راهنمای حل محاسبات عددی

$$\int \simeq \Sigma$$

مؤلفین:

دکتر مسعود نیکوکار

عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر)

دکتر محمدتقی درویشی

عضو هیئت علمی دانشگاه رازی

(گروه ریاضی)

گسترش علوم پایه

فصل سوم

درونیابی و برونیابی

۱ـ هرگاه $x_0, x_1, \cdots, x_n$ نقاط درونیابی و $f_0, f_1, \cdots, f_n$ مقادیر تابع $f(x)$ در این نقاط باشند نشان دهید یک و تنها یک چندجمله‌ای $P(x)$، حداکثر از درجه n، وجود دارد به طوری که:

$$P(x_i) = f_i \quad , \quad i = 0, 1, \cdots, n$$

حل: فرض کنیم $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای از درجه حداکثر n باشند به طوری که

$$P(x_i) = Q(x_i) = f_i \quad , \quad i = 0, 1, \cdots, n \qquad (*)$$

قرار می‌دهیم $h(x) = P(x) - Q(x)$ لذا $h(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n است که باتوجه به رابطه $(*)$ داریم

$$h(x_i) = 0 \quad , \quad i = 0, 1, \cdots, n$$

یعنی x_iها برای $i = 0, 1, \cdots, n$ ریشه‌های چندجمله‌ای $h(x)$ می‌باشند. بنابراین چندجمله‌ای حداکثر از درجه n دارای $n+1$ ریشه (متمایز) است که امکان ندارد مگر

$$h(x) \equiv 0$$

و از آن $P(x) = Q(x)$ یعنی چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط x_i منحصربه‌فرد است. لازم به ذکر است که اثبات وجود چندجمله‌ای درونیاب ضروری است، برای این منظور فرض کنید

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

یک چندجمله‌ای از درجه (حداکثر) n است، هرگاه a_0 تا a_n را بتوانیم طوری به دست آوریم که $P(x_i) = f_i$ در این صورت نشان داده‌ایم که یک چندجمله‌ای درونیاب برای تابع f وجود دارد. برای این

منظور کافی است یک دستگاه شامل $n+1$ معادله برای تعیین $n+1$ مجهول a_0 تا a_n به دست آوریم. از این‌که می‌خواهیم P بر f در نقاط x_i منطبق باشد لذا $P(x_i)=f_i$ برای $i=0,1,\cdots,n$. لذا

$$\begin{aligned}
i=0 \quad &: \quad f_0 = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n \\
i=1 \quad &: \quad f_1 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n \\
&\vdots \\
i=n \quad &: \quad f_n = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n
\end{aligned}$$

دستگاه فوق جواب دارد یعنی a_0 تا a_n را می‌توان تعیین نمود هرگاه دترمینان ضرایب دستگاه صفر نباشد یعنی هرگاه

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^n \end{vmatrix} \neq 0$$

دترمینان فوق به ترمینان واندرموند معروف است و اثبات می‌شود که مخالف صفر است. لذا a_0 تا a_n قابل تعیین هستند یعنی یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n وجود دارد که در نقاط x_i بر f منطبق است.

۲ـ چندجمله‌ای‌های لاگرانژ را برای تابع جدولی زیر به دست آورید.

x_i	0	1	2	4
f_i	3	2	7	59

حل: می‌خواهیم چندجمله‌ای لاگرانژ $L_0(x)$ ، $L_1(x)$، $L_2(x)$ و $L_3(x)$ را به دست آوریم:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)}$$
$$= \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{-8}$$

$$L_0(x) = -\frac{1}{8}(x^3 - 7x^2 + 14x - 8)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)} = \frac{1}{3}(x^3 - 6x^2 + 8x)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)} = \frac{x(x-1)(x-4)}{-4} = -\frac{1}{4}(x^3 - 5x^2 + 4x)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)} = \frac{x(x-1)(x-2)}{24} = \frac{1}{24}(x^3 - 3x^2 + 2x)$$

۳ـ چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی مسأله ۲ را به دست آورده به کمک آن تقریبی از $f(۳)$ به دست آورید.

حل:
$$P(x) = L_۰(x)f_۰ + L_۱(x)f_۱ + L_۲(x)f_۲ + L_۳(x)f_۳$$
$$P(x) = -\frac{۳}{۸}(x^۳ - ۷x^۲ + ۱۴x - ۸) + \frac{۲}{۳}(x^۳ - ۶x^۲ + ۸x) - \frac{۷}{۴}(x^۳ - ۵x^۲ + ۴x) + \frac{۵۹}{۲۴}(x^۳ - ۳x^۲ + ۲x)$$
$$P(x) = x^۳ - ۲x + ۳ \qquad f(۳) \simeq P(۳) = ۳^۳ - ۲ \times ۳ + ۳ = ۲۴$$

۴ـ برای تابع جدولی زیر تقریبی از $f(۰٫۶)$ به دست آورید.

x_i	۰٫۴	۰٫۵	۰٫۷	۰٫۸
f_i	−۰٫۹۱۶۲۹۱	−۰٫۶۹۳۱۴۷	−۰٫۳۵۶۶۷۵	−۰٫۲۲۳۱۴۴

حل: $n = ۳$، ابتدا چندجمله‌ای‌های لاگرانژ $L_۰(x)$ ، $L_۱(x)$، $L_۲(x)$ و $L_۳(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$L_۰(x) = \frac{(x-x_۱)(x-x_۲)(x-x_۳)}{(x_۰-x_۱)(x_۰-x_۲)(x_۰-x_۳)} = \frac{(x-۰٫۵)(x-۰٫۷)(x-۰٫۸)}{(۰٫۴-۰٫۵)(۰٫۴-۰٫۷)(۰٫۴-۰٫۸)}$$
$$= -۰٫۰۱۲(x^۳ - ۲x^۲ + ۱٫۳۱x - ۰٫۲۸)$$

$$L_۱(x) = \frac{(x-x_۰)(x-x_۲)(x-x_۳)}{(x_۱-x_۰)(x_۱-x_۲)(x_۱-x_۳)} = \frac{(x-۰٫۴)(x-۰٫۷)(x-۰٫۸)}{(۰٫۵-۰٫۴)(۰٫۵-۰٫۷)(۰٫۵-۰٫۸)}$$
$$= ۰٫۰۰۶(x^۳ - ۱٫۹x^۲ + ۱٫۱۶x - ۰٫۲۲۴)$$

$$L_۲(x) = \frac{(x-x_۰)(x-x_۱)(x-x_۳)}{(x_۲-x_۰)(x_۲-x_۱)(x_۲-x_۳)} = \frac{(x-۰٫۴)(x-۰٫۵)(x-۰٫۸)}{(۰٫۷-۰٫۴)(۰٫۷-۰٫۵)(۰٫۷-۰٫۸)}$$
$$= -۰٫۰۰۶(x^۳ - ۱٫۷x^۲ + ۰٫۹۲x - ۰٫۱۶)$$

$$L_۳(x) = \frac{(x-x_۰)(x-x_۱)(x-x_۲)}{(x_۳-x_۰)(x_۳-x_۱)(x_۳-x_۲)} = \frac{(x-۰٫۴)(x-۰٫۵)(x-۰٫۷)}{(۰٫۸-۰٫۴)(۰٫۸-۰٫۵)(۰٫۸-۰٫۷)}$$
$$= ۰٫۰۱۲(x^۳ - ۱٫۶x^۲ + ۰٫۸۳x - ۰٫۱۴)$$

$$P(x) = L_۰(x)f_۰ + L_۱(x)f_۱ + L_۲(x)f_۲ + L_۳(x)f_۳$$
$$P(x) = -۱٫۶۸۳۵۸۳x^۳ - ۴٫۵۲۳۹۹۹x^۲ + ۵٫۲۷۶۰۵۴x - ۲٫۴۱۰۶۲۲$$

$$f(0/6) \simeq P(0/6) = -0/509975$$

۵ـ با استفاده از چندجمله‌ای‌های لاگرانژ چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به دست آورید.

x_i	۰	۱	۲	۴
f_i	۱	۱	۲	۵

حل:

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)} = -\frac{1}{8}(x^3 - 7x^2 + 14x - 8)$$
$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)} = \frac{1}{3}(x^3 - 6x^2 + 8x)$$
$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)} = -\frac{1}{4}(x^3 - 5x^2 + 4x)$$
$$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)} = \frac{1}{24}(x^3 - 3x^2 + 2x)$$

$$P(x) = -\frac{1}{8}(x^3 - 7x^2 + 14x - 8) + \frac{1}{3}(x^3 - 6x^2 + 8x) - \frac{1}{2}(x^3 - 5x^2 + 4x) + \frac{5}{24}(x^3 - 3x^2 + 2x)$$

$$P(x) = \frac{1}{12}(-x^3 + 9x^2 - 8x + 12)$$

۶ـ برای تابع جدولی مسأله ۵ تفاضلات تقسیم شده زیر را به دست آورید.

الف. $f[2,4]$ ب. $f[1,2,4]$ پ. $f[0,1,2]$

ت. $f[0,1,2,4]$

حل:

$$\text{الف)}\quad f[2,4] = \frac{f_2 - f_3}{2-4} = \frac{2-5}{2-4} = \frac{3}{2}$$

$$\text{ب)}\quad f[1,2,4] = \frac{f[1,2]-f[2,4]}{1-4} = \frac{\frac{f_1 - f_2}{1-2} - \frac{f_2 - f_3}{2-4}}{1-4} = \frac{\frac{1-2}{1-2} - \frac{3}{2}}{-3} = \frac{1}{6}$$

$$\text{پ)}\quad f[0,1,2] = \frac{f[0,1]-f[1,2]}{0-2} = \frac{\frac{f_0 - f_1}{0-1} - \frac{f_1 - f_2}{1-2}}{0-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ت)}\quad f[0,1,2,4] = \frac{f[0,1,2]-f[1,2,4]}{0-4} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}}{-4} = -\frac{1}{12}$$

۷ـ به روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن چندجمله‌ای‌های درونیاب توابع جدولی مسائل ۲، ۴ و ۵ را به دست آورید.

