ax+\ln x(a\in R)$ ．

（1）求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）设 $g\left(x\right)=x^2-2x+2$，若对任意 $x_1\in(0,+\infty)$，均存在 $x_2\in[0,1]$，使得 $f(x_1)<g(x_2)$，求 a 的取值范围.

4.西城区高三统一测试数学（文科）

已知函数 $f(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2$． 设 l 为曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线， 其中 $x_0\in[-1,1$.

（Ⅰ）求直线 l 的方程（用 x_0 表示）；

（Ⅱ）求直线 l 在 y 轴上的截距的取值范围；

（Ⅲ）设直线 $y=a$ 分别与曲线 $y=f(x)$ 和射线 $y=x-1\,(x\in[0,+\infty))$ 交于 M,N 两点，求 $|MN|$ 的最小值及此时 a 的值.

5.西城区高三统一测试数学（理科） 2017.4

已知函数 $f(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2$． 设 l 为曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线， 其中 $x_0\in[-1,1]$.

（Ⅰ）求直线 l 的方程（用 x_0 表示）；

（Ⅱ）设 O 为原点，直线 $x=1$ 分别与直线 l 和 x 轴交于 A,B 两点, 求△ AOB 的面积的最小值.

6.顺义区2017届高三第二次统练数学试卷（文科）

已知函数 $f(x)=1+\ln x-ae^x$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f\left(x\right)$ 在 $x=1$ 处的切线与 x 轴平行，求实数 a 的值；

（Ⅱ）若对任意 $x\in\left(0,+\infty\right)$，不等式 $f(x)\le 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

7.顺义区2017届高三第二次统练数学试卷（理科）

已知函数 $f\left(x\right)=pe^{-x}+x+1\left(p\in R\right)$.

（Ⅰ）当实数 $p=e$ 时，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $x=1$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（Ⅲ）当 $p=1$ 时，若直线 $y=mx+1$ 与曲线 $y=f\left(x\right)$ 没有公共点，求实数 m 的取值范围.

8.石景山区2017年高三统一练习数 学（文）试 卷

已知函数 $f(x)=e^x$.

（Ⅰ）过原点作曲线 $y=f(x)$ 的切线，求切线方程；

（Ⅱ）当 $x>0$ 时，讨论曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=mx^2(m>0)$ 公共点的个数.

9.石景山区2017年高三统一练习数 学（理）试 卷

已知函数 $f(x)=\ln x$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求证：当 $x>0$ 时， $f(x)\geqslant 1-\dfrac{1}{x}$；

（Ⅲ）若 $x-1>a\ln x$ 对任意 $x>1$ 恒成立，求实数 a 的最大值.

10.**海淀区高三年级第二学期期中练习数学（文科）**

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-x^2+ax$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线与 x 轴平行.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）若 $g(x)=\mathrm{e}^x-2x-1$，求函数 $g(x)$ 的最小值；

（Ⅲ）求证：存在 $c<0$, 当 $x>c$ 时， $f(x)>0$.

11.海淀区高三年级第二学期期中练习数学（理科）　　2017.4

已知函数 $f(x)=x^2-2ax+4(a-1)\ln(x+1)$，其中实数 $a<3$.

（Ⅰ）判断 $x=1$ 是否为函数 $f(x)$ 的极值点，并说明理由；

（Ⅱ）若 $f(x)\le 0$ 在区间 $[0,1]$ 上恒成立，求 a 的取值范围.

12.丰台区2017年高三年级第二学期综合练习（一）数　学（文科）

已知函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{\mathrm{e}^x}$，$A(x_1,m)$，$B(x_2,m)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上两个不同的点.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间，并写出实数 m 的取值范围；

（Ⅱ）证明： $x_1+x_2>0$.

13. **丰台区2017年高三年级第二学期综合练习（一）数　学（理科）**

已知函数 $f(x)=\ln(kx)+\dfrac{1}{x}-k\ (k>0)$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）对任意 $x\in[\dfrac{1}{k},\dfrac{2}{k}]$，都有 $x\ln(kx)-kx+1\le mx$，求 m 的取值范围.

14.房山区2017年高三一模试卷高三数学（文）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点（1， $f(1)$）处的切线与直线 $y=ax+2$ 平行，求实数 a 的值；

（Ⅱ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅲ）当 $0<a<1$ 时，证明：曲线 $y=f(x)$ 在直线 $y=(\mathrm{e}-1)x$ 的上方.

15.房山区2017年高三一模试卷高三数学（理）

已知函数 $f(x)=x-1+a\mathrm{e}^x$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点（1， $f(1)$）处的切线平行于x轴，求a的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的极值；

（Ⅲ）当 $a=1$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=kx-1$ 没有公共点，求k的取值范围.

16. **北京市东城区2016-2017学年度第二学期高三综合练习（一）数学（文科）**

设函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+ax$， $a\in\mathbf{R}$.

(Ⅰ)若 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 a 的值，并讨论 $f(x)$ 的单调性；

(Ⅱ)已知函数 $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}ax^2+\dfrac{2}{3}$，若 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有零点，求 a 的取值范围；

(Ⅲ)设 $f(x)$ 有两个极值点 x_1， x_2，试讨论过两点 $(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$ 的直线能否过点 $(1,1)$，若能，求 a 的值；若不能，说明理由.

17.北京市东城区2016-2017学年度第二学期高三综合练习（一）数学理科）

已知函数 $f(x)=2\ln x+\frac{1}{x}-mx(m\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）当 $m=-1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为单调递减，求 m 的取值范围；

（Ⅲ）设 $0<a<b$，求证：$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$.

18.北京市朝阳区2017届高三第一次（3月）综合练习数学（理）试题

已知函数 $f(x)=\ln x-ax-1(a\in\mathbf{R}),g(x)=xf(x)+\frac{1}{2}x^2+2x$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）当 $a=1$ 时，若函数 $g(x)$ 在区间 $(m,m+1)(m\in\mathbf{Z})$ 内存在唯一的极值点，求 m 的值.

19.北京市朝阳区高三年级第一次综合练习数学测试题（文史类） 2017.3

已知函数 $f(x)=x^3-3ax+\mathrm{e},g(x)=1-\ln x$，其中 e 为自然对数的底数.

(Ⅰ)若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $l:x+2y=0$ 垂直，求实数 a 的值；

（Ⅱ）设函数 $F(x)=-x[g(x)+\frac{1}{2}x-2]$，若 $F(x)$ 在区间 $(m,m+1)(m\in\mathbf{Z})$ 内存在唯一的极值点，求 m 的值；

（Ⅲ）用 $\max\{m,n\}$ 表示 m,n 中的较大者，记函数 $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}(x>0)$.若函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有2个零点，求实数 a 的取值范围.

20.北京市朝阳区高三年级第二次综合练习数学学科测试（理工类）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+x^2-x$，$g(x)=x^2+ax+b,\ a,b\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线 l 与曲线 $y=g(x)$ 切于点 $(1,c)$，求 a,b,c 的值；

（Ⅲ）若 $f(x)\geq g(x)$ 恒成立，求 $a+b$ 的最大值.

21.北京市朝阳区高三年级第二次综合练习 数学学科测试（文史类）

已知函数 $f(x)=x\ln x$，$g(x)=\frac{a}{2}x^2+x-a\ (a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）若直线 $x=m\ (m>0)$ 与曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 分别交于 M,N 两点.设曲线 $y=f(x)$ 在点 M 处的切线为 l_1，$y=g(x)$ 在点 N 处的切线为 l_2.

（i）当 $m=\mathrm{e}$ 时，若 $l_1\perp l_2$，求 a 的值；

（ii）若 $l_1\,/\!/\,l_2$，求 a 的最大值；

（Ⅱ）设函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 在其定义域内恰有两个不同的极值点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$.若 $\lambda>0$，且 $\lambda\ln x_2-\lambda>1-\ln x_1$ 恒成立，求 λ 的取值范围.

22. **北京市东城区2016-2017学年度第二学期高三综合练习（二）数学（理科）**

设函数 $f(x)=(x^2+ax-a)\cdot\mathrm{e}^{-x}(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）设 $g(x)=x^2-x-1$，若对任意的 $t\in[0,2]$，存在 $s\in[0,2]$ 使得 $f(s)\geq g(t)$ 成立，求 a 的取值范围.

