

سوال ۱.

جواب دستگاه خطی زیر را با استفاده از روش کرامر^۱ به دست آورید.

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

سوال ۲.

جواب دستگاه خطی زیر را با استفاده از روش حذفی گاوس^۲ به دست آورید.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 12x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + 12x_3 = -6 \end{cases}$$

سوال ۳.

معادله‌ی خطی $Ax = b$ را با مقادیر زیر در نظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ و } b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

الف) با تقریب اولیه‌ی $x^{(0)} = 0$ و سه تکرار از روش ژاکوبی^۳ مقادیر $x^{(1)}$ ، $x^{(2)}$ و $x^{(3)}$ را محاسبه کنید.

ب) با تقریب اولیه‌ی $x^{(0)} = 0$ و سه تکرار از روش گاوس-سایدل^۴ مقادیر $x^{(1)}$ ، $x^{(2)}$ و $x^{(3)}$ را محاسبه کنید.

ج) کدام یک از روش‌های بالا تقریب بهتری از جواب‌ها می‌دهد؟

Cramer^۱Gaussian Elimination^۲Jacobi^۳Gauss-Seidel^۴

سوال ۴.

دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0/2 \\ -1/2x_1 + x_2 + 1/4x_3 = -1/425 \\ x_1 - 1/2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

پاسخ این دستگاه به صورت $(0/9, 0/8, 0/7)^t$ است.

الف) از تقریب اولیه $x^{(0)}$ و روش گاوس-سایدل استفاده کنید و پاسخ را با خطای 10^{-2} و در حداکثر ۳۰۰ تکرار به دست آورید.

ب) در صورتی که دستگاه را به شکل زیر تغییر دهیم، پاسخ بخش الف چه خواهد شد؟

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0/2 \\ -1/2x_1 + x_2 - 1/4x_3 = -1/425 \\ x_1 - 1/2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

سوال ۵.

الف) دستگاه زیر را با روش گاوس-سیدل^۵ حل کنید.

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

ب) دستگاه زیر را با روش گاوس-سیدل حل کنید

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

ج) چرا با آن که دستگاه‌های (الف) و (ب) جواب‌های یکسان دارند ولی همگرایی روش تکرار گاوس-سیدل در (الف) و (ب) متفاوت است؟

* در (الف) و (ب) تقریب اولیه را $x^{(0)} = y^{(0)} = 0$ در نظر بگیرید.

سوال ۶.

الف) نشان دهید روش گاوس-سیدل در مورد دستگاه

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 13 \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 13 \end{cases}$$

- برای بردار اولیه $x^{(0)} = 0$ همگراست، در حالی که روش ژاکوبی واگراست.
- (ب) آیا ماتریس ضرایب دستگاه فوق غالب قطری است؟
- (ج) آیا شرط غالب قطری بودن ماتریس ضرایب در یک دستگاه شرط لازم است؟
-

سوال ۷. جواب دستگاه زیر را تا دو رقم اعشار محاسبه کنید

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} \cos(y) \\ y = \frac{1}{4} \sin(y) \end{cases}$$

سوال ۸. تقریبی از جواب دستگاه

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$$

بدست آورید که $|y_{n+1} - y_n| < 10^{-3}$ و $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-3}$.

سوال ۹. دستگاه غیرخطی زیر را حل کنید. (جواب را تا ۷ رقم اعشار بدست آورید)

$$\begin{cases} x^2 - 10x + y^2 = -8 \\ xy^2 + x - 10y = -8 \end{cases}$$

موفق باشید.