به نام خدا

علی مهدوی فر　　۹۸۱۰۶۰۷۲　　میانترم محاسبات عددی　　۲ خرداد ۱۴۰۰

۱) از رابطهٔ خطای فرمول استفاده می‌کنیم.

$$f(\overbrace{x,y,z}^{X}) = r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$e_f \le e_x\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar X} + e_y\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\bar X} + e_z\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{\bar X}$$

$$= e\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{\bar X} + e\left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{\bar X} + e\left|\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{\bar X} \le 1$$

اگر در رابطهٔ خطای بالا به جای مقادیر واقعی x ، y ، z مقادیر تقریبی $\bar x = -1$ ، $\bar y = 1$ ، $\bar z = 2$ را بگذاریم:

$$\frac{e}{\sqrt6} + \frac{e}{\sqrt6} + \frac{2e}{\sqrt6} \le 1 \longrightarrow \frac{4e}{\sqrt6} \le 1 \longrightarrow e \le \frac{\sqrt6}{4} \simeq 0.612$$

پس e می‌تواند حداکثر ۰٫۶۱۲ باشد.

البته شاهده می‌کنیم اگر $x=-1.612$ ، $y=1.612$ و $z=2.612$ باشد خطا اندکی بیش از ۱ می‌شود (حدود ۱٫۰۱۸). اگر در فرمول خطا $\begin{cases}|x|\le 1+e\\ |y|\le 1+e\\ |z|\le 2+e\end{cases}$ را بگذاریم خطای دقیق‌تر را بدست می‌آوریم ولی معادله را نمی‌توانیم دستی حل کنیم.

$$\frac{e(1+e)+e(1+e)+e(2+e)}{\sqrt{(1+e)^2+(1+e)^2+(2+e)^2}} \le 1$$

با نرم افزار در این حالت بدست می‌آید $e \simeq 0.5943$

بررسی: $\sqrt{1.5943^2 + (-1.5943)^2 + (2.5943)^2} \simeq \sqrt6 + 1$ ✓

بیشترین حالت برای خطای ۲

۲) به کمک رابطه داده شده برای خطا (که همگرایی خطی با نرخ λ را نشان می دهد) e_n را برحسب e_n می نویسیم:

$$|e_n| = \lambda |e_{n-1}| = \lambda^2 |e_{n-2}| = \dots = \lambda^n |e_0|$$

$$|e_n| \leqslant 10^{-m} |e_0| \longrightarrow \lambda^n |e_0| \leqslant 10^{-m} |e_0| \longrightarrow \lambda^n \leqslant 10^{-m}$$

چون log تابعی صعودی است جهت نامساوی را عوض نمی کند:

$$\log_{10} \lambda^n \leqslant -m \longrightarrow n \log_{10} \lambda \leqslant -m \xrightarrow[\log \lambda < 0]{0<\lambda<1} n \geqslant \frac{-m}{\log_{10} \lambda}$$

$$\longrightarrow \quad n \geqslant \frac{m}{\log_{10} \frac{1}{\lambda}}$$

پس n باید حداقل $\left\lceil \frac{m}{\log_{10} \frac{1}{\lambda}} \right\rceil$ باشد.

۳) برای اینکه روش تکراری گفته شده به ریشه f همگرا باشد باید نشان دهیم تابع تکرار
یعنی $g(x)=x+Mf(x)$ شرایط همگرایی در روش نقطه ثابت را برآورده می کند. (به ازای یک M)

شرط پیوستگی) از آنجا که f در $[0,1]$ مشتق پذیر، پیوسته است، g نیز پیوسته خواهد بود.

شرط ۲) $\forall x\in[0,1] : |g'(x)|<1$

برای این کار باید یک M منفی بسیار نزدیک به صفر انتخاب کنیم، بنابر فرض برای هر $x\in[0,1]$:

$$0\leqslant a< f'(x)\leqslant b \xrightarrow[M<0]{\times M} Mb\leqslant Mf'(x)<Ma\leqslant 0$$

$$\xrightarrow{+1} 1+Mb\leqslant 1+Mf'(x)<1+Ma\leqslant 1 \longrightarrow 1+Mb\leqslant g'(x)\leqslant 1$$

برای اینکه شرط خواسته شده برآورده شود می گذاریم $0\leqslant 1+Mb \xleftarrow{b\geqslant 0} \boxed{\frac{-1}{b}<M<0}$

شرط ۳) $\forall x\in[0,1] : g(x)\in[0,1]$

در بخش قبل حدود M را به گونه ای گذاشتیم که $1>g'>0$ باشد در بازه $[0,1]$. پس در این بازه اکیدا صعودی خواهد بود. حال کافی است $g(1)\leqslant 1$, $0\leqslant g(0)$ باشد تا شرط برآورده شود.

$0\leqslant g(0) \longrightarrow 0\leqslant 0+Mf(0) \longrightarrow$ چون M را منفی گرفتیم و $f(0)<0$، همیشه برقرار ✓

$g(1)\leqslant 1 \longrightarrow 1+Mf(1)\leqslant 1 \longrightarrow Mf(1)\leqslant 0$

چون M را منفی گرفتیم و $0<f(1)$ است، همیشه برقرار است ✓

لذا کافی است M را به گونه ای بگیریم که منفی و به اندازه کافی نزدیک به صفر باشد.

