



## محاسبات عددی

نیم سال اول ۱۴۰۰

مدرس: دکتر فاطمه بهاری فرد

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تاریخ تحویل: ۱۴۰۰/۸/۳۰

درون یابی، برون یابی و برازش منحنی

تمرین سری سوم

لطفا توجه فرمایید که:

- \* مهلت ارسال تمرین ساعت ۱۱:۵۹ روز ۳۰ آبان ماه است.
- \* لطفا تمرین تئوری را در یک فایل پی دی اف با نام  $HW3\_StudentID$  آپلود کنید.
- \* لطفا تمرین‌ها را از یکدیگر کپی نکنید. در صورت وقوع چنین مواردی مطابق با سیاست درس رفتار می‌شود.

۱. الف) چند جمله‌ای درونیاب تابع  $f(x) = x + \sqrt{x+1}$  را به روش‌های تفاضلات پیشرو و پسرو و همچنین مرکزی نیوتون در نقاط  $x_i = 0.5 + 0.2i$  به ازای  $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$  تعیین نموده و این روش‌ها را باهم مقایسه کنید. سپس تقریبی از  $f(0.6)$  و  $f(1.05)$  را محاسبه کنید. (۱۵ امتیاز)

ب) کران بالای خطای درونیابی را در نقطه  $x = 0.8$  تعیین کنید. (۵ امتیاز)

۲. طول فاصله  $h$  و مقدار  $N$  را در یک جدول با نقاط متساوی الفاصله برای تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  بین ۵ و ۶ چنان تعیین کنید که درونیابی با چندجمله‌ای درجه دوم خطایی کمتر از  $5 \times 10^{-8}$  داشته باشد. (۱۰ امتیاز)

۳. الف) ثابت کنید که اگر  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  باشد، آنگاه رابطه زیر برقرار است (۱۵ امتیاز):

$$f[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}] = \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}$$

ب) فرض کنید  $f$  یک چندجمله‌ای از درجه  $n$  می‌باشد و نقاط  $x_1, x_2, \dots, x_n$  متمایز هستند. ثابت کنید (۱۵ امتیاز):

$$f[x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$$

۴. تابع  $f(x) = \cos x$  را در نظر بگیرید.

الف) چند جمله‌ای درونیاب  $f$  را در نقاط گره‌ای  $x_0 = 0$  و  $x_1 = 0.5$  و  $x_2 = 1$  بدست آورید. (۵ امتیاز)

ب) فرض کنید  $0 \leq x \leq 1$  و  $P_n(x)$  چندجمله‌ای درونیاب  $f$  مبتنی بر نقاط  $i = 0, 1, \dots, n$  و  $x_i = \frac{i}{n}$  باشد، نشان دهید رابطه زیر برقرار است (۱۵ امتیاز):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = \cos x$$

۵. با روش کمترین مربعات بهترین برازش منحنی دو تابع زیر را بر اساس نقاط داده شده بیابید (۲۰ امتیاز):

الف)  $f(x) = A \sin x + \frac{B}{x}$  :

x	f(x)
1	3
2	4
3	7
4	10
5	9

ب)  $f(x) = \frac{1}{(a_0 + a_1 x)^3}$  :

x	f(x)
0	1
1	$\frac{64}{1000}$
2	$\frac{8}{1000}$
4	$\frac{1}{1000}$

۶. (برنامه نویسی) برنامه ای به زبان پایتون بنویسید که ابتدا  $n$  که تعداد نقاط داده شده است را ورودی بگیرد سپس در دو خط  $x$  و  $f(x)$  مربوط را ورودی بگیرد:

الف) اگر فاصله بین  $x$  ها یکسان نبود دو روش لاگرانژ و تفاضلات تقسیم شده نیوتون را انجام بدهد و چند جمله ای درونیاب را به ازای روش ها خروجی دهد.

ب) اگر فاصله  $x$  ها باهم یکسان بود دو روش پیشرو و مرکزی-پسرو نیوتون پیاده سازی شود و چند جمله ای درونیاب را به ازای روش ها خروجی دهد.

لازم به ذکر است که بعد از چاپ چند جمله ای درونیاب به ازای یک عدد رندوم  $r$  (در بازه  $x$  ها) برای هریک از  $P_n(r)$  ها درونیابی را انجام دهید و این مقدار را در خروجی نمایش دهید. (۲۰ امتیاز)

نمونه ورودی:

5

0.1 0.2 0.3 0.4 0.5

1.4 1.56 1.76 2 2.28

نمونه خروجی:

*forward :*

$$P_5(x) = 2x^2 + x + 1.28$$

$$f(0.25) = 1.655$$

*backward central :*

$$P_5(x) = 2x^2 + x + 1.28$$

$$f(0.35) = 1.875$$