常见函数的导数和求导法则

上节课我们浅浅地了解到了导数是个什么玩意，但是相信你也一定发现了一个问题——按照我们上面的方法，所有函数都是同一套法则来求导，按照定义法，有些函数的导数是可以求得的，但是还要相当一部分函数是不易求出导数的，甚至我们对那个式子无能为力的.大多数函数的导数都不简单，因而我们有一套专门的工具来解决这个问题.

1、常值函数和幂函数的导数

可能有些抽象了，那么就让我们先做组例题吧：

例题2：

用定义法求出以下函数的导数：

(1) $f(x)=C$； (2) $f(x)=\frac{1}{x}$

(3) $f(x)=x$； (4) $f(x)=x^2$

(5) $f(x)=\sqrt{x}$

解答：

使用上一章的结论：

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

(1)

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0$$

(2)

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\frac{1}{x+\Delta x})-\frac{1}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x(x+\Delta x)}=-\frac{1}{x^2}$$

(3)

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=1$$

(4)

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}2+(\Delta x)=2$$

(5)

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(x+\Delta x)}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{(x+\Delta x)}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{(x+\Delta x)}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

由此，我们得到了一张简易的**导函数表**：

$C'=0$

$x' = x^0$

$(x^2)' = 2x^1$

$(x^{-1})' = -x^{-2}$

$(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

你发现规律了吗！在这里我们将不同形式整理为幂函数的形式，不难发现其中所蕴藏的规律：

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

此处的式子经过证明，**对于任意的实数α都成立**，具体证明过程在B部分给出，有兴趣的同学可以观赏下，但是各位同学不必一定掌握，以后的学习、考试可以**直接运用此结论**哦！

2、导数表

就像对数的出现一样，我们伟大的数学家为了~~偷懒~~避免重复劳动，将一些常见的导数记录了下来，这就是**导数表**：

$$\begin{gathered} C' = 0 \\ (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \\ (a^x)' = a^x \ln a \\ (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \\ (\sin x)' = \cos x \\ (\cos x)' = \sin x \end{gathered}$$

特别的：

$$\begin{gathered} \text{当}a = e\text{的时候，对数函数的导数：} \\ (\ln x)' = \frac{1}{x} \\ \text{当}a = e\text{的时候，指数函数的导数：} \\ (e^x)' = e^x \end{gathered}$$

3、求导法则

此时此刻，就一定有同学会说了，这几个函数也不够用啊，我们平常看到的函数都是奇形怪状的，这里头一个都没有啊！

例题3：

现在给出两个函数$f(x) = x^2$，$g(x) = x$，请尝试猜出以下五个函数的导数.

$$\begin{gathered} a(x) = f(x) + g(x) \\ b(x) = f(x) - g(x) \\ c(x) = f(x) * g(x) \\ d(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \\ e(x) = f(g(x)) \end{gathered}$$

大家依靠直觉能够得到大致的结论.即使猜错了也没有关系，几乎没有学生可以依靠现有的知识真正推出这个求导法则.其中涉及到了很多复杂的高等数学内容，严谨证明将会在B部分给出，不要求掌握，我的学习经验告诉我，求导法则这一部分，我们可以像导数表一样，先背下来，然后做题，在各式各样题目中掌握下来，先取做做题，给自己一些正反馈.至于理解其中的道理，那都是后话了.

$$
\begin{gathered}
[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x) \\
[f(x) * g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
[Cf(x)]' = Cf'(x) \\
[\frac{f(x)}{g(x)}]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \\
[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)
\end{gathered}
$$

这一部分看似轻松愉快，但是却是我们整个导数章节之中最难的一部分（即使很多老师管这些叫做基础，这也确实是基础）——这里不是思维难度，而是考验细心和严谨的态度。直到高考前，都会有不少同学在商的导、复合函数的导上面出错，因此万万不能马虎.

初期出错是再正常不过的了，但是一定要即使改正.与三角函数不同，在这一部分，我强烈建议各位同学常备一张导数表、法则表，完全按照表上的公式进行运算（不要大意，即使你看着表做，也不一定就全都能导对），直到自己有一种“我觉得我行了”的感觉以后，再脱离导数表独立做题.

其原因就在于，人们对前几次见到的东西印象是最深刻的，如果一开始就背错了，那么八成接下来很长一段时间都不会对了.

本期的课后作业有些多，但是如果认真完成了，一定会为未来的学习打下坚实的基础.