# Đồ họa máy tính

# Đường cong và bề mặt I

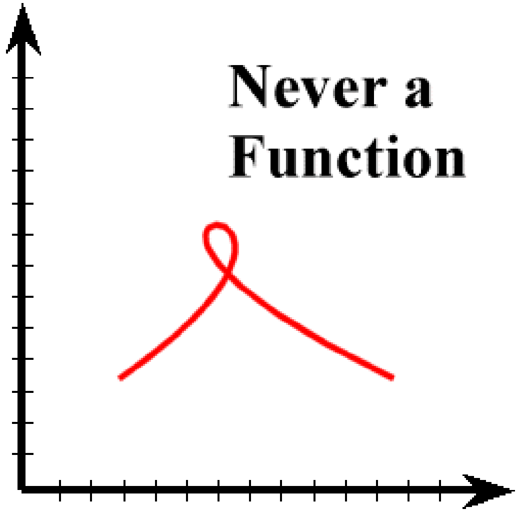
# Biểu diễn các đối tượng cong

- Bằng tham số
- Qua ẩn của phương trình

# Tại sao lại dùng tham số?

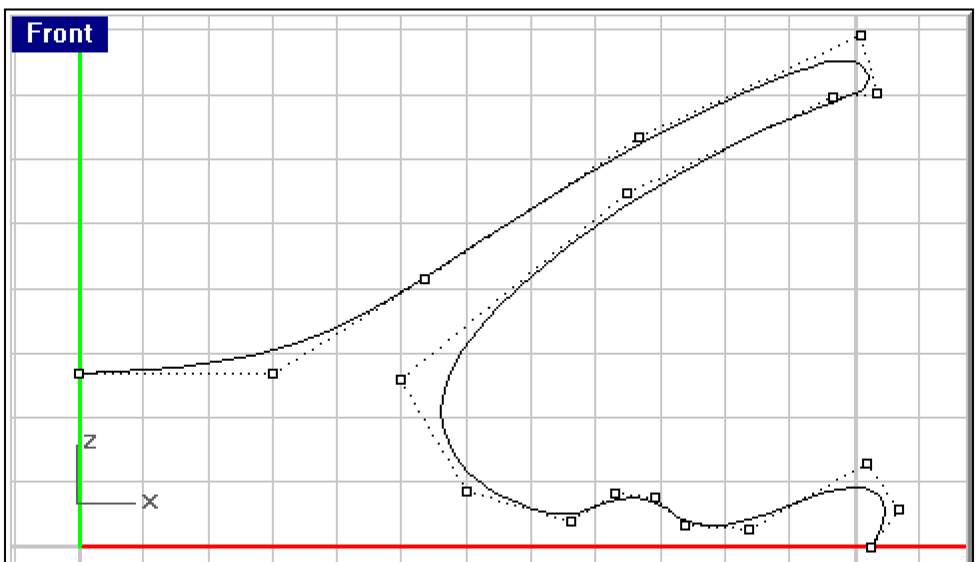
- Các đường cong tham số rất linh hoạt.
- Chúng không cần phải là hàm
  - Đường cong có thể có nhiều giá trị ứng với một tọa độ x.
- Số lượng tham số thường cho thấy chiều của vật thể

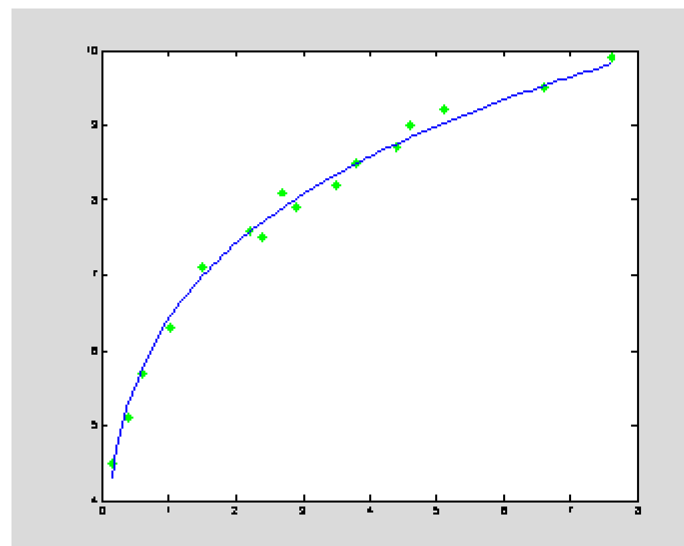
  (x(u,v), y(u,v), z(u,v))



# Mô tả một đường cong và bề mặt

- Mô hình hóa đối tượng một cách chính xác với  một sai số cho phép
- Mô hình theo kiểu phác thảo gần đúng



# Bài toán xấp xỉ tổng quát

- Hàm g là một xấp xỉ tốt với các tính chất sau:

1. Hàm g rất gần f theo một tính chất nào đó
2. Các hệ số ci là duy nhất

# Bài toán xấp xỉ tổng quát

- Cho một tập cố định các hàm φ1, φ2, …, φk, tìm các hệ số ci sao cho:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \varphi_i(x)$$

là một phép tính xấp xỉ đối với một hàm f(x) nào đó. Hàm φi thường được gọi là các *hàm cơ sở* (*basic function*)

# Xấp xỉ bình phương tối thiểu

- Hàm g(x,  c1, c2, …, ck) mà tối thiểu

$$E(c_1,c_2,\ldots,c_k)=\sum_{j=1}^{s}\left(f(x_j)-g(x_j;c_1,c_2,\ldots,c_k)\right)^2$$

được gọi là *xấp xỉ bình phương tối thiểu* (*least squares approximation*) của hàm f(x)

# Một số ràng buộc

1. Những ràng buộc nội suy:

   g(xj) = f(xj) với một số điểm xj cố định.

2. Kết hợp điều kiện (1) với những điều kiện về độ trơn, ví dụ như điều kiện về đạo hàm của g và f đồng nhất tại điểm xj.

3. Các ràng buộc về tính trực giao

   (f - g) • φi = 0     với mọi i.

4. Những ràng buộc về hình dạng trực quan, ví dụ như độ cong của đường cong và bề mặt.

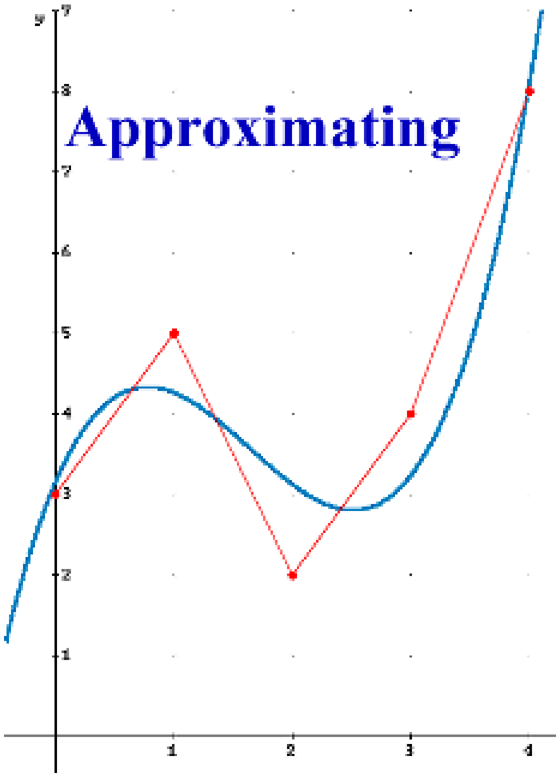
# Đường cong tham số

$$p:[a,b]\rightarrow R^m,\, p(u)=(\,p_1(u),\,p_2(u),\ldots,\,p_m(u))$$

với các hàm thành phần pi của p là các hàm giá trị thực thông thường với một biến thực.

