

۱. کران بالای خطای چند جمله‌ای درونیاب با روش لائرانژ در نقاط داده شده

$$x = \frac{1}{2} \quad x_0, x_1, x_2 = 0, 1, 2 \quad \text{به صورت زیر است}$$

$$\varepsilon_2 = f(x) - P_2(x) \leq (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}$$

$$x_0 \leq t \leq x_n \quad | \quad t = \text{maximize } |f^{(n+1)}(x_i)|$$

$$f(x) = 2 \sin \frac{\pi}{2} x \rightarrow f'(x) = \pi \cos \frac{\pi}{2} x \rightarrow f''(x) = -\frac{\pi^2}{2} \sin \frac{\pi}{2} x$$

$$\Rightarrow f^{(3)}(x) = -\frac{\pi^3}{4} \cos \frac{\pi}{2} x$$

$$t = \text{maximize } |f^{(3)}(x_i)| \rightarrow t = 0, 2, 4, \dots = 2K$$

$$\Rightarrow \varepsilon_2 \leq (x-0)(x-1)(x-2) \frac{-\frac{\pi^3}{4} \times \cos(\frac{\pi}{2} \times 2)}{3!}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{-1}{2} \times \frac{-3}{2} \times \frac{\pi^3/4}{6} \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi^3}{2^6} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^3$$

2. با استفاده از روش تفاضلات تقسیم شده می‌توان داریم:

x_i	$f(x_i)$	1st	2nd	3rd
-1	-2	$\rightarrow a_0$		
1	0	$\frac{0 - (-2)}{1 - (-1)} = 1 \rightarrow a_1$		
2	7	$\frac{7 - 0}{2 - 1} = 7$	2	$\rightarrow a_2$
3	26	$\frac{26 - 7}{3 - 2} = 19$	6	1 $\rightarrow a_3$

$$P(x) = -2 + 1(x+1) + 2(x+1)(x-1) + 1(x+1)(x-1)(x-2)$$

$$= (x-1)(1 + 2x + 2 + x^2 - x - 2)$$

$$= (x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$= x^3 - 1$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^3 - 1 = \frac{125}{8} - 1 = \frac{117}{8}$$