导数与函数的关系

在前两章，我们对于导数有了一个基本的认知，在这一章中，我们将会深入认识导数与函数的关系，从单调性，极值和最值两个角度，了解到高中导数作为工具属性的基本作用.

1、导数和函数单调性

例题4：

给出$f(x)=x^2+2x+2,x\in R$，请依据现有知识求出这个函数的单调区间.

解答：

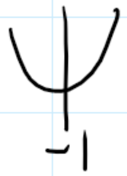
$f(x)=x^2+2x+2$

对称轴：$x=-\frac{2}{2}=-1$.

开口：向上

可知$f(x)$在$(-\infty,-1)$上单调减.

在$(-1,+\infty)$上单调增



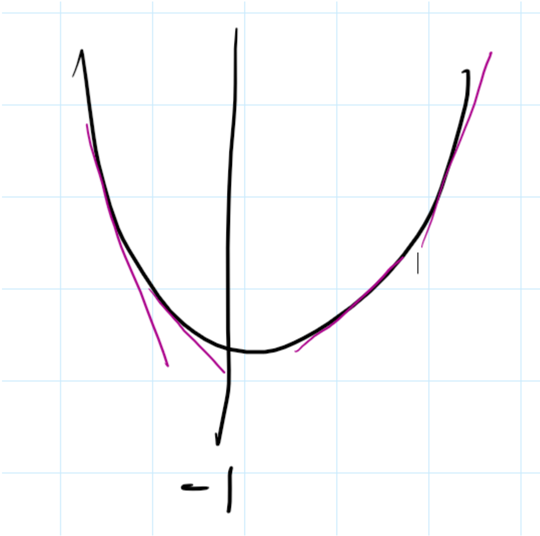
相信有相当比例的同学会按照如上的方法进行——我们对于二次函数太熟悉了，这玩意信手拈来啊~

但是如果是以下的题目呢：

例题5：

给出$f(x)=x^3+2x+2,x\in R$，请依据现有知识求出这个函数的单调区间.

为了解决这个问题，我们就需要使用到刚刚学习的导数了.我们在第一章知道了，导数的本质就是一个函数的**切线斜率**的集合.

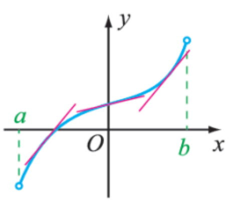


经过我们第一章的铺垫，结合上图不难发现，切线能反映一小段区间之内函数的变化情况——斜率越大，变化率越大；**斜率为大于零，那么函数就增，斜率小于零，那么函数就减**，接下来，让我们看看教科书上是如何用严谨的数学语言描述我们感性认知的.

一般地，

（1）如果在区间 (a, b) 内，$f'(x)>0$，则曲线 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 对应的那一段上每一点处切线的斜率都大于 0，曲线呈上升状态，因此 $f(x)$ 在 (a, b) 上是增函数，如图 6-2-2(1) 所示；

（2）如果在区间 (a, b) 内，$f'(x)<0$，则曲线 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 对应的那一段上每一点处切线的斜率都小于 0，曲线呈下降状态，因此 $f(x)$ 在 (a, b) 上是减函数，如图 6-2-2(2) 所示.



(1)　　(2)

依照这个规律，我们就可以解决例题5了！让我们来试试吧！

例题5：

给出$f(x)=x^3+2x+2, x \in R$，请依据现有知识求出这个函数的单调区间.

解答：

首先，我们需要求出这个函数的导数，如果上一章你认真做了留下的作业，那么相信这轻而易举.

$f'(x)=3x^2+2$

这道题现在看来就很简单了——这个函数的导数始终大于零，因此**这个函数在R上单调递增.**

千万不要忘记，我们求的是单调区间，一般情况下，这指的是“单调递增区间”和“单调递减区间”，答题的时候请千万不要忘记回答这两部分.这是后期很容易忘掉的事情，但是现在请大家不要忘)

综上，$f(x)$的单调递增区间是R，**没有单调递减区间**.

这个例子还是太简单了，让我们做一道更加令人兴奋的题吧：

例题6：

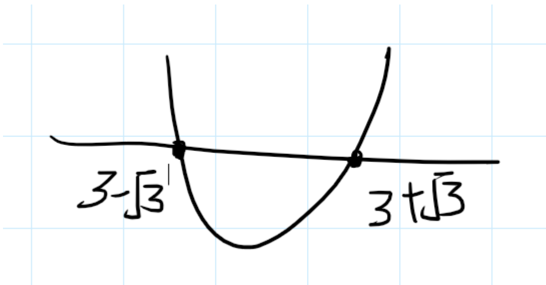
给出函数$f(x)=e^{-x+1}(x^3-3x^2)+1$，求出此函数的单调区间.

