

Folheações de codimensão um em característica positiva e aplicações

Wodson Mendson

IMPA

27 de janeiro de 2022

Folheações em variedades algébricas

$k =$ corpo algebricamente fechado de característica $p \geq 0$ (exemplo: $\mathbb{C}, \overline{\mathbb{F}}_p$)

Folheações em variedades algébricas

k = corpo algebricamente fechado de característica $p \geq 0$ (exemplo: $\mathbb{C}, \overline{\mathbb{F}}_p$)

Definição

*Seja X uma variedade algébrica não singular de dimensão pelo menos dois definida sobre k . Uma **folheação \mathcal{F} de codimensão um** em X consiste em um subfeixe coerente $T_{\mathcal{F}} \subset T_X$ de posto $\dim X - 1$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

- $T_{\mathcal{F}}$ é fechado por colchete de Lie,
- O quociente $T_X/T_{\mathcal{F}}$ é livre de torção, isto é, $T_{\mathcal{F}}$ é saturado em T_X .

Folheações em variedades algébricas

k = corpo algebricamente fechado de característica $p \geq 0$ (exemplo: $\mathbb{C}, \overline{\mathbb{F}}_p$)

Definição

*Seja X uma variedade algébrica não singular de dimensão pelo menos dois definida sobre k . Uma **folheação \mathcal{F} de codimensão um** em X consiste em um subfeixe coerente $T_{\mathcal{F}} \subset T_X$ de posto $\dim X - 1$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

- $T_{\mathcal{F}}$ é fechado por colchete de Lie,
- O quociente $T_X/T_{\mathcal{F}}$ é livre de torção, isto é, $T_{\mathcal{F}}$ é saturado em T_X .

O conjunto singular de \mathcal{F} é definido pondo

$$\text{sing}(\mathcal{F}) = \{x \in X \mid (T_X/T_{\mathcal{F}})_x \text{ não é um } \mathcal{O}_{X,x}\text{-módulo livre}\}.$$

Folheações em variedades algébricas

Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em X .

- **Feixe normal** de \mathcal{F} :

$$N_{\mathcal{F}} = (T_X/T_{\mathcal{F}})^{**}$$

- **Feixe conormal** de \mathcal{F} :

$$\Omega^1_{X/\mathcal{F}} = \{\omega \in \Omega^1_{X/k} \mid i_v \omega = 0 \quad \forall v \in T_{\mathcal{F}}\} \cong N_{\mathcal{F}}^*$$

Folheações em variedades algébricas

Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em X .

- **Feixe normal** de \mathcal{F} :

$$N_{\mathcal{F}} = (T_X/T_{\mathcal{F}})^{**}$$

- **Feixe conormal** de \mathcal{F} :

$$\Omega^1_{X/\mathcal{F}} = \{\omega \in \Omega^1_{X/k} \mid i_v \omega = 0 \quad \forall v \in T_{\mathcal{F}}\} \cong N_{\mathcal{F}}^*$$

A inclusão de $N_{\mathcal{F}}^*$ em $\Omega^1_{X/k}$ determina uma seção global não nula $\omega \in H^0(X, \Omega^1_{X/k} \otimes N_{\mathcal{F}})$ com zeros de codimensão pelo menos dois. Como $T_{\mathcal{F}}$ é estável por colchete de Lie temos que $\omega \wedge d\omega = 0$. Reciprocamente, se ω é uma seção global de $\Omega^1_{X/k} \otimes \mathcal{I}$ para algum feixe invertível \mathcal{I} , com zeros de codimensão pelo menos dois e integrável então obtemos um subfeixe saturado de T_X e fechado por colchete de Lie considerando o núcleo do mapa contração por ω

$$\gamma_{\omega}: T_X \longrightarrow \mathcal{I}$$

Folheações em variedades algébricas: definição II

Definição

Seja \mathcal{I} um feixe invertível em X . Uma folheação de codimensão um em X com feixe normal \mathcal{I} é determinada por uma seção global não nula

$\omega \in H^0(X, \Omega_{X/k}^1 \otimes \mathcal{I})$ satisfazendo as seguintes condições

- $\omega \wedge d\omega = 0$,
- $\text{codim sing}(\omega) \geq 2$.

Folheações em variedades algébricas: definição II

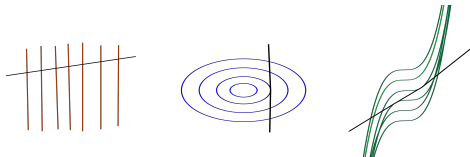
Definição

Seja \mathcal{I} um feixe invertível em X . Uma folheação de codimensão um em X com feixe normal \mathcal{I} é determinada por uma seção global não nula

$\omega \in H^0(X, \Omega_{X/k}^1 \otimes \mathcal{I})$ satisfazendo as seguintes condições

- $\omega \wedge d\omega = 0$,
- $\text{codim sing}(\omega) \geq 2$.

Quando $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ as folheações de codimensão um em X admitem uma representação bem explícita. Dada uma tal folheação podemos associar grau.



Folheações de codimensão um em espaços projetivos

Usando a sequência exata de Euler para espaços projetivos

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-1)^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n} \longrightarrow 0$$

percebe-se que uma folheação de codimensão um e grau d em \mathbb{P}_k^n é determinada por uma 1-forma homogênea em \mathbb{A}_k^{n+1}

$$\sigma = A_0 dx_0 + \cdots + A_n dx_n$$

Folheações de codimensão um em espaços projetivos

Usando a sequência exata de Euler para espaços projetivos

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-1)^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n} \longrightarrow 0$$

percebe-se que uma folheação de codimensão um e grau d em \mathbb{P}_k^n é determinada por uma 1-forma homogênea em \mathbb{A}_k^{n+1}

$$\sigma = A_0 dx_0 + \cdots + A_n dx_n$$

onde $A_0, \dots, A_n \in k[x_0, \dots, x_n]$ são polinômios homogêneos de grau $d+1$ e tal que $\text{sing}(\sigma) = \mathcal{Z}(A_0, \dots, A_n)$ tem codimensão maior que um e com σ satisfazendo as seguintes condições

$$i_R \sigma = \sum_i A_i x_i = 0 \quad \sigma \wedge d\sigma = 0.$$



Folheações de codimensão um em espaços projetivos

A condição de integrabilidade se traduz em uma serie de equações:

$$A_i \left(\frac{\partial A_l}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_l} \right) + A_j \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_l} - \frac{\partial A_l}{\partial x_i} \right) + A_l \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) = 0$$

para $0 \leq i < j < l \leq n$.

Folheações de codimensão um em espaços projetivos

A condição de integrabilidade se traduz em uma serie de equações:

$$A_i \left(\frac{\partial A_l}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_l} \right) + A_j \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_l} - \frac{\partial A_l}{\partial x_i} \right) + A_l \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) = 0$$

para $0 \leq i < j < l \leq n$.

O espaço de folheações de codimensão um e grau $d \geq 0$ em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ ($n \geq 2$) é denotado por

$$\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n) = \{[\omega] \in \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n, \Omega_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n}^1 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n}(d+2))) \mid \omega \wedge d\omega = 0 \text{ e } \text{codim sing}(\omega) \geq 2\}.$$

Folheações de codimensão um em espaços projetivos

A condição de integrabilidade se traduz em uma serie de equações:

$$A_i \left(\frac{\partial A_l}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_l} \right) + A_j \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_l} - \frac{\partial A_l}{\partial x_i} \right) + A_l \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) = 0$$

para $0 \leq i < j < l \leq n$.

O espaço de folheações de codimensão um e grau $d \geq 0$ em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ ($n \geq 2$) é denotado por

$$\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n) = \{[\omega] \in \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n, \Omega_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n}^1 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n}(d+2))) \mid \omega \wedge d\omega = 0 \text{ e } \text{codim sing}(\omega) \geq 2\}.$$

Problema

Descrever as componentes irredutíveis de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n)$.

Novas componentes irredutíveis de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$

Nessa exposição, mostramos como usar folheações em característica positiva para exibir novas componentes irredutíveis de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$.

¹Codimension one foliations of degree three on projective spaces

Novas componentes irredutíveis de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$

Nessa exposição, mostramos como usar folheações em característica positiva para exibir novas componentes irredutíveis de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$.

Seja $\text{Map}_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3, \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)$ a coleção de mapas racionais de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ de grau um.

¹Codimension one foliations of degree three on projective spaces

Novas componentes irredutíveis de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$

Nessa exposição, mostramos como usar folheações em característica positiva para exibir novas componentes irredutíveis de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$.

Seja $\text{Map}_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3, \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)$ a coleção de mapas racionais de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ de grau um.