حل: برای مسأله ۲ داریم

تفاضلات مرتبه

x_i	f_i	اول	دوم	سوم
۰	۳			
		-۱		
۱	۲		۳	
		۵		۱
۲	۷		۷	
		۲۶		
۴	۵۹			

$$P(x) = ۳ - x + ۳x(x-۱) + x(x-۱)(x-۲) = x^۳ - ۲x + ۳$$

چندجمله‌ای‌های مسائل ۴ و ۵ به طور مشابه به دست می‌آیند.

۸ـ به روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به دست آورید.

x_i	-۱	۱	۲
f_i	-۳	۰	۴

حل:

x_i	f_i	اول	دوم
-۱	-۳		
		$\frac{۳}{۲}$	
۱	۰		$\frac{۵}{۶}$
		۴	
۲	۴		

$$P(x) = -۳ + (x+۱)(\frac{۳}{۲}) + (x+۱)(x-۱)(\frac{۵}{۶})$$
$$= -۳ + \frac{۳}{۲}x + \frac{۳}{۲} + \frac{۵}{۶}x^۲ - \frac{۵}{۶}$$
$$P(x) = \frac{۱}{۶}(۵x^۲ + ۹x - ۱۴)$$

۹ـ به کمک فرمول‌های پیشرو و پسرو نیوتن تقریب‌هایی از $f(۱/۱)$ و $f(۲)$ برای تابع جدولی زیر به دست آورید.

x_i	۱	۱/۳	۱/۶	۱/۹	۲/۲
f_i	۰/۷۶۵۱۹۷۷	۰/۶۲۰۰۸۶۰	۰/۴۵۵۴۰۲۲	۰/۲۸۱۸۱۸۶	۰/۱۱۰۳۶۳۲

حل:

x_i	f_i	Δ	$\Delta^۲$	$\Delta^۳$	$\Delta^۴$
۱	۰٫۷۶۵۱۹۷۷				
		−۰٫۱۴۵۱۱			
۱٫۳	۰٫۶۲۰۰۸۶۰		−۰٫۰۱۹۵۷		
		−۰٫۱۶۴۶۸		۰٫۰۱۶۰۷	
۱٫۶	۰٫۴۵۵۴۰۲۲		−۰٫۰۰۸۹		−۰٫۰۰۳۸۹
		−۰٫۱۷۳۵۸		۰٫۰۰۶۷۸	
۱٫۹	۰٫۲۸۱۸۱۸۶		−۰٫۰۰۲۱۲		
		−۰٫۱۷۱۴۶			
۲٫۲	۰٫۱۱۰۳۶۳۲				

$$P(x) = ۰٫۷۶۵۱۹۷۷ - ۰٫۱۴۵۱۱s + \frac{s(s-۱)}{۲}(-۰٫۰۱۹۵۷) + \frac{s(s-۱)(s-۲)}{۶}(۰٫۰۱۶۰۷)$$
$$+ \frac{s(s-۱)(s-۲)(s-۳)}{۲۴}(-۰٫۰۰۳۸۹)$$

$$P(x) = -۰٫۰۰۰۱۶s^۴ + ۰٫۰۰۲۷۳۸s^۳ - ۰٫۰۱۶۸۷۹s^۲ - ۰٫۱۳۰۸۰۹s + ۰٫۷۶۵۱۹۷۷$$

داریم:

$$x = ۱ + ۰٫۳s \to ۰٫۳s = x - ۱ \to s = \frac{x-۱}{۰٫۳}$$

لذا

$$x = ۱٫۱ \Rightarrow s = \frac{۱}{۳}$$
$$x = ۲ \Rightarrow s = \frac{۱}{۰٫۳}$$

بنابراین

$$f(۱٫۱) \simeq ۰٫۷۱۹۸۱۹ \quad (۶D)$$
$$f(۲) = -۰٫۰۱۹۷۵۳ + ۰٫۱۰۱۰۳۷ - ۰٫۱۸۷۵۴۶ - ۰٫۴۳۶۰۳ + ۰٫۷۶۵۱۹۷۷$$
$$f(۲) \simeq ۰٫۲۲۳۲۷۸$$

۱۰ـ به کمک شکل دترمینانی چندجمله‌ای درونیاب، چندجمله‌ای درونیاب توابع جدولی مسائل ۲، ۵ و ۸ را به دست آورید.

حل: برای مسأله ۲

$$\begin{vmatrix} P(x) & 1 & x & x^2 & x^3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 59 & 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0$$

برای مسأله ۵

$$\begin{vmatrix} P(x) & 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0$$

برای مسأله ۸

$$\begin{vmatrix} P(x) & 1 & x & x^2 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

باتوجه به مرتبه کم دترمینان مربوط به مسأله ۸ برای این مسأله داریم:

$$P(x)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} - x^2\begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

و از آن $P(x) = \frac{1}{6}(5x^2 + 9x - 14)$

۱۱ـ برای تابع جدولی مسأله ۲ مقادیر $f(0/5)$ و $f(4/3)$ را تخمین بزنید.

حل: $P(x) = x^3 - 2x + 3$

درونیابی $f(0/5) = 0/125 - 1 + 3 = 2/125$

برونیابی $f(4/3) \simeq 79/507 - 8/6 + 3 \simeq 73/907$

۱۲ـ به کمک چندجمله‌ای درونیاب به دست آمده در مساله ۸ برای $f(۲/۴)$ و $f(۰)$ مقادیری به دست آورید.

حل:

$$P(x) = \frac{۱}{۶}(۵x^۲ + ۹x - ۱۴)$$

$$f(۲/۴) \simeq \frac{۱}{۶}(۲۸/۸ + ۲۱/۶ - ۱۴) = ۶/۰۶۷$$

$$f(۰) \simeq \frac{۱}{۶}(-۱۴) \simeq -۲/۳۳۳$$

۱۳ـ مقادیر خواسته شده در مسائل ۱۱ و ۱۲ را به کمک فرمولهای (۱۵) و (۱۶) به دست آورید.

حل:

x_i	۰	۱	۲	۴
f_i	۳	۲	۷	۵۹

$$\bar{y} = ۳ + \frac{x-۰}{۱-۰}(۲-۳) \Rightarrow \bar{y} = ۳ - x \qquad \bar{y} = ۳ - ۰/۵ = ۲/۵$$

$$f(۰/۵) = ۲/۵$$

$$\bar{y} = ۷ + \frac{x-۲}{۴-۲}(۵۹-۷) \Rightarrow \bar{y} = ۷ + \frac{x-۲}{۲}(۵۲)$$

$$f(۴/۳) = ۷ + \frac{۲/۳}{۲}(۵۲) = ۶۶/۸$$

x_i	-۱	۱	۲
f_i	-۳	۰	۴

$$\bar{y} = -۳ + \frac{x+۱}{۱+۱}(۳) \Rightarrow \bar{y} = -۳ + \frac{x+۱}{۲}(۳) \Rightarrow f(۰) = -۱/۵$$

$$\bar{y} = ۰ + \frac{x-۱}{۲-۱}(۴-۰) \Rightarrow \bar{y} = ۴(x-۱) \Rightarrow f(۲/۴) = ۵/۶$$

۱۴ـ با به دست آوردن یک چندجمله‌ای درجه چهار که تابع جدولی زیر را درونیابی می‌کند مقادیر $f(۵)$، $f(۶)$ و $f(۷)$ را پیشگویی (برونیابی) کنید.

x_i	۰	۱	۲	۳	۴
f_i	۱	-۱	۱	-۱	۱

حل:

x_i	f_i	Δ	$\Delta^۲$	$\Delta^۳$	$\Delta^۴$
۰	۱				
		−۲			
۱	−۱		۴		
		۲		−۸	
۲	۱		−۴		۱۶
		−۲		۸	
۳	−۱		۴		
		۲			
۴	۱				

$$P(x) = ۱ + (-۲)s + ۴\frac{s(s-۱)}{۲} - ۸\frac{s(s-۱)(s-۲)}{۶} + ۱۶\frac{s(s-۱)(s-۲)(s-۳)}{۲۴}$$

$$P(x) = ۱ - ۲s + ۲s^۲ - ۲s - \frac{۸}{۶}s^۳ + ۴s^۲ - \frac{۸}{۳}s + \frac{۲}{۳}s^۴ - ۴s^۳ + \frac{۲۲}{۳}s^۲ - ۴s$$

$$P(x) = \frac{۲}{۳}s^۴ - \frac{۱۶}{۳}s^۳ + \frac{۴۰}{۳}s^۲ - \frac{۳۲}{۳}s + ۱$$

$$x = x_۰ + sh \Rightarrow x = ۰ + s \Rightarrow x = s$$

$$P(x) = \frac{۲}{۳}x^۴ - \frac{۱۶}{۳}x^۳ + \frac{۴۰}{۳}x^۲ - \frac{۳۲}{۳}x + ۱$$

$$P(x) = \frac{۱}{۳}(۲x^۴ - ۱۶x^۳ + ۴۰x^۲ - ۳۲x + ۳)$$

$$f(۵) = \frac{۱}{۳}(۱۲۵۰ - ۲۰۰۰ + ۱۰۰۰ - ۱۶۰ + ۳) = ۳۱$$

$$f(۶) = \frac{۱}{۳}(۲۵۹۲ - ۳۴۵۶ + ۱۴۴۰ - ۱۹۲ + ۳) = ۱۲۹$$

$$f(۷) = \frac{۱}{۳}(۴۸۰۲ - ۵۴۸۸ + ۱۹۶۰ - ۲۲۴ + ۳) = ۳۵۱$$

۱۵ـ مانند مسأله ۱۴ در مورد تابع جدولی زیر عمل نموده و مقادیر $f(۵)$، $f(۶)$ و $f(۷)$ را پیشگویی کنید.

