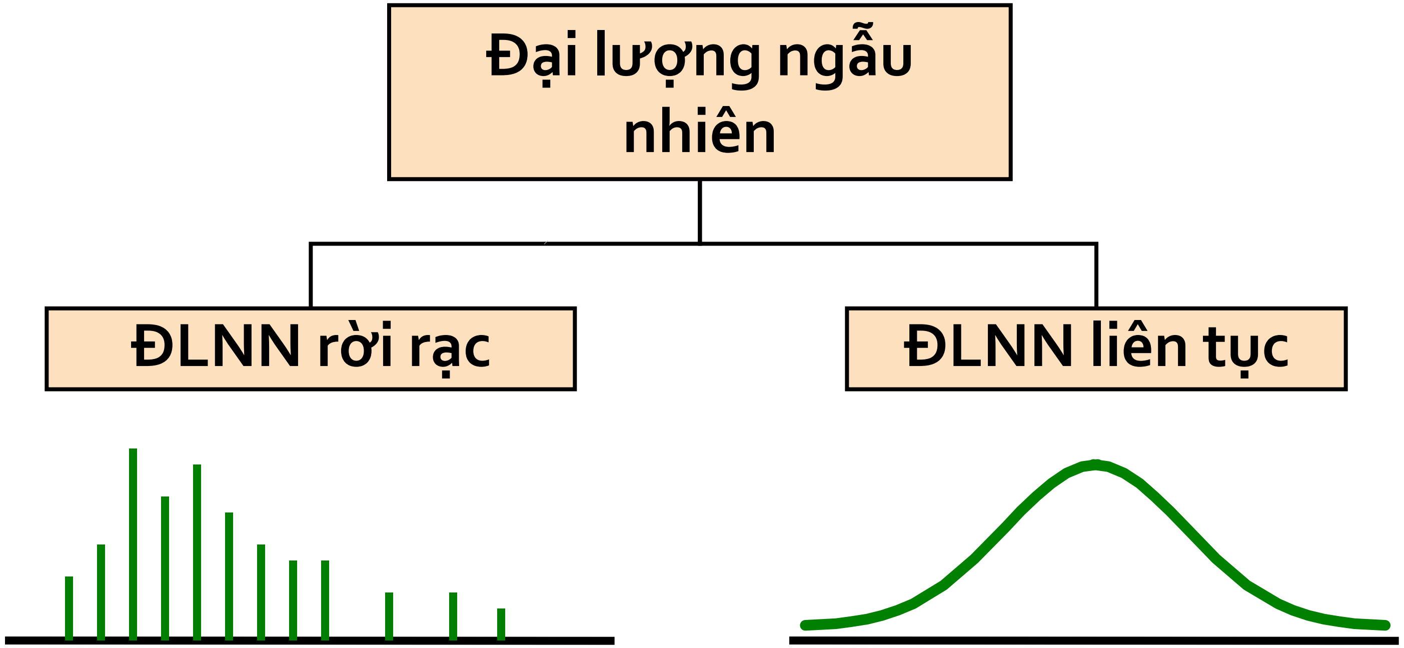
Đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Giảng viên: Hoàng Thị Điệp
Khoa CNTT – Đại học Công Nghệ

Nội dung

» Đại lượng ngẫu nhiên liên tục
» Hàm mật độ xác suất và hàm phân bố tích lũy
» Kì vọng, Phương sai
» Phân bố đều
» Phân bố chuẩn
» Phân bố mũ
» Đại lượng ngẫu nhiên liên tục nhiều chiều (tự đọc)

Đại lượng ngẫu nhiên



Biến ngẫu nhiên liên tục

» Tập các giá trị có thể của nó lấp đầy một hay một số khoảng của trục số, thậm chí lấp đầy toàn bộ trục số.

» Ví dụ

- Chiều cao, cân nặng.
- Thời gian để hoàn thành 1 công việc.