解答：

$$
\begin{gathered}
u=e^{-x+1} \\
u'=-e^{-x+1} \\
v=x^3-3x^2 \\
v'=3x^2-6x \\
f'(x)=u'v+uv'=-e^{-x+1}(x^3-3x^2)+e^{-x+1}(3x^2-6x)=-e^{-x+1}(x^3-3x^2-3x^2+6x) \\
=-e^{-x+1}(x^3-6x^2+6x) \\
=-xe^{-x+1}(x^2-6x+6)
\end{gathered}
$$

舒服吧，这就是2023高考的原题捏.我们仍未知道用求根公式的考生心理素质有多么强大.

我们对后半部分使用求根公式，得到两个根$x_1=3+\sqrt{3}$,$x_2=3-\sqrt{3}$,画出这部分图像，注意开口方向:

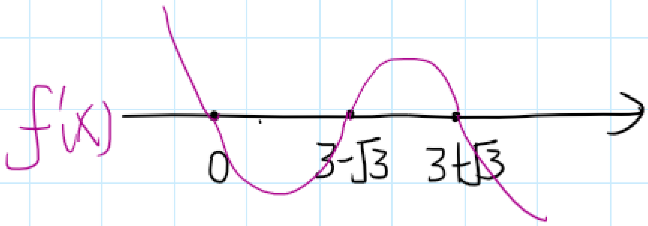


得到x的取值不同，后半部分的正负；

其次，我们对左半部分进行分析——e^{-x+1}这部分函数显然始终是一个正值，接着我们就讨论$-x$的正负即可，显然当x是负数的时候为正，在为正数的时候为负.

于是我们可以通过列表来进行分析，这是我们刚学函数的时候所接触到的:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,3-\sqrt{3})$	$3-\sqrt{3}$	$(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$	$3+\sqrt{3}$	$(3+\sqrt{3},+\infty)$
$-xe^{-x+1}$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
x^2-6x+6	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$



好的，通过一通操作猛如虎，我们利用穿根法得出了导函数的正负，可以答题了：

$f(x)$的单调增区间为$(-\infty,0)$和$(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$；单调减区间为$(0,3-\sqrt{3})$和$(3+\sqrt{3},+\infty)$.

此时这道题就做完了.你可能会吐槽，这玩意这么简单，为什么要把这个过程写这么麻烦，可能会吐槽，这题怎么这么麻烦......

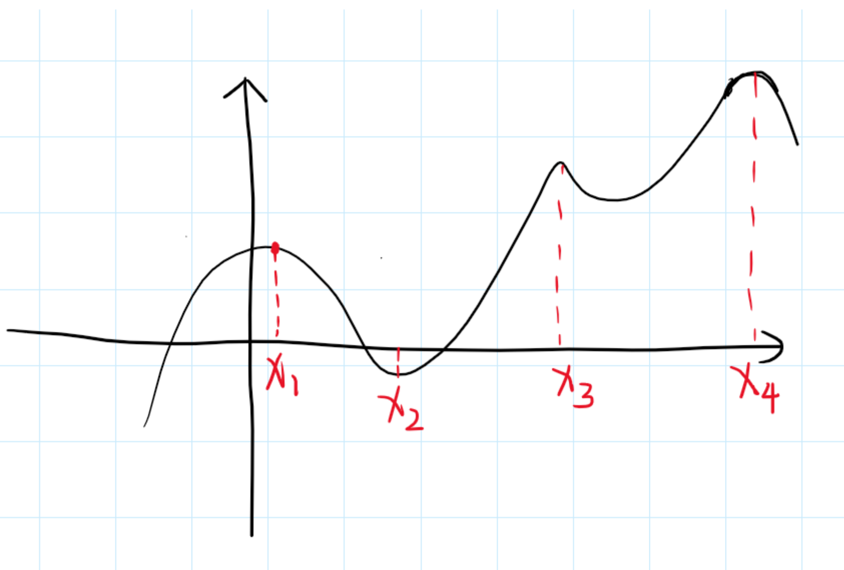
还要注意，书写的时候，**单调区间一定一定一定不要用并集符号**！

我刚学的时候也这样.

刚学习导数的你，一定需要这样事无巨细的讲解，打好一个基础是很重要的事情，请千万不要忽略任何一个细节，任何一个细节的缺失都可能让你成为在考场上做不出来这题的悲惨之人......

受虐结束，接下来开启第二部分：

2、极值和最值



让我们把上面那个奇怪的曲线叫做$f(x)$，我们不难发现，其中$f(x_1)$、$f(x_3)$、$f(x_4)$都是这个函数一个区间当中的最大值，但是在整个函数来看，这个函数的最大值只有一个$f(x_4)$.那么这个时候，我们管这三个函数值都叫做极大值.我们可以发现最大值的特征，在一个区域之内，这个函数左侧均小于这个点的函数值，这个函数的右侧均小于这个点的函数值.即：**在一个区间内，所有函数的函数值均小于等于这个点的函数值，那么这个点的函数值就是极大值，其横坐标就是极大值点**.

