سوال ۱:

برای هر 2 بخش، محاسبات میانی را با 5D انجام می‌دهیم و در نهایت حاصل بدست آمده را به 4D گرد می‌کنیم.

روش دوبخشی:

Bisection Method					
n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$f(a)f(x_n)$	$f(x_n)$
1	2	3	2.5	+	10.375
2	2.5	3	2.75	-	-1.51562
3	2.5	2.75	2.625	+	4.50976
4	2.625	2.75	2.6875	+	1.51635
5	2.6875	2.75	2.71875	+	0.00509

چون $10^{-2} > 0.00509$ عملیات را متوقف می‌کنیم و جواب x_n را با گرد کردن به 4D نمایش می‌دهیم:

$$\alpha \approx 2.7188$$

روش نابه‌جایی:

در این روش x_n از رابطه‌ی $\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$ بدست می‌آید.
همانند بخش قبل تمام محاسبات میانی را با دقت 5 رقم اعشار انجام می‌دهیم و در نهایت حاصل را گرد می‌کنیم.

False Position Method					
n	a	b	x_n	$f(x_n)$	$f(a)f(x_n)$
1	2	3	2.69565	+	1.12314
2	2.69565	3	2.71825	+	0.02935
3	2.71825	3	2.71883	+	0.00121

چون $10^{-2} > 0.00121$ عملیات را متوقف می‌کنیم و جواب x_n را با گرد کردن به 4D نمایش می‌دهیم:

$$\alpha \approx 2.7188$$

همانطور که از روابط بالا مشخص است، روش نابه‌جایی در 3 گام به جواب رسیده که در مقایسه با روش دوبخشی که با 5 گام رسیده است، عملکرد بهتری داشته و سریع‌تر همگرا شده است.

سوال ۲:

در روش نیوتون جمله‌ی بعدی از رابطه‌ی بازگشتی مقابل بدست می‌آید:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad x_0 = 0$$

دقت کنید برای محاسبه‌ی جمله‌ی بعدی نیاز به تابع $f(x)$ داریم که آن را از انتگرال گیری به صورت مقابل بدست می‌آوریم:

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int e^x + 3dx = e^x + 3x + C \quad f(0) = 5 \Rightarrow f(x) = e^x + 3x + 4$$

حال با انجام محاسبات میانی با 5D خواهیم داشت:

Newton-Raphson Method		
n	x_k	x_{k+1}
1	0	-1.25
2	-1.25	−1.41324
3	−1.41324	−1.41436

پس در نهایت با گرد کردن خواهیم داشت:

$$\alpha \approx -1.4144$$

دقت کنید با اینکه جواب بالا به جواب اصلی نزدیک است، ولی تابع داده شده شرط همگرایی مورد نیاز برای روش نیوتون را ندارد که آن را در بخش مقابل اثبات می‌کنیم:

$$|\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}| < 1$$

حال اگر مقادیر داشته را در رابطه‌ی بالا قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{(e^x + 3x + 4)(e^x)}{(e^x + 3)^2} < 1 \equiv 3xe^x < 2e^x + 9 \Rightarrow^{x=2} 6e^2 < 4e^2 + 9 \equiv 2e^2 < 9$$

ولی می‌دانیم:

$$12 < 2(2.5)^2 < 2e^2$$

پس رابطه‌ی بالا برای تمامی x ها برقرار نیست و تابع $f(x)$ شرط همگرایی برای روش نیوتون را ندارد.

سوال ۳:

الف:

ادعا می‌کنیم نقطه‌ی $f(1,1)=0$ نقطه‌ی کمینه‌ی تابع است، و برای اثبات آن از نامساوی‌های مقابل استفاده می‌کنیم:

$$0.5(x_1-x_2)^2 \geq 0 \quad 0.5(1-x_1)^2 \geq 0 \Rightarrow 0.5(x_1-x_2)^2+0.5(1-x_1)^2 \geq 0$$

پس تابع $f(x_1,x_2)$ همواره نامنفی است و نمی‌تواند مقداری کمتر از 0 به خود بگیرد.

ب:

دقت کنید برای پیدا کردن Minimum یک تابع 2 متغیره باید دستگاه مقابل را تشکیل دهیم:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x_1}=0 \\ \frac{\partial y}{\partial x_2}=0 \end{cases} \equiv \begin{cases} 2x_1\left(x_1^2-x_2^2\right)-1+x_1=0 \\ -2x_2\left(x_1^2-x_2^2\right)=0 \end{cases}$$

حال می‌دانیم در هر مرحله متغیرهای مرحله بعد از روابط مقابل بدست می‌آیند:

$$x_{i+1}=x_i+\frac{D_1}{D} \quad y_{i+1}=y_i+\frac{D_2}{D}$$

$$D=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \quad D_1=\begin{bmatrix} -\frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} \\ -\frac{\partial y}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \quad D_2=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & -\frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} & -\frac{\partial y}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

دقت کنید در هر مرحله دترمینان ماتریس‌های بالا باید محاسبه شوند.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}=2\left(3x_1^2-x_2^2\right)+1 \\ \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}=-4x_1x_2 \\ \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}=-2\left(x_1^2-3x_2^2\right) \end{cases}$$

حال با جایگذاری مقادیر $(2,2)$ در روابط بالا خواهیم داشت:

$$D=\begin{bmatrix} 17 & -16 \\ -16 & 16 \end{bmatrix}=16 \quad D1=\begin{bmatrix} -1 & -16 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}=-16 \quad D2=\begin{bmatrix} 17 & -1 \\ -16 & 0 \end{bmatrix}=-16$$

حال در نهایت خواهیم داشت:

$$x_{i+1}=2+\frac{-16}{16}=1 \quad y_{i+1}=2+\frac{-16}{16}=1$$

ج:

دقت کنید پس از طی کردن یک گام به جواب مینیمم تابع رسیده‌ایم که گرادیان تابع نیز در این نقطه 0 است، و می‌توان گفت از تمام لحاظ مناسب است و تنها نقص آن این است که نمی‌توان نقطه‌ی مینیمم دیگر تابع یعنی $(1,-1)$ به دلیل قرار گرفتن در تپه برسیم.