Dados $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ seja $d = d_1 + d_2 + 2$ e considere o mapa racional

$$\begin{aligned} \Psi_{(d; d_1, d_2)} : \text{Map}_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3, \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1) \times \text{Fol}_{(d_1, d_2)}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1) &\dashrightarrow \text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3) \\ (\Phi, \mathcal{G}) &\longmapsto \Phi^* \mathcal{G} \end{aligned}$$

¹Codimension one foliations of degree three on projective spaces

Novas componentes irredutíveis de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$

Nessa exposição, mostramos como usar folheações em característica positiva para exibir novas componentes irredutíveis de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$.

Seja $\text{Map}_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3, \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)$ a coleção de mapas racionais de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ de grau um.

Dados $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ seja $d = d_1 + d_2 + 2$ e considere o mapa racional

$$\begin{aligned} \Psi_{(d;d_1,d_2)} : \text{Map}_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3, \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1) \times \text{Fol}_{(d_1,d_2)}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1) &\dashrightarrow \text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3) \\ (\Phi, \mathcal{G}) &\longmapsto \Phi^* \mathcal{G} \end{aligned}$$

Teorema A

Seja $C_{(d;d_1,d_2)}$ a imagem de $\Psi_{(d;d_1,d_2)}$. Então, $C_{(d;d_1,d_2)}$ é uma componente irredutível de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$

¹Codimension one foliations of degree three on projective spaces

Novas componentes irredutíveis de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$

Nessa exposição, mostramos como usar folheações em característica positiva para exibir novas componentes irredutíveis de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$.

Seja $\text{Map}_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3, \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)$ a coleção de mapas racionais de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ de grau um.

Dados $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ seja $d = d_1 + d_2 + 2$ e considere o mapa racional

$$\begin{aligned} \Psi_{(d;d_1,d_2)} : \text{Map}_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3, \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1) \times \text{Fol}_{(d_1,d_2)}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1) &\dashrightarrow \text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3) \\ (\Phi, \mathcal{G}) &\longmapsto \Phi^* \mathcal{G} \end{aligned}$$

Teorema A

Seja $C_{(d;d_1,d_2)}$ a imagem de $\Psi_{(d;d_1,d_2)}$. Então, $C_{(d;d_1,d_2)}$ é uma componente irredutível de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$

O resultado generaliza uma componente encontrada em grau $d = 3$ por R.C Costa, R. Lizarbe e J.V Pereira.¹

¹Codimension one foliations of degree three on projective spaces

Folheações de codimensão um em característica positiva

k = corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$.

$R = k$ -domínio (exemplo: $R = k[x_1, \dots, x_n], k[[x_1, \dots, x_n]]$)

Folheações de codimensão um em característica positiva

k = corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$.

$R = k$ -domínio (exemplo: $R = k[x_1, \dots, x_n], k[[x_1, \dots, x_n]]$)

Sejam v, v_1 e v_2 k -derivações de R . Então valem as seguintes propriedades

- O p -iterado de v , v^p , é uma k -derivação,

Folheações de codimensão um em característica positiva

k = corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$.

$R = k$ -domínio (exemplo: $R = k[x_1, \dots, x_n], k[[x_1, \dots, x_n]]$)

Sejam v, v_1 e v_2 k -derivações de R . Então valem as seguintes propriedades

- O p -iterado de v , v^p , é uma k -derivação,
- Se v_1, v_2 são k -derivações de R então

$$(v_1 + v_2)^p = v_1^p + v_2^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(v_1, v_2)$$

com $s_i(v_1, v_2)$ na álgebra de Lie gerada por v_1, v_2 ,

Folheações de codimensão um em característica positiva

k = corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$.

$R = k$ -domínio (exemplo: $R = k[x_1, \dots, x_n], k[[x_1, \dots, x_n]]$)

Sejam v, v_1 e v_2 k -derivações de R . Então valem as seguintes propriedades

- O p -iterado de v , v^p , é uma k -derivação,
- Se v_1, v_2 são k -derivações de R então

$$(v_1 + v_2)^p = v_1^p + v_2^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(v_1, v_2)$$

com $s_i(v_1, v_2)$ na álgebra de Lie gerada por v_1, v_2 ,

- Para qualquer $f \in R$ temos

$$(fv)^p = f^p v^p + f v^{p-1}(f)v.$$

Folheações p -fechadas

Definição

*Seja \mathcal{F} uma folheação em uma variedade algébrica não singular X definida sobre k . Dizemos que \mathcal{F} é **p -fechada** se $T_{\mathcal{F}}$ é estável por p -potências.*

²Sur les hypersurfaces solutions des équations de Pfaff

Folheações p -fechadas

Definição

*Seja \mathcal{F} uma folheação em uma variedade algébrica não singular X definida sobre k . Dizemos que \mathcal{F} é **p -fechada** se $T_{\mathcal{F}}$ é estável por p -potências.*

As folheações p -fechadas são a versão em característica positiva das folheações holomorfas que admitem uma integral primeira meromorfa. Vale em particular o seguinte teorema.²

²Sur les hypersurfaces solutions des équations de Pfaff

Folheações p -fechadas

Definição

*Seja \mathcal{F} uma folheação em uma variedade algébrica não singular X definida sobre k . Dizemos que \mathcal{F} é **p -fechada** se $T_{\mathcal{F}}$ é estável por p -potências.*

As folheações p -fechadas são a versão em característica positiva das folheações holomorfas que admitem uma integral primeira meromorfa. Vale em particular o seguinte teorema.²

Teorema (Brunella-Nicolau)

Seja X uma variedade algébrica não singular definida sobre k e \mathcal{F} uma folheação de codimensão um. Então, \mathcal{F} é p -fechada se e só se existe uma infinidade de hypersuperfícies \mathcal{F} -invariantes.

²Sur les hypersurfaces solutions des équations de Pfaff

Por outro lado, cuidado!³

³Invariant hypersurfaces for positive characteristic vector fields

Por outro lado, cuidado!³

Proposição (J.V.Pereira)

Seja \mathcal{F} uma folheação em \mathbb{P}_k^2 e suponha que $\deg(\mathcal{F}) < p - 1$. Então, \mathcal{F} admite uma curva algébrica \mathcal{F} -invariante.

³Invariant hypersurfaces for positive characteristic vector fields

Por outro lado, cuidado!³

Proposição (J.V.Pereira)

Seja \mathcal{F} uma folheação em \mathbb{P}_k^2 e suponha que $\deg(\mathcal{F}) < p - 1$. Então, \mathcal{F} admite uma curva algébrica \mathcal{F} -invariante.

Exemplo

Sejam k um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$ e \mathcal{F} a folheação em \mathbb{A}_k^2 definida pela 1-forma

$$\omega = ydx - \alpha xdy$$

para algum $\alpha \in k^$. Então, \mathcal{F} é p -fechada se e somente se $\alpha \in \mathbb{F}_p$.*

Note inicialmente que um campo v é tangente a \mathcal{F} se e somente se $v = g \cdot v_1$ para algum polinômio $g \in k[x, y]$ onde $v_1 = \alpha x \partial_x + y \partial_y$. Agora, note que v_1 é tangente a folheação definida por ω e que $v_1^p = \alpha^p x \partial_x + y \partial_y$.

³Invariant hypersurfaces for positive characteristic vector fields

Operador de Cartier

- k = corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$
- R = k -domínio local regular que é localização de um k -domínio de tipo finito (exemplo: $\mathcal{O}_{X,x}$)
- t_1, \dots, t_r = um sistema de parâmetros de R .

Operador de Cartier

- k = corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$
- R = k -domínio local regular que é localização de um k -domínio de tipo finito (exemplo: $\mathcal{O}_{X,x}$)
- t_1, \dots, t_r = um sistema de parâmetros de R .

Do sistema de parâmetros obtemos $\{dt_1, \dots, dt_r\}$ uma base para o módulo $\Omega_{R/k}^1$. Temos ainda que R é um R^p -módulo livre com base formada por todos os monômios da forma $t_1^{a_1} \cdots t_r^{a_r}$ com $0 \leq a_i \leq p-1$ para todo i .

Operador de Cartier

- k = corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$
- R = k -domínio local regular que é localização de um k -domínio de tipo finito (exemplo: $\mathcal{O}_{X,x}$)
- t_1, \dots, t_r = um sistema de parâmetros de R .

Do sistema de parâmetros obtemos $\{dt_1, \dots, dt_r\}$ uma base para o módulo $\Omega^1_{R/k}$. Temos ainda que R é um R^p -módulo livre com base formada por todos os monômios da forma $t_1^{a_1} \cdots t_r^{a_r}$ com $0 \leq a_i \leq p-1$ para todo i .

