1.2017年北京市海淀区高考数学零模试卷（理科）

已知函数．$f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=kx$ 相切于点P，求点P的坐标；

（Ⅱ）当 $a\le e$ 时，证明：当 $x\in(0,+\infty)$， $f(x)\ge a(x-\ln x)$

2. 怀柔区2016—2017学年度高三第二学期适应性练习数学（文史类）

已知函数 $f\left(x\right)=ax+\ln x(a\in R)$.

（1）若 $a=2$，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

（2）求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（3）若对任意 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f\left(x\right)<2$ 成立，求实数 a 的取值范围.

3.怀柔区2016—2017学年度高三第二学期适应性练习数学（理工类）

已知函数 $f\left(x\right)=ax+\ln x(a\in R)$.

（1）求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）设 $g\left(x\right)=x^2-2x+2$，若对任意 $x_1\in(0,+\infty)$，均存在 $x_2\in[0,1]$，使得 $f(x_1)<g(x_2)$，求 a 的取值范围.

4.西城区高三统一测试数学（文科）

已知函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2$. 设 l 为曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线，其中 $x_0\in[-1,1$.

（Ⅰ）求直线 l 的方程（用 x_0 表示）；

（Ⅱ）求直线 l 在 y 轴上的截距的取值范围；

（Ⅲ）设直线 $y=a$ 分别与曲线 $y=f(x)$ 和射线 $y=x-1\,(x\in[0,+\infty))$ 交于 M,N 两点，求 $|MN|$ 的最小值及此时 a 的值.

5.西城区高三统一测试数学（理科） 2017.4

已知函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2$. 设 l 为曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线，其中 $x_0\in[-1,1]$.

（Ⅰ）求直线 l 的方程（用 x_0 表示）；

（Ⅱ）设 O 为原点，直线 $x=1$ 分别与直线 l 和 x 轴交于 A,B 两点，求△ AOB 的面积的最小值.

6.顺义区2017届高三第二次统练数学试卷（文科）

已知函数 $f(x)=1+\ln x-ae^x$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与 x 轴平行，求实数 a 的值；

（Ⅱ）若对任意 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $f(x)\le 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

7.顺义区2017届高三第二次统练数学试卷（理科）

已知函数 $f(x)=pe^{-x}+x+1\ (p\in R)$.

（Ⅰ）当实数 $p=e$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $x=1$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）当 $p=1$ 时，若直线 $y=mx+1$ 与曲线 $y=f(x)$ 没有公共点，求实数 m 的取值范围.

8.石景山区2017年高三统一练习数 学（文）试 卷

已知函数 $f(x)=e^x$.

（Ⅰ）过原点作曲线 $y=f(x)$ 的切线，求切线方程；

（Ⅱ）当 $x>0$ 时，讨论曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=mx^2(m>0)$ 公共点的个数．

9.石景山区2017年高三统一练习数 学（理）试 卷

已知函数 $f(x)=\ln x$．

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求证：当 $x>0$ 时， $f(x)\geqslant 1-\dfrac{1}{x}$；

（Ⅲ）若 $x-1>a\ln x$ 对任意 $x>1$ 恒成立，求实数 a 的最大值．

10.**海淀区高三年级第二学期期中练习数学（文科）**

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-x^2+ax$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线与 x 轴平行．

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）若 $g(x)=\mathrm{e}^x-2x-1$，求函数 $g(x)$ 的最小值；

（Ⅲ）求证：存在 $c<0$，当 $x>c$ 时， $f(x)>0$．

11.海淀区高三年级第二学期期中练习数学（理科）　　　　2017.4

已知函数 $f(x)=x^2-2ax+4(a-1)\ln(x+1)$，其中实数 $a<3$．

（Ⅰ）判断 $x=1$ 是否为函数 $f(x)$ 的极值点，并说明理由；

（Ⅱ）若 $f(x)\le 0$ 在区间 $[0,1]$ 上恒成立，求 a 的取值范围．

12.丰台区2017年高三年级第二学期综合练习（一）数　学（文科）

已知函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{\mathrm{e}^x}$，$A(x_1,m)$，$B(x_2,m)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上两个不同的点．

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间，并写出实数 m 的取值范围；

（Ⅱ）证明： $x_1+x_2>0$．

13. **丰台区2017年高三年级第二学期综合练习（一）数　学（理科）**

已知函数 $f(x)=\ln(kx)+\dfrac{1}{x}-k\ (k>0)$．

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）对任意 $x\in[\dfrac{1}{k},\dfrac{2}{k}]$，都有 $x\ln(kx)-kx+1\le mx$，求 m 的取值范围．

14.房山区2017年高三一模试卷高三数学（文）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax$．

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点（1， $f(1)$）处的切线与直线 $y=ax+2$ 平行，求实数 a 的值；

（Ⅱ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅲ）当 $0<a<1$ 时，证明：曲线 $y=f(x)$ 在直线 $y=(\mathrm{e}-1)x$ 的上方．

15.房山区2017年高三一模试卷高三数学（理）

已知函数 $f(x)=x-1+a\mathrm{e}^x$．

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点（1， $f(1)$）处的切线平行于x轴，求a的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的极值；

（Ⅲ）当 $a=1$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=kx-1$ 没有公共点，求k的取值范围．

16. **北京市东城区2016-2017学年度第二学期高三综合练习（一）数学（文科）**

设函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+ax$， $a\in\mathbf{R}$．

(Ⅰ)若 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 a 的值，并讨论 $f(x)$ 的单调性；

(Ⅱ)已知函数 $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}ax^2+\dfrac{2}{3}$，若 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有零点，求 a 的取值范围；

(Ⅲ)设 $f(x)$ 有两个极值点 x_1， x_2，试讨论过两点 $(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$ 的直线能否过点 $(1,1)$，若能，求 a 的值；若不能，说明理由．

17.北京市东城区2016-2017学年度第二学期高三综合练习（一）数学理科）

已知函数 $f(x)=2\ln x+\dfrac{1}{x}-mx(m\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）当 $m=-1$时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为单调递减，求 m 的取值范围；

（Ⅲ）设 $0<a<b$，求证：$\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.

18.北京市朝阳区2017届高三第一次（3月）综合练习数学（理）试题

已知函数 $f(x)=\ln x-ax-1(a\in\mathbf{R}),g(x)=xf(x)+\dfrac{1}{2}x^2+2x$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）当 $a=1$时，若函数 $g(x)$ 在区间 $(m,m+1)(m\in\mathbf{Z})$ 内存在唯一的极值点，求 m 的值.

19.北京市朝阳区高三年级第一次综合练习数学测试题（文史类） 2017.3

已知函数 $f(x)=x^3-3ax+\mathrm{e},g(x)=1-\ln x$，其中 e 为自然对数的底数.

(Ⅰ)若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $l:x+2y=0$ 垂直，求实数 a 的值；

（Ⅱ）设函数 $F(x)=-x[g(x)+\dfrac{1}{2}x-2]$，若 $F(x)$ 在区间 $(m,m+1)(m\in\mathbf{Z})$ 内存在唯一的极值点，求 m 的值；

（Ⅲ）用 $\max\{m,n\}$ 表示m,n中的较大者，记函数 $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}(x>0)$.若函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有2个零点，求实数 a 的取值范围.

20.北京市朝阳区高三年级第二次综合练习数学学科测试（理工类）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+x^2-x$，$g(x)=x^2+ax+b,\ a,b\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当 $a=1$时，求函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线 l 与曲线 $y=g(x)$ 切于点 $(1,c)$，求 a,b,c 的值；

（Ⅲ）若 $f(x)\ge g(x)$ 恒成立，求 $a+b$ 的最大值.

21.北京市朝阳区高三年级第二次综合练习 数学学科测试（文史类）

已知函数 $f(x)=x\ln x$，$g(x)=\dfrac{a}{2}x^2+x-a\ (a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）若直线 $x=m\ (m>0)$ 与曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 分别交于 M,N 两点.设曲线 $y=f(x)$ 在点 M 处的切线为 l_1，$y=g(x)$ 在点 N 处的切线为 l_2.

