محاسبات عددی

نیم‌سال دوم ۹۹

مدرس: دکتر فاطمه بهاری‌فرد

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

پاسخنامه تمرین سری سوم | فصل سوم | تاریخ تحویل: ۱۴۰۰/۲/۷

۱. تابع $f(x) = ln(x+1)$ ، $x_0 = 1$ و $x_1 = 1/1$ مفروض میباشند. با استفاده از درونیابی خطی مقدار مناسب $f(1/04)$ را محاسبه و حد بالای خطای آن را نیز بیان نمایید.
حل:

$$x_0 = 1 \rightarrow y_0 = \ln 2 = 0.693$$
$$x_1 = 1.1 \rightarrow y_1 = \ln 2.1 = 0.742$$
$$\rightarrow y - y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0) \rightarrow y - 0.693 = 0.49(x-1) \xrightarrow{x=1.04} f(1.04) = 0.713$$
$$f(x) = \ln(1+x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x} \rightarrow f''(x) = -(x+1)^{-2} \rightarrow |f''(x)| < 0.25$$
$$|e| < \left|\frac{(x-1)(x-1.1)}{2!}0.25\right| = 0.0003$$

۲. یک منطقه کشاورزی را در نظر بگیرد. هدف محاسبه ی میزان عمق چاه مورد نیاز برای رسیدن به آب این منطقه است. ۵ چاه از قبل کنده شده و اطلاعات آن در جدول زیر آمده است. ستون اول اطلاعات مربوط به فاصله ی آنها از مبدا مشخص و ستون دوم عمق چاه در آن منطقه را نشان می دهد. با روش های زیر مسئله را برای یافتن عمق سایر چاه ها حل کنید.

الف) روش لاگرانژ

ب) روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن

ج) روش پیشروی نیوتن

د) روش پسروی نیوتون

ه) روش مرکزی پیشروی نیوتن

ز) روش مرکزی پسروی نیوتن

x	۱	۱/۳	۱/۶	۱/۹	۲/۲
y	۷۶	۶۲	۴۵	۲۸	۱۱

حل: الف)

$$l_{\cdot}(x) = \frac{(x - ۱/۳)(x - ۱/۶)(x - ۱/۹)(x - ۲/۲)}{(۱ - ۱/۳)(۱ - ۱/۶)(۱ - ۱/۹)(۱ - ۲/۲)}$$

$$l_{۱}(x) = \frac{(x - ۱)(x - ۱/۶)(x - ۱/۹)(x - ۲/۲)}{(۱/۳ - ۱)(۱/۳ - ۱/۶)(۱/۳ - ۱/۹)(۱/۳ - ۲/۲)}$$

$$l_{۲}(x) = \frac{(x - ۱)(x - ۱/۳)(x - ۱/۹)(x - ۲/۲)}{(۱/۶ - ۱)(۱/۶ - ۱/۳)(۱/۶ - ۱/۹)(۱/۶ - ۲/۲)}$$

$$l_{۳}(x) = \frac{(x - ۱)(x - ۱/۳)(x - ۱/۶)(x - ۲/۲)}{(۱/۹ - ۱)(۱/۹ - ۱/۳)(۱/۹ - ۱/۶)(۱/۹ - ۲/۲)}$$

$$l_{۴}(x) = \frac{(x - ۱)(x - ۱/۳)(x - ۱/۶)(x - ۱/۹)}{(۲/۲ - ۱)(۲/۲ - ۱/۳)(۲/۲ - ۱/۶)(۲/۲ - ۱/۹)}$$

پس چند جمله ای برابر می شود با:

$$P_{۴}(x) = ۷۶l_{\cdot}(x) + ۶۲l_{۱}(x) + ۴۵l_{۲}(x) + ۲۸l_{۳}(x) + ۱۱l_{۴}(x)$$

$$\boxed{P_{۴}(x) = -\frac{۱۲۵۰}{۸۱}x^{۴} + \frac{۸۷۵۰}{۸۱}x^{۳} - \frac{۱۵۱۲۵}{۵۴}x^{۲} + \frac{۴۲۴۴۵}{۱۶۲}x + \frac{۱۲۱}{۸۱}}$$

