Téma 5: Úplný problém vl. čísel

Úloha: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, najdi aproximaci všech vl. čísel a vl. vektorů A

→ chci převést A do tvaru, ze kterého budou vl. č. viditelná

Jaké transformace zachovávají spektrum?

Lemma: Nechť $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ regulární. Nechť $B = S^{-1}AS$, tj. B vznikne podobnostní transformací matice A. Pak A a B mají stejná vl. čísla.

D: $A = V \cdot J_A \cdot V^{-1}$, J_A - Jord. tvar A ⇒

$B = (S^{-1}V) \cdot J_A \cdot (S^{-1}V)^{-1}$ ⇒ J_A je Jord. tvar matice B

□

Pozn: vl. vektory se transformují S^{-1}

PROBLÉM: $A = \hat{A} + E_A$ ... z praktické úlohy

PŘESNÁ DATA — CHYBY MĚŘENÍ

$$\Rightarrow S^{-1}AS = S^{-1}\hat{A}S + S^{-1}E_AS$$

$$B = \hat{B} + E_B, \quad \text{kde} \quad E_B = S^{-1}E_AS$$

CHYBA PO PODOB. TRANSFORMACI

$$\|E_B\| \leq \|S^{-1}\| \cdot \|S\| \cdot \|E_A\| = \underbrace{\varkappa(S)}_{\geq 1} \cdot \|E_A\|$$

⇒ je-li $\varkappa(S) \gg 1$, pak transf. může zvětšit chyby v datech důsl.: chci unitární podobnostní transformaci A, která vyjeví spektrum

5.1 Schurova věta

Věta (Schurova): Nechť $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pak $\exists\, U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitární taková, že $R := U^*AU$ je horní trojúhelníková matice. Navíc R má na diagonále vl. čísla A v libovolném předem předepsaném pořadí.

def: Rozklad $A = URU^*$ nazveme Schurův rozklad matice A.

D: indukcí dle n, $n=1$ triv.

$n \to n+1$: $A \in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)}$, $\lambda :=$ první vl. č. v požadovaném pořadí $\Rightarrow \exists x: Ax = \lambda x, \|x\| = 1$ (vl. vektor)

vol. $X \in \mathbb{C}^{(n+1)\times n}$: $H := [x, X] \in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)}$ unitární (doplním x na unit. matici)

$$\Rightarrow H^*AH = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & n \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} x^*Ax & x^*AX \\ \hline X^*Ax & X^*AX \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \}1 \\ \}n \end{array} = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & b^* \\ \hline 0 & C \end{array}\right] \begin{array}{l} \}1 \\ \}n \end{array} \Rightarrow$$

$$0 = \lambda X^* x = X^* \lambda x = X^*Ax$$

$$\Rightarrow sp(A) = sp(H^*AH) = \lambda \cup sp(C)$$

$$C \in \mathbb{C}^{n\times n} \xRightarrow[\text{předpoklad}]{\text{indukční}} \exists V\text{-unit}: V^*CV = \tilde{R} = \square$$

na diagonále vlastní čísla C

$$\Rightarrow \text{položíme } U := [x, XV] = H \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & V \end{array}\right]$$

součin unit. matic

$$\text{pak } R = U^*AU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & b^* \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} = \begin{array}{l} 1\{ \\ n\{ \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & b^*V \\ 0 & V^*CV \end{bmatrix}}_{1 \quad n} = \square$$

$\square$

Pozn.: Sch. rozklad není vůbec jednoznačný

Př.: $A = URU^* = \overbrace{(UD)}^{\tilde U}\,\overbrace{D^*RD}^{\tilde R}\,\overbrace{(D^*U)}^{\tilde U^*}$ $\forall D$ – diagonální a unitární, třeba $D = \begin{bmatrix}-1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{bmatrix}$

→ důsledkem Sch. věty je věta o unitární diagonalizovatelnosti (BYLO V LA)

Věta: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je normální, tj. $A^*A = AA^*$ $\Longleftrightarrow$ $\exists\, U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – unit. taková, že $D = U^*AU$ je diagonální matice. Pak $U = [u_1, \dots, u_n]$ vl. vektory

souvislost: $V = Q_V R_V \Rightarrow R_V D R_V^{-1} = Q_V^* A Q_V$ je Sch. faktor.

