بسمه تعالی

پاسخنامه تمرین پنجم

سوال ۱ :

برای حل این سوال ابتدا معادله مشتق دوم را از روی مشتق اول بدست می‌آوریم :

$$y' = 4e^{0.8t} - 0.5y$$
$$y'' = 3.2e^{0.8t} - 0.5y' = 3.2e^{0.8t} - 0.5(4e^{0.8t} - 0.5y) = 1.2e^{0.8t} + 0.25y$$

حال با کمک بسط تیلور تا سه جمله و روش Modified Euler مقادیر لازم را بدست می‌آوریم.

Taylor’s Method : $$y_{i+1} = y_i + hy_i' + \frac{h^2}{2!}y_i''$$

Predictor : $$y_{i+1}'{}^* = f(x_{i+1}, y_{i+1}{}^*)$$

Corrector : $$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(y_i' + y_{i+1}'{}^*)$$

حال مقادیر را با توجه به مقدار اولیه $y(0) = 2$ بدست می‌آوریم :

$$\begin{cases} y_0 = 2 \\ y_0' = 4e^0 - 0.5 \times 2 = 4 - 1 = 3 \\ y_0'' = 1.2e^0 + 0.25 \times 2 = 1.2 + 0.5 = 1.7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1^* = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2}y_0'' = 2 + 1 \times 3 + 0.5 \times 1.7 = 5.85 \\ y_1'^* = f\left(x_1, y_1^*\right) = 4e^{0.8\times1} - 0.5 \times 5.85 = 5.977 \\ y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(y_0' + y_1'^*\right) = 2 + 0.5 \times (3 + 5.977) = 6.4885 \\ y_1' = 4e^{0.8\times1} - 0.5 \times 6.4885 = 5.6579 \\ y_1'' = 1.2e^{0.8\times1} + 0.25 \times 6.4885 = 4.2927 \end{cases}$$

مقدار بدست آمده :	6.4885
مقدار واقعی :	6.19463
خطا :	0.29387

$$\begin{cases} y_2^* = y_1 + hy_1' + \frac{h^2}{2}y_1'' = 6.4885 + 1 \times 5.6579 + 0.5 \times 4.2927 = 14.29275 \\ y_2'^* = f\left(x_2, y_2^*\right) = 4e^{0.8\times 2} - 0.5 \times 14.29275 = 12.665755 \\ y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\left(y_1' + y_2'^*\right) = 6.4885 + 0.5 \times (5.6579 + 12.665755) = 15.650328 \\ y_2' = 4e^{0.8\times 2} - 0.5 \times 15.650328 = 11.986966 \\ y_2'' = 1.2e^{0.8\times 2} + 0.25 \times 15.650328 = 9.856221 \end{cases}$$

مقدار بدست آمده : 15.650328

مقدار واقعی : 14.84392

خطا : 0.806408

$$\begin{cases} y_3^* = y_2 + hy_2' + \frac{h^2}{2}y_2'' = 15.650328 + 1 \times 11.986966 + 0.5 \times 9.856221 = 32.565404 \\ y_3'^* = f\left(x_3, y_3^*\right) = 4e^{0.8\times 3} - 0.5 \times 32.565404 = 27.81 \\ y_3 = y_2 + \frac{h}{2}\left(y_2' + y_3'^*\right) = 15.650328 + 0.5 \times (11.986966 + 27.81) = 35.548811 \\ y_3' = 4e^{0.8\times 3} - 0.5 \times 35.548811 = 26.3183 \\ y_3'' = 1.2e^{0.8\times 3} + 0.25 \times 35.548811 = 22.115014 \end{cases}$$

مقدار بدست آمده : 35.548811

مقدار واقعی : 33.67717

خطا : 1.871641

$$\begin{cases} y_4^* = y_3 + hy_3' + \frac{h^2}{2}y_3'' = 35.548811 + 1 \times 26.3183 + 0.5 \times 22.115014 = 72.924618 \\ y_4'^* = f\left(x_4, y_4^*\right) = 4e^{0.8\times 4} - 0.5 \times 72.9246184 = 61.667812 \\ y_4 = y_3 + \frac{h}{2}\left(y_3' + y_4'^*\right) = 35.548811 + 0.5 \times (26.3183 + 61.667812) = 79.541867 \end{cases}$$

