دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

محاسبات عددی

نیم‌سال اول ۱۴۰۲-۱۴۰۱

تمرین سری دوم

پاسخ سوال ۱.

الف

برای چندجمله‌ای مرتبه دوم $f(x)$ داریم:

$$P_{۲}(x) = f(۰) + \frac{f^{'}(۰)(x-۰)}{۱!} + \frac{f^{''}(۰)(x-۰)^{۲}}{۲!} + \cdots$$

$$f(x) = xe^{x} + x, \quad f(۰) = ۰$$

$$f^{'}(x) = (x+۱)e^{x} + ۱, \quad f^{'}(۰) = ۲$$

$$f^{''}(x) = (x+۲)e^{x}, \quad f^{''}(۰) = ۲$$

$$\implies P_{۲}(x) = x^{۲} + ۲x$$

ب

برای کران خطای $|P_{۲}(x) - f(x)|$ داریم:

$$|P_{۲}(x) - f(x)| \leqslant \frac{f^{(۳)}(\theta)x^{۳}}{۳!}, \quad ۰ \leqslant \theta \leqslant x \leqslant ۱$$

$$f^{(۳)}(x) = (x+۳)e^{x}, \quad f^{(۳)}(۰) = ۳$$

$$\implies |P_{۲}(x) - f(x)| \leqslant \frac{f^{(۳)}(\theta)x^{۳}}{۳!} = ۴e$$

$$\implies |P_{۲}(x) - f(x)| \leqslant ۴e$$

پاسخ سوال ۲.

$$g(x) = \pi + \frac{۱}{۲}\sin(x) \implies |g^{'}(x)| = \frac{۱}{۲}|\cos(x)| \leqslant \frac{۱}{۲}$$

از آنجایی که قدر مطلق $g^{'}(x)$ کوچکتر از یک است می‌توانیم از روش نقطه ثابت استفاده کنیم.

$$f(x) = g(x) - x = \pi + \frac{۱}{۲}\sin(x) - x$$

$$f(۳) = \pi + \frac{۱}{۲}\sin(۳) - ۳, \quad f(۳) > ۰$$

$$f(۴) = \pi + \frac{۱}{۲}\sin(۴) - ۴, \quad f(۴) < ۰$$

بنابراین $x.$ را مقدار ۳/۵ در نظر می‌گیریم (دقت کنید که با هرمقدار دیگر $x.$ اگر روش را انجام دهید نمره کامل سوال را دریافت می‌کنید).

$$x_۱ = g(۳/۵) = ۳/۱۷۲$$

$$x_۲ = g(۳/۱۷۲) = ۳/۱۶۹$$

$$|x_۲ - x_۱| < ۱۰^{-۲} \implies x \simeq ۳/۱۶۹$$

پاسخ سوال ۳.

در تمامی قسمت‌های این سوال انتخاب نقطه $x.$ به شرطی که شرایط روش‌ها را برقرار سازد اهمیتی نداشته و اگر روش به صورت کامل و صحیح نوشته شده باشد نمره کامل سوال را دریافت می‌کنید.

الف

$$f(x) = \cos(x) - x \implies \begin{cases} f(۰) = \cos(۰) - ۰, \quad f(۰) > ۱ \\ \\ f(۱) = cos(۱) - ۱, \quad f(۱) < ۰ \end{cases} \implies x. = ۰/۵$$