- **1-formas fechadas:**

$$Z^1_{R/k} = \{\omega \in \Omega^1_{R/k} \mid d\omega = 0\}$$

Operador de Cartier

- k = corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$
- R = k -domínio local regular que é localização de um k -domínio de tipo finito (exemplo: $\mathcal{O}_{X,x}$)
- t_1, \dots, t_r = um sistema de parâmetros de R .

Do sistema de parâmetros obtemos $\{dt_1, \dots, dt_r\}$ uma base para o módulo $\Omega_{R/k}^1$. Temos ainda que R é um R^p -módulo livre com base formada por todos os monômios da forma $t_1^{a_1} \cdots t_r^{a_r}$ com $0 \leq a_i \leq p-1$ para todo i .

- **1-formas fechadas:**

$$Z_{R/k}^1 = \{\omega \in \Omega_{R/k}^1 \mid d\omega = 0\}$$

- **1-formas exatas:**

$$B_{R/k}^1 = \{\omega \in \Omega_{R/k}^1 \mid \omega = dg\}$$

Operador de Cartier

- k = corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$
- R = k -domínio local regular que é localização de um k -domínio de tipo finito (exemplo: $\mathcal{O}_{X,x}$)
- t_1, \dots, t_r = um sistema de parâmetros de R .

Do sistema de parâmetros obtemos $\{dt_1, \dots, dt_r\}$ uma base para o módulo $\Omega_{R/k}^1$. Temos ainda que R é um R^p -módulo livre com base formada por todos os monômios da forma $t_1^{a_1} \cdots t_r^{a_r}$ com $0 \leq a_i \leq p-1$ para todo i .

- **1-formas fechadas:**

$$Z_{R/k}^1 = \{\omega \in \Omega_{R/k}^1 \mid d\omega = 0\}$$

- **1-formas exatas:**

$$B_{R/k}^1 = \{\omega \in \Omega_{R/k}^1 \mid \omega = dg\}$$

- **Obstrução:**

$$H_{R/k}^1 = Z_{R/k}^1 / B_{R/k}^1$$



Operador de Cartier

Considere o R^p -módulo

$$M(t_1, \dots, t_r) = R^p t_1^{p-1} dt_1 \oplus \dots \oplus R^p t_r^{p-1} dt_r$$

Proposição

Todo elemento de $Z_{R/k}^1$ se escreve de modo único como $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ com $\sigma_1 \in B_{R/k}^1$ e $\sigma_2 \in M(t_1, \dots, t_r)$.

Operador de Cartier

Considere o R^p -módulo

$$M(t_1, \dots, t_r) = R^p t_1^{p-1} dt_1 \oplus \dots \oplus R^p t_r^{p-1} dt_r$$

Proposição

Todo elemento de $Z_{R/k}^1$ se escreve de modo único como $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ com $\sigma_1 \in B_{R/k}^1$ e $\sigma_2 \in M(t_1, \dots, t_r)$.

O Operador de Cartier é o mapa

$$\begin{aligned} \mathbf{C}: Z_{R/k}^1 &\longrightarrow \Omega_{R/k}^1 \\ dg + \sum_{i=1}^r u_i^p t_i^{p-1} dt_i &\mapsto \sum_{i=1}^r u_i dt_i \end{aligned}$$

Fórmula fundamental

O **Operador de Cartier** pode ser definido de maneira mais explícita considerando inversa do isomorfismo⁴

$$\begin{aligned}\gamma: \Omega_{R/k}^1 &\longrightarrow Z_{R/k}^1 \longrightarrow H_{R/k}^1 \\ a dt &\mapsto a^p t^{p-1} dt \mapsto [a^p t^{p-1} dt].\end{aligned}$$

⁴1.3.4 Theorem em **Frobenius splitting methods in geometry and representation theory**

Fórmula fundamental

O **Operador de Cartier** pode ser definido de maneira mais explícita considerando inversa do isomorfismo⁴

$$\begin{aligned}\gamma: \Omega_{R/k}^1 &\longrightarrow Z_{R/k}^1 \longrightarrow H_{R/k}^1 \\adt &\mapsto a^p t^{p-1} dt \mapsto [a^p t^{p-1} dt].\end{aligned}$$

Teorema

Seja $\omega \in \Omega_{R/k}^1$ uma 1-forma fechada e $v \in \text{Der}_k(R)$ uma derivação. Então,

$$i_v C(\omega)^p = i_{v^p} \omega - v^{p-1}(i_v \omega).$$

⁴1.3.4 Theorem em **Frobenius splitting methods in geometry and representation theory**

Algumas propriedades

Proposição

^a Seja X uma variedade algébrica não singular sobre definida sobre k e denote por $\mathcal{Z}_{X/k}^1$ o subfeixe de $\Omega_{X/k}^1$ formado pelas 1-formas fechadas.

Existe um operador, chamado o **Operador de Cartier**, $C: \mathcal{Z}_{X/k}^1 \longrightarrow \Omega_{X/k}^1$ unicamente determinado pelas seguintes propriedades:

Algumas propriedades

Proposição

^a Seja X uma variedade algébrica não singular sobre definida sobre k e denote por $\mathcal{Z}_{X/k}^1$ o subfeixe de $\Omega_{X/k}^1$ formado pelas 1-formas fechadas.

Existe um operador, chamado o **Operador de Cartier**, $C: \mathcal{Z}_{X/k}^1 \longrightarrow \Omega_{X/k}^1$ unicamente determinado pelas seguintes propriedades:

$$\textcircled{i} \quad C(\sigma_1 + \sigma_2) = C(\sigma_1) + C(\sigma_2),$$

Algumas propriedades

Proposição

^a Seja X uma variedade algébrica não singular sobre definida sobre k e denote por $\mathcal{Z}_{X/k}^1$ o subfeixe de $\Omega_{X/k}^1$ formado pelas 1-formas fechadas.

Existe um operador, chamado o **Operador de Cartier**, $C: \mathcal{Z}_{X/k}^1 \longrightarrow \Omega_{X/k}^1$ unicamente determinado pelas seguintes propriedades:

- i) $C(\sigma_1 + \sigma_2) = C(\sigma_1) + C(\sigma_2)$,
- ii) $C(f^p \sigma_1) = f C(\sigma_1)$,

Algumas propriedades

Proposição

^a Seja X uma variedade algébrica não singular sobre definida sobre k e denote por $\mathcal{Z}_{X/k}^1$ o subfeixe de $\Omega_{X/k}^1$ formado pelas 1-formas fechadas.

Existe um operador, chamado o **Operador de Cartier**, $C: \mathcal{Z}_{X/k}^1 \longrightarrow \Omega_{X/k}^1$ unicamente determinado pelas seguintes propriedades:

- i) $C(\sigma_1 + \sigma_2) = C(\sigma_1) + C(\sigma_2)$,
- ii) $C(f^p \sigma_1) = f C(\sigma_1)$,
- iii) $C(df) = 0$,

Algumas propriedades

Proposição

^a Seja X uma variedade algébrica não singular sobre definida sobre k e denote por $\mathcal{Z}_{X/k}^1$ o subfeixe de $\Omega_{X/k}^1$ formado pelas 1-formas fechadas.

Existe um operador, chamado o **Operador de Cartier**, $C: \mathcal{Z}_{X/k}^1 \longrightarrow \Omega_{X/k}^1$ unicamente determinado pelas seguintes propriedades:

- i) $C(\sigma_1 + \sigma_2) = C(\sigma_1) + C(\sigma_2),$
- ii) $C(f^p \sigma_1) = f C(\sigma_1),$
- iii) $C(df) = 0,$
- iv) $C(f^{p-1} df) = df,$

Algumas propriedades

Proposição

^a Seja X uma variedade algébrica não singular sobre definida sobre k e denote por $\mathcal{Z}_{X/k}^1$ o subfeixe de $\Omega_{X/k}^1$ formado pelas 1-formas fechadas.

Existe um operador, chamado o **Operador de Cartier**, $C: \mathcal{Z}_{X/k}^1 \longrightarrow \Omega_{X/k}^1$ unicamente determinado pelas seguintes propriedades:

$$\textcircled{i} \quad C(\sigma_1 + \sigma_2) = C(\sigma_1) + C(\sigma_2),$$

$$\textcircled{ii} \quad C(f^p \sigma_1) = f C(\sigma_1),$$

$$\textcircled{iii} \quad C(df) = 0,$$

$$\textcircled{iv} \quad C(f^{p-1} df) = df,$$

$$\textcircled{v} \quad C\left(\frac{df}{f}\right) = \frac{df}{f}$$

para quaisquer seções locais $f \in \mathcal{O}_X$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{Z}_{X/k}^1$.