同理，我们可以自己**"定义"**极小值.

请注意，极值点并不是一个**"坐标对"**，而是一个**"横坐标"**，其原因在于，我们所说的极值点，是**其自变量的取值.**

一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为D，设 $x_0\in D$，如果对于 x_0 附近的任意不同于 x_0 的 x①，都有

(1) $f(x)<f(x_0)$，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的一个**极大值点**，且 $f(x)$ 在 x_0 处取**极大值**；

(2) $f(x)>f(x_0)$，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的一个**极小值点**，且 $f(x)$ 在 x_0 处取**极小值**.

极大值点与极小值点都称为**极值点**，极大值与极小值都称为**极值**. 显然，极大值点在其附近函数值最大，极小值点在其附近函数值最小.

想一想

极大值一定比极小值大吗？

这是书上所给出的定义，我们很容易发现，其实在这个定义之下，极小值可以大于极大值，小于极大值，甚至等于极大值，所以在做题的时候，请务必注意这一点，不要被自己的直觉所误导.

我们接着将导数和极值联系起来，我们观察到，在取得$x=x_0$，若x_0是一个极值点，那么$f'(x)=0$——

假设函数先减再增，那么取得的是极小值；假如先增再减，那么取得的是极大值.但是无论如何，极值点的左侧、右侧的导数切线斜率均接近于0，我们很容易推测到切线处的导数值就是0.

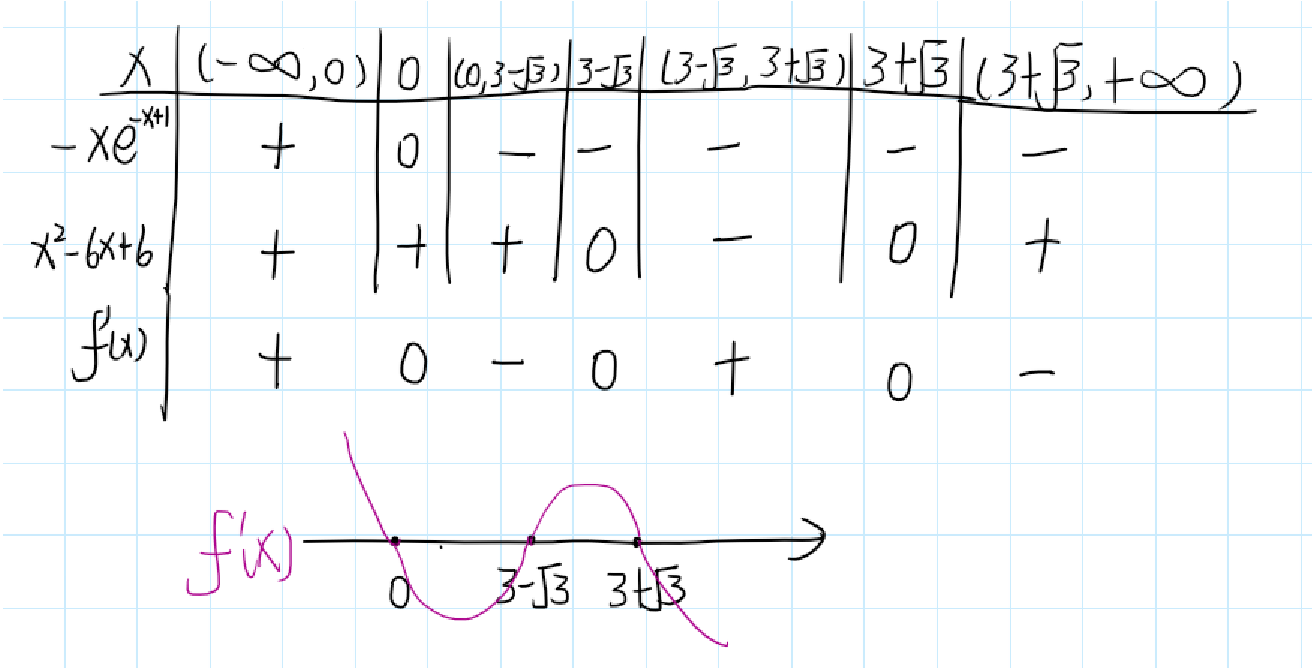
若x_0是函数的一个极值点，那么：

$$f'(x_0)=0$$

让我们再次掏出那道高考题，体会下这个结论的作用.