Hàm mật độ xác suất

f(x) gọi là hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục X nếu

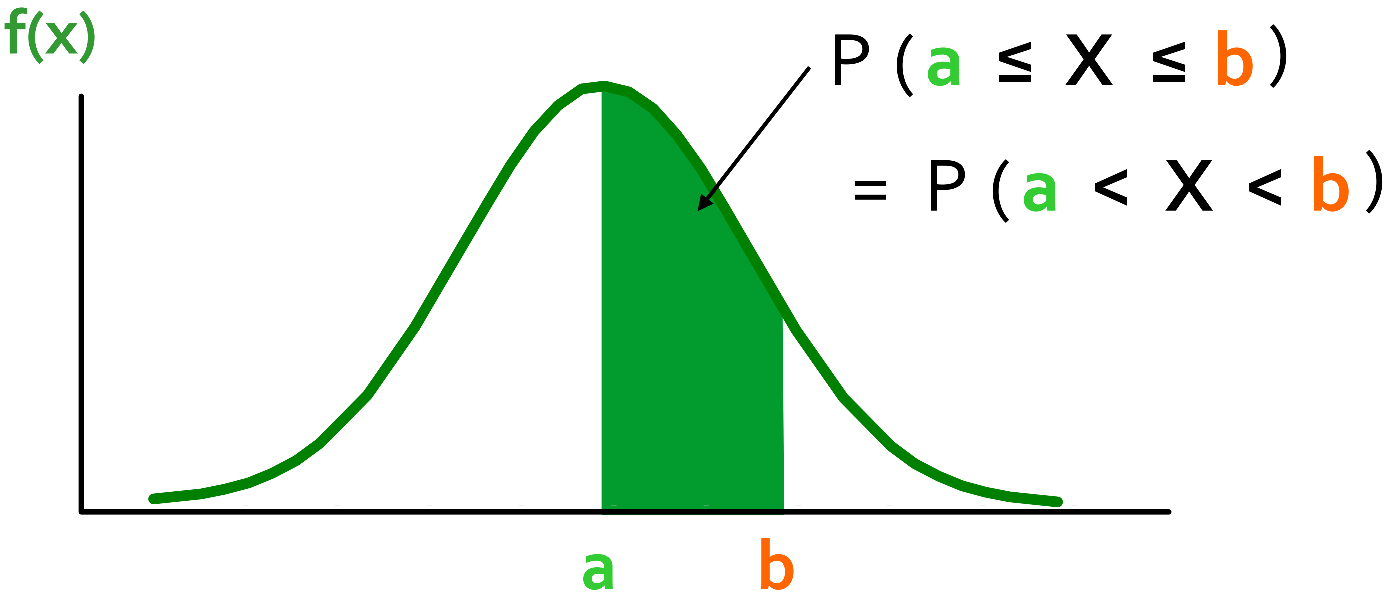
$$\boxed{\begin{array}{l} i)\, f(x) \geq 0 \quad \forall x \\ ii)\, \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \end{array}}$$

Ví dụ. Biến ngẫu nhiên liên tục X với hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \neq \end{cases}$$

Biến ngẫu nhiên liên tục

» Tìm P(a<X<b)?



$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Biến ngẫu nhiên liên tục

» Lưu ý:

$$P(X = c) = \int_c^c f(x)dx = 0$$

» Do đó

$$P(a < X < b) = P(a \le X < b)$$
$$= P(a < X \le b) = P(a \le X \le b)$$

Hàm phân phối tích lũy

- Xét biến ngẫu nhiên X, hàm phân phối tích lũy của X, ký hiệu F(x), được định nghĩa như sau

$$F(x) = P(X \le x)$$

  - Giáo trình

$$F(x) = P(X < x)$$

- Xác suất X thuộc [a,b]

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$$

Tính chất hàm phân phối tích lũy

» 1) $0 \le F(x) \le 1$

» 2) F(x) là hàm không giảm: nếu a<b thì F(a) ≤ F(b).

» 3)

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

$$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm phân phối tích lũy F(x) thì hàm mật độ f(x) = F'(x) tại những điểm liên tục của X.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Nguyên hàm của một số hàm số cơ bản

1	$\int 0 \times dx = C$	**6**	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln\ a} + C$ $\int a^{u(x)} du = \frac{a^{u(x)}}{\ln(a)} + C$
2	$\int dx = x + C$	**7**	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$ $\int \cos u(x)\, du(x) = \sin u(x) + C$
3	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$ $\int u(x)^\alpha du\,(x) = \frac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	**8**	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$ $\int \sin u(x)\, du(x) = \cos u(x) + C$
4	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$ $\int \frac{du(x)}{u(x)} = \ln\lvert u\rvert + C$	**9**	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$ $\int \frac{1}{\cos^2 u(x)} du(x) = \tan u(x) + C$
5	$\int e^x dx = e^x + C$ $\int e^{u(x)} du(x) = e^{u(x)} + C$	**10**	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$ $\int \frac{1}{\sin^2 u(x)} du(x) = -\cot u(x) + C$

https://vi.wikipedia.org/

Ví dụ

Giả sử X có giá trị trong đoạn [0,2] và hàm mật độ xác suất $f(x) = cx^2$.

a) Tính giá trị của c

b) Tính hàm phân bố tích lũy F(x)

c) Tính $P(1 \leq X \leq 2)$

Ví dụ

Giả sử X có giá trị trong đoạn [0,b] và hàm phân phối tích lũy $F(x) = x^2/9$.

a) Tính giá trị của b

b) Tính hàm mật độ xác suất f(x)

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

$$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên liên tục

» Xét biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất f(x).

» Kỳ vọng của X

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Ví dụ. Biến ngẫu nhiên liên tục X với hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & 0 \le x \le 2 \\ 0 & ,\neq \end{cases}$$

Tính EX.

Tính chất của kỳ vọng

1. $EC = C$, C: hằng số
2. $E(CX) = C.EX$
3. $E(X + Y) = EX + EY$
4. $E(XY) = EX.EY$ nếu X và Y độc lập

$P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i).P(Y=y_j)$

Phương sai của biến ngẫu nhiên liên tục

Xét X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất f(x).

Ký hiệu μ = EX.

Phương sai, kí hiệu DX hay VarX hay V(X)

$$VarX = E(X - EX)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)\,dx$$

hoặc

$$VarX = EX^2 - (EX)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2$$

Tính chất của phương sai

1. $Var(c)=0$, c:hằng số
2. $Var(cX)=c^2VarX$;
3. $Var(X+c)=VarX$
4. $Var(X + Y) = VarX + VarY$ nếu X và Y độc lập.

