دانشگاه صنعتی شریف

دانشکدهٔ مهندسی کامپیوتر

محاسبات عددی

پاسخ تمری سری دوم

فصل ۲: روش‌های عددی برای حل معادلات غیرخطی

نگارش:

علی مهدوی فر

شمارهٔ دانشجویی:

۹۸۱۰۶۰۷۲

استاد:

دکتر فاطمه بهاری‌فرد

فروردین ۱۴۰۰

سؤال ۱)

الف) تقریب ریشهٔ تابع $f(x) = -12-21x+18x^2-2.75x^3$ بین $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ با شرط $|f(x_n)|<0.05$

روش تنصیف:

n	a	b	$x_n=(a+b)/2$	علامت $f(a)f(x_n)$	$f(x_n)$
1	-1	0	-0.5	+	3.34375
2	-0.5	0	-0.25	-	-5.58203
3	-0.5	-0.25	-0.375	-	-1.44873
4	-0.5	-0.375	-0.4375	+	0.86310
5	-0.4375	-0.375	-0.40625	-	-0.31367
6	-0.4375	-0.40625	-0.42188	+	0.26947
7	-0.421875	-0.40625	**-0.41406**	-	**-0.02341**

روش نابجایی:

n	a	b	x_n	f(a)	$f(x_n)$	علامت $f(a)f(x_n)$
1	-1	0	-0.28743	29.75	-4.41173	-
2	-1	-0.28743	-0.37945	29.75	-1.28966	-
3	-1	-0.37945	-0.40523	29.75	-0.35129	-
4	-1	-0.40523	-0.41217	29.75	-0.09384	-
5	-1	-0.41217	**-0.41402**	29.75	**-0.02493**	-

ب) تقریب ریشهٔ تابع $g(x) = x^{10}-1$ بین $x_0 = 0$, $x_1 = 1.3$ با شرط توقف $|x_n-1|<0.02$

روش تنصیف:

n	a	b	$x_n=(a+b)/2$	علامت $g(a)g(x_n)$	$g(x_n)$
1	0	1.3	0.65	+	-0.98654
2	0.65	1.3	0.975	+	-0.22367
3	0.975	1.3	1.1375	-	2.62672

4	0.975	1.1375	1.05625	–	0.72849
5	0.975	1.05625	**1.01562**	–	**0.16771**

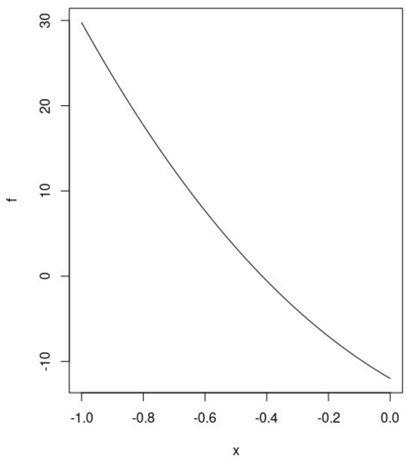
روش نابجایی:

n	a	b	x_n	g(a)	$g(x_n)$	علامت $g(a)g(x_n)$
1	0	1.3	0.09430	−1	−1.00000	+
2	0.09430	1.3	0.18176	−1.00000	−1.00000	+
3	0.18176	1.3	0.26287	−1.00000	−1.00000	+
4	0.26287	1.3	0.33811	−1.00000	−0.99998	+
5	0.33811	1.3	0.40788	−0.99998	−0.99987	+
6	0.40788	1.3	0.47258	−0.99987	−0.99944	+
7	0.47258	1.3	0.53257	−0.99944	−0.99816	+
8	0.53257	1.3	0.58814	−0.99816	−0.99505	+
9	0.58814	1.3	0.63954	−0.99505	−0.98855	+
10	0.63954	1.3	0.68694	−0.98855	−0.97660	+
11	0.68694	1.3	0.73045	−0.97660	−0.95676	+
12	0.73045	1.3	0.77010	−0.95676	−0.92664	+
13	0.77010	1.3	0.80591	−0.92664	−0.88443	+
14	0.80591	1.3	−0.88443	−0.88443	−0.82948	+
15	−0.88443	1.3	0.86603	−0.82948	−0.76269	+
16	0.86603	1.3	0.89046	−0.76269	−0.68658	+
17	0.89046	1.3	0.91133	−0.68658	−0.60486	+
18	0.91133	1.3	0.92888	−0.60486	−0.52179	+
19	0.92888	1.3	0.94344	−0.52179	−0.44137	+
20	0.94344	1.3	0.96495	−0.44137	−0.30011	+
21	0.96495	1.3	0.97263	−0.30011	−0.24234	+
22	0.97263	1.3	0.97872	−0.24234	−0.19354	+
23	0.97872	1.3	**0.98351**	−0.19354	**−0.15319**	+