x_i	۰	۱	۲	۳	۴
f_i	۰	۰	۱	۰	۰

حل:

x_i	f_i	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
۰	۰				
		۰			
۱	۰		۱		
		۱		-3	
۲	۱		-2		۶
		-1		۳	
۳	۰		۱		
		۰			
۴	۰				

$$f(x) = \frac{s(s+1)}{2} + \frac{3s(s+1)(s+2)}{6} + \frac{6(s)(s+1)(s+2)(s+3)}{24}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}s^4 + 2s^3 + \frac{19}{4}s^2 + 3s$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(x-4)^4 + 2(x-4)^3 + \frac{19}{4}(x-4)^2 + 3(x-4)$$

$$f(5) = \frac{1}{4} + 2 + \frac{19}{4} + 3 = 10$$

$$f(6) = \frac{1}{4}(16) + 2(8) + \frac{19}{4}(4) + 6 = 45$$

$$f(7) = \frac{1}{4}(81) + 2(27) + \frac{19}{4}(9) + 3(3) = 126$$

«مسائل تکمیلی فصل سوم»

۱ـ اگر مقدار تابع f در x_0 برابر f_0 و در x_1 برابر f_1 باشد چندجمله‌ای درونیاب f را در نقاط x_0 و x_1 به دست آورید و به کمک آن تخمینی از $f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)$ را محاسبه کنید.

۲ـ در جدول زیر تقریبی از $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ و $f\left(\frac{3}{2}\right)$ برآورد کنید:

x_i	-1	0	1	2
f_i	-2	-1	0	7

۳ـ در چندجمله‌ای لاگرانژ اگر $F(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ باشد نشان دهید

$$L_j(x) = \frac{F(x)}{(x-x_j)F'(x)}$$

۴ـ درجه چندجمله‌ای مربوط به تابع جدولی زیر را حساب کنید:

x_i	0	1	2	3	4	5
f_i	3	2	7	24	59	118

۵ـ اگر $f(x) = \sin(\frac{\pi x}{2})$ چندجمله‌ای درونیاب f را در نقاط $x_0 = -1\ ,\ x_1 = 0\ ,\ x_2 = 1$ به دست آورید و یک کران بالا برای خطای آن حساب کنید.

۶ـ اگر $\{y_0, y_1, \cdots, y_n\} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ ثابت کنید:

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = f[y_0, y_1, \cdots, y_n]$$

(یعنی در تفاضلات تقسیم شده ترتیب x_iها اهمیتی ندارد.)

۷ـ اگر $f(x) = x^{n+1}$ و $p(x)$ چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط متمایز x_0 تا x_n باشد نشان دهید:

الف) $p(x) = x^{n+1} - (x-x_0)\cdots(x-x_n)$ ب) $f[x, x_0, \cdots, x_n] = 1$

۸ـ به کمک جدول زیر یک برآورد از $\sin 5^\circ$ و $\sin 15^\circ$ به دست آورید:

x_i	0	10	20	30
$\sin x_i$	0	$0/1736$	$0/342$	$0/5$

۹ـ برای تابع جدولی زیر مقدارهای $f[-۱,۱,۲]$ و $f[۱,۲,۳]$ را حساب کنید:

x_i	-۱	۱	۲	۳
f_i	$-۱/۱$	۳/۲	۱/۲	۳۱/۲

۱۰ـ در چه صورتی چندجمله‌ای درونیاب تابع f در نقاط متمایز $x_n, \cdots, x_۱, x_۰$ خود تابع f است.

۱۱ـ تابع $\cos x$ را با چه اندازه گام h باید جدول‌بندی کرد تا خطای حاصل از درونیابی نابیشتر از $\frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$ شود.

۱۲ـ به کمک چندجمله‌ای درونیاب $f(x) = x^۲ + ۱$ کسر $\frac{x^۲ + ۱}{x(x-۱)(x-۲)(x-۳)}$ را تجزیه کنید.

۱۳ـ فرض کنید $f(x) = x^k$، چندجمله‌ای درونیاب f را در نقاط $x_n, \cdots, x_۱, x_۰$ به دست آورید.

۱۴ـ با استفاده از مقادیر $\cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲}$ و $\cos ۴۵^\circ = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ تقریبی از $\cos ۵۰^\circ$ به دست آورید.

۱۵ـ تابع $\sin x$ را با چه اندازه گام h باید جدول‌بندی کرد تا خطای حاصل از درونیابی نابیشتر از $\frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۶}$ شود.

۱۶ـ با استفاده از تفاضلات تقسیم شده چندجمله‌ای درجه سومی را برحسب y چنان بسازید که در $y = ۰, ۱, ۱۶, ۸۱$ بر $x = y^{\frac{۱}{۴}}$ منطبق شود. مقدار چندجمله‌ای را برای $y = ۶۴$ حساب کنید.

۱۷ـ با فرض این‌که

$$f(-۲) = ۴۶\ ,\ f(-۱) = ۴\ ,\ f(۱) = ۴\ ,\ f(۳) = ۱۵۶\ ,\ f(۴) = ۴۸۴$$

برای محاسبه $f(۰)$ از دستور لاگرانژ استفاده کنید.

۱۸ـ به کمک دستور تفاضلات تقسیم شده مقدار $f(۰)$ را در جدول زیر حساب کنید:

x_i	-۲	-۱	۱	۳
f_i	۴۶	۴	۴	۱۵۶

۱۹ـ معادله $x - ۹^{-x} = ۰$ یک جواب در $[۰,۱]$ دارد. چندجمله‌ای درونیاب را در نقاط زیر برای تابع $f(x) = x - ۹^{-x}$ بیابید.

$$x_۰ = ۰ \quad , \quad x_۱ = ۰/۵ \quad , \quad x_۲ = ۱$$

با مساوی صفر قرار دادن چندجمله‌ای درونیاب و حل معادله یک جواب تقریبی برای ریشهٔ معادله بیابید.

۲۰ـ ثابت کنید اگر f یک چندجمله‌ای از درجه k باشد آن‌گاه برای $k < n$ داریم:

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = 0$$

۲۱ـ چندجمله‌ای درونیاب نیوتن را برای جدول زیر تعیین کنید:

x	۰	۱	۲	۷
y	۵۱	۳	۱	۲۰۱

۲۲ـ به کمک درونیابی لاگرانژ چندجمله‌ای درجه ۳ یا کمتر را که با $f(x) = x^3$ در $x_0 = 1$ ، $x_1 = 6$ و $x_2 = 7$ یکی است محاسبه کنید.

۲۳ـ چندجمله‌ای درونیاب تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را یکبار در نقاط ۱ ، ۸ و ۲۷ و یک بار هم در نقاط ۰، ۱، ۸ و ۲۷ به دست آورید. چندجمله‌ای درونیاب اول را $p_1(x)$ و دومی را $p_2(x)$ بنامید. $p_1(14)$ و $p_2(14)$ را به دست آورید. چرا خطای $p_2(14)$ بیشتر از خطای $p_1(14)$ است.

۲۴ـ داده‌های جدول زیر را درنظر بگیرید:

x	-1	۰	۱	۲
$f(x)$	-3	-1	۰	۵

چندجمله‌ای درونیاب جدول فوق را بیابید و $f(0/5)$ و $f(1/5)$ را تقریب بزنید.

۲۵ـ چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر از چه درجه‌ای است؟ با افزودن نقطه $(x_3, f_3) = (3/0, 3/00)$ به جدول، چندجمله‌ای درونیاب را با استفاده از محاسبات قبلی به دست آورید.

x_i	۰٫۰	۱٫۰	۲٫۰
f_i	۰٫۰۰	۰٫۷۵	۲٫۲۵

۲۶ـ چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به دست آورده و تقریبی از $f(0/8)$ و $f(0/3)$ ارائه نمایید.

x_i	۰٫۰۰	۰٫۲۵	۰٫۵۰	۰٫۷۵	۱٫۰۰
f_i	۰٫۰۰	۰٫۳۵	۰٫۱۵	۰٫۲۰	۰٫۱۸

۲۷ـ چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به دست آورده و تقریبی از $f(0/5)$ و $f(3/5)$ ارائه نمایید.

x_i	۰	۱	۲	۳	۴
f_i	۰	۰٫۵	۷	۲۵٫۵	۶۲

۲۸ـ نشان دهید که اگر f یک تابع چند جمله‌ای درجهٔ n به صورت $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ باشد و x_iها دو به دو متمایز باشند آن‌گاه

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = a_n$$

۲۹ـ تقریبی از مشتق تابع $f(x)$ را در نقاط $x = ۰/۱$ و $x = ۰/۵$ به دست آورید هرگاه f به صورت جدولی زیر داده شده باشد:

x_i	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵
f_i	۰/۹۹۵۰	۰/۹۸۰۰	۰/۹۵۵۳	۰/۹۲۱۰	۰/۹۸۷۷۵

فصل چهارم

مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی

۱ـ تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را درنظر بگیرید. فاصله $[۱, ۱/۳۰]$ را به صورت $x = ۱/۰(۰/۰۵)۱/۳۰$ جدول‌بندی کنید و مقادیر خواسته شده زیر را به دست آورید.