^aSeshadri, L'opération de Cartier

Folheações não p -fechadas e a p -distribuição associada

- X = variedade algébrica não singular de dimensão pelo menos dois definida sobre k
- \mathcal{F} = folheação de codimensão um não p -fechada em X

Folheações não p -fechadas e a p -distribuição associada

- X = variedade algébrica não singular de dimensão pelo menos dois definida sobre k
- \mathcal{F} = folheação de codimensão um não p -fechada em X

Teorema (D. Cerveau, A. Lins Neto, F. Loray, J.V. Pereira, F. Touzet)

Seja X uma variedade algébrica não singular definida sobre k e ω uma 1-forma racional. Suponha que ω é integrável e que v é um campo racional tal que $i_v\omega = 0$. Se $f = i_{v_p}\omega \neq 0$ então $d(f^{p-1}\omega) = 0$.^a

^aComplex codimension one singular foliations and Godbillon-Vey sequences

Folheações não p -fechadas e a p -distribuição associada

- X = variedade algébrica não singular de dimensão pelo menos dois definida sobre k
- \mathcal{F} = folheação de codimensão um não p -fechada em X

Teorema (D. Cerveau, A. Lins Neto, F. Loray, J.V. Pereira, F. Touzet)

Seja X uma variedade algébrica não singular definida sobre k e ω uma 1-forma racional. Suponha que ω é integrável e que v é um campo racional tal que $i_v \omega = 0$. Se $f = i_{v_p} \omega \neq 0$ então $d(f^{p-1} \omega) = 0$.^a

^aComplex codimension one singular foliations and Godbillon-Vey sequences

Seja ω uma 1-forma fechada definindo \mathcal{F} . Considere o subfeixe $T_{\mathcal{F}}$ de $T_{\mathcal{F}}$ definido pondo

$$T_{\mathcal{F}} = \{v \in T_{\mathcal{F}} \mid i_v \mathbf{C}(\omega) = 0\} \quad (1)$$

onde \mathbf{C} é o Operador de Cartier.

Morfismo p -curvatura

Pelas propriedades do Operador de Cartier segue que $T_{C_{\mathcal{F}}}$ independe da escolha da 1-forma fechada definindo \mathcal{F} e é um subfeixe saturado em T_X .

Morfismo p -curvatura

Pelas propriedades do Operador de Cartier segue que $T_{C_{\mathcal{F}}}$ independe da escolha da 1-forma fechada definindo \mathcal{F} e é um subfeixe saturado em T_X .

Definição

*Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um não p -fechada em X . A p -distribuição associada a \mathcal{F} é a distribuição definida pelo feixe $T_{C_{\mathcal{F}}}$ e será chamada de **p -distribuição** associada a \mathcal{F} .*

Morfismo p -curvatura

Pelas propriedades do Operador de Cartier segue que $T_{C_{\mathcal{F}}}$ independe da escolha da 1-forma fechada definindo \mathcal{F} e é um subfeixe saturado em T_X .

Definição

*Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um não p -fechada em X . A p -distribuição associada a \mathcal{F} é a distribuição definida pelo feixe $T_{C_{\mathcal{F}}}$ e será chamada de **p -distribuição** associada a \mathcal{F} .*

Exemplo

A fórmula fundamental implica que se $\dim X = 2$ então $T_{C_{\mathcal{F}}}$ é o feixe nulo. De fato, dado $v \in T_{\mathcal{F}}$ temos que $0 \neq i_{v^p} \omega = i_v C(\omega)^p$.

Morfismo p -curvatura

Pelas propriedades do Operador de Cartier segue que $T_{C_{\mathcal{F}}}$ independe da escolha da 1-forma fechada definindo \mathcal{F} e é um subfeixe saturado em T_X .

Definição

*Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um não p -fechada em X . A p -distribuição associada a \mathcal{F} é a distribuição definida pelo feixe $T_{C_{\mathcal{F}}}$ e será chamada de **p -distribuição** associada a \mathcal{F} .*

Exemplo

A fórmula fundamental implica que se $\dim X = 2$ então $T_{C_{\mathcal{F}}}$ é o feixe nulo. De fato, dado $v \in T_{\mathcal{F}}$ temos que $0 \neq i_{v^p} \omega = i_v C(\omega)^p$.

Considere o seguinte morfismo de feixes de conjuntos

$$\psi_{\mathcal{F}}: T_{\mathcal{F}} \longrightarrow \frac{T_X}{T_{\mathcal{F}}}$$

que associa v em $v^p \mod T_{\mathcal{F}}$.



Morfismo p -curvatura e Frobenius

As propriedades de derivações em característica positiva implicam que $\psi_{\mathcal{F}}$ é de fato um morfismo de feixes de grupos.

Morfismo p -curvatura e Frobenius

As propriedades de derivações em característica positiva implicam que $\psi_{\mathcal{F}}$ é de fato um morfismo de feixes de grupos.

Definição

O morfismo p -curvatura associado a \mathcal{F} é o mapa de \mathcal{O}_X -módulos:

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathcal{F}}: F_X^* T_{\mathcal{F}} &\longrightarrow N_{\mathcal{F}} \\ \sum_i f_i \otimes v_i &\mapsto \sum_i f_i v_i^p.\end{aligned}$$

Morfismo p -curvatura e Frobenius

As propriedades de derivações em característica positiva implicam que $\psi_{\mathcal{F}}$ é de fato um morfismo de feixes de grupos.

Definição

O morfismo p -curvatura associado a \mathcal{F} é o mapa de \mathcal{O}_X -módulos:

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathcal{F}}: F_X^* T_{\mathcal{F}} &\longrightarrow N_{\mathcal{F}} \\ \sum_i f_i \otimes v_i &\mapsto \sum_i f_i v_i^p.\end{aligned}$$

Nas condições acima, a folheação \mathcal{F} é p -fechada se e somente se $\varphi_{\mathcal{F}} \equiv 0$.

Morfismo p -curvatura e Frobenius

As propriedades de derivações em característica positiva implicam que $\psi_{\mathcal{F}}$ é de fato um morfismo de feixes de grupos.

Definição

O morfismo p -curvatura associado a \mathcal{F} é o mapa de \mathcal{O}_X -módulos:

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathcal{F}}: F_X^* T_{\mathcal{F}} &\longrightarrow N_{\mathcal{F}} \\ \sum_i f_i \otimes v_i &\mapsto \sum_i f_i v_i^p.\end{aligned}$$

Nas condições acima, a folheação \mathcal{F} é p -fechada se e somente se $\varphi_{\mathcal{F}} \equiv 0$.

Lembrar: O morfismo **Frobenius absoluto**, denotado por F_X , consiste no morfismo que é identidade a nível de espaços topológicos e a nível de funções é o morfismo de anéis p -potência

$$F_X = (f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

onde $f = id$ e $f^{\#} : a \mapsto a^p$.



Morfismo p -curvatura

Considere o morfismo p -curvatura

$$\varphi_{\mathcal{F}}: F_X^* T_{\mathcal{F}} \longrightarrow N_{\mathcal{F}}$$

$$\sum_i f_i \otimes v_i \mapsto \sum_i f_i v_i^p.$$

Morfismo p -curvatura

Considere o morfismo p -curvatura

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathcal{F}}: F_X^* T_{\mathcal{F}} &\longrightarrow N_{\mathcal{F}} \\ \sum_i f_i \otimes v_i &\mapsto \sum_i f_i v_i^p.\end{aligned}$$

Proposição

Temos $\text{Ker}(\varphi_{\mathcal{F}}) = F_X^ T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ onde F_X é o mapa Frobenius absoluto e existe um divisor efetivo $\Delta_{\mathcal{F}} \in \text{Div}(X)$ tal que a sequencia*

$$0 \longrightarrow F_X^* T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}} \longrightarrow F_X^* T_{\mathcal{F}} \longrightarrow N_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-\Delta_{\mathcal{F}}) \longrightarrow 0$$

é exata em codimensão um, isto é, fora de um conjunto fechado de codimensão ≥ 2 .

Folheações não p -fechadas: p -distribuição e p -divisor

Definição

Seja \mathcal{F} uma folheação não p -fechada em X . A **p -distribuição** associada a \mathcal{F} é o subfeixe de T_X definido por $T_{C_{\mathcal{F}}}$. O **p -divisor** de \mathcal{F} é o divisor $\Delta_{\mathcal{F}}$.

Uma propriedade interessante do p -divisor está contida na seguinte proposição.

Proposição

Seja X uma variedade não singular sobre k e \mathcal{F} uma folheação em X não p -fechada. Seja H uma hipersuperfície irredutível em X . Se H é \mathcal{F} -invariante então $\text{ord}_H(\Delta_{\mathcal{F}}) > 0$. Reciprocamente, se $\text{ord}_H(\Delta_{\mathcal{F}}) \not\equiv 0 \pmod{p}$ então H é \mathcal{F} -invariante.

