ساختمان گسسته - تمرین سری ... ۱۴۰۰-۱۴۰۱

۱) نشان دهید $x=\frac{1}{\tau}$, $y=\sqrt{5}$, $z=e$ دارای صورت...

$$f=\frac{\sqrt{5}\,e^{\tau}}{\tau} \implies f=xyz^{\tau}$$

$x=\frac{1}{\epsilon} \leq 0,\epsilon\epsilon\epsilon \qquad e_x \leq 0,0\times 10^{-\tau}$

$y=\sqrt{5} \leq 1,\tau\epsilon\gamma \qquad e_y \leq 0,0\times 10^{-\tau}$

$z=e \leq 1,\vee\wedge\wedge \qquad e_z \leq 0,0\times 10^{-\epsilon}$

$$f=(0,\tau\epsilon\epsilon)(1,\tau\epsilon\gamma)(1,\vee\wedge\wedge)^{\tau}+e_f$$

$$f=0,0001+e_f \qquad e_f \leq 0,0\times 10^{-\epsilon}+e_f$$

چون هر سه این اعداد از مرتبه اعشار بیشتر باشد ...
دقت در این مورد جبری هم کردن تقسیم =

$$e_f \leq e_x\cdot\frac{df}{dx}+e_y\frac{df}{dy}+e_z\frac{df}{dz}$$

$$e_f \leq e_x(yz^{\tau})+e_y(xz^{\tau})+e_z(\tau xyz) \implies e_f \leq 0,0\times 10^{-\epsilon}(yz^{\tau}+xz^{\tau}+\tau xyz)$$

$$e_f \leq 0,0\ ۱\tau$$

$$e_f' \leq 0,0\times 10^{-\epsilon}+e_f \leq 0,0\times 10^{-\epsilon}+0,0\ ۱\tau \implies e_f' \leq 0,0\ ۱\tau 0$$

$$f=0,0,0.0\pm 0,0\ ۱\tau 0$$

---

۲)

$$X^T A X = -\tau \implies [x\ \ y]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=-\tau \implies x^{\tau}-y^{\tau}=-\tau$$

$$X^T B X = 9 \implies [x\ \ y]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \tau\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=9 \implies x^{\tau}+\tau y^{\tau}=9$$

$$\begin{cases} x^{\tau}-y^{\tau}+\tau=0 = F(x,y)\\ x^{\tau}+\tau y^{\tau}-9=0 = G(x,y)\end{cases}$$

$\frac{\partial F}{\partial x}=\tau x \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=-\tau y$

$\frac{\partial G}{\partial x}=\tau x \qquad \frac{\partial G}{\partial y}=\epsilon y$

$$D=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\tau x & -\tau y\\ \tau x & \epsilon y\end{vmatrix}=\wedge xy+\tau xy = \ ۱۲ xy$$

$$D_1=\begin{vmatrix}-F(x,y) & \frac{\partial F}{\partial y}\\ -G(x,y) & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-x^{\tau}+y^{\tau}-\tau & -\tau y\\ -x^{\tau}-\tau y^{\tau}+9 & \epsilon y\end{vmatrix}=\epsilon y(-x^{\tau}+y^{\tau}-\tau)+\tau y(-x^{\tau}-\tau y^{\tau}+9)$$

$$=-\epsilon x^{\tau}y+\epsilon y^{\tau}-۱\tau y+\tau yx^{\tau}-\tau y^{\tau}+\ ۱\wedge y=\begin{cases}-\epsilon x^{\tau}y\\ +\epsilon y\end{cases}$$

①

$$D_r = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & -F(x,y) \\[2mm] \dfrac{\partial G}{\partial x} & -G(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -x'+y'-3 \\[1mm] 2x & -x'-2y'+4 \end{vmatrix} = 2x(-x'-2y'+4) - 2x(-x'+y'-3)$$

$$= 2x(-3y'+7)$$

$$x = \begin{bmatrix} \cdot\wedge \\ -2 \end{bmatrix} \qquad x_1 = x_0 + \frac{D_1}{D}$$

$$y_1 = y_0 + \frac{D_r}{D}$$

$$\frac{D_1}{D} = \frac{-2x^2y' + 2y}{12xy} = \frac{-x'+1}{2x} = \frac{-3F+1}{2x\cdot1\wedge} = \cdot1 \, 25\delta \implies x_1 = \cdot1\wedge + \cdot1\,25\delta$$

$$\boxed{= 1\,1\cdot25}$$

$$\frac{D_r}{D} = \frac{2x(-2y'+12)}{12xy} = 0 \implies y_1 = y_0 + \cdot = -2 + \cdot = \boxed{-2}$$

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

$$|x - x_0| \leq |x_n - x_0| \implies |f(x) - p(x)| \leq \frac{|x_n - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

$$M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(x)| \leq \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}$$

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}}{(n+1)!} \leq 10^{-\varepsilon} \implies n = 9 \ , \ h = \frac{1}{9}$$

③

۴) به همین روش مشتق مرتبه دوم نیز با دقت $O(h)$ محاسبه می‌شود. اثبات کنید.

$h_1 = ٠٫٢ \implies g(h_1) = f'(١, \varepsilon) \simeq \dfrac{f(١٫٤) - f(١٫٢)}{٢ \times ٠٫٢} = \dfrac{٠٫٤٧٠٠ - ٠٫١٨٢٥}{٠٫٤} = ٠٫٧١٩٣٥$

$h_2 = ٠٫١ \implies g(h_2) = f'(١, \varepsilon) \simeq \dfrac{f(١٫٥) - f(١٫٣)}{٢ \times ٠٫١} = \dfrac{٠٫٤٠٥٥ - ٠٫٢٤٦٥}{٠٫٢} = ٠٫٧١٠٠$

ردیف دوم بریچاردسون بهتر $O(h^٤)$ تقریب می‌زند.

