



محاسبات عددی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۰

مدرس: دکتر فاطمه بهاری‌فرد

تاریخ تحویل: ۱۴۰۱/۳/۱۷

فصل پنجم

تمرین سری پنجم

لطفا توجه فرمایید که:

* مهلت ارسال تمرین ساعت ۲۳:۵۵ روز ۱۷ خرداد ماه است.

* لطفا تمرین‌های تئوری و عملی را در یک فایل فشرده قرار داده و با نام $HW5_StudentID$ آپلود کنید.

* لطفا تمرین‌ها را از یکدیگر کپی نکنید. در صورت وقوع چنین مواردی مطابق با سیاست درس رفتار می‌شود.

۱. پاسخ تقریبی هر معادله را با استفاده از روش خواسته‌شده با گام ۰.۵ محاسبه کنید. (۱۵ نمره)

$$\text{الف) } y' = xe^{3x} - 2y, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 0 \quad (\text{اویلر بهسازی‌شده})$$

$$\text{ب) } y' = 1 + (x - y)^2, \quad 2 \leq x \leq 3, \quad y(2) = 1 \quad (\text{نقطه‌میانی})$$

$$\text{ج) } y' = \frac{1+x}{1+y}, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y(1) = 2 \quad (\text{هیون})$$

۲. نشان دهید روش اویلر برای معادله‌ی دیفرانسیل $y' = \lambda y$ برای $\lambda < 0$ با مقدار ابتدایی $y(0) = 1$ برای طول گام $0 < \lambda h < -2$ پایدار است، یعنی $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$. (۱۰ نمره)

۳. مقدار تقریبی $y(0.2)$ و $y'(0.2)$ را در معادله‌ی دیفرانسیل زیر با گام ۰.۱ با روش رانگ-کوتا مرتبه‌ی چهارم حساب کنید. (۱۵ نمره)

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = e^{2x} \sin x \\ y(0) = -0.4 \\ y'(0) = -0.6 \end{cases}$$

۴. با استفاده از بسط تیلور از معادله‌ی زیر، روش سه‌گامی آدامز-بشفورد را به دست آورید. (۲۰ نمره)

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + ahf(x_i, y(x_i)) + bhf(x_{i-1}, y(x_{i-1})) + chf(x_{i-2}, y(x_{i-2}))$$

۵. با استفاده از روش predict-corrector آدامز مرتبه‌ی سوم، $y(0.8)$ را در معادله‌ی زیر محاسبه کنید. مقادیر اولیه را از روش رانگ کوتای مرتبه‌ی ۳ به دست آورید. (۱۵ نمره)

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \\ h = 0.2 \end{cases}$$

۶. نشان دهید در حل معادله‌ی دیفرانسیل $y' = \lambda y$ می‌توان روش رانگ-کوتا مرتبه‌ی چهارم را به صورت زیر نوشت. (۱۵ نمره)

$$y_{i+1} = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 + \frac{1}{6}(h\lambda)^3 + \frac{1}{24}(h\lambda)^4 \right) y_i$$

۷. برنامه‌نویسی. (۲۰ نمره)

الف) پاسخ معادله‌ی دیفرانسیل $y' = x + y$ با مقدار اولیه‌ی $y(0) = 1$ را در نقطه‌ای دلخواه با استفاده از رانگ-کوتای مرتبه‌ی ۲ (روش دلخواه) محاسبه کرده و نمودار آن را رسم کنید.

ب) جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیل زیر را محاسبه کنید. استفاده از توابع آماده مجاز است.

$$4y^{(4)} + y'' + 2y + 1 = 0$$