محاسبات عددی **پاسخنامه پایانترم**

نیم‌سال اول ۱۴۰۱ـ۱۴۰۲

سوال ۱. فرض کنید بازه را به n زیربازهٔ برابر تقسیم کرده باشیم به طوری که:

$$
\begin{aligned}
& x_۰ = ۱, h = \frac{۲-۱}{n} = \frac{۱}{n} \\
& x_{i+۱} = x_۰ + ih = ۱ + ih \qquad i = ۱, ..., n \\
& |E_۱(x)| \leq \frac{M}{۸}(x_{i+۱} - x_i)^۲ = \frac{M}{۸}h^۲ \\
& f'(x) = \frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}} \\
& f"(x) = -\frac{۱}{۴}x^{-\frac{۳}{۲}} = \frac{-۱}{۴x^{\frac{۳}{۲}}} \\
& M = \max_{x\in[۱,۲]} |f"(x)| = \frac{۱}{۴(۱^{\frac{۳}{۲}})} = \frac{۱}{۴} \\
& \Rightarrow |E_۱(x)| \leq \frac{۱}{۸}(\frac{۱}{۴})h^۲ < ۱۰^{-۴} \Rightarrow h^۲ < ۳۲ * ۱۰^{-۴} \\
& \Rightarrow h < ۴\sqrt{۲} * ۱۰^{-۲} \simeq ۰/۰۵۶۵۷ \Rightarrow h = \frac{۱}{n} < ۰/۰۵۶۵۷ \Rightarrow n > \frac{۱}{۰/۰۵۶۵۷} \simeq ۱۷/۶ \Rightarrow n = ۱۸
\end{aligned}
$$

سوال ۲.

$$
\begin{aligned}
& f(x) \simeq f(x_۰)L_۰(x) + f(x_۱)L_۱(x) + f(x_۲)L_۲(x) + f(x_۳)L_۳(x) = \\
& ۲\frac{(x-۳)(x-۴)(x-۷)}{(۰-۳)(۰-۴)(۰-۷)} + ۸\frac{(x-۰)(x-۴)(x-۷)}{(۳-۰)(۳-۴)(۳-۷)} + ۹\frac{(x-۰)(x-۳)(x-۷)}{(۴-۰)(۴-۳)(۴-۷)} + ۶\frac{(x-۰)(x-۳)(x-۴)}{(۷-۰)(۷-۳)(۷-۴)} \\
& \Rightarrow f(۲) = ۲\frac{(۲-۳)(۲-۴)(۲-۷)}{-۸۴} + ۸\frac{۲۰}{۱۲} + ۹\frac{۱۰}{-۱۲} + ۶\frac{۴}{۸۴} = \frac{۵}{۲۱} - \frac{۴۰}{۳} + \frac{۱۵}{۲} + \frac{۲}{۷} = ۶/۳۵۷
\end{aligned}
$$

سوال ۳.

$$
\begin{aligned}
& f'(x_i) = \frac{f(x_{i+۱}) - f(x_i)}{h} = \frac{f_{i+۱} - f_i}{h}, h = ۱ \\
& f'(۰) = \frac{f_۱ - f_۰}{h} = \frac{۰/۳۷۵ - ۰}{۱} = ۰/۳۷۵ \\
& f'(۲) = \frac{f_۲ - f_۱}{h} = \frac{۰/۹۷۱ - ۰/۳۷۵}{۱} = ۰/۵۹۶ \\
& f'(x_i) = \frac{f(x_{i+۱}) - f(x_{i-۱})}{۲h} = \frac{f_{i+۱} - f_{i-۱}}{۲h} \\
& f'(۲) = \frac{f_۲ - f_۰}{۲h} = \frac{۱/۵۱۱ - ۰/۳۷۵}{۲} = ۰/۵۶۸ \\
& f(x_{i+۱}) = f(x_{i+h}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^۲}{۲!}f"(x_i) + \frac{h^۳}{۳!}f'''(x_i) + ... \\
& f(x_{i-۱}) = f(x_{i-h}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^۲}{۲!}f"(x_i) - \frac{h^۳}{۳!}f'''(x_i) + ... \\
& f(x_{i+۱}) + f(x_{i-۱}) \cong f(x_i) + \frac{h^۲}{۲!}f"(x_i) \\
& f''(x_i) = \frac{f(x_{i-۱}) - ۲f(x_i) + f(x_{i+۱})}{h^۲} \\
& f'(x_i) = \frac{f_{i-۱} - ۲f_i + f_{i+۱}}{h^۲} \\
& f'(x_۲) = \frac{f_۱ - ۲f_۲ + f_۳}{h^۲} = \frac{۰/۳۷۵ - ۱/۹۴۲ + ۱/۵۱۱}{۱} = -۰/۰۵۶
\end{aligned}
$$

سوال ۴.