$f'(١, \varepsilon) \simeq \dfrac{٤g(h_2) - g(h_1)}{٣} = \dfrac{٤ \times ٠٫٧١٠٠ - ٠٫٧١٩٣٥}{٣} = \boxed{٠٫٧٠.٩٩٢}$

---

۵) قاعده ذوزنقه‌ای، قاعده نقطه میانی و قاعده سیمپسون روی فاصله $[a, b]$ را

$M_N = h \left[f(x_0 + \tfrac{h}{٢}) + f(x_1 + \tfrac{h}{٢}) + \cdots + f(x_{N-1} + \tfrac{h}{٢}) \right]$

$T_N = \dfrac{h}{٢} \left[f(x_0) + ٢(f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})) + f(x_N) \right]$

ثابت کنید $h = \dfrac{b-a}{N}$ و $x_i = a + ih$ ، $i = ٠, ١, ٢, \dots, N$.

نقاط تقسیم در حالت تعمیم با $٢N$ عبارتند از : و دسته بندی می‌کنیم.

x_0 , $x_0 + \tfrac{h}{٢}$, x_1 , $x_1 + \tfrac{h}{٢}$, ... , x_{N-1} , $x_{N-1} + \tfrac{h}{٢}$, x_N

طول گام‌ها برابر با $h' = \dfrac{b-a}{٢N}$ است. در گام تازه داریم:

$x'_0 = x_0$

$x'_1 = x_0 + \tfrac{h}{٢}$

$x'_٢ = x_1$

$x'_٣ = x_1 + \tfrac{h}{٢}$

⋮

$x'_{٢N-٢} = x_{N-1}$

$x'_{٢N-١} = x_{N-1} + \tfrac{h}{٢}$

$x'_{٢N} = x_N$

$٢M_N + T_N = ٢h \left[f(x'_1) + f(x'_٣) + \cdots + f(x'_{٢N-١}) \right]$

$\quad + \tfrac{h}{٢} \left[f(x'_0) + ٢(f(x'_٢) + \cdots + f(x'_{٢N-٢})) + f(x'_{٢N}) \right]$

$= \dfrac{b-a}{٢N} \left[٤\left(f(x'_1) + f(x'_٣) + \cdots + f(x'_{٢N-١})\right) \right] +$

$\quad + \dfrac{b-a}{٢N} \left[f(x'_0) + ٢(f(x'_٢) + \cdots + f(x'_{٢N-٢})) + f(x'_{٢N}) \right]$

$= h' \left[f(x'_0) + ٤(f(x'_1) + f(x'_٣) + \cdots + f(x'_{٢N-١})) \right.$

$\quad \left. + ٢(f(x'_٢) + f(x'_٤) + \cdots + f(x'_{٢N-٢})) + f(x'_{٢N}) \right]$

$= ٣ S_{٢N}$

۴) فقط زیرِ ریشِ تشویه ردتِ اول عامل دال رودش پیاده سازست :

$$y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i) \longrightarrow h = 0/1 \to y(0/1) = y(0) + 0/1\, f(0,1)$$

$$= 1 + 0/1 \times \frac{1-0}{2} = 0/95$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[3\, f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})\right]$$

$$i=1 \longrightarrow y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\left(3\, f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)\right)$$

$$y_2 = 0/95 + \frac{0/1}{2}\left(3\, f(0/1, 0/95) - f(0,1)\right) =$$

$$0/95 + 0/05\left(3 \times \frac{0/1 - 0/95}{2} - \frac{1-0}{2}\right) = \boxed{0/9115}$$

---

۷) انتگرال حسابِ آزمایشِ رودرسنی :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & | & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & | & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & | & 2 \end{bmatrix}$$

ميم، سطر سوم را در چربِ عدد مشخص،

$-2 R_1 + R_2$

$-3 R_1 + R_3 \Longrightarrow$

$-3 R_1 + R_4$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & | & -5 \\ 0 & 3 & -3 & 7 & | & -1 \\ 0 & 4 & -2 & 8 & | & -1 \end{bmatrix}$$

ميم، سطر دوم را در چربِ عدد مشخص،

$-2 R_2 + R_3$

$-2 R_2 + R_4 \Longrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & | & -5 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & | & 9 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & | & 10 \end{bmatrix}$$

ميم، سطر سوم را در چربِ عدد مشخص،

$-R_3 + R_4 \Longrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & | & -5 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & | & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 4 \end{bmatrix}$$

پر سیستمِ فوق و آزراردتِ نشانتِ نداره که معیبِ رادرسِ نداره.

٨)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$AX_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 3 \qquad X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \end{bmatrix}$

$$AX_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/3 \\ 5/3 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 8/3 \qquad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/8 \end{bmatrix}$

$$AX_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 5/8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21/8 \\ 13/8 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 21/8 \qquad X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 13/21 \end{bmatrix}$

$$AX_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 13/21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55/21 \\ 34/21 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 55/21 \qquad X_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 34/55 \end{bmatrix}$

2.4190

$$AX_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 34/55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 144/55 \\ 89/55 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 144/55 \qquad X_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 89/144 \end{bmatrix}$ $\longrightarrow$ نقطة الاستقرار

2.4818

$$AX_5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 89/144 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$\lambda_p = 2.414$

$X_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 89/144 \end{bmatrix}$

⑨