Ví dụ

Giả sử X có giá trị trong đoạn [0,1] và hàm mật độ xác suất f(x) = cx^2.

a) Tính kì vọng EX

b) Tính phương sai DX

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$VarX = EX^2 - (EX)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2$$

Ví dụ

Giả sử X nằm trong đoạn [0,3] với hàm mật độ $f(x) = cx^3$. Hãy tìm:

a) Hằng số c
b) Kì vọng
c) Phương sai và độ lệch chuẩn
d) Median

Giá trị m được gọi là median của ĐLNN X nếu

$$P\{X<m\} = P\{X > m\} \quad \text{hay } F(m) = 1/2$$

Bài tập

Giả sử X có giá trị trong đoạn [0,5] và hàm mật độ xác suất $f(x) = cx^2$.

a) Tính giá trị của c
b) Tính hàm phân bố tích lũy F(x)
c) Tính $P(X = 1)$
d) Tính $P(1 \leq X \leq 2)$
e) Không cần tính ra giá trị cụ thể, so sánh 2 xác suất $P(2 \leq X \leq 3)$ và $P(3 \leq X \leq 4)$

Nội dung

- Đại lượng ngẫu nhiên liên tục
- Hàm mật độ xác suất và hàm phân bố tích lũy
- Kì vọng, Phương sai
- Phân bố đều
- Phân bố chuẩn
- Phân bố mũ
- Đại lượng ngẫu nhiên liên tục nhiều chiều (tự đọc)

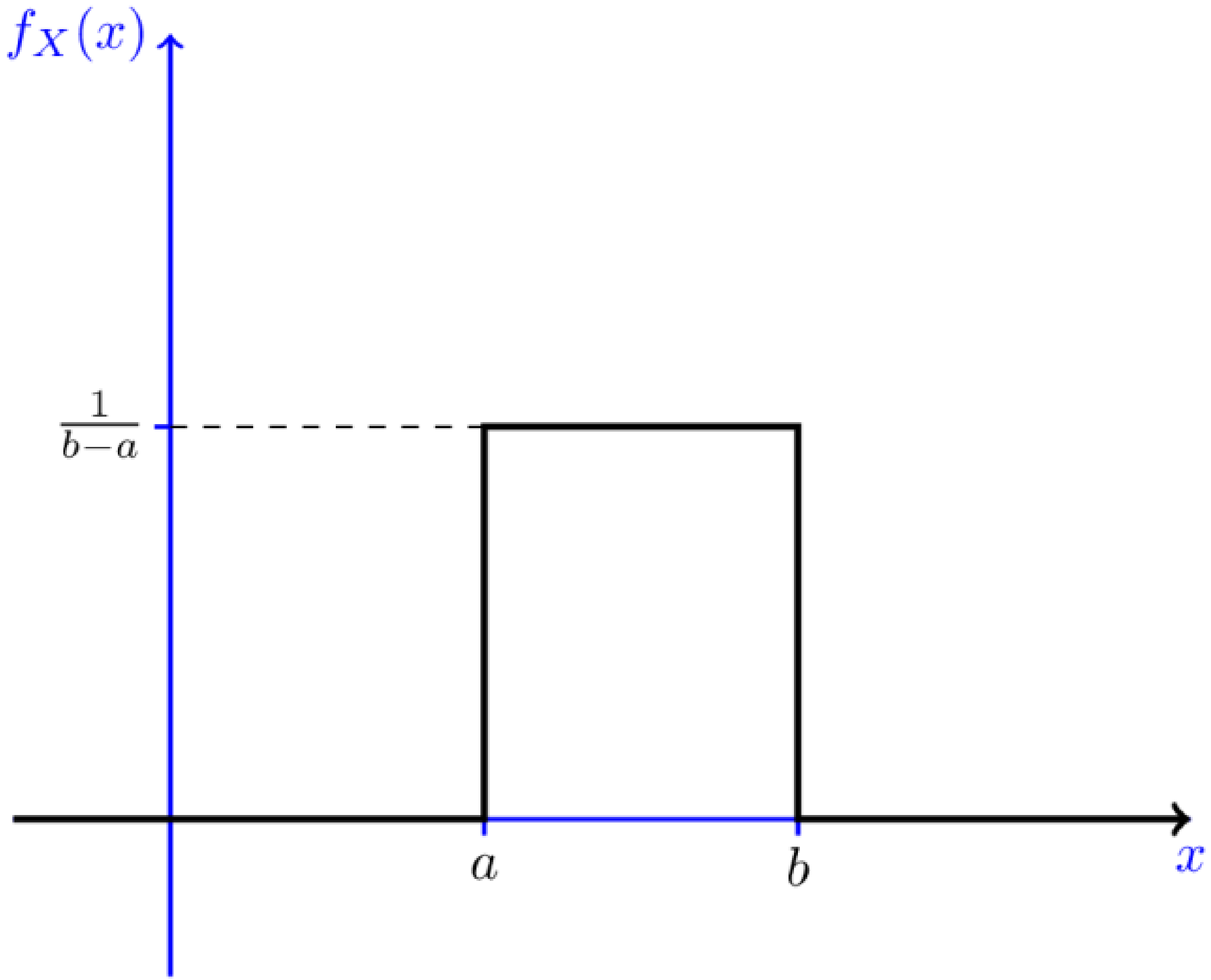
Phân phối đều

- Một ĐLNN liên tục X có phân phối đều (uniform distribution) trong đoạn [a,b] nếu và chỉ nếu hàm mật độ xác suất f(x) có dạng sau

$$f(x,a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & ;\, \text{nếu}\; a \le x \le b \\ 0 & ;\, \text{ngược lại} \end{cases}$$

