Phân tích tương quan và Hồi quy

PGS.TS. Lê Sỹ Vinh

Khoa CNTT – Đại học Công Nghệ

Phân tích tương quan

Một công ty quan tâm tới việc phân tích hiệu quả của việc quảng cáo. Trong thời gian 6 tháng công ty thu được kết quả sau.

Tiền quảng cáo ($M)	1	2	3	4	5	3.5
Doanh thu ($M)	6	15	20	30	38	22

Có mối liên hệ giữa tổng số tiền quảng cáo và doanh thu hay không?

Phân tích tương quan

Thống kê về số buổi đi học (X) và điểm thi cuối kì môn XSTK (Y) từ 20 sinh viên được cho ở bảng dưới.

X	15	14	10	14	15	7	11	9	14	12
Y	10	9	4	8	9	2	6	8	7	8

X	15	13	5	7	11	14	15	10	12	14
Y	10	8	0	4	6	7	8	5	7	9

Có mối liên hệ giữa số buổi đi học và điểm thi cuối kì hay không?

Hệ số tương quan

Giả sử X và Y là 2 ĐLNN, **Hệ số tương quan** đo mức độ phụ thuộc tuyến tính giữa X và Y

- Công thức hệ số tương quan lý thuyết ρ

$$\rho = \frac{E(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- $\rho \in [-1; 1]$
- ρ=0 thì không có tương quan tuyến tính giữa X và Y
- $|\rho|$ càng gần 1 thì sự phụ thuộc tuyến tính giữa X và Y càng mạnh
- $|\rho| = 1$ thì Y là một hàm tuyến tính của X

Ước lượng ρ

Với mẫu quan sát $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ của (X,Y) hệ số tương quan:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

Ví dụ 1

Một công ty quan tâm tới việc phân tích hiệu quả của việc quảng cáo. Trong thời gian 5 tháng công ty thu được kết quả sau. Tính hệ số tương quan giữa tiền quảng cáo và doanh thu.

Tiền quảng cáo ($M)	1	2	3	4	5
Doanh thu ($M)	6	15	20	30	39

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

Ví dụ 2

Thống kê về số buổi đi học (X) và điểm thi cuối kì môn XSTK (Y) từ 20 sinh viên được cho ở bảng dưới. Tính hệ số tương quan giữa số buổi đi học và điểm thi cuối kì môn XSTK.

X	15	14	10	14	15	7	11	9	14	12
Y	10	9	4	8	9	2	6	8	7	8

X	15	13	5	7	11	14	15	10	12	14
Y	10	8	0	4	6	7	8	5	7	9

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

Ví dụ 3

Thời gian chơi điện tử của sinh viên một ngày (X) và chỉ số IQ (Y) được cho ở bảng dưới. Tính hệ số tương quan giữa X và Y.

Thời gian chơi điện tử	1	2	3	4	5	4	6	3	1
IQ	90	85	92	85	90	82	95	80	85

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

Ví dụ 4

Số năm hút thuốc lá (X) và tuổi thọ (Y) từ 20 người được cho ở bảng dưới. Tính hệ số tương quan giữa việc hút thuốc lá và tuổi thọ.

X	10	15	10	15	20	5	10	15	20	15
Y	70	65	66	60	50	72	67	60	55	60

X	15	10	5	12	22	14	16	18	30	14
Y	70	72	75	70	52	54	52	50	45	60

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

Ví dụ 5

Thời gian chơi điện tử của sinh viên một ngày (X) và mức lương ra trường (Y) từ 9 người được cho ở bảng dưới. Tính hệ số tương quan giữa X và Y.

Thời gian chơi điện tử	1	2	3	4	5	4	6	3	1
Mức lương ra trường	12	10	8	6	5	6	4	7	11

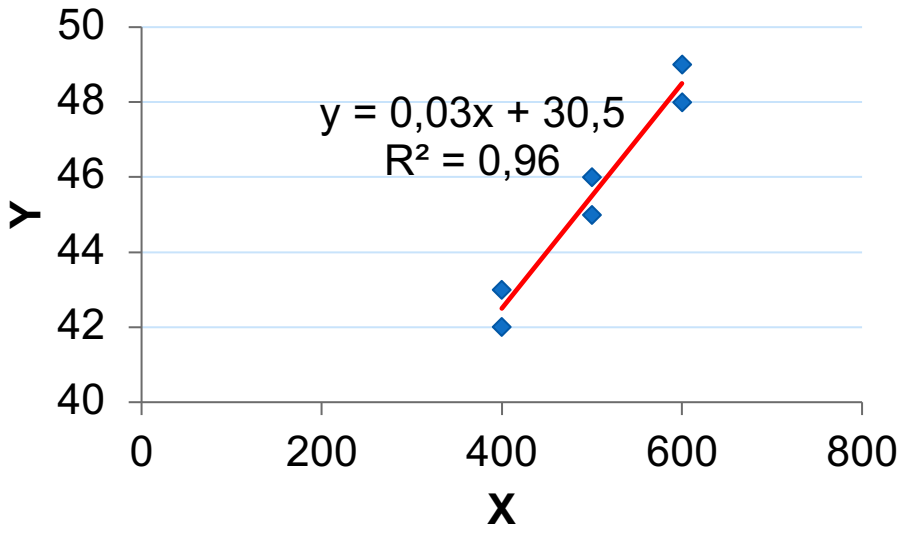
$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