（ⅰ）当 $m=\mathrm{e}$ 时，若 $l_1\perp l_2$，求 a 的值；

（ⅱ）若 $l_1\parallel l_2$，求 a 的最大值；

（Ⅱ）设函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 在其定义域内恰有两个不同的极值点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$. 若 $\lambda>0$，且 $\lambda\ln x_2-\lambda>1-\ln x_1$ 恒成立，求 λ 的取值范围.

22. **北京市东城区2016-2017学年度第二学期高三综合练习（二）数学（理科）**

设函数 $f(x)=(x^2+ax-a)\cdot\mathrm{e}^{-x}(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）设 $g(x)=x^2-x-1$，若对任意的 $t\in[0,2]$，存在 $s\in[0,2]$ 使得 $f(s)\ge g(t)$ 成立，求 a 的取值范围.

1.2017年北京市海淀区高考数学零模试卷（理科）

已知函数$f(x)=\frac{e^x}{x}$.

（Ⅰ）若曲线y=f（x）与直线y=kx相切于点P，求点P的坐标；

（Ⅱ）当a≤e时，证明：当x∈（0，+∞），f（x）≥a（x - lnx）.

【考点】利用导数求闭区间上函数的最值；利用导数研究曲线上某点切线方程.

【分析】（Ⅰ）设点P的坐标为（x_0，y_0），$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，由题意列出方程组，能求出点P的坐标.

（Ⅱ）设函数 g（x）=f（x） - a（x - lnx）=$\frac{e^x}{x}-a(x-\ln x)$，$g'(x)=\frac{(e^x-ax)(x-1)}{x^2}$，x∈（0，+∞），设h（x）=$e^x$ - ax，x∈（0，+∞），则h'（x）=e^x - a，由此利用分类讨论和导数性质能证明：当x∈（0，+∞），f（x）≥a（x - lnx）.

【解答】解：（Ⅰ）设点P的坐标为（x_0，y_0），$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，

由题意知$\begin{cases}\frac{e^{x_0}(x_0-1)}{x_0^2}=k\\ \frac{e^{x_0}}{x_0}=kx_0\end{cases}$解得$x_0$=2，所以$y_0=\frac{e^{x_0}}{x_0}=\frac{e^2}{2}$，

从而点P的坐标为$(2,\ \frac{e^2}{2})$.

证明：（Ⅱ）设函数g（x）=f（x） - a（x - lnx）=$\frac{e^x}{x}-a(x-\ln x)$，

$g'(x)=\frac{(e^x-ax)(x-1)}{x^2}$，x∈（0，+∞），

设h（x）=e^x - ax，x∈（0，+∞），则h'（x）=e^x - a，

①当a≤1时，因为x>0，所以e^x>1，所以h'（x）=e^x - a>0，

所以h（x）在区间（0，+∞）上单调递增，所以h（x）>h（0）=1>0；

②当1<a≤e时，令h'（x）=0，则x=lna，

所以x∈（0，lna），h'（x）<0；x∈（lna，+∞），h'（x）>0.

所以h（x）≥h（lna）=a（1 - lna）≥0，

由①②可知：x∈（0，+∞）时，有 h（x）≥0，

所以有：

x	（0，1）	1	（1，+∞）
g'（x）	-	0	+
g（x）	↓	极小值	↑

所以 g（x）$_{min}$=g（1）=e - a≥0，从而有当 x∈（0，+∞）时，f（x）≥a（x - lnx）.

2. 怀柔区 2016—2017 学年度高三第二学期适应性练习数学（文史类）

已知函数 $f\left(x\right)=ax+\ln x(a\in R)$.

（1）若 $a=2$，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

（2）求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（3）若对任意 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f\left(x\right)<2$ 成立，求实数 a 的取值范围.

3.怀柔区 2016—2017 学年度高三第二学期适应性练习数学（理工类）

已知函数 $f\left(x\right)=ax+\ln x(a\in R)$.

（1）求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）设 $g\left(x\right)=x^2-2x+2$，若对任意 $x_1\in(0,+\infty)$，均存在 $x_2\in[0,1]$，使得 $f(x_1)<g(x_2)$，

求 a 的取值范围.

4.西城区高三统一测试数学（文科）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^2$. 设 l 为曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线，其中 $x_0\in[-1,1$.

（Ⅰ）求直线 l 的方程（用 x_0 表示）；

（Ⅱ）求直线 l 在 y 轴上的截距的取值范围；

（Ⅲ）设直线 $y=a$ 分别与曲线 $y=f(x)$ 和射线 $y=x-1\,(x\in[0,+\infty))$ 交于 M,N 两点，求 $|MN|$ 的最小值及此时 a 的值.

解：（Ⅰ） 对 $f(x)$ 求导数，得 $f'(x)=\mathrm{e}^x-x$， [1 分]

所以切线 l 的斜率为 $f'(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-x_0$， [2 分]

由此得切线l的方程为：$y-(e^{x_0}-\frac{1}{2}x_0^2)=(e^{x_0}-x_0)(x-x_0)$，

即 $y=(e^{x_0}-x_0)x+(1-x_0)e^{x_0}+\frac{1}{2}x_0^2$. [3 分]

（Ⅱ） 由（Ⅰ）得，直线l在y轴上的截距为$(1-x_0)e^{x_0}+\frac{1}{2}x_0^2$. [4 分]

设 $g(x)=(1-x)e^x+\frac{1}{2}x^2$，$x\in[-1,1]$.

所以 $g'(x)=x(1-e^x)$，令$g'(x)=0$，得$x=0$.

$g(x)$，$g'(x)$的变化情况如下表：

x	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	$\frac{2}{e}+\frac{1}{2}$	↘	1	↘	$\frac{1}{2}$

所以函数$g(x)$在$[-1,1]$上单调递减， [6 分]

所以$[g(x)]_{\max}=g(-1)=\frac{2}{e}+\frac{1}{2}$，$[g(x)]_{\min}=g(1)=\frac{1}{2}$，

所以直线l在y轴上的截距的取值范围是$[\frac{1}{2},\frac{2}{e}+\frac{1}{2}]$. [8 分]

（Ⅲ）过M作x轴的垂线，与射线$y=x-1$交于点Q，

所以△MNQ是等腰直角三角形. [9 分]

所以 $|MN|=|MQ|=|f(x)-g(x)|=|e^x-\frac{1}{2}x^2-x+1|$. [10 分]

设 $h(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x+1$，$x\in[0,+\infty)$，

所以 $h'(x)=e^x-x-1$.

令 $k(x)=e^x-x-1$，则$k'(x)=e^x-1>0\ (x>0)$，

所以 $k(x)=h'(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，

所以 $h'(x)\geqslant h'(0)=0$，

从而 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增， [12

分]

所以 $[h(x)]_{\min}=h(0)=2$，此时 $M(0,1)$， $N(2,1)$.

所以 $|MN|$ 的最小值为2，此时 $a=1$. [13

分]

5.西城区高三统一测试数学（理科） 2017.4

已知函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2$. 设 l 为曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线，其中 $x_0\in[-1,1]$.

（Ⅰ）求直线 l 的方程（用 x_0 表示）；

（Ⅱ）设 O 为原点，直线 $x=1$ 分别与直线 l 和 x 轴交于 A,B 两点, 求△ AOB 的面积的最小值.

解：（Ⅰ）对 $f(x)$ 求导数，得 $f'(x)=e^x-x$， [1 分]

所以切线 l 的斜率为 $f'(x_0)=e^{x_0}-x_0$， [2 分]

由此得切线 l 的方程为： $y-(e^{x_0}-\frac{1}{2}x_0^2)=(e^{x_0}-x_0)(x-x_0)$，

即 $y=(e^{x_0}-x_0)x+(1-x_0)e^{x_0}+\frac{1}{2}x_0^2$. [4

分]

（Ⅱ）依题意，切线方程中令 $x=1$，

得 $y=(e^{x_0}-x_0)+(1-x_0)e^{x_0}+\frac{1}{2}x_0^2=(2-x_0)(e^{x_0}-\frac{1}{2}x_0)$. [5 分]

所以 $A(1,y)$， $B(1,0)$.

