



مسئله‌ی ۱.

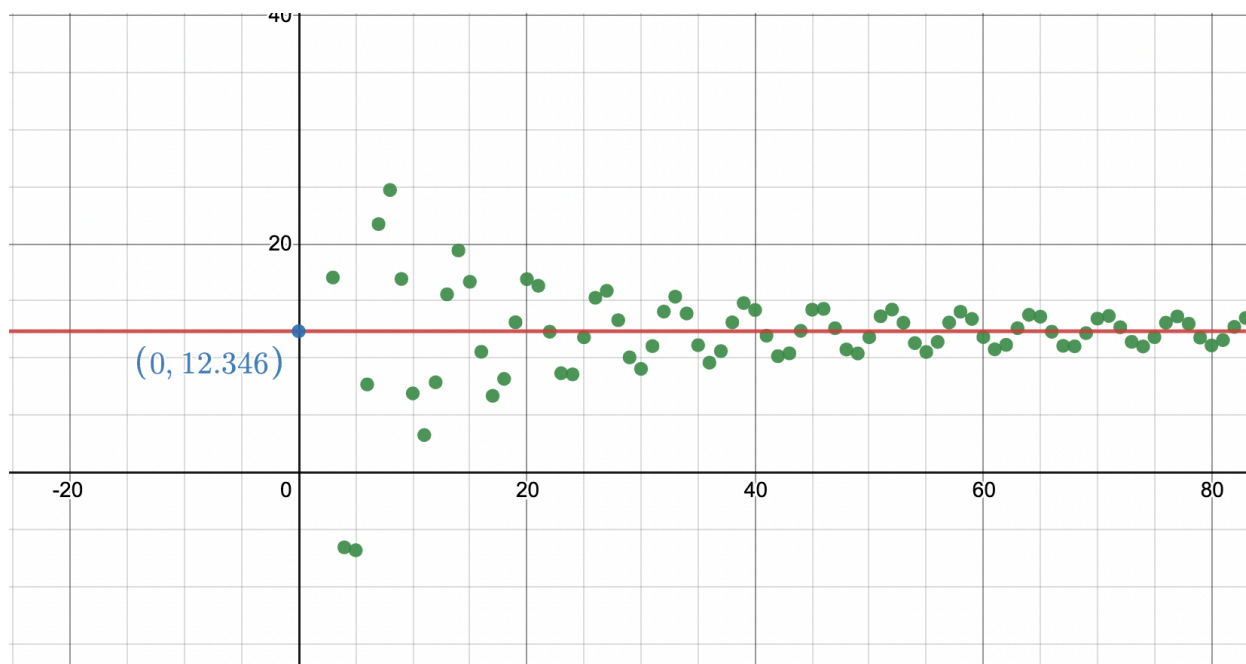
الف.

- خطای مدل: توپ دقیقاً کره نیست.
- خطای اندازه‌گیری: عدم دقت در اندازه‌گیری شعاع توپ
- خطای گرد کردن: در محاسبه حجم با استفاده از مقادیر گرد شده‌ی π و r نتیجه نهایی دچار خطا خواهد شد.
- خطای عملیات: در محاسبه حجم، چندین بار از ضرب یا تقسیم استفاده می‌شود که هر عملیات ریاضی خطا دارد.

ب.

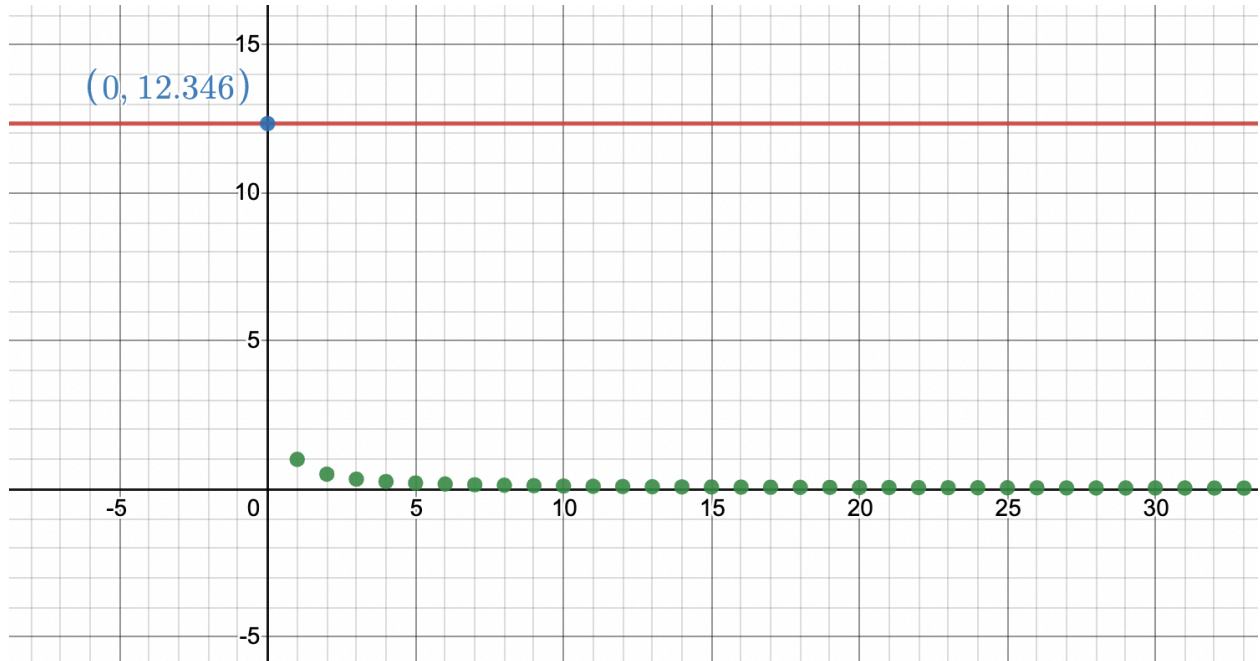
صحت بالا و دقت پایین:

$$a_n = 12.345 + \frac{100}{n} \times \sin(n)$$



دقت بالا و صحت پایین:

$$a_n = \frac{1}{n}$$



مسئله‌ی ۲.