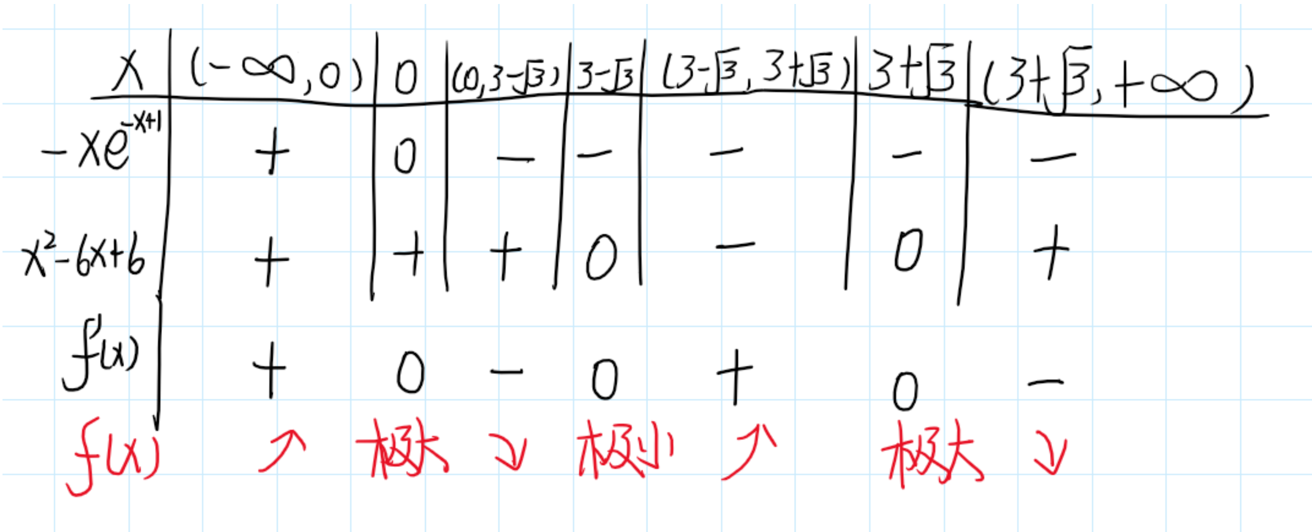
例题7：

给出函数$f(x)=e^{-x+1}(x^3-3x^2)+1$，求出此函数的极值点.



x	$(-\infty,0)$	0	$(0,3-\sqrt{3})$	$3-\sqrt{3}$	$(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$	$3+\sqrt{3}$	$(3+\sqrt{3},+\infty)$
$-xe^{-x+1}$	+	0	−	−	−	−	−
x^2-6x+6	+	+	+	0	−	0	+
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−

我们发现让导数值为零的点有三个，根据我们的结论，结合增减性，我们可以续写这个表：



x	$(-\infty,0)$	0	$(0,3-\sqrt{3})$	$3-\sqrt{3}$	$(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$	$3+\sqrt{3}$	$(3+\sqrt{3},+\infty)$
$-xe^{-x+1}$	+	0	−	−	−	−	−
x^2-6x+6	+	+	+	0	−	0	+
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	↗	极大	↘	极小	↗	极大	↘

于是乎，我们就得到了这个函数的极值点，注意，**极值指的是极大值和极小值，如果没有极小值或者极大值，请一定不要忘记说明**.

综上，此函数的极大值点是0和$3+\sqrt{3}$，极小值点是$3-\sqrt{3}$.

本章到此结束了，理论上，你如果足够聪明，那么凭借你初三和高一的函数基础，你已经能够完成所有的导数题目了，从技术的角度上，导数的新知识到此结束——本教程A部分到此结束.

请注意，看起来A部分是很水的，但是千万不要掉以轻心，因为真正的导数题目，与你想象的有相当大的区别.如果你不信，可以去看一些高考题甚至模拟题，你会发现这其实才是真正的世界，现在所学的，只不过是冰山一角.正因为如此，你才需要更加强大的基础，来应对这些挑战.

在完成了本教程三章的学习之后，建议大家以下几点:

1、可以尝试去做做前几年高考题，模拟题的导数题第一问（但是务必要留下近一年的题，你学校很有可能安排套卷训练！），**不要浪费任何一道题**最好计时完成.

2、可以尝试去做第二问、第三问，但是这个时候你是没有系统方法的，你只需要根据自己的直觉建立体系，然后凭着感觉做即可，最后对答案，无论对与不对，请认真反思自己的思维过程是否流畅，在导数这里，蒙出答案/伪证是很容易蒙骗新手的，这会给一些数学直觉好的同学带来错觉——不就那么一回事吗，导数也不难.

3、多看评标、多发问，欢迎大家友善讨论！

关于系统的方法，将会在B部分推出，这些方法的本质都是初三高一所接触过的，所以不要过于依赖，或者迷信什么大招，甚至去一知半解地学习高等知识，这会为你的学习带来麻烦.

谢谢大家的阅读，有缘再见！