所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OB|\cdot|y|$

$=\frac{1}{2}|(2-x_0)(e^{x_0}-\frac{1}{2}x_0)|$

$=|(1-\frac{1}{2}x_0)(e^{x_0}-\frac{1}{2}x_0)|$， $x_0\in[-1,1]$. [7 分]

设 $g(x)=(1-\frac{1}{2}x)(e^x-\frac{1}{2}x)$， $x\in[-1,1]$. [8 分]

则 $g'(x)=-\frac{1}{2}(e^x-\frac{1}{2}x)+(1-\frac{1}{2}x)(e^x-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}(x-1)(e^x-1)$. [10

分]

令 $g'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=1$.

$g(x)$， $g'(x)$ 的变化情况如下表：

x	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\frac{3}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{\mathrm{e}})$	↘	1	↗	$\frac{1}{2}(\mathrm{e}-\frac{1}{2})$

所以 $g(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递减；在 $(0,1)$ 单调递增， [12

分]

所以 $g(x)_{\min}=g(0)=1$，

从而 △AOB 的面积的最小值为 1.

6.顺义区 2017 届高三第二次统练数学试卷（文科）

已知函数 $f(x)=1+\ln x-ae^x$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与 x 轴平行，求实数 a 的值；

（Ⅱ）若对任意 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $f(x)\le 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

19.解：（Ⅰ）∵ $f(x)=1+\ln x-ae^x$，∴ $f'(x)=\frac{1}{x}-ae^x$， $x\in(0,+\infty)$.---------------2 分

由于曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与 x 轴平行，所以 $f'(1)=1-ae=0$，

解得 $a=\frac{1}{e}$.---4 分

（Ⅱ）由条件知对任意 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $f(x)\le 0$ 恒成立，

此命题等价于 $a\ge\frac{1+\ln x}{e^x}$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立.---------------------------5 分

令 $h(x)=\frac{1+\ln x}{e^x}$ ， $x\in(0,+\infty)$

$$h'(x)=\frac{\frac{1}{x}-1-\ln x}{e^x}=\frac{1}{e^x}\left(\frac{1}{x}-1-\ln x\right),\quad x\in(0,+\infty)$$ ----------------------------6 分

令 $g(x)=\frac{1}{x}-1-\ln x$， $x\in(0,+\infty)$，则 $g'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$， 且 $g'(x)<0$ -----------7 分

$\therefore$函数 $g(x)=\frac{1}{x}-1-\ln x$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递减.------------------------------------8 分

注意到 $g(1)=0$，即 $x=1$ 是 $g(x)$ 的零点--9 分

而当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)=\frac{1}{x}-1-x\ln x>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)<0$.

又 $e^x>0$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$. --------11 分

则当 x 变化时，$h'(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	+	0	−
$h(x)$	↗	极大值 $\frac{1}{e}$	↘

因此，函数 $h(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 取得最大值 $h(1)=\frac{1}{e}$，

所以实数 $a\geq\frac{1}{e}$.　　---------13 分

7.顺义区 2017 届高三第二次统练数学试卷（理科）

已知函数 $f(x)=pe^{-x}+x+1\ (p\in R)$.

（Ⅰ）当实数 $p=e$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $x=1$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）当 $p=1$ 时，若直线 $y=mx+1$ 与曲线 $y=f(x)$ 没有公共点，求实数 m 的取值范围.

18.解：（Ⅰ）当 $p=e$ 时，$f(x)=e^{-x+1}+x+1$，$f'(x)=-e^{-x+1}+1$

$\therefore f(1)=3$，$f'(1)=0$

$\therefore$曲线 $y=f(x)$ 在点 $x=1$ 处的切线方程为 $y=3$　　----------------------------4 分

（Ⅱ）$\because f(x)=pe^{-x}+x+1$，$\therefore f'(x)=-pe^{-x}+1$-------------------------------5 分

①当 $p\leq 0$ 时，$f'(x)>0$，则函数 $f(x)$ 在的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$；

----------------------------------6 分

②当 $p>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $e^x=p$，解得 $x=\ln p$.--------------------7 分

则当 x 变化时，$f'(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,\ln p)$	$\ln p$	$(\ln p,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$2+\ln p$	$\nearrow$

------------------------------9 分

所以，当 $p>0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(\ln p,+\infty)$，单调递减区间为 $(-\infty,\ln p)$.

------------------------------10 分

（III）当 $p=1$时，$f(x)=e^{-x}+x+1$，直线 $y=mx+1$与曲线 $y=f(x)$没有公共点，

等价于关于 x 的方程 $mx+1=e^{-x}+x+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上没有实数解，

即关于 x 的方程 $(m-1)x=e^{-x}$（*）在 $(-\infty,+\infty)$ 上没有实数解.

①当 $m=1$时，方程（*）化为 $e^{-x}=0$，

显然在 $(-\infty,+\infty)$ 上没有实数解. ------------------------------12 分

②当 $m\neq 1$时，方程（*）化为 $xe^{x}=\dfrac{1}{m-1}$，令 $g(x)=xe^{x}$，则有 $g'(x)=(1+x)e^{x}$.

令 $g'(x)=0$，得 $x=-1$，则当 x 变化时，$g'(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{e}$	$\nearrow$

当 $x=-1$时，$g(x)_{\min}=-\dfrac{1}{e}$，同时当 x 趋于 $+\infty$ 时，$g(x)$ 趋于 $+\infty$，

从而 $g(x)$ 的值域为 $\left[-\dfrac{1}{e},+\infty\right)$. ---------------------------------13 分

所以当 $\dfrac{1}{m-1}<-\dfrac{1}{e}$ 时，方程（*）无实数解，解得实数 m 的取值范围是 $(1-e,1)$.

综合①②可知实数 m 的取值范围是 $(1-e,1]$. ----------------------------14 分

8.石景山区 2017 年高三统一练习数 学（文）试 卷

已知函数 $f(x)=e^{x}$.

（Ⅰ）过原点作曲线 $y=f(x)$ 的切线，求切线方程；

（Ⅱ）当 $x>0$ 时，讨论曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=mx^2(m>0)$ 公共点的个数.

解：（Ⅰ）由题意，设切点为 $M(x_0,y_0)$，由题意可得

$f'(x_0)=\dfrac{y_0-0}{x_0-0}$，即 $e^{x_0}=\dfrac{e^{x_0}}{x_0}$，解得 $x_0=1$，即切点 $M(1,e)$.

所以 $k=\dfrac{e-0}{1-0}=e$，所以切线方程为 $y=ex$.　　　　　　............................5 分

（Ⅱ）当 $x>0,m>0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=mx^2(m>0)$ 的公共点个数

即方程 $f(x)=mx^2$ 根的个数.

由 $f(x)=mx^2$ 得 $m=\dfrac{e^x}{x^2}$.

令 $g(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$，则 $g'(x)=\dfrac{xe^x(x-2)}{x^4}$，令 $g'(x)=0$，解得 $x=2$.

随 x 变化时，$g'(x)$，$g(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$g'(x)$	–	0	+
$g(x)$	↘	极小值 $g(2)$	↗

其中 $g(2)=\dfrac{e^2}{4}$.所以 $g(2)$ 为 $g(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 的最小值.

所以对曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=mx^2(m>0)$ 公共点的个数，讨论如下：

当 $m\in(0,\dfrac{e^2}{4})$ 时，有 0 个公共点；　当 $m=\dfrac{e^2}{4}$ 时，有 1 个公共点；

当 $m\in(\dfrac{e^2}{4},+\infty)$ 时，有 2 个公共点.　　　　　　............................13 分

9.石景山区 2017 年高三统一练习数 学（理）试 卷

已知函数 $f(x)=\ln x$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求证：当 $x>0$ 时，$f(x)\geqslant 1-\dfrac{1}{x}$；

（Ⅲ）若 $x-1>a\ln x$ 对任意 $x>1$ 恒成立，求实数 a 的最大值.

18.（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，$f'(1)=1$，　又 $f(1)=0$，所以切线方程为 $y=x-1$；　......3 分

（Ⅱ）由题意知 $x>0$，令 $g(x)=f(x)-(1-\dfrac{1}{x})=\ln x-1+\dfrac{1}{x}$.

$g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$　.........5 分

令 $g'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}=0$，解得 $x=1$.　.........6 分

易知当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，易知当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$.

即 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增　.........7 分

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=0$，$g(x)\ge g(1)=0$

即 $g(x)=f(x)-(1-\dfrac{1}{x})\ge 0$，即 $f(x)\ge(1-\dfrac{1}{x})$.　......8 分

（Ⅲ）设 $h(x)=x-1-a\ln x(x\ge 1)$，依题意，对于任意 $x>1, h(x)>0$ 恒成立.