# Mô tả một đường cong

- Điểm điều khiển:
  - Là tập các điểm ảnh hưởng đến hình dạng của đường cong.
- Knots:
  - Các điểm nằm trên đường cong.
- Đường cong nội suy (Interpolating spline):
  - Các đoạn cong đi qua điểm điều khiển.
- Đường cong xấp xỉ (Approximating spline):
  - Các điểm điều khiển ảnh hưởng đến hình dáng của đoạn



# Phép nội suy Lagrange

- Bài toán:cho các điểm (x0, y0), (x1, y1), …, và (xn, yn), tìm một đa thức p(x), để p(xi) = yi với i = 0, 1, …, n.
- Đa thức Lagrange:

$$L_{i,n}(x) = L_{i,n}(x; x_0, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_{i,n}(x)$$

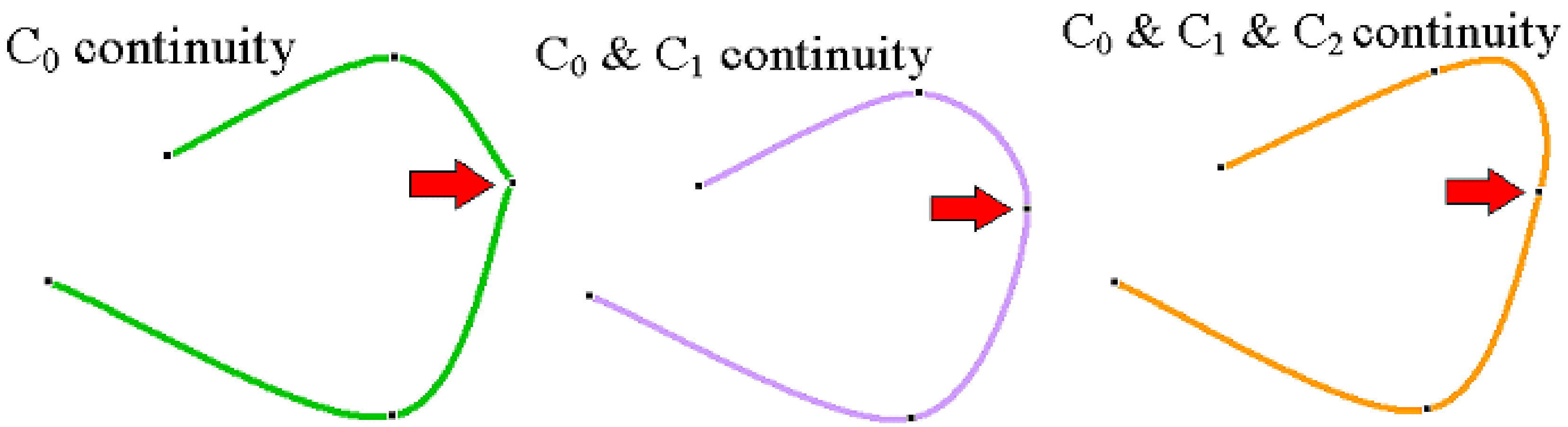
# Phép nội suy Lagrange

- Hạn chế
- Bậc lớn nếu n lớn
- Tạo vết gợn không mong muốn

# Các đoạn cong

Chúng ta có thể biểu diễn một đường cong với độ dài bất kỳ bằng một chuỗi các đoạn cong nối với nhau.

Chúng ta quan tâm đến các đoạn này nối với nhau như thế nào …



# Đường cong tham số bậc 3 (Parametric Cubic Curves)

- Để đảm bảo tính liên tục $C_2$ các hàm của chúng ta phải có bậc ít nhất là 3.
- Đường cong cubic có 4 bậc tự do và thay đổi 4 thứ.
- Sử dụng thức: x(*t*) có bậc *n* là một hàm của *t*. - y(*t*) và *z*(*t*) cũng tương tự và được xử lý độc lập.
- Có nghĩa là:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i$$

# Đường cong Hermite

- 4 bậc tự do, 2 để điều khiển tính liên tục $C_0$ và $C_1$ tại mỗi đầu.
- Sử dụng đa thức để biểu diễn đường cong.
- Xác định: $x = X(t)$ theo các giá trị $x_0$, $x_0^{/}$, $x_1$, $x_1^{/}$

  Bây giờ:

$$X(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$$

và $$X^{/}(t) = 3a_3t^2 + 2a_2t + a_1$$

# Tìm các hệ số Hermite

Thay t vào hai đầu:

$x_0 = X(0) = a_0$

$x_0' = X'(0) = a_1$

$x_1 = X(1) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0$

$x_1' = X'(1) = 3a_3 + 2a_2 + a_1$

Và lời giải là:

$a_0 = x_0$

$a_1 = x_0'$

$a_2 = -3x_0 - 2x_0' + 3x_1 - x_1'$

$a_3 = 2x_0 + x_0' - 2x_1 + x_1'$

# Ma trận Hermite: $M_H$

Đa thức kết quả có thể được biểu diễn qua dạng ma trận:

$X(t) = t^T M_H q$ ( q là véc-tơ điều khiển)

$$X(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_0^{/} \\ x_1 \\ x_1^{/} \end{bmatrix}$$

Bây giờ chúng ta có thể định nghĩa đa giác tham số cho các tọa độ một cách độc lập X(t), Y(t) và Z(t)

# Các hàm Hermite cơ bản

$$F_1(x) = (x-1)^2(2x+1)$$

$$F_2(x) = x^2(3-2x)$$

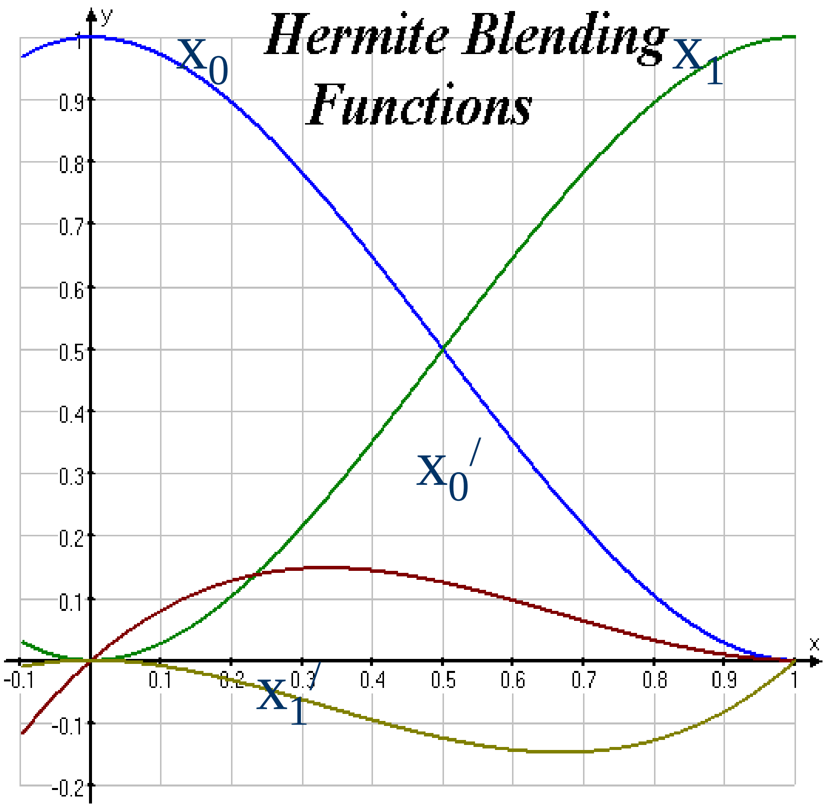
$$F_3(x) = (x-1)^2 x$$

$$F_4(x) = x^2(x-1)$$

# Các hàm Hermite cơ bản

Đồ thị cho thấy hình dạng của bốn hàm cơ bản (hay còn gọi là *blending functions*).

Chúng được gán nhãn với thành phần trọng số của nó.



# Bài toán nội suy ghép đoạn Hermite

Cho các bộ ba $(x_0, y_0, m_0)$, $(x_1, y_1, m_1)$, ..., và $(x_n, y_n, m_n)$, tìm các đa thức bậc ba $p_i(x)$, $i = 0, 1, ..., n-1$, để