ب)

order ۴th	order ۳rd	order ۲nd	order ۱st	$f(x_i)$	x_i
				$\boxed{۷۶}$	۱
			$\boxed{۶۶۶۷.۴۶\_}$	۶۲	۱/۳
		$\boxed{۶۶۶۷.۱۶\_}$	$-۵۶/۶۶۶۷$	۴۵	۱/۶
	$\boxed{۵۱۸۹.۱۸}$	۰	$-۵۶/۶۶۶۷$	۲۸	۱/۹
$\boxed{۴۳۲۴.۱۵\_}$	۰	۰	$-۵۶/۶۶۶۷$	۱۱	۲/۲

پس چند جمله ای برابر می شود با:

$$P_{۴}(x) = ۷۶ - ۴۶/۶۶۶۷(x - ۱) - ۱۶/۶۶۶۷(x - ۱)(x - ۱/۳) + ۱۸/۵۱۸۹(x - ۱)(x - ۱/۳)(x - ۱/۶)$$
$$- ۱۵/۴۳۲۴(x - ۱)(x - ۱/۳)(x - ۱/۶)(x - ۱/۹)$$
$$\boxed{P_{۴}(x) = -۱۵/۴۳۲۴x^{۴} + ۱۰۸/۰۲۶۸x^{۳} - ۲۸۰/۰۹۷۸x^{۲} + ۲۶۲/۰۱۱۶x + ۱/۴۹۱۸}$$

ج)

x_i	$f(x_i)$	$۱^{st} order$	$۲^{nd} order$	$۳^{rd} order$	$۴^{th} order$
۱	۷۶				
۱/۳	۶۲	-۱۴			
۱/۶	۴۵	-۱۷	-۳		
۱/۹	۲۸	-۱۷	۰	۳	
۲/۲	۱۱	-۱۷	۰	۰	-۳

$$h = ۰/۳ \quad \rightarrow \quad x_۰ = ۱ \quad \rightarrow \quad r = \frac{x - ۱}{۰/۳}$$

$$P_۴(x) = ۷۶ - ۱۴(\frac{x-۱}{۰/۳}) - (\frac{۳}{۲!})(\frac{x-۱}{۰/۳})(\frac{x-۱}{۰/۳} - ۱) + (\frac{۳}{۳!})(\frac{x-۱}{۰/۳})(\frac{x-۱}{۰/۳} - ۱)(\frac{x-۱}{۰/۳} - ۲)$$

$$-(\frac{۳}{۴!})(\frac{x-۱}{۰/۳})(\frac{x-۱}{۰/۳} - ۱)(\frac{x-۱}{۰/۳} - ۲)(\frac{x-۱}{۰/۳} - ۳)$$

$$\boxed{P_۴(x) = -\frac{۱۲۵۰۰}{۸۱}x^۴ + \frac{۸۷۵۰۰}{۸۱}x^۳ - \frac{۱۵۱۲۵}{۵۴}x^۲ + \frac{۴۲۴۴۵}{۱۶۲}x + \frac{۱۲۱}{۸۱}}$$

د)

$$h = ۰/۳ \quad \rightarrow \quad x_n = ۲/۲ \quad \rightarrow \quad r = \frac{x - ۲/۲}{۰/۳}$$

$$\boxed{P_۴(x) = -\frac{۱۲۵۰۰}{۸۱}x^۴ + \frac{۸۷۵۰۰}{۸۱}x^۳ - \frac{۱۵۱۲۵}{۵۴}x^۲ + \frac{۴۲۴۴۵}{۱۶۲}x + \frac{۱۲۱}{۸۱}}$$