$h'(x)=1-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x-a}{x}$，　.........9 分

$a\le 1$ 时，$h'(x)>0, h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调增，

当 $x>1$ 时，$h(x)>h(1)=0$，满足题意.　.........11 分

$a>1$ 时，随 x 变化，$h'(x)$，$h(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(1,a)$	a	$(a,+\infty)$
$h'(x)$	−	0	+
$h(x)$	↘	极小值	↗

$h(x)$ 在 $(1,a)$ 上单调递减，　所以 $g(a)<g(1)=0$

即当　$a>1$ 时，总存在 $g(a)<0$，不合题意.　.........12 分

综上所述，实数 a 的最大值为 1.　.........13 分

10.海淀区高三年级第二学期期中练习数学（文科）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-x^2+ax$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线与 x 轴平行.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）若 $g(x)=\mathrm{e}^x-2x-1$，求函数 $g(x)$ 的最小值；

（Ⅲ）求证：存在 $c<0$，当 $x>c$ 时，$f(x)>0$.

（Ⅰ）$f'(x)=\mathrm{e}^x-2x+a$，

由已知可得 $f'(0)=0$，

所以 $1+a=0$，得 $a=-1$.

（Ⅱ）$g'(x)=e^x-2$，令 $g'(x)=0$，得 $x=\ln 2$，

所以 x，$g'(x)$，$g(x)$ 的变化情况如下表所示：

x	$(-\infty,\ln 2)$	$\ln 2$	$(\ln 2,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	极小值	↗

所以 $g(x)$ 的最小值为 $g(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2-1=1-2\ln 2$.

（Ⅲ）证明：显然 $g(x)=f'(x)$ 且 $g(0)=0$，

由（Ⅱ）知，$g(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2)$ 上单调递减，在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增.

又 $g(\ln 2)<0$，$g(2)=e^2-5>0$，

由零点存在定理，存在唯一实数 $x_0\in(\ln 2,+\infty)$，满足 $g(x_0)=0$，

即 $e^{x_0}-2x_0-1=0$，$e^{x_0}=2x_0+1$，

综上，$g(x)=f'(x)$ 存在两个零点，分别为 0，x_0.

所以

$x<0$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增；

$0<x<x_0$ 时，$g(x)<0$，即 $f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减；

$x>x_0$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(0)$ 是极大值，$f(x_0)$ 是极小值，

$$f(x_0)=e^{x_0}-x_0^{\,2}-x_0=2x_0+1-x_0^{\,2}-x_0=-x_0^{\,2}+x_0+1=-(x_0-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4},$$

因为 $g(1)=e-3<0, g(\frac{3}{2})=e^{\frac{3}{2}}-4>0$，

所以 $x_0\in(1,\frac{3}{2})$，所以 $f(x_0)>0$，

因此 $x\geq 0$ 时，$f(x)>0$.

因为 $f(0)=1$ 且 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，

所以一定存在 $c<0$ 满足 $f(c)>0$，

所以存在 $c<0$，当 $x>c$ 时，$f(x)>0$.

11.海淀区高三年级第二学期期中练习数学（理科）　　　　2017.4

已知函数 $f(x)=x^2-2ax+4(a-1)\ln(x+1)$，其中实数 $a<3$.

（Ⅰ）判断 $x=1$ 是否为函数 $f(x)$ 的极值点，并说明理由；

（Ⅱ）若 $f(x)\le 0$ 在区间 $[0,1]$ 上恒成立，求 a 的取值范围.

18.（本小题满分 13 分）

解：法 1：

（Ⅰ）由 $f(x)=x^2-2ax+4(a-1)\ln(x+1)$ 可得

函数定义域为 $(-1,+\infty)$，

$$f'(x)=2x-2a+\frac{4(a-1)}{x+1}$$

$$=\frac{2[x^2+(1-a)x+(a-}{x+1}$$

$$=\frac{2(x-1)[x-(a-2)]}{x+1},$$

由 $f'(x)=0$ 得 $x_1=1, x_2=a-2$.

因为 $a<3$，所以 $a-2<1$.

当 $a\le 1$ 时，$a-2\le -1$，所以 $f'(x)$，$f(x)$ 的变化如下表：

x	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

当 $1<a<3$ 时，$-1<a-2<1$，

$f'(x)$，$f(x)$ 的变化如下表：

x	$(-1,a-2)$	$a-2$	$(a-2,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

综上，$x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极值点，且为极小值点.

（Ⅱ）易知 $f(0)=0$，

由（Ⅰ）可知，

当$a\le 2$时，函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上单调递减，

所以有 $f(x)\le 0$恒成立；

当$2<a<3$时，函数 $f(x)$ 在区间$[0,a-2]$上单调递增，

所以 $f(a-2)>f(0)=0$，所以不等式不能恒成立；

所以$a\le 2$时有 $f(x)\le 0$在区间$[0,1]$上恒成立.

法 2：

（Ⅰ）由 $f(x)=x^2-2ax+4(a-1)\ln(x+1)$ 可得

函数定义域为$(-1,+\infty)$，

$$f'(x)=2x-2a+\frac{4(a-1)}{x+1}$$

$$=\frac{2[x^2+(1-a)x+(a-2)]}{x+1}$$

令 $g(x)=x^2+(1-a)x+(a-2)$，经验证 $g(1)=0$，

因为$a<3$，所以$g(x)=0$的判别式$\Delta=(1-a)^2-4(a-2)=a^2-6a+9=(a-3)^2>0$，

{说明：写明 $\Delta=(1-a)^2-4(a-2)=a^2-6a+9=(a-3)^2\ne 0$ **也可以}**

由二次函数性质可得，1 是 $g(x)=x^2+(1-a)x+(a-2)$ 的异号零点，

所以 1 是 $f'(x)$ 的异号零点，

所以 $x=1$是函数 $f(x)$ 的极值点.

（Ⅱ）易知 $f(0)=0$，

因为 $f'(x)=\dfrac{2(x-1)[x-(a-2)]}{x+1}$，

又因为$a<3$，所以$a-2<1$，

所以当$a\le 2$时，在区间$[0,1]$上 $f'(x)<0$，所以函数 $f(x)$ 单调递减，

所以有 $f(x)\le 0$恒成立；

当$2<a<3$时，在区间$[0,a-2]$上 $f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 单调递增，

所以 $f(a-2)>f(0)=0$，所以不等式不能恒成立；

所以$a\le 2$时有$f(x)\le 0$在区间$[0,1]$上恒成立.

12.丰台区 2017 年高三年级第二学期综合练习（一）数　学（文科）

已知函数$f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$，$A(x_1,m)$，$B(x_2,m)$是曲线$y=f(x)$上两个不同的点.

（Ⅰ）求$f(x)$的单调区间，并写出实数m的取值范围；

（Ⅱ）证明：$x_1+x_2>0$.

解：　$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$.

（Ⅰ）$f'(x)=-\dfrac{x}{e^x}$，

由$f'(x)=0$得，$x=0$，

由$f'(x)>0$得，$x<0$，

由$f'(x)<0$得，$x>0$，

所以$f(x)$的单调增区间为（-∞，0），单调减区间为（0，+∞）.

m的取值范围是$(0,1)$.　　……………………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$x_1\in(-1,0)$，要证$x_2>-x_1>0$，只需证$f(x_2)<f(-x_1)$

因为$f(x_1)=f(x_2)=m$，所以只需证$f(x_1)<f(-x_1)$，

只需证$\dfrac{x_1+1}{e^{x_1}}<\dfrac{-x_1+1}{e^{-x_1}}$，只需证$(x_1-1)e^{2x_1}+x_1+1<0$（$x_1\in(-1,0)$）

令$h(x)=(x-1)e^{2x}+x+1<0$，则$h'(x)=(2x-1)e^{2x}+1$，

因为$(h'(x))'=4xe^{2x}<0$，

所以$h'(x)$在$(-1,0)$上单调递减，所以$h'(x)>h'(0)=0$，

所以$h(x)$在$(-1,0)$上单调递增，所以$h(x)<h(0)=0$，

所以$e^{2x}+\dfrac{x+1}{x-1}>0$，故$x_1+x_2>0$　　……………………13 分

13. **丰台区 2017 年高三年级第二学期综合练习（一）数　学（理科）**

已知函数$f(x)=\ln(kx)+\dfrac{1}{x}-k\ (k>0)$.

