سوال ۱:

الف:

عبارت داده شده درست است، آن را برای 2 ماتریس مربعی $n \times n$ اثبات می‌کنیم، و در نهایت با استفاده از استقرا عبارت را به صورت کلی اثبات می‌کنیم.
نشان می‌دهیم تمام جملات m_{ij} که در آن‌ها $i > j$ برابر با 0 هستند.

$$m_{ij} = \sum_{z=1}^{n} a_{iz}b_{zj} = \sum_{z=1}^{i-1} a_{iz}b_{zj} + \sum_{z=i}^{n} a_{iz}b_{zj} = 0 + 0 = 0$$

حال فرض کنید این ادعا برای n برقرار است حال داریم:

$$A_1A_2 \dots A_nA_{n+1} = A^*A_{n+1}$$

حال می‌دانیم فرض برای n ماتریس برقرار بود، پس ماتریس A^* بالامثلثی خواهد بود، و طبق فرض استقرا ضرب 2 ماتریس بالامثلثی نیز بالامثلثی خواهد بود و حکم برای $n + 1$ اثبات می‌شود.
برای اثبات همین قضیه برای ماتریس‌های پایین مثلثی، تنها کافی است از ضرب آن‌ها transpose بگیریم و داشته باشیم:

$$A_n^T A_{n-1}^T \dots A_1^T$$

می‌دانیم transpose هر ماتریس پایین مثلثی یک ماتریس بالا مثلثی است، و طبق قضیه‌ی اثبات شده ضرب بالا که transpose ضرب اصلی است، یک ماتریس بالا مثلثی خواهد بود، که در نتیجه باعث می‌شود ضرب n ماتریس پایین مثلثی پایین مثلثی باشد.

ب:

عبارت داده شده درست است.
دقت کنید مقدار ویژه‌های ماتریس A^2 برابر با λ^2 هستند که λ مقدار ویژه‌ی ماتریس A است.
حال طبق برابری داده شده می‌توانیم بنویسیم:

$$\lambda^2 = \lambda \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم مقادیر ویژه‌ی ماتریس $I - A$ برابر با $1 - \lambda_a$ و مقادیر ویژه‌ی ماتریس kA برابر با $k\lambda_a$ هستند، حال با استفاده از قضایای بالا مقادیر ویژه‌ی ماتریس B را محاسبه می‌کنیم:

$$\lambda_b = 1 \vee (1 - \lambda \neq 0)$$

از طرفی می‌دانیم دترمینان یک ماتریس مربعی برابر با ضرب مقادیر ویژه‌ی آن است، و طبق نتایج بدست آمده، نتیجه می‌شود دترمینان ماتریس B برابر با 0 نیست و وارون‌پذیر است.

سوال ۲:

Gaussian elimination را بر روی ماتریس داده شده اجرا می‌کنیم:

مرحله‌ی اول:

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \\ \alpha & 2 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow |\alpha| \leq 6 \equiv -6 \leq \alpha \leq 6$$

مرحله‌ی دوم:

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 7.5 \\ 0 & 2-\alpha & 10-\frac{\alpha}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow |2-\alpha| \leq 3 \equiv -1 \leq \alpha \leq 5$$

در نهایت با اشتراک گرفتن بین 2 بازه‌ی بدست آمده داریم:

$$-1 \leq \alpha \leq 5$$

سوال ۳:

معادله‌ی داده شده را بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_1^k = (3 - x_2^k - 4x_3^k - x_4^k) \\ x_2^k = (3 - 3x_1^{k+1} - x_3^k) \\ x_3^k = \frac{1}{2}(-3 - 4x_2^{k+1} - x_4^k) \\ x_4^k = \frac{1}{3}(-1 - 2x_3^{k+1}) \end{cases}$$

حال داریم:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = (3 - 0 - 0 - 0) = 3 \\ x_2^{(1)} = (3 - 9 - 0) = -6 \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{2}(-3 + 24 - 0) = 10.5 \\ x_4^{(1)} = \frac{1}{3}(-1 - 21) = -\frac{22}{3} \end{cases}$$

سوال ۴:

