6:01 PM Saturday, January 7, 2023

مثال :

$$y'(x) = \frac{x(e^{x^2}+2)}{6y^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x(e^{x^2}+2)}{6y^2}$$

$$\Rightarrow 6y^2\,dy = x(e^{x^2}+2)\,dx$$

$$\Rightarrow \int 6y^2\,dy = \int x(e^{x^2}+2)\,dx$$

$$2y^3 + C_1 = \frac{1}{2}e^{x^2} + x^2 + C_2$$

$$y^3(x) = \frac{1}{4}e^{x^2} + \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$\underbrace{\frac{x(e^{x^2}+2)}{4y^2}}_{y'(x) = f(x,y(x))} \Longrightarrow \boxed{y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{4}e^{x^2} + \frac{1}{2}x^2 + 1}} \quad y(x_i)$$

مثال :

$$y'(x) = \underbrace{1 + x\sin yx}_{f(x,y(x))} \qquad \frac{dy}{dx} = 1 + x\sin yx$$

$$dy = (1 + x\sin yx)\,dx$$

یک روش عددی تقریبی برای تعیین مقادیر y را تقریب زد به ازای x_i ، $1 \le i \le N$ در فاصله $[a,b]$ مطالعه

$x_0 = a \quad x_1 \quad x_i \quad x_{i+1} \quad b$

$$h = \frac{b-a}{N}$$

$$x_i = x_0 + ih$$

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$y(x)$	$y(x_0)$			$y(x_n)$

مقدار y را در نقطه x_i تقریب بزنیم؛ با توجه به رابطه $y'(x) = f(x,y(x))$ خواهیم داشت

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y(x))\,dx$$

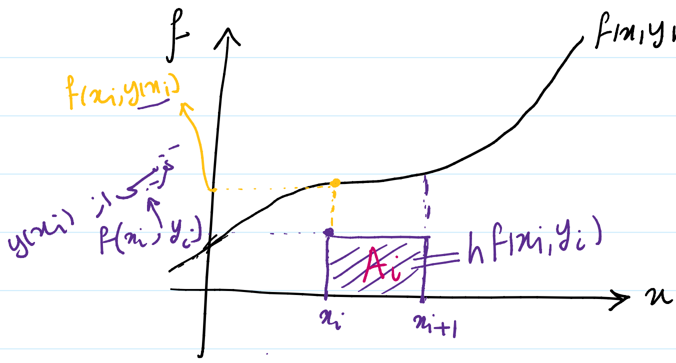
$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int^{x_{i+1}} f(x,y(x))\,dx$$

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,dx}_{A_i}$$

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = A_i$$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \underline{\underline{A_i}}$$

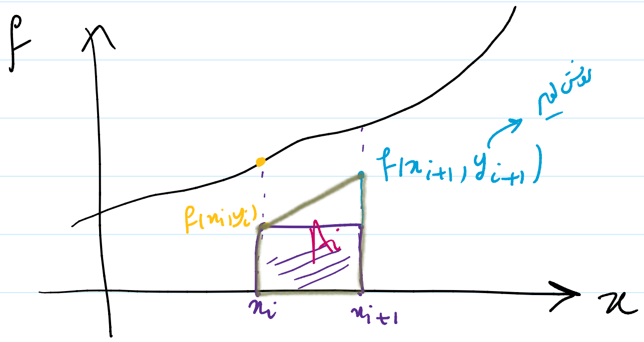
بنابراین بایستی A_i، که مساحت زیر منحنی f در بازه $[x_i, x_{i+1}]$ است را تقریب بزنیم.



روش اویلر

$$y(x_{i+1}) \approx \overset{y(x_{i+1})}{y_{i+1}} = \overset{y(x_i)}{y_i} + A_i$$

$$\boxed{y(x_{i+1}) \approx y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)}$$



روش هیون (Heun method)

$$A_i \approx \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) , f(x_{i+1}, \overset{\text{روش اویلر}}{\underset{y_i + h f(x_i, y_i)}{y_{i+1}}})\right]$$

$$\approx \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) , f(x_{i+1}, y_i + h f(x_i, y_i))\right]$$

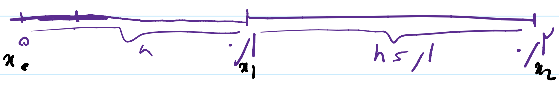
$$y(x_{i+1}) \approx y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + h f(x_i, y_i))\right]$$

مثال، فرض کنید.

$$\begin{cases} y'(x) = 1 + y^2(x) \\ y(0) = y_0 = 0 \end{cases}$$

با روش هیون تقریب $y(0.1)$ و $y(0.2)$ را با استفاده از $h=0.1$ تقریب بزنید.

