

## محاسبات عددی

زمان: ۱۲۰ دقیقه

آزمون پایان ترم

نیم سال دوم ۱۳۹۹-۱۴۰۰

**سؤال ۱: (۰.۷۵ نمره)** نشان دهید که در تفاضل دو عدد نزدیک به هم، انتشار خطای عمل تفریق بسیار زیاد است. سپس رابطه‌ی زیر را برای  $x$  های منفی بزرگ طوری اصلاح کنید که باعث جلوگیری از فرایند خطای محاسباتی گردد.

$$y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

**سؤال ۲: (۰.۷۵ نمره)** ثابت کنید دنباله‌ی  $x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - 1}{2(x_n - 1)}$  که برای محاسبه‌ی ریشه‌های تقریبی معادله‌ی  $2x^2 - 4x + 1 = 0$  به کار می‌رود دارای مرتبه همگرایی حداقل دو است.

**سؤال ۳: (۰.۷۵ نمره)** هرگاه تابع  $f$  را در نقاط  $a, a+h$  و  $a+2h$  درونیابی کنیم، نشان دهید:

$$f''(x) \simeq \frac{1}{h^2} (f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)), \quad x \in [a, a+2h]$$

**سؤال ۴: (۱.۵ نمره)** تابع جدولی زیر را برای تابع  $y = f(x)$  در نظر بگیرید:

$x_i$	-۱	۰	۱	۲
$y_i$	۱	۰/۵	۰/۲۵	۰/۲۵

الف) بهترین برازش منحنی  $h(x) = \frac{1}{Ax+B}$  را به روش کمترین مربعات برای تابع جدولی فوق بیابید.  
 ب) با استفاده از روش ذوزنقه‌ای تقریبی از  $\int_{-1}^2 \frac{dx}{f(x)}$  بیابید و آن را  $I$  بنامید.  
 ج) اگر در محاسبه‌ی انتگرال  $\int_{-1}^2 \frac{dx}{f(x)}$  به جای  $f(x)$  از  $h(x)$  استفاده شود، اختلاف جواب حاصل را با  $I$  بیابید.

**سؤال ۵: (۰.۵ نمره)** در صورتی که بخواهیم خطای محاسبه‌ی انتگرال  $I = \int_0^\pi \sin x dx$  به روش ذوزنقه‌ای یا سیمپسون  $\frac{1}{3}$  کم‌تر از  $10^{-5} \times 2$  باشد، کدام روش مناسب‌تر است؟ چرا؟

**سؤال ۶: (۰.۵ نمره)** نشان دهید روش اویلر برای معادله‌ی دیفرانسیل  $y' = \lambda y$  برای  $\lambda < 0$  با مقدار اولیه‌ی  $y(0) = 1$  برای طول گام  $0 < \lambda h < 2$  پایدار است (پایداری به این معنی است که  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ ).

**سؤال ۷: (۱ نمره)** با استفاده از روش رانگ کوتای مرتبه دوم، معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید و مقدار  $y(0.5)$  را با طول گام  $h = 0.25$  به دست آورید.

$$\begin{cases} y' - 2xy = x^2 + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

سؤال ۸: (۱.۲۵ نمره) ماتریس  $A = \begin{bmatrix} ۴ & -۲ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۴ \\ -۱ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$  را در نظر بگیرید. با روش تجزیه  $LU$  جواب

دستگاه  $AX = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۵ & ۵ \\ ۴ & -۴ \end{bmatrix}$  که  $X \in \mathbf{R}^{۳ \times ۲}$  را محاسبه کنید.