1.2017 年北京市海淀区高考数学零模试卷（理科）

已知函数$f(x)=\frac{e^x}{x}$.

（Ⅰ）若曲线 y=f（x）与直线 y=kx 相切于点 P，求点 P 的坐标；

（Ⅱ）当 a≤e 时，证明：当 x∈（0，+∞），f（x）≥a（x﹣lnx）.

【考点】利用导数求闭区间上函数的最值；利用导数研究曲线上某点切线方程.

【分析】（Ⅰ）设点 P 的坐标为（x_0，y_0），$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，由题意列出方程组，能求出点 P 的坐标.

（Ⅱ）设函数 g（x）=f（x）﹣a（x﹣lnx）$=\frac{e^x}{x}-a(x-\ln x)$，$g'(x)=\frac{(e^x-ax)(x-1)}{x^2}$，x∈（0，+∞），设 h（x）$=e^x$﹣ax，x∈（0，+∞），则 h'（x）$=e^x$﹣a，由此利用分类讨论和导数性质能证明：当 x∈（0，+∞），f（x）≥a（x﹣lnx）.

【解答】解：（Ⅰ）设点 P 的坐标为（x_0，y_0），$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，

由题意知$\begin{cases}\frac{e^{x_0}(x_0-1)}{x_0^2}=k\\ \frac{e^{x_0}}{x_0}=kx_0\end{cases}$解得 $x_0=2$，所以$y_0=\frac{e^{x_0}}{x_0}=\frac{e^2}{2}$，

从而点 P 的坐标为$(2,\ \frac{e^2}{2})$.

证明：（Ⅱ）设函数 g（x）=f（x）﹣a（x﹣lnx）$=\frac{e^x}{x}-a(x-\ln x)$，

$g'(x)=\frac{(e^x-ax)(x-1)}{x^2}$，x∈（0，+∞），

设 h（x）$=e^x$﹣ax，x∈（0，+∞），则 h'（x）$=e^x$﹣a，

①当 a≤1 时，因为 x>0，所以 e^x>1，所以 h'（x）$=e^x$﹣a>0，

所以 h（x）在区间（0，+∞）上单调递增，所以 h（x）>h（0）=1>0；

②当 1<a≤e 时，令 h'（x）=0，则 x=lna，

所以 x∈（0，lna），h'（x）<0；x∈（lna，+∞），h'（x）>0.

所以 h（x）≥h（lna）=a（1﹣lna）≥0，

由①②可知：x∈（0，+∞）时，有 h（x）≥0，

所以有：

x	（0，1）	1	（1，+∞）
g'（x）	-	0	+
g（x）	↓	极小值	↑

所以 g（x）$_{min}$=g（1）=e - a≥0，从而有当 x∈（0，+∞）时，f（x）≥a（x - lnx）.

2. **怀柔区 2016—2017 学年度高三第二学期适应性练习数学（文史类）**

已知函数 $f\left(x\right)=ax+\ln x(a\in R)$.

（1）若 $a=2$，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

（2）求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（3）若对任意 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f\left(x\right)<2$ 成立，求实数 a 的取值范围.

3.怀柔区 2016—2017 学年度高三第二学期适应性练习数学（理工类）

已知函数 $f\left(x\right)=ax+\ln x(a\in R)$.

（1）求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）设 $g\left(x\right)=x^2-2x+2$，若对任意 $x_1\in(0,+\infty)$，均存在 $x_2\in[0,1]$，使得 $f(x_1)<g(x_2)$，

求 a 的取值范围.

4.西城区高三统一测试数学（文科）

已知函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2$. 设 l 为曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线，其中 $x_0\in[-1,1$.

（Ⅰ）求直线 l 的方程（用 x_0 表示）；

（Ⅱ）求直线 l 在 y 轴上的截距的取值范围；

（Ⅲ）设直线 $y=a$ 分别与曲线 $y=f(x)$ 和射线 $y=x-1\,(x\in[0,+\infty))$ 交于 M,N 两点，求 $|MN|$ 的最小值及此时 a 的值.

解：（Ⅰ） 对 $f(x)$ 求导数，得 $f'(x)=e^x-x$， [1 分]

所以切线 l 的斜率为 $f'(x_0)=e^{x_0}-x_0$， [2 分]

由此得切线l的方程为：$y-(\mathrm{e}^{x_0}-\frac{1}{2}x_0^2)=(\mathrm{e}^{x_0}-x_0)(x-x_0)$，

即 $y=(\mathrm{e}^{x_0}-x_0)x+(1-x_0)\mathrm{e}^{x_0}+\frac{1}{2}x_0^2$. [3 分]

（Ⅱ） 由（Ⅰ）得，直线l在y轴上的截距为$(1-x_0)\mathrm{e}^{x_0}+\frac{1}{2}x_0^2$. [4 分]

设 $g(x)=(1-x)\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2$， $x\in[-1,1]$.

所以 $g'(x)=x(1-\mathrm{e}^x)$，令 $g'(x)=0$，得 $x=0$.

$g(x)$， $g'(x)$ 的变化情况如下表：

x	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	$\frac{2}{\mathrm{e}}+\frac{1}{2}$	↘	1	↘	$\frac{1}{2}$

所以函数$g(x)$在$[-1,1]$上单调递减， [6 分]

所以$[g(x)]_{\max}=g(-1)=\frac{2}{\mathrm{e}}+\frac{1}{2}$， $[g(x)]_{\min}=g(1)=\frac{1}{2}$，

所以直线l在y轴上的截距的取值范围是$[\frac{1}{2},\frac{2}{\mathrm{e}}+\frac{1}{2}]$. [8 分]

（Ⅲ）过M作x轴的垂线，与射线$y=x-1$交于点Q，

所以△MNQ是等腰直角三角形. [9 分]

所以 $|MN|=|MQ|=|f(x)-g(x)|=|\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^2-x+1|$. [10 分]

设 $h(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^2-x+1$， $x\in[0,+\infty)$，

所以 $h'(x)=\mathrm{e}^x-x-1$.

令 $k(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，则$k'(x)=\mathrm{e}^x-1>0\ (x>0)$，

所以 $k(x)=h'(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，

所以 $h'(x)\geqslant h'(0)=0$，

从而 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增， [12

分]

所以 $[h(x)]_{\min}=h(0)=2$，此时 $M(0,1)$， $N(2,1)$.

所以 $|MN|$ 的最小值为2，此时 $a=1$. [13

分]

5.西城区高三统一测试数学（理科） 2017.4

已知函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2$. 设 l 为曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线，其中 $x_0\in[-1,1]$.

（Ⅰ）求直线 l 的方程（用 x_0 表示）;

（Ⅱ）设 O 为原点，直线 $x=1$ 分别与直线 l 和 x 轴交于 A,B 两点, 求△ AOB 的面积的最小值.

解:（Ⅰ）对 $f(x)$ 求导数，得 $f'(x)=e^x-x$， [1 分]

所以切线 l 的斜率为 $f'(x_0)=e^{x_0}-x_0$， [2 分]

由此得切线 l 的方程为: $y-(e^{x_0}-\frac{1}{2}x_0^2)=(e^{x_0}-x_0)(x-x_0)$，

即 $y=(e^{x_0}-x_0)x+(1-x_0)e^{x_0}+\frac{1}{2}x_0^2$. [4

分]

（Ⅱ）依题意，切线方程中令 $x=1$，

得 $y=(e^{x_0}-x_0)+(1-x_0)e^{x_0}+\frac{1}{2}x_0^2=(2-x_0)(e^{x_0}-\frac{1}{2}x_0)$. [5 分]

所以 $A(1,y)$， $B(1,0)$.

所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OB|\cdot|y|$

$=\frac{1}{2}|(2-x_0)(e^{x_0}-\frac{1}{2}x_0)|$

$=|(1-\frac{1}{2}x_0)(e^{x_0}-\frac{1}{2}x_0)|$， $x_0\in[-1,1]$. [7 分]

设 $g(x)=(1-\frac{1}{2}x)(e^x-\frac{1}{2}x)$， $x\in[-1,1]$. [8 分]

则 $g'(x)=-\frac{1}{2}(e^x-\frac{1}{2}x)+(1-\frac{1}{2}x)(e^x-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}(x-1)(e^x-1)$. [10

分]

令 $g'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=1$.