→ Sch. věta má teoreticky zajímavý důsledek

Věta: Množina všech (diagonalizovatelných) matic s navzájem různými vl. čísly je hustá v $\mathbb{C}^{n\times n}$

D: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – nediagonaliz. $\Rightarrow$ $\exists$ aspoň jedno vícenásobné vl. č. A

$A = URU^*$ – Sch. rozklad A

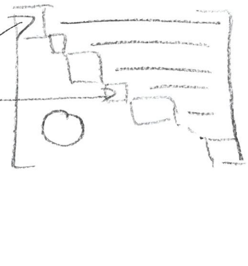
vl. $D_\varepsilon \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonální tak, aby $\|D_\varepsilon\| < \varepsilon$ a $R_\varepsilon = R + D_\varepsilon$ měla na diagonále navz. různá čísla $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \|A - \underbrace{U R_\varepsilon U^*}_{=:\, A_\varepsilon}\| = \|U D_\varepsilon U^*\| = \|D_\varepsilon\| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ dost malé $\exists A_\varepsilon \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonaliz. taková, že $\|A - A_\varepsilon\| < \varepsilon$ $\square$

Pozn: Z věty neplyne, že se při návrhu a analýze metod lze omezit na diagonaliz. matice, neboť perturbace v A_ε mění vlastnosti A!

reálný Sch. rozklad: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

- je-li A symetrická, pak existuje její reálný Sch. rozklad $D = U^T A U$
- obecně nelze, neboť A může mít komplexní vl. čísla, ale existuje rozklad $T = U^T A U$, $T =$ 

bloky 1x1 a 2x2,

kde 1x1 je pro reálné vl. č. a 2x2 pro kompl. sdružený pár vl. č.

Věta (Abel & Galois) $\Rightarrow$ kořeny polynomu st. $n \geq 5$ nelze počítat kon. algoritmem $\Rightarrow$ vl. čísla nelze počítat kon. algoritmem $\Rightarrow$ Sch. rozkl. lze jen aproximovat

5.2 QR algoritmus

= řeší úplný problém vl. č. pomocí iterační aproximace Sch. rozkladu

KROK 1: PREPROCESING

cíl: pomocí unit. podobn. transformací převést A do tvaru blízkého $\begin{bmatrix} \diagdown & \\ 0 & \diagdown \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} \times & \cdots & \times \\ \times & & \times \\ \vdots & & \vdots \\ \times & \cdots & \times \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Hous. refl.}]{H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \tilde{H}_1 \\ 0 & \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}} H_1 A = \begin{bmatrix} \times & \times & \cdots & \times \\ \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & & & \vdots \\ 0 & \times & \cdots & \times \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot H_1^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \tilde{H}_1^* \end{bmatrix}} H_1 A H_1^* = \underbrace{\begin{bmatrix} \times & \times & \cdots & \times \\ \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & & & \vdots \\ 0 & \times & \cdots & \times \end{bmatrix}}_{n-1} \longrightarrow$$

nezměnî se

$$\xrightarrow{H_2 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \\ & & \tilde{H}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}} \cdots \longrightarrow \underbrace{H_{n-1} \cdots H_1}_{= H^*} A \underbrace{H_1^* \cdots H_{n-1}^*}_{= H} = \begin{bmatrix} \diagdown & \diagdown \\ 0 & \diagdown \end{bmatrix} =: A_0$$

máme: $A_0 = H^* A H$, H - unitární, A_0 - horní Hessen., $sp(A_0) = sp(A)$

vlastnosti: výp. nár. $O(n^3)$
výp. stabilní (OG transformace)