  - Ví dụ RAND () là phân phối đều trong đoạn [0,1].
- Kì vọng EX
- Phương sai DX

Hàm mật độ của phân phối đều



Ví dụ

ĐLNN X có phân bố đều trên đoạn [2,5]. Hãy tính

a) $P(X < 3)$

b) $P(X > 4)$

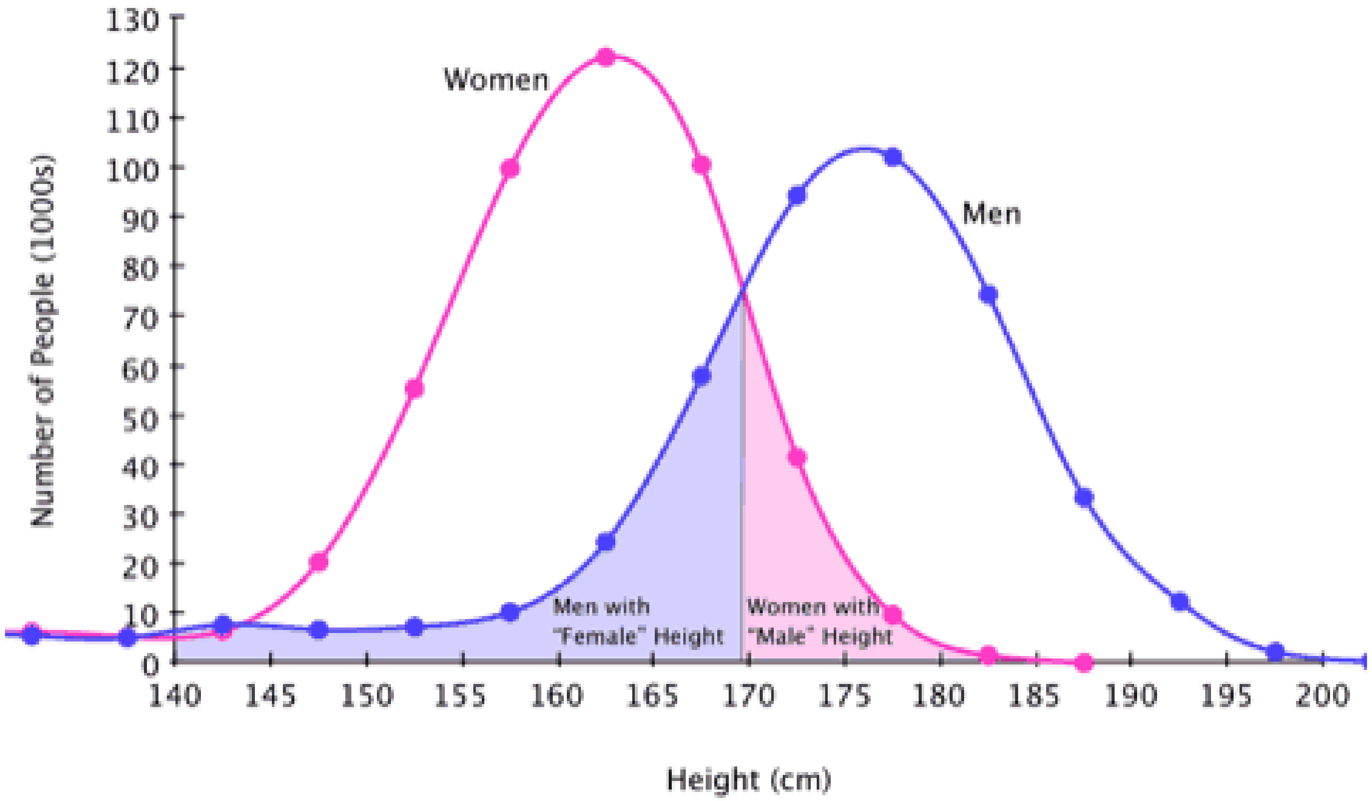
c) $P(3.5 < X \leq 7)$

d) Tính kì vọng, phương sai của X.