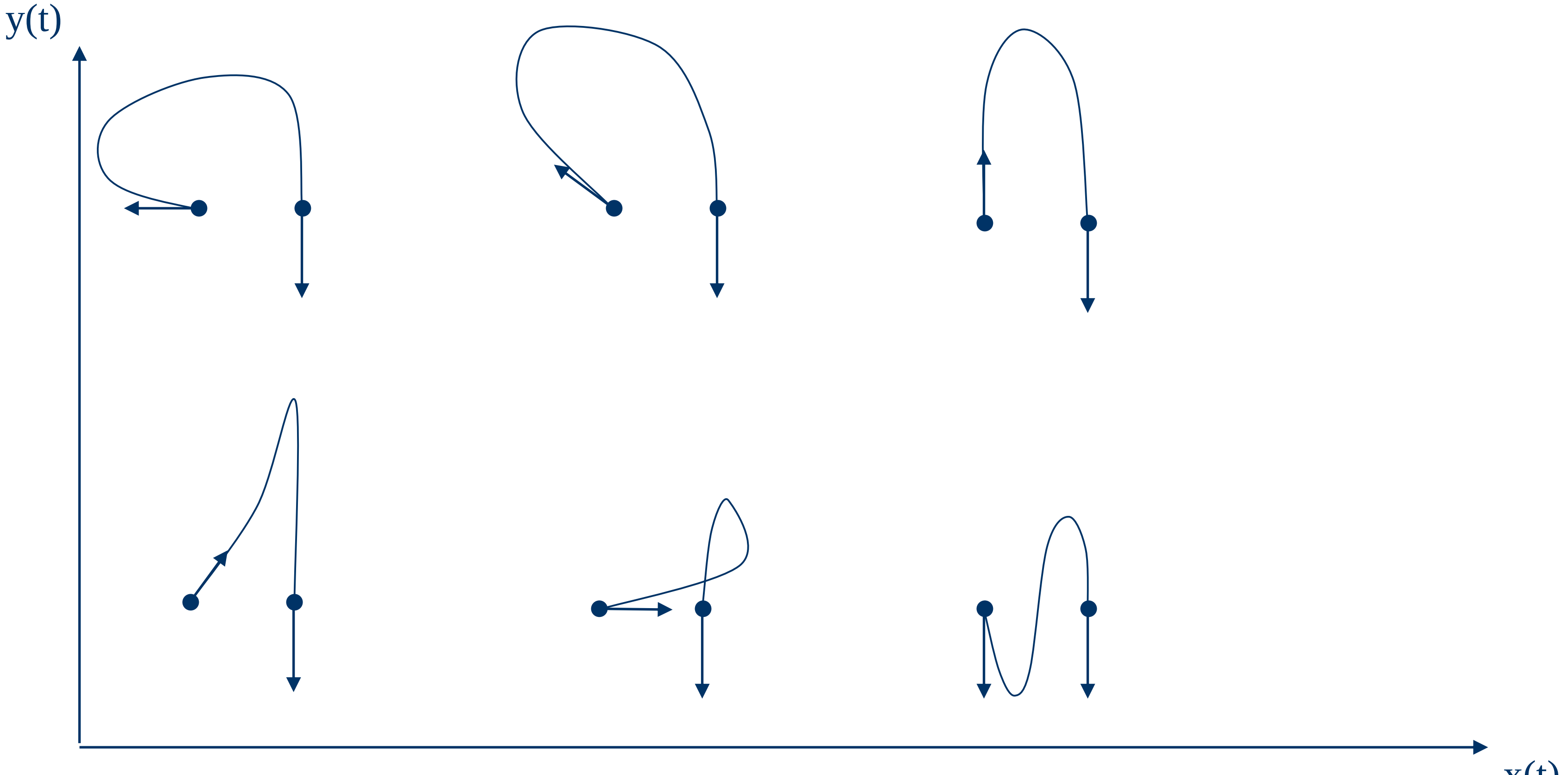
$p_i(x_i) = y_i$,

$p_i'(x_i) = m_i$,

$p_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$, và

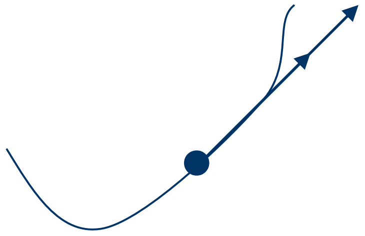
$p_i'(x_{i+1}) = m_{i+1}$

# Họ các đường cong Hermite



# Hiển thị các đường cong Hermite

- Đơn giản :
  - Lặp qua t – chọn đơn vị lặp phù hợp.
  - Tính giá trị x.
  - Và y & z một cách độc lập.
  - Vẽ các đoạn nối liền các điểm.
- Nối các đoạn:
  - Các điểm đầu mút trùng nhau để có liên tục $C_0$
  - Véc tơ pháp tuyến trùng nhau để có liên tục $C_1$

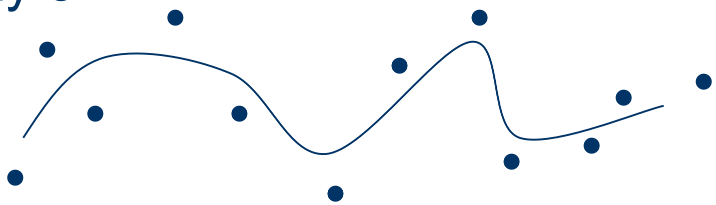


# Nội suy spline

- Một *đường spline bậc m và cấp m+1* là một hàm $S: [a,b] \to \mathbf{R}$ mà tồn tại các số thực $x_i$, $i = 0, ..., n$ với $a = x_0 \le x_1 \le ... \le x_n = b$, để

1. S là một đa thức có bậc $\le m$ trên đoạn $[x_i, x_{i+1}]$, với $i = 0, ..., n-1$ và
2. S là một hàm $C^{m-1}$.

- $x_i$ được gọi là các *điểm nút* (*knot*)
- $(x_0, x_1, ..., x_n)$ được gọi là các *vectơ điểm nút* có độ dài n+ 1
- Các đoạn $[x_i, x_{i+1}]$ được gọi là các *nhịp* (*span*).
- Một nút $x_i$ thỏa mãn điều kiện $x_{i-1} < x_i = x_{i+1} = ... = x_{i+d-1} < x_{i+d}$ thì $x_i$ được coi là một *nút d bội*.
- S được gọi là đường spline tuyến tính, bậc hai hay bậc ba nếu nó có bậc là 1, 2 hay 3



# Bài toán nội suy spline

- Cho một số nguyên k và các số thực $x_i$, $y_i$ ($i = 0, ..., n$) với $x_0 < x_1 < ... < x_n$, tìm spline $g(x)$ bậc k sao cho $x_i$ là nút của g và $g(x_i) = y_i$.

# Bài toán nội suy spline

- Cho các điểm (x0, y0), (x1, y1), ..., (xn, yn), tìm các đa thức bậc ba pi(x), để với i chạy từ 0 đến n-1, ta có:

  $$p_i(x_i) = y_i$$

  $$p_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

  và với i chạy từ 1 đến n-1 ta có:

  $$p_i'(x_i) = p_{i-1}'(x_i)$$
  $$p_i''(x_i) = p_{i-1}''(x_i)$$

# Bài toán nội suy spline

1. Điều kiện kết thúc kẹp

   *Hệ số góc m0 và mn xác định rõ ràng*

2. Điều kiện kết thúc Bessel

   *m0 và mn là hệ số góc của đường parabol nội suy 3 điểm đầu và 3 điểm cuối*

3. Điều kiện kết thúc tự nhiên

   *Đạo hàm bậc 2 của đường spline triệt tiêu ở các đầu mút*

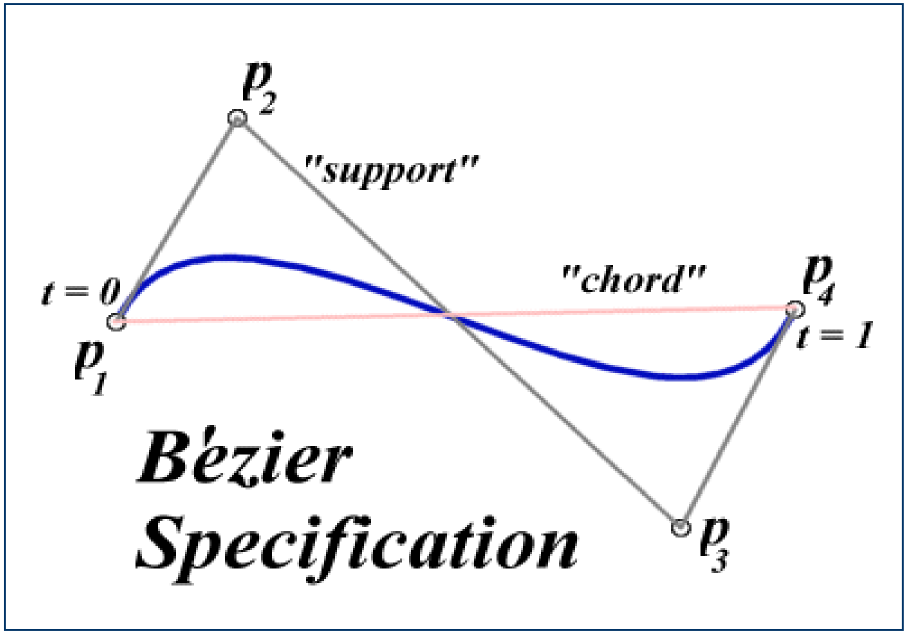
4. Điều kiện kết thúc lặp

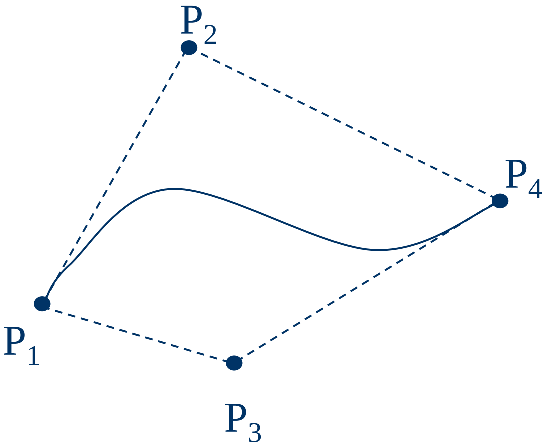
   *Giá trị, đạo hàm bậc 1, bậc 2 bằng nhau tại hai đầu mút*

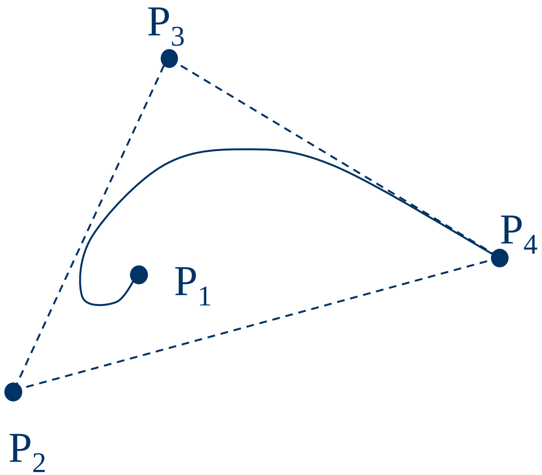
# Đường cong Bézier

- Đường cong Hermite khó để mô hình hóa – cần phải xác định các điểm và véc-tơ pháp tuyến.
- Sẽ dễ dàng hơn khi chỉ cần chỉ ra điểm.
- Pierre Bézier xác định 2 điểm đầu mút và 2 điểm điều khiển để xác định véc-tơ pháp tuyến.
- Có thể tính ra từ ma trận Hermite:
  - Hai điểm điều khiển xác định vec-tơ pháp tuyến

# Đường cong Bézier



# Ma trận Bézier

Trước hết chúng ta phải xác định các hàm cơ bản.