حل:



$$f(x_0, y_0) = f(0,0) = 1$$

$$f(x_1, y_0 + h f(x_0, y_0)) = f(x_1, 0.1)$$
$$= f(0.1, 0.1)$$

$$y(0.1) \approx y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0,y_0) + f(\overset{0.1}{x_1},\ \overset{0+0.1}{y_0 + h\, f(x_0,y_0)}) \right] \quad = 1+(0.1)^2$$

$$= 0 + \frac{0.1}{2}\left[1+0 + 1 + (0.1)^2 \right]$$

$$y(0.2) \approx y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\left[f(x_1,y_1) + f(x_2,\ y_1 + h\, f(x_1,y_1)) \right]$$

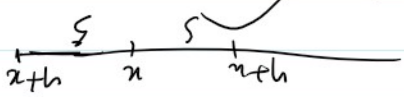
روش های مبتنی بر سری تیلور:

با فرض پیوستگی مشتقات y، روش اویلر را تعمیم بدهیم و جمله های بیشتری از سری تیلور را لحاظ کنیم.

$$y(x+h) = y(x) + h\frac{d}{dx}y(x) + \frac{h^2}{2}\frac{d^2}{dx^2}y(x) + \frac{h^3}{3!}\frac{d^3}{dx^3}y(x) + \cdots + \frac{h^p}{p!}\frac{d^p}{dx^p}y(x) + R(x)$$

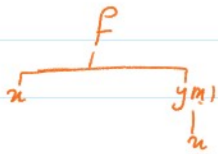
$$R(x) = \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}\, y^{(p+1)}(\eta)$$

η نقطه ای بین $x+h$, x است.



$h>0$

$$y'(x) = f(x, y(x))$$



$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = y''(x) = \frac{d\,y'(x)}{dx} = \frac{d\, f(x,y(x))}{dx}$$

$$= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}_{\partial_x f} + y'(x)\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}_{\partial_y f}$$

$$\Longrightarrow \quad y''(x) = \partial_x f(x,y) + y'(x)\,\partial_y f(x,y)$$

$$O(h^{p+1})$$

$$y(x+h) = y(x) + h\,F(x,y(x)) + \frac{1}{(p+1)!}h^{(p+1)}y^{(p+1)}(\eta)$$

$$y(x+h) = y(x) + \underline{h\,F(x,y(x))} + O(h^{p+1})$$

$$h(F(x,y(x))) = h\left(y'(x) + \underline{\frac{h}{2}y''(x) + \frac{h^2}{3!}y'''(x) + \cdots \frac{h^{p-1}}{p!}y^{(p)}(x)} \right)$$

$$= h\left(y'(x) + \frac{h}{2}\left(y''(x) + \frac{h}{3}\left(y'''(x) + \cdots + \frac{h}{p} y^{(p)}(x) \cdots \right)\right)\right).$$

برای روش از مرتبه p.

مثال: روش تیلور

$$y'(x) = y^2(x) + x^2$$
$$y(0) = 1$$

با استفاده از سری تیلور مرتبه ۳ تقریبی برای $y(0.1)$ با شروع از $x=0$ و از $h=0.1$ بیابید.

$$y(0.1) = y(0 + \underbrace{0.1}_{h}) \simeq y_1 = y_0 + h y'_0 + \frac{h^2}{2} y''_0 + \frac{h^3}{3!} y'''_0$$

$$= y_0 + h\left(y'_0 + \frac{h}{2}\left(y''_0 + \frac{h}{3} y'''_0\right)\right)$$

$$y' = y^2 + x^2 \quad \Rightarrow \quad y'_0 = y_0^2 + x_0^2 = 1 + 0 = 1$$

$$y'' = 2yy' + 2x \quad \Rightarrow \quad y''_0 = 2(1)(1) + 2(0) = 2$$

$$y''' = 2y'^2 + 2yy'' + 2 \quad \Rightarrow \quad y'''(0) = 2(1)^2 + 2(1)(2) + 2 = 8$$

$$y_1 = 1 + 0.1\left(1 + \frac{0.1}{2}\left(2 + \frac{0.1}{3} 8\right)\right) =$$

مشکل: روش تیلور، نیاز به محاسبه مشتقات f دارد که پرهزینه است.