معادله‌ی داده شده را بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_1^k = \frac{1}{12}(1 - 6x_2^k - 4x_3^k) \\ x_2^k = -\frac{1}{6}(2 - x_1^k - 4x_3^k) \\ x_3^k = -\frac{1}{4}(3 - x_1^k - x_2^k) \end{cases} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مرحله‌ی اول:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{12} \\ x_2^{(1)} = -\frac{1}{3} \\ x_3^{(1)} = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

مرحله‌ی دوم:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{12}(1 + 2 + 3) = 0.5 \\ x_2^{(2)} = -\frac{1}{6}(2 - \frac{1}{12} + 3) = -0.8194 \\ x_3^{(2)} = -\frac{1}{4}(3 - \frac{1}{12} + \frac{1}{3}) = -0.8125 \end{cases}$$

سوال ۵:

دقت کنید در روش Cholesky $U = L^T$ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} 25 & 15 & 5 \\ 15 & 18 & 0 \\ 5 & 0 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ 0 & a_{22} & a_{32} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

با حل معادلات بالا داریم:

$$\begin{cases} a_{11}^2 = 25 \\ a_{11}a_{21} = 15 \\ a_{11}a_{31} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 5 \\ a_{21} = 3 \\ a_{31} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a_{21} = 15 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 = 18 \\ a_{21} + a_{22}a_{32} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{21} = 3 \\ a_{22} = 3 \\ a_{32} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a_{31} = 5 \\ 3a_{31} + 3a_{32} = 0 \\ a_{31} - a_{32} + a_{33}^2 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{31} = 1 \\ a_{32} = -1 \\ a_{33} = 3 \end{cases}$$

در نهایت داریم:

$$L = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad U = L^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 15 & 5 \\ 15 & 18 & 0 \\ 5 & 0 & 11 \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

سوال ۶:

الف:

ابتدا لازم است، ماتریس‌های L و U را بدست آوریم، دقت کنید در روش کروت مقادیر روی قطر اصلی ماتریس U برابر با 1 هستند.

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 8 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حال با جایگذاری خواهیم داشت:

$$\begin{cases} l_{11} = 5 \\ u_{12} = -0.2 \\ u_{13} = 0.2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_{21} = 2 \\ -0.4 + l_{22} = 8 \Rightarrow l_{22} = 8.4 \\ 0.4 + 8.4u_{23} = -1 \Rightarrow u_{23} = -0.1667 \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_{31} = -1 \\ 0.2 + l_{32} = 1 \Rightarrow l_{32} = 0.8 \\ -0.2 + 8.4 \times -0.1667 + l_{33} = 4 \Rightarrow l_{33} = 4.3333 \end{cases}$$

$$A = LU = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 8.4 & 0 \\ -1 & 0.8 & 4.3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.2 & 0.2 \\ 0 & 1 & -0.1667 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حال باید معادله‌ی $LY = B$ را حل کنیم:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 8.4 & 0 \\ -1 & 0.8 & 4.3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow Y = \begin{bmatrix} 2 \\ 0.8333 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حال در نهایت می‌توانیم معادله‌ی $UX = Y$ را حل کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.2 & 0.2 \\ 0 & 1 & -0.1667 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0.8333 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ب:

داریم:

$$AX_0 = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 8 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 0.5556 \\ 1 \\ 0.4444 \end{bmatrix}$$

$$AX_1 = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 8 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5556 \\ 1 \\ 0.4444 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2222 \\ 8.6667 \\ 2.2222 \end{bmatrix} \Rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} 0.2564 \\ 1 \\ 0.2564 \end{bmatrix}$$

$$AX_2 = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 8 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2564 \\ 1 \\ 0.2564 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5385 \\ 8.2564 \\ 1.7692 \end{bmatrix} \Rightarrow X_3 = \begin{bmatrix} 0.0652 \\ 1 \\ 0.2143 \end{bmatrix}$$

در نهایت 8.2564 تقریبی از بزرگترین مقدار ویژه و $\begin{bmatrix} 0.0652 \\ 1 \\ 0.2143 \end{bmatrix}$ تقریبی از بردار ویژه‌ی متناظر با آن