Cho một đa thức bậc n, chúng ta có *n* điểm điều khiển với các thành phần cho đến $t^{n-1}$ như sau:

$$X(t) = \sum_{r=0}^{n-1} f_r q_r$$

$$f_r = {}^{n-1}C_{n-r-1} t^r (1-t)^{n-r-1} \qquad \textit{where} \quad {}^{n-1}C_r = \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}$$

Hệ số của $t^r$ theo khải triển của $(t+(1-t))^{n-1}$

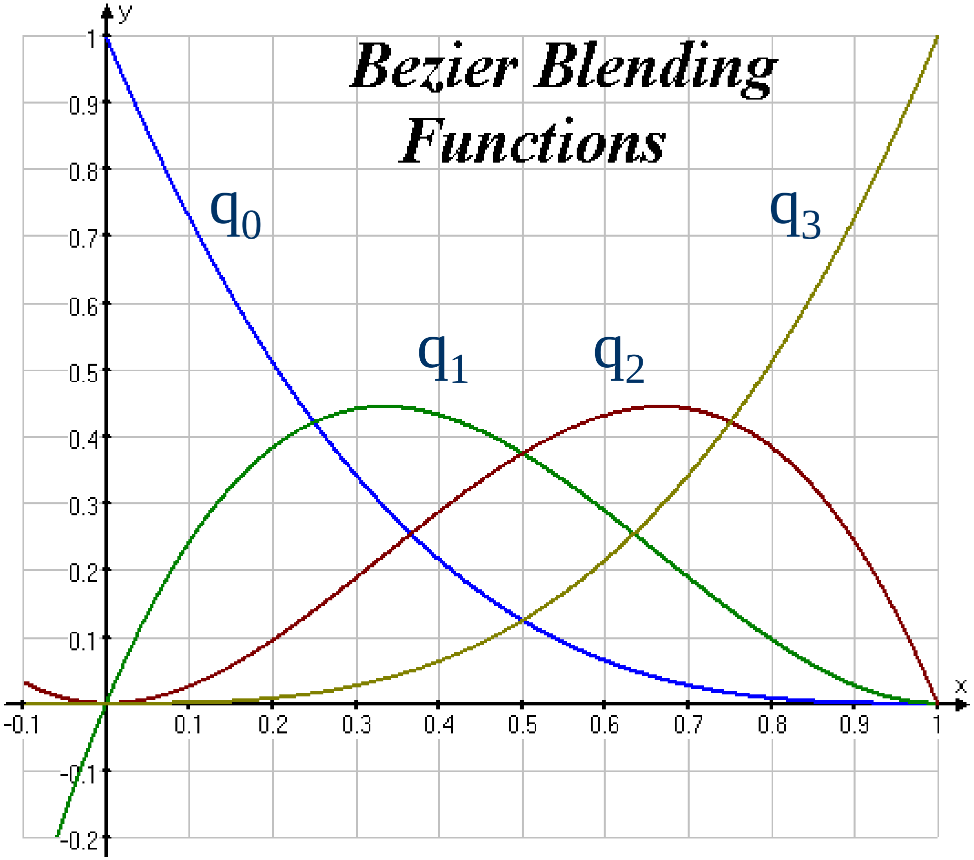
# Ma trận Bézier bậc 3

- $X(t) = t^T M_B q$ ($M_B$ là ma trận Bézier)
- Với *n=4* và *r=0,1,2,3* *ta có:*

$$X(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

- Tương tự với Y(t) và Z(t)

# Hàm cơ bản Bézier



# B-spline (Cox-de Boor)

Cho trước $n \geq 0$, $k \geq 1$, và một dãy không giảm các số thực $U = (u_0, u_1, \ldots, u_{n+k})$, ĐN các hàm

$$N_{i,k} : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ 0 \leq i \leq n,$$

một cách đệ quy như sau:

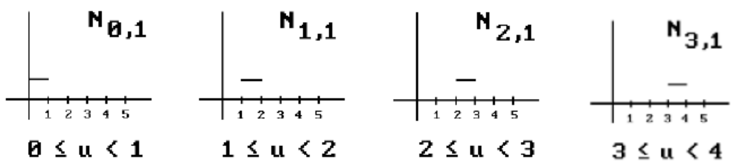
$$\begin{aligned} N_{i,1}(u) &= 1, \quad \text{for } u_i \leq u < u_{i+1}, \text{ and} \\ &= 0, \quad \text{elsewhere.} \end{aligned}$$

Nếu $k > 1$ thì:

$$N_{i,k}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k-1} - u_i} N_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k} - u}{u_{i+k} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u),$$

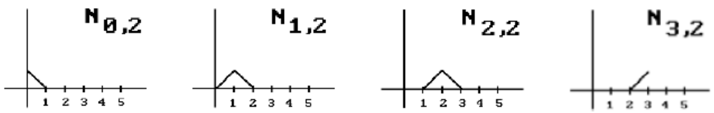
trong đó nếu bất kỳ đại lượng nào có dạng 0/0 thì ta sẽ thay nó bằng 0.
Hàm $N_{i,k}(u)$ được gọi là *B-Spline thứ i* hoặc *hàm B-Spline cơ sở bậc k và cấp k-1 theo vectơ nút U*.

# B-spline (Cox-de Boor)



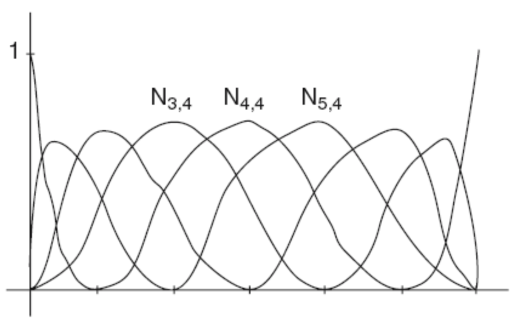

Ví dụ hàm Ni,1(u) với n=3, k=1


(a)




(b)

Ví dụ các hàm Ni,j(u) với n=3, k=2




knots = (0,0, 0,1, 2,3, 4,5, 6,6, 6,6)

Các B-spline bậc ba đồng nhất bị kẹp Ni,4(u) với n = 8

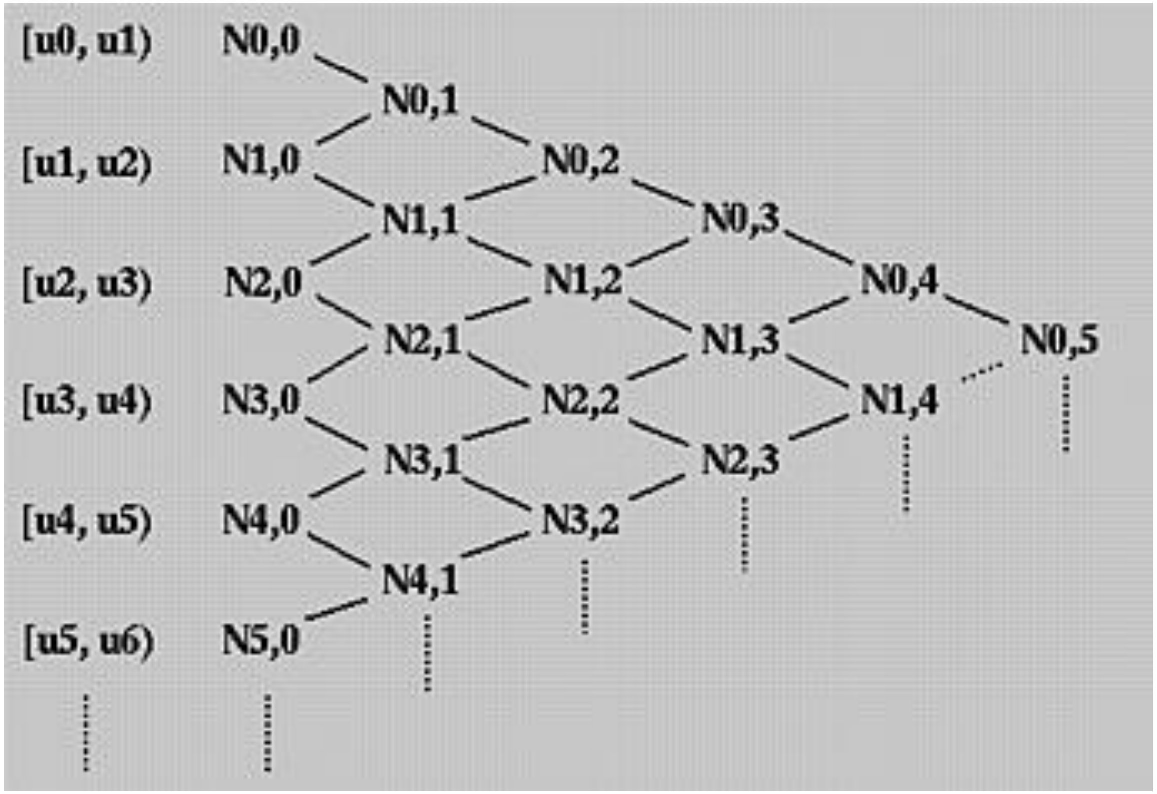
# B-spline (Cox-de Boor)