با استفاده از روش رانگه-کوتا، تقریب‌های را بدون مشتقات f بدست می‌آوریم:

روش های رانگه-کوتا:

ابتدا از روش رانگه-کوتا مرتبه ۲ (که مبتنی بر روش سری تیلور مرتبه ۲) است، شروع می‌کنیم:

روش تیلور مرتبه ۲:

$$y(x+h) = y(x) + \underbrace{h f(x,y(x))}_{:K_1} + \frac{h^2}{2}\left[\partial_x f(x,y(x)) + f(x,y(x))\, \partial_y f(x,y(x))\right] + O(h^3)$$

$.K_1$

روش رونگه-کوتای مرتبه ۲:

$K_1 = hf(x,y)$

$K_2 = hf(x+\alpha h, y+\beta K_1)$

$y(x+h) = y(x_{i+1})$ $\qquad$ $y_i \leftarrow y(x_i)$

$\overbrace{x_i \quad\quad x_{i+1}}^{h}$

$y(x+h) \approx y + w_1 K_1 + w_2 K_2$

$* \quad f(x+\alpha', y+\beta') = f(x,y) + \alpha' \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \beta' \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + R(x+\alpha', y+\beta')$

$K_1 = hf(x,y)$

$K_2 = hf(x+\alpha h, y+\beta K_1)$

$= h\left[f(x,y) + \alpha h \partial_x f(x,y) + \beta K_1 \partial_y f(x,y) + O(h^2) \right]$

$= h f(x,y) + \alpha h^2 \partial_x f(x,y) + \beta h^2 f(x,y) \partial_y (x,y) + O(h^3)$

$y(x+h) \approx y(x) + w_1 K_1 + w_2 K_2$

$\simeq y + \underbrace{w_1 h f(x,y) + w_2 h f(x,y)}_{w_1+w_2=1 \;\; h y'(x)} + \overset{1/2 h^2}{w_2 \alpha h^2} \partial_x f(x,y)$

$+ \overset{1/2 h^2}{w_2 \beta h^2} f(x,y) \, \partial_y f(x,y) + O(h^3)$

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ w_2 \alpha = 1/2 \\ \beta w_2 = 1/2 \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} w_1 = w_2 = 1/2 \\ \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{array}$$

$$y(x+h) \simeq y + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2$$

$$= y + \frac{1}{2}h f(x,y) + \frac{1}{2} h f(\underbrace{x+h}, \underbrace{y+k_1}_{y+hf(x,y)})$$

$h f(x,y)$

$$y(x_{i+1}) = y_i + \frac{1}{2} h f(x_i, y_i) + \frac{1}{2} h f(x_{i+1}, y + hf(x_i, y_i))$$

[illegible]

$x_i \quad \underbrace{\quad}_{h} \quad x_{i+1} = x_i + h$

روش رونگه-کاتا از مرتبه j ($2<j$).

$$y(x_{i+1}) = y(x_i+h) \approx y_i + w_1 K_1 + \dots + w_j K_j$$

که در آن

$$K_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$K_l = hf\left(x_i + \alpha_l h,\ y_i + \sum_{m=1}^{l-1} \beta_{l,m} K_m\right) \qquad 2 \le l \le j$$

w_1 ، ... ، w_j را به گونه‌ای تعیین می‌شود که تعریف فوق، منطبق بر بسط تیلور مرتبه j ام باشد.

رانگه-کاتا مرتبه ۳.

$$y(x_{i+1}) \simeq y_i + \overset{1/6}{w_1} K_1 + \overset{1/6}{w_2} K_2 + \overset{2/3}{w_3} K_3$$

$$K_1 = hf(x_i, y_i)$$

$y(x_i) = y_i$ $y(x_{i+1}) = y_{i+1}$

x_i x_{i+1}

$y'(x) = f(x, y(x))$

$f(x_i + 1/2 h,\ y + 1/2 k_1)$

$$K_2 = hf(x_i + \overset{1/2}{\alpha_2} h,\ y + \overset{1/2}{\beta_{2,1}} K_1) = hf(x_i + \tfrac{1}{2}h,\ y + \tfrac{1}{2}K_1)$$

$$K_3 = hf(x_i + \overset{1}{\alpha_3} h,\ y + \overset{-1}{\beta_{3,1}} K_1 + \overset{2}{\beta_{3,2}} K_2)$$

$$= hf(x_i + h,\ y - K_1 + 2K_2)$$

ثابت با بسط تیلور که

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

$$\alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_2^2 w_2 + \alpha_3^2 w_3 = 1/3$$