$g(x)$， $g'(x)$ 的变化情况如下表：

x	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\frac{3}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{e})$	↘	1	↗	$\frac{1}{2}(e-\frac{1}{2})$

所以 $g(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递减；在 $(0,1)$ 单调递增， [12

分]

所以 $g(x)_{\min}=g(0)=1$，

从而 $\triangle AOB$ 的面积的最小值为 1.

6.顺义区 2017 届高三第二次统练数学试卷（文科）

已知函数 $f(x)=1+\ln x-ae^x$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与 x 轴平行，求实数 a 的值；

（Ⅱ）若对任意 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $f(x)\le 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

19.解：（Ⅰ）$\because f(x)=1+\ln x-ae^x$，$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}-ae^x$， $x\in(0,+\infty)$.---------------2 分

由于曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与 x 轴平行，所以 $f'(1)=1-ae=0$，

解得 $a=\frac{1}{e}$.---4 分

（Ⅱ）由条件知对任意 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $f(x)\le 0$ 恒成立，

此命题等价于 $a\ge\frac{1+\ln x}{e^x}$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立.---------------------------5 分

令 $h(x)=\frac{1+\ln x}{e^x}$ ， $x\in(0,+\infty)$

$$h'(x)=\frac{\frac{1}{x}-1-\ln x}{e^x}=\frac{1}{e^x}\left(\frac{1}{x}-1-\ln x\right),\quad x\in(0,+\infty)$$ ----------------------------6 分

令 $g(x)=\frac{1}{x}-1-\ln x$， $x\in(0,+\infty)$，则 $g'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$， 且 $g'(x)<0$ -----------7 分

$\therefore$函数 $g(x)=\frac{1}{x}-1-\ln x$ 在 $x\in(0,+\infty)$上单调递减.------------------------------------8 分

注意到 $g(1)=0$，即 $x=1$是 $g(x)$的零点---9 分

而当 $x\in(0,1)$时，$g(x)=\frac{1}{x}-1-x\ln x>0$；当 $x\in(1,+\infty)$时，$g(x)<0$.

又 $e^x>0$，所以当 $x\in(0,1)$时，$h'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$时，$h'(x)<0$. --------11 分

则当 x 变化时，$h'(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\nearrow$	极大值 $\frac{1}{e}$	$\searrow$

因此，函数 $h(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$取得最大值 $h(1)=\frac{1}{e}$，

所以实数 $a\geq\frac{1}{e}$.　　　---------13 分

7.顺义区 2017 届高三第二次统练数学试卷（理科）

已知函数 $f(x)=pe^{-x}+x+1\,(p\in R)$.

（Ⅰ）当实数 $p=e$时，求曲线 $y=f(x)$在点 $x=1$处的切线方程；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$的单调区间；

（Ⅲ）当 $p=1$时，若直线 $y=mx+1$与曲线 $y=f(x)$没有公共点，求实数 m 的取值范围.

18.解：（Ⅰ）当 $p=e$ 时，$f(x)=e^{-x+1}+x+1$，$f'(x)=-e^{-x+1}+1$

$\therefore f(1)=3$，$f'(1)=0$

$\therefore$曲线 $y=f(x)$在点 $x=1$处的切线方程为 $y=3$　　----------------------------4 分

（Ⅱ）$\because f(x)=pe^{-x}+x+1$，$\therefore f'(x)=-pe^{-x}+1$--------------------------------5 分

①当 $p\leq 0$ 时，$f'(x)>0$，则函数 $f(x)$ 在的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$；
----------------------------------6 分

②当 $p>0$时，令 $f'(x)=0$，得 $e^x=p$，解得 $x=\ln p$.--------------------7 分

则当 x 变化时，$f'(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty,\ln p)$	$\ln p$	$(\ln p,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$2+\ln p$	$\nearrow$

------------------------------9 分

所以，当 $p>0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(\ln p,+\infty)$，单调递减区间为 $(-\infty,\ln p)$.

------------------------------10 分

（III）当 $p=1$ 时，$f(x)=e^{-x}+x+1$，直线 $y=mx+1$ 与曲线 $y=f(x)$ 没有公共点，

等价于关于 x 的方程 $mx+1=e^{-x}+x+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上没有实数解，

即关于 x 的方程 $(m-1)x=e^{-x}$（*）在 $(-\infty,+\infty)$ 上没有实数解.

①当 $m=1$ 时，方程（*）化为 $e^{-x}=0$，

显然在 $(-\infty,+\infty)$ 上没有实数解. --------------------------------12 分

②当 $m\neq1$ 时，方程（*）化为 $xe^{x}=\dfrac{1}{m-1}$，令 $g(x)=xe^{x}$，则有 $g'(x)=(1+x)e^{x}$.

令 $g'(x)=0$，得 $x=-1$，则当 x 变化时，$g'(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{e}$	$\nearrow$

当 $x=-1$ 时，$g(x)_{\min}=-\dfrac{1}{e}$，同时当 x 趋于 $+\infty$ 时，$g(x)$ 趋于 $+\infty$，

从而 $g(x)$ 的值域为 $\left[-\dfrac{1}{e},+\infty\right)$. ----------------------------------13 分

所以当 $\dfrac{1}{m-1}<-\dfrac{1}{e}$ 时，方程（*）无实数解，解得实数 m 的取值范围是 $(1-e,1)$.

综合①②可知实数 m 的取值范围是 $(1-e,1]$. ----------------------------14 分

8.石景山区 2017 年高三统一练习数 学（文）试 卷

已知函数 $f(x)=e^{x}$.

（Ⅰ）过原点作曲线 $y=f(x)$ 的切线，求切线方程；

（Ⅱ）当$x>0$时，讨论曲线$y=f(x)$与曲线$y=mx^2(m>0)$公共点的个数.

解：（Ⅰ）由题意，设切点为$M(x_0,y_0)$，由题意可得

$f'(x_0)=\dfrac{y_0-0}{x_0-0}$，即$e^{x_0}=\dfrac{e^{x_0}}{x_0}$，解得$x_0=1$，即切点$M(1,e)$.

所以$k=\dfrac{e-0}{1-0}=e$，所以切线方程为$y=ex$. ....5 分

（Ⅱ）当 $x>0,m>0$时， 曲线$y=f(x)$与曲线$y=mx^2(m>0)$ 的公共点个数

即方程$f(x)=mx^2$根的个数.

由$f(x)=mx^2$得$m=\dfrac{e^x}{x^2}$.

令$g(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$，则$g'(x)=\dfrac{xe^x(x-2)}{x^4}$，令$g'(x)=0$，解得$x=2$.

随x变化时，$g'(x)$，$g(x)$的变化情况如下表：

x	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$g'(x)$	–	0	+
$g(x)$	↘	极小值$g(2)$	↗

其中$g(2)=\dfrac{e^2}{4}$.所以$g(2)$为$g(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$在$(0,+\infty)$的最小值.

所以对曲线$y=f(x)$与曲线$y=mx^2(m>0)$公共点的个数，讨论如下：

当$m\in(0,\dfrac{e^2}{4})$时，有0个公共点；　当$m=\dfrac{e^2}{4}$时，有1个公共点；

当$m\in(\dfrac{e^2}{4},+\infty)$时，有2个公共点. ....13 分

9.石景山区 2017 年高三统一练习数 学（理）试 卷

已知函数$f(x)=\ln x$.

（Ⅰ）求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

（Ⅱ）求证：当 $x>0$ 时，$f(x)\geqslant 1-\frac{1}{x}$；

（Ⅲ）若 $x-1>a\ln x$ 对任意 $x>1$ 恒成立，求实数 a 的最大值.

18.（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）$f'(x)=\frac{1}{x}$，$f'(1)=1$，　又 $f(1)=0$，所以切线方程为 $y=x-1$；　……3 分

（Ⅱ）由题意知 $x>0$，令 $g(x)=f(x)-(1-\frac{1}{x})=\ln x-1+\frac{1}{x}$.

$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$　………5 分

令 $g'(x)=\frac{x-1}{x^2}=0$，解得 $x=1$.　………6 分

易知当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，易知当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$.

即 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增　………7 分

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=0$，$g(x)\geq g(1)=0$

即 $g(x)=f(x)-(1-\frac{1}{x})\geq 0$，即 $f(x)\geq(1-\frac{1}{x})$.　……8 分

（Ⅲ）设 $h(x)=x-1-a\ln x(x\geq 1)$，依题意，对于任意 $x>1$, $h(x)>0$ 恒成立.