Cho trước một dãy các điểm $p_i$, với i = 0, 1, …, n, đường cong

$$p(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(u)\mathbf{p}_i .$$

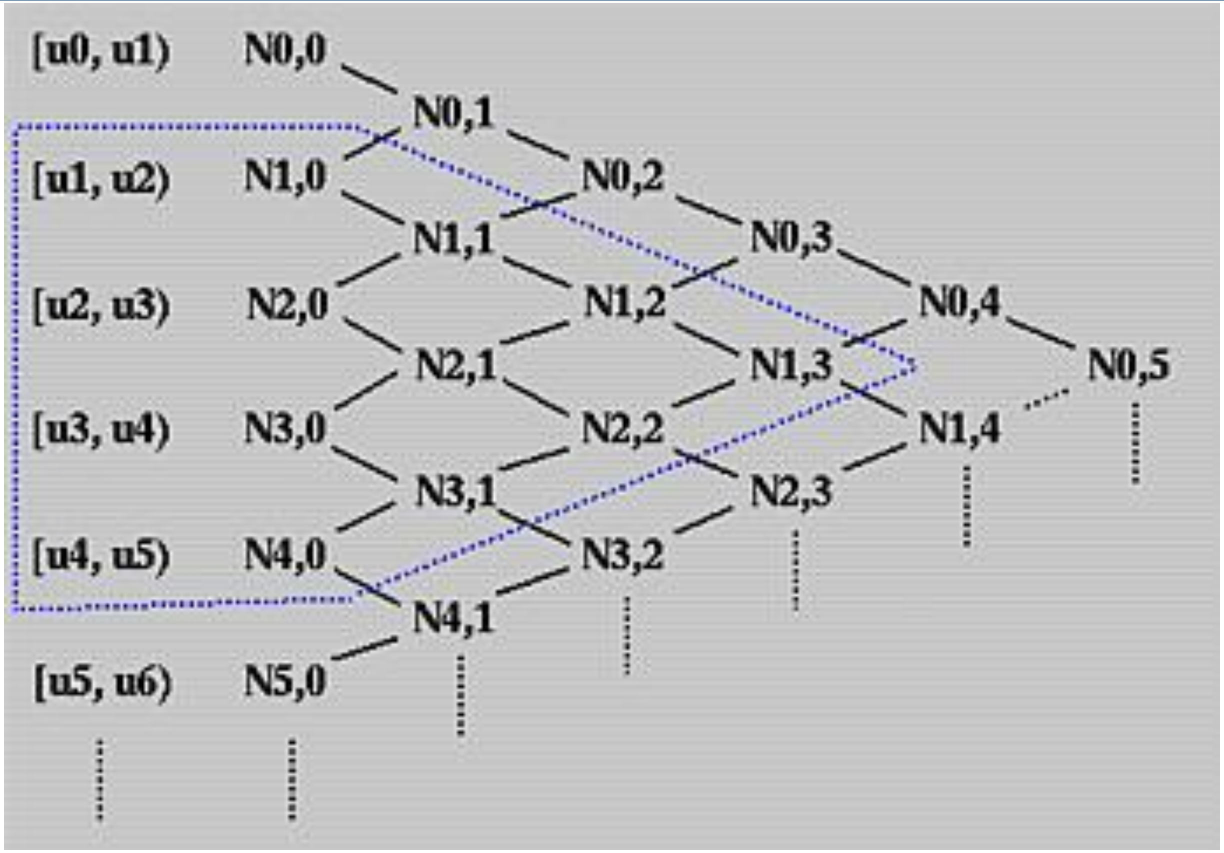
được gọi là *đường cong B-Spline bậc k* (hoặc *cấp m = k-1*)
với các *điểm điều khiển* hay *các điểm Boor* $\mathbf{p_i}$ và *vecto nút* $(u_0, u_1, .., u_{n+k})$.

# B-spline

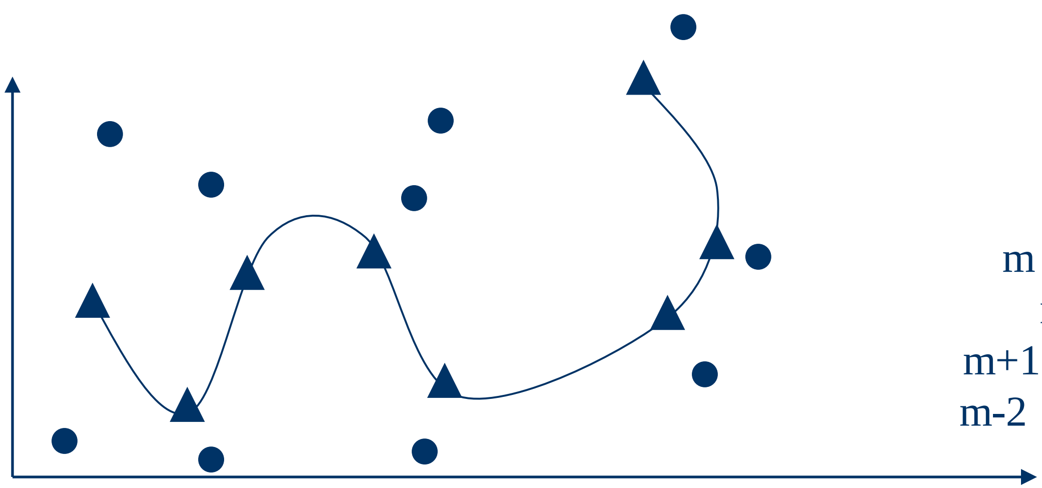


[u0, u1)
[u1, u2)
[u2, u3)
[u3, u4)
[u4, u5)
[u5, u6)
N0,0
N1,0
N2,0
N3,0
N4,0
N5,0
N0,1
N1,1
N2,1
N3,1
N4,1
N0,2
N1,2
N2,2
N3,2
N0,3
N1,3
N2,3
N0,4
N1,4
N0,5

# B-spline


[u0, u1)
[u1, u2)
[u2, u3)
[u3, u4)
[u4, u5)
[u5, u6)
N0,0
N1,0
N2,0
N3,0
N4,0
N5,0
N0,1
N1,1
N2,1
N3,1
N4,1
N0,2
N1,2
N2,2
N3,2
N0,3
N1,3
N2,3
N0,4
N1,4
N0,5