$$\alpha_2 \beta_{32} w_3 = 1/6$$

$$\alpha_2 \beta_{32} w_3 = 1/6$$

$$\alpha_2 = \beta_{21}$$

$$\alpha_3 = \beta_{31} + \beta_{32}$$

$$\alpha_2 = 1/2 \ , \quad \alpha_3 = 1 \ ,$$

$$w_1 = w_2 = 1/6 \ , \quad w_2 = 2/3$$

$$\beta_{21} = 1/2 \qquad \beta_{31} = -1 \qquad \beta_{32} = 2$$

رانگه-کوتا مرتبه ۴:

$$y(x_{i+1}) \approx y_{i+1} = y_i + w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 + w_4 k_4$$

$$k_1 = h f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h f(x_i + h/2 , y_i + \tfrac{1}{2} k_1)$$

$$k_3 = h f(x_i + h/2 , y_i + 1/2 k_2)$$

$$k_4 = h f(x_i + h , y_i + k_3)$$

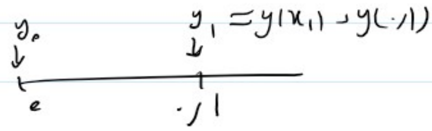
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} k_1 + \frac{1}{3} k_2 + \frac{1}{3} k_3 + \frac{1}{6} k_4$$

مثال: فرض کنید

$$y'(x) = y(x)$$
$$y(0) = 1$$

با استفاده از $h = 0.1$ و رانگه-کوتا مرتبه ۴، تقریبی برای $y(0.1)$ بدست آورید.

$$y(0) = 1 \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow y(0.1) \simeq y_1$$



$$x_0 = 0 , \quad y_0 = 1$$

$$K_1 = h f(x_0, y_0) = h y_0 = 0.1 (1) = 0.1$$

$$K_2 = hf\left(x_0 + h/2,\ y_0 + \tfrac{1}{2}K_1\right) = hf\left(0.05,\ 1 + \tfrac{1}{2}(0.1)\right)$$

$$= 0.1\, f\left(0.05,\ \underbrace{1 + \tfrac{0.1}{2}}_{}\right) = 0.1\left(\overset{1.05}{1 + \tfrac{0.1}{2}}\right) = 0.105$$

$$K_3 = hf\left(x_0 + h/2,\ y_0 + \tfrac{1}{2}K_2\right) = 0.1\, f\left(0.05,\ 1 + \tfrac{1}{2}(0.105)\right)$$

$$= 0.1\left(1 + \tfrac{1}{2}(0.105)\right)$$

$$K_4 = hf(x_0 + h,\ y_0 + K_3) = 0.1\, f\left(0.1,\ 1 + 0.1\left(1 + \tfrac{1}{2}(0.105)\right)\right)$$

$$= 0.1\left(1 + 0.1\left(1 + \tfrac{1}{2}(0.105)\right)\right) =$$

$$y(0.1) \simeq y_1 = y_0 + \tfrac{1}{6}K_1 + \tfrac{1}{3}K_2 + \tfrac{1}{3}K_3 + \tfrac{1}{6}K_4$$

حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول.

$$\vec{y}'(x) = \vec{f}(x, \vec{y})$$

$$\vec{y}'(x) = \begin{bmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \to \\ \\ \to \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} y_1(x) \\ \\ y_n(x) \end{bmatrix} = \vec{y}(x)$$

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, \vec{y}(x)) \\ \vdots \\ y_n'(x) = f_n(x, \vec{y}(x)) \end{cases} \Rightarrow \vec{F}(x, \vec{y}(x)) = \begin{bmatrix} f_1(x, \vec{y}(x)) \\ \vdots \\ f_n(x, \vec{y}(x)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}'(x) = \vec{F}(x, \vec{y}(x))$$

* نکته: فرض کنید

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

$$\ast\ \underbrace{y(x_0) = y_0,\quad y'(x_0) = y_0',\ \dots\quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}}_{y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}}\qquad 0 \le i \le n-1$$

بنابراین حل معادله دیفرانسیل با در نظر گرفتن

$$y_i := y^{(i-1)} \qquad i=1, \dots, n$$

تبدیل آن به یک دستگاه معادله به صورت

$$\begin{cases} y_1' = y^{(1)} = y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y^{(n-1)} = y_n \\ y_n' = y^{(n)} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

با استفاده از * شرایط اولیه دستگاه به صورت زیر است.