ج) مقایسهٔ عملکرد دو روش

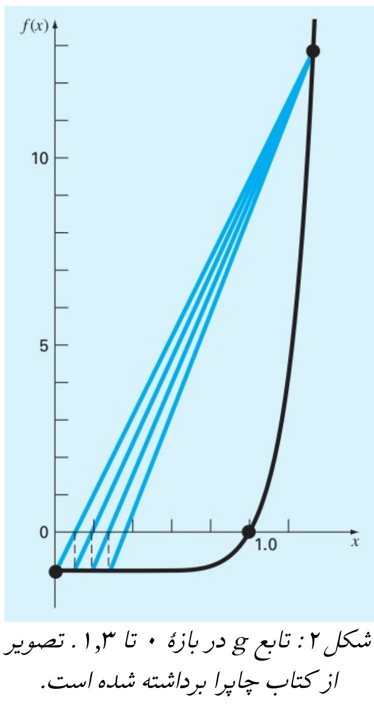
برای تابع f روش تنصیف در ۷ مرحله و روش نابجایی در ۵ مرحله به جواب رسید.

روش نابجایی در حالت کلی دارای مرتبهٔ همگرایی $\phi \simeq 1.618$ است ولی مرتبهٔ همگرایی روش تنصیف 1 است. پس طبیعی است باتوجه به اینکه تابع f در بازهٔ داده شده رفتار مناسب و تقریباً خطی دارد، روش نابجایی سریع‌تر عمل کند.



شکل ۱: تابع f در بازهٔ ۱- تا ۰

برای تابع g روش تنصیف در ۵ مرحله و روش نابجایی در ۲۳ مرحله به جواب رسید. زیرا همانطور که مشاهده می‌شود این تابع در ابتدای بازهٔ داده شده مقدار بسیار کم در مقایسه با انتهای بازه دارد، در نتیجه x_n در هر مرحله نزدیک به ابتدای بازه می‌ماند و روش نابجایی به کندی به پاسخ همگرا می‌شود.



شکل ۲: تابع g در بازهٔ ۰ تا ۱,۳. تصویر از کتاب چاپرا برداشته شده است.

سؤال ۲)

الف) تابع f پیوسته است و $f(0)f(1) \simeq -0.84147 < 0$ پس بنابر قضیهٔ بولزانو، f در بازهٔ $(0,1)$ حداقل یک ریشه دارد. مشتق تابع f برابر است با $f'(x) = -1 - \cos(x)$:

$$-1 \le \cos(x) \le 1 \;\rightarrow\; -2 \le f'(x) = -1 - \cos(x) \le 0$$

مشتق تابع f (به جز در مضارب 2pi) منفی است پس تابع f اکیداً نزولی است. بنابر قضیهٔ مقدار میانگین می‌دانیم هر تابع اکیداً یکنوا، حداکثر یک ریشه دارد. پس تابع f در بازهٔ $(0,1)$ **دقیقاً یک ریشه** دارد.

ب) در روش وتری دنبالهٔ x_n از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) + x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) + f(x_{n-1})}$$

با شروع از $x_0=0$, $x_1=1$ داریم:

n=1 :	$x_2 = 0.54304$	$f(x_2) = -0.05979$
n=2 :	$x_3 = 0.50809$	$f(x_3) = 0.00540$
n=3 :	$x_4 = 0.51099$	$f(x_4) = -0.00002$
n=4 :	$x_5 = 0.51097$	$f(x_5) = -0.00000$
n=5 :	$x_6 = 0.51097$	$f(x_6) = 0.00000$

پس ریشه با 4D برابر است با:

$$\alpha \simeq 0.5110 \quad (4D)$$

سؤال ۳)

با توجه به صورت مسئله، کافی است یک مثال نقض بیاوریم از تابعی با شرایط داده شده که با روش نیوتون-رافسون با مرتبه‌ای به جز ۲ همگراست. $f(x)=(x-\alpha)^2$ را در نظر بگیرید:

$$f(\alpha)=0 \quad , \quad f'(x)=2x-2\alpha \rightarrow f'(\alpha)=0$$

اکنون دنباله $\{x_n\}$ که از روش نیوتون-رافسون بدست می‌آید را درنظر بگیرید.

