Giới thiệu Xác Suất Thống Kê

Giảng viên: PGS.TS. Lê Sỹ Vinh
Khoa CNTT – Đại học Công Nghệ

Xác suất

Độ đo khả năng xảy ra một sự kiện nào đó

Ví dụ:

- Khả năng tối nay trời mưa
- Khả năng thắng xổ số Vietlot
- Khả năng tháng 9 tiêm hết vaccine Covid-19 cho HCM

Thống kê

Phân tích toán học sử dụng các mô hình và cách biểu diễn để phân tích, tóm tắt và giải thích một tập dữ liệu

Ứng dung:

- Khoa học
- Bầu cử
- Thể thao
- Kinh tế
- Chứng khoán
- Y tế

Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

- Phép thử ngẫu nhiên (experiment/trial): Hành động mà kết quả có thể quan sát được.

  Ký hiệu: C

  Ví dụ: Gieo xúc xắc và quan sát số nốt ở mặt trên.

- Không gian mẫu: Tập tất cả các kết quả có thể của C.

  Ký hiệu: Ω

  Ví dụ: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Các ví dụ khác?

Biến cố và quan hệ giữa chúng

- Biến cố: Kết quả của phép thử C mà chúng ta quan tâm.

  Ví dụ: Gieo xúc xắc và quan sát số nốt ở mặt trên.

  Không gian mẫu: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

  Biến cố A: Số nốt ở mặt trên là 1, hay $A = \{1\}$

  Biến cố B: Số nốt ở mặt trên là 6, hay $B = \{6\}$

  Biến cố E: Số nốt ở mặt trên là số chẵn, hay $E = \{2, 4, 6\}$
- Biến cố không thể: Biến cố không thể xảy ra

  Biến cố D: Số nốt ở mặt trên là 7

Quan hệ giữa các biến cố

Biến cố đối của A: Xảy ra khi A không xảy ra

$$\bar{A} = \Omega \backslash A$$

Ví dụ:

Phép thử C: Gieo xúc xắc và quan sát số nốt ở mặt trên.

Không gian mẫu: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Biến cố A: Số nốt ở mặt trên là 1, hay $A = \{1\}$

Biến cố đối của A: {2, 3, 4, 5, 6}.

Biến cố B: Số nốt ở mặt trên là 1 hoặc 6, hay $B = \{1, 6\}$

Biến cố đối của B: {2, 3, 4, 5}

Hợp hai biến cố

Hợp của 2 biến cố A và B: Xảy ra khi ít nhất một trong hai biến cố A và B xảy ra.

$$A \cup B$$

Ví dụ:

Phép thử C: Gieo xúc xắc và quan sát số nốt ở mặt trên.

Không gian mẫu: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Biến cố A: Số nốt ở mặt trên là 1; $A = \{1\}$

Biến cố B: Số nốt ở mặt trên là 6; $B = \{6\}$

Hợp của A và B: $A \cup B = \{1\} \cup \{6\} = \{1, 6\}$

Giao hai biến cố

Giao của biến cố A và B: Xảy ra nếu cả A và B đều xảy ra.

$A \cap B$ (hoặc AB)

Ví dụ:

Phép thử **C**: Gieo xúc xắc và quan sát số nốt ở mặt trên.

Không gian mẫu: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Biến cố A: Số nốt ở mặt trên là 1 hoặc 2; $A = \{1, 2\}$

Biến cố B: Số nốt ở mặt trên là 2 hoặc 6, $B = \{2, 6\}$

Giao của A và B là: $A \cap B = \{1, 2\} \cap \{2, 6\} = \{2\}$

Lưu ý: Nếu $A \cap B = \emptyset$, A và B là 2 biến cố xung khắc

Ví dụ 1

Có 3 xạ thủ X1, X2, X3, mỗi người bắn một viên vào bia. Có 3 biến cố sau:

- A: Xạ thủ X1 bắn trúng
- B: Xạ thủ X2 bắn trúng
- C: Xạ thủ X3 bắn trúng

Mô tả bằng kí hiệu các biến cố sau:

a) X1 và X2 bắn trúng, X3 không bắn trúng
b) X1 hoặc X2 bắn trúng, và X3 bắn không trúng
c) Cả 3 xạ thủ bắn trúng
d) Cả 3 xạ thủ không bắn trúng
e) Có ít nhất một xạ thủ bắn trúng
f) Có ít nhất hai xạ thủ bắn trúng
g) Có nhiều nhất 1 xạ thủ bắn trúng

Ví dụ 2

Có 3 xạ thủ X1, X2, X3, mỗi người bắn một viên vào bia. Có 3 biến cố sau:

- A: Xạ thủ X1 bắn trúng
- B: Xạ thủ X2 bắn trúng
- C: Xạ thủ X3 bắn trúng

Mô tả bằng lời các biến cố sau:

a) $\bar{A}BC$

b) $(A \cup B)C$

c) $A \cup B \cup C$

d) $\bar{A}\,(B \cup C)$

Xác suất của một biến cố

Định nghĩa cổ điển: $$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Ví dụ:

Phép thử C: Gieo xúc xắc và quan sát số nốt ở mặt trên.

Không gian mẫu: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Biến cố A: Số nốt ở mặt trên là 1; $A = \{1\}$

$P(A) = 1/6$

Biến cố B: Số nốt ở mặt trên là 1 hoặc 3; $B = \{1, 3\}$

$P(B) = 2/6 = 1/3$

Hoán vị - Chỉnh hợp - Tổ hợp

Cho tập A gồm *n* phần tử,

- Hoán vị: Số hoán vị của *n* phần tử: *n*!
- Chỉnh hợp: Số cách chọn *k* phần tử khác nhau từ tập A có tính đến thứ tự chọn các phần tử:

$$A_n^k = n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Tổ hợp: Số cách chọn *k* phần tử khác nhau từ tập A không tính đến thứ tự chọn các phần tử:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Ví dụ 3

Công ty X tuyển 2 nhân viên. Có 5 người nộp đơn dự tuyển, trong đó có 3 nam và 2 nữ. Biết rằng khả năng trúng tuyển của 5 người là như nhau, hãy tính xác suất:

- A: 2 người trúng tuyển là nam
- B: 2 người trúng tuyển là nữ
- C: Ít nhất một người trúng là nữ
- D: Ít nhất một người trúng tuyển là nam
- E: Một người trúng tuyển là nam, 1 người trúng tuyển là nữ

Ví dụ 4

Trong trường có 03 quán cơm. Ba sinh viên đi ăn cơm trưa, mỗi người chọn ngẫu nhiên một quán cơm để ăn. Tính các xác suất sau đây:

- A: Cả 3 người cùng vào 1 quán.
- B: Ít nhất 2 người cùng vào 1 quán.
- C: Mỗi người vào 1 quán.

Xác suất của một biến cố

Định nghĩa theo tần suất: Gọi *k*(A) là số lần xuất hiện biến cố A trong *n* lần thử C. Tần suất xuất hiện *fn*(A) của biến cố A:

$$fn(A) = \frac{k(A)}{n}$$

Xác suất của biến cố A:

$$P(A) = \lim_{n \to +\infty} fn(A)$$

Ví dụ 5

Để xác định xác suất một sinh viên khoa CNTT xin được việc sau khi ra trường, người ta theo dõi 500 sinh viên và thấy có 495 sinh viên xin được việc. Vậy xác suất cần tìm xấp xỉ bằng:

P(Sinh viên khoa CNTT xin được việc) = 495/500

Các ví dụ khác?