（Ⅰ）求$f(x)$的单调区间；

（Ⅱ）对任意$x\in[\dfrac{1}{k},\dfrac{2}{k}]$，都有$x\ln(kx)-kx+1\le mx$，求$m$的取值范围.

解：由已知得，$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

（Ⅰ） $f'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$，.

令 $f'(x)>0$，得 $x>1$，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<1$.

所以函数 $f(x)$ 的单调减区间是 $(0,1)$，单调增区间是

$(1,+\infty)$. ....5 分

（Ⅱ）由 $x\ln(kx)-kx+1\le mx$，

得 $\ln(kx)+\dfrac{1}{x}-k\le m$，即 $m\ge f(x)_{max}$.

由（Ⅰ）知，

（1）当 $k\ge 2$ 时，$f(x)$ 在 $[\dfrac{1}{k},\dfrac{2}{k}]$ 上单调递减，所以 $f(x)_{max}=f(\dfrac{1}{k})=0$，所以 $m\ge 0$； .

（2）当 $0<k\le 1$ 时，$f(x)$ 在 $[\dfrac{1}{k},\dfrac{2}{k}]$ 上单调递增，所以 $f(x)_{max}=f(\dfrac{2}{k})=\ln 2-\dfrac{k}{2}$，

所以 $m\ge \ln 2-\dfrac{k}{2}$；

（3）当 $1<k<2$ 时，$f(x)$ 在 $[\dfrac{1}{k},1)$ 上单调递减，在 $(1,\dfrac{2}{k}]$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{max}=max\left\{f(\dfrac{1}{k}),f(\dfrac{2}{k})\right\}$.

又 $f(\dfrac{1}{k})=0$，$f(\dfrac{2}{k})=\ln 2-\dfrac{k}{2}$，

① 若 $f(\dfrac{2}{k})\ge f(\dfrac{1}{k})$，即 $\ln 2-\dfrac{k}{2}\ge 0$，所以 $1<k<2\ln 2$，此时 $f(x)_{max}=f(\dfrac{2}{k})=\ln 2-\dfrac{k}{2}$，

所以 $m\ge \ln 2-\dfrac{k}{2}$.

② 若 $f(\dfrac{2}{k})<f(\dfrac{1}{k})$，即 $\ln 2-\dfrac{k}{2}<0$，所以 $2\ln 2\le k<2$，此时 $f(x)_{\max}=0$，所以 $m\ge 0$

综上所述，当 $k\ge 2\ln 2$ 时，$m\ge 0$；

当 $0<k<2\ln 2$ 时，

$m\ge \ln 2-\dfrac{k}{2}$ . ...13 分

14.房山区 2017 年高三一模试卷高三数学（文）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点（1，$f(1)$）处的切线与直线 $y=ax+2$ 平行，求实数 a 的值；

（Ⅱ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅲ）当 $0<a<1$ 时，证明：曲线 $y=f(x)$ 在直线 $y=(\mathrm{e}-1)x$ 的上方.

19.（I） $f(x)^{'}=e^{x}-a$

因为函数 $y=f(x)$ 在点（1， $f(1)$ ）处的切线平行于直线 $y=ax+2$

所以 k= $f(1)^{'}=e^{1}-a=a$

所以 $a=\frac{1}{2}e$ ......3 分

（II）当 $a\le 0$ 时， $f(x)^{'}>0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 R 上单调递增

当 $a>0$ 时，令 $f(x)^{'}=e^{x}-a$=0,解得 $x=\ln a$

x	$(-\infty,\ln a)$	$\ln a$	$(\ln a,+\infty)$
$f(x)^{'}$	$-$	0	+
$f(x)$	↓		↑

综上所述：当 $a\le 0$ 时， $f(x)$ 在 R 上单调递增

当 $a>0$ 时， $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，

在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增 ......8 分

（III）当 $0<a<1$ 时，欲证曲线 $y=f(x)$ 在直线 $y=(\mathrm{e}-1)x$ 的上方

只需证明： $F(x)=e^{x}-ax-(e-1)x$ 的最小值大于零

$F^{/}(x)=e^{x}-a-(e-1)$，令 $F^{/}(x)=e^{x}-a-(e-1)=0$，则

$e^{x}=a+e-1$ ，因为 $0<a<1$ 时，所以

$a+e-1>0$ ，所以 x=ln(a+e-1)

x	$(-\infty,\ln(a+e-1))$	$\ln(a+e-1)$	$(\ln(a+e-1),+\infty)$
$f(x)^{'}$	—	0	+
$f(x)$	↓	$(a+e-1)(1-\ln(a+e-1))$	↑

因为 $0<a<1$，所以 $0<a+e-1<e$，所以 $1-\ln(a+e-1)>0$,

所以 $F(x)=e^x-ax-(e-1)x$ 的最小值大于零

所以曲线 $y=f(x)$ 在直线 y=(e-1)x 的上方 ……13 分

15.房山区 2017 年高三一模试卷高三数学（理）

已知函数 $f(x)=x-1+ae^x$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点（1， $f(1)$）处的切线平行于 x 轴，求 a 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的极值；

（Ⅲ）当 $a=1$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=kx-1$ 没有公共点，求 k 的取值范围.

18.（I） $f'(x)=1+ae^x$

因为 $f(x)=x-1+ae^x$，在点（1， $f(1)$ ）处的切线平行于 x 轴，

所以 k= $f'(1)=1+ae^1=0$

所以 $a=-\frac{1}{e}$

（II）当 $a\geq 0$ 时，令 $f'(x)>0$ 恒成立，所以函数无极值

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=1+ae^x$ =0，解得 $x=\ln(-\frac{1}{a})$

x	$(-\infty,\ln(-\frac{1}{a}),$	$\ln(-\frac{1}{a}),$	$(\ln(-\frac{1}{a}),+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\uparrow$	$\ln(-\frac{1}{a})-2$	$\downarrow$

$f(x)_{极大值}=\ln(-\frac{1}{a})-2$

(III)法一、当 a=1 时， $f(x)=x-1+e^x$ 与 $y=kx-1$ 无公共点

只需证 $h(x)=x(1-k)+e^x$ 无零点

即 $h(x)=0$ 无根，即 $e^x=(k-1)x$，由数形结合知

当 $k=1$ 时无零点
当 $k<1$ 时有一个零点

当 $k>1$ 时， e^x 与 $(k-1)x$ 相切时，有一个零点

设切点(x_0,y_0)，$e^{x_0}=\dfrac{e^{x_0}}{x_0}$，所以$x_0=1$，所以切点为（1，e）

所以 k-1=e，所以$k=1+e$

综上所述$1\le k<e+1$

法二、当 a=1 时，$f(x)=x-1+e^x$与$y=kx-1$无公共点

只需证$h(x)=x(1-k)+e^x$无零点

$h'(x)=1-k+e^x$

(1)当$k=1$时，$h(x)=\mathrm{e}^x$，无零点

(2)当$k<1$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，

$h(\frac{1}{k-1})=-1+e^{\frac{1}{k-1}}<0$，$h(0)=$

所以$h(x)$有一个零点

(3)当$k>1$时，令$h'(x)=e^x-k+1=0$

解得$x=\ln(k-1)$

x	$(-\infty,\ln(k-1))$,	$\ln(k-1)$,	$(\ln(k-1),+\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↓	极小	↑

$h(x)_{极小}=h(\ln(k-1)=(1-k)\ln((k-1)-1)$

当$\ln(k-1)=1$，即$k=e+1$，$h'(x)_{极小}=0$，有一个零点

当$\ln(k-1)<1$，即$1<k<e+1$，$h'(x)_{极小}>0$，无零点

当$\ln(k-1)>1$，即$k>e+1$，$h'(x)_{极小}<0$，$h(0)=1>0$，一定有零点

综上所述：$1\le k<e+1$

16. 北京市东城区 2016-2017 学年度第二学期高三综合练习（一）数学（文科）

设函数$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+ax$，$a\in\mathbf{R}$.

