

سوال ۱.

ریشه معادله $f(x) = x - \cos x = 0$ را که در فاصله $[0, 1]$ قرار دارد به روش نیوتن با چهار رقم اعشار به دست آورید به طوری که $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$ که x_n تقریب ریشه مورد نظر در تکرار n ام است. (مقدار x_0 را 0.5 قرار دهید)

سوال ۲.

می خواهیم با استفاده از فرمول $V = \frac{1}{3}a^2h$ حجم یک هرم را به دست آوریم. خطاهای محتمل از انواع خطای مدل، خطای اندازه گیری، خطای گرد کردن و خطای عملیات را در این آزمایش به طور مختصر توضیح دهید.

سوال ۳.

عدد y را به k رقم اعشار گرد می کنیم و آن را \bar{y} می نامیم. حال براساس آن عبارت زیر را اثبات نمایید.

$$\left| \frac{y - \bar{y}}{y} \right| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-k+1}$$

می توانید برای اثبات این قسمت عدد y را به صورت $y = 0.d_1 \dots d_k d_{k+1} \dots \times 10^n$ در نظر بگیرید و مسئله را حالت بندی کنید.

سوال ۴.

جواب های معادله $\frac{1}{3}x^3 - \frac{12}{4}x + \frac{1}{6} = 0$ را با استفاده از فرمول های $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ و $x = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$ تا ۴ رقم اعشار و با روش گرد کردن به دست آورید. با محاسبه ی خطای نسبی جواب ها، بگویید که کدام فرمول دقیق تر عمل کرده است و چرا.

سوال ۵.

چند جمله ای $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 2/2$ در نظر بگیرید.

الف) مقدار تابع را در $x = 2/41$ یک بار با روش قطع کردن و یک بار با روش گرد کردن تا سه رقم اعشار به دست آورید و خطاهای نسبی را محاسبه کنید.

ب) $f(x)$ را به گونه ای تغییر دهید که خطاهای نسبی قسمت قبل، کاهش یابند.

سوال ۶.

اگر ریشه معادله $x^2 = c$ را با یک روش همگرا به دست آوریم و x_n تقریب ریشه در مرحله n ام باشد، مقدار خطای $|x_n - \sqrt{c}|$ را بر حسب x_n و c به دست آورید.

سوال ۷.

برای حل معادله‌ی $x^2 + x - 1 = 0$ در فاصله $(0, 1)$ به روش نقطه ثابت، می‌خواهیم $g(x)$ را تعیین کنیم. نشان دهید در کدام حالات پایین برای $g(x)$ شرط همگرایی برقرار بوده و در کدام حالات برقرار نخواهد بود.

$$g_1(x) = \frac{x^2+1}{2x+1} \quad (\text{الف})$$

$$g_2(x) = \frac{1}{1+x} \quad (\text{ب})$$

$$g_3(x) = \sqrt{1-x} \quad (\text{ج})$$

$$g_4(x) = 1 - x^2 \quad (\text{د})$$

سوال ۸.

ریشه تابع $g(x)$ را با در نظر گرفتن حدس اولیه $x_0 = -1, x_1 = 0$ با روش نابه‌جایی تقریب بزنید به طوری که داشته باشیم: $|f(x_n)| < 0.05$

$$g(x) = -2/75x^3 + 18x^2 - 21x - 12$$

سوال ۹.

ریشه معادله‌ی $\cos x + e^x - 3 = 0$ را با دقت سه رقم اعشار از روش نیوتن با شروع از نقطه $x_0 = 2$ حساب کنید. (تا سه مرحله جلو بروید)

سوال ۱۰.

می‌دانیم که یک شی در حال سقوط در هوا در معرض اصطکاک است. یعنی دو نیروی جاذبه و نیروی مقاومت هوا بر آن وارد می‌شود. تابعی که موقعیت این جسم را نشان می‌دهد به صورت زیر است:

$$s(t) = s_0 - \frac{mg}{k}t + \frac{m^2g}{k^2}(1 - e^{-kt/m})$$

به طوری که در آن m مقدار جرم شی به کیلوگرم، g ثابت شتاب گرانش و s_0 موقعیت اولیه شی بوده است.

الف) اگر جرم شی یک کیلوگرم، ضریب k برابر 0.1 و موقعیت اولیه شی $s_0 = 100m$ باشد، با استفاده از روش نیوتن در سه گام زمانی که شی به سطح زمین می‌رسد را محاسبه کنید.

ب) می‌دانیم مقدار k براساس شکل و ایرودینامیک شی در حال سقوط تعیین می‌شود و اندازه‌گیری مقدار دقیق آن می‌تواند چالش‌انگیز باشد. حال می‌خواهیم یک دقت‌سنجی روی جواب قسمت الف داشته باشیم. اگر بدانیم که مقدار ضریب k با دقت ده درصد در اختیار ما قرار دارد، تخمین خود را با احتساب خطا از زمان رسیدن شی به سطح زمین را محاسبه کنید.

موفق باشید.