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{(x_n-\alpha)^2}{2(x_n-\alpha)}=\frac{2x_n^2-2x_n\alpha-x_n^2+2x_n\alpha-\alpha^2}{2(x_n-\alpha)}$$

$$\rightarrow x_{n+1}=\frac{x_n^2-\alpha^2}{2(x_n-\alpha)}=\frac{x_n+\alpha}{2} \longrightarrow x_{n+1}-\alpha=\frac{x_n-\alpha}{2}$$

$$\rightarrow e_{n+1}=\frac{e_n}{2} \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{e_{n+1}}{e_n^{1}}=1/2=c$$

مشاهده شد که درجه همگرایی برای تابع f فوق برابر با 1 است.

راه دوم) منبع: math.stackexchange، سوال شماره 2277905

تابع f که در آن α ریشه با تکرار m است را به صورت $f(x)=(x-\alpha)^m\cdot g(x)$ می‌نویسیم که $g(\alpha)\neq 0$. اکنون برای x های نزدیک به α داریم:

$$x\approx\alpha \rightarrow f'(x)=m(x-\alpha)^{m-1}g(x)+\underbrace{(x-\alpha)^m}_{\text{درجه بالاتر}}g'(x)\approx m(x-\alpha)^{m-1}g(x)$$

رابطه نیوتون رافسون:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\approx x_n-\frac{(x_n-\alpha)^m g(x)}{m(x_n-\alpha)^{m-1}g(x)}=x_n-\frac{1}{m}(x_n-\alpha)$$

$$\rightarrow x_{n+1}\approx\alpha+\frac{m-1}{m}\underbrace{(x_n-\alpha)}_{e_n} \rightarrow \frac{e_{n+1}}{e_n^{1}}\approx\frac{m-1}{m}$$

پس مرتبه همگرایی 1 است (همگرایی خطی) و نرخ همگرایی $\frac{m-1}{m}$ وابسته به میزان تکرار ریشه.

سؤال ۴)

تابع g را به صورت $g(x)=\sin\sqrt{x}$ انتخاب می‌کنیم.

شرایط همگرایی روش نقطه‌ثابت برای تابع g در بازهٔ $(a,b)=(0.5,1)$ با شروع از $x_0=0.5$ را بررسی می‌کنیم:

۱) برای هر $x\in(a,b)$ داشته باشیم $g(x)\in(a,b)$

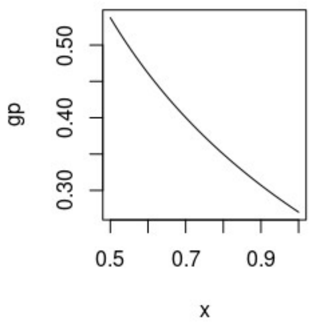
$$0.5 < x < 1 \rightarrow 0.70710678118 < \sqrt{x} < 1 \rightarrow 0.64963 < \sin\sqrt{x} < 0.84148 \rightarrow 0.5 < g(x) < 1 \quad ✓$$

۲) برای هر $x\in(a,b)$ داشته باشیم $|g'(x)| < 1$

$$g(x)=\sin\sqrt{x} \rightarrow g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$$

تابع $g'(x)$ را در بازهٔ $(0.5,1)$ رسم می‌کنیم:

مشاهده می‌شود که قدرمطلق مقدار تابع اکیداً کوچکتر از ۱ است. ✓



شکل ۳: تابع $g'(x)$ از 0.5 تا 1

الگوریتم نقطه‌ثابت را با شروع از $x_0=0.5$ تا جایی که اختلاف دو عدد دنباله کمتر از 0.002 بشود اجرا می‌کنیم:

n=1 :	$x_1 = g(x_0) = 0.6496$	$\lvert x_1-x_0\rvert = 0.1496$
n=2 :	$x_2 = g(x_1) = 0.7215$	$\lvert x_2-x_1\rvert = 0.0719$
n=3 :	$x_3 = g(x_2) = 0.7509$	$\lvert x_3-x_2\rvert = 0.0294$
n=4 :	$x_4 = g(x_3) = 0.7621$	$\lvert x_4-x_3\rvert = 0.0112$
n=5 :	$x_5 = g(x_4) = 0.7663$	$\lvert x_5-x_4\rvert = 0.0042$
n=6 :	$x_6 = g(x_5) = 0.7678$	$\lvert x_6-x_5\rvert = 0.0015$