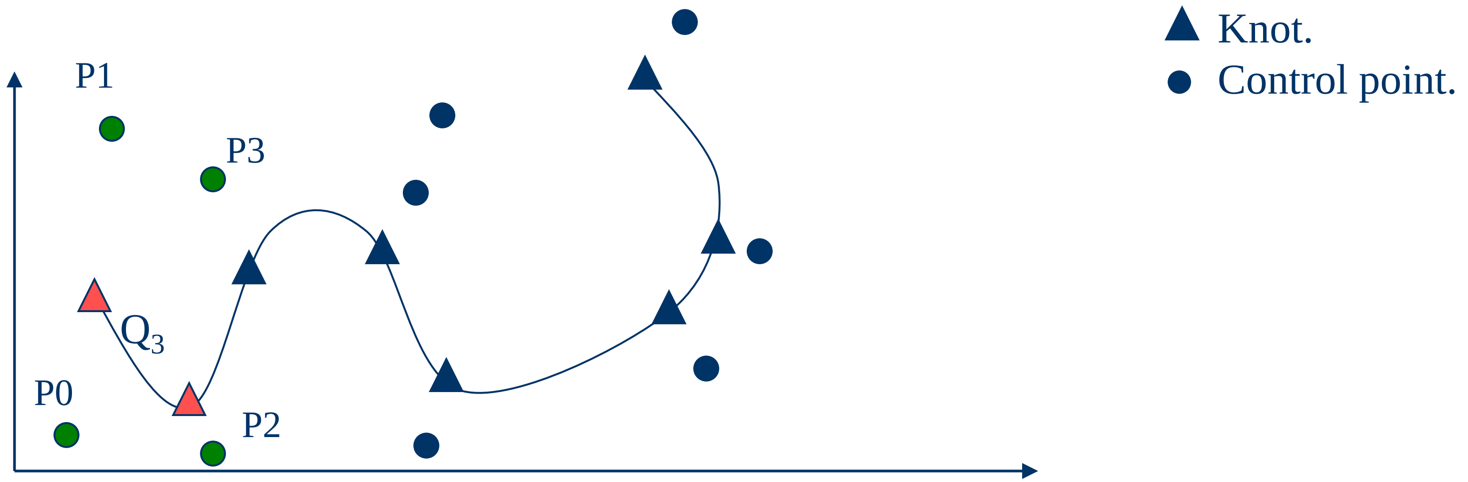
# Các đường cong B-Spline



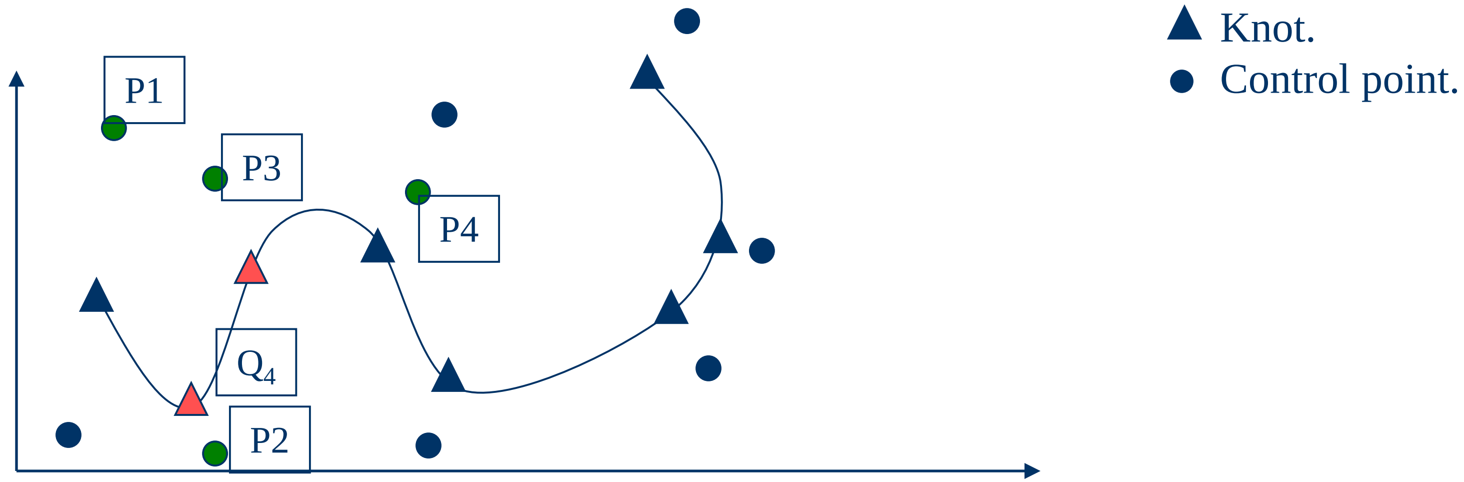
▲ Knot.
● Control point.

$m = 9$ $(P_0 .. P_9)$
m-1 knots
m+1 control points
m-2 curve segments

# Các đường cong B-Spline

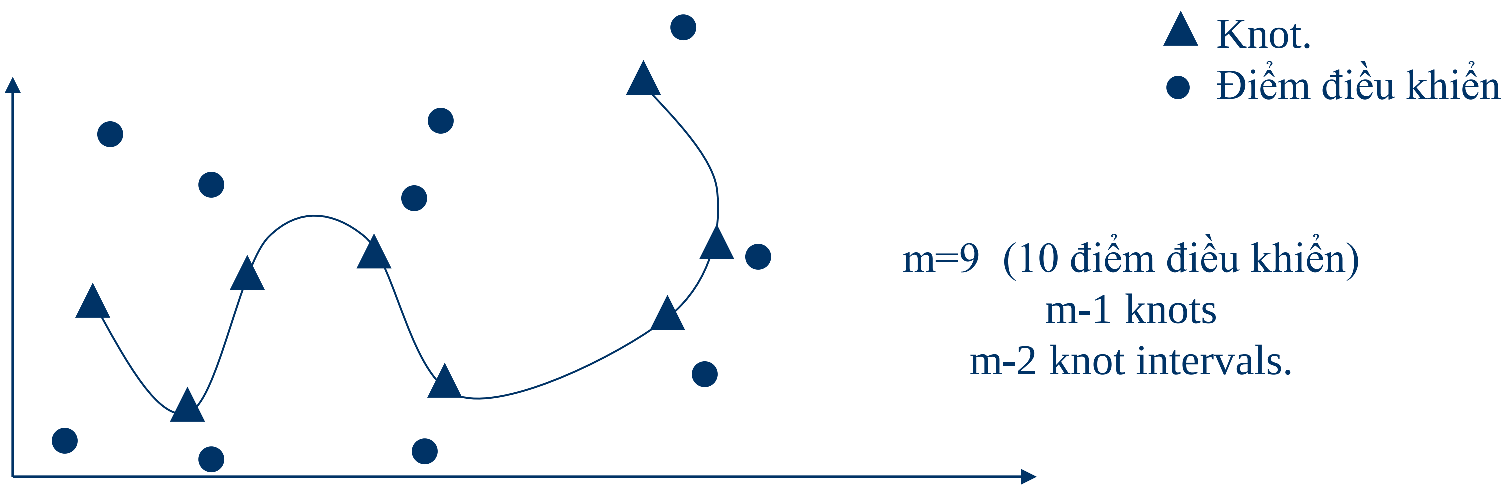


# Các đường cong B-Spline



# Các đường cong B-Spline

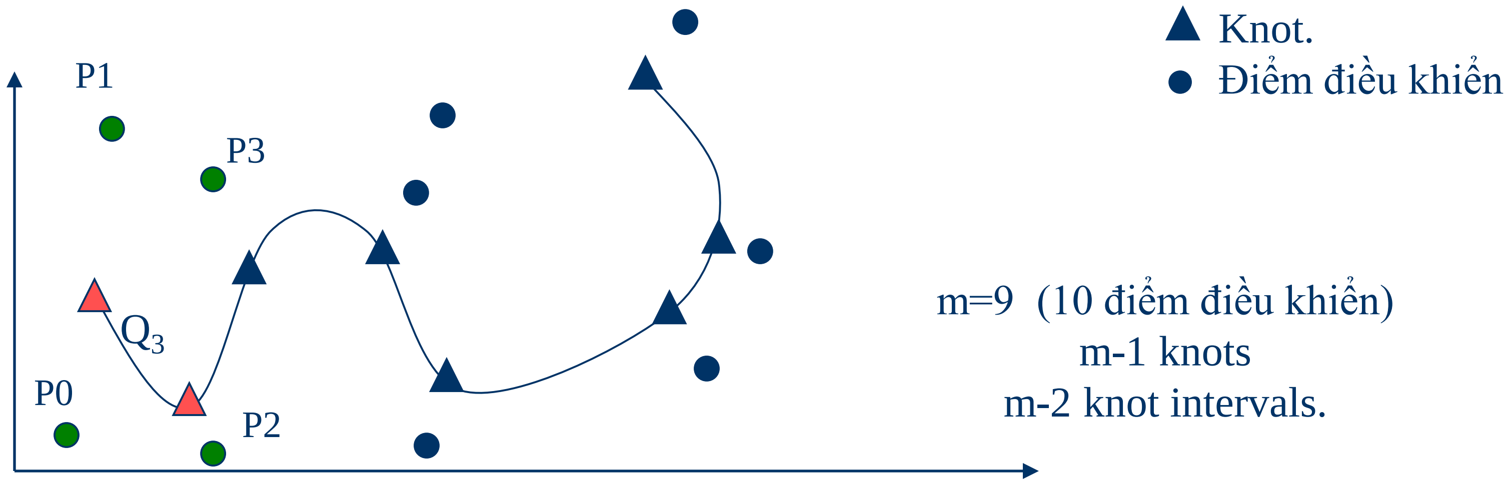
- Với mỗi $i \geq 4$ , có một knot giữa $Q_{i-1}$ và $Q_i$ tại $t = t_i$.
- Điểm khởi tạo tại $t_3$ và $t_{m+1}$ cũng là knot. Ví dụ sau mô tả đường cong với các điểm điều khiển $P_0 \ldots P_9$:




m=9 (10 điểm điều khiển)
m-1 knots
m-2 knot intervals.

