Санкт-Петербургский Национальный Исследовательский Университет Информационных Технологий, Механики и Оптики Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Расчётно-графическая работа №2

по дисциплине «Математика»

Выполнили:
Романов Артём
Венин Дмитрий
Лебедев Вадим
Группа: P3110

Санкт-Петербург
2020 г.

Задание 1. Пределы

Дана последовательность a_n и функция $f(x)$. Исследуйте поведение предложенных величин:

	Последовательность	Функция
1)	Вычислите предел последовательности при $n \to \infty$, исследуйте её на монотонность и ограниченность.	Вычислите предел функции при $x \to \infty$, исследуйте её на монотонность и ограниченность.
2)	Постройте график общего члена последовательности в зависимости от номера n.	Постройте график функции в зависимости от x.
3)	Проиллюстрируйте сходимость (расходимость), ограниченность и монотонность последовательности:	Проиллюстрируйте сходимость (расходимость) ограниченность и монотонность функции на бесконечности:
а)	вспомните определение сходимости (расходимости), ограниченность и монотонность последовательности;	вспомните определение сходимости (расходимости), ограниченность и монотонность функции в на бесконечности;
б)	выберите три различных положительных числа ε_1, ε_2 и ε_3;	
в)	для каждого такого числа изобразите на графике ε-окрестность («ε-трубу»)	
г)	и найдите на графике номер N, начиная с которого все члены последовательности попадают в ε-окрестность или установите, что такого номера нет.	и найдите на графике δ-окрестность, в которой все значения функции попадают в ε-окрестность или установите, что такой окрестности нет.

Последовательность и функция:

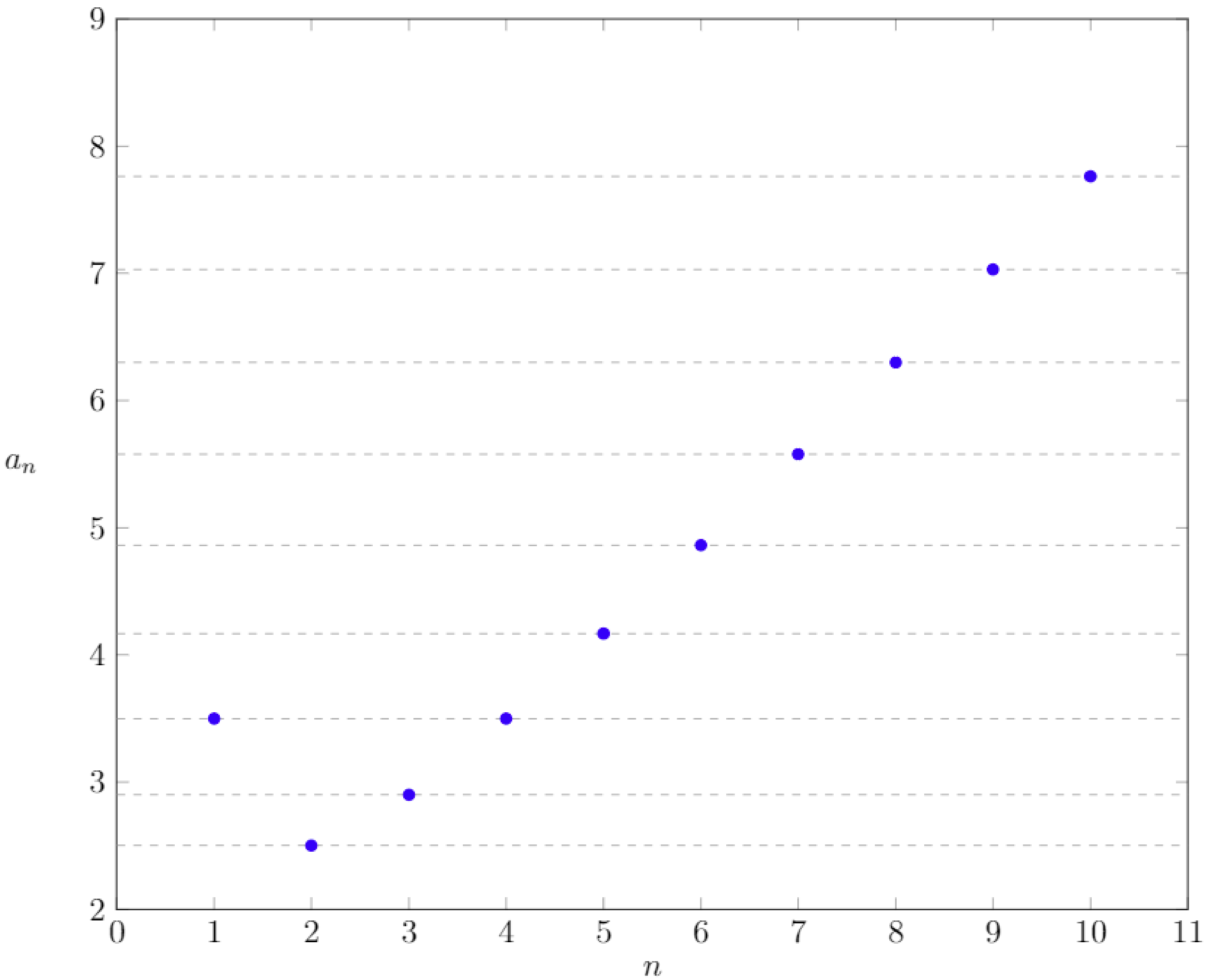
$$a_n = \frac{5 - n + 3n^2}{2 + 6 + \cdots + (4n - 2)}$$

$$f(x) = \left(\frac{13x + 8}{10x - 1}\right)^{x^3 - 1}$$

Последовательность

$$a_n = \frac{5 - n + 3n^2}{4n - 2} = \frac{5 - n + 3n^2}{4n - 2} = \frac{\frac{5}{n^2} - \frac{1}{n} + 3}{\frac{4}{n} - \frac{2}{n^2}} = \frac{3}{0} = +\infty$$

Последовательность убывает при $x \in [1; 2]$
Возрастает при $x \in [2; +\infty]$
Последовательность ограничена снизу ($a_n = 2.5$), не ограничена сверху



Последовательность расходится, не ограничивается, монотонно возрастает.
Так как последовательность не сходится в какой угодно точке, найти ε-окрестность и номер, начиная с которого все члены последовательности так или иначе окажутся в ε- окрестности не представляется возможным.