Consequências

Proposição

Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em uma variedade projetiva não singular X de dimensão pelo menos dois e definida sobre k . Suponha que \mathcal{F} seja não p -fechada. Então, a identidade

$$\mathcal{O}_X(\Delta_{\mathcal{F}}) = \omega_{\mathcal{F}}^{\otimes p} \otimes (\omega_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}^*)^{\otimes p} \otimes N_{\mathcal{F}}$$

vale em $\text{Pic}(X)$.

Consequências

Proposição

Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em uma variedade projetiva não singular X de dimensão pelo menos dois e definida sobre k . Suponha que \mathcal{F} seja não p -fechada. Então, a identidade

$$\mathcal{O}_X(\Delta_{\mathcal{F}}) = \omega_{\mathcal{F}}^{\otimes p} \otimes (\omega_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}^*)^{\otimes p} \otimes N_{\mathcal{F}}$$

vale em $\text{Pic}(X)$.

Quando $X = \mathbb{P}_k^n$ a proposição acima implica que dada \mathcal{F} uma folheação de codimensão um não p -fechada e de grau d em \mathbb{P}_k^n temos a seguinte **fórmula do grau**:

$$\deg(\Delta_{\mathcal{F}}) = p(d - \deg(\mathcal{C}_{\mathcal{F}}) - 1) + d + 2 \quad (2)$$

p -divisor e propriedades

Proposição

Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em \mathbb{P}_k^n tal que $p \nmid \deg(N_{\mathcal{F}})$. Então, \mathcal{F} admite uma hipersuperfície invariante.

p -divisor e propriedades

Proposição

Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em \mathbb{P}_k^n tal que $p \nmid \deg(N_{\mathcal{F}})$. Então, \mathcal{F} admite uma hipersuperfície invariante.

Demonstração.

Seja ω a 1-forma projetiva definindo a folheação \mathcal{F} . Se \mathcal{F} é p -fechada então \mathcal{F} admite de fato uma infinidade de soluções. Assim, podemos supor que \mathcal{F} é não p -fechada. Como $p \nmid \deg(N_{\mathcal{F}})$ segue da fórmula do grau que $\deg(\Delta_{\mathcal{F}}) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Em particular, $\Delta_{\mathcal{F}}$ não é um p -fator e assim existe um polinômio irredutível Q ocorrendo em $\Delta_{\mathcal{F}}$ com $\deg(Q) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Tal fator, define uma hipersuperfície \mathcal{F} -invariante. \square

p -divisor e propriedades: exemplo

Exemplo

Seja \mathcal{F} uma folheação não dicrítica em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ definida por uma 1-forma projetiva

$$\Omega = A dx + B dy + C dz.$$

Suponha que $A, B, C \in \mathbb{Z}[x, y, z]_{d+1}$ e seja $p\mathbb{Z} \in \mathbf{Spm}(\mathbb{Z})$ ideal maximal tal que $p \nmid d+2$. Seja \mathcal{F}_p a folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_p}$ obtida por redução módulo $p\mathbb{Z}$ de Ω . Se $\Delta_{\mathcal{F}_p}$ é irredutível então \mathcal{F} não admite soluções algébricas.

⁵The Poincaré problem in the nondicritical case

p -divisor e propriedades: exemplo

Exemplo

Seja \mathcal{F} uma folheação não dicrítica em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ definida por uma 1-forma projetiva

$$\Omega = A dx + B dy + C dz.$$

Suponha que $A, B, C \in \mathbb{Z}[x, y, z]_{d+1}$ e seja $p\mathbb{Z} \in \mathbf{Spm}(\mathbb{Z})$ ideal maximal tal que $p \nmid d+2$. Seja \mathcal{F}_p a folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_p}$ obtida por redução módulo $p\mathbb{Z}$ de Ω . Se $\Delta_{\mathcal{F}_p}$ é irredutível então \mathcal{F} não admite soluções algébricas.

Isso pode ser usado para dar uma simples prova do Teorema de Jouanolou que diz que muitas folheações no plano complexo de grau $d \in \{2, 3\}$ não possuem soluções algébricas. O ponto crucial aqui é uma cota para o grau de soluções algébricas fornecida por Carnicer.⁵

⁵The Poincaré problem in the nondicritical case

Exemplo: Folheações em superfícies e o p -divisor

Seja X uma superfície projetiva não singular definida sobre k . Dar uma folheação em X equivale a dar um sistema $\{(U_i, \omega_i, v_i)\}_{i \in I}$ tal que:

- $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de X .
- Para cada $i \in I$ temos $v_i \in T_X(U_i)$, $\omega_i \in \Omega^1_{X/k}(U_i)$ tais que $i_{v_i} \omega_i = 0$.
- Em $U_i \cap U_j$ temos $\omega_i = f_{ij} \omega_j$ e $v_i = g_{ij} v_j$ para alguns funções $f_{ij}, g_{ij} \in \mathcal{O}_X^*(U_{ij})$.
- Para cada $i \in I$ temos $\text{codim}(\omega_i) \geq 2$ e $\text{codim}(v_i) \geq 2$.

Exemplo: Folheações em superfícies e o p -divisor

Seja X uma superfície projetiva não singular definida sobre k . Dar uma folheação em X equivale a dar um sistema $\{(U_i, \omega_i, v_i)\}_{i \in I}$ tal que:

- $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de X .
- Para cada $i \in I$ temos $v_i \in T_X(U_i)$, $\omega_i \in \Omega^1_{X/k}(U_i)$ tais que $i_{v_i} \omega_i = 0$.
- Em $U_i \cap U_j$ temos $\omega_i = f_{ij} \omega_j$ e $v_i = g_{ij} v_j$ para alguns funções $f_{ij}, g_{ij} \in \mathcal{O}_X^*(U_{ij})$.
- Para cada $i \in I$ temos $\text{codim}(\omega_i) \geq 2$ e $\text{codim}(v_i) \geq 2$.

As coleções $\{f_{ij}^{-1}\}, \{g_{ij}\}$ determinam elementos de $H^1(X, \mathcal{O}_X^*) = \text{Pic}(X)$ e os fibrados lineares associados são o fibrado conormal $\Omega^1_{X/\mathcal{F}}$ e fibrado cotangente $\Omega^1_{\mathcal{F}}$ associados a \mathcal{F} . Um divisor na classe linear correspondente a $\Omega^1_{\mathcal{F}}$ é chamado de **divisor canônico** de \mathcal{F} e denotado por $K_{\mathcal{F}}$.

Construção explícita do p -divisor

Seja $\mathcal{F} = \{(U_i, \omega_i, v_i)\}$ uma folheação em X que não é p -fechada. Em cada U_{ij} temos relações:

$$\omega_i = f_{ij}\omega_j \quad v_i = g_{ij}v_j.$$

Como estamos assumindo que \mathcal{F} é não p -fechada, temos para cada $i, j \in I$,

$$0 \neq i_{v_i^p}\omega_i = i_{(g_{ij}v_j)^p}f_{ij}\omega_j = i_{(g_{ij}^p v_j^p + g_{ij}v_j^{p-1}(g_{ij}^{p-1})v_j)}f_{ij}\omega_j = g_{ij}^p f_{ij} i_{v_j^p}\omega_j \neq 0.$$

A coleção $\{i_{v_i^p}\omega_i\}_{i \in I}$ determina uma seção $0 \neq s_{\mathcal{F}} \in H^0(X, (\Omega^1_{\mathcal{F}})^{\otimes p} \otimes N_{\mathcal{F}})$.

Observação

O p -divisor associado a \mathcal{F} é o divisor de zeros da seção $s_{\mathcal{F}}$:

$$\Delta_{\mathcal{F}} = (s_{\mathcal{F}})_0 \in \text{Div}(X).$$

p -divisor em \mathbb{P}_k^2 e em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$

Problema

Seja X uma superfície algébrica não singular. O que podemos dizer sobre $\Delta_{\mathcal{F}}$ para uma folheação genérica \mathcal{F} ?

p -divisor em \mathbb{P}_k^2 e em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$

Problema

Seja X uma superfície algébrica não singular. O que podemos dizer sobre $\Delta_{\mathcal{F}}$ para uma folheação genérica \mathcal{F} ?

Por exemplo, será que muitas folheações em \mathbb{P}_k^2 possuem p -divisor reduzido?
Irredutível?

p -divisor em \mathbb{P}_k^2 e em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$

Problema

Seja X uma superfície algébrica não singular. O que podemos dizer sobre $\Delta_{\mathcal{F}}$ para uma folheação genérica \mathcal{F} ?

Por exemplo, será que muitas folheações em \mathbb{P}_k^2 possuem p -divisor reduzido? Irredutível?

Nessa direção, temos os seguintes resultados.