ه)

$$h = ۰/۳ \quad \rightarrow \quad x_{\frac{n}{۲}} = ۱/۶ \quad \rightarrow \quad r = \frac{x - ۱/۶}{۰/۳}$$

$$\boxed{P_۴(x) = -\frac{۱۲۵۰۰}{۸۱}x^۴ + \frac{۸۷۵۰۰}{۸۱}x^۳ - \frac{۱۵۱۲۵}{۵۴}x^۲ + \frac{۴۲۴۴۵}{۱۶۲}x + \frac{۱۲۱}{۸۱}}$$

و)

$$h = ۰/۳ \quad \rightarrow \quad x_{\frac{n}{۲}} = ۱/۶ \quad \rightarrow \quad r = \frac{x - ۱/۶}{۰/۳}$$

$$\boxed{P_۴(x) = -\frac{۱۲۵۰}{۸۱}x^۴ + \frac{۸۷۵۰}{۸۱}x^۳ - \frac{۱۵۱۲۵}{۵۴}x^۲ + \frac{۴۲۴۴۵}{۱۶۲}x + \frac{۱۲۱}{۸۱}}$$

۳. در مسئله قبل میخواهیم چاه های دیگر در فاصله $x = ۰/۲$ و $x = ۱/۵$ از مبدا حفر کنیم :

الف) برای هر یک از این فاصله ها استفاده از کدام یک روش ها ی (الف) تا (و) مناسب تر است؟ دلیل خود را توضیح داده و مقدار تابع را در نقاط خواسته شده تخمین بزنید.

ب) میزان خطای تابع تخمین زده شده به ازای $x = ۰/۲$ بیشتر است یا $x = ۱/۵$ ؟ چرا؟

ج) فرض کنید نقطه $x = ۳$ و $y = ۲۰$ را به جدول اضافه کنیم. از بین روش های لاگرانژ و تفاضلات تقسیم شده نیوتن کدام برای تخمین تابع در $x = ۱/۵$ مناسب تر است؟ چرا؟ با روش انتخابی خود تابع را در $x = ۱/۵$ تخمین بزنید.

حل:

الف) ما فرض می کنیم که ما نمی‌خواهیم از اصطلاحات الگوریتمی ساده در این قسمت استفاده کنیم. برای x = ۲.۰ استفاده از روش پسروي نیوتن مناسب‌تر است زیرا از x. استفاده می کند که نزدیک‌ترین به ۲.۰ است و باعث خطای کوچکی می شود از سوی دیگر، بهترین استفاده از روش مرکزي نیوتن برای x=۱.۵ است زیرا به $x_f racn$۲ نزدیک تر است. از آنجایی که $x_f racn۲ > x$ پس استفاده از روش مرکزي پسروي نیوتن دقیق تر است.

ب) محاسبه ی x=۲ از نوع برون یابی می باشد حال آنکه محاسبه ی x=۰.۵ از نوع درون یابی می باشد. نحوه ی محاسبه ی هر دو یکی می باشد. احتمالا جواب برای موارد درون یابی دقیق تر خواهد بود. تفاوت در مراحل محاسبه می باشد. در محاسبه ما از یکی از عبارات $\frac{x-x_۰}{h}$ یا $\frac{x-x_n}{h}$ یا $\frac{x-x_{\frac{n}{۲}}}{h}$ استفاده می‌کنیم. این عبارات در اعداد دیگر ضرب می شوند در نتیجه انتخاب عبارت با مقدار کوچک‌تر خطای کمتری را باعث می شود.

ج) در روش لاگرانژ اضافه کردن یک نقطه ی جدید نیازمند محاسبه ی کامل تمام مراحل می باشد:

$$
\begin{cases}
l_۰(x) = \dfrac{(x-۱/۳)(x-۱/۶)(x-۱/۹)(x-۲/۲)(x-۳)}{(۱-۱/۳)(۱-۱/۶)(۱-۱/۹)(۱-۲/۲)(۱-۳)} \\[2ex]
l_۱(x) = \dfrac{(x-۱)(x-۱/۶)(x-۱/۹)(x-۲/۲)(x-۳)}{(۱/۳-۱)(۱/۳-۱/۶)(۱/۳-۱/۹)(۱/۳-۲/۲)(۱/۳-۳)} \\[2ex]
l_۲(x) = \dfrac{(x-۱)(x-۱/۳)(x-۱/۹)(x-۲/۲)(x-۳)}{(۱/۶-۱)(۱/۶-۱/۳)(۱/۶-۱/۹)(۱/۶-۲/۲)(۱/۶-۳)} \\[2ex]
l_۳(x) = \dfrac{(x-۱)(x-۱/۳)(x-۱/۶)(x-۲/۲)(x-۳)}{(۱/۹-۱)(۱/۹-۱/۳)(۱/۹-۱/۶)(۱/۹-۲/۲)(۱/۹-۳)} \\[2ex]
l_۴(x) = \dfrac{(x-۱)(x-۱/۳)(x-۱/۶)(x-۱/۹)(x-۳)}{(۲/۲-۱)(۲/۲-۱/۳)(۲/۲-۱/۶)(۲/۲-۱/۹)(۲/۲-۳)} \\[2ex]
l_۵(x) = \dfrac{(x-۱)(x-۱/۳)(x-۱/۶)(x-۱/۹)(x-۲/۲)}{(۳-۱)(۳-۱/۳)(۳-۱/۶)(۳-۱/۹)(۳-۲/۲)}
\end{cases}
\Longrightarrow
\begin{cases}
l_۰(۱/۵) = -۰/۰۲۱۶ \\
l_۱(۱/۵) = ۰/۲۵۴۲ \\
l_۲(۱/۵) = ۰/۹۲۵۹ \\
l_۳(۱/۵) = -۰/۱۹۶۴ \\
l_۴(۱/۵) = ۰/۰۳۸۶ \\
l_۵(۱/۵) = -۰/۰۰۰۷
\end{cases}
$$

$$\boxed{P_۵(۱/۵) = ۵۰/۶۹۵۲}$$

اما در روش نیوتون نیازی به محاسبات بیشتر نیست:

x_i	$f(x_i)$	$۱^{st} order$	$۲^{nd} order$	$۳^{rd} order$	$۴^{th} order$	$۵^{th} order$
۱	$\boxed{۷۶}$					
۱/۳	۶۲	$\boxed{-۴۶/۶۶۶۷}$				
۱/۶	۴۵	$-۵۶/۶۶۶۷$	$\boxed{-۱۶/۶۶۶۷}$			
۱/۹	۲۸	$-۵۶/۶۶۶۷$	۰	$\boxed{۱۸/۵۱۸۵}$		
۲/۲	۱۱	$-۵۶/۶۶۶۷$	۰	۰	$\boxed{-۱۵/۴۳۲۱}$	
۳	۲۰	۱۱/۲۵	۶۱/۷۴۲۵	۴۴/۱۰۱۸	۲۵/۹۴۲۲	$\boxed{۲۰/۶۸۷۱}$

$$\boxed{P_۵(۱/۵) = ۵۰/۶۹۵۱}$$

کاملا واضح است که روش تفاضلات نیوتون برای زمان اضافه شدن نقاط جدید مناسب تر می باشد زیرا نیازی به محاسبه ی از اول نمی باشد.

۴. حداکثر درجه چند جمله ای گذرانده از نقاط (۲۲ و ۴) ، (۱۴و۳) ، (۸ و ۲) ، (۴ و ۱) ، (۲و۰) چند میباشد؟

حل:

با توجه متساوی الفاصله بودن نقاط، جدول تفاضلات برای نقاط داده شده به فرم زیر میباشد:

		تفاضلات مرتبه			
x_i	f_i	اول	دوم	سوم	چهارم
۰	۲				
		۲			
۱	۴		۲		
		۴		۰	
۲	۸		۲		۰
		۶		۰	
۳	۱۴		۲		
		۸			
۴	۲۲				

با توجه به صفر بودن تفاضلات از مرتبه سوم به بعد، حداکثر درجه برابر با ۲ میباشد.