$h'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$，　………9 分

$a\leq 1$ 时，$h'(x)>0$, $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调增，

当 $x>1$ 时，$h(x)>h(1)=0$，满足题意.　………11 分

$a>1$ 时，随 x 变化，$h'(x)$，$h(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(1,a)$	a	$(a,+\infty)$
$h'(x)$	−	0	+
$h(x)$	↘	极小值	↗

$h(x)$ 在 $(1,a)$ 上单调递减，　所以 $g(a)<g(1)=0$

即当 $a>1$ 时，总存在 $g(a)<0$，不合题意.　………12 分

综上所述，实数 a 的最大值为 1.　………13 分

10.海淀区高三年级第二学期期中练习数学（文科）

已知函数 $f(x)=e^x-x^2+ax$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线与 x 轴平行.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）若 $g(x)=e^x-2x-1$，求函数 $g(x)$ 的最小值；

（Ⅲ）求证：存在 $c<0$, 当 $x>c$ 时，$f(x)>0$.

（Ⅰ）$f'(x)=e^x-2x+a$，

由已知可得 $f'(0)=0$，

所以 $1+a=0$，得 $a=-1$.

（Ⅱ） $g'(x)=\mathrm{e}^x-2$，令 $g'(x)=0$，得 $x=\ln 2$，

所以 x， $g'(x)$， $g(x)$ 的变化情况如下表所示：

x	$(-\infty,\ln 2)$	$\ln 2$	$(\ln 2,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	极小值	↗

所以 $g(x)$ 的最小值为 $g(\ln 2)=\mathrm{e}^{\ln 2}-2\ln 2-1=1-2\ln 2$.

（Ⅲ）证明：显然 $g(x)=f'(x)$ 且 $g(0)=0$，

由（Ⅱ）知， $g(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2)$ 上单调递减，在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增.

又 $g(\ln 2)<0$， $g(2)=\mathrm{e}^2-5>0$，

由零点存在定理，存在唯一实数 $x_0\in(\ln 2,+\infty)$，满足 $g(x_0)=0$，

即 $\mathrm{e}^{x_0}-2x_0-1=0$， $\mathrm{e}^{x_0}=2x_0+1$，

综上， $g(x)=f'(x)$ 存在两个零点，分别为 0， x_0.

所以

$x<0$ 时， $g(x)>0$，即 $f'(x)>0$， $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增；

$0<x<x_0$ 时， $g(x)<0$，即 $f'(x)<0$， $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减；

$x>x_0$ 时， $g(x)>0$，即 $f'(x)>0$， $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(0)$ 是极大值， $f(x_0)$ 是极小值，

$f(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-x_0^{\,2}-x_0=2x_0+1-x_0^{\,2}-x_0=-x_0^{\,2}+x_0+1=-(x_0-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}$，

因为 $g(1)=\mathrm{e}-3<0,g(\frac{3}{2})=\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}-4>0$，

所以 $x_0\in(1,\frac{3}{2})$，所以 $f(x_0)>0$，

因此 $x\geq 0$ 时， $f(x)>0$.

因为 $f(0)=1$ 且 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，

所以一定存在 $c<0$ 满足 $f(c)>0$，

所以存在 $c<0$，当 $x>c$ 时， $f(x)>0$.

11.海淀区高三年级第二学期期中练习数学（理科）　　　　2017.4

已知函数 $f(x)=x^2-2ax+4(a-1)\ln(x+1)$，其中实数 $a<3$.

（Ⅰ）判断 $x=1$ 是否为函数 $f(x)$ 的极值点，并说明理由；

（Ⅱ）若 $f(x)\le 0$ 在区间 $[0,1]$ 上恒成立，求 a 的取值范围.

18.（本小题满分 13 分）

解：法 1：

（Ⅰ）由 $f(x)=x^2-2ax+4(a-1)\ln(x+1)$ 可得

函数定义域为 $(-1,+\infty)$，

$$f'(x)=2x-2a+\frac{4(a-1)}{x+1}$$

$$=\frac{2[x^2+(1-a)x+(a-}{x+1}$$

$$=\frac{2(x-1)[x-(a-2)]}{x+1},$$

由 $f'(x)=0$ 得 $x_1=1, x_2=a-2$.

因为 $a<3$，所以 $a-2<1$.

当 $a\le 1$ 时，$a-2\le -1$，所以 $f'(x)$，$f(x)$ 的变化如下表：

x	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

当 $1<a<3$ 时，$-1<a-2<1$，

$f'(x)$，$f(x)$ 的变化如下表：

x	$(-1,a-2)$	$a-2$	$(a-2,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

综上，$x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极值点，且为极小值点.

（Ⅱ）易知 $f(0)=0$，

由（Ⅰ）可知，

当$a\le 2$时，函数$f(x)$在区间$[0,1]$上单调递减，

所以有$f(x)\le 0$恒成立；

当$2<a<3$时，函数$f(x)$在区间$[0,a-2]$上单调递增，

所以$f(a-2)>f(0)=0$，所以不等式不能恒成立；

所以$a\le 2$时有$f(x)\le 0$在区间$[0,1]$上恒成立.

法 2：

（Ⅰ）由$f(x)=x^2-2ax+4(a-1)\ln(x+1)$可得

函数定义域为$(-1,+\infty)$，

$$f'(x)=2x-2a+\frac{4(a-1)}{x+1}$$

$$=\frac{2[x^2+(1-a)x+(a-2)]}{x+1}$$

令$g(x)=x^2+(1-a)x+(a-2)$，经验证$g(1)=0$，

因为$a<3$，所以$g(x)=0$的判别式$\Delta=(1-a)^2-4(a-2)=a^2-6a+9=(a-3)^2>0$，

{说明：写明$\Delta=(1-a)^2-4(a-2)=a^2-6a+9=(a-3)^2\ne 0$也可以}

由二次函数性质可得，1 是$g(x)=x^2+(1-a)x+(a-2)$的异号零点，

所以 1 是$f'(x)$的异号零点，

所以$x=1$是函数$f(x)$的极值点.

（Ⅱ）易知$f(0)=0$，

因为$f'(x)=\dfrac{2(x-1)[x-(a-2)]}{x+1}$，

又因为$a<3$，所以$a-2<1$，

所以当$a\le 2$时，在区间$[0,1]$上$f'(x)<0$，所以函数$f(x)$单调递减，

所以有$f(x)\le 0$恒成立；

当$2<a<3$时，在区间$[0,a-2]$上$f'(x)>0$，所以函数$f(x)$单调递增，

所以$f(a-2)>f(0)=0$，所以不等式不能恒成立；

所以 $a \le 2$ 时有 $f(x) \le 0$ 在区间 $[0,1]$ 上恒成立.

12.丰台区 2017 年高三年级第二学期综合练习（一）数　学（文科）

已知函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$，$A(x_1,m)$，$B(x_2,m)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上两个不同的点.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间，并写出实数 m 的取值范围；

（Ⅱ）证明：$x_1+x_2>0$.

解：　$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

（Ⅰ）$f'(x)=-\dfrac{x}{e^x}$，

由 $f'(x)=0$ 得，$x=0$，

由 $f'(x)>0$ 得，$x<0$，

由 $f'(x)<0$ 得，$x>0$，

所以 $f(x)$ 的单调增区间为（-∞，0），单调减区间为（0，+∞）.

m 的取值范围是 $(0,1)$.　　　　　　　　　　　　　　　　……………………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$x_1\in(-1,0)$，要证 $x_2>-x_1>0$，只需证 $f(x_2)<f(-x_1)$

因为 $f(x_1)=f(x_2)=m$，所以只需证 $f(x_1)<f(-x_1)$，

只需证 $\dfrac{x_1+1}{e^{x_1}}<\dfrac{-x_1+1}{e^{-x_1}}$，只需证 $(x_1-1)e^{2x_1}+x_1+1<0$（$x_1\in(-1,0)$）

令 $h(x)=(x-1)e^{2x}+x+1<0$，则 $h'(x)=(2x-1)e^{2x}+1$，

因为 $(h'(x))'=4xe^{2x}<0$，

所以 $h'(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，所以 $h'(x)>h'(0)=0$，

所以 $h(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，所以 $h(x)<h(0)=0$，

所以 $e^{2x}+\dfrac{x+1}{x-1}>0$，故 $x_1+x_2>0$　　　　　　　　　　　　……………………13 分

13. **丰台区 2017 年高三年级第二学期综合练习（一）数　学（理科）**

已知函数 $f(x)=\ln(kx)+\dfrac{1}{x}-k\ (k>0)$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）对任意 $x\in[\dfrac{1}{k},\dfrac{2}{k}]$，都有 $x\ln(kx)-kx+1\le mx$，求 m 的取值范围.