(Ⅰ)若$x=2$是$f(x)$的极值点，求a的值，并讨论$f(x)$的单调性；

(Ⅱ)已知函数 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}ax^2+\frac{2}{3}$，若 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有零点，求 a 的取值范围；

(Ⅲ)设 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，试讨论过两点 $(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$ 的直线能否过点 $(1,1)$，若能，求 a 的值；若不能，说明理由.

解析：（Ⅰ）由 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+ax$ 求得 $f'(x)=x^2-x+a$

$\therefore f'(2)=4-2+a=0\Rightarrow a=-2$，代入 $f'(x)=x^2-x-2=(x-2)(x+1)$

令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=2$，$x_2=-1$

$\therefore$当$x\in(-\infty,-1),(2,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当$x\in(-1,2)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

……………………4 分

（Ⅱ）由 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}ax^2+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}x^3-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a)x^2+ax+\frac{2}{3}$

求得 $g'(x)=x^2-(1+a)x+a=(x-1)(x-a)$

$\therefore$当$a\ge 1$时，当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$ 恒成立，$g(x)$ 单调递增，又 $g(0)=\frac{2}{3}>0$

此时 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内没有零点；

当 $0<a<1$ 时，当 $x\in(0,a)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $x\in(a,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减．又 $g(0)=\frac{2}{3}>0$

此时欲使 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有零点，必有 $g(1)<0$.

$g(1)<0\Rightarrow\frac{1}{3}-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a)+a+\frac{2}{3}=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}<0\Rightarrow a<-1$　　无解

当 $a\le 0$ 时，当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$ 恒成立，$g(x)$ 单调递减

此时欲使 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有零点，必有 $g(1)<0\Rightarrow a<-1$.

综上，a 的取值范围为 $(-\infty,-1)$.

……………………9 分

(Ⅲ)不能．原因如下：

设 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，则导函数 $f'(x)=x^2-x+a$ 有两个不同的零点

$\therefore \Delta>0\Rightarrow 1-4a>0\Rightarrow a<\frac{1}{4}$，且 x_1，x_2 为方程 $x^2-x+a=0$ 的两根

$x_1^2-x_1+a=0\Rightarrow x_1^2=x_1-a$

$\therefore f(x_1)=\frac{1}{3}x_1^3-\frac{1}{2}x_1^2+ax_1=\frac{1}{3}x_1(x_1-a)-\frac{1}{2}x_1^2+ax_1=-\frac{1}{6}x_1^2+\frac{2}{3}ax_1=-\frac{1}{6}(x_1-a)+\frac{2}{3}ax_1$

$\therefore f(x_1)=(\frac{2}{3}a-\frac{1}{6})x_1+\frac{1}{6}a$　　同理 $f(x_2)=(\frac{2}{3}a-\frac{1}{6})x_2+\frac{1}{6}a$

由此可知过两点$(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$的直线方程为$y=(\frac{2}{3}a-\frac{1}{6})x+\frac{1}{6}a$

若直线过点$(1,1)$，则$1=(\frac{2}{3}a-\frac{1}{6})+\frac{1}{6}a\Rightarrow\frac{5}{6}a=\frac{7}{6}\Rightarrow a=\frac{7}{5}$

前面已经讨论过若 $f(x)$ 有两个极值点，则 $a<\frac{1}{4}$，显然不合题意.

综上，过两点$(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$的直线不能过点$(1,1)$.

……………………14 分

17.北京市东城区 2016-2017 学年度第二学期高三综合练习（一）数学理科）

已知函数 $f(x)=2\ln x+\frac{1}{x}-mx(m\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）当$m=-1$时，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上为单调递减，求 m 的取值范围；

（Ⅲ）设$0<a<b$，求证：$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$.

（18）（共 13 分）

解：（Ⅰ） $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

当$m=-1$时， $f(x)=2\ln x+\frac{1}{x}+x$，

所以 $f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+1$.

因为 $f(1)=2$ 且 $f'(1)=2$，

所以曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$2x-y=0$. …………4 分

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上为单调递减，

则 $f'(x)\le 0$在$(0,+\infty)$上恒成立.

即$\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-m\le 0$在$(0,+\infty)$上恒成立.

即$\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\le m$在$(0,+\infty)$上恒成立.

设 $g(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}(x>0)$，

则 $m\geq[g(x)]_{\max}$.

因为 $g(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}=-(\frac{1}{x}-1)^2+1(x>0)$，

所以当 $x=1$ 时， $g(x)$ 有最大值1.

所以 m 的取值范围为 $[1,+\infty)$. ……………………9 分

（III）因为 $0<a<b$，不等式 $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$ 等价于 $\ln b-\ln a<\frac{b-a}{\sqrt{ab}}$.

即 $\ln\frac{b}{a}<\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}$，令 $\sqrt{\frac{b}{a}}=t(t>1)$，原不等式转化为 $2\ln t<t-\frac{1}{t}$.

令 $h(t)=2\ln t+\frac{1}{t}-t$，

由（II）知 $f(x)=2\ln x+\frac{1}{x}-x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $h(t)=2\ln t+\frac{1}{t}-t$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

所以，当 $t>1$ 时， $h(t)<h(1)=0$.

即当 $t>1$ 时， $2\ln t+\frac{1}{t}-t<0$ 成立.

所以，当时 $0<a<b$，不等式 $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$ 成立. ……………………13 分

18.北京市朝阳区 2017 届高三第一次（3 月）综合练习数学（理）试题

已知函数 $f(x)=\ln x-ax-1(a\in\mathbf{R}),g(x)=xf(x)+\frac{1}{2}x^2+2x$.

（I）求 $f(x)$ 的单调区间；

（II）当 $a=1$ 时，若函数 $g(x)$ 在区间 $(m,m+1)(m\in\mathbf{Z})$ 内存在唯一的极值点，求 m 的值.

(18)（本小题满分 13 分）

解：（I）由已知得 $x>0$， $f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$.

（i）当 $a\leqslant 0$ 时， $f'(x)>0$ 恒成立，则函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为增函数；

（ii）当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $0<x<\frac{1}{a}$；

由 $f'(x)<0$，得 $x>\frac{1}{a}$；

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\frac{1}{a})$，单调递减区间为 $(\frac{1}{a},+\infty)$． ......4 分

（Ⅱ）因为 $g(x)=xf(x)+\frac{1}{2}x^2+2x=x(\ln x-x-1)+\frac{1}{2}x^2+2x=x\ln x-\frac{1}{2}x^2+x$，

则 $g'(x)=\ln x+1-x+1=\ln x-x+2=f(x)+3$．

由（Ⅰ）可知，函数 $g'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

又因为 $g'(\frac{1}{e^2})=-2-\frac{1}{e^2}+2=-\frac{1}{e^2}<0$，$g'(1)=1>0$，

所以 $g'(x)$ 在 $(0,1)$ 上有且只有一个零点 x_1．

又在 $(0,x_1)$ 上 $g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减；

在 $(x_1,1)$ 上 $g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(x_1,1)$ 上单调递增.

所以 x_1 为极值点，此时 $m=0$．

又 $g'(3)=\ln 3-1>0$，$g'(4)=2\ln 2-2<0$，

所以 $g'(x)$ 在 $(3,4)$ 上有且只有一个零点 x_2．

又在 $(3,x_2)$ 上 $g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(3,x_2)$ 上单调递增；

在 $(x_2,4)$ 上 $g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(x_2,4)$ 上单调递减.

所以 x_2 为极值点，此时 $m=3$.

综上所述，$m=0$ 或 $m=3$． ....13 分

19.北京市朝阳区高三年级第一次综合练习数学测试题（文史类） 2017.3

已知函数 $f(x)=x^3-3ax+\mathrm{e}, g(x)=1-\ln x$，其中 e 为自然对数的底数.

(Ⅰ)若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $l:x+2y=0$ 垂直，求实数 a 的值；

（Ⅱ）设函数 $F(x)=-x[g(x)+\frac{1}{2}x-2]$，若 $F(x)$ 在区间 $(m,m+1)(m\in\mathbf{Z})$ 内存在唯一的极值点，求 m 的值；

（Ⅲ）用 $\max\{m,n\}$ 表示 m,n 中的较大者，记函数 $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}(x>0)$.若函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有 2 个零点，求实数 a 的取值范围.

