



محاسبات عددی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۰

مدرس: دکتر فاطمه بهاری‌فرد

تمرین سری اول

فصل اول

تاریخ تحویل: ۱۴۰۰/۱۲/۲۲

لطفا توجه فرمایید که:

* مهلت ارسال تمرین ساعت ۱۱:۵۹ روز ۲۲ اسفند ماه است.

* لطفا تمرین‌های تئوری و عملی را در دو فایل جداگانه و با نام $HW1_StudentID$ آپلود کنید.

* لطفا تمرین‌ها را از یکدیگر کپی نکنید. در صورت وقوع چنین مواردی مطابق با سیاست درس رفتار می‌شود.

۱. الف) مقدار n در معادله زیر چگونه انتخاب شود (c بین 0 و x است):

$$e^x = \underbrace{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n}_{n(x;0)p} + \underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c}_{\varepsilon_{n+1}(c_x)}$$

به طوری که نامساوی زیر برقرار باشد: (۳ نمره)

$$|e^x - p_n(x; 0)| \leq 10^{-5} \quad \forall x \in [-1, 1]$$

ب) عبارت زیر را با دقت 10^{-6} محاسبه کنید. (۷ نمره)

$$I = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$$

۲. فرض کنید $x \in R^+$ یک عدد حقیقی مثبت باشد:

$$x = \overline{1.a_1a_2\dots a_{t-1}a_t\dots}2^e$$

فرض کنید کامپیوتری از نمایش ممیز شناور برای نمایش اعداد باینری مثبت با t بیت دقت در قسمت معنی دار آنها استفاده می‌کند:

$$fl(x) = \overline{1.a_1a_2\dots a_{t-1}}.2^e$$

همچنین از "گرد کردن" برای تبدیل x از خارج کامپیوتر به تقریب ممیز شناور آن ($fl(x)$) در داخل کامپیوتر استفاده شده است.

الف) نشان دهید (۱۰ نمره)

$$-2^{e-t} \leq x - fl(x) \leq 2^{e-t}$$

ب) ابتدا نشان دهید $x \geq 2^e$ و سپس به کمک آن عبارت زیر را ثابت کنید: (۱۰ نمره)

$$\frac{x - fl(x)}{x} \leq 2^{-t}$$

۳. در بعضی مواقع می توان با بازنویسی کردن تابع، از کاهش دقت مقادیر خروجی جلوگیری کرد. در موارد زیر، کاری مشابه انجام دهید و صحت عملکرد خود را نشان دهید. (فرض کنید در تمامی موارد x نزدیک به ۰ است)

الف) $\frac{1-\cos(x)}{x^2}$ (۵ نمره)

ب) $\sqrt[3]{x+1} - 1$ (۵ نمره)

ج) $\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$ (۵ نمره)

۴. مقدار دقیق $f(x)$ را برای مقادیر بسیار بزرگ x را به دست آورید. سپس مقدار $\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x)$ را محاسبه کنید (۱۵ نمره)

$$f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1$$

۵. رابطه بازگشتی زیر را در نظر بگیرید:

$$x_1 = a, x_2 = \frac{a}{2}, x_n = \frac{5}{2}x_{n-1} - x_{n-2}$$

الف) جواب رابطه بازگشتی بالا را به دست آورید. (۵ نمره)

ب) آیا با فرض $a = \frac{1}{3}$ رابطه بازگشتی بالا پایدار است؟ با بزرگتر شدن n ، خطای نسبی با چه سرعتی رشد/کاهش می یابد؟ به طور خلاصه توضیح دهید و پاسخ خود را به صورت عددی تایید کنید. (۱۰ نمره)

ج) همین کار را با $a = 1$ انجام دهید و مشاهدات خود را توضیح دهید. (۵ نمره)

۶. (برنامه نویسی) مقدار e^{-30} را با دو ترتیب مختلف محاسبه کرده و نتیجه را چاپ کنید. چرا نتایج (حتی با در نظر گرفتن تعداد بیشتری از جمله ها) به یکدیگر همگرا نمی شوند؟ (۲۰ نمره)