

Satz 22.7. Seien \mathcal{V} ein Vektorraum, $\dim \mathcal{V} = n$, $f \in \mathcal{L}(\mathcal{V}; \mathcal{V})$ und λ eine n -fache Nullstelle von der char. Polynom $P(t)$. Dann gibt es $r, k_j, q_j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq r$ mit $\sum_{j=1}^r k_j q_j = n$, und eine Matrixdarstellung $J(\lambda)$ von f der Form

$$J(\lambda) = \begin{bmatrix} J_{q_1}(\lambda) & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & J_{q_1}(\lambda) & & \\ & & & J_{q_2}(\lambda) & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & J_{q_r}(\lambda) \end{bmatrix},$$

wobei die Jordanmatrizen $J_{q_j}(\lambda)$ k_j -mal wiederholt werden.

Beweis. Nach Cayley-Hamilton gilt $(f - \lambda id)^n = 0 \in \mathcal{L}(\mathcal{V}; \mathcal{V})$, und somit $V_f(\lambda) = V$.

Sei nun $q_1 \in \{1, \dots, n\}$ minimal mit der Eigenschaft $(f - \lambda id)^{q_1} = 0$, d.h. $(f - \lambda id)^{q_1-1} \neq 0$. Seien weiter $\mathcal{U} := (f - \lambda id)^{q_1-1}(V)$ und $\dim(\mathcal{U}) =: k_1$.

Wähle $b_1, \dots, b_{k_1} \in V$ sodass die Menge $(f - \lambda id)^{q_1-1}(\{b_1, \dots, b_{k_1}\})$ eine Basis von \mathcal{U} bildet.

Per Konstruktion ist jedes $u \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zu λ , denn ist $u = \sum_{i=0}^{k_1} (f - \lambda id)^{q_1-1}(b_i)$ so gilt:

$$\begin{aligned} f(u) &= f\left(\sum_{i=0}^{k_1} (f - \lambda id)^{q_1-1}(b_i)\right) = \sum_{i=0}^{k_1} f((f - \lambda id)^{q_1-1}(b_i)) \\ &= \sum_{i=0}^{k_1} (f - \lambda id)^{q_1-1}(f(b_i)) = \sum_{i=0}^{k_1} ((f - \lambda id)^{q_1-1} \circ (f - \lambda id + \lambda id))(b_i) \\ &= \sum_{i=0}^{k_1} (f - \lambda id)^{q_1}(b_i) + (f - \lambda id)^{q_1-1}(\lambda b_i) = \lambda \sum_{i=0}^{k_1} (f - \lambda id)^{q_1-1}(b_i) \\ &= \lambda \cdot u. \end{aligned}$$

Für $0 \leq i \leq q_1, 1 \leq j \leq k_1$ definiere $b_j^{(i)} := (f - \lambda id)^{q_1-i}(b_j)$. Dann ist $(b_1^{(1)}, \dots, b_{k_1}^{(1)})$ eine Basis von \mathcal{U} .

Für jedes $j \in \{1, \dots, k_1\}$ sind die q_1 Vektoren $b_j^{(1)}, \dots, b_j^{(q_1)}$ nach Satz 22.4 linear unabhängig, und es gilt:

$$\begin{aligned} f(b_j^{(i)}) &= f((f - \lambda id)^{q_1-i}(b_j)) = (f - \lambda id)^{q_1-i}(f(b_j)) \\ &= (f - \lambda id)^{q_1-i}(f(b_j) - \lambda b_j + \lambda b_j) \\ &= ((f - \lambda id)^{q_1-i} \circ (f - \lambda id + \lambda id))(b_j) \\ &= (f - \lambda id)^{q_1-i+1}(b_j) + (f - \lambda id)(\lambda b_j) \\ &= b_j^{(i-1)} + \lambda b_j^{(i)}. \end{aligned}$$

Mit $\mathcal{U}_j = \text{lin}\{b_j^{(1)}, \dots, b_j^{(q_1)}\}$, $1 \leq j \leq k_1$ folgt, dass die Abbildung $f|_{\mathcal{U}_j} : \mathcal{U}_j \rightarrow \mathcal{U}_j$ bzgl. der Basis $b_j^{(1)}, \dots, b_j^{(q_1)}$ die Matrixdarstellung $J_{q_1}(\lambda)$ hat.