الف. با استفاده از رابطه (۸) مقدار $f'(۱)$ را بدست آورید.

حل:

$$f'_i \cong \frac{f_{i+۱}-f_i}{h}$$

$$f'(۱) \cong \frac{f(۱/۰۵)-f(۱)}{۰/۰۵} = \frac{\sqrt{۱/۰۵}-۱}{۰/۰۵} = ۰/۴۹۴$$

ب. با استفاده از رابطه (۹) مقدار $f'(۱)$ را بدست آورید.

حل:

$$f'_i \cong \frac{۲f_{i+۱}-\frac{۱}{۲}f_{i+۲}-\frac{۳}{۲}f_i}{h}$$

$$f'(۱) \cong \frac{۲\sqrt{۱/۰۵}-\frac{۱}{۲}\sqrt{۱/۱}-\frac{۳}{۲}}{۰/۰۵} = ۰/۴۹۹۷$$

پ. با استفاد از رابطه (۱۰) یک تقریب برای $f''(۱)$ بدست آورید.

حل:

$$f''_i \cong \frac{f_{i+۲}-۲f_{i+۱}+f_i}{h^۲}$$

$$f''(۱) \cong \frac{\sqrt{۱/۱}-۲\sqrt{۱/۰۵}+۱}{(۰/۰۵)^۲} = -\frac{۰/۰۰۰۰۵۸۱۳۰۵}{۰/۰۰۲۵} = -۰/۲۳۲۵$$

۲ـ برای تابع مسأله ۱ با استفاده از رابطه (۸) مقادیری برای $f'_i, i = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$ به دست آورید.

حل:

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$
۱	۱		
		۰٫۰۲۴۶۹	
۱٫۰۵	$\sqrt{۱٫۰۵}$		−۰٫۰۰۰۵۸
		۰٫۰۲۴۱۱	
۱٫۱	$\sqrt{۱٫۱}$		−۰٫۰۰۰۵۳۹
		۰٫۰۲۳۵۷۱	
۱٫۱۵	$\sqrt{۱٫۱۵}$		−۰٫۰۰۰۵۰۷
		۰٫۰۲۳۰۶۴	
۱٫۲	$\sqrt{۱٫۲}$		−۰٫۰۰۰۴۷۶
		۰٫۰۲۲۵۸۸	
۱٫۲۵	$\sqrt{۱٫۲۵}$		−۰٫۰۰۰۴۴۷
		۰٫۰۲۲۱۴۱	
۱٫۳	$\sqrt{۱٫۳}$		

$f'_۱ = ۰٫۴۹۳۸ \quad f'_۲ = ۰٫۴۸۲ \quad f'_۳ = ۰٫۴۷۰۲$

$f'_۴ = ۴۶۱۲۸ \quad f'_۵ = ۰٫۴۵۱۷۶$

۳ـ مسأله ۲ را با استفاده از رابطه ۹ حل کنید.

حل:

$$f'_i \cong \frac{۱}{h}\left[\Delta f_i - \frac{۱}{۲}\Delta^۲ f_i\right]$$

$f'_۱ = ۰٫۴۹۹۶ \quad f'_۲ = ۰٫۴۸۷۵۹$

$f'_۳ = ۰٫۴۷۶۴۶ \quad f'_۴ = ۰٫۴۶۶۰۴ \quad f'_۵ = ۰٫۴۵۶۲۳$

۴ـ برای تابع مسأله ۱ با استفاد از رابطه ۱۰ مقادیری برای $i = ۱,۲,۳,۴,۵$ ، f''_i به دست آورید.

حل:

$$f''_i = \frac{\Delta^۲ f_i}{h^۲}$$

$f''_۱ = -۰٫۲۳۲ \quad f''_۲ = -۰٫۲۱۵۶ \quad f''_۳ = -۰٫۲۰۲۲۸ \quad f''_۴ = -۰٫۱۹۰۴$

$f''_۵ = -۰٫۱۷۸۸$

۵ـ برای تابع مسأله ۱ با استفاده از رابطه ۱۲ تقریبی برای $f'(۱٫۱۲۵)$ به دست آورید.

حل:

$$f'(x_i + \frac{h}{۲}) \cong \frac{f_{i+۱} - f_i}{h}$$

$$f'(۱/۱ + ۰/۰۲۵) \cong \frac{f(۱/۱۵) - f(۱/۱)}{۰/۰۵} = \frac{\sqrt{۱/۱۵} - \sqrt{۱/۱}}{۰/۰۵} = ۰/۴۷۱۴$$

۶ـ انتگرال $\int_{۱}^{۱/۳} \sqrt{x}dx$ را درنظر بگیرید مقادیر خواسته شده را با $(۵D)$ به دست آورید.

الف. $T(۰/۳)$ ب. $T(۰/۱۵)$ پ. $T(۰/۱)$ $T(۰/۰۵)$

حل:

$$T(۰/۳) = \frac{۰/۳}{۲}[f(۱) + f(۱/۳)] = ۰/۱۵[۱ + \sqrt{۱/۳}] = \frac{۰/۶۴۲۰۵۱}{۲} = ۰/۳۲۱۰۲$$

$$T(۰/۱۵) = \frac{۰/۱۵}{۲}[f(۱) + ۲f(۱/۱۵) + f(۱/۳)] = ۰/۰۷۵[۱ + ۲\sqrt{۱/۱۵} + \sqrt{۱/۳}]$$
$$= ۰/۳۲۱۳۷$$

$$T(۰/۱) = \frac{۰/۱}{۲}[f(۱) + ۲f(۱/۱) + ۲f(۱/۲) + f(۱/۳)]$$
$$= ۰/۰۵[۱ + ۲\sqrt{۱/۱} + ۲\sqrt{۱/۲} + \sqrt{۱/۳}] = ۰/۳۲۱۴$$

$$T(۰/۰۵) = \frac{۰/۵}{۲}[f(۱) + ۲f(۱/۰۵) + ۲f(۱/۱) + ۲f(۱/۱۵) + ۲f(۱/۲)$$
$$+ ۲f(۱/۲۵) + f(۱/۳)]$$
$$= \frac{۰/۰۵}{۲}[۱ + ۲\sqrt{۱/۰۵} + ۲\sqrt{۱/۱} + ۲\sqrt{۱/۱۵}$$
$$+ ۲\sqrt{۱/۲} + ۲\sqrt{۱/۲۵} + \sqrt{۱/۳}] = ۰/۳۲۱۴۷$$

۷ـ با استفاده از قاعده ذوزنقه‌ای مقدار $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{۱ + x}$ را به ازای $h = ۱, h = ۰/۵, h = ۰/۲۵$ با $(۴D)$ به دست آورید.

حل:

$$T(۱) = \frac{۱}{۲}[f(۰) + f(۱)] = ۰/۷۵۰۰$$

$$T(۰/۵) = \frac{۰/۵}{۲}[f(۰) + ۲f(۰/۵) + f(۱)]$$
$$= \frac{۰/۵}{۲}[۱ + ۱/۳۳۳۳ + \frac{۱}{۲}] = ۰/۷۰۸۳$$

$$T(۰/۲۵) = \frac{۰/۲۵}{۲}[f(۰) + ۲f(۰/۲۵) + ۲f(۰/۵) + ۲f(۰/۷۵) + f(۱)]$$
$$= \frac{۰/۲۵}{۲}[۱ + ۲[\frac{۱}{۱/۲۵} + \frac{۱}{۱/۵} + \frac{۱}{۱/۷۵}] + \frac{۱}{۲}] = ۰/۶۹۷۰$$

۸ـ مقدار $\int_{0}^{1} x^{2}dx$ را به روش ذوزنقه‌ای و به ازای $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $h = 1$ حساب کنید.

حل:

$$T(1) = \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] = \frac{1}{2}$$
$$T(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}[f(0) + 2f(\frac{1}{2}) + f(1)] = \frac{3}{8}$$
$$T(\frac{1}{4}) = \frac{1}{8}[f(0) + 2[f(\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{3}{4})] + f(1)]$$
$$= \frac{1}{8}[0 + 2[\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{9}{16}] + 1] = \frac{11}{32}$$

۹ـ تقریبی از $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ را با $T(\frac{\pi}{8})$ به دست آورید.

$$T(\frac{\pi}{8}) = \frac{\pi}{16}[f(0) + 2[f(\frac{\pi}{8}) + f(\frac{\pi}{4}) + f(3\frac{\pi}{8})] + f(\frac{\pi}{2})] = 0{,}987111$$

۱۰ـ تقریب‌هایی از $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x}$ را با $T(\frac{1}{2})$ و $T(1)$ به دست آورید.

حل:

$$T(1) = \frac{1}{2}[f(1) + 2f(2) + f(3)] = \frac{7}{6}$$
$$T(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}\left[f(1) + 2f(\frac{3}{2}) + 2f(\frac{5}{2}) + f(3)\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[1 + \frac{32}{15} + \frac{1}{3}\right] = \frac{52}{60}$$

۱۱ـ مقدار انتگرال $\int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x}$ را با $S(0{,}1)$ به دست آورید.

حل:

$$S(0{,}1) = \frac{0{,}1}{3}[f(0) + 4f(0{,}1) + 2f(0{,}2) + 4f(0{,}3) + 2f(0{,}4) + 4f(0{,}5)$$
$$+ 2f(0{,}6) + 4f(0{,}7) + 2f(0{,}8) + 4f(0{,}9) + f(1)] = 0{,}69315023 \simeq 0{,}6931$$

۱۲ـ مقدار انتگرال $\int_{0}^{1} x^{3}dx$ را با $S(0{,}5)$ به دست آورید.