Tiên đề xác suất

Nhà toán học Nga Kolmogorov đưa ra một số tiên đề sau:

- Mọi biến cố A:

$$0 \le P(A) \le 1$$

- $P(\Omega) = 1; P(\varnothing) = 0$

- Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các biến cố đôi một xung khắc với nhau

$$P\left(\bigcup_{i=1\ldots n} A_i\right) = \sum_{i=1\ldots n} P(A_i)$$

Các qui tắc tính xác suất

- Qui tắc cộng cho các biến cố xung khắc

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Qui tắc cộng tổng quát

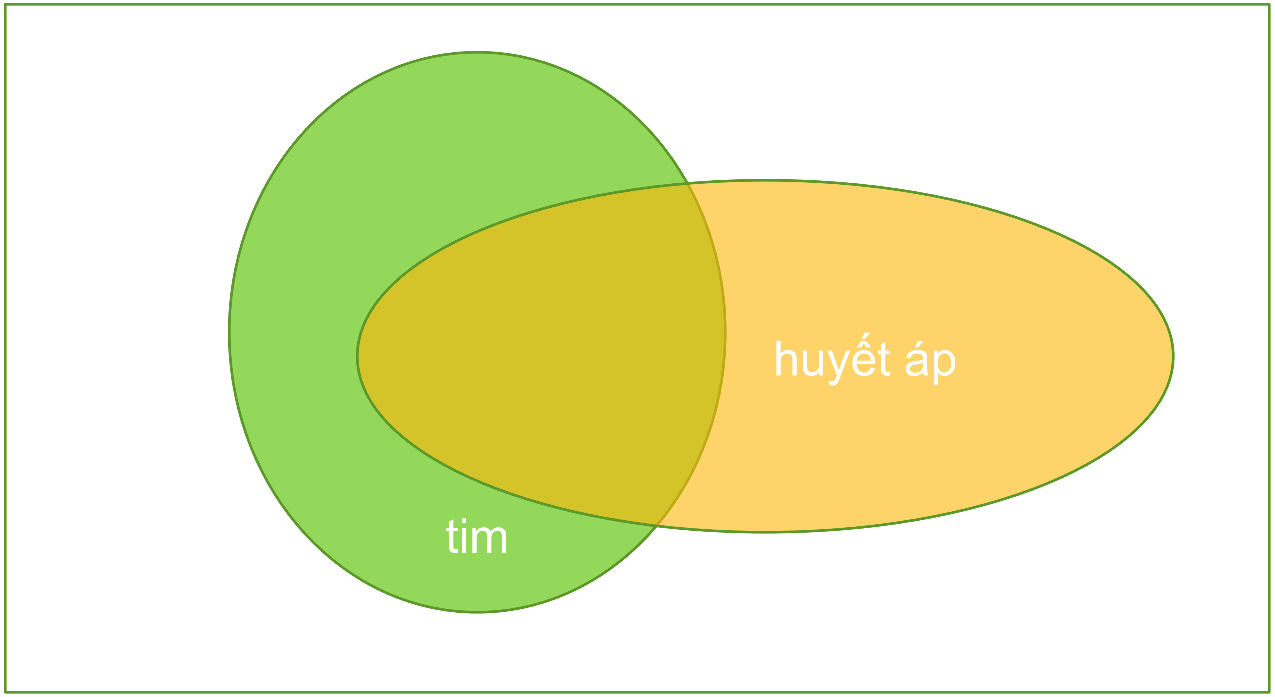
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

- Qui tắc chuyển sang biến cố đối

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Ví dụ 6

Một vùng dân có 9% mắc bệnh tim, 12% mắc huyết áp, 7% mắc cả hai bệnh. Chọn ngẫu nhiên một người dân vùng đó. Tính xác suất người đó không mắc bệnh?



Ví dụ 7

Sinh viên khoa CNTT có 70% lập trình tốt C++, 45% lập trình tốt Python, và 25% lập trình tốt cả C++ và Python. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên khoa CNTT, tính xác suất sinh viên đó không lập trình tốt cả C++ và Python.