Erinnerung: Für $k \geq 2$ lässt sich die k -te Spalte A_k der Matrixdarstellung A von $f|_{\mathcal{U}_j} : \mathcal{U}_j \rightarrow \mathcal{U}_j$ wie Folgendes berechnen:

$$\begin{aligned} A_k &= (B \circ f \circ B^{-1})(e_k) = (B \circ f)(b_j^{(k)}) \\ &= B(b_j^{(k-1)} + \lambda b_j^{(k)}) = B(b_j^{(k-1)}) + \lambda B(b_j^{(k)}) \\ &= e_{k-1} + \lambda e_k \end{aligned}$$

wobei $B : \mathcal{U}_j \rightarrow \mathcal{U}_j$ der lineare Isomorphismus ist, der die Basisvektoren $b_j^{(1)}, \dots, b_j^{(q_1)}$ auf die kanonischen Basisvektoren e_1, \dots, e_{q_1} abbildet. Für $k = 1$ gilt $B(b_j^{(0)}) = B(0) = 0$ und somit $A_1 = \lambda e_1$. Folglich gilt:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda \end{bmatrix} = J_{q_1}(\lambda).$$

Weiter gilt, dass $b_j^{(i)}$, $1 \leq j \leq k_1$ für alle $1 \leq i \leq q_1$ linear unabhängig sind, denn sind $\mu_j^{(i)} \in \mathbb{K}$ mit $0 = \sum_i^{q_1} \sum_j^{k_1} \mu_j^{(i)} b_j^{(i)} = \sum_{i,j} \mu_j^{(i)} b_j^{(i)}$ so folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= (f - \lambda id)^{q_1-1} \left(\sum_{i,j} \mu_j^{(i)} b_j^{(i)} \right) = \sum_{i,j} \mu_j^{(i)} (f - \lambda id)^{q_1-1} (b_j^{(i)}) \\ &= \sum_{i,j} \mu_j^{(i)} (f - \lambda id)^{q_1-1} ((f - \lambda id)^{q_1-i} (b_j)) = \sum_{i,j} \mu_j^{(i)} (f - \lambda id)^{q_1-1+q_1-i} (b_j) \\ &= \sum_{j=1}^{k_1} \mu_j^{(q_1)} (f - \lambda id)^{q_1-1} (b_j) = \sum_{j=1}^{k_1} \mu_j^{(q_1)} b_j^{(1)}. \end{aligned}$$

Da $b_1^{(1)}, \dots, b_{k_1}^{(1)}$ nach Wahl eine Basis von \mathcal{U} bilden, folgt, dass $\mu_j^{(q_1)} = 0$. Analog zeigt man, dass $\mu_j^{(q_1-1)} = \mu_j^{(q_1-2)} = \dots = \mu_j^{(1)} = 0$.

Somit ist $V_1 := \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \dots + \mathcal{U}_{k_1}$ ein Vektorraum mit $\dim V_1 = q_1 k_1$. Daraus folgt, dass $f|_{V_1} : V_1 \rightarrow V_1$ bzgl. der Basis $(b_j^{(i)}), 1 \leq i \leq q_1, 1 \leq j \leq k_1$ eine Matrixdarstellung A hat, die aus k_1 Jordanmatrizen der Form $J_{q_1}(\lambda)$ besteht.