解：由已知得，$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

（Ⅰ） $f'(x)=\frac{x-1}{x^2}$，

令 $f'(x)>0$，得 $x>1$，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<1$.

所以函数 $f(x)$ 的单调减区间是 $(0,1)$，单调增区间是

$(1,+\infty)$. ………………5 分

（Ⅱ）由 $x\ln(kx)-kx+1\le mx$，

得 $\ln(kx)+\frac{1}{x}-k\le m$，即 $m\ge f(x)_{max}$.

由（Ⅰ）知，

（1）当 $k\ge 2$ 时，$f(x)$ 在 $[\frac{1}{k},\frac{2}{k}]$ 上单调递减，所以 $f(x)_{max}=f(\frac{1}{k})=0$，所以 $m\ge 0$；

（2）当 $0<k\le 1$ 时，$f(x)$ 在 $[\frac{1}{k},\frac{2}{k}]$ 上单调递增，所以 $f(x)_{max}=f(\frac{2}{k})=\ln 2-\frac{k}{2}$，

所以 $m\ge \ln 2-\frac{k}{2}$；

（3）当 $1<k<2$ 时，$f(x)$ 在 $[\frac{1}{k},1)$ 上单调递减，在 $(1,\frac{2}{k}]$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{max}=max\left\{f(\frac{1}{k}),f(\frac{2}{k})\right\}$.

又 $f(\frac{1}{k})=0$，$f(\frac{2}{k})=\ln 2-\frac{k}{2}$，

① 若 $f(\frac{2}{k})\ge f(\frac{1}{k})$，即 $\ln 2-\frac{k}{2}\ge 0$，所以 $1<k<2\ln 2$，此时 $f(x)_{max}=f(\frac{2}{k})=\ln 2-\frac{k}{2}$，

所以 $m\ge \ln 2-\frac{k}{2}$.

② 若 $f(\frac{2}{k})<f(\frac{1}{k})$，即 $\ln 2-\frac{k}{2}<0$，所以 $2\ln 2\le k<2$，此时 $f(x)_{max}=0$，所以 $m\ge 0$

综上所述，当 $k\ge 2\ln 2$ 时，$m\ge 0$；

当 $0<k<2\ln 2$ 时，

$m\ge \ln 2-\frac{k}{2}$. ………………13 分

14.房山区 2017 年高三一模试卷高三数学（文）

已知函数 $f(x)=e^x-ax$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点（1，$f(1)$）处的切线与直线 $y=ax+2$ 平行，求实数 a 的值；

（Ⅱ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅲ）当 $0<a<1$ 时，证明：曲线 $y=f(x)$ 在直线 $y=(e-1)x$ 的上方.

19.（I） $f(x)' = e^x - a$

因为函数 $y = f(x)$ 在点（1， $f(1)$ ）处的切线平行于直线 $y = ax + 2$

所以 k= $f(1)' = e^1 - a = a$

所以 $a = \frac{1}{2}e$ ......3 分

（II）当 $a \le 0$ 时， $f(x)' > 0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 R 上单调递增

当 $a > 0$ 时，令 $f(x)' = e^x - a$ =0,解得 $x = \ln a$

x	$(-\infty, \ln a)$	$\ln a$	$(\ln a, +\infty)$
$f(x)'$	—	0	+
$f(x)$	↓		↑

综上所述：当 $a \le 0$ 时， $f(x)$ 在 R 上单调递增

当 $a > 0$ 时， $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减，

在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增 ......8 分

（III）当 $0 < a < 1$ 时，欲证曲线 $y = f(x)$ 在直线 $y=(e-1)x$ 的上方

只需证明：$F(x) = e^x - ax - (e-1)x$ 的最小值大于零

$F'(x) = e^x - a - (e-1)$，令 $F'(x) = e^x - a - (e-1) = 0$，则

$e^x = a + e - 1$ ，因为 $0 < a < 1$ 时，所以

$a + e - 1 > 0$ ，所以 x=ln(a+e-1)

x	$(-\infty, \ln(a+e-1))$	$\ln(a+e-1)$	$(\ln(a+e-1), +\infty)$
$f(x)'$	—	0	+
$f(x)$	↓	$(a+e-1)(1-\ln(a+e-1))$	↑

因为 $0 < a < 1$，所以 $0 < a + e - 1 < e$，所以 $1 - \ln(a+e-1) > 0$,

所以 $F(x)=e^x-ax-(e-1)x$ 的最小值大于零

所以曲线 $y=f(x)$ 在直线 y=(e-1)x 的上方　　　　　　　　　　……13 分

15.房山区 2017 年高三一模试卷高三数学（理）

已知函数 $f(x)=x-1+ae^x$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点（1， $f(1)$）处的切线平行于 x 轴，求 a 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的极值；

（Ⅲ）当 $a=1$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=kx-1$ 没有公共点，求 k 的取值范围.

18.（I） $f'(x)=1+ae^x$

因为 $f(x)=x-1+ae^x$，在点（1， $f(1)$ ）处的切线平行于 x 轴，

所以 k= $f'(1)=1+ae^1=0$

所以 $a=-\dfrac{1}{e}$

（II）当 $a\geq 0$ 时，令 $f'(x)>0$ 恒成立，所以函数无极值

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=1+ae^x$=0，解得 $x=\ln(-\dfrac{1}{a})$

x	$(-\infty,\ln(-\dfrac{1}{a}),$	$\ln(-\dfrac{1}{a}),$	$(\ln(-\dfrac{1}{a}),+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\uparrow$	$\ln(-\dfrac{1}{a})-2$	$\downarrow$

$f(x)_{极大值}=\ln(-\dfrac{1}{a})-2$

(III)法一、当 a=1 时， $f(x)=x-1+e^x$ 与 $y=kx-1$ 无公共点

只需证 $h(x)=x(1-k)+e^x$ 无零点

即 $h(x)=0$ 无根，即 $e^x=(k-1)x$，由数形结合知

当 $k=1$ 时无零点

当 $k<1$ 时有一个零点

当 $k>1$ 时， e^x 与 $(k-1)x$ 相切时，有一个零点

设切点(x_0, y_0)，$e^{x_0} = \dfrac{e^{x_0}}{x_0}$，所以$x_0 = 1$，所以切点为（1，e）

所以 k-1=e，所以$k = 1 + e$

综上所述$1 \le k < e + 1$

法二、当 a=1 时，$f(x) = x - 1 + e^x$与$y = kx - 1$无公共点

只需证$h(x) = x(1-k) + e^x$无零点

$h'(x) = 1 - k + e^x$

(1)当k=1时，$h(x)$=e^x，无零点

(2)当$k < 1$时，$h'(x) > 0$，$h(x)$单调递增，

$h(\frac{1}{k-1}) = -1 + e^{\frac{1}{k-1}} < 0$，$h(0) =$

所以$h(x)$有一个零点

(3)当$k > 1$时，令$h'(x) = e^x - k + 1 = 0$

解得$x = \ln(k-1)$

x	$(-\infty, \ln(k-1))$,	$\ln(k-1)$,	$(\ln(k-1), +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↓	极小	↑

$h(x)_{极小} = h(\ln(k-1) = (1-k)\ln((k-1) - 1)$

当$\ln(k-1) = 1$，即$k = e + 1$，$h'(x)_{极小} = 0$，有一个零点

当$\ln(k-1) < 1$，即$1 < k < e + 1$，$h'(x)_{极小} > 0$，无零点

当$\ln(k-1) > 1$，即$k > e + 1$，$h'(x)_{极小} < 0$，$h(0) = 1 > 0$，一定有零点

综上所述：$1 \le k < e + 1$

16. 北京市东城区 2016-2017 学年度第二学期高三综合练习（一）数学（文科）

设函数$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + ax$，$a \in \mathbf{R}$.