$$x_۱ = g(۰/۵) \simeq ۰/۸۷۷$$

$$x_۲ = g(۰/۸۷۷) \simeq ۰/۶۳۹$$

$$x_۳ = g(۰/۶۳۹) \simeq ۰/۸۰۲$$

$$x_۴ = g(۰/۸۰۲) \simeq ۰/۶۹۴$$

$$x_۵ = g(۰/۶۹۴) \simeq ۰/۷۶۸$$

$$x_۶ = g(۰/۷۶۸) \simeq ۰/۷۱۹$$

$$x_۷ = g(۰/۷۱۹) \simeq ۰/۷۵۲$$

$$x_۸ = g(۰/۷۵۲) \simeq ۰/۷۳۰$$

$$x_۹ = g(۰/۷۳۰) \simeq ۰/۷۴۵$$

$$\implies |x_۹ - x_۸| < ۱۰^{-۲}$$

ب

$$f^{'}(x) = -\sin(x) - ۱$$

$$x. = ۰$$

$$x_۱ = x. - \frac{f(x.)}{f'(x.)} \simeq ۰/۷۵$$

$$x_۲ = x_۱ - \frac{f(x_۱)}{f'(x_۱)} \simeq ۰/۷۲۳$$

$$x_۳ = x_۲ - \frac{f(x_۲)}{f'(x_۲)} \simeq ۰/۷۴۲$$

$$x_۴ = x_۳ - \frac{f(x_۳)}{f'(x_۳)} \simeq ۰/۷۳۸$$

$$\implies |x_۴ - x_۳| < ۱۰^{-۲}$$

ج

$$x_۰ = ۰, \quad x_۱ = ۱$$

$$x_{n+۱} = \frac{x_{n-۱} f(x_n) - x_n f(x_{n-۱})}{f(x_n) - f(x_n - ۱)}$$

$$x_۴ = \frac{x_۳ f(x_۴) - x_۴ f(x_۳)}{f(x_۴) - f(x_۳)} \simeq ۰/۷۳۹$$

$$\implies |x_۴ - x_۳| < ۱۰^{-۲}$$

تعداد مراحلی که برای رسیدن به جواب طی می‌شود با روش نیوتون یکسان بوده اما به طوری کلی دقت روش نیوتون بیشتر است.

پاسخ سوال ۴.

در اینجا برای به دست آوردن مقادیر همانند قسمت ب سوال ۳ عمل کرده و صرفا مقادیر نهایی را مقایسه می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴}x^۲ - x\sin(x) - \frac{۱}{۲}\cos(۲x)$$

$$\implies f^{'}(x) = \frac{۱}{۲}(x) - \sin(x) - x\cos(x) + \sin(۲x)$$

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_۰ = \frac{\pi}{۲} \implies x_۶ \simeq -۲/۲۸۲۲۹, \quad e_x < ۱۰^{-۱۵}$$

$$x_۰ = ۵\pi \implies x_۶ \simeq -۲/۲۸۲۲۹, \quad e_x < ۱۰^{-۱۳}$$

$$x_۰ = ۱۰\pi \implies x_۶ \simeq -۲/۲۸۲۲۹, \quad e_x < ۱۰^{-۱۰}$$

هر سه نقطه شروع انتخابی با ۶ مرحله به جواب نهایی رسیده‌اند و برای دقت $۱۰^{-۵}$ جواب مشابهی دارند.

اگر جزئی‌تر به مقدار خطای جواب‌های بپردازیم، مقدار خطای نقطه شروع $x_۰ = \frac{\pi}{۲}$ کمترین بوده و نقطه شروع $x_۰ = ۱۰\pi$ بیشترین خطا را دارند (نوشتن این بخش الزامی نیست).

پاسخ سوال ۵.

برای حل این قسمت داریم:

$$x_۱ - ۱/۹۹۱x_۲ + ۰/۴۳۶x_۳ = ۰/۹۵۲$$

$$\implies \begin{cases} (۱۰ + ۱/۹۹ \times ۴/۰۱)x_۲ + (-۱/۱۲ - ۰/۴۳۶ \times ۴/۰۱)x_۳ \simeq -۶/۹۰۸ \\ \\ (۰/۹۸۷ + ۱/۹۹ \times ۱/۰۹)x_۲ + (۰/۸۳۲ - ۰/۴۳۶ \times ۱/۰۹)x_۳ \simeq ۳/۱۷۲ \end{cases}$$

$$\implies x_۲ - ۰/۱۶x_۳ = -۰/۳۸۴$$

$$\implies (۰/۳۵۶ + ۰/۱۶ \times ۳/۱۵۷)x_۳ = ۳/۱۷۲ + ۰/۳۸۴ \times ۳/۱۵۷$$

$$\implies x_۳ = ۵/۰۹۱, \quad x_۲ = ۰/۴۳۱, \quad x_۱ = -۰/۴۱۰$$

پاسخ سوال ۶.

برای محاسبه وارون ماتریس خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\implies \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ & ۱ \\ ۰ & -۳ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۳ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ & ۱ \\ ۰ & -۳ & ۲ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۳ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -\frac{۲}{۳} & \frac{۲}{۳} \\ ۰ & ۳ & ۳ & -۱ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۳} \\ ۰ & ۱ & -\frac{۲}{۳} & \frac{۲}{۳} \\ ۰ & ۰ & ۳ & -۱ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۳} \\ ۰ & ۱ & -\frac{۲}{۳} & \frac{۲}{۳} \\ ۰ & ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۳} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & -\frac{۲}{۹} \\ ۰ & ۱ & ۰ & \frac{۴}{۹} \\ ۰ & ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$$

$$\implies A^{-۱} \begin{bmatrix} -\frac{۲}{۹} & \frac{۵}{۹} & -\frac{۱}{۹} \\ \frac{۴}{۹} & -\frac{۱}{۹} & \frac{۲}{۹} \\ -\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$$

پاسخ سوال ۷.