20．（本小题满分 13 分）

解：

（Ⅰ）易得，$f'(x)=3x^2-3a$，所以 $f'(1)=3-3a$，

依题意，$(3-3a)(-\frac{1}{2})=-1$，解得 $a=\frac{1}{3}$；　　　　…………………………3 分

（Ⅱ）因为 $F(x)=-x[g(x)+\frac{1}{2}x-2]=-x\left[(1-\ln x)+\frac{1}{2}x-2\right]=x\ln x-\frac{1}{2}x^2+x$，

则 $F'(x)=\ln x+1-x+1=\ln x-x+2$. 设 $t(x)=\ln x-x+2$，

则 $t'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$.

令 $t'(x)=0$，得 $x=1$.

则由 $t'(x)>0$，得 $0<x<1$，$F'(x)$ 为增函数；

由 $t'(x)<0$，得 $x>1$，$F'(x)$ 为减函数；

而 $F'(\frac{1}{e^2})=-2-\frac{1}{e^2}+2=-\frac{1}{e^2}<0$，$F'(1)=1>0$.

则 $F'(x)$ 在 $(0,1)$ 上有且只有一个零点 x_1，

且在 $(0,x_1)$ 上 $F'(x)<0$，$F(x)$ 为减函数；

在 $(x_1,1)$ 上 $F'(x)>0$，$F(x)$ 为为增函数.

所以 x_1 为极值点，此时 $m=0$.

又 $F'(3)=\ln 3-1>0$，$F'(4)=2\ln 2-2<0$，

则 $F'(x)$ 在 $(3,4)$ 上有且只有一个零点 x_2，

且在 $(3,x_2)$ 上 $F'(x)>0$，$F(x)$ 为增函数；

在 $(x_2,4)$ 上 $F'(x)<0$，$F(x)$ 为减函数.

所以 x_2 为极值点，此时 $m=3$.

综上 $m=0$ 或 $m=3$.　　　　……………………9 分

（Ⅲ）（1）当 $x\in(0,e)$ 时，$g(x)>0$，依题意，$h(x)\ge g(x)>0$，不满足条件；

（2）当 $x=e$ 时，$g(e)=0$，$f(e)=e^3-3ae+e$，

①若 $f(e)=e^3-3ae+e\le 0$，即 $a\ge\frac{e^2+1}{3}$，则 e 是 $h(x)$ 的一个零点；

②若 $f(\mathrm{e})=\mathrm{e}^3-3a\mathrm{e}+\mathrm{e}>0$，即 $a<\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{3}$，则 e 不是 $h(x)$ 的零点；

（3）当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，$g(x)<0$，所以此时只需考虑函数 $f(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上零点的情况.因为 $f'(x)=3x^2-3a>3\mathrm{e}^2-3a$，所以

①当 $a\le\mathrm{e}^2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递增.

又 $f(\mathrm{e})=\mathrm{e}^3-3a\mathrm{e}+\mathrm{e}$，所以

（i）当 $a\le\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{3}$ 时，$f(\mathrm{e})\ge0$，$f(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上无零点；

（ii）当 $\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{3}<a\le\mathrm{e}^2$ 时，$f(\mathrm{e})<0$，

又 $f(2\mathrm{e})=8\mathrm{e}^3-6a\mathrm{e}+\mathrm{e}\ge8\mathrm{e}^3-6\mathrm{e}^3+\mathrm{e}>0$，

所以此时 $f(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上恰有一个零点；

②当 $a>\mathrm{e}^2$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm\sqrt{a}$.

由 $f'(x)<0$，得 $\mathrm{e}<x<\sqrt{a}$；

由 $f'(x)>0$，得 $x>\sqrt{a}$；

所以 $f(x)$ 在 $(\mathrm{e},\sqrt{a})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{a},+\infty)$ 上单调递增.

因为 $f(\mathrm{e})=\mathrm{e}^3-3a\mathrm{e}+\mathrm{e}<\mathrm{e}^3-3\mathrm{e}^3+\mathrm{e}<0$，

$f(2a)=8a^3-6a^2+\mathrm{e}>8a^2-6a^2+\mathrm{e}=2a^2+\mathrm{e}>0$，

所以此时 $f(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上恰有一个零点；

综上，$a>\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{3}$.　　　　……………………………………13 分

20.北京市朝阳区高三年级第二次综合练习数学学科测试（理工类）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+x^2-x$，$g(x)=x^2+ax+b,\ a,b\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线 l 与曲线 $y=g(x)$ 切于点 $(1,c)$，求 a,b,c 的值；

（Ⅲ）若 $f(x)\ge g(x)$ 恒成立，求 $a+b$ 的最大值.

（19）（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）$F(x)=\mathrm{e}^x-2x-b$，则 $F'(x)=\mathrm{e}^x-2$.

令 $F'(x)=\mathrm{e}^x-2>0,$ 得 $x>\ln 2$，所以 $F(x)$ 在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增.

令 $F'(x)=\mathrm{e}^x-2<0,$ 得 $x<\ln 2$，所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2)$ 上单调递减. …………4 分

（Ⅱ）因为 $f'(x)=\mathrm{e}^x+2x-1$，所以 $f'(0)=0$，所以 l 的方程为 $y=1$.

依题意，$-\dfrac{a}{2}=1$，$c=1$.

于是 l 与抛物线 $g(x)=x^2-2x+b$ 切于点 $(1,1)$，

由 $1^2-2+b=1$ 得 $b=2$.

所以 $a=-2,b=2,c=1.$ …………8 分

（Ⅲ）设 $h(x)=f(x)-g(x)=\mathrm{e}^x-(a+1)x-b$，则 $h(x)\ge 0$ 恒成立.

易得 $h'(x)=\mathrm{e}^x-(a+1).$

（1）当 $a+1\le 0$ 时，

因为 $h'(x)>0$，所以此时 $h(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

①若 $a+1=0$，则当 $b\le 0$ 时满足条件，此时 $a+b\le -1$；

②若 $a+1<0$，取 $x_0<0$ 且 $x_0<\dfrac{1-b}{a+1}$,

此时 $h(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-(a+1)x_0-b<1-(a+1)\dfrac{1-b}{a+1}-b=0$，所以 $h(x)\ge 0$ 不恒成立.

不满足条件；

（2）当 $a+1>0$ 时，

令 $h'(x)=0$，得 $x=\ln(a+1)$. 由 $h'(x)>0$，得 $x>\ln(a+1)$；

由 $h'(x)<0$，得 $x<\ln(a+1)$.

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,\ln(a+1))$ 上单调递减，在 $(\ln(a+1),+\infty)$ 上单调递增.

要使得“$h(x)=\mathrm{e}^x-(a+1)x-b\ge 0$ 恒成立”，必须有

“当 $x=\ln(a+1)$ 时，$h(x)_{\min}=(a+1)-(a+1)\ln(a+1)-b\ge 0$”成立.

所以 $b\le (a+1)-(a+1)\ln(a+1)$. 则 $a+b\le 2(a+1)-(a+1)\ln(a+1)-1$.

令 $G(x)=2x-x\ln x-1, x>0,$ 则 $G'(x)=1-\ln x.$

令 $G'(x)=0$，得 $x=\mathrm{e}.$ 由 $G'(x)>0$，得 $0<x<\mathrm{e}$；

由 $G'(x)<0$，得 $x>\mathrm{e}.$ 所以 $G(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减,

所以，当 $x=\mathrm{e}$ 时，$G(x)_{\max}=\mathrm{e}-1.$

从而，当 $a=\mathrm{e}-1, b=0$ 时，$a+b$ 的最大值为 $\mathrm{e}-1$.

综上，$a+b$ 的最大值为 $\mathrm{e}-1$.

21.北京市朝阳区高三年级第二次综合练习 数学学科测试（文史类）

已知函数 $f(x)=x\ln x$，$g(x)=\dfrac{a}{2}x^2+x-a\ (a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）若直线 $x=m\ (m>0)$ 与曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 分别交于 M, N 两点.设曲线 $y=f(x)$ 在点 M 处的切线为 l_1，$y=g(x)$ 在点 N 处的切线为 l_2.