۵. با استفاده از روش خطی سازی بهترین تابع نمایی $y = ae^{bx}$ را برای نقاط زیر پیدا کنید.

x	۱	۲	۴	۸
y	۱/۴۳۳۵	۱/۴۲۳	۲/۲۸۹	۵/۸۳۷

پاسخ در صفحه بعد

حل) با گرفتن لوگاریتم از طرفین به رابطه ی زیر می رسیم.

$$Y = ln(y) = bx + ln(a) = bx + c$$

بنابراین کافی ست که خطی را به داده ی زیر برازش کنیم.

x	۱	۲	۴	۸
$ln(y) = Y$	۰/۳۶۰۱	۰/۳۵۲۸	۰/۸۲۸۱	۱/۷۶۴۲

برای بدست آوردن این خط از جدول زیر استفاده می کنیم.

x	Y	$x^{۲}$	xY
۱	۰/۳۶۰۱	۱	۰/۳۶۰۱
۲	۰/۳۵۲۸	۴	۰/۷۰۵۶
۴	۰/۸۲۸۱	۱۶	۳/۳۱۲۴
۸	۱/۷۶۴۲	۶۴	۱۴/۱۱۳۶

$$\Sigma Y = ۴c + b\Sigma x$$

$$\Sigma xY = c\Sigma x + b\Sigma x^{۲}$$

جمع مقادیر جدول را جاگذاری می کنیم:

$$۳/۳۰۵۲ = ۴c + ۱۵b$$

$$۱۸/۴۹۱۷ = ۱۵c + ۸۵b$$

با حل این معادله مقادیر زیر بدست می آید و مساله حل می شود:

$$b = ۰/۲۱۲۰۸, c = ۰/۰۳۱۰۱۳$$

$$c = ln(a) -> a = ۱/۰۳۱۴۹۸۹۱۳$$

$$y = ۱/۰۳۱۴۹۸۹۱۳e^{۰/۲۱۲۰۸x}$$

۶. هر گاه $x_۰, x_۱, ..., x_n$ نقاط درونیابی و $f_۰, f_۱, ..., f_n$ مقادیر تابع $f(x)$ در این نقاط باشند، نشان دهید یک و تنها یک چند جمله ای $P(x)$ از درجه n وجود دارد به طوری که :

$$P(x_i) = f_i \qquad i = ۰, ۱, ..., n$$

حل:

در ابتدا فرض می‌کنیم که دو تابع چندجمله‌ای $P(x)$ و $Q(x)$ حداکثر از درجه‌ی n هستند و داریم:

$$P(x_i) = Q(x_i) = f(x_i);\ i = 0, 1, \dots, n$$

حال $h(x)$ را برابر $P(x) - Q(x)$ در نظر می‌گیریم. واضح است که $h(x)$ نیز حداکثر از درجه‌ی n است و داریم:

$$h(x_i) = P(x_i) - Q(x_i) = 0;\ i = 0, 1, \dots, n$$

پس x_i ها ریشه‌های چندجمله‌ای $h(x)$ می‌باشند لذا این چندجمله‌ایِ حداکثر از درجه‌ی n دارای $n+1$ ریشه است که غیر ممکن می‌باشد پس داریم:

$$h(x) = 0 \rightarrow P(x) - Q(x) = 0 \rightarrow P(x) = Q(x) \rightarrow f(x)\ \textit{is unique} \therefore$$

برای اثبات وجود این چندجمله‌ای درونیاب نیز این چنین عمل می‌کنیم:

$$P(x_i) = f(x_i) = a_0 + a_1.x_i + a_2.x_i^2 + \cdots + a_n.x_i^n$$
$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} \neq 0$$

ثابت می‌شود دترمینان بالا که به دترمینان واندرموند معروف است مخالف صفر است و ضرایب مورد نظر وجود دارند و چندجمله‌ای درونیاب برای این تابع در این نقاط موجود است.