حل: $S(0{,}5) = \frac{0{,}5}{3}[f(0) + 4f(0{,}5) + f(1)] = \frac{0{,}5}{3}[0 + 4(0{,}5)^{3} + 1] = 0{,}25$

۱۳ـ مقدار انتگرال $\int_{۰}^{۱} \frac{\sin x}{x}dx$ را با $S(۰٫۲۵)$ را به دست آورید. (قرار دهید $۱ = \lim\limits_{x\to ۰} \frac{\sin x}{x}$)

حل: باتوجه به حد بیان شده داریم $f(۰) = ۱$ لذا

$$S(۰٫۲۵) = \frac{۰٫۲۵}{۳}[f(۰) + ۴f(۰٫۲۵) + ۲f(۰٫۵) + ۴f(۰٫۷۵) + f(۱)]$$
$$= \frac{۰٫۲۵}{۳}\left[۱ + ۴\frac{\sin ۰٫۲۵}{۰٫۲۵} + ۲\frac{\sin ۰٫۵}{۰٫۵} + ۴\frac{\sin ۰٫۷۵}{۰٫۷۵} + \sin ۱\right] = ۰٫۹۴۶۰۸۶ \simeq ۰٫۹۴۶۱$$

۱۴ـ مقدار انتگرال $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin x dx$ را به روش سیمپسون و $h = \frac{\pi}{۸}, \frac{\pi}{۱۶}, \frac{\pi}{۳۲}, \frac{\pi}{۶۴}$ به دست آورید.

حل:

$$S(\frac{\pi}{۸}) = \frac{\pi}{۲۴}\left[f(۰) + ۴f(\frac{\pi}{۸}) + ۲f(\frac{\pi}{۴}) + ۴f(\frac{۳\pi}{۸}) + f(\frac{\pi}{۲})\right]$$
$$= \frac{\pi}{۲۴}\left[\sin ۰ + ۴\sin\frac{\pi}{۸} + ۲\sin\frac{\pi}{۴} + ۴\sin\frac{۳\pi}{۸} + \sin\frac{\pi}{۲}\right] = ۱٫۰۰۰۱۳۴۵۸۵$$

$$S(\frac{\pi}{۱۶}) = \frac{\pi}{۴۸}[\sin ۰ + ۴\sin\frac{\pi}{۱۶} + ۲\sin\frac{\pi}{۸} + ۴\sin\frac{۳\pi}{۱۶} + ۲\sin\frac{\pi}{۴} + ۴\sin\frac{۵\pi}{۱۶}$$
$$+ ۲\sin\frac{۳\pi}{۸} + ۴\sin\frac{۷\pi}{۱۶} + \sin\frac{\pi}{۲}] = ۱٫۰۰۰۰۰۰۸۱$$

$$S(\frac{\pi}{۳۲}) = \frac{\pi}{۹۶}[\sin ۰ + ۴\sin\frac{\pi}{۳۲} + ۲\sin\frac{\pi}{۱۶} + ۴\sin\frac{۳\pi}{۳۲} + ۲\sin\frac{\pi}{۸} + ۴\sin\frac{۵\pi}{۳۲}$$
$$+ ۲\sin\frac{۴\pi}{۳۲} + ۴\sin\frac{۷\pi}{۳۲} + ۲\sin\frac{\pi}{۴} + ۴\sin\frac{۹\pi}{۳۲} + ۲\sin\frac{۱۰\pi}{۳۲} + ۴\sin\frac{۱۱\pi}{۳۲}$$
$$+ ۲\sin\frac{۱۲\pi}{۳۲} + ۴\sin\frac{۱۳\pi}{۳۲} + ۲\sin\frac{۱۴\pi}{۳۲} + ۴\sin\frac{۱۵\pi}{۳۲} + \sin\frac{\pi}{۲}] = ۰٫۹۹۹۹۹۹۸۳$$

به طور مشابه $S(\frac{\pi}{۶۴}) = ۱٫۰۰۰۰۰۰۰۳$.

۱۵ـ تابع جدولی زیر را درنظر بگیرید مقدار $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} f(x)dx$ را به روش ذوزنقه و روش سیمپسون به دست آورید.

x_i	۰	$\frac{\pi}{۱۲}$	$\frac{۲\pi}{۱۲}$	$\frac{۳\pi}{۱۲}$	$\frac{۴\pi}{۱۲}$	$\frac{۵\pi}{۱۲}$	$\frac{\pi}{۲}$
f_i	۰	۰٫۲۵۸۸۲	۰٫۵	۰٫۷۰۷۱۱	۰٫۸۶۶۰۳	۰٫۹۶۵۹۳	۱

حل: داریم $h = \frac{۲}{۳}$ لذا

$$T(\frac{\pi}{۱۲}) = \frac{\pi}{۲۴}\left[f(۰) + ۲\left[f(\frac{\pi}{۱۲}) + f(\frac{۲\pi}{۱۲}) + f(\frac{۳\pi}{۱۲}) + f(\frac{۴\pi}{۱۲}) + f(\frac{۵\pi}{۱۲})\right] + f(\frac{\pi}{۲})\right].$$
$$= \frac{\pi}{۲۴}[۲[۰٫۲۵۸۸۲ + ۰٫۵ + ۰٫۷۰۷۱۱ + ۰٫۸۶۶۰۳ + ۰٫۹۶۵۹۳] + ۱] = ۰٫۹۹۴۲۸۵$$

$$\ldots\frac{\pi}{۱۲}) = \frac{\pi}{۳۶}\left[f(۰) + ۴f(\frac{\pi}{۱۲}) + ۲f(\frac{۲\pi}{۱۲}) + ۴f(\frac{۳\pi}{۱۲}) + ۲f(\frac{۴\pi}{۱۲}) + ۴f(\frac{۵\pi}{۱۲}) + f(\frac{\pi}{۲})\right]$$

$$= \frac{\pi}{۳۶}[۴ \times ۰٫۲۵۸۸۲ + ۲ \times ۰٫۵ + ۴ \times ۰٫۷۰۷۱۱ + ۲ \times ۰٫۸۶۶۰۳ + ۴ \times ۰٫۹۶۵۹۳ + ۱]$$

$$= ۱٫۰۰۰۰۳$$

۱۶ـ با استفاده از فرمول نیوتن ـ کاتس چهارنقطه‌ای ($n = ۳$) مقدار $\int_۱^۳ e^{\frac{-x}{۲}}dx$ را به دست آورید.

حل:

$$\int_۱^۳ e^{\frac{-x}{۲}}dx \cong \frac{۳}{۸}h[f(x_۰) + ۳f(x_۱) + ۳f(x_۲) + f(x_۳)]$$

$$= \frac{۲}{۸}\left[f(۱) + ۳f(\frac{۵}{۳}) + ۳f(\frac{۷}{۳}) + f(۳)\right]$$

$$= \frac{۲}{۸}\left[e^{\frac{-۱}{۲}} + ۳e^{\frac{-۵}{۶}} + ۳e^{\frac{-۷}{۶}} + e^{\frac{-۳}{۲}}\right]$$

$$= \frac{۲}{۸}\left[e^{-\frac{۱}{۲}} + ۳e^{\frac{-۵}{۶}} + ۳e^{\frac{-۷}{۶}} + e^{\frac{-۳}{۲}}\right] = ۰٫۷۶۶۹۲$$

۱۷ـ با استفاده از فرمول نیوتن کاتس چهارنقطه‌ای ($n = ۳$) تقریبی از انتگرال‌های زیر به دست آورید.

الف. $\int_۰^۱ \sqrt{۱ + x}dx$

حل:

$$\int_۰^۱ \sqrt{۱ + x}dx = \frac{۱}{۸}\left[f(۰) + ۳f(\frac{۱}{۳}) + ۳f(\frac{۲}{۳}) + f(۱)\right]$$

$$= \frac{۱}{۸}\left[۱ + ۳\sqrt{\frac{۴}{۳}} + ۳\sqrt{\frac{۵}{۳}} + \sqrt{۲}\right] = ۱٫۲۱۸۹۱$$

ب. $\int_۱^{۱٫۵} e^x dx$

حل:

$$\int_۱^{۱٫۵} e^x dx \cong \frac{۳h}{۸}[f(۱) + ۳f(\frac{۷}{۶}) + ۳f(\frac{۸}{۶}) + f(۱٫۵)]$$

$$= \frac{۳}{۸}\cdot\frac{۱}{۶}[۲٫۷۱۸۲۸۱۸۲۸ + ۳(۳٫۲۱۱۲۷۰۵۴۳) +$$

$$۳(۳٫۷۹۳۶۶۷۸۹۵) + ۴٫۴۸۱۶۸۹۰۷]$$

$$= \frac{۱}{۱۶}[۲۸٫۲۱۴۷۸۶۲۱] = ۱٫۷۶۳۴۲۴۱۳۸$$

۱۸ـ مقدار $\int_۱^{۱٫۵} e^{-x^۲}dx$ را به روش نیوتن ـ کاتس و با $h = \frac{۱}{۶}$ به دست آورید.

حل:
$$\int_{۱}^{۱٫۵} e^{-x^۲}dx = \frac{۳}{۸} \times \frac{۱}{۶}\left[f(۱) + ۳f(\frac{۷}{۶}) + ۳f(\frac{۴}{۳}) + f(۱٫۵)\right]$$
$$= \frac{۱}{۱۶}\left[e^{-۱} + ۳e^{\frac{-۴۹}{۳۶}} + ۳e^{\frac{-۱۶}{۹}} + e^{۲٫۲۵}\right] = ۰٫۱۰۹۳۴$$

۱۹ـ مقدار انتگرال مسأله ۱۸ را با روش گاوس دونقطه‌ای به دست آورید.

