1-الف)

برای این بخش h را برابر با 0.05 قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = e^x - sin(x) \Rightarrow f'(2) = e^2 - sin(2) \approx 6.4798$$

$$(1) \Rightarrow \frac{f(2.05) - f(2)}{0.05} = \frac{(e^{2.05} - e^2) + (cos(2.05) - cos(2))}{0.05} \approx 6.6784$$

$$(2) \Rightarrow \frac{2f(2.05) - \frac{1}{2}f(2.1) - \frac{3}{2}f(2)}{0.05} = \frac{2e^{2.05} - \frac{1}{2}e^{2.1} - \frac{3}{2}e^2}{0.05} + \frac{2cos(2.05) - \frac{1}{2}cos(2.1) - \frac{3}{2}cos(2)}{0.05}$$

$$\approx 6.4726$$

1-ب)

$$(3) \Rightarrow f'(4.75 + 0.25) \approx \frac{f(5.25) - f(4.75)}{0.5} = \frac{(5.25)^3 \arctan(5.25) - (4.75)^3 \arctan(4.75)}{0.5} \approx 107.9109$$

$$(4) \Rightarrow f''(5) \approx \frac{f(5.5) - 2f(5) + f(4.5)}{0.5^2}$$

$$= \frac{5.5^3 \arctan(5.5) - 2 \times 5^3 \arctan(5) + 4.5^3 \arctan(4.5)}{0.5^2} \approx 45.1221$$

2-

$$\begin{aligned}
f(x \pm h) &= f(x) \pm hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + O(h^3) \\
&\Rightarrow f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + O(h^3) \\
&\Rightarrow f''(x) \approx \frac{1}{h^2}(f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)) \\
h = \frac{1}{4} &\Rightarrow f''(0.5) \approx 16\left(f(\frac{3}{4}) + f(\frac{1}{4}) - 2f(\frac{1}{2})\right) = 4.2164 \\
h = \frac{1}{6} &\Rightarrow f''(0.5) \approx 36\left(f(\frac{2}{3}) + f(\frac{1}{3}) - 2f(\frac{1}{2})\right) = 4.0813 \\
h = \frac{1}{8} &\Rightarrow f''(0.5) \approx 64\left(f(\frac{5}{8}) + f(\frac{3}{8}) - 2f(\frac{1}{2})\right) = 4.0359 \\
h = \frac{1}{10} &\Rightarrow f''(0.5) \approx 100\left(f(\frac{3}{5}) + f(\frac{2}{5}) - 2f(\frac{1}{2})\right) = 4.0152 \\
h = \frac{1}{12} &\Rightarrow f''(0.5) \approx 144\left(f(\frac{7}{12}) + f(\frac{5}{12}) - 2f(\frac{1}{2})\right) = 4.004
\end{aligned}$$

-3

برای محاسبه تقریبی از انتگرال تابع f در فاصله $[0,6]$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^{6h} f(x)dx \cong w_1 f(h) + w_2 f(3h) + w_3 f(5h)$$

الف. ضرایب w_1, w_2, w_3 را چنان تعیین کنید که رابطه فوق برای چندجمله‌ای‌های تا درجه ۲ دقیق باشد.

برای محاسبه تقریبی از انتگرال تابع f در فاصله $[0,6]$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^{6h} f(x)dx \cong w_1 f(h) + w_2 f(3h) + w_3 f(5h)$$

الف.

فرض می‌کنیم که رابطه فوق برای چندجمله‌ای‌های تا درجه ۲ دقیق باشد.
فرمول بالا را برای $f(x) = 1, x, x^2$ بکار می‌بریم

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_0^{6h} dx = 6h = w_1 + w_2 + w_3$$
$$f(x) = x \Rightarrow \int_0^{6h} xdx = [\frac{x^2}{2}]_0^{6h} = \frac{36}{2}h^2 = 18h^2 = hw_1 + 3hw_2 + 5hw_3$$
$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_0^{6h} xdx = [\frac{x^3}{3}]_0^{6h} = 72h^3 = h^2 w_1 + 9h^2 w_2 + 25h^2 w_3$$

$$w_1 + w_2 + w_3 = 6h$$
$$w_1 + 3w_2 + 5w_3 = 18h$$
$$w_1 + 9w_2 + 25w_3 = 72h$$

از حل دستگاه بالا داریم:

$$w_1 = \frac{9}{4}h \quad , \quad w_2 = \frac{3}{2}h \quad , \quad w_3 = \frac{9}{4}h$$

ب.

$$f(x) = x^3 \Rightarrow \int_0^{6h} x^3 = 324h^4$$

از طرف دیگر باتوجه به رابطه داریم

$$\frac{9}{4}h^4 + \frac{3}{2}h \times 27h^3 + \frac{9}{4}h^4 \times 125 = 324h^4$$

که با مقدار دقیق انتگرال‌گیری برابر است.