Also gilt:

$$A = \begin{bmatrix} J_{q_1}(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{q_1}(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda \end{bmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Beachte dass, $a_{nq_1, nq_1+1} = 0$ für alle $1 \leq n \leq k_1 - 1$, denn es gilt:

$$f(b_1^{(1)}) = 0 + \lambda b_1^{(1)}, f(b_2^{(1)}) = 0 + \lambda b_2^{(1)}, \dots, f(b_{k_1}^{(1)}) = 0 + \lambda b_{k_1}^{(1)}.$$

Ist $V_1 = \mathcal{V}$ so folgt die Aussage des Satzes sofort. Sei also $V_1 \neq \mathcal{V}$. Daraus folgt $q_1 \geq 2$.

Ist $q_1 = 1$, so folgt:

$$\begin{aligned} V_1 &= \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \dots + \mathcal{U}_{k_1} = \text{lin}\{b_1^{(1)}\} + \text{lin}\{b_2^{(1)}\} + \dots + \text{lin}\{b_{k_1}^{(1)}\} \\ &= \text{lin}\{b_1^{(1)}, \dots, b_{k_1}^{(1)}\} = \mathcal{U} = \mathcal{V} \end{aligned}$$

da $(f - \lambda id)^{q_1-1} = (f - \lambda id)^0 = Id \in \mathcal{L}(\mathcal{V}; \mathcal{V}) \implies \mathcal{U} = Id(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$.

Also muss $q_1 \geq 2$ gelten, wenn $V_1 \neq \mathcal{V}$.

Weiter gilt für $l+1 \leq i \leq q_1, 1 \leq j \leq k_1$, dass die Vektoren $(f - \lambda id)^l(b_j^{(i)})$ eine Basis von $(f - \lambda id)^l(V_1)$ bilden, denn es gilt:

$$\begin{aligned} (f - \lambda id)^l(b_j^{(i)}) &= (f - \lambda id)^l((f - \lambda id)^{q_1-i}(b_j)) \\ &= (f - \lambda id)^{q_1+l-i}(b_j) \\ &= b_j^{(i-l)} \end{aligned}$$

und

$$(f - \lambda id)^l(V_1) = \text{lin}\{(f - \lambda id)^l(b_j^{(i)}) \mid 1 \leq i \leq q_1, 1 \leq j \leq k_1\} \quad (1)$$

$$= \text{lin}\{(f - \lambda id)^l(b_j^{(i)}) \mid l+1 \leq i \leq q_1, 1 \leq j \leq k_1\} \quad (2)$$

d.h. die Vektoren sind linear unabhängig und ein Erzeugendensystem von $(f - \lambda id)^l(V_1)$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} (f - \lambda id)^{q_1-1}(V_1) &= \text{lin}\{(f - \lambda id)^{q_1-1}(b_j^{(i)}) \mid 1 \leq j \leq k_1, 1 \leq i \leq q_1\} \\ &\supseteq \text{lin}\{(f - \lambda id)^{q_1-1}(b_j^{(1)}) \mid 1 \leq j \leq k_1\} = \mathcal{U} \\ &= (f - \lambda id)^{q_1-1}(\mathcal{V}) \end{aligned}$$

und somit $V_1 \subset \mathcal{V} \implies (f - \lambda id)^{q_1-1}(V_1) = (f - \lambda id)^{q_1-1}(\mathcal{V})$. Also existiert ein $q_2 \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq q_2 \leq q_1 - 1$ und $(f - \lambda id)^{q_2}(V_1) = (f - \lambda id)^{q_2}(\mathcal{V})$. Mit (1) und (2) folgt, dass $(f - \lambda id)^{q_2-1}(b_j^{(i)})$ für $q_2 \leq 1 \leq q_1, 1 \leq i \leq k_1$ eine Basis von $(f - \lambda id)^{q_2-1}(V_1)$ ist.