مقدار بدست آمده : 79.541867

مقدار واقعی : 75.33896

خطا : 4.202907

همان‌طور که مشاهده می‌شود مقدار خطا در هیچ یک از گام‌ها از ۰.۰۰۵ کمتر نمی‌باشد. نکته‌ای که در این مسئله قابل توجه است این است که لزوما مرتبه بالاتر برای خطا منجر به جواب‌های دقیق‌تر نمی‌شوند. در اینجا با استفاده از تیلور مرتبه سه،

مرتبه خطا را به $O(h^3)$ رسانده بودیم اما از آنجایی که مقدار h مقدار بالایی بود، به توان ۳ رساندن آن باعث بیشتر شدن خطا شد.

سوال۲ :

در حل معادله داده شده به روش رانگه‌کوتای مرتبه چهارم، بعد از n مرحله $5n$ محاسبه انجام داده‌ایم، چرا که در هر مرحله لازم است مقادیر k_1, k_2, k_3, k_4 و نهایتا y_{i+1} را بدست آوریم.

این در حالی است که در هنگام استفاده از روش آدامز-بشفورث (مرتبه ۴) با پایه رانگه کوتا، در نهایت به تعداد معادله $n + 12$ خواهیم رسید. در سه مرحله ابتدایی لازم است مقادیر y_1, y_2 و y_3 را بدست آوریم که برای این سه مرحله نیاز به $3 \times 5 = 15$ عملیات خواهیم داشت. در $n - 3$ مرحله باقیمانده، چون در مراحل پیشن مقادیر f_i, f_{i-1}, f_{i-2} و f_{i-3} آماده شده‌اند، محاسبه این مقادیر از اول لازم نخواهد بود و تنها کافیست مقدار y_{i+1} را بدست آوریم. بنابراین در نهایت تعداد تمامی عملیات برابر خواهد بود با : $(n - 3) \times 1 + 5 \times 3 = n + 12$

سوال۳ :

اگر مقدار u را برابر y' در نظر بگیریم، مقدار u' برابر y'' خواهد بود و خواهیم داشت :

$$x^2u' - 2xu + 2y = 0$$

بنابراین دستگاه معادلات را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد :

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = \frac{2}{x}u - \frac{2}{x^2}y \end{cases}$$

حال برای استفاده از روش اویلر، از مقادیر اولیه $(x_0, y_0) = (1{,}4)$ و $(x_0, u_0) = (1{,}9)$ استفاده می‌کنیم و داریم :

$$\begin{aligned} y_{n+1} = y_1 = y_n + hu_n \\ = y_0 + hu_0 \\ = 4 + 0.1 \times 9 \\ = 4.9 \end{aligned}$$

همچنین :

$$
\begin{aligned}
u_1 &= u_0 + h\left[\frac{2}{x_0}u_0 - \frac{2}{x_0^2}y_0\right] \\
&= 9 + 0.1\left[\frac{2}{1}\times 9 - \frac{2}{1}\times 4\right] \\
&= 9 + 0.1\times 10 \\
&= 10
\end{aligned}
$$

حال که مقدار u_1 را بدست آورده‌ایم می‌توانیم y_2 را بیابیم :

$$
\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + hu_1 \\
&= 4.9 + 0.1\times 10 \\
&= 4.9 + 1 \\
&= 5.9
\end{aligned}
$$

سوال ٤ :

ابتدا روابط روش رانگه-کوتا را می‌نویسیم :

$$
\begin{cases}
k_1 = hf(x_i, y_i) \\
k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \\
k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right) \\
k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3) \\
y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{cases}
$$