۴) اگر x برابر با معکوس عدد غیرصفر a باشد:

$$x = 1/a \longrightarrow 1/x = a \longrightarrow f(x) = 1/x - a = 0$$

باید از یک حدس اولیه دلخواه (و هم‌علامت با a) شروع کنیم که می‌تواند $x_0 = a$ باشد و سپس

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{1/x_i - a}{-1/x_i^2} = x_i + (+x_i - a x_i^2)$$

$$\longrightarrow \quad \forall i \geq 2 : \boxed{x_{i+1} = 2 x_i - a x_i^2}$$

رابطهٔ تکراری فوق براساس روش نیوتن رافسون با درجهٔ همگرایی ۲ به $1/a$ همگرا می‌شود و فقط به عملیات ضرب و تفریق نیاز دارد (نه تقسیم و وارون‌گیری)

۵) الف) در روش لاگرانژ باید تمامی l_i ها را که چندجمله‌ای‌هایی از درجه n هستند جداگانه حساب کنیم و سپس جمع کنیم. همچنین هر l_i به تمام x_iهای نقاط داده شده وابسته است. لذا محاسبات وقت‌گیر دارد و با تغییر یک x_i یا افزودن یک نقطه x_{n+1}، باید تمام محاسبات تجدید شوند. همچنین تا زمانی که سیگمای $l_i(x) f(x_i)$ را حساب نکرده باشیم درجه نهایی چندجمله‌ای درون‌یاب معلوم نمی‌شود و محاسبات همیشه باید انجام شوند.

در روش نیوتن برخلاف روش لاگرانژ برای افزودن یک نقطه فقط یک سطر جدید به جدول قبلی اضافه می‌شود و محاسبات قبل پایدار می‌مانند، همچنین درجه چندجمله‌ای اگر m باشد تا ستون m که برسیم همه اعداد برابر می‌شوند و نیازی به ادامه محاسبات نیست. در حالت کلی هم محاسبات کمتری نسبت به لاگرانژ دارد.

ب) جدول تفاضلات تقسیم شده نیوتن را رسم می‌کنیم.

x_i	$f(x_i)$	مرتبه اول	مرتبه دوم	مرتبه سوم	مرتبه چهارم	
-1	-2					a_0
1	0	1				a_1
2	7	7	2			a_2
3	26	19	6	1		a_3
4	63	37	9	1	0	

$$\longrightarrow P_3(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$= -2 + (x+1) + 2(x+1)(x-1) + 1(x+1)(x-1)(x-2)$$

$$= x^3 - 1$$

همچنین همان طور که نقطه (۴،۶۳) را با رنگ قرمز به جدول اضافه کردیم، چون تفاضلات مرتبه سوم برابر شده ضریب a_4 صفر بدست آمده و جمله جدیدی به P_3 اضافه نمی‌شود و چندجمله‌ای درون‌یاب تغییری نمی‌کند:

$$P_4(x) = P_3(x) + 0 = x^3 - 1$$

$$P_4(4) = 4^3 - 1 = 64 - 1 = 63 \checkmark$$

۶) برای یک n مشخص، نقاط x_i به صورت روبرو هستند:
$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n}{n}, 0$

بر اساس فرمول تمرین، خطای درون یابی به صورت زیر است.
$\forall x \in [0,1]:$

$$|f(x) - P_n(x)| \leq |(x-0)(x-\tfrac{1}{n})\cdots(x-\tfrac{n}{n})| \frac{|f^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!}$$

اما برای تابع $f(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$ مشتقات به صورت زیر اند:

$$f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi x + \pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\frac{\pi x}{2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x + 2\pi}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+n)\right)$$

لذا حداکثر مقدار برای $f^{(n+1)}(t)$ با توجه به اینکه $-1 \leq \sin(\dots) \leq 1$ است، $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}$ خواهد بود. جملات $(x - x_i)$ هم همگی بین ۰ تا ۱ هستند، و از ۱ کمتر مساوی هستند

$$\rightarrow \varepsilon_n = |f(x) - P_n(x)| \leq 1 \times 1 \times \dots \times 1 \times \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!}$$

اگر از خطای فوق $\ln$ بگیریم:

$$\ln \varepsilon_n = (n+1)\ln(\pi/2) - O(n \log n)$$

$$\longrightarrow \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = \lim_{n\to\infty} O(n) - O(n \log n) = -\infty \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = \ln^{-1}(-\infty) = 0$$

به عبارت دیگر خطا از مرتبهٔ یک نمایی تقسیم بر یک فاکتوریل است و می‌دانیم رشد فاکتوریل بسیار سریع‌تر از نمایی است، لذا خطای $|f(x) - P(x)|$ برای هر $x \in [0,1]$ وقتی $n \to \infty$ میل کند، به صفر میل خواهد کرد.

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - P(x)| = 0 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} P(x) = f(x) \quad \forall x \in [0,1]$$