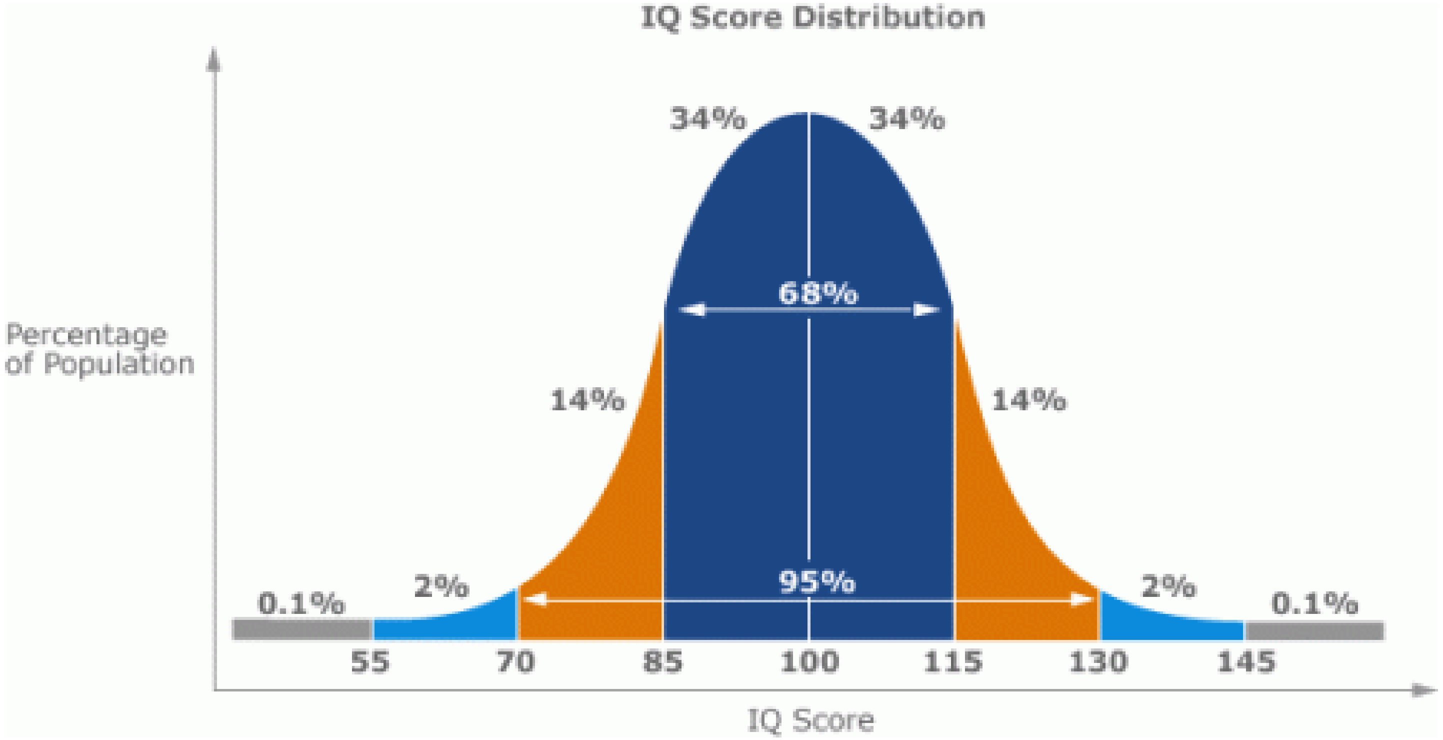
$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$VarX = EX^2 - (EX)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2$$

Phân bố chuẩn normal/Gaussian distribution



Phân bố chuẩn normal/Gaussian distribution



Phân bố chuẩn normal/Gaussian distribution

Hàm mật độ f(x)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-[(x-\mu)/\sigma]^2/2}$$

Trong đó:

» μ là kì vọng

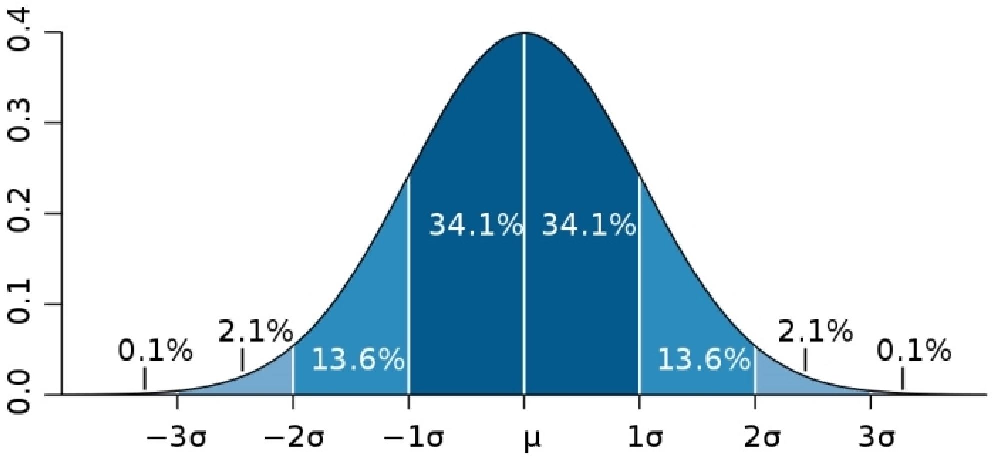
» σ là độ lệch chuẩn

» Kí hiệu X ~ N(μ, σ^2)