Teorema

Sejam $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que $p \nmid d$ e $p \nmid d_i$, se $d_i \neq 0$. Então,

p -divisor em \mathbb{P}_k^2 e em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$

Problema

Seja X uma superfície algébrica não singular. O que podemos dizer sobre $\Delta_{\mathcal{F}}$ para uma folheação genérica \mathcal{F} ?

Por exemplo, será que muitas folheações em \mathbb{P}_k^2 possuem p -divisor reduzido?
Irredutível?

Nessa direção, temos os seguintes resultados.

Teorema

Sejam $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que $p \nmid d$ e $p \nmid d_i$, se $d_i \neq 0$. Então,

- *Uma folheação genérica em \mathbb{P}_k^2 de grau $d \geq 1$ tem p -divisor reduzido, e*

p -divisor em \mathbb{P}_k^2 e em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$

Problema

Seja X uma superfície algébrica não singular. O que podemos dizer sobre $\Delta_{\mathcal{F}}$ para uma folheação genérica \mathcal{F} ?

Por exemplo, será que muitas folheações em \mathbb{P}_k^2 possuem p -divisor reduzido?
Irredutível?

Nessa direção, temos os seguintes resultados.

Teorema

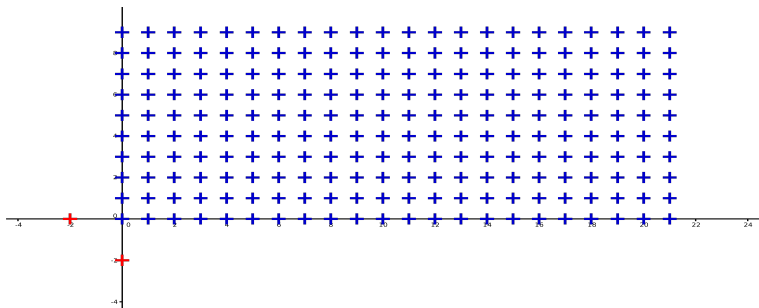
Sejam $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que $p \nmid d$ e $p \nmid d_i$, se $d_i \neq 0$. Então,

- *Uma folheação genérica em \mathbb{P}_k^2 de grau $d \geq 1$ tem p -divisor reduzido, e*
- *Uma folheação genérica em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ com divisor canônico $K \equiv d_1 F + d_2 M$ possui p -divisor não nulo e reduzido.*

Folheações de tipo (d_1, d_2) em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$

Uma folheação em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ será dita **de tipo** (d_1, d_2) se possui divisor canônico de bigrau (d_1, d_2) . Os possíveis tipo estão contidos na região:⁶

$$S_0 = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid d_1, d_2 \geq 0\} \cup \{(-2, 0)\} \cup \{(0, -2)\}.$$



⁶Xavier Gómez-Mont, Holomorphic foliations in ruled surfaces

Folheações de dimensão um e grau um p -fechadas

$$\text{Vec}_d(\mathbb{A}_k^{n+1}) = \{[v] \in \mathbb{P}(\mathfrak{X}_d(\mathbb{A}_k^{n+1})) \mid \text{div}(v) = 0\} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{X}_d(\mathbb{A}_k^{n+1}))$$

Folheações de dimensão um e grau um p -fechadas

$$\text{Vec}_d(\mathbb{A}_k^{n+1}) = \{[v] \in \mathbb{P}(\mathfrak{X}_d(\mathbb{A}_k^{n+1})) \mid \text{div}(v) = 0\} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{X}_d(\mathbb{A}_k^{n+1}))$$

Para cada $\alpha = [\alpha_0 : \cdots : \alpha_n] \in \mathbb{P}_k^n$ tal que $\sum_i \alpha_i = 0$ denote por $\mathcal{F}(\alpha)$ a folheação de dimensão um e grau um em \mathbb{P}_k^n determinada pelo campo $v(\alpha) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i \partial_{x_i}$ e considere a seguinte subvariedade de $\text{Vec}_1(\mathbb{A}_k^{n+1})$:

$$V(\alpha) = \overline{\{\mathcal{F} \in \text{Vec}_1(\mathbb{A}_k^{n+1}) \mid \mathcal{F} \text{ é conjugada via } \text{Aut}(\mathbb{P}_k^n) \text{ a } \mathcal{F}(\alpha_0, \dots, \alpha_n)\}}.$$

Folheações de dimensão um e grau um p -fechadas

$$\text{Vec}_d(\mathbb{A}_k^{n+1}) = \{[v] \in \mathbb{P}(\mathfrak{X}_d(\mathbb{A}_k^{n+1})) \mid \text{div}(v) = 0\} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{X}_d(\mathbb{A}_k^{n+1}))$$

Para cada $\alpha = [\alpha_0 : \cdots : \alpha_n] \in \mathbb{P}_k^n$ tal que $\sum_i \alpha_i = 0$ denote por $\mathcal{F}(\alpha)$ a folheação de dimensão um e grau um em \mathbb{P}_k^n determinada pelo campo $v(\alpha) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i \partial_{x_i}$ e considere a seguinte subvariedade de $\text{Vec}_1(\mathbb{A}_k^{n+1})$:

$$V(\alpha) = \overline{\{\mathcal{F} \in \text{Vec}_1(\mathbb{A}_k^{n+1}) \mid \mathcal{F} \text{ é conjugada via } \text{Aut}(\mathbb{P}_k^n) \text{ a } \mathcal{F}(\alpha_0, \dots, \alpha_n)\}}.$$

Teorema

Suponha que p não divide $n+1$ e denote por $\text{Vec}_{1,0}(\mathbb{A}_k^{n+1})$ o fechado que consiste das folheações p -fechadas. Se $\alpha = [\alpha_0 : \cdots : \alpha_n] \in \mathbb{P}_k^n(\mathbb{F}_p)$ e $\sum_i \alpha_i = 0$ então $V(\alpha)$ é uma componente irredutível de $\text{Vec}_{1,0}(\mathbb{A}_k^{n+1})$. Além disso, toda componente irredutível de tal espaço é dessa forma.



Agumas consequências

- Denote por $i(n, p)$ o número de componentes irredutíveis de $\text{Vec}_{1,0}(\mathbb{A}_k^{n+1})$. Então,

$$p^{n-1}/(n-1)! \leq i(n, p) \leq p^n$$

Algumas consequências

- Denote por $i(n, p)$ o número de componentes irredutíveis de $\text{Vec}_{1,0}(\mathbb{A}_k^{n+1})$. Então,

$$p^{n-1}/(n-1)! \leq i(n, p) \leq p^n$$

- Seja \mathcal{C} uma folheação de dimensão um e grau um em \mathbb{P}_k^3 . Suponha que \mathcal{C} seja p -fechada e seja $\{\mathcal{C}_t\}_{t \in T}$ uma família de folheações p -fechadas com $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ para algum ponto fechado $0 \in T$. Se \mathcal{C} é definida pela mapa racional

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{P}_k^3 &\longrightarrow \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1 \\ [x_0 : x_1 : y_0 : y_1] &\mapsto ([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) \end{aligned}$$

então existe um aberto U sobre 0 tal que para todo $t \in U$ temos que \mathcal{C}_t é definida por um mapa racional $\Phi_t: \mathbb{P}_k^3 \longrightarrow \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ de grau um com $\Phi_0 = \Phi$.

Grau do p -divisor em vizinhanças

Para demonstração do teorema principal é necessário um estudo sobre o comportamento do p -divisor em vizinhanças.

Grau do p -divisor em vizinhanças

Para demonstração do teorema principal é necessário um estudo sobre o comportamento do p -divisor em vizinhanças.

Teorema

Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um e grau d em \mathbb{P}_k^3 e suponha que

- \mathcal{F} é não p -fechada com p -divisor **reduzido**.
- A p -folheação $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ tem grau $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Grau do p -divisor em vizinhanças

Para demonstração do teorema principal é necessário um estudo sobre o comportamento do p -divisor em vizinhanças.

Teorema

Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um e grau d em \mathbb{P}_k^3 e suponha que

- \mathcal{F} é não p -fechada com p -divisor **reduzido**.
- A p -folheação $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ tem grau $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Então, existe um aberto $U_{\mathcal{F}}$ do espaço de folheações de codimensão um e grau d em \mathbb{P}_k^3 que contém \mathcal{F} tal que para qualquer folheação $\mathcal{F}' \in U_{\mathcal{F}}$ temos

- i) \mathcal{F}' é não p -fechada e $\Delta_{\mathcal{F}'}$ não admite p -fatores e $\deg(\Delta_{\mathcal{F}'}) \geq \deg(\Delta_{\mathcal{F}})$.
- ii) A p -folheação $\mathcal{C}_{\mathcal{F}'}$ tem grau $e' \leq e$.

