محاسبات عددی

نیم‌سال دوم ۹۹

مدرس: دکتر فاطمه بهاری‌فرد

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری ششم | فصل ششم | تاریخ تحویل: ۱۴۰۰/۴/۱

۱. الف)

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & -۲ & ۲ & -۳ \\ -۲ & -۱ & ۷ & ۳ \\ ۱ & ۱ & -۵ & -۴ \\ -۳ & -۵ & ۹ & -۴ \end{bmatrix} = LU \implies L = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۲ & ۳ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱ & -۲ & ۰ \\ -۳ & ۱ & ۲ & -۲ \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} -۷ \\ ۲۲ \\ -۲۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = LY \implies Y = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۱۲ \\ ۸ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

$$AX = b \implies LUX = LY \implies UX = Y \implies X = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

ب)

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ & -۱ \\ -۲ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۳ & ۹ & -۷ & -۹ \\ -۳ & -۹ & ۶ & ۱۵ \end{bmatrix} = LU \implies L = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۲ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۳ & ۱ & ۰ \\ -۳ & -۳ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ & -۱ & -۳ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ -۳ \\ ۴ \end{bmatrix} = LY \implies Y = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ -۱۵ \\ ۱۶ \end{bmatrix}$$

$$AX = b \implies LUX = LY \implies UX = Y \implies X = \begin{bmatrix} \frac{۳۷}{۳} \\ ۲۵ \\ ۳۱ \\ \frac{۱۶}{۳} \end{bmatrix}$$

ج)

$$A=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۴/۲۵ & ۲/۷۵ \\ ۱ & ۲/۷۵ & ۳/۵ \end{bmatrix}=L.L^T=\begin{bmatrix} L_{۱۱} & ۰ & ۰ \\ L_{۲۱} & L_{۲۲} & ۰ \\ L_{۳۱} & L_{۳۲} & L_{۳۳} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L_{۱۱} & L_{۲۱} & L_{۳۱} \\ ۰ & L_{۲۲} & L_{۳۲} \\ ۰ & ۰ & L_{۳۳} \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} L_{۱۱}^{۲} & L_{۱۱}L_{۲۱} & L_{۱۱}L_{۳۱} \\ L_{۲۱}L_{۱۱} & L_{۲۱}^{۲}+L_{۲۲}^{۲} & L_{۲۱}L_{۳۱}+L_{۲۲}L_{۳۲} \\ L_{۳۱}L_{۱۱} & L_{۳۱}L_{۲۱}+L_{۳۲}L_{۲۲} & L_{۳۱}^{۲}+L_{۳۲}^{۲}+L_{۳۳}^{۲} \end{bmatrix}\Longrightarrow L=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ \frac{-۱}{۲} & ۲ & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} & ۱ \end{bmatrix}$$

.۲

$$[A|b_۱|b_۲|b_۳]=\begin{bmatrix} ۴ & -۸ & ۵ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۴ & -۷ & ۴ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۳ & -۴ & ۲ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\xRightarrow{r_۲-r_۱}\begin{bmatrix} ۴ & -۸ & ۵ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ & -۱ & ۱ & ۰ \\ ۳ & -۴ & ۲ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\xRightarrow{r_۳-\frac{۳}{۴}r_۱}$$

$$\begin{bmatrix} ۴ & -۸ & ۵ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ & -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & \frac{-۷}{۴} & \frac{-۳}{۴} & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\xRightarrow{r_۳-۲r_۲}\begin{bmatrix} ۴ & -۸ & ۵ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ & -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۴} & \frac{۵}{۴} & -۲ & ۱ \end{bmatrix}\Longrightarrow$$

$$b_۱: X=[۲,۴,۵]$$
$$b_۲: X=[-۴,-۷,-۸]$$
$$b_۳: X=[۳,۴,۴]$$

۳. الف) از $X_۰=[۱,۱,۱]$ شروع می‌کنیم.

$$Y_۰=AX_۰=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ -۲ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \\ ۵ \end{bmatrix}\Longrightarrow C_۱=۵, X_۱=\begin{bmatrix} ۰/۶ \\ ۰/۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$Y_۱=AX_۱=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ -۲ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰/۶ \\ ۰/۲ \\ ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۲/۲ \end{bmatrix}\Longrightarrow C_۲=۲/۲, X_۲=\begin{bmatrix} ۰/۴۵۴۶ \\ ۰/۴۵۴۶ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

با ادامه همین روند داریم:

i	3	4	5	6	7	8
X_i	$\begin{bmatrix} 0.4839 \\ 0.5483 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.5051 \\ 0.5051 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.5017 \\ 0.4949 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.4994 \\ 0.4994 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.4998 \\ 0.5006 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.5001 \\ 0.5001 \\ 1 \end{bmatrix}$
C_i	2.8184	3.1288	3.0204	2.9864	2.9976	3.0016

ب)

$$|\lambda_i - a_{ii}| \leqslant \Sigma_{j=۱,j\neq i}^{۳}|a_{ij}|$$
$$|\lambda_۱ - ۱| \leqslant ۲ \implies -۱ \leqslant \lambda_۱ \leqslant ۳$$
$$|\lambda_۲ - ۱| \leqslant ۴ \implies -۳ \leqslant \lambda_۲ \leqslant ۵$$
$$|\lambda_۳ - ۱| \leqslant ۴ \implies -۳ \leqslant \lambda_۳ \leqslant ۵$$

ج)

$$P_A(t) = det(tI - A) = \begin{vmatrix} t-۱ & -۲ & ۰ \\ ۲ & t-۱ & -۲ \\ -۱ & -۳ & t-۱ \end{vmatrix} =$$
$$(t-۱)((t-۱)^۲ - ۶) + ۲(۲(t-۱) - ۲) = t^۳ - ۳t^۲ + t - ۳$$

.۴

$$x_۱ = \frac{x_۲}{۱۰} - \frac{x_۳}{۵} + \frac{۳}{۵}$$
$$x_۲ = \frac{x_۱}{۱۱} + \frac{x_۳}{۱۱} - \frac{۳x_۴}{۱۱} + \frac{۲۵}{۱۱}$$
$$x_۳ = \frac{-x_۱}{۵} + \frac{x_۲}{۱۰} + \frac{x_۴}{۱۰} - \frac{۱۱}{۱۰}$$
$$x_۴ = \frac{-۳x_۲}{۸} + \frac{x_۳}{۸} + \frac{۱۵}{۸}$$

i	x_1^i	x_2^i	x_3^i	x_4^i
1	0.6	2.2727	-1.1000	1.8750
2	1.0403	1.7159	-0.8052	0.8852
3	0.9326	2.0530	-1.0493	1.1309

.۵

$$a_{۱,i+۱} = \frac{۱۰}{۳} - \frac{a_{۲,i}}{۳} - \frac{a_{۳,i}}{۹}$$
$$a_{۲,i+۱} = \frac{۷۸}{۵} - ۵a_{۱,i+۱} - \frac{a_{۳,i}}{۵}$$
$$a_{۳,i+۱} = ۱۰۵ - ۱۰۰a_{۱,i+۱} - ۱۰a_{۲,i+۱}$$

i	a_1	a_2	a_3
1	0	10.8	-3
2	3.4	-0.8	-277