محاسبات عددی

نوشته: ان. وی. کوپچنوا

آی. ای. مارون

ترجمه: حمید سربازی آزاد

مقدمه مترجم

یکی از دروس جالب در دوره کارشناسی رشته‌های علوم و مهندسی درس «محاسبات عددی» یا «آنالیز عددی» است. اساتید این درس معمولاً از کتب مختلف که هر یک در مبحثی خاص مناسب هستند برای ارائه مطالب مورد نظر در برنامه این درس استفاده می‌کنند و به جرات می‌توان گفت که قریب به اتفاق کتاب‌های موجود در این زمینه به تنهایی کامل و جامع نیستند.
کتاب حاضر ترجمه کتابی به نام Computational Mathematics می‌باشد که نویسندگانش آن‌را در کمال ایجاز و زیبایی تالیف و تدوین کرده‌اند. آهنگ موزون و ترتیب و ترکیب موجز ارائه مطالب کتاب که ملغمه‌ای از مبانی تئوریک مباحث، روش‌ها و مثال‌های کاربردی است، هر شخص آشنا به آنالیز عددی را مجذوب می‌کند. علاوه بر این کتاب موجود شامل تمامی مباحث مورد نظر در سیلابس درس «محاسبات عددی» و یا «آنالیز عددی» می‌باشد و به زعم مترجم مناسب‌ترین کتاب درسی برای تدریس این دروس می‌باشد.
امیداست که این ترجمه بتواند زیبائی‌ها و نقاط قوت این کتاب را به طالبانش بنمایاند و مدرسین و دانشجویان مربوطه را به کار آید.
در انتها بر خود لازم میدانم که از تمامی عزیزانی که به هر صورت ممکن در آماده شدن و چاپ این کتاب موثر بوده‌اند صمیمانه تشکر و قدردانی کنم.

حمید سربازی آزاد
دی‌ـآذر ماه ۱۳۷۴

پیشگفتار مؤلفان

استفاده موثر از تکنیک‌های مدرن کامپیوتری بدون بکارگیری ماهرانه تقریب و آنالیز عددی (که رشد قابل توجهی در روی‌آوردن به این روش‌ها درمحاسبات تقریبی دیده شده) میسر نمی‌باشد.
ریاضیات محاسباتی به عنوان یک درس در برنامه رشته‌های مهندسی و علوم اقتصادی و دانشگاهی جایگاهی در حال گسترش پیدا کرده و همراه آن نیز نیاز به کتاب‌های درسی در این زمینه فزونی یافته و یک نیاز مبرم به راهنمایی برای حل مسائل در زمینه ریاضیات محاسباتی محسوس است.
کتاب حاضر کوششی در جهت تدارک چنین راهنمایی است. کتاب ساختاری به صورت ذیل دارد: هر بخش با یک مقدمه تئوریک خلاصه برای تعریف مسئله، ارائه فرمول‌های کاربردی، روش‌های محاسبات، برآورد خطا و مقایسه بین روش‌های مختلف مطرح شده، از نقطه نظر پیچیدگی، درجه دقت قابل دسترسی، و سهولت حل آن‌ها با یک کامپیوتر شروع می‌شود. در ادامه با حل مشروح یک مسئله نمونه، مراحل مختلف الگوریتم‌های مربوطه نشان داده می‌شوند. در پایان بخش، مسائلی به عنوان تمرین برای خواننده در نظر گرفته شده است که پاسخ بیشتر این مسائل نیز در دسترس می‌باشد.
برای تفهیم بهتر موضوع، بیشتر مسائل حل شده طوری انتخاب شده‌اند که محاسبات آن‌ها خسته کننده نباشد. پیشنهاد می‌شود که در وحله اول و برای مطالعه گروهی کامپیوترهای رومیزی مورد استفاده قرار گیرند.
این کتاب در ابتدا برای دانشجویان مهندسی در نظر بود، اما برای دانشجویان اقتصاد، مهندسین فارغ‌التحصیل و برای دانشجویان دوره‌های ارشد و دانش‌پژوهان علوم کاربردی نیز می‌تواند مفید واقع شود. به نظر ما مطالب کتاب از محدوده سیلابس ریاضیات محاسباتی فراتر نرفته است.
مولفان این مجال را جهت ادای تشکر و سپاس عمیق از خ. ل. اسمولتسکی و آی. ام. استزین برای خواندن نسخه اولیه کتاب مغتنم می‌شمارند. راهنمایی‌ها و نقطه نظرات این عزیزان در بهبود کتاب بسیار موثر بود. همچنین از ل. ز. رامشسکی برای ویرایش نسخه اولیه و نقش او در نگارش فصل‌های اول و ششم صمیمانه

قدردانی می‌کنیم.

ما نیز معتقدیم که چنین کارهایی خالی از اشتباه نیستند به خصوص که این کتاب اولین راهنمای تدریس منتشر شده از این دست، در کشور ماست. از این رو ما پذیرای عقاید و انتقادات خوانندگان که می‌بایستی به آدرس:

117071, MOSCOW

V-71, Leninsky prospect, 15, “Nauka” publishers main Editoral office

for physico-Mathematical Literature.