در ابتدا برای به دست آوردن ماتریس‌های L و U داریم:

$$\implies A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۳ \\ ۲ & ۱ & -۱ & ۱ \\ ۳ & -۱ & -۱ & ۲ \\ -۱ & ۲ & ۳ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$R_۲ \leftarrow R_۲ - ۲R_۱$$

$$R_۳ \leftarrow R_۳ - ۳R_۱$$

$$R_۴ \leftarrow R_۴ + R_۱$$

$$R_۴ \leftarrow R_۴ + ۳R_۲$$

$$R_۳ \leftarrow R_۳ - ۴R_۲$$

$$\implies U = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۳ \\ ۰ & -۱ & -۱ & -۵ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۱۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱۳ \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۰ \\ -۱ & -۳ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\implies L \underbrace{Ux}_{y} = b \implies \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۰ & -۳ \\ -۱ & -۳ & ۰ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۴ & ۱ & ۰ & -۶ \\ ۰ & -۳ & ۰ & ۱ & ۵ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\implies y = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ -۲ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

حال همانند سوال ۶ دستگاه به دست آمده را حل می‌کنیم، به این ترتیب خواهیم داشت:

$$Ux = y \implies \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۳ \\ ۰ & -۱ & -۱ & -۵ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۱۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ -۲ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$\implies x = \begin{bmatrix} -\frac{۴}{۱۳} \\ \frac{۲۳}{۱۳} \\ ۰ \\ -\frac{۲}{۱۳} \end{bmatrix}$$

پاسخ سوال ۸.

$$A = LDL^T = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ l_{۲,۱} & ۱ & ۰ \\ l_{۳,۱} & l_{۳,۲} & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{۱,۱} & ۰ & ۰ \\ ۰ & d_{۲,۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & d_{۳,۳} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & l_{۲,۱} & l_{۳,۱} \\ ۰ & ۱ & l_{۳,۲} \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۴/۲۵ & ۲/۷۵ \\ ۱ & ۲/۷۵ & ۳/۵ \end{bmatrix}$$

$$\implies d_{۱,۱} = ۴, \quad d_{۱,۱} l_{۲,۱} = -۱ \to l_{۲,۱} = -\frac{۱}{۴}$$

$$d_{۱,۱} l_{۳,۱} = ۱ \to l_{۳,۱} = \frac{۱}{۴}, \quad d_{۲,۲} - l_{۲,۱} = ۴/۲۵ \to d_{۲,۲} = ۴$$

$$d_{۲,۲} l_{۳,۲} - l_{۳,۱} = ۲/۷۵ \to l_{۳,۲} = \frac{۱}{۴} \to d_{۳,۳} = ۱$$

$$\Longrightarrow\ L=\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{4}&1&0\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&1\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

پاسخ سوال ۹.

الف

$$\begin{bmatrix}2&-1&1\\2&2&2\\-1&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\4\\-5\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow\ p(A)=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,|\lambda_3|\}$$

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&1\\2&2-\lambda&2\\-1&-1&2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+6\lambda^2-17\lambda+18=(2-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+9)$$

$$\Longrightarrow\ \lambda_1=2\ \Longrightarrow\ p(A)>1$$

ب

طیق روش ژاکوبی داریم:

$$\Longrightarrow\ \begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\\[2ex]x_2=-x_1+2-x_3\\[2ex]x_3=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2-\frac{5}{2}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\ B=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-1&0&-1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix},\quad \beta=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\2\\-\frac{5}{2}\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow\ x^{(n+1)}=\beta+Bx^{(n)},\quad x^{(0)}=0$$

اگر با همین فرض روش ژاکوبی را تکرار کنیم شاهد همگرایی نخواهیم بود و جواب به دست آمده تقریب خوبی از جواب دستگاه ارائه نمی‌دهد.

پاسخ سوال ۱۰.

برای روش سایدل داریم:

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_۱^{(k+۱)} = ۷ - ۲x_۲^{(k)} + ۲x_۳^{(k)} \\ x_۲^{(k+۱)} = -x_۱^{(k)} + ۲ - x_۳^{(k)} \\ x_۳^{(k+۱)} = -۲x_۱^{(k)} - ۲x_۲^{(k)} + ۵ \end{cases}$$

با حدس اولیه $X^{(۰)} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ حاصل ۴ بار تکرار روش را به دست می‌اوریم:

n	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$
۰	۰	۰	۰
۱	۷	$-$۵	۱
۲	۱۹	$-$۱۸	۳
۳	۴۹	$-$۵۰	۷

همانگونه که مشاهده می‌شود شاهد همگرایی در جواب‌ها نبوده و اگر با ۲۵ تکرار روش را ادامه دهیم به تقریب خوبی برای جواب مسئله نخواهیم رسید.