

## محاسبات عددی

زمان: ۱۲۰ دقیقه

آزمون پایان ترم

نیم سال اول ۱۴۰۱-۱۴۰۰

**سؤال ۱: (۱ نمره)** خطای محاسبه مقدار  $f = \frac{\sqrt{5}e^2}{3}$  را برای سه رقم اعشار به دست آورید.

**سؤال ۲: (۱ نمره)** ماتریس‌های  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  را در نظر بگیرید. با شروع از نقطه

$X_0 = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 2 \end{bmatrix}$  یک تکرار از روش نیوتن رافسون تعمیم یافته را برای حل دستگاه غیرخطی زیر اجرا کنید و بردار  $X_1$  که تقریبی برای جواب دستگاه است را به دست آورید.

$$\begin{cases} X^T A X = -3 \\ X^T B X = 9 \end{cases}$$

**سؤال ۳: (۰.۷۵ نمره)** در صورتیکه بخواهیم تابع  $f(x) = \sin \frac{\pi}{4} x$  را در نقاط متساوی الفاصله  $x_0, x_1, \dots, x_n$

با طول گام  $h$  برای بازه  $x \in [0, 1]$  با استفاده از چندجمله‌ای‌های درونیاب تقریب بزنیم، حداکثر مقدار  $h$  را طوری بیابید که خطای تابع درونیاب  $f$  حداکثر  $10^{-4}$  باشد.

**سؤال ۴: (۰.۷۵ نمره)** مقدار تابع  $f$  به صورت جدول زیر داده شده است. تقریبی برای  $f'(1/4)$  با استفاده

از برونمایی ریچاردسون به طوری که دقت آن  $O(h^4)$  باشد، محاسبه کنید.

$x$	$1/2$	$1/3$	$1/4$	$1/5$	$1/6$
$f(x)$	۰/۱۸۲۳	۰/۲۶۳۵	۰/۳۳۶۵	۰/۴۰۵۵	۰/۴۷۰۰

**سؤال ۵: (۱ نمره)** فرض کنید  $T_N$  و  $M_N$  به ترتیب، مقادیر تقریبی  $\int_a^b f(x) dx$  حاصل از قاعده‌های دوزنقه‌ای

و نقطه میانی با  $N$  زیربازه و  $S_{2N}$  حاصل از به کارگیری قاعده سیمپسون  $\frac{1}{3}$  با  $2N$  زیربازه بر  $[a, b]$  باشد. ثابت کنید:

$$\frac{1}{3}(2M_N + T_N) = S_{2N}$$

**سؤال ۶: (۱ نمره)** معادله دیفرانسل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} y' = \frac{x-y}{4} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

الف) با استفاده از روش تیلور مرتبه ۱ و با در نظر گرفتن طول گام  $h = 0.1$  تخمینی برای  $y(0.1)$  به دست آورید.  
 ب) با استفاده از روش آدامز-بشفورث مرتبه دوم، تخمینی برای  $y(0.2)$  به دست آورید.

**سؤال ۷: (۰.۷۵ نمره)** با استفاده از روش حذفی گاوس نشان دهید دستگاه معادلات خطی زیر جواب ندارد.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = -3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$

**سؤال ۸: (۰.۷۵ نمره)** با روش توانی با  $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، مقدار ویژه غالب و بردار ویژه نظیر ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ را به طور تقریبی به دست آورید به گونه‌ای که } |x^{(k)} - x^{(k-1)}| < 10^{-3}.$$