» Kì vọng, median, và mode cùng một giá trị

» Phân bố là đường cong đối xứng qua giá trị kì vọ

» Hai đuôi của phân bố kéo dài đến vô cùng

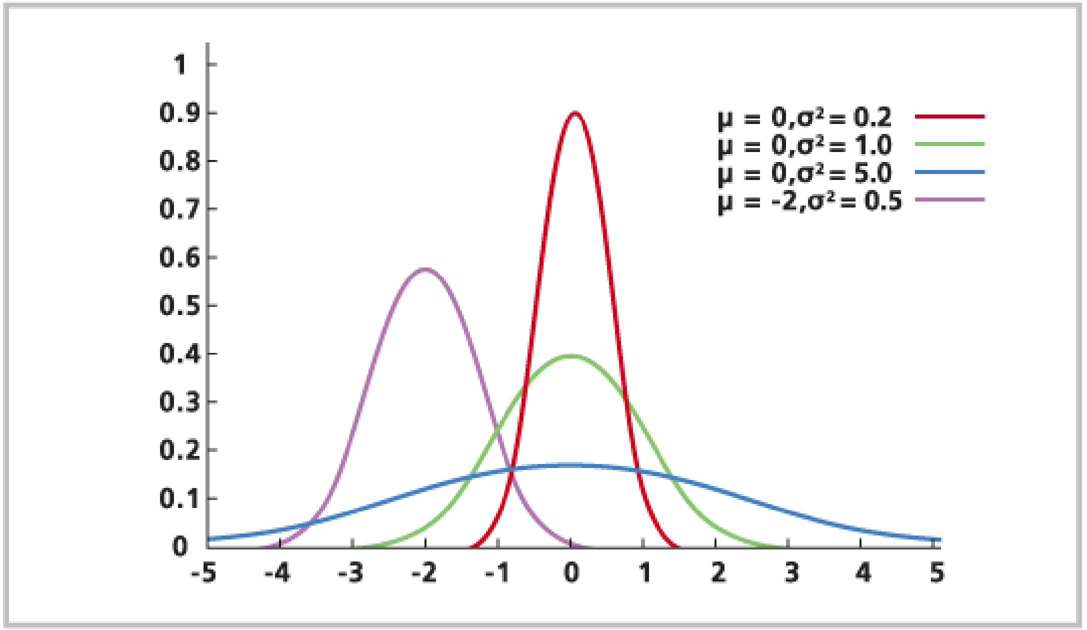


Phân bố chuẩn tắc
standard normal distribution

ĐLNN X *có phân bố chuẩn tắc* nếu

X phân bố chuẩn với μ = 0, σ = 1

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$



Tính xác suất theo phân bố chuẩn normal/Gaussian distribution

» Gọi X có phân bố chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$

» $Z = (X-\mu) / \sigma$: Số lần độ lệch chuẩn giữa X và μ.

Z có phân bổ chuẩn tắc hay $Z \sim N(0, 1)$

Sinh viên tự chứng minh

» $P(X < x) = P(Z < z)$. Giá trị $P(Z < z)$ đã được tính sẵn trong bảng.

Ví dụ: Giả sử X là ĐLNN có phân bố chuẩn với kì vọng 2100 và độ lệch chuẩn 200. Hãy tính

1. $P\{X > 2400\}$
2. $P\{2100 < X < 2400\}$
3. Xác định a để $P\{X > a\} = 0.08$
4. Xác định a để $P\{X > a\} = 0.75$

Hình 21 trang 213

1. Đường cong hình quả chuông là gì?

2. Diện tích phần gạch chéo là gì?

3. Diện tích phần trắng là gì?

4. Diện tích giữa đường cong và trục hoành là gì?

Hình 21 trang 213

1. Đường cong hình quả chuông là gì?

   Đồ thị hàm mật độ của biến Z. Z là biến ngẫu nhiên liên tục có phân bố chuẩn tắc. Kí hiệu $Z \sim N(0,1)$

2. Diện tích phần gạch chéo là gì?

   Xác suất $Z < 2$

3. Diện tích phần trắng là gì?

   Xác suất $Z > 2$

4. Diện tích giữa đường cong và trục hoành là gì?

   Xác suất để {âm vô cùng}<Z<{dương vô cùng}

Tính xác suất theo phân bố chuẩn normal/Gaussian distribution

Tốc độ của xe ô tô qua 1 điểm kiểm tra tốc độ là một phân phối chuẩn với kì vọng 60km/giờ và độ lệch chuẩn là 5km/giờ. Tính xác suất để tốc độ một chiếc xe sẽ đi qua điểm kiểm tra:

1. Nhỏ hơn 60km/giờ
2. Lớn hơn 70km/giờ
3. Từ 60-65km/giờ

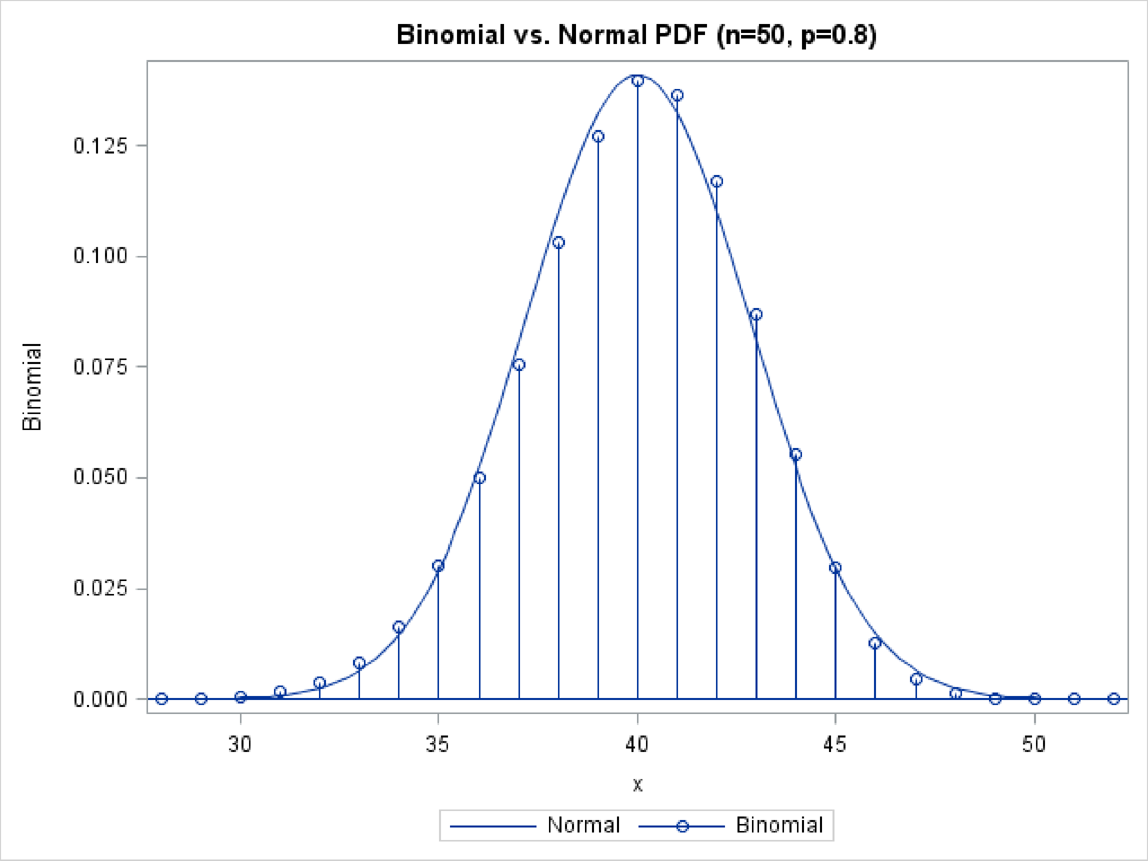
Tính xác suất của phân bố chuẩn normal/Gaussian distribution

Lương một sinh viên Cơ ra trường có phân bố chuẩn với kì vọng 6 triệu và phương sai 2 triệu^2. Tính xác suất lương một sinh viên

1. <4 triệu
2. 5-7 triệu
3. >10 triệu

Xấp xỉ phân bố nhị thức bằng phân bố chuẩn

» Hàm mật độ



Xấp xỉ phân bố nhị thức bằng phân bố chuẩn

» ĐLNN **X ~ B (n,p)** thì $P(X = k) = C^k_n\, p^k q^{n-k}$

» X có phân bố xấp xỉ **X' ~ N(np, npq)** khi np và nq lớn hơn 5 hoặc khi npq lớn hơn 20.

- Tức là EX'=np, DX'=npq

» Hiệu chỉnh để giảm sai số P{k1 <= X <=k2) được xấp xỉ bởi

  P(k1-0.5 < X' < k2 + 0.5)

Ví dụ: Một kí túc xá có 650 sinh viên. Xác suất 1 sinh viên đi xem phim vào tối thứ bảy là 0.7.

a) Tính xác suất để số sinh viên đi xem vào tối thứ bảy ít hơn 470

b) Cần phải chuẩn bị bao nhiêu ghế để với xác suất 0.95 ta có thể đảm bảo đủ ghế cho người xem.

Nguyên lý xác suất nhỏ

- Một biến cố có xác suất α rất nhỏ, thì thực tế có thể cho rằng biến cố đó không xảy ra trong một lần thử.

  Ví dụ:xác suất tai nạn máy bay là 0.00001.

- Mức xác suất nhỏ này được gọi là *mức ý nghĩa* α.

Xác suất β=1- α được gọi là *độ tin cậy.*

- Tuyên bố "Biến cố A có xác suất nhỏ (P(A) <= α) sẽ không xảy ra trên thực tế" với độ tin cây β. Tính đúng đắn của kết luận chỉ xảy ra trong 100xβ% trường hợp.

Nguyên lý xác suất nhỏ

Một nhà xã hội học cho rằng 12% dân số của thành phố thích bộ phim A. Chon ngẫu nhiên 500 người và thấy có 75 người thích.

a) Tính xác suất có ít nhất 75 người thích bộ phim trong số 500 người được chọn

b) Giả thiết của nhà xã hội học đó có đáng tin cậy không với mức ý nghĩa là 0.05.

Nội dung

- Đại lượng ngẫu nhiên liên tục
- Hàm mật độ xác suất và hàm phân bố tích lũy
- Kì vọng, Phương sai
- Phân bố đều
- Phân bố chuẩn
- Phân bố mũ
- Đại lượng ngẫu nhiên liên tục nhiều chiều (tự đọc)

Phân bố mũ (exponential distribution)
Ví dụ

- Ví dụ 1: Quan sát xe buýt tới trạm dừng trước Đại học Sư phạm
  - X: đếm số xe buýt tới trạm trong 1 tiếng. Giả sử trung bình có 5 xe tới trong 1 tiếng.
    - EX = 5
    - X ~ Poisson ($\lambda = 5$)
  - T: đo thời gian giữa 2 xe liên tiếp (đơn vị: giờ)
    - ET = 1/5
    - T ~ mũ ($\lambda = 5$)
- Ví dụ 2: Tuổi thọ của một mạch điện tử
- Ví dụ 3: Thời gian hỏng hóc giữa hai lần của 1 chiếc máy
- Ví dụ 4: Thời gian giữa hai ca cấp cứu liên tiếp ở một bệnh viện A