（Ⅰ）若$x = 2$是$f(x)$的极值点，求a的值，并讨论$f(x)$的单调性；

(Ⅱ)已知函数 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}ax^2+\frac{2}{3}$，若 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有零点，求 a 的取值范围；

(Ⅲ)设 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，试讨论过两点 $(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$ 的直线能否过点 $(1,1)$，若能，求 a 的值；若不能，说明理由.

解析：（Ⅰ）由 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+ax$ 求得 $f'(x)=x^2-x+a$

$\therefore f'(2)=4-2+a=0\Rightarrow a=-2$，代入 $f'(x)=x^2-x-2=(x-2)(x+1)$

令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=2$，$x_2=-1$

$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,-1),(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(-1,2)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

……………………4 分

（Ⅱ）由 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}ax^2+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}x^3-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a)x^2+ax+\frac{2}{3}$

求得 $g'(x)=x^2-(1+a)x+a=(x-1)(x-a)$

$\therefore$ 当 $a\geq 1$ 时，当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$ 恒成立，$g(x)$ 单调递增，又 $g(0)=\frac{2}{3}>0$

此时 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内没有零点；

当 $0<a<1$ 时，当 $x\in(0,a)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $x\in(a,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减．又 $g(0)=\frac{2}{3}>0$

此时欲使 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有零点，必有 $g(1)<0$.

$g(1)<0\Rightarrow\frac{1}{3}-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a)+a+\frac{2}{3}=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}<0\Rightarrow a<-1$　　无解

当 $a\leq 0$ 时，当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$ 恒成立，$g(x)$ 单调递减

此时欲使 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有零点，必有 $g(1)<0\Rightarrow a<-1$.

综上，a 的取值范围为 $(-\infty,-1)$.

……………………9 分

(Ⅲ)不能．原因如下：

设 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，则导函数 $f'(x)=x^2-x+a$ 有两个不同的零点

$\therefore \Delta>0\Rightarrow 1-4a>0\Rightarrow a<\frac{1}{4}$，且 x_1，x_2 为方程 $x^2-x+a=0$ 的两根

$x_1^2-x_1+a=0\Rightarrow x_1^2=x_1-a$

$\therefore f(x_1)=\frac{1}{3}x_1^3-\frac{1}{2}x_1^2+ax_1=\frac{1}{3}x_1(x_1-a)-\frac{1}{2}x_1^2+ax_1=-\frac{1}{6}x_1^2+\frac{2}{3}ax_1=-\frac{1}{6}(x_1-a)+\frac{2}{3}ax_1$

$\therefore f(x_1)=(\frac{2}{3}a-\frac{1}{6})x_1+\frac{1}{6}a$　　同理 $f(x_2)=(\frac{2}{3}a-\frac{1}{6})x_2+\frac{1}{6}a$

由此可知过两点$(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$的直线方程为$y=(\frac{2}{3}a-\frac{1}{6})x+\frac{1}{6}a$

若直线过点$(1,1)$，则$1=(\frac{2}{3}a-\frac{1}{6})+\frac{1}{6}a\Rightarrow\frac{5}{6}a=\frac{7}{6}\Rightarrow a=\frac{7}{5}$

前面已经讨论过若$f(x)$有两个极值点，则$a<\frac{1}{4}$，显然不合题意.

综上，过两点$(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$的直线不能过点$(1,1)$.

……………………14 分

17.北京市东城区 2016-2017 学年度第二学期高三综合练习（一）数学理科）

已知函数$f(x)=2\ln x+\frac{1}{x}-mx(m\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）当$m=-1$时，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程;

（Ⅱ）若$f(x)$在$(0,+\infty)$上为单调递减，求m的取值范围;

（Ⅲ）设$0<a<b$，求证：$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$.

（18）（共 13 分）

解：（Ⅰ）$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

当$m=-1$时，$f(x)=2\ln x+\frac{1}{x}+x$，

所以$f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+1$.

因为$f(1)=2$且$f'(1)=2$，

所以曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$2x-y=0$. …………4 分

（Ⅱ）若函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上为单调递减，

则$f'(x)\le 0$在$(0,+\infty)$上恒成立.

即$\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-m\le 0$在$(0,+\infty)$上恒成立.

即$\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\le m$在$(0,+\infty)$上恒成立.

设 $g(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}(x>0)$，

则 $m\geq[g(x)]_{\max}$.

因为 $g(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}=-(\frac{1}{x}-1)^2+1(x>0)$，

所以当 $x=1$ 时，$g(x)$ 有最大值 1 .

所以 m 的取值范围为 $[1,+\infty)$. ……………………9 分

（III）因为 $0<a<b$，不等式 $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$ 等价于 $\ln b-\ln a<\frac{b-a}{\sqrt{ab}}$.

即 $\ln\frac{b}{a}<\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}$，令 $\sqrt{\frac{b}{a}}=t(t>1)$，原不等式转化为 $2\ln t<t-\frac{1}{t}$.

令 $h(t)=2\ln t+\frac{1}{t}-t$，

由（II）知 $f(x)=2\ln x+\frac{1}{x}-x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $h(t)=2\ln t+\frac{1}{t}-t$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

所以，当 $t>1$ 时，$h(t)<h(1)=0$.

即当 $t>1$ 时，$2\ln t+\frac{1}{t}-t<0$ 成立.

所以，当时 $0<a<b$，不等式 $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$ 成立. ……………………13 分

18.北京市朝阳区 2017 届高三第一次（3 月）综合练习数学（理）试题

已知函数 $f(x)=\ln x-ax-1(a\in\mathbf{R}), g(x)=xf(x)+\frac{1}{2}x^2+2x$.

（I）求 $f(x)$ 的单调区间；

（II）当 $a=1$ 时，若函数 $g(x)$ 在区间 $(m,m+1)(m\in\mathbf{Z})$ 内存在唯一的极值点，求 m 的值.

(18)（本小题满分 13 分）

解：（I）由已知得 $x>0$，$f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$.

（i）当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，则函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为增函数；

（ii）当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $0<x<\frac{1}{a}$；

由 $f'(x)<0$，得 $x>\frac{1}{a}$；

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\frac{1}{a})$，单调递减区间为 $(\frac{1}{a},+\infty)$． ......4 分

（Ⅱ）因为 $g(x)=xf(x)+\frac{1}{2}x^2+2x=x(\ln x-x-1)+\frac{1}{2}x^2+2x=x\ln x-\frac{1}{2}x^2+x$，

则 $g'(x)=\ln x+1-x+1=\ln x-x+2=f(x)+3$．

由（Ⅰ）可知，函数 $g'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

又因为 $g'(\frac{1}{e^2})=-2-\frac{1}{e^2}+2=-\frac{1}{e^2}<0$，$g'(1)=1>0$，

所以 $g'(x)$ 在 $(0,1)$ 上有且只有一个零点 x_1．

又在 $(0,x_1)$ 上 $g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减；

在 $(x_1,1)$ 上 $g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(x_1,1)$ 上单调递增.

所以 x_1 为极值点，此时 $m=0$．

又 $g'(3)=\ln 3-1>0$，$g'(4)=2\ln 2-2<0$，

所以 $g'(x)$ 在 $(3,4)$ 上有且只有一个零点 x_2．

又在 $(3,x_2)$ 上 $g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(3,x_2)$ 上单调递增；

在 $(x_2,4)$ 上 $g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(x_2,4)$ 上单调递减.

所以 x_2 为极值点，此时 $m=3$.

综上所述，$m=0$ 或 $m=3$． ....13 分

19.北京市朝阳区高三年级第一次综合练习数学测试题（文史类） 2017.3

已知函数 $f(x)=x^3-3ax+e, g(x)=1-\ln x$，其中 e 为自然对数的底数.

(Ⅰ)若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $l:x+2y=0$ 垂直，求实数 a 的值；

（Ⅱ）设函数 $F(x)=-x[g(x)+\frac{1}{2}x-2]$，若 $F(x)$ 在区间 $(m,m+1)(m\in\mathbf{Z})$ 内存在唯一的极值点，求 m 的值；

（Ⅲ）用 $\max\{m,n\}$ 表示 m,n 中的较大者，记函数 $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}(x>0)$.若函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有 2 个零点，求实数 a 的取值范围.

