

## سوال اول

چون این فرمول برای چند جمله‌ای‌های تا درجه ۲ دقیق است پس برای توابع  $\{1, X, X^2\}$  باید مقدار خطا صفر باشد یعنی داریم:

$$f(x) = 1 \quad \int_0^h dr = \omega_1 + \omega_r = h \quad (I)$$

$$f(x) = x \quad \int_0^h \sqrt{x} dr = \frac{2}{3} h \sqrt{h} = \omega_r + \omega_r h \quad (II)$$

$$f(x) = x^2 \quad \int_0^h x dr = \frac{h^2}{2} = \omega_r h^2 \quad (III) \Rightarrow \omega_r = \frac{1}{2}$$

$$\omega_r + \frac{h}{2} = \frac{2}{3} h \sqrt{h} \Rightarrow \omega_r = h \left( \frac{2}{3} \sqrt{h} - \frac{1}{2} \right) \quad \text{و از رابطه (II) داریم:}$$

$$\omega_1 = -\omega_r + h = h - \frac{1}{2} \quad \text{و از رابطه I مقدار}$$

## سوال دوم

در انتگرال گیری به روش رامبرگ براساس روش سیمپسون داریم:

$$I_s^{(m)} = \frac{4^{m+1} I_s^{(m-1)}\left(\frac{h}{4}\right) - I_s^{(m-1)}(h)}{4^{m+1} - 1}, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$h = \frac{1}{4}, \quad x_0 = 0/2, \quad x_1 = 0/5, \quad x_2 = 0/8, \quad f(x) = \frac{x^2}{\cos x}$$

$$I_s\left(\frac{h}{4}\right) = \frac{1}{6} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

$$= \frac{1}{6} (0/040813553 + 4(0/284873481) + 0/918607487) \Rightarrow I_s\left(\frac{h}{4}\right) = 0/34981916$$

$$h = \frac{1}{8}, \quad x_0 = 0/2, \quad x_1 = 0/35, \quad x_2 = 0/5, \quad x_3 = 0/65, \quad x_4 = 0/8$$

$$I_s\left(\frac{h}{8}\right) = \frac{1}{12} [f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3)) + 2f(x_2) + f(x_4)]$$

$$\Rightarrow I_s\left(\frac{h}{8}\right) = \frac{1}{12} (0/040813553 + 4(0/130406172 + 0/530723022) + 2(0/284873481) + 0/918607487) = 0/347807064$$

$$h = \frac{1}{16}, \quad x_0 = 0/2, \quad x_1 = 0/275, \quad x_2 = 0/35, \quad x_3 = 0/425, \quad x_4 = 0/5, \quad x_5 = 0/575$$

$$x_6 = 0/65, \quad x_7 = 0/725, \quad x_8 = 0/8$$

$$I_s\left(\frac{h}{16}\right) = \frac{1}{24} [f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7)) + 2(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6)) + f(x_8)]$$

$$= \frac{1}{24} (0/040813553 + 4(0/078577535 + 0/198262701 + 0/393980019 + 0/702238351) + 2(0/130406172 + 0/284873481 + 0/530723022) + 0/918607487) = 0/347652533$$

پس جواب انتگرال با دقت  $O(h^6)$  برابر است با:

$O(h^2)$	$O(h^4) \quad m=1$	$O(h^6) \quad m=2$
0/34981916	0/347672924	0/347641742
0/347807064	0/34764223	
0/347652533		

$$\int_{0/2}^{0/8} \frac{x^2}{\cos x} dx = 0/347641742$$

## سوال سوم

$$|خطا| \leq \frac{1}{6} \Rightarrow \left| \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi) \right| \leq \frac{1}{6} \quad (*)$$

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 2x - \frac{2x}{x^3} = 2x - \frac{2}{x^2} \Rightarrow f''(x) = 2 + \frac{4}{x^3} \Rightarrow |f''(x)| > 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|f''(x)|} < \frac{1}{2} \xrightarrow{(*)} \frac{(2-1)h^2}{12} |f''(\xi)| \leq \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{h^2}{12} \leq \frac{1}{6} \times \frac{1}{|f''(\xi)|} \Rightarrow \frac{h^2}{12} < \frac{1}{6} \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow h^2 < 1 \Rightarrow h < 1$$

پس می‌توانیم  $h = \frac{1}{4}$  را فرض کنیم، داریم:

$$\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{h}{4} [f(x_0) + f(x_1)] = \frac{1}{4} [(1+1) + (4 + \frac{1}{4})] = \frac{1}{4} \times \frac{25}{4} = 1.5625$$