Grau do p -divisor em vizinhanças

A prova consiste em reduzir a um problema de polinômios. É consequência da propriedade de invariância do p -divisor e da seguinte proposição.

Grau do p -divisor em vizinhanças

A prova consiste em reduzir a um problema de polinômios. É consequência da propriedade de invariância do p -divisor e da seguinte proposição.

Proposição

Sejam $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ e k um corpo de característica $p > 0$. Considere $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{M_d}$ o espaço projetivo nas variáveis: x_0, x_1, x_2, x_3 . Seja $G \in k[x_0, x_1, x_2, x_3]_d$ um polinômio homogêneo de grau d tal que $G = FE^p$ com F livre de quadrados. Então, existe um aberto em torno de $[G]$ tal que para qualquer $[\tilde{G}] \in U_G$ temos que $\tilde{G} = \tilde{F}\tilde{E}^p$ com \tilde{F} livre de p -potências com $\deg(\tilde{F}) \geq \deg(F)$.

Novas componentes irredutíveis de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_k^3)$

- $k =$ corpo de característica $p > d + 2$.
- $\text{Fol}_{(d_1, d_2)}(\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1) =$ espaço parametrizando as folheações em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ com divisor canônico de tipo (d_1, d_2) .
- $\text{Map}_1(\mathbb{P}_k^3, \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1) =$ coleção de mapas racionais de grau um.

Novas componentes irredutíveis de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_k^3)$

- k = corpo de característica $p > d + 2$.
- $\text{Fol}_{(d_1, d_2)}(\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1)$ = espaço parametrizando as folheações em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ com divisor canônico de tipo (d_1, d_2) .
- $\text{Map}_1(\mathbb{P}_k^3, \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1)$ = coleção de mapas racionais de grau um.

Sejam $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $d = d_1 + d_2 + 2$ e considere o mapa racional

$$\begin{aligned} \Psi_{(d; d_1, d_2)} : \text{Map}_1(\mathbb{P}_k^3, \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1) \times \text{Fol}_{(d_1, d_2)}(\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1) &\dashrightarrow \text{Fol}_d(\mathbb{P}_k^3) \\ (\Phi, \mathcal{G}) &\longmapsto \Phi^* \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Novas componentes irredutíveis de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_k^3)$

- k = corpo de característica $p > d + 2$.
- $\text{Fol}_{(d_1, d_2)}(\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1)$ = espaço parametrizando as folheações em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ com divisor canônico de tipo (d_1, d_2) .
- $\text{Map}_1(\mathbb{P}_k^3, \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1)$ = coleção de mapas racionais de grau um.

Sejam $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $d = d_1 + d_2 + 2$ e considere o mapa racional

$$\begin{aligned} \Psi_{(d; d_1, d_2)} : \text{Map}_1(\mathbb{P}_k^3, \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1) \times \text{Fol}_{(d_1, d_2)}(\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1) &\dashrightarrow \text{Fol}_d(\mathbb{P}_k^3) \\ (\Phi, \mathcal{G}) &\longmapsto \Phi^* \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Teorema B

Seja $X_{(d; d_1, d_2)}$ o fecho de Zariski da imagem de $\Psi_{(d; d_1, d_2)}$. Então, $X_{(d; d_1, d_2)}$ é uma componente irredutível de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_k^3)$.



Ideia de prova

Passo 1: Seja \mathcal{F} uma folheação de grau $d \geq 3$ em \mathbb{P}^3_k e suponha que

- $\mathcal{F} = \Phi^* \mathcal{G}$ para alguma folheação \mathcal{G} de tipo (d_1, d_2) em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$,
- \mathcal{G} não p -fechada e com $\Delta_{\mathcal{G}}$ reduzido.

Ideia de prova

Passo 1: Seja \mathcal{F} uma folheação de grau $d \geq 3$ em \mathbb{P}_k^3 e suponha que

- $\mathcal{F} = \Phi^* \mathcal{G}$ para alguma folheação \mathcal{G} de tipo (d_1, d_2) em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$,
- \mathcal{G} não p -fechada e com $\Delta_{\mathcal{G}}$ reduzido.

Passo 2: Note que \mathcal{F} é não p -fechada e temos que $\Delta_{\mathcal{F}} = \Phi^* \Delta_{\mathcal{G}}$ (comparação de graus). Seja T uma componente irredutível de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_k^3)$ contendo a imagem de $\Psi_{(d;d_1,d_2)}$ e $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ a família parametrizada por T com $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$.

Ideia de prova

Passo 1: Seja \mathcal{F} uma folheação de grau $d \geq 3$ em \mathbb{P}^3_k e suponha que

- $\mathcal{F} = \Phi^* \mathcal{G}$ para alguma folheação \mathcal{G} de tipo (d_1, d_2) em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$,
- \mathcal{G} não p -fechada e com $\Delta_{\mathcal{G}}$ reduzido.

Passo 2: Note que \mathcal{F} é não p -fechada e temos que $\Delta_{\mathcal{F}} = \Phi^* \Delta_{\mathcal{G}}$ (comparação de graus). Seja T uma componente irredutível de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}^3_k)$ contendo a imagem de $\Psi_{(d;d_1,d_2)}$ e $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ a família parametrizada por T com $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$.

Passo 3: Seja U um aberto de T contendo 0 tal que para todo $t \in U$ temos \mathcal{F}_t não p -fechada. Nesse caso, para todo $t \in U$ temos a p -folheação associada: $\{\mathcal{C}_{\mathcal{F}_t}\}_{t \in U}$. O comportamento do grau do p -divisor em vizinhanças implica que reduzindo U , podemos supor $\deg(\mathcal{C}_{\mathcal{F}_t}) \leq 1$ para $t \in U$.

Ideia de prova

Passo 1: Seja \mathcal{F} uma folheação de grau $d \geq 3$ em \mathbb{P}_k^3 e suponha que

- $\mathcal{F} = \Phi^* \mathcal{G}$ para alguma folheação \mathcal{G} de tipo (d_1, d_2) em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$,
- \mathcal{G} não p -fechada e com $\Delta_{\mathcal{G}}$ reduzido.

Passo 2: Note que \mathcal{F} é não p -fechada e temos que $\Delta_{\mathcal{F}} = \Phi^* \Delta_{\mathcal{G}}$ (comparação de graus). Seja T uma componente irredutível de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_k^3)$ contendo a imagem de $\Psi_{(d;d_1,d_2)}$ e $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ a família parametrizada por T com $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$.

Passo 3: Seja U um aberto de T contendo 0 tal que para todo $t \in U$ temos \mathcal{F}_t não p -fechada. Nesse caso, para todo $t \in U$ temos a p -folheação associada: $\{\mathcal{C}_{\mathcal{F}_t}\}_{t \in U}$. O comportamento do grau do p -divisor em vizinhanças implica que reduzindo U , podemos supor $\deg(\mathcal{C}_{\mathcal{F}_t}) \leq 1$ para $t \in U$.

Passo 4: Uma comparação de graus mostra que \mathcal{F} não está na componente das folheações que são pullbacks lineares de folheações em \mathbb{P}_k^2 . Reduzindo a um aberto V em torno de 0 podemos supor que $\deg(\mathcal{C}_{\mathcal{F}_t}) = 1$ em V .



Ideia de prova

Passo 5: Como $\deg(\mathcal{F}_t) > 2$ podemos supor que $\mathcal{C}_{\mathcal{F}_t}$ não é p -fechada. Caso contrário, existiria um campo homogêneo v_t de grau um tangente a \mathcal{F}_t tal que $v_t \wedge v_t^p$ é não nulo e que define \mathcal{F}_t , o que é uma contradição por comparação de graus.

Ideia de prova

Passo 5: Como $\deg(\mathcal{F}_t) > 2$ podemos supor que $\mathcal{C}_{\mathcal{F}_t}$ não é p -fechada. Caso contrário, existiria um campo homogêneo v_t de grau um tangente a \mathcal{F}_t tal que $v_t \wedge v_t^p$ é não nulo e que define \mathcal{F}_t , o que é uma contradição por comparação de graus.

Passo 6: Por um lema técnico, garantimos que \mathcal{F}_t é um pullback por uma aplicação racional de grau um de uma folheação de tipo (d_1, d_2) em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$.

Ideia de prova

Passo 5: Como $\deg(\mathcal{F}_t) > 2$ podemos supor que $\mathcal{C}_{\mathcal{F}_t}$ não é p -fechada. Caso contrário, existiria um campo homogêneo v_t de grau um tangente a \mathcal{F}_t tal que $v_t \wedge v_t^p$ não nulo e que define \mathcal{F}_t , o que é uma contradição por comparação de graus.

Passo 6: Por um lema técnico, garantimos que \mathcal{F}_t é um pullback por uma aplicação racional de grau um de uma folheação de tipo (d_1, d_2) em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$.