و در این سوال داریم :

$$
\begin{cases}
p' = 0.017p \\
p(1950) = 2555
\end{cases}
$$

برای سال ١٩٥٥ :

$$
\begin{cases}
k_1 = h\times 0.017p = 5\times 0.017\times 2555 = 217.175 \\
k_2 = h\times 0.017\left(p + \frac{k_1}{2}\right) = 5\times 0.017\times\left(2555 + \frac{217.175}{2}\right) = 226.404938 \\
k_3 = h\times 0.017\left(p + \frac{k_2}{2}\right) = 5\times 0.017\times\left(2555 + \frac{226.404938}{2}\right) = 226.79721 \\
k_4 = h\times 0.017(p + k_3) = 5\times 0.017\times(2555 + 226.79721) = 236.452763 \\
y_1 = 2555 + \frac{1}{6}(217.175 + 2\times 226.404938 + 2\times 226.79721 + 236.452763) = 2781.67201
\end{cases}
$$

و خطای نسبی آن برابر است با :

$$\delta(\bar{x}) = \frac{e(\bar{x})}{|x|} = \frac{|x-\bar{x}|}{|x|} = \frac{|2780 - 2781.67201|}{|2780|} = 0.000601$$

برای سال ۱۹۶۰ :

$$\begin{cases} k_1 = h \times 0.017p = 5 \times 0.017 \times 2781.67201 = 236.442121 \\ k_2 = h \times 0.017\left(p + \frac{k_1}{2}\right) = 5 \times 0.017 \times \left(2781.67201 + \frac{236.442121}{2}\right) = 246.4909118 \\ k_3 = h \times 0.017\left(p + \frac{k_2}{2}\right) = 5 \times 0.017 \times \left(2781.67201 + \frac{246.490911}{2}\right) = 246.917985 \\ k_4 = h \times 0.017(p + k_3) = 5 \times 0.017 \times (2781.67201 + 246.917985) = 257.43015 \\ y_1 = 2781.67201 + \frac{1}{6}(236.442121 + 2 \times 246.4909118 + 2 \times 246.917985 + 257.43015) = 3028.453687 \end{cases}$$

و خطای نسبی آن برابر است با :

$$\delta(\bar{x}) = \frac{e(\bar{x})}{|x|} = \frac{|x-\bar{x}|}{|x|} = \frac{|3040 - 3028.453687|}{|3040|} = 0.003798$$

سوال ۵ :

برای این روش داریم :

Predictor : $$y_{i+1}{}^* = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3})$$

Corrector : $$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}[9f_{i+1}{}^* + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}]$$

ابتدا بخش predictor را بدست می‌آوریم :

$$\begin{cases} f_0 = \frac{x_0 + y_0}{2} = \frac{0+2}{2} = 1 \\ f_1 = \frac{x_1 + y_1}{2} = \frac{0.5 + 2.636}{2} = 1.568 \\ f_2 = \frac{x_2 + y_2}{2} = \frac{1 + 3.595}{2} = 2.2975 \\ f_3 = \frac{x_3 + y_3}{2} = \frac{1.5 + 4.968}{2} = 3.234 \\ y_4^* = y_3 + \frac{h}{24}(55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0) \\ \quad = 4.968 + \frac{0.5}{24}(55 \times 3.234 - 59 \times 2.2975 + 37 \times 1.568 - 9 \times 1) \\ \quad = 6.870781 \end{cases}$$

و سپس با corrector مقدار بدست آمده را دقیق‌تر می‌کنیم :

$$\begin{cases} f_4^* = \frac{x_4 + y_4^*}{2} = \frac{2 + 6.870781}{2} = 4.435391 \\ y_4 = y_3 + \frac{h}{24}\left[9f_4^* + 19f_3 - 5f_2 + f_1\right] \\ \quad = 4.968 + \frac{0.5}{24}[9 \times 4.435391 + 19 \times 3.234 - 5 \times 2.2975 + 1.568 \\ \quad = 6.873105 \end{cases}$$

موفق باشید ^__^