Phân bố Poisson – Phân bố mũ

- Giả sử các biến cố xảy ra theo một quá trình Poisson với tham số λ. X~Poisson(λ) trong một đơn vị thời gian. Gọi T là thời gian tới khi có biến cố tiếp theo. T là biến ngẫu nhiên liên tục.
- Hàm phân bố tích lũy của T

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(X = 0)$$

- X là phân bố Poisson có tham số λt trong khoảng thời gian (0,t)

$$F(t) = 1 - \frac{e^{-\lambda t} \lambda t^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda t}$$

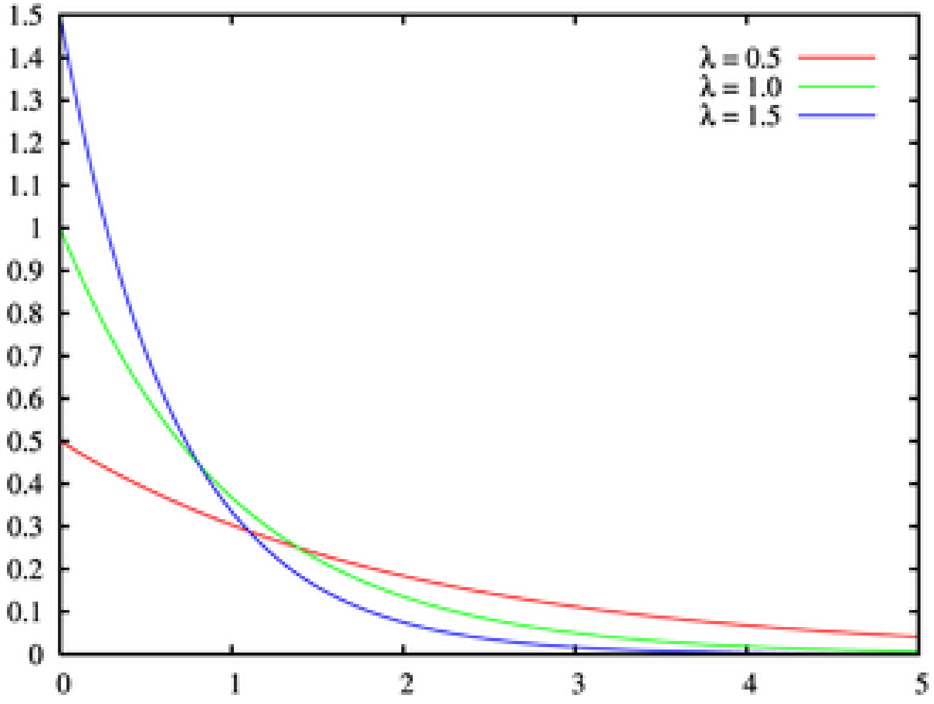
- Hàm mật độ xác suất của T

$$f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Phân bố mũ

Hàm mật độ (hình)

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}; t > 0 \\ 0; t < 0 \end{cases}$$



Hàm phân bố tích lũy

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}; t > 0 \\ 0; t \le 0 \end{cases}$$

Kì vọng và độ lệch chuẩn đều bằng 1/λ

Ví dụ

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}; t > 0 \\ 0; t < 0 \end{cases} \qquad F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}; t > 0 \\ 0; t \le 0 \end{cases}$$

1. Tuổi thọ của một mạch điện có phân bố mũ, tuổi thọ trung bình là 6.5 năm. Trong thời gian 5 năm bảo hành, có bao nhiêu % mạch điện bị hỏng?

- Tính xác suất để tuổi thọ <= 5

2. Trung bình có 5 bệnh nhân xuất hiện trong 1 tiếng tại bệnh viện theo phân bố Poisson. Một bệnh nhân vừa xuất hiện, tính xác suất bệnh nhân tiếp theo xuất hiện:

a) Trong vòng 10 phút
b) Trong vòng 20 phút
c) Không có bệnh nhân nào xuất hiện trong vòng 15 phút
d) Không có bệnh nhân nào xuất hiện trong vòng 30 phút

Ví dụ

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}; t > 0 \\ 0; t < 0 \end{cases} \qquad F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}; t > 0 \\ 0; t \le 0 \end{cases}$$

Trung bình 1 năm có 12 trận mưa to tại Quảng Bình và theo phân bố Poisson. Một trận mưa to vừa diễn ra cách đây 2 tuần. Tính xác suất

a) Trận mưa tiếp theo diễn ra hôm nay
b) Trận mưa tiếp theo diễn ra trong vòng 1 tuần
c) Trận mưa tiếp theo diễn ra trong vòng 1 tháng
d) Không có trận mưa nào diễn ra trong vòng 2 tháng

Sử dụng xác suất có điều kiện để tính toán

Kiểm tra 5 phút

- Tuổi thọ của một loại radio tuân theo phân bố mũ với tuổi thọ trung bình là 5 năm. Nếu Tùng mua 1 chiếc radio đã 5 năm tuổi, xác suất nó sẽ hoạt động thêm ít nhất 4 năm nữa là bao nhiêu?

$$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t};t>0\\0;t<0\end{cases}\qquad F(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t};t>0\\0;t\le 0\end{cases}$$

Chuẩn bị bài tới

- Đọc Chương 5 giáo trình
- Hoàn thành bài tập gửi qua email