

سؤال ۱: (۱ نمره) می‌دانیم طول بردار (x, y, z) برابر $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ است. اگر داشته باشیم:

$$x = -1 \pm e, \quad y = 1 \pm e, \quad z = 2 \pm e$$

که در آن e خطای مقادیر x, y و z می‌باشد. اگر بخواهیم خطای محاسبه‌ی r کم‌تر از ۱ باشد، مقدار e حداکثر چقدر می‌تواند باشد؟

سؤال ۲: (۰.۵ نمره) اگر رابطه‌ی بین خطا در تکرار $(n+1)$ ام و n ام به صورت زیر باشد:

$$e_{n+1} = \lambda e_n, \quad 0 < \lambda < 1$$

حداقل مقدار n برای اینکه $|e_n| \leq 10^{-m}|e_0|$ برقرار باشد، چقدر است؟ (n را بر حسب m و λ به دست آورید)

سؤال ۳: (۱.۲۵ نمره) فرض کنید تابع f بر $[0, 1]$ مشتق‌پذیر باشد و $f(0) < 0 < f(1)$ ، همچنین به

ازای هر $x \in [0, 1]$ داشته باشیم: $0 \leq a < f'(x) \leq b$ که در آن a و b اعداد ثابتی هستند. نشان دهید عدد ثابتی مانند M وجود دارد به طوری که روش تکراری

$$x_0 \in [0, 1], \quad x_{n+1} = x_n + Mf(x_n); \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

به جواب معادله‌ی $f(x) = 0$ همگراست.

سؤال ۴: (۰.۵ نمره) با استفاده از فرمول تکرار روش نیوتن، یک رابطه‌ی تکراری برای محاسبه‌ی معکوس

عدد غیرصفر a به دست آورید.

سؤال ۵: (۱ نمره) (الف) روش‌های درونیایی لاگرانژ و نیوتن را مقایسه کنید.

(ب) چندجمله‌اب درونیاب تابع جدولی زیر را به دست آورید. سپس نقطه‌ی $(4, 63)$ را به جدول اضافه کرده و چندجمله‌ای درونیاب را مجدداً به دست آورید.

x_i	-۱	۱	۲	۳
$f(x_i)$	-۲	۰	۷	۲۶

سؤال ۶: (۰.۷۵ نمره) فرض کنید $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$ و $x \in [0, 1]$ و $i = 0, 1, \dots, n$ و $x_i = \frac{i}{n}$. اگر

$P(x)$ چندجمله‌ای درونیاب $f(x)$ در نقاط x تا x_n باشد، ثابت کنید به ازای هر x از $[0, 1]$ داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x)$$