

مهلت تحویل این تمرین ۱۴۰۱/۰۹/۰۸ است. شما در مجموع ترم ۲۰ روز تاخیر مجاز دارید که مدیریت آن با خودتان است. در ضمن برای هر تمرین شما تا سه روز بعد از ددلاین مجاز به ارسال پاسخ هستید و پس از آن به هیچ عنوان پاسخی از شما پذیرفته نخواهد شد. پس از ساعات مجاز تاخیر، به ازای هر روز تاخیر، ۳۰ درصد از نمره شما کسر خواهد شد.

سوال ۱.

الف) چند جمله‌ای تیلور مرتبه دوم، $P_2(x)$ ، تابع $f(x) = xe^x + x$ را در حول $a = 0$ بنویسید.
 ب) کرانی برای خطای $|P_2(x) - f(x)|$ به ازای $x \in [0, 1]$ بیابید.

سوال ۲.

نقطه ثابت تابع $g(x) = \pi + 0.5 \sin(x)$ را با دقت 10^{-2} بیابید.

سوال ۳.

فرض کنید $f(x) = \cos x - x$

الف) ریشه تقریبی $f(x)$ را با روش نقطه ثابت بیابید.
 ب) ریشه تقریبی $f(x)$ را به روش نیوتون محاسبه کنید.
 ج) ریشه تقریبی $f(x)$ را به روش وتری (Secant Method) محاسبه کنید و سپس با پاسخ تقریبی حاصل شده از روش نیوتون (قسمت ب) مقایسه کنید.

سوال ۴.

با استفاده از روش نیوتون معادله $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}x^2 - x \sin x - \frac{1}{4} \cos^2 x = 0$ را با دقت 10^{-5} با شروع از $x_0 = \frac{\pi}{4}$ ، $x_0 = 5\pi$ و $x_0 = 10\pi$ محاسبه کنید و سپس پاسخ‌ها را مقایسه کنید.

سوال ۵.

دستگاه زیر را به روش حذف گوسین حل کنید.

$$\begin{cases} 2/11x_1 - 4/2x_2 + 0/921x_3 = 2/01 \\ 4/01x_1 + 10x_2 - 1/12x_3 = -3/09 \\ 1/09x_1 + 0/987x_2 + 0/832x_3 = 4/21 \end{cases}$$

سوال ۶.

وارون ماتریس A را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

سوال ۷.

تجزیه LU ماتریس A را بیابید و سپس با استفاده از آن دستگاه $Ax = b$ را حل کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

سوال ۸.

فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4/25 & 2/75 \\ 1 & 2/75 & 3/5 \end{bmatrix}$$

ماتریس پایین‌مثلثی L با درایه‌های روی قطر یک و ماتریس قطری D را به گونه‌ای بیابید که $A = LDL^T$.

سوال ۹.

نقطه $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$ جواب دستگاه زیر است.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$$

الف) نشان دهید $\rho(A) > 1$ که در آن A ماتریس ضرایب دستگاه فوق است.

ب) نشان دهید روش ژاکوبی با فرض $x^{(0)} = 0$ بعد از ۲۵ بار تکرار، تقریب خوبی از جواب ضرایب دستگاه ارائه نمی‌کند.

سوال ۱۰. نقطه $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$ جواب دستگاه

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

نشان دهید روش سایدل با فرض $x^{(0)} = 0$ بعد از ۲۵ بار تکرار، تقریب خوبی از جواب ضرایب دستگاه ارائه نمی‌کند.

موفق باشید.