Betrachte nun die Abbildung:

$$(f - \lambda id): (f - \lambda id)^{q_2-1}(\mathcal{V}) \rightarrow (f - \lambda id)^{q_2}(\mathcal{V}) = (f - \lambda id)^{q_2}(V_1) \quad (3)$$

Wegen $\mathcal{V} \neq V_1$ existieren $v \in \text{Kern}(f - \lambda id)$ mit $v \in \mathcal{V} \setminus V_1$. Ergänze nun die Basis $(f - \lambda id)^{q_2-1}(b_j^{(i)})$ von $(f - \lambda id)^{q_2-1}(V_1)$ mit solchen Vektoren aus dem Kern der Abbildung zu einer Basis von $(f - \lambda id)^{q_2-1}(\mathcal{V})$. Seien dies die Vektoren $(f - \lambda id)^{q_2-1}(b_{k_1+j})$, $1 \leq j \leq k_2$.

Diese Vektoren sind dann Eigenvektoren von f und wie vorher definiere:

$$b_{k_1+j}^{(i)} := (f - \lambda id)^{q_2-i}(b_{k_1+j}), 0 \leq i \leq q_2, 1 \leq j \leq k_2$$

Dann gilt $b_{k_1+j}^{(0)} = (f - \lambda id)^{q_2}(b_{k_1+j}) = 0$, da

$$(f - \lambda id)^{q_2-1}(b_{k_1+j}) \in \text{Kern}(f - \lambda id) \implies (f - \lambda id)^{q_2}(b_{k_1+j}) = 0.$$

Sei $V_2 = \text{lin}\{b_{k_2+j}^{(i)} : 1 \leq i \leq q_2, 1 \leq j \leq k_2\}$. Dann folgt wie zuvor $\dim V_2 = k_2 q_2$, und $f|_{V_2}: V_2 \rightarrow V_2$ hat bzgl. der Basis $b_{k_1+j}^{(i)}, 1 \leq i \leq q_2, 1 \leq j \leq k_2$, eine Matrixdarstellung bestehend aus k_2 Jordanmatrizen der Form $J_{q_2}(\lambda)$.

Nun zeigen wir, dass die Vektoren

$$b_j^{(i)}, 1 \leq i \leq q_1, 1 \leq j \leq k_1, b_{k_1+j}^{(i)}, 1 \leq i \leq q_2, 1 \leq j \leq k_2 \quad (4)$$

linear unabhängig sind und somit eine Basis von $V_1 \oplus V_2$. Dazu sei $0 = \sum_{i,j} \mu_j^{(i)} b_j^{(i)} + \sum_{i,j} \mu_{k_1+j}^{(i)} b_{k_1+j}^{(i)}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i,j} \mu_j^{(i)} (f - \lambda id)^{q_2-1} (b_j^{(i)}) + \sum_{i,j} \mu_{k_1+j}^{(i)} (f - \lambda id)^{q_2-1} (b_{k_1+j}^{(i)}) \\
&= \sum_{i=1}^{q_1} \sum_{j=1}^{k_1} \mu_j^{(i)} (f - \lambda id)^{q_2-1} (b_j^{(i)}) + \sum_{i,j} \mu_{k_1+j}^{(i)} (f - \lambda id)^{q_2-1+q_2-i} (b_{k_1+j}^{(i)}) \\
&= \sum_{i=q_2}^{q_1} \sum_{j=1}^{k_1} \mu_j^{(i)} (f - \lambda id)^{q_2-1} (b_j^{(i)}) + \sum_{i,j} \mu_{k_1+j}^{(i)} (f - \lambda id)^{q_2-1+q_2-i} (b_{k_1+j}^{(i)}) \\
&= \sum_{i=q_2}^{q_1} \sum_{j=1}^{k_1} \mu_j^{(i)} (f - \lambda id)^{q_2-1} (b_j^{(i)}) + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_{k_1+j}^{(q_2)} (f - \lambda id)^{q_2-1} (b_{k_1+j}^{(i)})
\end{aligned}$$