Phân tích hồi quy tuyến tính

Ví dụ: Các số liệu về số trang của cuốn sách (X) và giá bán của nó (Y) được cho trong bảng dưới đây

Tên sách	X	Y (nghìn)
A	400	43
B	600	48
C	500	45
D	600	49
E	400	42
F	500	46

Hãy tìm đường thẳng hồi quy của Y theo X căn cứ trên số liệu nói trên.



Phân tích hồi quy tuyến tính

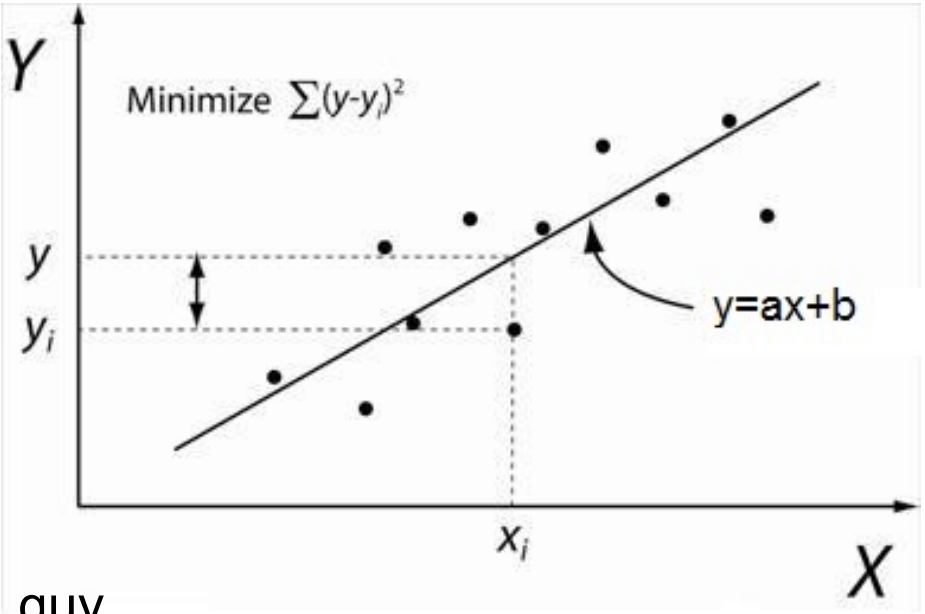
- Giả sử X là 1 biến nào đó (ngẫu nhiên hay không ngẫu nhiên); Y là 1 biến ngẫu nhiên phụ thuộc vào X
  - Nếu $X = x$ thì Y sẽ có kì vọng là $ax + b$ và phương sai là σ^2
- Ta nói: Y có hồi quy tuyến tính theo X
- Đường thẳng $y = ax + b$ là đường thẳng hồi quy lý thuyết của Y đối với X
- a, b gọi là hệ số hồi quy
- X gọi là biến độc lập; Y gọi là biến phụ thuộc
- **Bài toán**: Ước lượng a, b trên một mẫu quan sát $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$
- **Bài toán**: Ước lượng σ^2 trên một mẫu quan sát $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$

Bài toán ước lượng a, b

- Dùng phương pháp bình phương tối thiểu
- a, b làm cực tiểu tổng $\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$

$$a = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = \frac{\sum y - a\sum x}{n}$$