Функция

$$f(x) = \left(\frac{13x+8}{10x-1}\right)^{x^3-1}$$

<u>Предел при $x \to +\infty$:</u>

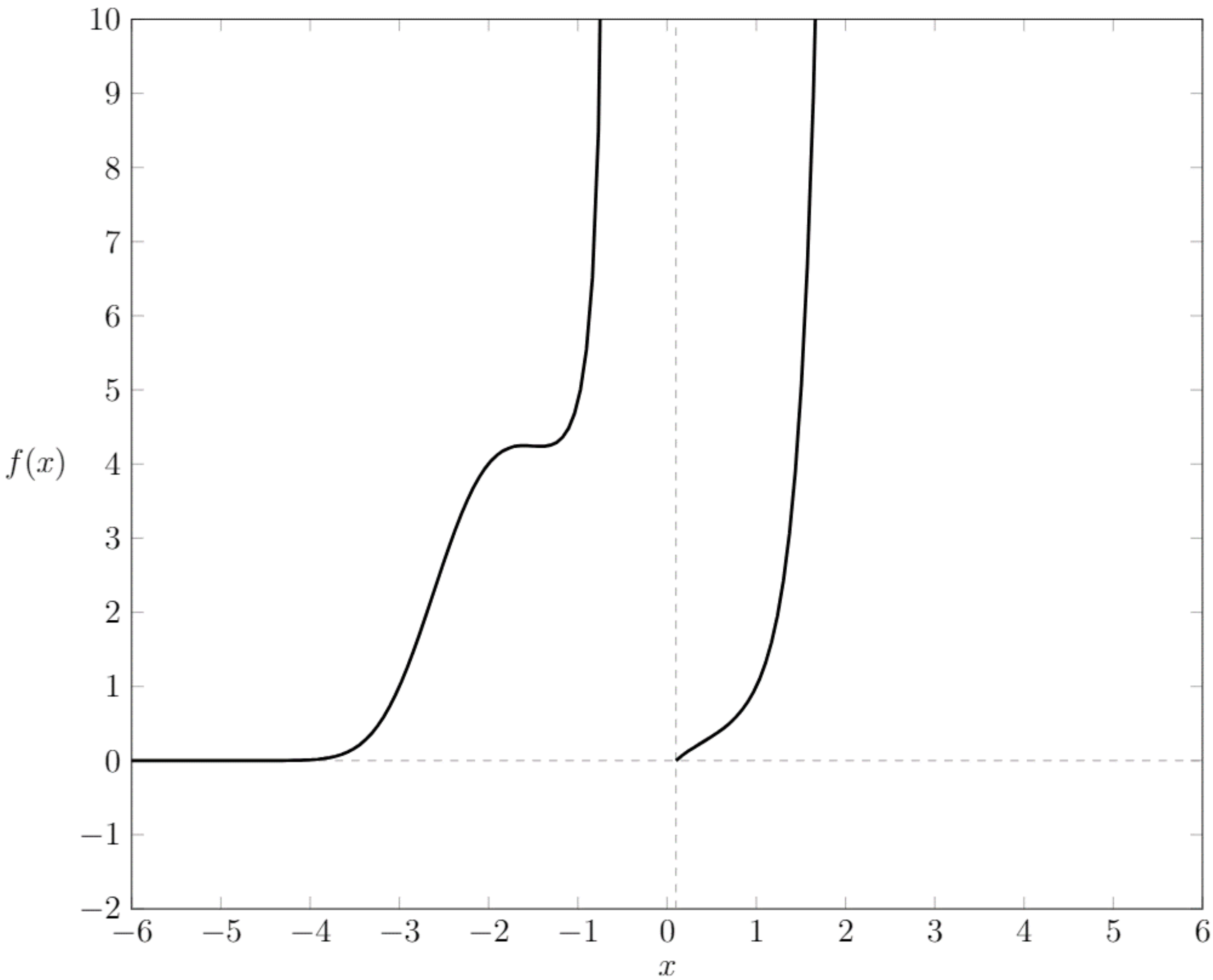
$$f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{13x+8}{10x-1}\right)^{x^3-1} = \lim_{x\to+\infty} \left(\left(\frac{13x+8}{10x-1}\right)^{x^3} \cdot \left(\frac{10x-1}{13x+8}\right)\right) = \frac{10}{13} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{13x+8}{10x-1}\right)^{x^3} = \frac{10}{13} \cdot +\infty = +\infty$$

<u>При $x \to -\infty$:</u>

$$f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{13x+8}{10x-1}\right)^{x^3-1} = \lim_{x\to-\infty} \left(\left(\frac{13x+8}{10x-1}\right)^{x^3} \cdot \left(\frac{10x-1}{13x+8}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(0 \cdot \left(\frac{10x-1}{13x+8}\right)\right) = 0 \cdot \frac{10}{13} = 0$$

Функция возрастает при $x \in (-1.417466; \frac{1}{10}) \cup (\frac{1}{10}; +\infty)$
Функция убывает при $x \in (-\infty; -1.417466)$
Функция ограничена снизу $(y = 0)$

График функции:

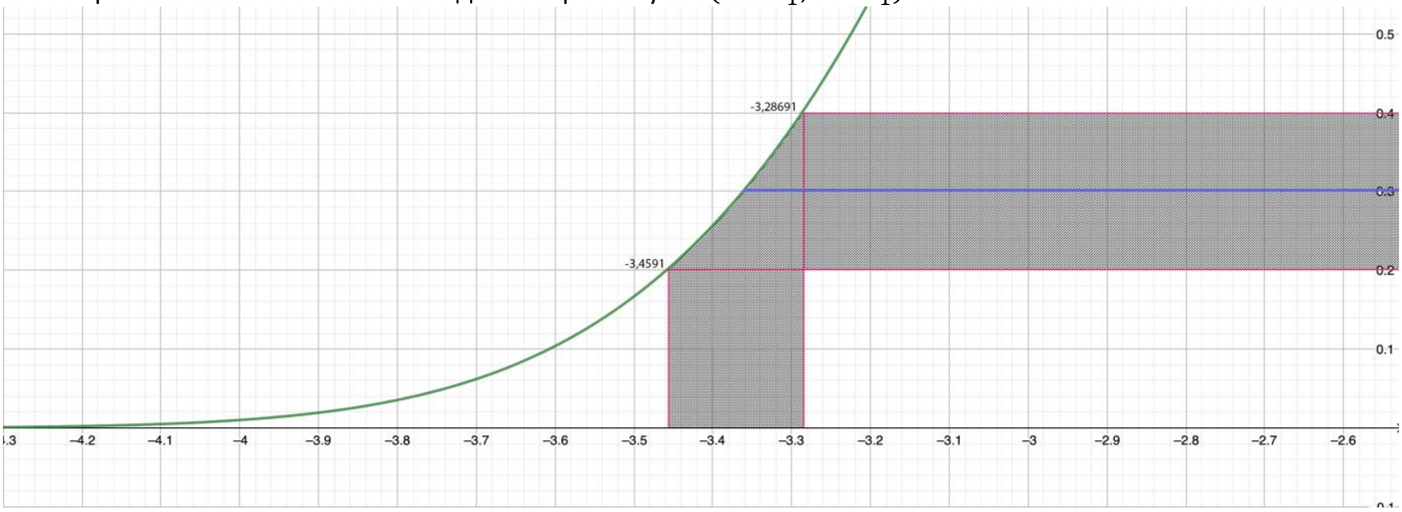


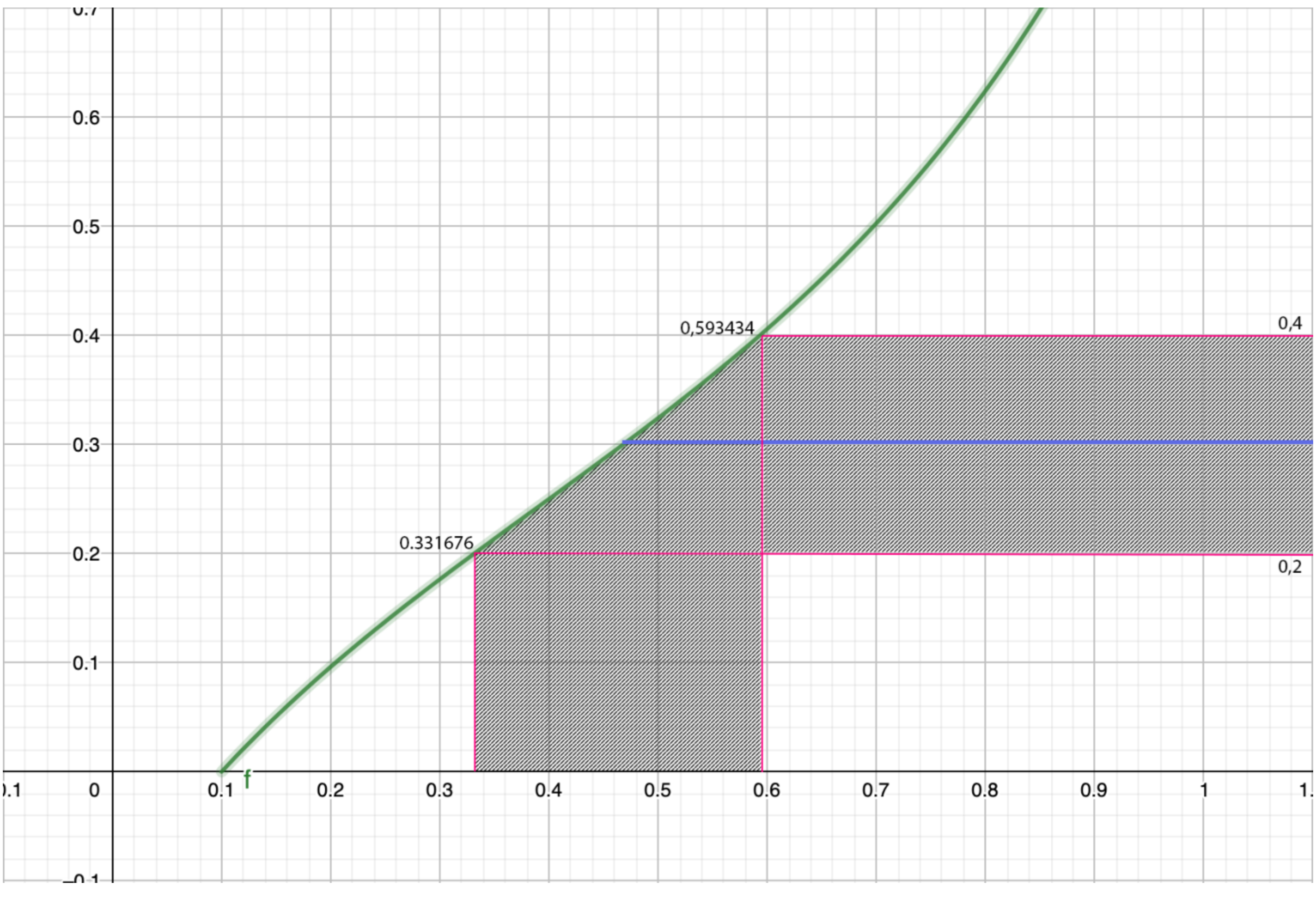
Возьмём три случайных положительных числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ для стремления функции к $-\infty$

$\varepsilon_1 = 10^{-1}$
$\varepsilon_2 = 10^{-2}$
$\varepsilon_3 = 10^{-3}$

Случай для $\varepsilon_1 = 10^{-1}$:

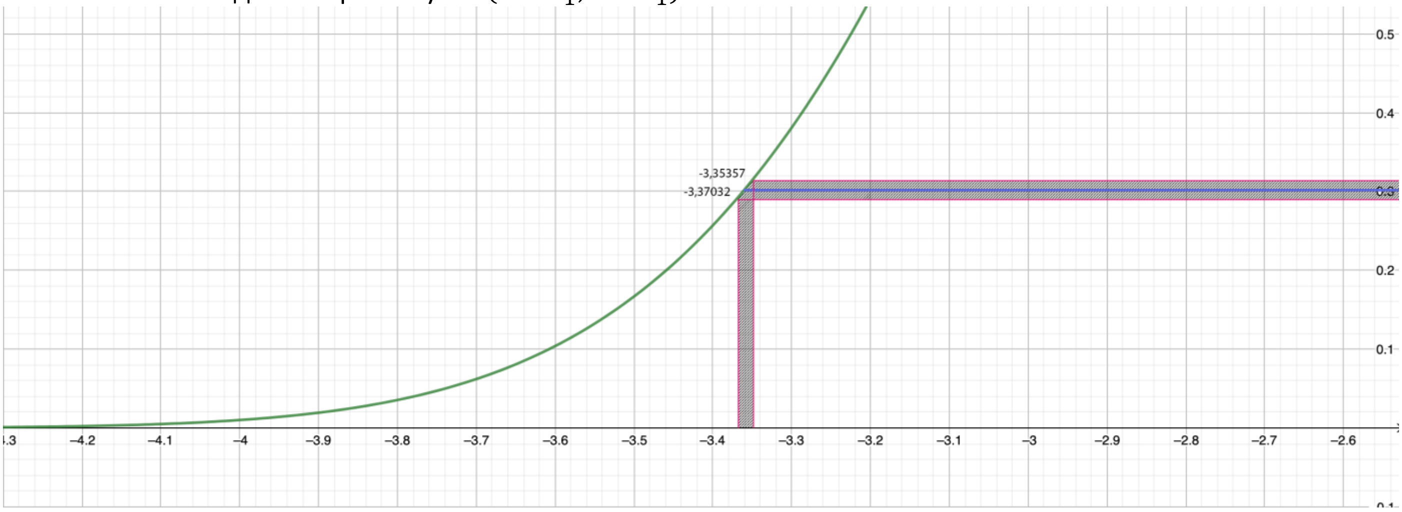
Пусть $A = 0{,}3$. Тогда δ- окрестностью являются два промежутка $(-3{,}4591; -3{,}28691)$; $(0{,}331676; 0{,}593434)$.В этой окрестности все значения попадают в промежуток $(A - \varepsilon_1; A + \varepsilon_1)$

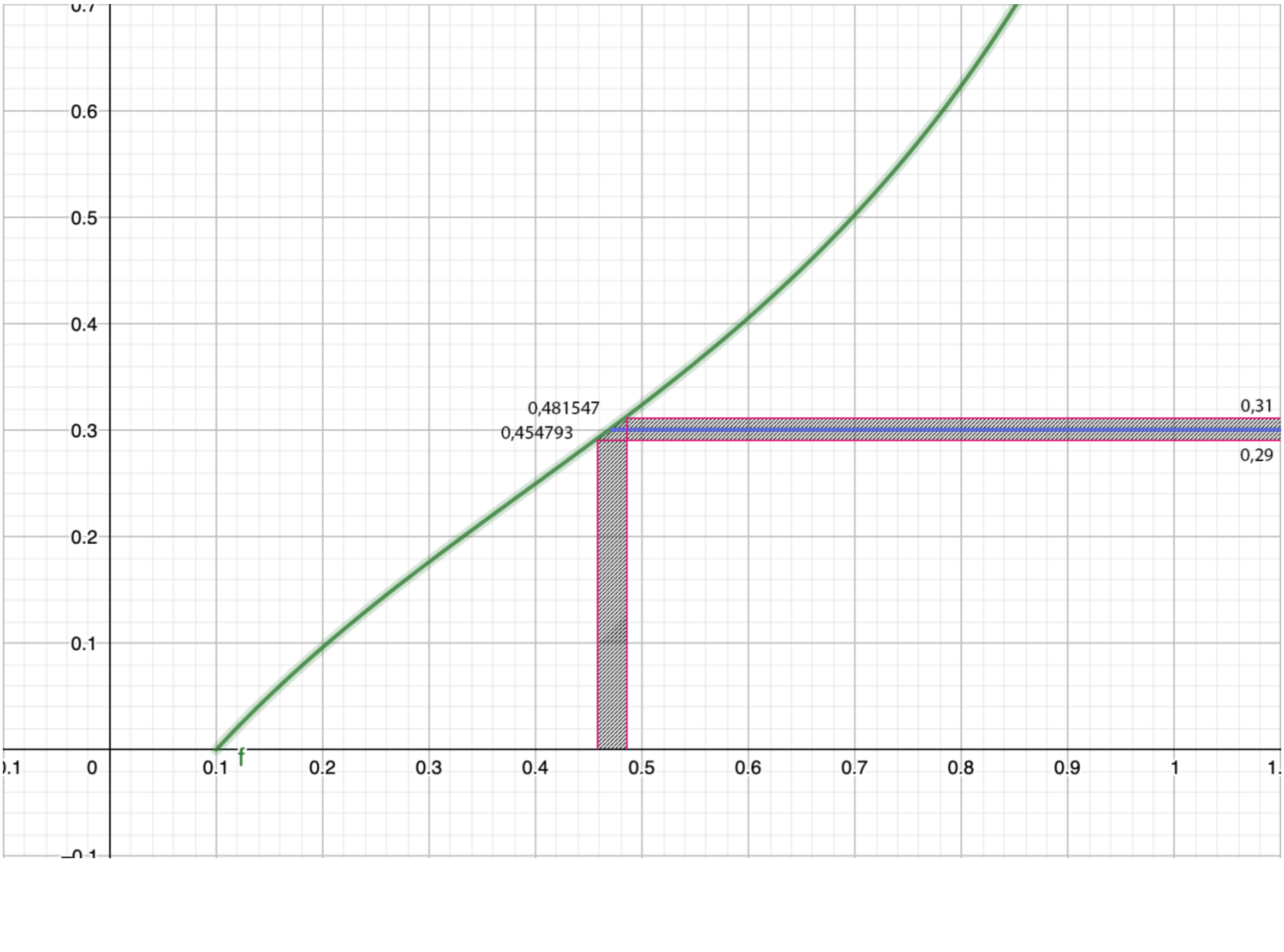




Случай для $\varepsilon_1 = 10^{-2}$:

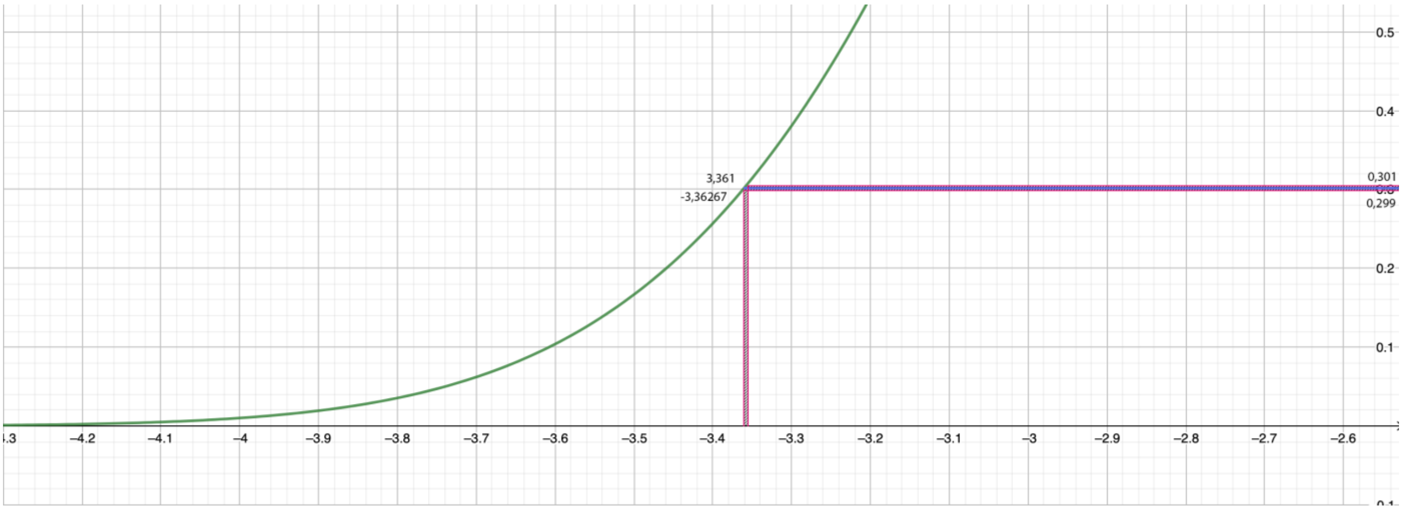
δ- окрестностью являются два промежутка $(-3{,}37032; -3{,}35357)$; $(0{,}454793; 0{,}481547)$.В этой окрестности все значения попадают в промежуток $(A - \varepsilon_1; A + \varepsilon_1)$

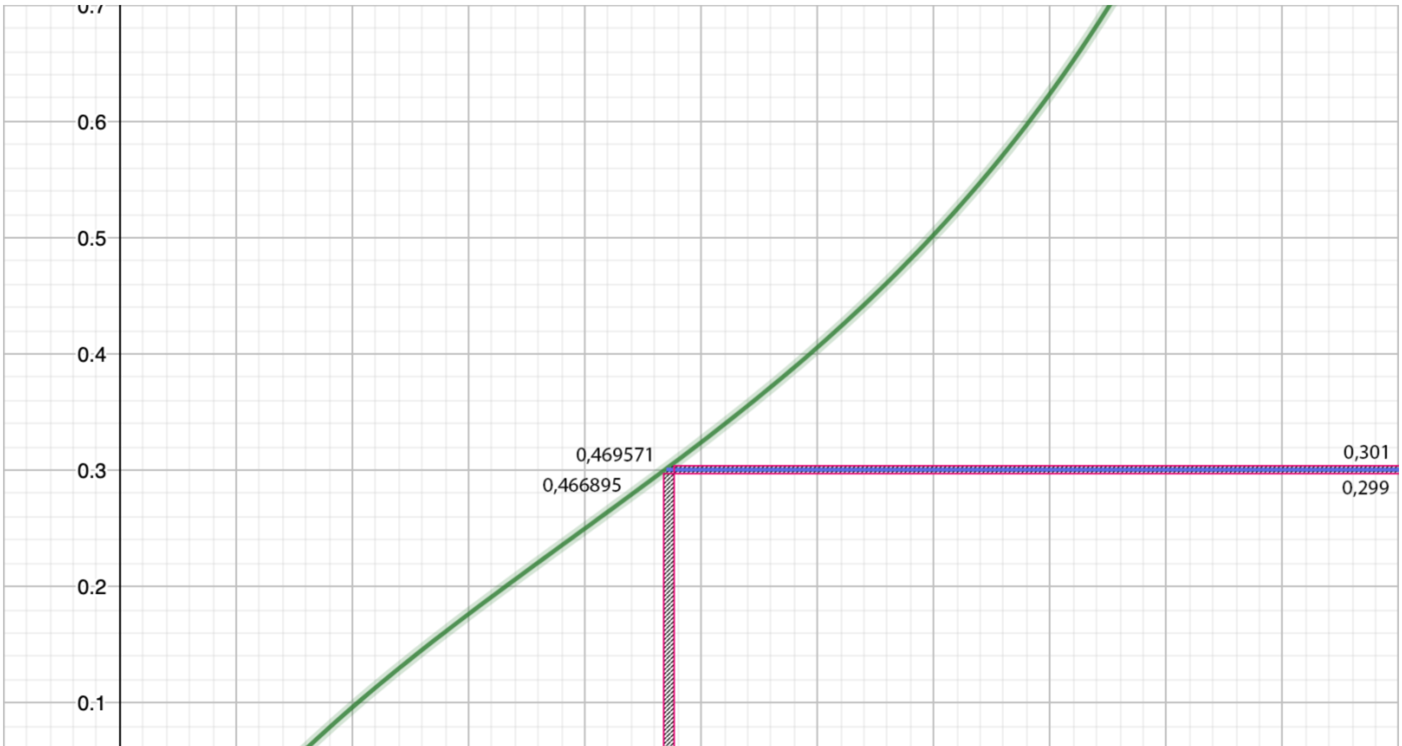




Случай для $\varepsilon_1 = 10^{-3}$:

δ- окрестностью являются два промежутка $(-3{,}36267; -3{,}361)$; $(0{,}466895; 0{,}469571)$.В этой окрестности все значения попадают в промежуток $(A - \varepsilon_1; A + \varepsilon_1)$





Задание 2. Дифференциал

Дана задача. Проведите исследование:

1. Составьте математическую модель задачи: введите обозначения, выпишите данные, составьте уравнение (систему уравнений), содержащее неизвестное.
2. Решите задачу аналитически.
3. Сделайте графическую иллюстрацию к решению задачи. Сверьтесь с аналитическим решением.
4. Запишите ответ.

7.	По данному расстоянию d светящейся точки от оптического центра двояковыпуклого стекла может быть вычислено расстояние f её изображения согласно формуле $1/d + 1/f = 1/F$, где F – постоянная для данного стекла и данного сорта лучей. Как влияет погрешность в измерении d на погрешность в вычислении f?

Математическая модель:

d – расстояние от предмета до линзы

f – расстояние от линзы до изображения

F – фокусное расстояние.

D – оптическая сила линзы (дптр).

Δd – относительная погрешность расстояния от предмета до линзы.

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$$

Аналитическое решение:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{d}$$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{F} - \frac{1}{d_1}$$

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{F} - \frac{1}{(d_1 + \Delta d)}$$

$$\Delta\frac{1}{f} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1} = \frac{\Delta d}{(\Delta d + d_1) * d_1}$$

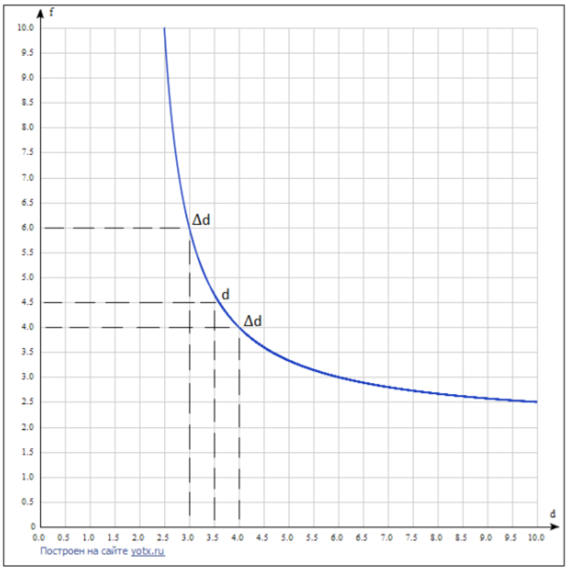
$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{F} - \frac{1}{(d_1 - \Delta d)}$$

$$\Delta\frac{1}{f} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1} = \frac{-\Delta d}{(\Delta d + d_1) * d_1}$$

Графическая иллюстрация, показывающая влияние погрешности d на вычисление f:

$f = \frac{2 \cdot d}{d-2}$ (условно возьмём $\mathrm{F} = 2$)

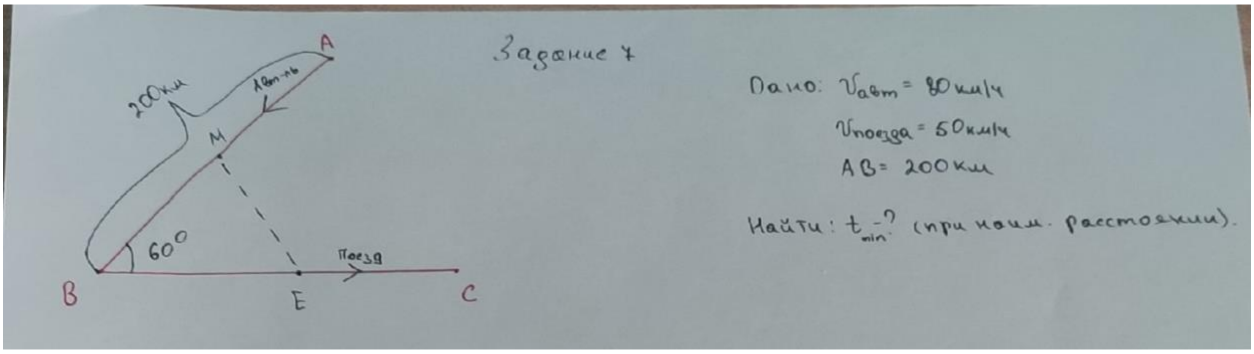
x	y
3	6
3,5	4,67
4	4



(не рассматриваем значения <0, т.к. расстояние не может быть отрицательным)

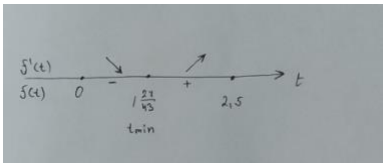
Задание 3. Наибольшее и наименьшее значения функции

Математическая модель:



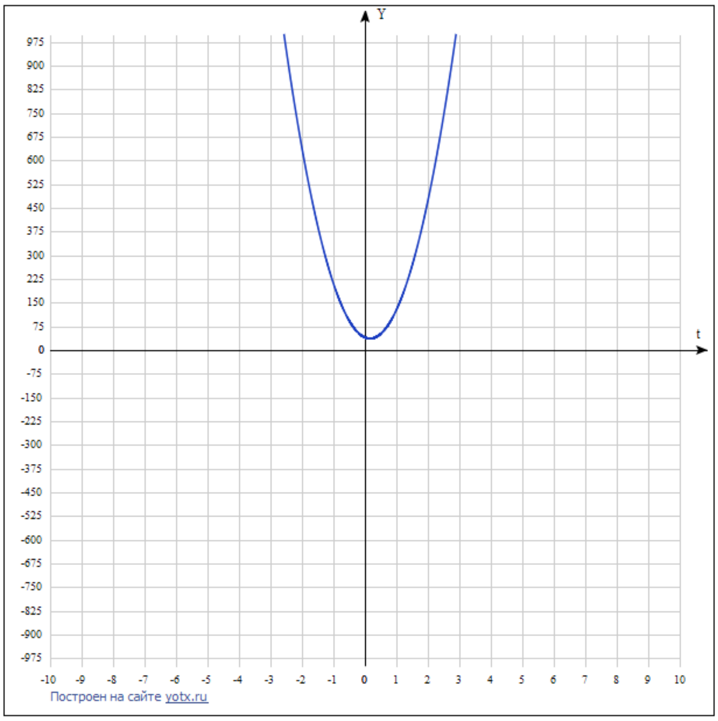
Аналитическое решение:

Пусть в момент времени t автомобиль находится в точке M, тогда поезд будет находиться в точке E. Отсюда следует, что $|AM| = V_A * t = 80t$ из чего следует, что $|MB| = 200 - 80t$ (при условии, что $0 \leq t \leq 2{,}5$). Также $|BE| = V_{\Pi} * t = 50t$. Отсюда по теореме косинусов найдем $|ME|^2 = (200 - 80t)^2 + (50t)^2 - -2 * (200 - 80t) * 50t * \cos 60° = 12900t^2 - 42000t + 40000.$ Решение задачи свелось к поиску минимума у функции $f(t) = 12900t2 - 42000t + 40000$ на отрезке от $[2; 2{,}5]$. Для этого найдем производную функции: $f'(x) = 25800t - 42000$. Отсюда следует, что t = $1\frac{27}{43}$

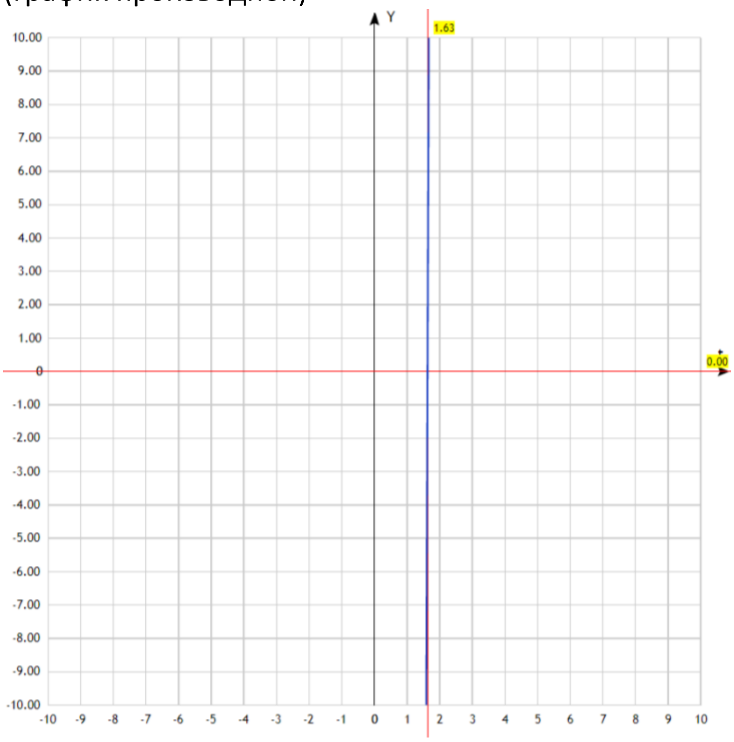


Графические иллюстрации:

(график функции)



(график производной)



Ответ: $t_{min} = 1\frac{27}{43}$ (ч)

Задание 4. Исследование функции

$$f(\chi) = \frac{x^2 + 2x - 7}{x^2 + 2x - 3}$$

1) **Область определения:**
   $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$

2) **Четность, нечетность и периодичность:**
   Рассмотрим значение функции в точке (-x)

   $f(-x) = \frac{-x^2-2x-7}{-x^2-2x-3} \neq f(x)$

   $-f(x) = \frac{-x^2-2x+7}{-x^2-2x+3} \neq f(-x)$

   Из этого следует, что функция является ни четной, ни нечетной.

   Функция не является периодичной, что видно из ее графика, представленного в 8 пункте.

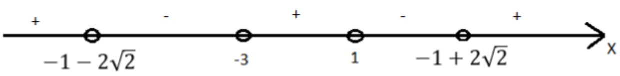
   Вывод: график функции не является симметричным ни относительно оси ординат, ни относительно начала координат.

3) **Нулевые значения и промежутки знакопостоянства:**
   Нулевые значения:

   $f(x) = 0, \text{при } x = -1 \pm 2\sqrt{2}$

   Промежутки:

   н.ф = $-1 + 2\sqrt{2}$
   н.з = -3, 1



4) **Исследование функции с помощью 1 производной: поиск интервалов монотонности и экстремумов функции:**

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + 2x - 7}{x^2 + 2x - 3}\right)' = \frac{8x + 8}{(x^2 + 2x - 3)^2}$$

$$\frac{8x + 8}{(x^2 + 2x - 3)^2} = 0, \text{при } x = \ -1, \text{н. з} = 1; -3 \ \ (\text{в точках x} = 1; -3 - \text{функция неопределена})$$

$f(x) - \text{убывает при } x \in (-\infty; -3) \cup [-1; 1)$
$f(x) - \text{возрастает при } x \in (-3; -1] \cup (1; +\infty)$

Экстремумы функции:

$f(-1) = 2$
$f_{max} = 2$

5) **Исследование функции с помощью 2 производной: поиск интервалов выпуклости и точек перегиба функции:**

$$\left(\frac{8x+8}{(x^2+2x-3)^2}\right)' = \frac{-24x^2-48x-56}{(x^2+2x-3)^3}$$

Найдем критические точки:

$$-24x^2-48x-56=0$$

D < 0, из чего следует, что при любых x y(x) < 0, что говорит о том, что точек перегиба нет, также как и интервалов выпуклости (вогнутости.)