حل:
$$\int_{-۱}^{۱} f(x)dx \cong f(-\frac{\sqrt{۳}}{۳}) + f(\frac{\sqrt{۳}}{۳})$$
$$x = \frac{۱}{۲}[(b-a)u + (b+a)] \quad , \quad dx = \frac{b-a}{۲}du$$

لذا برای $a = ۱$ و $b = ۱٫۵$ خواهیم داشت:

$$x = \frac{۰٫۵u + ۲٫۵}{۲} \quad , \quad dx = \frac{۰٫۵}{۲}du$$
$$\int_{۱}^{۱٫۵} e^{-x^۲}dx = \frac{۰٫۵}{۲}\int_{-۱}^{۱} e^{-\frac{(۰٫۵u+۲٫۵)^۲}{۲}}du$$
$$f(x) = e^{-\frac{(۰٫۵x+۲٫۵)^۲}{۲}} \quad , \quad f(\frac{\sqrt{۳}}{۳}) = e^{-۱٫۹۴۴۱۷۷} \quad , \quad f(\frac{-\sqrt{۳}}{۳}) = e^{-۱٫۲۲۲۴۸۹۲}$$
$$\int_{۱}^{۱٫۵} e^{-x^۲}dx = ۰٫۲۵\left[f(\frac{\sqrt{۳}}{۳}) + f(\frac{-\sqrt{۳}}{۳})\right] = ۰٫۱۰۹۴۰۰$$

۲۰ـ مقدار انتگرال مسأله ۱۸ را با روش گاوس سه‌نقطه‌ای به دست آورید.

حل:
$$\int_{-۱}^{۱} f(x)dx \cong \frac{۱}{۶}\left[۵f(-\sqrt{\frac{۳}{۵}}) + ۸f(۰) + ۵f(\sqrt{\frac{۳}{۵}})\right]$$
$$\int_{۱}^{۱٫۵} e^{-x^۲}dx = \frac{۰٫۵}{۲}\int_{-۱}^{۱} e^{-(\frac{۰٫۵u+۲٫۵}{۲})^۲}du$$
$$f(x) = e^{-(\frac{۰٫۵x+۲٫۵}{۲})^۲}$$
$$f(۰) = e^{-۱٫۵۶۲۵} \quad f(\sqrt{\frac{۳}{۵}}) = e^{-۲٫۰۸۴۱۲۲۹۲} \quad , \quad f(-\sqrt{\frac{۳}{۵}}) = e^{-۱٫۱۱۵۸۷۷۰۸}$$
$$\int_{۱}^{۱٫۵} e^{x^۲}dx = \frac{۰٫۵}{۲} \times \frac{۱}{۹}[۵ \times e^{-۱٫۱۱۵۸۷۷۰۸۲} + ۸ \times e^{-۱٫۵۶۲۵} + ۵ \times e^{-۲٫۰۸۴۱۲۲۹۲}]$$
$$= ۰٫۱۰۹۳۶۴۱۹۶$$

۲۱ـ مقدار $\int_{۱}^{۳} e^x \sin x dx$ را با روش گاوس دونقطه‌ای به دست آورید.

حل: تغییر متغیر زیر را انجام می‌دهیم:

$$x = \frac{۱}{۲}[(b-a)u + (b+a)] \quad و \quad dx = \frac{b-a}{۲}du$$

$$x = u + ۲ \;\Rightarrow\; dx = du$$

$$\int_{۱}^{۳} e^x \sin x dx = \int_{-۱}^{۱} e^{u+۲} \sin(u+۲) du$$

$$f(x) = e^{x+۲} \sin(x+۲)$$

$$f(\frac{\sqrt{۳}}{۳}) = ۷/۰۳۸۸۳۴۲۲۳ \quad , \quad f(-\frac{\sqrt{۳}}{۳}) = ۴/۱۰۲۶۶۰۴۲۲$$

$$\int_{۱}^{۳} e^x \sin x dx = ۱۱/۱۴۱۴۹$$

۲۲ـ مقدار انتگرال مسأله ۲۱ را با روش گاوس سه نقطه‌ای به دست آورید.

حل: تغییر متغیر زیر را انجام می‌دهیم:

$$x = u + ۲ \quad dx = du$$

$$\int_{۱}^{۳} e^x \sin x dx = \int_{-۱}^{۱} e^{u+۲} \sin(u+۲) du \quad , \quad f(x) = e^{x+۲} \sin(x+۲)$$

$$f(۰) = ۶/۷۱۸۸۴۹ \,, \quad f(\sqrt{\frac{۳}{۵}}) = ۵/۷۵۲۵۴۸ \,, \quad f(-\sqrt{\frac{۳}{۵}}) = ۳/۲۰۴۴۱۶۶۲۲$$

$$\int_{۱}^{۳} e^x \sin x dx = \frac{۱}{۹}[۵ \times ۳/۲۰۴۴۱۷ + ۸ \times ۶/۷۱۸۸۴ + ۵ \times ۵/۷۵۲۵۵] = ۱۰/۹۴۸۳۹۵$$

۲۳ـ تقریبهایی را از انتگرالهای زیر به قاعده نقطه میانی و به ازای h های داده شده به دست آورید.

الف. $$\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{۱+x} \quad , \quad h = ۰/۱$$

حل: با $f(x) = \frac{۱}{۱+x}$:

$$\int_{x_۰}^{x_n} f(x)dx \cong M(h) = h\left[f(x_۰ + \frac{h}{۲}) + \cdots + f(x_۱ + \frac{h}{۲}) + \cdots + f(x_{n-۱} + \frac{h}{۲})\right]$$

$$\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{۱+x} = ۰/۱[f(۰/۵) + f(۰/۱۵) + f(۰/۲۵) + f(۰/۳۵) + f(۰/۴۵) + f(۰/۵۵)$$
$$+ f(۰/۶۵) + f(۰/۷۵) + f(۰/۸۵) + f(۰/۹۵)] = ۰/۶۹۲۸۳۵۳$$

ب. $\int_{\circ}^{1} \frac{dx}{1+x^{2}}$ ، $h = \circ/2$

$$\int_{\circ}^{1} \frac{dx}{1+x^{2}} = \circ/2[f(\circ/1) + f(\circ/3) + f(\circ/5) + f(\circ/6) + f(\circ/7) + f(\circ/9)]$$
$$= \circ/2[4/66645144] = \circ/93329\circ28$$

پ. $\int_{\circ}^{1} \frac{\sin x}{x}dx$ ، $h = \circ/2$

$$\int \frac{\sin x}{x}dx = \circ/2[f(\circ/1) + f(\circ/3) + f(\circ/5) + f(\circ/7) + f(\circ/9)] =$$
$$= \circ/2[\frac{\sin \circ/1}{\circ/1} + \frac{\sin \circ/3}{\circ/3} + \frac{\sin \circ/5}{\circ/5} + \frac{\sin \circ/7}{\circ/7} + \frac{\sin \circ/9}{\circ/9}] = \circ/946585$$

۲۴ـ تقریبی از $\int_{\circ}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$ حساب کنید. برای این منظور قرار دهید:

$$\int_{\circ}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = \int_{\circ}^{\circ/9} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} + \int_{\circ/9}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

سپس به روش قاعده نقطه میانی و $h = \circ/\circ1$ مقدار $\int_{\circ/9}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$ و $h = \circ/1$ مقدار $\int_{\circ}^{\circ/9} \frac{dx}{x}$ را حساب کنید.

حل:

$$\int_{\circ}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = \int_{\circ}^{\circ/9} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} + \int_{\circ/9}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

داریم:

$$\int_{\circ/9}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = \circ/\circ1[f(\circ/9\circ5) + f(\circ/915) + f(\circ/925) + f(\circ/935) + f(\circ/945)$$
$$+ f(\circ/955) + f(\circ/965) + f(\circ/975) + f(\circ/985) + f(\circ/995)]$$

$$\int_{\circ/9}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = \circ/\circ1[\frac{1}{\circ/42541} + \frac{1}{\circ/4\circ345} + \frac{1}{\circ/37996} + \frac{1}{\circ/35465} + \frac{1}{\circ/327\circ7}$$
$$+ \frac{1}{\circ/2966\circ5}\frac{1}{\circ/26224} + \frac{1}{\circ/2222\circ} + \frac{1}{\circ/17255} + \frac{1}{\circ/\circ99874}] = \circ/4\circ8316$$

$$\int_{۰}^{۰/۹}\frac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}}\cong ۰/۱[f(۰/۰۵)+f(۰/۱۵)+f(۰/۲۵)+f(۰/۳۵)+f(۰/۴۵)$$
$$+f(۰/۵۵)+f(۰/۶۵)+f(۰/۷۵)+f(۰/۸۵)+f(۰/۹۵)]$$
$$=۰/۱[\frac{۱}{۰/۹۹۸۷۴}+\frac{۱}{۰/۹۸۸۶۸}+\frac{۱}{۰/۹۶۸۲۴}+\frac{۱}{۰/۹۳۶۷۴}+\frac{۱}{۰/۸۹۳۰۲}$$
$$+\frac{۱}{۰/۸۳۵۱۶۴}+\frac{۱}{۰/۷۵۹۹۳}+\frac{۱}{۰/۶۶۱۴۳}+\frac{۱}{۰/۵۲۶۷۸}+\frac{۱}{۰/۳۱۲۲۴۹}]=۱/۴۳۵۸۸۹۴$$

بنابراین
$$\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}}dx\cong ۱/۴۳۵۸۸۹۴+۰/۴۰۸۳۱۶=۱/۸۴۴۲۰۵$$

۲۵ـ تقریبی از $\int_{۰}^{۲}x\sin ۲x dx$ را به قاعده ذوزنقه‌ای چنان حساب کنید که خطای آن کمتر از ۰/۵ باشد.