# Các đường cong B-Spline

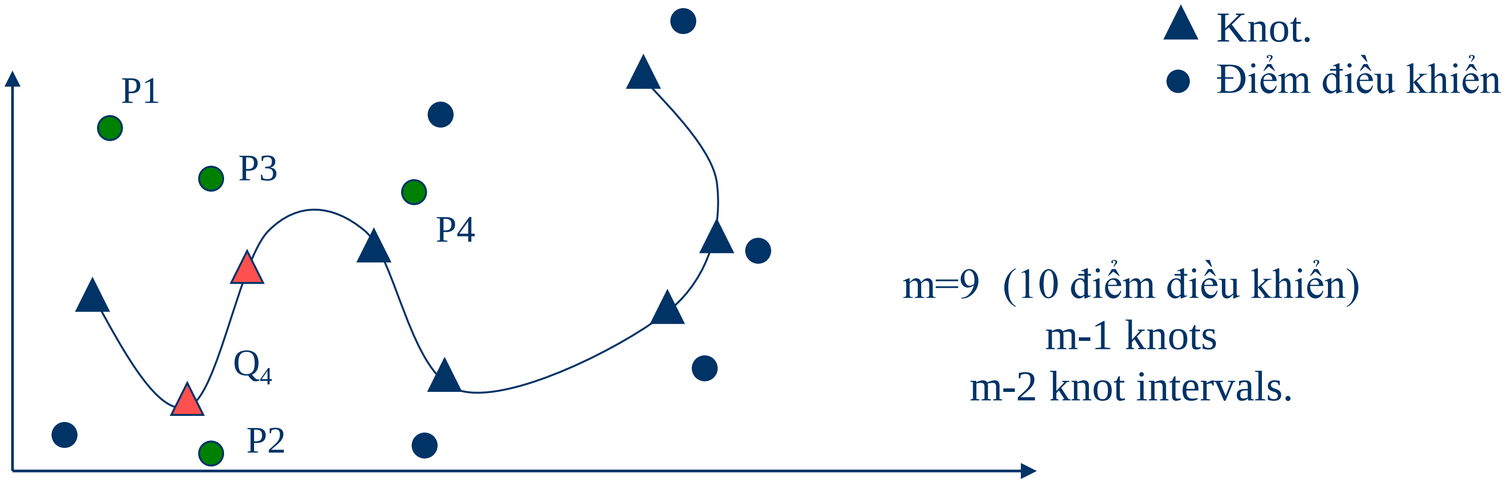
- Đoạn $Q_3$ được xác định bởi các điểm $P_0$ đến $P_3$ với khoảng $t_3$ = 0 đến $t_4$ = 1.




m=9 (10 điểm điều khiển)
m-1 knots
m-2 knot intervals.

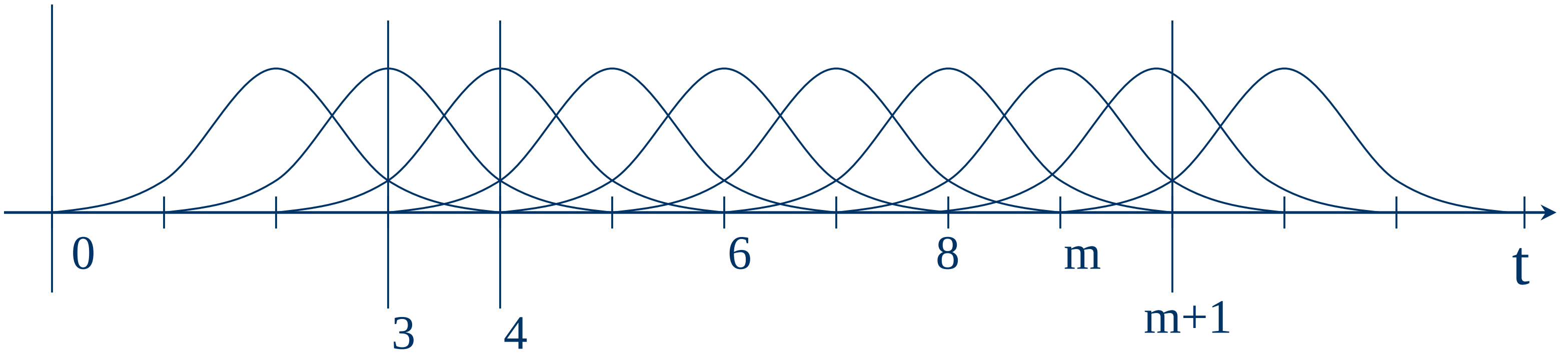
# Các đường cong B-Spline

- Đoạn $Q_4$ được xác định bởi các điểm $P_1$ đến $P_4$ trong khoảng $t_4$ = 1 đến $t_5$ = 2.

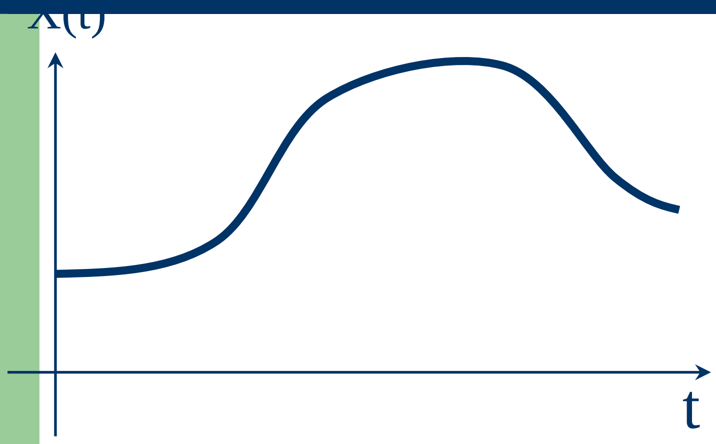


# Các đường cong B-Spline

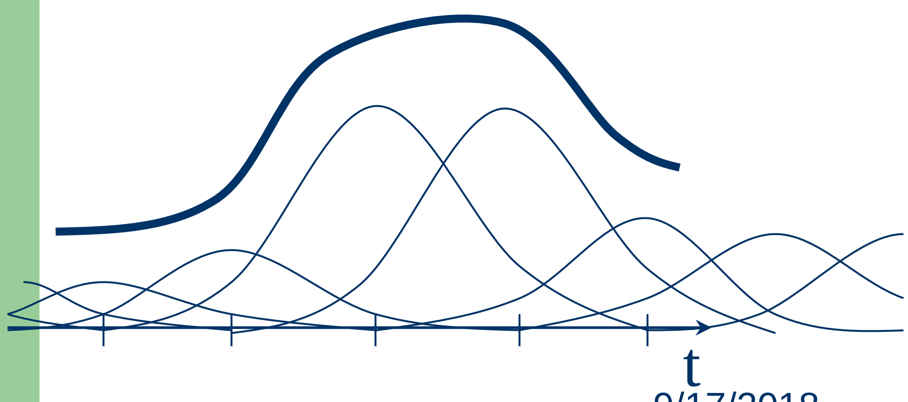
- Có thể thấy khoảng $t_3$ đến $t_4$ là khoảng đầu tiên vì đây là đoạn đầu tiên có sự xuất hiện của cả 4 hàm B-Spline.
- $t_9$ đến $t_{10}$ là khoảng cuối cùng.



# Tạo một đường cong




Bên trái là một đường cong được sinh ra.

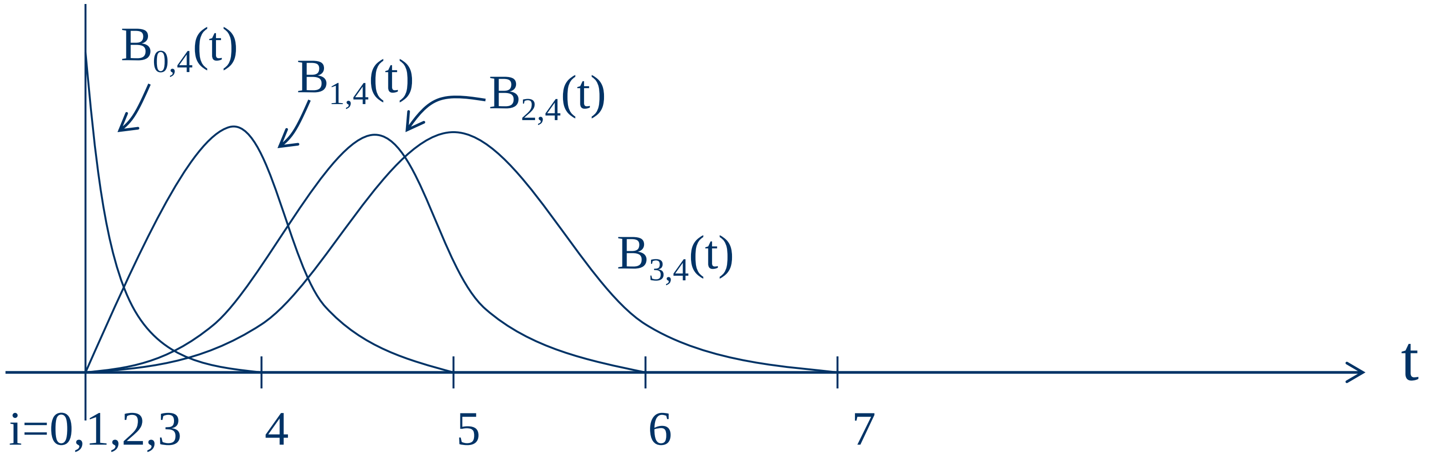



Chúng ta có thể đường cong này được tạo nên bởi tổng có trọng số của các đường cơ bản B-Splines.