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y^{(0)}(x_0) = y_0^{(0)} = y_{1,0} \\ \vdots \\ y_{n-1}(x_0) = y^{(n-2)}(x_0) = y_0^{(n-1)} = y_{n-1,0} \\ y_n(x_0) = y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} = y_{n,0} \end{cases}$$

مثال: فرض کنید معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ به شکل زیر داده شده است.

$$\begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$y \to y' = y_2 \to y'' = y_2'$$

$$\begin{cases} y_1' = y' = y_2 \\ y_2' = y'' = -y = -y_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(0) = y(0) = 1 \\ y_2(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$y_1(x) = \sin x$$
$$y_2(x) = \cos x \Longrightarrow y(x) = y_1(x) = \sin x$$

مثال: فرض کنید مسئله مقدار اولیه مرتبه دوم زیر داده شده است. آن را به صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول بنویسید

$$y''(x) + xy'(x) + x^2 y(x) = 0$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0^{(1)}$$

حل :

$$y''(x) = \underbrace{-xy'(x) - x^2 y(x)}_{f(x,\, y,\, y')}$$

قرار دهید :

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1' = y' = y_2 \\ y_2' = y'' = -xy_2 - x^2 y_1 \end{cases}$$

با شرایط اولیه به شرح زیر :

$$y_1(x_0) = y(x_0) = y_0 = y_{1,0}$$

$$y_2(x_0) = y'(x_0) = y_0^{(1)} = y_{2,0}$$

روش های حل دستگاه ها :

① روش اویلر

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}_0 = \vec{y}(x_0)$$

$$\vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i + h\vec{f}(x_i, \vec{y}_i)$$

$$\vec{y}(x_{i+1}) = \begin{bmatrix} y_1(x_{i+1}) \\ \vdots \\ y_n(x_{i+1}) \end{bmatrix} \simeq \vec{y}_{i+1} \begin{bmatrix} y_{1,i+1} \\ \vdots \\ y_{n,i+1} \end{bmatrix}$$

$y_1(x_{i+1})$ $y_n(x_{i+1})$

① روش هیون (رانگ کوتای مرتبه دوم)

$$\vec{y}_0 = \vec{y}(x_0)$$

$$\vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i + \frac{h}{2}\left[\vec{f}(x_i, \vec{y}_i) + \vec{f}(x_{i+1}, \vec{y}_i + h\vec{f}(x_i, \vec{y}_i))\right]$$

مثال : از روش اویلر با فرض h= از ، برای حل تقریبی جواب دستگاه بالا در نقاط x= از , x= ۲ , x= ۱

اشعار بگیر:

$$y_1'(x) = y_2(x) = f_1(x, y_1, y_2) \qquad y_1(0) = 0$$

$$y_2'(x) = -y_1(x) = f_2(x, y_1, y_2) \qquad y_2(0) = 1$$

شرایط اولیه

$$\begin{array}{ccc} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0.1 & 0.2 \end{array}$$

حل:

$$\vec{y}(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} \Longrightarrow \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow y_{1,0} \\ \rightarrow y_{2,0} \end{array}$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$\vec{y}(x_0) = y_1(x_0) \approx y_{1,0}$$

$$y_n(x_0) \approx y_{n,0}$$

$$\vec{y}(\overbrace{0 + 0.1}^{x_1}) = \begin{bmatrix} y_1(\overbrace{0 + 0.1}^{x_1}) \\ y_2(\overbrace{0 + 0.1}^{x_1}) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{تقریب}} y_{1,1} \approx \\ \longrightarrow y_{2,1} \approx \end{array}$$

$$\begin{cases} y_1(0 + 0.1) \approx y_{1,1} = y_{1,0} + hf_1(x_0, y_{1,0}, y_{2,0}) \\ \qquad = 0 + 0.1\, y_{2,0} = 0.1(1) = 0.1 \\ y_2(0 + 0.1) \approx y_{2,1} = y_{2,0} + hf_2(x_0, y_{1,0}, y_{2,0}) \\ \qquad = 1 + 0.1(-y_{1,0}) = 1 + 0.1(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(0.1 + 0.1) \approx y_{1,2} = y_{1,1} + hy_{2,1} = 0.1 + 0.1(1) = 0.2 \\ y_2(0.1 + 0.1) \approx y_{2,2} = y_{2,1} + h(-y_{1,1}) = 1 - 0.1(0.1) = 0.99 \end{cases}$$

$$\underline{\vec{y}'(x)} = \vec{f}(x, y_1, \dots, y_n)$$

$$\underbrace{y_j}(x_{i+1}) \approx \underbrace{y_{j,i+1}} = \underbrace{y_{j,i}} + h\underbrace{f_j}\underbrace{(x_i, y_{1,i}, \dots, y_{n,i})}$$

$$1 \leq j \leq n$$