حل: داریم $b=۲$ ، $a=۰$ و $\varepsilon=۰/۵$ و $|E(T(h))|\leqslant\frac{(b-a)}{۱۲}h^{۲}M_{۲}$

$$f''(x)=۴\cos ۲x-۴x\sin ۲x$$
$$|f''(x)|=|۴\cos ۲x-۴x\sin ۲x|\leqslant ۴|\cos ۲x|+۴|x||\sin ۲x|\leqslant ۱۲=M_{۲}$$

لذا بایستی
$$\frac{(۲-۰)}{۱۲}h^{۲}(۱۲)\leqslant ۰/۵$$

و یا
$$h^{۲}\leqslant\frac{۰/۵}{۲}\Rightarrow h^{۲}\leqslant ۰/۲۵\Rightarrow h\leqslant ۰/۵$$

بنابراین قرار می‌دهیم $h=۰/۵$ و $T(۰/۵)$ را حساب می‌کنیم.

$$T(۰/۵)=\frac{۰/۵}{۲}(۰+۲(۰/۵\sin ۱+\sin ۲+۱/۵\sin ۳)+۲\sin ۴)=۰/۳۹۲۴۵$$

۲۶ـ تقریبی از انتگرالهای زیر را با خطای کمتر از ۰/۰۰۰۱ و به قاعده ذوزنقه‌ای حساب کنید.

الف. $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\cos x dx$ ب. $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}x\cos x dx$ پ. $\int_{۰}^{۱}e^{x}dx$

حل: الف.

$$f(x)=\cos x \Rightarrow f''(x)=-\cos x$$

$$|f''(x)| \leqslant 1 = M_2$$

$$\frac{(b-a)}{12}h^2 M_2 \leqslant 0.0001$$

$$\frac{\pi}{24}h^2 \leqslant 0.0001 \Rightarrow h^2 \leqslant \frac{0.0001 \times 24}{\pi} = \frac{0.0024}{\pi}$$

$$h \leqslant 0.027 \qquad h = 0.027$$

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{\frac{\pi}{2}}{0.027} = 58$$

ب.

$$f(x) = x\cos x \Rightarrow f''(x) = -\sin x - \sin x - x\cos x$$

$$|f''(x)| \leqslant 2 + \frac{\pi}{2} \Rightarrow M_2 = 4$$

$$\frac{(b-a)}{12}h^2 \times 4 \leqslant 0.0001 \Rightarrow \frac{\pi h}{6} \leqslant 0.0001 \Rightarrow h \leqslant 0.01381$$

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{\frac{\pi}{2}}{0.13181} = 113.6693 \Rightarrow n = 114$$

پ.

$$f(x) = e^x \Rightarrow f''(x) = e^x$$

$$|e^x| \leqslant 2.71 \Rightarrow \frac{2.71h^2}{12} \leqslant 0.0001 \Rightarrow h^2 \leqslant \frac{0.0012}{2.71} = 0.02104$$

$$h = 0.02 \Rightarrow n = \frac{b-a}{h} = \frac{1}{0.02} = 50 \Rightarrow n = 50$$

توجه داشته باشید که در تمام قسمتها به علت بزرگ بودن n محاسبه تقریبی از انتگرال‌های داده شده با دست امکانپذیر نیست و نیاز به یک برنامه کامپیوتری دارد.

۲۷ـ حدود h را برای محاسبه تقریبی $\int_0^1 e^x \sin x dx$ چنان تعیین کنید که:

الف. داشته باشیم $|ET(h)| \leqslant 10^{-5}$

ب. داشته باشیم $|ES(h)| \leqslant 10^{-5}$

حل: الف.

$$f(x) = e^x \sin x dx \to f''(x) = 2e^x \cos x$$

$$|f''(x)| = |2e^x \cos x| \leqslant 2 \times 2/718281828 = 5/436563657 = M_2$$

$$ET(h) = \frac{-(b-a)}{12} h^2 M_2$$

$$\frac{1}{12} h^2 \times 5/436563657 \leqslant 10^{-5}$$

$$h^2 \leqslant \frac{12 \times 10^{-5}}{5/436563657} = 0/2207276647 \times 10^{-4}$$

$$h \leqslant 0/004697$$

قرار می‌دهیم $h = 0/0045$ و از آن $n \simeq 223$.

ب.

$$ES(h) = \frac{-(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\eta)$$

$$f^{(4)}(x) = -4e^x \sin x$$

$$|f^{(4)}(x)| \leqslant 4 \times 2/71 = 10/84 = M_4$$

$$|ES(h)| = \frac{1}{180} h^4 \times 10/84 \leqslant 10^{-5}$$

$$h^4 \leqslant \frac{180 \times 10^{-5}}{10/84} = 1/6554548 \times 10^{-4}$$

و از آن $h \leqslant 0/11343$ و از آن $n = \dfrac{(b-a)}{h} = 9$

۲۸ـ روش انتگرال‌گیری زیر را درنظر بگیرید

$$\int_0^h f(\sqrt{x})dx \cong w_1 f(0) + w_2 f(0) + w_3 f(h)$$

ضرایب w_1, w_2, w_3 را طوری به دست آورید که روش انتگرال‌گیری فوق برای چندجمله‌ای‌های تا درجه دو دقیق باشند.

حل: فرمول بالا را برای $f(x) = 1, x, x^2$ به کار می‌بریم (که این فرمول برای این توابع دقیق درنظر گرفته

می‌شود.)

$$f(x)=1 \Rightarrow \int_0^h 1dx = h = w_1 + 0 + w_2$$

$$f(x)=x \Rightarrow \int_0^h \sqrt{x}dx = \int_0^h x^{\frac{1}{2}}dx = [\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}]_0^h = \frac{2}{3}h^{\frac{3}{2}} = 0 + w_2 + w_3 h$$

$$f(x)=x^2 \Rightarrow \int_0^h xdx = \frac{h^2}{2} = 0 + 0 + h^2 w_3$$

$$w_1 + w_2 = h$$

$$w_2 + w_3 h = \frac{2}{3}h^{\frac{3}{2}}$$

$$w_3 h^2 = \frac{h^2}{2} \Rightarrow w_3 = \frac{1}{2}$$

$$w_2 = \frac{2}{3}h^{\frac{3}{2}} - \frac{h}{2} \quad , \quad w_1 = h - \frac{1}{2}$$

۲۹ـ فرض کنید در تقریب زیر معیار دقت آن باشد که رابطه برای چندجمله‌ای‌های تا درجه ۳ دقیق باشد:

$$\int_0^6 f(x)dx \cong \sum_{i=0}^{3} w_i f(x_i)$$

که در آن $x_0=0$, $x_1=2$, $x_2=5$, $x_3=6$ مطلوبست محاسبه w_i برای $i=0,1,2,3$

حل:

$$\int_0^6 f(x)dx \cong w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$$

$$\int_0^6 f(x)dx \cong w_0 f(0) + w_1 f(2) + w_2 f(5) + w_3 f(6)$$

فرمول بالا را برای $f(x)=1,x,x^2,x^3$ بکار می‌بریم:

$$f(x)=1 \Rightarrow \int_0^6 dx = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 = 6$$

$$f(x)=x \Rightarrow \int_0^6 xdx = 2w_1 + 5w_2 + 6w_3 = 18$$

$$f(x)=x^2 \Rightarrow \int_0^6 x^2dx = 4w_1 + 25w_2 + 36w_3 = 72$$

$$f(x)=x^3 \Rightarrow \int_0^6 x^3dx = 8w_1 + 125w_2 + 216w_3 = 324$$

$$w_0 + w_1 + w_2 + w_3 = 6$$
$$2w_1 + 5w_2 + 6w_3 = 18$$
$$4w_1 + 25w_2 + 36w_3 = 72$$
$$8w_1 + 125w_2 + 216w_3 = 324$$

از حل دستگاه بالا داریم

$$w_0 = \frac{3}{5} \quad , \quad w_1 = 3 \quad , \quad w_2 = \frac{12}{5} \quad , \quad w_3 = 0$$

۳۰- برای محاسبه تقریبی از انتگرال تابع f در فاصله $[0, 6]$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^{6h} f(x)dx \cong w_1 f(h) + w_2 f(3h) + w_3 f(5h)$$

الف. ضرایب w_1, w_2, w_3 را چنان تعیین کنید که رابطه فوق برای چندجمله‌ای‌های تا درجه ۲ دقیق باشد.
حل: فرض می‌کنیم که رابطه فوق برای چندجمله‌ای‌های تا درجه ۲ دقیق باشد.
فرمول بالا را برای $f(x) = 1, x, x^2$ بکار می‌بریم

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_0^{6h} dx = 6h = w_1 + w_2 + w_3$$
$$f(x) = x \Rightarrow \int_0^{6h} xdx = [\frac{x^2}{2}]_0^{6h} = \frac{36}{2}h^2 = 18h^2 = hw_1 + 3hw_2 + 5hw_3$$
$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_0^{6h} xdx = [\frac{x^3}{3}]_0^{6h} = 72h^3 = h^2w_1 + 9h^2w_2 + 25h^2w_3$$

$$w_1 + w_2 + w_3 = 6h$$
$$w_1 + 3w_2 + 5w_3 = 18h$$
$$w_1 + 9w_2 + 25w_3 = 72h$$

از حل دستگاه بالا داریم:

$$w_1 = \frac{9}{4}h \quad , \quad w_2 = \frac{3}{2}h \quad , \quad w_3 = \frac{9}{4}h$$

ب. نشان دهید قاعده فوق برای چندجمله‌ای‌های درجه ۳ دقیق است.

$$f(x) = x^۳ \Rightarrow \int_۰^{۶h} x^۳ = ۳۲۴h^۴$$

از طرف دیگر باتوجه به رابطه داریم

$$\frac{۹}{۴}h^۴ + \frac{۳}{۲}h \times ۲۷h^۳ + \frac{۹}{۴}h^۴ \times ۱۲۵ = ۳۲۴h^۴$$

که با مقدار دقیق انتگرال‌گیری برابر است.