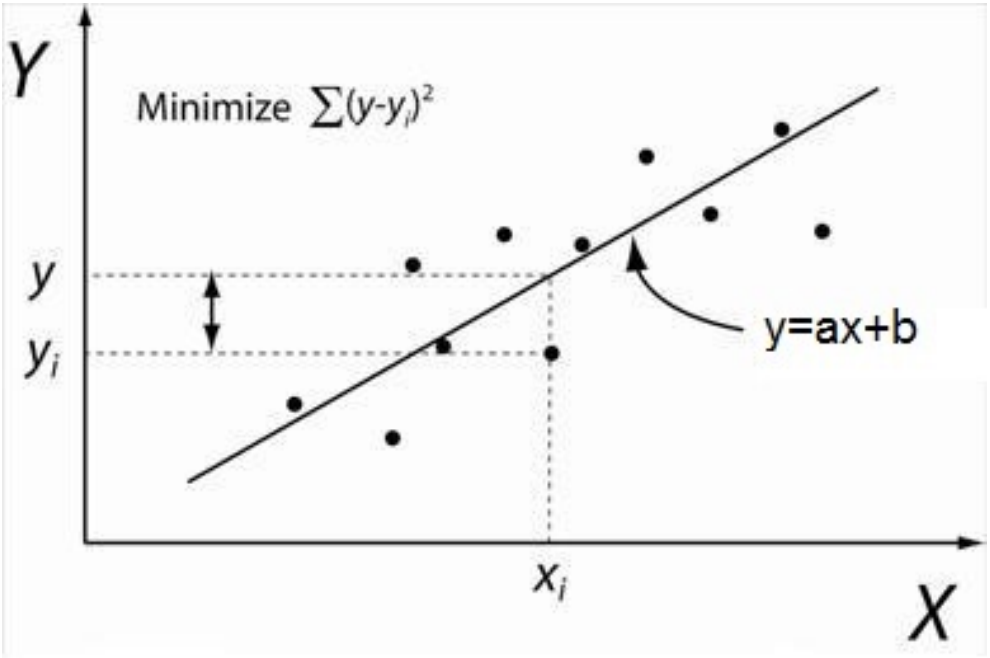


- a, b được gọi là các hệ số hồi quy
- đường thẳng $y = ax + b$ gọi là đường thẳng hồi quy

Sai số tiêu chuẩn của đường hồi quy

Kí hiệu σ^2 sai số tiêu chuẩn của đường hồi quy

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$$



Bài tập hồi quy 1

Các số liệu về số trang của cuốn sách (X) và giá bán của nó (Y) được cho trong bảng dưới đây

Tên sách	X	Y (nghìn)
A	400	43
B	600	48
C	500	45
D	600	49
E	400	42
F	500	46

$$a = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = \frac{\sum y - a\sum x}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum y^2 - a\sum xy - b\sum y}{n-2}$$

a) Hãy tìm đường thẳng hồi quy của Y theo X
b) Hãy tính sai số tiêu chuẩn của đường hồi quy.

Bài tập hồi quy 2

Một công ty quan tâm tới việc phân tích hiệu quả của việc quảng cáo (X) và doanh thu (Y). Trong thời gian 6 tháng công ty thu được kết quả sau.

Tiền quảng cáo ($M)	1	2	3	4	5	4
Doanh thu ($M)	6	15	20	30	39	25

a) Hãy tìm đường thẳng hồi quy của Y theo X.
b) Hãy tính sai số tiêu chuẩn của đường hồi quy.

Bài tập hồi quy 3

Thống kê về số buổi đi học (X) và điểm thi cuối kì môn XSTK (Y) từ 20 sinh viên được cho ở bảng dưới.

X	15	14	10	14	15	7	11	9	14	12
Y	10	9	4	8	9	2	6	8	7	8

X	15	13	5	7	11	14	15	10	12	14
Y	10	8	0	4	6	7	8	5	7	9

a) Hãy tìm đường thẳng hồi quy của Y theo X.
b) Hãy tính sai số tiêu chuẩn của đường hồi quy.

Bài tập hồi quy 4

Số năm hút thuốc lá (X) và tuổi thọ (Y) từ 20 người được cho ở bảng dưới.

X	10	15	10	15	20	5	10	15	20	15
Y	70	65	66	60	50	72	67	60	55	60

X	15	10	5	12	22	14	16	18	30	14
Y	70	72	75	70	52	54	52	50	45	60

a) Hãy tìm đường thẳng hồi quy của Y theo X.
b) Hãy tính sai số tiêu chuẩn của đường hồi quy.

Bài tập hồi quy 5

Thời gian chơi điện tử của sinh viên một ngày (X) và mức lương ra trường (Y) từ 9 người được cho ở bảng dưới.

Thời gian chơi điện tử	1	2	3	4	5	4	6	3	1
Mức lương ra trường	12	10	8	6	5	6	4	7	11

a) Hãy tìm đường thẳng hồi quy của Y theo X.
b) Hãy tính sai số tiêu chuẩn của đường hồi quy.