Die in den Summer verbliebenen Vektoren bilden eine Basis von $(f - \lambda id)^{q_2-1}(\mathcal{V})$ und somit ist $\mu_j^{(i)} = 0, q_2 \leq i \leq q_1, 1 \leq j \leq k_1$ und $\mu_{k_1+j}^{(q_2)} = 0, 1 \leq j \leq k_2$. Somit ist also $0 = \sum_{i=1}^{q_2-1} \sum_{j=1}^{k_1} \mu_j^{(i)} b_j^{(i)} + \sum_{i=1}^{q_2-1} \sum_{j=1}^{k_2} \mu_{k_1+j}^{(i)} b_{k_1+j}^{(i)}$ und Anwendung von $(f - \lambda id)^{q_2-2}$ auf diese Identität liefert als nächstes $\mu_{q_2-1} = 0, 1 \leq j \leq k_1, \mu_{k_1+j}^{q_2-1} = 0, 1 \leq j \leq k_2$, usw.

Also hat $f|_{V_1 \oplus V_2} : V_1 \oplus V_2 \rightarrow V_1 \oplus V_2$ bzgl. der Basis von (4) eine Matrixdarstellung bestehend aus k_1 Jordanmatrizen der Form $J_{q_1}(\lambda)$ und k_2 Jordanmatrizen der Form $J_{q_2}(\lambda)$.

Gilt $\mathcal{V} = V_1 \oplus V_2$ so folgt die Aussage des Satzes sofort. Ansonsten sei $q_3 \leq q_2 - 1$ minimal mit $(f - \lambda id)^{q_3}(V_1 \oplus V_2) = (f - \lambda id)^{q_3}(\mathcal{V})$ und wie oben definiere einen Unterraum V_3 usw. □

Beispiel. Sei $A \in \mathbb{M}(3, 3; \mathbb{K})$ mit:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dann gilt $P_A(t) = (t - 2)^3$, und somit ist $\lambda = 2$ ein Eigenwert von A . Es gilt, dass $q_1 = 2$ minimal mit $(A - \lambda E)^{q_1} = 0$ ist. Setze $\mathcal{U} := (A - \lambda E)^{q_1-1}(\mathbb{K}^3)$ und $k_1 := \dim \mathcal{U}$. Daraus folgt $\mathcal{U} = (A - \lambda E)^1(\mathbb{K}^3)$. Wir wissen:

$$(A - \lambda E) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Also gilt:

$$\mathcal{U} = \text{lin} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

und $k_1 = 1$. Sei $b_1 = (1, 2, 0)^T$, dann ist $(A - 2E)^{q_2-1}(1, 2, 0)^T = (1, 1, 0)^T$ eine Basis von \mathcal{U} . Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
V_1 = \mathcal{U}_1 &= \text{lin}\{b_1^{(1)}, b_1^{(2)}\} \\
&= \text{lin}\{(A - 2E)^{q_1-1}(1, 2, 0)^T, (A - 2E)^{q_1-2}(1, 2, 0)^T\} \\
&= \text{lin}\{(1, 1, 0)^T, (1, 2, 0)^T\}.
\end{aligned}$$

Also gilt $\dim V_1 = k_1 q_1 = 1 \cdot 2 = 2$.

Weiter ist $q_2 = 1$ minimal mit $(A - 2E)^{q_2}(V_1) = (A - 2E)^{q_2}(\mathcal{V})$ und $q_2 \leq q_1 - 1$, und es gilt $(A - 2E)^{q_2-1}(V_1) = V_1$. Ergänzen wir nun die Basis von V_1 mit dem Vektor $v := (0, 0, 1)^T \in \text{Kern}(A - 2E)$, $v \in \mathcal{V} \setminus V_1$ dann bekommen wir eine Basis von $(A - 2E)^{q_2-1}(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$. Also ist $V_2 = \text{lin}\{(0, 0, 1)^T\}$. Dann gilt $\mathcal{V} = V_1 \oplus V_2$, und somit hat A die konjugierte Matrix C mit einer $J_{q_1}(2)$ und einer $J_{q_2}(2)$. Also:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

This proof was taken from the notes of Prof. Henk at the TU-Berlin. If you find any errors or would like more explanation to some parts please create an issue at <https://github.com/nullp0tr/lina2> or contact me through nullp0tr@gmail.com.