20．（本小题满分 13 分）

解：

（Ⅰ）易得，$f'(x)=3x^2-3a$，所以 $f'(1)=3-3a$，

依题意，$(3-3a)(-\frac{1}{2})=-1$，解得 $a=\frac{1}{3}$；　　　　……………………………3 分

（Ⅱ）因为 $F(x)=-x[g(x)+\frac{1}{2}x-2]=-x\left[(1-\ln x)+\frac{1}{2}x-2\right]=x\ln x-\frac{1}{2}x^2+x$，

则 $F'(x)=\ln x+1-x+1=\ln x-x+2$. 设 $t(x)=\ln x-x+2$，

则 $t'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$.

令 $t'(x)=0$，得 $x=1$.

则由 $t'(x)>0$，得 $0<x<1$，$F'(x)$ 为增函数；

由 $t'(x)<0$，得 $x>1$，$F'(x)$ 为减函数；

而 $F'(\frac{1}{e^2})=-2-\frac{1}{e^2}+2=-\frac{1}{e^2}<0$，$F'(1)=1>0$.

则 $F'(x)$ 在 $(0,1)$ 上有且只有一个零点 x_1，

且在 $(0,x_1)$ 上 $F'(x)<0$，$F(x)$ 为减函数；

在 $(x_1,1)$ 上 $F'(x)>0$，$F(x)$ 为为增函数.

所以 x_1 为极值点，此时 $m=0$.

又 $F'(3)=\ln 3-1>0$，$F'(4)=2\ln 2-2<0$，

则 $F'(x)$ 在 $(3,4)$ 上有且只有一个零点 x_2，

且在 $(3,x_2)$ 上 $F'(x)>0$，$F(x)$ 为增函数；

在 $(x_2,4)$ 上 $F'(x)<0$，$F(x)$ 为减函数.

所以 x_2 为极值点，此时 $m=3$.

综上 $m=0$ 或 $m=3$.　　　　……………………9 分

（Ⅲ）（1）当 $x\in(0,e)$ 时，$g(x)>0$，依题意，$h(x)\ge g(x)>0$，不满足条件；

（2）当 $x=e$ 时，$g(e)=0$，$f(e)=e^3-3ae+e$，

①若 $f(e)=e^3-3ae+e\le 0$，即 $a\ge\frac{e^2+1}{3}$，则 e 是 $h(x)$ 的一个零点；

②若 $f(\mathrm{e})=\mathrm{e}^3-3a\mathrm{e}+\mathrm{e}>0$，即 $a<\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{3}$，则 e 不是 $h(x)$ 的零点；

（3）当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，$g(x)<0$，所以此时只需考虑函数 $f(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上零点的情况.因为 $f'(x)=3x^2-3a>3\mathrm{e}^2-3a$，所以

①当 $a\le \mathrm{e}^2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递增.

又 $f(\mathrm{e})=\mathrm{e}^3-3a\mathrm{e}+\mathrm{e}$，所以

（i）当 $a\le\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{3}$ 时，$f(\mathrm{e})\ge 0$，$f(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上无零点；

（ii）当 $\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{3}<a\le \mathrm{e}^2$ 时，$f(\mathrm{e})<0$，

又 $f(2\mathrm{e})=8\mathrm{e}^3-6a\mathrm{e}+\mathrm{e}\ge 8\mathrm{e}^3-6\mathrm{e}^3+\mathrm{e}>0$，

所以此时 $f(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上恰有一个零点；

②当 $a>\mathrm{e}^2$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm\sqrt{a}$.

由 $f'(x)<0$，得 $\mathrm{e}<x<\sqrt{a}$；

由 $f'(x)>0$，得 $x>\sqrt{a}$；

所以 $f(x)$ 在 $(\mathrm{e},\sqrt{a})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{a},+\infty)$ 上单调递增.

因为 $f(\mathrm{e})=\mathrm{e}^3-3a\mathrm{e}+\mathrm{e}<\mathrm{e}^3-3\mathrm{e}^3+\mathrm{e}<0$，

$f(2a)=8a^3-6a^2+\mathrm{e}>8a^2-6a^2+\mathrm{e}=2a^2+\mathrm{e}>0$，

所以此时 $f(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上恰有一个零点；

综上，$a>\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{3}$.　　　　……………………………………13 分

20.北京市朝阳区高三年级第二次综合练习数学学科测试（理工类）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+x^2-x$，$g(x)=x^2+ax+b,\ a,b\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线 l 与曲线 $y=g(x)$ 切于点 $(1,c)$，求 a,b,c 的值；

（Ⅲ）若 $f(x)\ge g(x)$ 恒成立，求 $a+b$ 的最大值.

（19）（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）$F(x)=\mathrm{e}^x-2x-b$，则 $F'(x)=\mathrm{e}^x-2$.

令 $F'(x)=\mathrm{e}^x-2>0,$ 得 $x>\ln 2$，所以 $F(x)$ 在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增.

令 $F'(x)=\mathrm{e}^x-2<0,$ 得 $x<\ln 2$，所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2)$ 上单调递减. …………4 分

（Ⅱ）因为 $f'(x)=\mathrm{e}^x+2x-1$，所以 $f'(0)=0$，所以 l 的方程为 $y=1$.

依题意，$-\dfrac{a}{2}=1$，$c=1$.

于是 l 与抛物线 $g(x)=x^2-2x+b$ 切于点 $(1,1)$，

由 $1^2-2+b=1$ 得 $b=2$.

所以 $a=-2,b=2,c=1.$ …………8 分

（Ⅲ）设 $h(x)=f(x)-g(x)=\mathrm{e}^x-(a+1)x-b$，则 $h(x)\ge 0$ 恒成立.

易得 $h'(x)=\mathrm{e}^x-(a+1).$

（1）当 $a+1\le 0$ 时，

因为 $h'(x)>0$，所以此时 $h(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

①若 $a+1=0$，则当 $b\le 0$ 时满足条件，此时 $a+b\le -1$；

②若 $a+1<0$，取 $x_0<0$ 且 $x_0<\dfrac{1-b}{a+1}$,

此时 $h(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-(a+1)x_0-b<1-(a+1)\dfrac{1-b}{a+1}-b=0$，所以 $h(x)\ge 0$ 不恒成立.

不满足条件；

（2）当 $a+1>0$ 时，

令 $h'(x)=0$，得 $x=\ln(a+1).$ 由 $h'(x)>0$，得 $x>\ln(a+1)$；

由 $h'(x)<0$，得 $x<\ln(a+1).$

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,\ln(a+1))$ 上单调递减，在 $(\ln(a+1),+\infty)$ 上单调递增.

要使得“$h(x)=\mathrm{e}^x-(a+1)x-b\ge 0$ 恒成立”，必须有

“当 $x=\ln(a+1)$ 时，$h(x)_{\min}=(a+1)-(a+1)\ln(a+1)-b\ge 0$”成立.

所以 $b\le (a+1)-(a+1)\ln(a+1)$. 则 $a+b\le 2(a+1)-(a+1)\ln(a+1)-1.$

令 $G(x)=2x-x\ln x-1, x>0,$ 则 $G'(x)=1-\ln x.$

令 $G'(x)=0$，得 $x=\mathrm{e}.$ 由 $G'(x)>0$，得 $0<x<\mathrm{e}$；

由 $G'(x)<0$，得 $x>\mathrm{e}.$ 所以 $G(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减,

所以，当 $x=\mathrm{e}$ 时，$G(x)_{\max}=\mathrm{e}-1.$

从而，当 $a=\mathrm{e}-1, b=0$ 时，$a+b$ 的最大值为 $\mathrm{e}-1$.

综上，$a+b$ 的最大值为 $\mathrm{e}-1$.

21.北京市朝阳区高三年级第二次综合练习 数学学科测试（文史类）

已知函数 $f(x)=x\ln x$，$g(x)=\frac{a}{2}x^2+x-a\ (a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）若直线 $x=m\ (m>0)$ 与曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 分别交于 M,N 两点.设曲线 $y=f(x)$ 在点 M 处的切线为 l_1，$y=g(x)$ 在点 N 处的切线为 l_2.

（ⅰ）当 $m=\mathrm{e}$ 时，若 $l_1\perp l_2$，求 a 的值；

（ⅱ）若 $l_1 /\!/ l_2$，求 a 的最大值；

（Ⅱ）设函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 在其定义域内恰有两个不同的极值点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$. 若 $\lambda>0$，且 $\lambda\ln x_2-\lambda>1-\ln x_1$ 恒成立，求 λ 的取值范围.