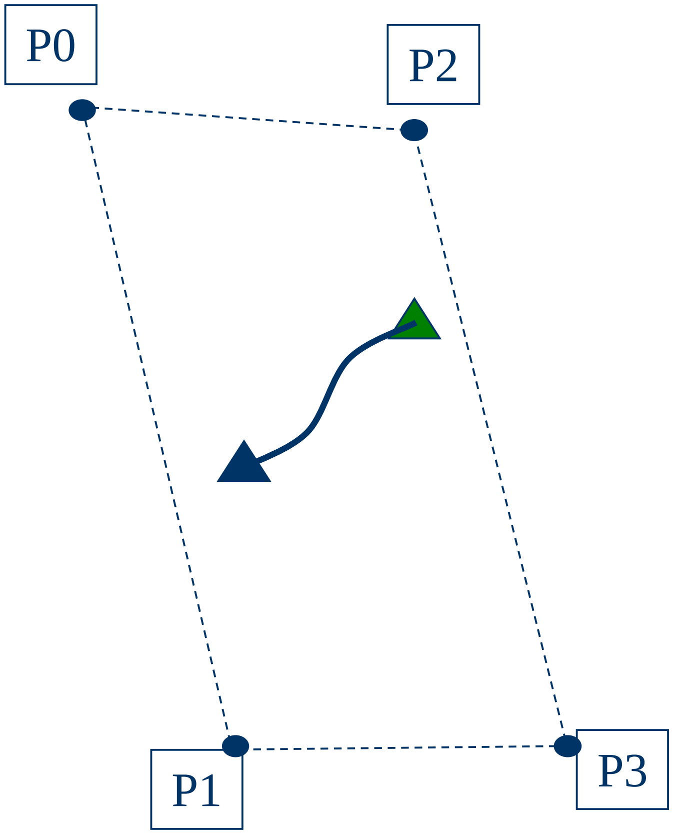
# Độ mịn của đường cong B-Spine?

- Độ mịn tăng dần theo bậc của đường B-spline
- Chúng ta cũng có thể làm giảm độ liên tục của đường cong bằng cách có nhiều knot trùng với nhau, ví dụ $t_i = t_{i+1} = t_{i+2} = \ldots$

# Đường B-Splines với nhiều knots tại một điểm

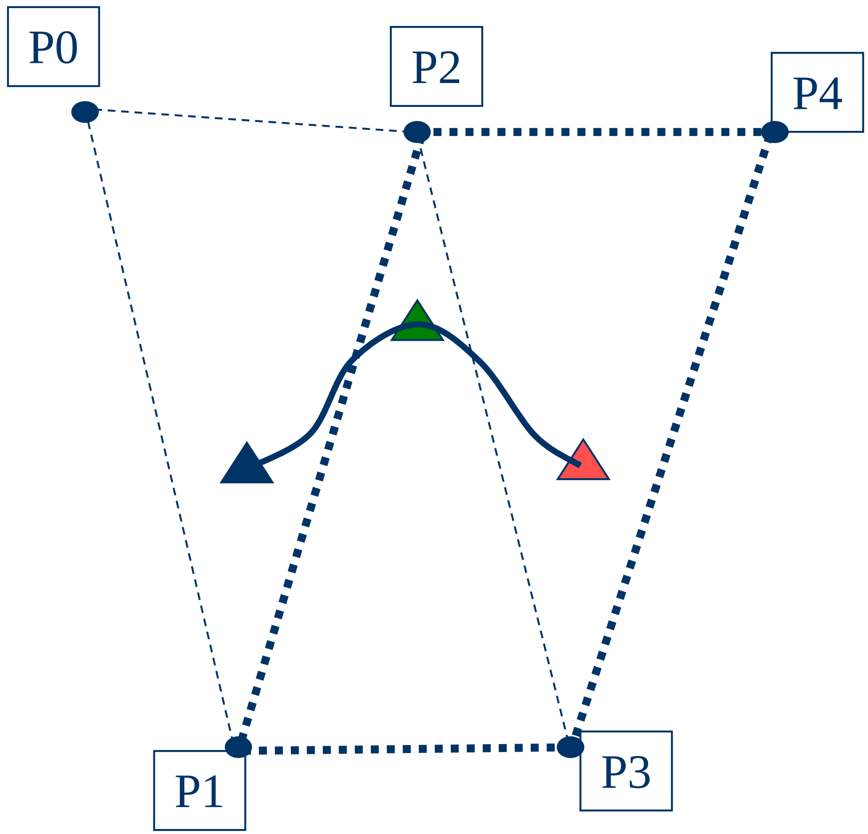


# Ví dụ về tính liên tục của B-Spline

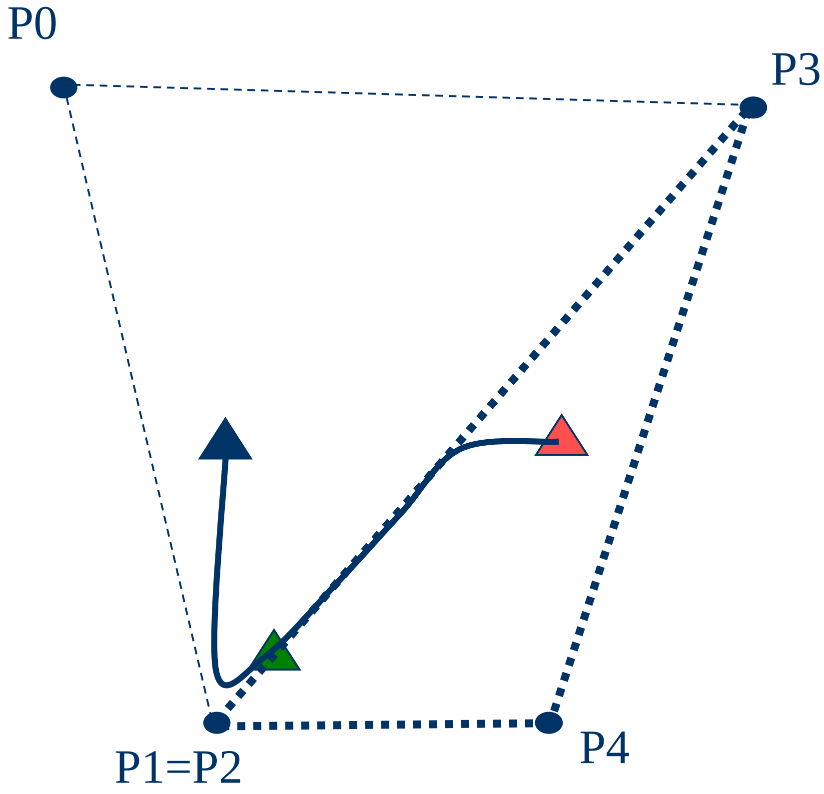



Với 4 điểm điều khiển cho một đoạn.

# Ví dụ về tính liên tục của B-Spline



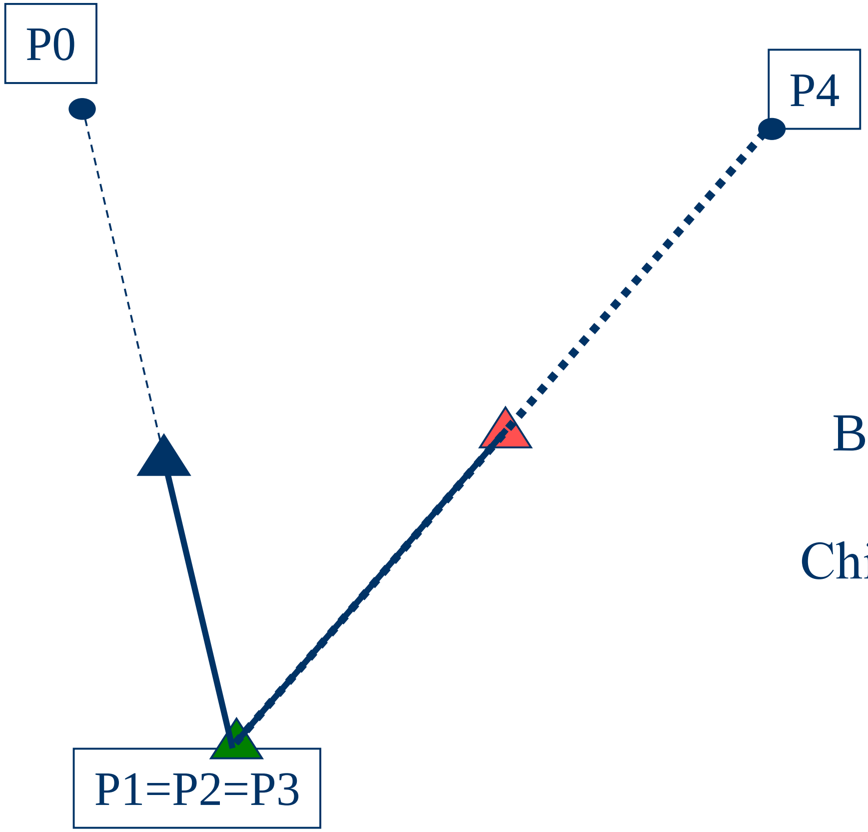
# Ví dụ về tính liên tục của B-Spline




Hai knot trùng nhau

Chỉ có tính liên tục $C_1$

# Ví dụ về tính liên tục của B-Spline




Ba knot trùng nhau

Chỉ có tính liên tục $C_0$

# Tổng kết

- Các đường cong bậc 3
- Các đường cong B-splines