（ⅰ）当 $m=\mathrm{e}$ 时，若 $l_1\perp l_2$，求 a 的值；

（ⅱ）若 $l_1 // l_2$，求 a 的最大值；

（Ⅱ）设函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 在其定义域内恰有两个不同的极值点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$.

若 $\lambda>0$，且 $\lambda\ln x_2-\lambda>1-\ln x_1$ 恒成立，求 λ 的取值范围.

（20）（本小题满分 13 分）

解：(Ⅰ) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x>0\}$.

$f'(x)=1+\ln x$，$g'(x)=ax+1$.

（ⅰ）当 $m=\mathrm{e}$ 时，$f'(\mathrm{e})=2$，$g'(\mathrm{e})=a\mathrm{e}+1$.

因为 $l_1\perp l_2$，所以 $f'(\mathrm{e})\cdot g'(\mathrm{e})=-1$.

即 $2(a\mathrm{e}+1)=-1$.

解得 $a=-\dfrac{3}{2\mathrm{e}}$. ………………3 分

（ⅱ）因为 $l_1 // l_2$，则 $f'(m)=g'(m)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解.

即 $\ln m-am=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解.

设 $F(x)=\ln x-ax$， $x>0$，

则 $F'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$.

（1）当 $a\le 0$ 时， $F'(x)>0$ 恒成立，则函数 $F(x)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上为增函数.

1° 当 $a<0$ 时，取 $x=\mathrm{e}^a$， $F(\mathrm{e}^a)=a-a\mathrm{e}^a=a(1-\mathrm{e}^a)<0$.

取 $x=\mathrm{e}$， $F(\mathrm{e})=1-a\mathrm{e}>0$,

所以 $F(x)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上存在零点.

2° 当 $a=0$ 时， $F(x)=\ln x$ 存在零点， $x=1$，满足题意.

（2）当 $a>0$ 时，令 $F'(x)=0$，则 $x=\frac{1}{a}$.

则 $F(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 上为增函数， $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上为减函数.

所以 $F(x)$ 的最大值为 $F(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}-1\ge 0$.

解得 $0<a\le\frac{1}{\mathrm{e}}$.

取 $x=1$， $F(1)=-a<0$.

因此当 $a\in(0,\frac{1}{\mathrm{e}}]$ 时，方程 $F(x)=0$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上有解.

所以， a 的最大值是 $\frac{1}{\mathrm{e}}$. ………………8 分

另解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x\middle|x>0\right\}$.

$f'(x)=1+\ln x$， $g'(x)=ax+1$.

则 $f'(m)=1+\ln m$， $g'(m)=am+1$.

因为 $l_1 /\!/ l_2$， 则 $f'(m)=g'(m)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上有解.

即 $\ln m=am$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上有解.

因为 $m>0$，所以 $a=\frac{\ln m}{m}$.

令 $F(x)=\frac{\ln x}{x}$ ($x>0$).

$F'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=($

得 $x=\mathrm{e}$.

当 $x\in(0,\mathrm{e})$，$F'(x)>0$，$F(x)$ 为增函数；

当 $x\in\left(\mathrm{e},+\infty\right)$，$F'(x)<0$，$F(x)$ 为减函数；

所以 $F(x)_{\max}=F(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

所以，a 的最大值是 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. ………………8 分

（Ⅱ） $h(x)=x\ln x-\dfrac{a}{2}x^2-x+a \quad (x>0)$

$h'(x)=\ln x-ax$.

因为 x_1,x_2 为 $h(x)$ 在其定义域内的两个不同的极值点，

所以 x_1,x_2 是方程 $\ln x-ax=0$ 的两个根.

即 $\ln x_1=ax_1$，$\ln x_2=ax_2$.

两式作差得，$a=\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$.

因为 $\lambda>0,\ 0<x_1<x_2$，由 $\lambda\ln x_2-\lambda>1-\ln x_1$，得 $1+\lambda<\ln x_1+\lambda\ln x_2$.

则 $1+\lambda<a(x_1+\lambda x_2)\Leftrightarrow a>\dfrac{1+\lambda}{x_1+\lambda x_2}$

$$\Leftrightarrow\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\frac{1+\lambda}{x_1+\lambda x_2}$$

$$\Leftrightarrow\ln\frac{x_1}{x_2}<\frac{(1+\lambda)(x_1-x_2)}{x_1+\lambda x_2}.$$

令 $t=\dfrac{x_1}{x_2}$，则 $t\in(0,1)$，由题意知:

$\ln t<\dfrac{(1+\lambda)(t-1)}{t+\lambda}$ 在 $t\in(0,1)$ 上恒成立，

令 $\varphi(t)=\ln t-\dfrac{(1+\lambda)(t-1)}{t+\lambda}$，

则 $\varphi'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{(1+\lambda)^2}{(t+\lambda)^2}=\dfrac{(t-1)(t-\lambda^2)}{t(t+\lambda)^2}$.

（1） 当 $\lambda^2\ge1$，即 $\lambda\ge1$ 时，

$\forall t\in(0,1)$，$\varphi'(t)>0$，所以$\varphi(t)$在$\left(0,1\right)$上单调递增.

又$\varphi(1)=0$，则$\varphi(t)<0$在$\left(0,1\right)$上恒成立.

（2） 当$\lambda^2<1$，即$0<\lambda<1$时，

$t\in\left(0,\lambda^2\right)$时，$\varphi'(t)>0$，$\varphi(t)$在$\left(0,\lambda^2\right)$上为增函数；

当$t\in\left(\lambda^2,1\right)$时，$\varphi'(t)<0$，$\varphi(t)$在$\left(\lambda^2,1\right)$上为减函数.

又$\varphi(1)=0$，所以$\varphi(t)$不恒小于0，不合题意.

综上，$\lambda\in[1,+\infty)$. ··················13 分

解：（Ⅰ）当$a=0$时，因为$f(x)=x^2\cdot e^{-x}$，

所以$f'(x)=(-x^2+2x)\cdot e^{-x}$， ············1 分

$f'(-1)=-3e$. ············2 分

又因为$f(-1)=e$， ············3 分

所以曲线$y=f(x)$在点$(-1,f(-1))$处的切线方程为

$y-e=-3e(x+1)$，即$3ex+y+2e=0$. ························4 分

（Ⅱ）“对任意的$t\in[0,2]$，存在$s\in[0,2]$使得$f(s)\geq g(t)$成立”等价于“在区间$[0,2]$上，$f(x)$的最大值大于或等于$g(x)$的最大值”. ·····················5 分

因为$g(x)=x^2-x-1=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}$，

所以$g(x)$在$[0,2]$上的最大值为$g(2)=1$.

$$\begin{aligned}f'(x)&=(2x+a)\cdot e^{-x}-(x^2+ax-a)\cdot e^{-x}\\&=-e^{-x}[x^2+(a-2)x-2a]\\&=-e^{-x}(x-2)(x+a)\end{aligned}$$

令$f'(x)=0$，得$x=2$或$x=-a$. ·····················7 分

① 当$-a\leq 0$，即$a\geq 0$时，

$f'(x)\geq 0$在$[0,2]$上恒成立，$f(x)$在$[0,2]$上为单调递增函数，

$f(x)$的最大值为$f(2)=(4+a)\cdot\frac{1}{e^2}$，

由$(4+a)\cdot\frac{1}{e^2}\geq 1$，得$a\geq e^2-4$. ···············9 分

② 当$0<-a<2$，即$-2<a<0$时，

当$x\in(0,-a)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$为单调递减函数，

当$x\in(-a,2)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$为单调递增函数.

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(0)=-a$ 或 $f(2)=(4+a)\cdot\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$，

由 $-a\geq 1$，得 $a\leq -1$；由 $(4+a)\cdot\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\geq 1$，得 $a\geq \mathrm{e}^2-4$．

又因为 $-2<a<0$，所以 $-2<a\leq -1$． ……………11 分

③ 当 $-a\geq 2$，即 $a\leq -2$ 时，

$f'(x)\leq 0$ 在 $[0,2]$ 上恒成立， $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上为单调递减函数，

$f(x)$ 的最大值为 $f(0)=-a$，

由 $-a\geq 1$，得 $a\leq -1$，

又因为 $a\leq -2$，所以 $a\leq -2$．

综上所述，实数 a 的值范围是 $a\leq -1$ 或 $a\geq \mathrm{e}^2-4$． ………………………13 分