（20）（本小题满分 13 分）

解：(Ⅰ) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x>0\}$.

$f'(x)=1+\ln x$，$g'(x)=ax+1$.

（ⅰ）当 $m=\mathrm{e}$ 时，$f'(\mathrm{e})=2$，$g'(\mathrm{e})=a\mathrm{e}+1$.

因为 $l_1\perp l_2$，所以 $f'(\mathrm{e})\cdot g'(\mathrm{e})=-1$.

即 $2(a\mathrm{e}+1)=-1$.

解得 $a=-\frac{3}{2\mathrm{e}}$. ………………3 分

（ⅱ）因为 $l_1 /\!/ l_2$，则 $f'(m)=g'(m)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解.

即 $\ln m-am=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解.

设 $F(x)=\ln x-ax$， $x>0$，

则 $F'(x)=\dfrac{1}{x}-a=\dfrac{1-ax}{x}$.

（1）当 $a\le 0$ 时， $F'(x)>0$ 恒成立，则函数 $F(x)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上为增函数.

1° 当 $a<0$ 时，取 $x=\mathrm{e}^{a}$， $F(\mathrm{e}^{a})=a-a\mathrm{e}^{a}=a(1-\mathrm{e}^{a})<0$.

取 $x=\mathrm{e}$， $F(\mathrm{e})=1-a\mathrm{e}>0$,

所以 $F(x)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上存在零点.

2° 当 $a=0$ 时， $F(x)=\ln x$ 存在零点， $x=1$，满足题意.

（2）当 $a>0$ 时，令 $F'(x)=0$，则 $x=\dfrac{1}{a}$.

则 $F(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 上为增函数， $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 上为减函数.

所以 $F(x)$ 的最大值为 $F(\dfrac{1}{a})=\ln\dfrac{1}{a}-1\ge 0$.

解得 $0<a\le\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

取 $x=1$， $F(1)=-a<0$.

因此当 $a\in(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}]$ 时，方程 $F(x)=0$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上有解.

所以， a 的最大值是 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. ………………8 分

另解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x\middle|x>0\right\}$.

$f'(x)=1+\ln x$， $g'(x)=ax+1$.

则 $f'(m)=1+\ln m$， $g'(m)=am+1$.

因为 $l_1 /\!/ l_2$， 则 $f'(m)=g'(m)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上有解.

即 $\ln m=am$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上有解.

因为 $m>0$，所以 $a=\dfrac{\ln m}{m}$.

令 $F(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ ($x>0$).

$F'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=$ (

得 $x=\mathrm{e}$.

当 $x\in(0,\mathrm{e})$，$F'(x)>0$，$F(x)$ 为增函数；

当 $x\in\left(\mathrm{e},+\infty\right)$，$F'(x)<0$，$F(x)$ 为减函数；

所以 $F(x)_{\max}=F(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

所以，a 的最大值是 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. ………………8 分

（Ⅱ） $h(x)=x\ln x-\dfrac{a}{2}x^2-x+a \quad (x>0)$

$h'(x)=\ln x-ax$.

因为 x_1,x_2 为 $h(x)$ 在其定义域内的两个不同的极值点，

所以 x_1,x_2 是方程 $\ln x-ax=0$ 的两个根.

即 $\ln x_1=ax_1$，$\ln x_2=ax_2$.

两式作差得，$a=\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$.

因为 $\lambda>0,\ 0<x_1<x_2$，由 $\lambda\ln x_2-\lambda>1-\ln x_1$，得 $1+\lambda<\ln x_1+\lambda\ln x_2$.

则 $1+\lambda<a(x_1+\lambda x_2)\Leftrightarrow a>\dfrac{1+\lambda}{x_1+\lambda x_2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\dfrac{1+\lambda}{x_1+\lambda x_2}$

$\Leftrightarrow \ln\dfrac{x_1}{x_2}<\dfrac{(1+\lambda)(x_1-x_2)}{x_1+\lambda x_2}$.

令 $t=\dfrac{x_1}{x_2}$，则 $t\in(0,1)$，由题意知:

$\ln t<\dfrac{(1+\lambda)(t-1)}{t+\lambda}$ 在 $t\in(0,1)$ 上恒成立，

令 $\varphi(t)=\ln t-\dfrac{(1+\lambda)(t-1)}{t+\lambda}$，

则 $\varphi'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{(1+\lambda)^2}{(t+\lambda)^2}=\dfrac{(t-1)(t-\lambda^2)}{t(t+\lambda)^2}$.

（1） 当 $\lambda^2\geq1$，即 $\lambda\geq1$ 时，

$\forall t \in (0,1)$，$\varphi'(t) > 0$，所以$\varphi(t)$在$\left(0,1\right)$上单调递增.

又$\varphi(1)=0$，则$\varphi(t)<0$在$\left(0,1\right)$上恒成立.

（2） 当$\lambda^2<1$，即$0<\lambda<1$时，

$t \in \left(0,\lambda^2\right)$时，$\varphi'(t)>0$，$\varphi(t)$在$\left(0,\lambda^2\right)$上为增函数；

当$t \in \left(\lambda^2,1\right)$时，$\varphi'(t)<0$，$\varphi(t)$在$\left(\lambda^2,1\right)$上为减函数.

又$\varphi(1)=0$，所以$\varphi(t)$不恒小于0，不合题意.

综上，$\lambda \in [1,+\infty)$. ……………………13 分

解：（Ⅰ）当$a=0$时，因为$f(x)=x^2\cdot \mathrm{e}^{-x}$，

所以$f'(x)=(-x^2+2x)\cdot \mathrm{e}^{-x}$， …………1 分

$f'(-1)=-3\mathrm{e}$. …………2 分

又因为$f(-1)=\mathrm{e}$， …………3 分

所以曲线$y=f(x)$在点$(-1,f(-1))$处的切线方程为

$y-\mathrm{e}=-3\mathrm{e}(x+1)$，即$3\mathrm{e}x+y+2\mathrm{e}=0$. ……………………4 分

（Ⅱ）“对任意的$t\in[0,2]$，存在$s\in[0,2]$使得$f(s)\ge g(t)$成立”等价于“在区间$[0,2]$上，$f(x)$的最大值大于或等于$g(x)$的最大值”. ……………………5 分

因为$g(x)=x^2-x-1=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}$，

所以$g(x)$在$[0,2]$上的最大值为$g(2)=1$.

$$\begin{aligned}f'(x)&=(2x+a)\cdot \mathrm{e}^{-x}-(x^2+ax-a)\cdot \mathrm{e}^{-x}\\&=-\mathrm{e}^{-x}[x^2+(a-2)x-2a]\\&=-\mathrm{e}^{-x}(x-2)(x+a)\end{aligned}$$

令$f'(x)=0$，得$x=2$或$x=-a$. ……………………7 分

① 当$-a\le 0$，即$a\ge 0$时，

$f'(x)\ge 0$在$[0,2]$上恒成立，$f(x)$在$[0,2]$上为单调递增函数，

$f(x)$的最大值为$f(2)=(4+a)\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^2}$，

由$(4+a)\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^2}\ge 1$，得$a\ge \mathrm{e}^2-4$. ……………9 分

② 当$0<-a<2$，即$-2<a<0$时，

当$x\in(0,-a)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$为单调递减函数，

当$x\in(-a,2)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$为单调递增函数.

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(0)=-a$ 或 $f(2)=(4+a)\cdot\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$，

由 $-a\geq 1$，得 $a\leq -1$；由 $(4+a)\cdot\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\geq 1$，得 $a\geq \mathrm{e}^2-4$．

又因为 $-2<a<0$，所以 $-2<a\leq -1$．　　　　……………11 分

③ 当 $-a\geq 2$，即 $a\leq -2$ 时，

$f'(x)\leq 0$ 在 $[0,2]$ 上恒成立， $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上为单调递减函数，

$f(x)$ 的最大值为 $f(0)=-a$，

由 $-a\geq 1$，得 $a\leq -1$，

又因为 $a\leq -2$，所以 $a\leq -2$．

综上所述，实数 a 的值范围是 $a\leq -1$ 或 $a\geq \mathrm{e}^2-4$． ………………………13 分