$$\begin{aligned}\bar{x} = 1.23 &\Rightarrow e_{\bar{x}} = 4 \times 10^{-3} \\ \bar{y} = 1.57 &\Rightarrow e_{\bar{y}} = 3 \times 10^{-3} \\ f(1.23, 1.57) &= 3.9778 + e_1 \\ &= 3.98 + e_2 + e_1 \\ e_2 &= 2.2 \times 10^{-3} \\ e_1 &= 2\bar{x}e_{\bar{x}} + 2\bar{y}e_{\bar{y}} \\ &= 2 \times 1.23 \times 4 \times 10^{-3} + 2 \times 1.57 \times 3 \times 10^{-3} \\ &= 1.926 \times 10^{-2} \\ \max\{e\} &= e_1 + e_2 = 2.146 \times 10^{-2}\end{aligned}$$

مسئله‌ی ۳.

پاسخ بدست آمده از سایت <https://symbolab.com> را به عنوان معیار قرار می‌دهیم.

$$x_1 = 0.00542, x_2 = 92.24457$$

$$a = \frac{1}{3} \approx 0.3333$$

$$b = \frac{-123}{4} = -30.75$$

$$c = \frac{1}{6} \approx 0.1667$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\approx (-30.75)^2 - 4 \times 0.3333 \times 0.1667$$

$$\approx 945.5625 - 0.2222$$

$$= 945.3403$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} \approx 30.7464$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\approx \frac{30.75 \pm 30.7464}{0.6666}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 \approx \frac{30.75-30.7464}{0.6666} = \frac{0.0036}{0.6666} \approx 0.0054 \Rightarrow e_{x_1} = 0.0037 \\ x_2 \approx \frac{30.75+30.7464}{0.6666} = \frac{61.4964}{0.6666} \approx 92.2538 \Rightarrow e_{x_2} = 0.0001 \end{cases}$$

$$x' = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{\Delta}}$$

$$\approx \frac{-0.3334}{-30.75 \pm 30.7464}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'_1 \approx \frac{-0.3334}{-30.75-30.7464} = \frac{-0.3334}{-61.4964} \approx 0.0054 \Rightarrow e_{x'_1} = 0.0037 \\ x'_2 \approx \frac{-0.3334}{-30.75+30.7464} = \frac{-0.3334}{-0.0036} \approx 92.6111 \Rightarrow e_{x'_2} = 0.0040 \end{cases}$$

همانطور که مشاهده شد، خطای روش دوم بیشتر از روش اول است. علت آن نیز کوچک بودن مخرج و در نتیجه نادقیق تر بودن آن در محاسبه x'_2 است.

مسئله‌ی ۴.

فرض می‌کنیم $d_1 > 0$.

$$|y - \bar{y}| = \begin{cases} (1 - 0.d_{k+1} \dots) \times 10^{n-k} & d_{k+1} \geq 5 \\ 0.d_{k+1} \dots \times 10^{n-k} & d_{k+1} < 5 \end{cases} \leq 0.5 \times 10^{n-k}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{y - \bar{y}}{y} \right| &\leq \frac{0.5 \times 10^{n-k}}{0.d_1 d_2 \dots \times 10^n} \\ &\leq \frac{0.5 \times 10^{n-k+1}}{d_1.d_2 \dots \times 10^n} \\ &\leq \frac{0.5 \times 10^{n-k+1}}{10^n} \\ &= 0.5 \times 10^{-k+1} \end{aligned}$$

مسئله ی ۵.

الف.

$$\begin{aligned}x_3 &= 13.997521 \\4x^2 &= 23.2324 \\2x &= 4.82 \\f(x) &= -6.614879\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_{\text{round}}(x) &\approx 13.998 - 23.232 + 4.82 - 2.2 = -6.614 \Rightarrow e_{\text{round}} = 1.329 \times 10^{-4} \\f_{\text{truncate}}(x) &\approx 13.997 - 23.232 + 4.82 - 2.2 = -6.615 \Rightarrow e_{\text{truncate}} = 1.829 \times 10^{-5}\end{aligned}$$

ب.

تابع را بصورت زیر تغییر می دهیم. در این صورت بین محاسبه از طریق گرد کردن و قطع کردن تفاوتی وجود نخواهد داشت.

$$\begin{aligned}f(x) &= x(x^2 - 2(2x - 1)) - 2.2 \\&= 2.41(5.808 - 7.64) - 2.2 \\&= -4.415 - 2.2 = -6.615\end{aligned}$$

که این پاسخ با پاسخ بدست آمده با روش قطع کردن در حالت قبل برابر است، اما خطای روش گرد کردن کاهش پیدا می کند.