4-الف)

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} &\approx S_{\frac{1}{3}}(h=0.25) \\
&= \frac{h}{3}(f_0+4f_1+2f_2+4f_3+f_4) \\
&= \frac{0.25}{3}(f(0)+4f(0.25)+2f(0.5)+4f(0.75)+F(1)) \\
&= \frac{1+4\times 0.9412+2\times 0.8+4\times 0.64+0.5}{12} \\
&= \frac{4.1612}{12} \\
&= 0.7854
\end{aligned}
$$

4-ب)

با توجه به رابطه‌ای که در اسلایدها معرفی شده، برای اینکه خطی از مقدار ϵ کمتر شود، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$
h = \sqrt{\frac{12\epsilon}{(b-a)m_2}},\ m_2 = max|f''(x)|,\ x\in[a,b]
$$

بنابراین لازم است رابطه‌ی مشتق دوم تابع را به‌دست بیاوریم:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \\
f''(x) &= \frac{-2(1+x^2)^2+8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2)+8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} \\
f'''(x) &= \frac{24x\left(-x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^4}
\end{aligned}
$$

واضح است که مقدار مشتق سوم در تمام بازه‌ی $[0,1]$ مقداری مثبت است. بنابراین مشتق دوم تابع، صعودی است و مقادیر اکسترمم آن در دو سر بازه رخ می‌دهد. در نتیجه داریم:

$$
\begin{aligned}
m_2 &= max|f''(x)|,\ x\in[a,b] \\
&= max(|f''(0), f''(1)|) \\
&= max(|-2|, |\frac{1}{2}|) \\
&= 2
\end{aligned}
$$

حال می‌توانیم رابطه‌ای را که در ابتدا برای h عنوان کردیم به‌کار بگیریم:

$$
h = \sqrt{\frac{12\times 10^{-3}}{2}} \approx 0.0775
$$

بنابراین تعداد نقاط به‌دست می‌آید:

$$
N = \lceil \frac{b-a}{h} + 1 \rceil = \lceil \frac{1}{0.0775} + 1 \rceil = \boxed{14}
$$

5-الف)

پارامترهای روش دونقطه‌ای در اسلایدها آمده‌است:

$$\begin{cases} w_0, w_1 = 1 \\ x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

همچنین لازم است انتگرال را با تغییرمتغیر $u = x - 1 \to du = dx$ به بازه‌ی $[-1, 1]$ ببریم:

$$\int_0^2 xtan^{-1}(x)dx = \int_{-1}^1 (u+1)tan^{-1}(u+1)du$$

حال می‌توانیم روش دونقطه‌ای را اعمال کنیم:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (u+1)tan^{-1}(u+1)du &= f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}) \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}}tan^{-1}(-\frac{2}{\sqrt{3}}) + \frac{2}{\sqrt{3}}tan^{-1}(\frac{2}{\sqrt{3}}) \\ &= 0.1690 + 1.5865 \\ &= \boxed{1.7555} \end{aligned}$$

اما برای روش ۳ نقطه‌ای ابتدا لازم است ضرایب را بیابیم. برای این منظور از روابط بازگشتی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &P_0(x) = 1 \\ &P_1(x) = x \\ &\dots \\ &P_m(x) = \frac{1}{m}[(2m-1)xP_{m-1}(x) - (m-1)xP_{m-2}(x)] \end{aligned}$$

این چندجمله‌ای ها برای روش سه‌نقطه‌ای به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} &P_0(x) = 1 \\ &P_1(x) = x \\ &P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2} \\ &P_3(x) = \frac{1}{3}(5x(\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}) - 2x) = \frac{5x^3}{2} - \frac{3x}{2} \end{aligned}$$

برای محاسبه‌ی x_i ها که ریشه‌های $P_3(x)$ هستند داریم:

$$\begin{aligned} &\frac{5x^3}{2} - \frac{3x}{2} = 0 \\ &\to x(\frac{5x^2}{2} - \frac{3}{2}) = 0 \\ &\to \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = \sqrt{\frac{3}{5}} \\ x_2 = -\sqrt{\frac{3}{5}} \end{cases} \end{aligned}$$

5-ب)

در ابتدا برای روش رامبرگ می‌بایست مقدار انتگرال را با استفاده از روش Trepezodial برای h های ۰/۱ ، ۰/۲ و ۰/۴ به دست آورده سپس از روش رامبرگ دقت را افزایش دهیم. به این ترتیب داریم:

$$p(x) = \int_{۰}^{۰/۴} \frac{\sin x}{۱ + x^۲}dx \implies T(۰/۱) = \frac{h}{۲}(f_۰ + ۲f_۱ + ۲f_۲ + ۲f_۳ + f_۴)$$

$$\simeq \frac{۱}{۲۰}(۰ + ۰/۱۹۷۸ + ۰/۳۸۲۱ + ۰/۵۴۲۳ + ۰/۳۳۵۸) \simeq ۰/۷۲۹$$

$$\implies T(۰/۲) = \frac{h}{۲}(f_۰ + ۲f_۱ + f_۲) \simeq \frac{۱}{۱۰}(۰ + ۰/۱۹۱۱ + ۰/۳۳۵۶) \simeq ۰/۰۷۱۸$$

$$\implies T(۰/۴) = \frac{h}{۲}(f_۰ + f_۱) \simeq \frac{۱}{۵}(۰ + ۰/۳۳۵۶) \simeq ۰/۰۶۷۱$$

حال برای جدول رامبرگ خواهیم داشت:

x_i			
۰/۴	۰/۰۶۷۱		
۰/۲	۰/۰۷۱۸	۰/۰۷۳۴	
۰/۱	۰/۰۷۲۹	۰/۰۷۳۲	۰/۰۷۳۳

بنابراین در نهایت خواهیم داشت:

$$p(x) = \int_{۰}^{۰/۴} \frac{\sin x}{۱ + x^۲}dx \simeq ۰/۰۷۳۳$$