6) **Поиск асимптот графика функции:**

$$y=\frac{x^2+2\cdot x-7}{x^2+2\cdot x-3}$$

Уравнения наклонных асимптот обычно ищут в виде $y = kx + b$. По определению асимптоты:

$$\lim_{x\to\infty}(kx+b-f(x))$$

Находим коэффициент k:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+2\cdot x-7}{x^2+2\cdot x-3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2\cdot x-7}{x^3+2\cdot x^2-3\cdot x}=0$$

Находим коэффициент b:

$$b=\lim_{x\to\infty}f(x)-k\cdot x$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2\cdot x-7}{x^2+2\cdot x-3}-0\cdot x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2\cdot x-7}{x^2+2\cdot x-3}=1$$

Получаем уравнение горизонтальной асимптоты:

$y=1$

Найдем вертикальные асимптоты. Для этого определим точки разрыва:

$x1=-3$

$x2=1$

Находим переделы в точке $x=-3$

$$\lim_{x\to-3-0}\frac{x^2+2\cdot x-7}{x^2+2\cdot x-3}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-3+0}\frac{x^2+2\cdot x-7}{x^2+2\cdot x-3}=\infty$$

x_1 = -3 – точка разрыва II рода и является вертикальной асимптотой.

Находим переделы в точке $x=1$

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x^2+2\cdot x-7}{x^2+2\cdot x-3}=\infty$$

$$\lim_{x\to1+0}\frac{x^2+2\cdot x-7}{x^2+2\cdot x-3}=-\infty$$

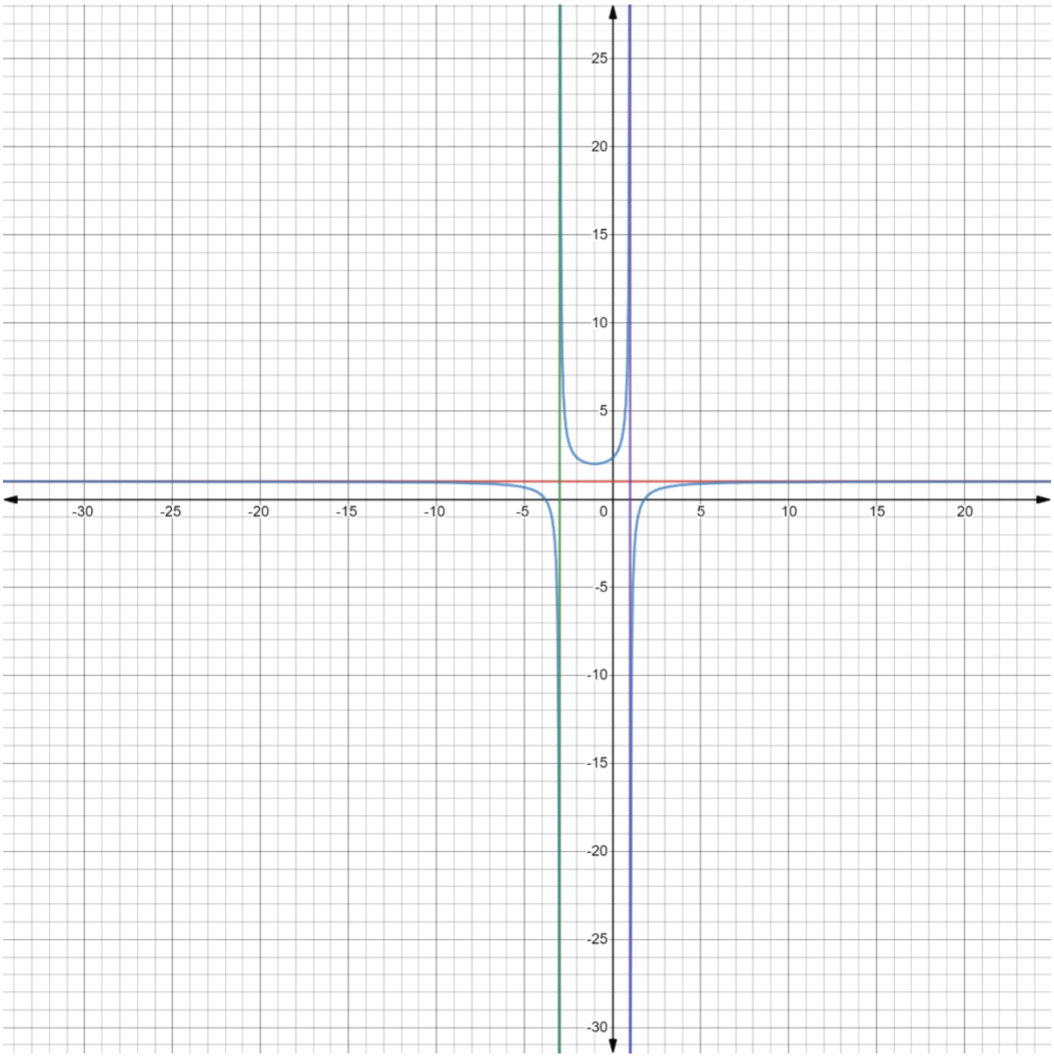
$x_2=1$ - точка разрыва II рода и является вертикальной асимптотой

Так как угловой коэффицент равен 0, то наклонной ассимптоты нет.

7) Точки пересечения графика с координатными осями.

x	y
0	$2\frac{1}{3}$
$-1 \pm 2\sqrt{2}$	0

8) График функции с графиками асимптот:



$$g(x) = \frac{(x+2)^{\frac{2}{3}}}{x-1}$$

1) **Область определения:**
$x \in [-2; 1) \cup (1; +\infty)$

2) **Четность, нечетность и периодичность:**
Рассмотрим значение функции в точке $(-x)$

$$g(-x) = \frac{(-x+2)^{\frac{2}{3}}}{-x-1} \neq g(x)$$

$$-g(x) = \frac{-(x+2)^{\frac{2}{3}}}{-x+1} \neq g(-x)$$

Из этого следует, что функция является ни четной, ни нечетной.

Функция не является периодичной, что видно из ее графика, представленного в 8 пункте.

Вывод: график функции не является симметричным ни относительно оси ординат, ни относительно начала координат.