۳۱ـ قسمت‌های الف و ب مسأله قبل را در مورد روند انتگرال‌گیری زیر انجام دهید.

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \cong h[w_۱ f(-h) + w_۲ f(۰) + w_۳ f(h)]$$

حل: فرض می‌کنیم که فرمول فوق برای چندجمله‌ای‌های تا درجه ۳ دقیق باشد قرار می‌دهیم

$$f(x) = ۱, x, x^۲$$

$$f(x) = ۱ \Rightarrow \int_{-h}^{h} dx = ۲h = h[w_۱ + w_۲ + w_۳]$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_{-h}^{h} xdx = ۰ = h[-w_۱ h + hw_۳]$$

$$f(x) = x^۲ \Rightarrow \int_{-h}^{h} x^۲ dx = \frac{۲h^۳}{۳} = h[w_۱ h^۲ + w_۳ h^۲]$$

$$w_۱ + w_۲ + w_۳ = ۲$$

$$-w_۱ + w_۳ = ۰$$

$$w_۱ + w_۳ = \frac{۲}{۳}$$

از حل دستگاه بالا داریم

$$w_۱ = \frac{۱}{۳} \quad , \quad w_۲ = \frac{۴}{۳} \quad , \quad w_۳ = \frac{۱}{۳}$$

برای $f(x) = x^۳$ داریم

مقدار انتگرال:

$$\int_{-h}^{h} x^۳ dx = ۰$$

مقدار به دست آمده از فرمول:

$$h[\frac{-h^۳}{۳} + ۰ + \frac{h^۳}{۳}] = ۰$$

که هردو با هم برابرند، لذا قاعده بیان شده برای چندجمله‌ای‌های تا درجه ۳ نیز دقیق است.

«مسائل تکمیلی فصل چهارم»

۱ـ مقدار $\int_{0}^{5} \frac{x^5}{5} dx$ را با استفاده از روش ذوزنقه‌ای به ازای $h = \frac{1}{4}$ و $h = \frac{1}{2}$ به دست آورید.

۲ـ مقدار $\int_{0}^{2} \sqrt[3]{x^2} dx$ را با استفاده از روش سیمپسون و با $S(0/25)$ به دست آورید.

۳ـ مقدار $\int_{0}^{1} \frac{\sec x}{x} dx$ را با $S(0/5)$ به دست آورید.

۴ـ مقدار $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$ را به روش سیمپسون و با $h = \frac{\pi}{16}$ و $h = \frac{\pi}{8}$ به دست آورید.

۵ـ مقدار $\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx$ را با $h = 0/5$ یک بار با استفاده از روش ذوزنقه‌ای و یک‌بار از روش سیمپسون به دست آورید و نتایج هردو را با مقدار واقعی انتگرال مقایسه کنید.

۶ـ با استفاده از روش نیوتن ـ کاتس چهار نقطه‌ای مقدار انتگرال $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} x^2 \sec^2 x dx$ را تقریب بزنید.

۷ـ با استفاده از روش نیوتن ـ کاتس چهارنقطه‌ای مقدار انتگرال مربوط سؤال ۴ را حل نمایید و جواب به دست آمده با جواب به دست آمده در سؤال ۴ و همچنین با مقدار واقعی انتگرال مقایسه کنید.

۸ـ مقدار $\int_{0}^{1/5} e^x \sin x dx$ را با $h = \frac{1}{4}$ و با استفاده از روش نیوتن ـ کاتس به دست آورید.

۹ـ مقدار انتگرال مسأله ۳ را با استفاده از روش گاوس دونقطه‌ای به دست آورید.

۱۰ـ مقدار انتگرال مسأله ۵ را با استفاده از روش گاوس دونقطه‌ای به دست آورید.

۱۱ـ مقدار $\int_{0}^{2} x \tan^{-1} x dx$ را با استفاده از روش گاوس دونقطه‌ای و سه‌نقطه‌ای به دست آورید.

۱۲ـ مقدار $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$ را با استفاده از روش گاوس دونقطه‌ای و سه‌نقطه‌ای به دست آورید جواب به دست آمده را با مقدار واقعی انتگرال مقایسه کنید.

۱۳ـ مقدار $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2 - 1} dx$ را با یک روش مناسب به دست آورید. h را بگونه‌ای انتخاب کنید که خطا کمتر از ۰/۰۰۱ باشد.

۱۴ـ کران بالای خطای انتگرال داده شده در سؤال ۳ را به دست آورید.

۱۵ـ کران بالای خطای انتگرال داده شده در سؤال ۱ را به دست آورید و آن را با خطای واقعی مقایسه کنید.

۱۶ـ مقدار انتگرال سؤال ۱ را با استفاده از روش نقطه میانی به دست آورید و میزان خطای واقعی آن را با خطای واقعی مقادیر به دست آمده در سؤال ۱ مقایسه کنید.

۱۷ـ مقدار انتگرال $\int_{0}^{2} x^2 e^x \, dx$ را با استفاده از روش سیمپسون چنان بیابید که خطا کمتر از ۰٫۰۵ باشد.

۱۸ـ مقدار انتگرال سؤال قبل را با استفاده از روش ذوزنقه‌ای چنان بیابید که خطا کمتر از ۰٫۰۵ باشد.

۱۹ـ تابع $f(x)$ بر بازه $[0, 1]$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 1 - x & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

مقدار $\int_{0}^{1} f(x)dx$ را با به کار بردن قاعده‌های زیر حساب کنید.

الف : قاعده ذوزنقه

ب : قاعده سیمپسون

ج : قاعده دونقطه‌ای گاوس

۲۰ـ مقدار مشتق تابع $f(x) = e^x + \cos x$ را در نقطه $x = 2$ با استفاده از روابط (۸) و (۹) بیابید و آن را با مقدار واقعی مشتق مقایسه کنید.

۲۱ـ تابع جدولی زیر مفروض است مقدار f'_1 و f'_2 و f''_2 را حساب کنید.

x_i	۰	۱	۲	۳
f_i	۲٫۹۶۷	۳٫۲۶	۴٫۹۳	۵٫۰۶

۲۲ـ مقدار مشتق دوم تابع $f(x) = x^3 \tan^{-1} x$ را به ازای $h = 0/5$ در نقطه $x = 5$ محاسبه کنید. (با استفاده از فرمول ۱۴)

۲۳ـ مقدار مشتق اول تابع داده شده در سؤال قبل را با استفاده از رابطه (۱۲) حساب کنید.

۲۴ـ مقدار مشتق تابع $f(x) = \frac{x}{\tan x}$ را با استفاده از روابط ۹ و ۱۲ در نقطه $x = 2$ و با $h = 0/25$ به دست آورید. در هر مورد مقدار به دست آمده را با مقدار واقعی $f'(2)$ مقایسه کنید.

۲۵ـ تابع جدولی زیر مفروض است. مقدار $f'_{i+\frac{1}{2}}$ را برای $i = 0, 1, 2, 3$ برای آن بیابید.

x_i	۰٫۵	۱	۱٫۵	۲	۲٫۵	۳
f_i	۱٫۷۵	۱٫۹۸	۲٫۱۸۹	۲٫۹۷۶	۲٫۵	۲٫۸

۲۶ـ با استفاده از روش سیمپسون مقدار انتگرال $\frac{۱}{۵}\int_{۰}^{۲} \cos x dx$ را طوری به دست آورید که خطا کمتر از $۱۰^{-۵}$ باشد.

۲۷ـ مطلوب است محاسبه تقریبی $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{۱+x^{۲}}$:

الف) با روش سیمپسون و با طول گام $h = ۰/۲۵$.

ب) تعداد نقاط لازم را برای محاسبه مقدار تقریبی انتگرال فوق با روش ذوزنقه‌ای طوری بیابید که خطای کل کمتر از $۱۰^{-۳}$ باشد.

۲۸ـ اگر تابع $f(x)$ به صورت جدولی زیر داده شده باشد:

x_i	۰/۰۰	۰/۵۰	۱/۰۰
f_i	۰/۰۰	۰/۵۸	۰/۸۳

آنگاه مطلوب است محاسبه عبارت زیر:

$$\int_{۰}^{۱} \sqrt{\frac{۱}{۲} f'(x)}\, dx$$

(توجه شود که در زیر رادیکال مشتق تابع f به کار رفته است.)

۲۹ـ تابع $f(a) = \int_{۰}^{a^{۲}+۱} e^{ax^{۲}} dx$ داده شده است. مقدار $f'(۰)$ را با یک تقریب دلخواه محاسبه کنید.

(راهنمایی: از تعریف مشتق استفاده کنید).

۳۰ـ با استفاده از روش رامبرگ دومرحله‌ای با $h = ۰/۴$ تقریبی از انتگرال

$$I = \int_{۰}^{۰/۴} \frac{\sin x}{۱+x^{۴}} dx$$

را به دست آورید. (محاسبات را با $۴D$ انجام دهید).

۳۱ـ با استفاده از روش ذوزنقه‌ای و با $h = ۰/۱۲۵$ ، $h = ۰/۲۵$ و $h = ۰/۵$ تقریبی از انتگرال $I = \int_{۰}^{۰/۵} \frac{\cos x}{۱+\sqrt{x}} dx$ را با انجام محاسبات تا چهار رقم اعشار به دست آورید. سپس با استفاده از روش رامبرگ و تقریبهای به دست آمده، تقریب بهتری برای I به دست آورید.