پس ریشهٔ تابع f با 3D برابر است با:

$$\alpha \simeq 0.768 \quad (3D)$$

سؤال ۵)

این دنباله را می‌توانیم مراحل تکرار روش نقطه ثابت با $g(x) = \frac{x(x^2+3b)}{3x^2+b}$ در نظر بگیریم.
مشتقات g را در نقطهٔ ثابت $(\alpha=\sqrt{b})$ محاسبه می‌کنیم.

$$g'(x) = \frac{3(b-x^2)}{(b+3x^2)^2} \longrightarrow g'(\sqrt{b}) = 0$$

$$g''(x) = \frac{-48bx(b-x^2)}{(b+3x^2)^3} \longrightarrow g''(\sqrt{b}) = 0$$

$$g^{(3)}(x) = \frac{-48b(b^2-18bx^2+9x^4)}{(b+3x)^4} \longrightarrow g^{(3)}(\sqrt{b}) = \frac{3}{2b} \neq 0$$

بسط تیلور g حول $\sqrt{b}$ را می‌نویسیم:

$$\overset{x_{n+1}}{g(x_n)} = \overset{\sqrt{b}}{g(\sqrt{b})} + \overset{0}{g'(\sqrt{b})}(x_n-\sqrt{b}) + \overset{0}{g''(\sqrt{b})}(x_n-\sqrt{b})^2 + g^{(3)}(\varepsilon_n)(x_n-\sqrt{b})^3$$

$$\rightarrow x_{n+1} - \sqrt{b} = g^{(3)}(\varepsilon_n)(x_n-\sqrt{b})^3 \qquad \sqrt{b} < \varepsilon_n < x_n$$

$$\rightarrow |e_{n+1}| = g^{3}(\varepsilon_n)\,|e_n|^3 \qquad \sqrt{b} < \varepsilon_n < x_n$$

$$\rightarrow \lim_{\substack{n\to\infty \\ x_n\to\sqrt{b}}} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^3} = g^{3}(\sqrt{b}) = \frac{3}{2b} = c$$

پس مرتبهٔ همگرایی $\underline{m=3}$ است. نرخ همگرایی $c = \frac{3}{2b}$ است.

سؤال ۶)

کد این سؤال در کنار فایل PDF با نام « HW2_98106072_p6.py » آپلود شده‌است.

```
mnt > data > Uni > Term4 > Mohasebat > homework > 2 > HW2_98106072_p6.py > ...
1   from math import *
2   import sys
3
4   f_string = input()
5   g_string = input()
6   n, x = map(float, input().split())
7
8   f = eval("lambda x: " + f_string)
9   g = eval("lambda x: " + g_string)
10
11  for i in range(int(n)):
12      try:
13          x = x - f(x)/g(x)
14      except ZeroDivisionError:
15          print('zero division')
16          sys.exit()
17
18  print('answer:', '{:.5f}'.format(x) )
```

شکل ۴: کد سوال ۶ به زبان پایتون

توضیح کد: در خطوط ۴ و ۵، دو رشته مربوط به عبارت‌های ریاضی تابع f و مشتق آن از کاربر گرفته می‌شود.

در خط ۶، دو عدد n (تعداد گام‌ها) و x_0 (حدس اولیه) از کاربر گرفته می‌شود.

در خطوط ۸ و ۹، به‌کمک دستور eval توابع f و g در کد برنامه براساس رشتهٔ ورودی از کاربر تعریف می‌شود.

در خطوط ۱۱ تا ۱۶، گام روش نیوتون–رافسون انجام می‌شود: در هر مرحله x جدید از روی x قبل بازنویسی می‌شود و اگر خطای تقسیم بر صفر رخ داد، عبارت «zero division» چاپ می‌شود و برنامه خارج می‌شود.

اگر خطا رخ نداد، در خط ۱۸، آخرین مقدار x با ۵ رقم اعشار چاپ می‌شود.

Sample Input	Sample Output

`log(x-1) + cos(x-1)`
`1/(x-1) - sin(x-1)`
`20 1.65`
	`answer: 1.39775`

`x**3 - 3*x`
`3*x**2 - 3`
`10 1`
	`zero division`