$\Rightarrow$ zbývá se zbavit poddiagonály A_0, což lze pouze iteračně

Pozn: je-li A - hermitovská, pak A_0 vyjde dokonce tridiagonální $\begin{bmatrix} \diagdown & & \\ & \diagdown & \\ & & \diagdown \end{bmatrix}$

KROK 2: ITERACE

máme $A_0 = \in \mathbb{C}^{n\times n}$

→ uvažujme posl. matic konstruovaných iteracemi:

$$A_k = Q_k R_k \quad \leftarrow \text{spočtu QR rozklad}$$
$$A_{k+1} = R_k Q_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad \leftarrow \text{přenásobím}$$

Lemma: Nechť A je regulární, pak:

1) A_k je horní Hessenb., $k = 0, 1, \dots$
2) A_k jsou si unitárně podobné, přičemž $A_{k+1} = Q_k^* A_k Q_k = P_k^* A_0 P_k$ a $P_k = Q_0 \cdots Q_k$ je unitární
3) A_k mají stejné spektrum, $k = 0, 1, \dots$

D(1): A_0 regul. $\Rightarrow$ A_k, Q_k, R_k regul., $k = 0, 1, \dots$

indukcí: $k = 0$ – z konstrukce, $k \mapsto k+1$

$A_k = Q_k R_k \Rightarrow Q_k = A_k R_k^{-1} =$ je horní Hess.

inverze horní △-ové je horní △-ová matice

$A_{k+1} = R_k Q_k =$

D(2): $A_k = Q_k R_k \Rightarrow R_k = Q_k^* A_k$

$$A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^* A_k Q_k = \underbrace{Q_k^* \cdots Q_0^*}_{= P_k^*} A_0 \underbrace{Q_0 \cdots Q_k}_{= P_k}$$

$$P_k^* P_k = P_k P_k^* = I$$

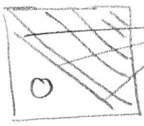
D(3): plyne z 2, □

důsledek: $A_{k+1} = (HP_k)^* A (HP_k)$, kde

HP_k je unitární, $sp(A_{k+1}) = sp(A)$, $k = 0, 1, \dots$

Věta (*): Nechť $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a pro její vl. čísla platí, že $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0$. Pak $A_k \xrightarrow{k\to\infty} R =$ , $HP_k \xrightarrow{k\to\infty} U$, kde $R = U^* A U$ je Sch. rozklad matice A.

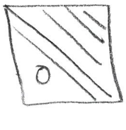
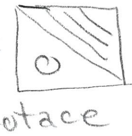
Pozn: dokonce lze dok., že poddiagonální prvek $|a^{(k)}_{i+1,i}| \xrightarrow{k\to\infty} 0$ rychlostí $\left|\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right| < 1$,
$i = 1, \dots, n-1$

$A_k =$  $\to |a^{(k)}_{i+1,i}| \xrightarrow{k\to\infty} 0$, ale různě rychle

algoritmus: vstup: A, m = max # iterací
výstup: $A_{m+1} \approx R$ ← ze Sch. rozkladu

$A_0 = H^* A H$ .... preprocesing Hous. reflexemi, $O(n^3)$
for $k = 0, 1, \dots, m$ do
  $A_k = Q_k R_k$ ... QR rozklad Giv. rotacemi, $O(n^2)$
  $A_{k+1} = R_k Q_k$ ... efektivní násobení, $O(n^2)$
end

výpočet QR rozkladu $A_k =$ :

$A_k =$  $\xrightarrow[\text{rotací}]{(n-1)\text{ Giv.}}$ $\Gamma_k \cdot A_k =$  $= R_k$
↑ složená rotace

$\Rightarrow O(n^2)$ operací

Pozn: pokud chceme jen vl. čísla A, nemusíme ukládat H a Q_k, stačí přepsovat matici A na A_k