سوال ۴:

الف:

تابع $f(x)$ را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم:

$$p \in \mathbb{Z}^{+} \Rightarrow f(x) = x^{p} - a$$

$$p \in \mathbb{Z}^{-} \Rightarrow f(x) = x^{|p|} - \frac{1}{a}$$

$$0 \leq p = \frac{b}{c} \Rightarrow x^{b} - a^{c}$$

$$p = \frac{b}{c} \leq 0 \Rightarrow x^{|b|} - \frac{1}{a}^{|c|}$$

در تمامی روابط بالا تابع $f(x)$ یک polynomial است، که می‌توان از آن 2 بار مشتق گرفت و شرط همگرایی رابطه‌ی secant را برآورده می‌کند.
واضح است که جواب $f(x) = 0$ برابر با $a^{p^{-1}}$ است.
حال دقت کنید در روش secant جمله‌ی بعدی از رابطه‌ی بازگشتی مقابل محاسبه می‌شود:

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} \times f(x_n) - x_n \times f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

با جایگذاری رابطه‌ی $f(x)$ در رابطه‌ی بالا خواهیم داشت:

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}(x_n^p - a) - x_n(x_{n-1}^p - a)}{x_n^p - a - x_{n-1}^p + a} = \frac{x_{n-1}x_n(x_n^{p-1} - x_{n-1}^{p-1}) + a(x_n - x_{n-1})}{x_n^p - x_{n-1}^p}$$

ب:

با جایگذاری x_0 و x_1 در رابطه‌ی بالا با فرض $f(x) = x^2 - 9$ خواهیم داشت:
** تمامی محاسبات را با 3D انجام می‌دهیم و در نهایت جواب نهایی را با دقت 2D گزارش می‌دهیم.

$$p = 2, a = 9 \Rightarrow x_2 = \frac{2.5 \times 2(2.5 - 2) + 9(2.5 - 2)}{2.5^2 - 2^2} = \frac{2.5 + 4.5}{6.25 - 4} = \frac{7}{2.25} \approx 3.111$$

دوباره با جایگذاری خواهیم داشت:

$$p = 2, a = 9 \Rightarrow x_3 = \frac{3.111 \times 2.5(3.111 - 2.5) + 9(3.111 - 2.5)}{3.111^2 - 2.5^2} \approx 2.990$$

خطای مطلق را نیز با دانستن $\sqrt{9} = 3$ به صورت مقابل بدست می‌آوریم:

$$|x_3 - x^*| = e_3 = |2.990 - 3| = |0.01| = 0.01$$

سوال ۵:

) برای اینکه روش تکراری گفته شده به ریشه f همگرا باشد باید نشان دهیم تابع تکرار یعنی $g(x)=x+Mf(x)$ شرایط همگرایی در روش نقطه ثابت را برآورده می‌کند. (به ازای یک M)

شرط پیوستگی) از آنجا که f در $[0,1]$ مشتق‌پذیر، پیوسته است، g نیز پیوسته خواهد بود.

شرط ۲) $\forall x\in[0,1] : |g'(x)|<1$

برای این کار باید یک M منفی بسیار نزدیک به صفر انتخاب کنیم، بنابر فرض برای هر $x\in[0,1]$:

$$0\le a< f'(x)\le b \xrightarrow[M<0]{\times M} Mb\le Mf'(x)<Ma\le 0$$

$$\xrightarrow{+1} 1+Mb\le 1+Mf'(x)<1+Ma\le 1 \longrightarrow 1+Mb\le g'(x)\le 1$$

برای اینکه شرط خواسته شده برآورده شود می‌گذاریم $0\le 1+Mb \xrightarrow{b\ge 0} \boxed{\frac{-1}{b}<M<0}$

شرط ۳) $\forall x\in[0,1] : g(x)\in[0,1]$

در بخش قبل حدود M را به گونه‌ای گذاشتیم که $0<g'<1$ باشد در بازه $(0,1)$. پس در این بازه، g اکیداً صعودی خواهد بود. حال کافی است $0\le g(0)$ و $g(1)\le 1$ باشد تا شرط برآورده شود.

$0\le g(0) \longrightarrow 0\le 0+Mf(0) \longrightarrow$ چون M را منفی گرفتیم و $f(0)<0$، همیشه برقرار ✓

$g(1)\le 1 \longrightarrow 1+Mf(1)\le 1 \longrightarrow Mf(1)\le 0$

چون M را منفی گرفتیم و $0<f(1)$ است، همیشه برقرار است ✓

لذا کافی است M را به گونه‌ای بگیریم که منفی و به اندازه کافی نزدیک به صفر باشد.