$\int_{-۱}^{۱} f(x)dx \simeq \frac{h}{۲}(f_۰ + ۲(f_۱ + f_۲ + f_۳ + f_۴) + f_۵), f_i = f(x_i)$
$\simeq \frac{۰/۴}{۲}(۰ + ۲(۰/۱ + ۰/۱۵ + ۰/۰۵ + ۰/۱۵) + ۰/۳) = ۰/۲(۰/۱۲) = ۰/۲۴$

سوال ۵.

$y(۱/۱) = y(۱) + \frac{۱}{۲}[k_۱ + k_۲]$
$k_۱ = ۰/۱f(۱/۱) = /۰۱(۲) = ۰/۲$
$k_۲ = ۰/۱f(۱/۱, ۱/۲) = ۰/۱(۱/۲۱ + ۱/۴۴) = ۰/۲۶۵$
$y(۱/۱) = ۱ + ۰/۲۳۲۵ = ۱/۲۳۲۵$

سوال ۶.

$$\begin{cases} y'' - ۰/۱(۱ - y^۲)y' + y = ۰ \Rightarrow y'' = ۰/۱(۱ - y^۲)y' - y \quad p' = ۰/۱(۱ - y^۲)p - y \\ y(۰) = ۱ \\ y'(۰) = ۰ \end{cases}$$

دستگاه معادلات دیفرانسل:

$$\begin{cases} y' = p = f_۱(x, y, p) \\ p' = -y + ۰/۱(۱ - y^۲)p = f_۲(x, y, p) \\ y(۰) = ۱ \\ p(۰) = ۰ \end{cases}$$

روش رانگ کوتای مرتبه ۲:

$x_n = x_۰ + nh \qquad n = ۰, ۱, ...$
$y_n = y(x_n), p_n = p(x_n) \Rightarrow y_{n+۱} = y(x_{n+۱}), p_{n+۱} = p(x_{n+۱})$
$k_۱ = hf_۱(x_n, y_n, p_n) \qquad k_۲ = hf_۱(x_n + h, y_n + k_۱, p_n + l_۱)$
$l_۱ = hf_۲(x_n, y_n, p_n) \qquad l_۲ = hf_۲(x_n + h, y_n + k_۱, p_n + l_۱)$
$y_{n+۱} = y_n + \frac{۱}{۲}(k_۱ + k_۲)$
$p_{n+۱} = p_n + \frac{۱}{۲}(l_۱ + l_۲)$
$k_۱ = hp_n$
$l_۱ = h[-y_n + ۰/۱(۱ - y_n^۲)p_n]$
$k_۲ = h(p_n + l_۱)$
$l_۲ = h(-(y_n + k_۱) + ۰/۱[۱ - (y_n + k_۱)^۲](p_n + l_۱))$

با در نظر گرفتن $h = ۰/۲$ و $n = ۰$ داریم:

$$
\begin{aligned}
&k_۱ = ۰/۲p_. = ۰/۲(۰) = ۰ \\
&l_۱ = ۰/۲[-y_. + ۰/۱(۱ - y_.^۲)p_.] = ۰/۲[-۱ + ۰/۱(۱ - ۱)(۰)] = -۰/۲ \\
&k_۲ = ۰/۲(p_. + l_۱) = ۰/۲(۰ - ۰/۲) = -۰/۰۴ \\
&l_۲ = ۰/۲(-(y_. + k_۱) + ۰/۱[۱ - (y_. + k_۱)^۲](p_. + l_۱)) = \\
&۰/۲(-(۱ + ۰) + ۰/۱[۱ - (۱ + ۰)^۲](۰ - ۰/۲)) = -۰/۲ \\
&\Rightarrow y(۰/۲) = y_۱ = y_. + \tfrac{۱}{۲}(k_۱ + k_۲) = ۱ + \tfrac{۱}{۲}(۰ - ۰/۰۴) = ۰/۹۸ \\
&\Rightarrow p(۰/۲) = p_۱ = p_. + \tfrac{۱}{۲}(l_۱ + l_۲) = ۰ + \tfrac{۱}{۲}(-۰/۲ - ۰/۲) = -۰/۲
\end{aligned}
$$

موفق باشید.