Passo 7: As considerações acima mostram que existe um aberto $U_{\mathcal{F}}$ no espaço das folheações de codimensão um e grau d em \mathbb{P}_k^n contendo \mathcal{F} que admite a seguinte propriedade:

- Para toda folheação $\tilde{\mathcal{F}} \in U_{\mathcal{F}}$ temos que $\tilde{\mathcal{F}} = \gamma^* \tilde{\mathcal{G}}$ para alguma $\tilde{\mathcal{G}} \in \text{Fol}_{(d_1, d_2)}(\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1)$ e $\gamma \in \text{Map}_1(\mathbb{P}_k^3, \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1)$.

Logo, $U_{\mathcal{F}} \subset X_{(d; d_1, d_2)}$ e por passagem ao fecho de Zariski concluimos $T = X_{(d; d_1, d_2)}$.

Redução módulo p

- $X = Z(F_0, \dots, F_r) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^M$.
- $R = \mathbb{Z}$ -álgebra finitamente gerada obtida por adjunção de todos os coeficientes que ocorrem em F_0, \dots, F_r .

Para cada ideal maximal $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spm}(R)$ de R temos que o corpo $k(\mathfrak{p}) = R/\mathfrak{p}$ é finito, em particular, de característica $p > 0$.

Redução módulo p

- $X = \mathcal{Z}(F_0, \dots, F_r) \subset \mathbb{P}^M_{\mathbb{C}}$.
- $R = \mathbb{Z}$ -álgebra finitamente gerada obtida por adjunção de todos os coeficientes que ocorrem em F_0, \dots, F_r .

Para cada ideal maximal $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spm}(R)$ de R temos que o corpo $k(\mathfrak{p}) = R/\mathfrak{p}$ é finito, em particular, de característica $p > 0$.

Proposição (Bertini-Noether)

Sejam $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spm}(R)$ um ideal maximal de R e considere $X_{\mathfrak{p}}$ a variedade definida sobre $k(\mathfrak{p})$ obtida por redução módulo \mathfrak{p} dos polinômios F_0, \dots, F_r . Então, $X_{\mathfrak{p}}$ é irredutível e $\dim X = \dim X_{\mathfrak{p}}$ para quase todo ideal maximal de R , isto é, para todo ideal maximal de R fora de conjunto fechado próprio $E \subset \mathbf{Spm}(R)$.

Componentes irredutíveis e redução módulo p

Sejam X uma variedade projetiva em $\mathbb{P}^M_{\mathbb{C}}$ dada por polinômios $F_0, \dots, F_r \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_M]$ e $Y \subset X$ um fechado irredutível dado por polinômios $H_0, \dots, H_k \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_M]$. Seja Z uma componente irredutível de X contendo Y e suponha que esteja dada por polinômios G_0, \dots, G_l . Denote por R a \mathbb{Z} -álgebra finitamente gerada obtida por adjunção de todos os coeficientes que ocorrem nos polinômios $F_0, \dots, F_r, G_0, \dots, G_l, H_0, \dots, H_k$.

Componentes irredutíveis e redução módulo p

Sejam X uma variedade projetiva em $\mathbb{P}^M_{\mathbb{C}}$ dada por polinômios $F_0, \dots, F_r \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_M]$ e $Y \subset X$ um fechado irredutível dado por polinômios $H_0, \dots, H_k \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_M]$. Seja Z uma componente irredutível de X contendo Y e suponha que esteja dada por polinômios G_0, \dots, G_l . Denote por R a \mathbb{Z} -álgebra finitamente gerada obtida por adjunção de todos os coeficientes que ocorrem nos polinômios $F_0, \dots, F_r, G_0, \dots, G_l, H_0, \dots, H_k$.

Corolário

Suponha que exista um conjunto denso S de $\text{Spm}(R)$ tal que $Y_{\mathfrak{p}} = Z_{\mathfrak{p}}$ para todo ideal $\mathfrak{p} \in S$. Então, $Y = Z$ e assim Y é uma componente irredutível de X .

Novas componentes irredutíveis de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$

Considere o mapa racional

$$\begin{aligned} \Psi_{(d;d_1,d_2)} : \text{Map}_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3, \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1) \times \text{Fol}_{(d_1,d_2)}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1) &\dashrightarrow \text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3) \\ (\Phi, \mathcal{G}) &\mapsto \Phi^* \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Novas componentes irredutíveis de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$

Considere o mapa racional

$$\begin{aligned} \Psi_{(d;d_1,d_2)} : \text{Map}_1(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}, \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \times \text{Fol}_{(d_1,d_2)}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) &\dashrightarrow \text{Fol}_d(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}) \\ (\Phi, \mathcal{G}) &\mapsto \Phi^* \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Teorema A

Seja $C_{(d;d_1,d_2)}$ o fecho de Zariski da imagem $\Psi_{(d;d_1,d_2)}$. Então, $C_{(d;d_1,d_2)}$ é uma componente irredutível de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$.

Demonstração do Teorema A

Sabemos que o enunciado análogo sobre característica $p > d + 2$ é verdadeiro.

Demonstração do Teorema A

Sabemos que o enunciado análogo sobre característica $p > d + 2$ é verdadeiro. Sejam Z uma componente irredutível de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$ contendo $C_{(d;d_1,d_2)}$ e $\{E_0, \dots, E_h\}$ a união da coleção de polinômios a coeficientes em \mathbb{C} que descrevem as variedades: $Z, C_{(d;d_1,d_2)}$ e $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$.

Demonstração do Teorema A

Sabemos que o enunciado análogo sobre característica $p > d + 2$ é verdadeiro. Sejam Z uma componente irredutível de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$ contendo $C_{(d;d_1,d_2)}$ e $\{E_0, \dots, E_h\}$ a união da coleção de polinômios a coeficientes em \mathbb{C} que descrevem as variedades: $Z, C_{(d;d_1,d_2)}$ e $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$. Seja R a \mathbb{Z} -álgebra obtida por adjunção de todos os coeficientes que ocorrem em E_0, \dots, E_h e T o conjunto fechado em $\mathbf{Spm}(R)$ dado por $\cup_{j=2}^{d+2} V(jR) \subset \mathbf{Spm}(R)$. O Teorema B (componente em característica positiva) garante que para todo ideal maximal $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spm}(R) - T$ temos que $C_{(d;d_1,d_2),\mathfrak{p}} = Z_{\mathfrak{p}}$.

Demonstração do Teorema A

Sabemos que o enunciado análogo sobre característica $p > d + 2$ é verdadeiro. Sejam Z uma componente irredutível de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$ contendo $C_{(d;d_1,d_2)}$ e $\{E_0, \dots, E_h\}$ a união da coleção de polinômios a coeficientes em \mathbb{C} que descrevem as variedades: $Z, C_{(d;d_1,d_2)}$ e $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$. Seja R a \mathbb{Z} -álgebra obtida por adjunção de todos os coeficientes que ocorrem em E_0, \dots, E_h e T o conjunto fechado em $\mathbf{Spm}(R)$ dado por $\cup_{j=2}^{d+2} V(jR) \subset \mathbf{Spm}(R)$. O Teorema B (componente em característica positiva) garante que para todo ideal maximal $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spm}(R) - T$ temos que $C_{(d;d_1,d_2),\mathfrak{p}} = Z_{\mathfrak{p}}$. Pelo corolário anterior temos que $Z = C_{(d;d_1,d_2)}$ é uma componente irredutível de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$, o que encerra a demonstração.

Demonstração do Teorema A

Sabemos que o enunciado análogo sobre característica $p > d + 2$ é verdadeiro. Sejam Z uma componente irredutível de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$ contendo $C_{(d;d_1,d_2)}$ e $\{E_0, \dots, E_h\}$ a união da coleção de polinômios a coeficientes em \mathbb{C} que descrevem as variedades: $Z, C_{(d;d_1,d_2)}$ e $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$. Seja R a \mathbb{Z} -álgebra obtida por adjunção de todos os coeficientes que ocorrem em E_0, \dots, E_h e T o conjunto fechado em $\mathbf{Spm}(R)$ dado por $\cup_{j=2}^{d+2} V(jR) \subset \mathbf{Spm}(R)$. O Teorema B (componente em característica positiva) garante que para todo ideal maximal $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spm}(R) - T$ temos que $C_{(d;d_1,d_2),\mathfrak{p}} = Z_{\mathfrak{p}}$. Pelo corolário anterior temos que $Z = C_{(d;d_1,d_2)}$ é uma componente irredutível de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$, o que encerra a demonstração.

Corolário

O espaço de folheações holomorfas de codimensão um e grau d em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ possui pelo menos $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ componentes irredutíveis distintas com elemento genérico não admitindo um fator de integração polinomial.



Obrigado :)