فرستاده شوند می‌باشیم.

مؤلفان

۱ـ محاسبات تقریبی و برآورد خطای محاسبات

۱ـ۱ـ اعداد تقریبی و خطای مطلق و نسبی آن‌ها

در انجام محاسبات قاعدتا ما با مقادیر تقریبی کمیت‌ها سر و کار داریم یعنی با اعداد تقریبی. داده‌های اولیه معمولا خود دارای مقداری خطا هستند که این خطا در جریان محاسبات تحت تأثیر خطاهای گرد کردن، بکارگیری فورمول‌های تقریبی و ... بیشتر می‌شود.
یک برآورد مناسب از خطا ما را قادر می‌سازد تا دقت مورد نیاز در انجام محاسبات بینابینی برای رسیدن به نتیجه نهایی و مطلوب را مشخص کنیم.
خطای یک عدد تقریبی a یعنی اختلاف $a - a_\circ$ مابین عدد و مقدار واقعی‌اش $a_\circ$ معمولاً مشخص نیست.
برآورد خطای یک عدد تقریبی a، یعنی برقرار کردن یک نامساوی به صورت

$$|a - a_\circ| \leq \Delta_a \qquad (۱-۱)$$

عدد Δ_a خطای مطلق عدد تقریبی a نامیده می‌شود (گاهی اوقات آنرا خطای مطلق حدّ می‌گویند). خطای مطلق حدّ یک عدد تقریبی هر عدد ناکوچکتر از خطای مطلق آن عدد است. بنابراین می‌توان گفت که هر عدد بزرگ‌تر از خطای مطلق حدّ یک عدد تقریبی مفروض را می‌توان خطای مطلق حدّ آن عدد نیز خواند.
در عمل بهتر است برای Δ_a کوچکترین عدد ممکن که نامساوی (۱-۱) را برقرار کند در نظر گرفته شود.
هنگام ارائه خطای مطلق می‌بایستی دو یا سه رقم با ارزش داده شود (در شمارش ارقام ارزشمند از صفرهای سمت چپ صرف‌نظر می‌شود، برای مثال عدد ۰/۰۱۰۰۳۰ پنج رقم ارزشمند دارد). در یک عدد تقریبی a نمی‌بایست ارقامی را که به خطای مطلقش Δ_a گرد شده‌اند را نگه‌داشت.

مثال ۱ـ۱ـ طول و عرض یک اطاق که با دقت ۱^{cm} اندازه‌گیری شده، برابر $a = ۵/۴۳m$ و $b = ۳/۸۲m$ می‌باشند. خطای محاسبه مساحت اطاق $S = ab = ۲۰/۷۴۲۶m^۲$ را برآورد کنید.

حل. طبق فرض $\Delta_a = ۰/۰۱m$ و $\Delta_b = ۰/۰۱m$، بنابراین مقادیر حدّی مساحت برابرند با:

$$(a + ۰/۰۱)(b + ۰/۰۱) = ۲۰/۸۳۵۲ \ m^۲,$$
$$(a - ۰/۰۱)(b - ۰/۰۱) = ۲۰/۶۵۰۲ \ m^۲,$$

با توجه به این مقادیر و مقدار محاسبه شده S می‌توانیم نامساوی زیر را تشکیل دهیم:

$$|S - S_\circ| \leq ۰/۰۹۲۶$$

که با توجه به آن می‌توان نتیجه گرفت که خطای مطلق S برابر $\Delta_S = ۰/۰۹۲۶^{m^۲}$ می‌باشد. در اینجا می‌توانیم مقدار Δ_S را گرد کنیم. برای نمونه مثل $\Delta_S = ۰/۰۹۳ \ m^۲$ یا $\Delta_S = ۰/۱۰ \ m^۲$ (خطای مطلق را معمولاً به اعداد بزرگتر گرد می‌کنند!)، که در این صورت مقدار مساحت را می‌توان به صورت $S = ۲۰/۷۴۳ \ m^۲$ یا $S = ۲۰/۷۴ \ m^۲$ و یا حتی $S = ۲۰/۷ \ m^۲$ نوشت.

مثال ۱ـ۲ـ یک کامپیوتر برای کار با اعداد فقط با سه رقم معنی دار طراحی شده است. با چه دقتی می‌توان اعداد π و $\frac{۱}{۳}$ را در آن ذخیره کرد؟

حل. فرض کنید $a = ۳/۱۴ \simeq \pi$ (به جای $\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲\ldots$)، خطای عدد a را می‌توان با عدد $\Delta_a = ۰/۰۰۱۶$ برآورد کرد.
فرض کنید $b = ۰/۳۳۳ \simeq \frac{۱}{۳}$. خطای عدد b را می‌توان با عدد $\Delta_b = ۰/۰۰۰۳۴$ یا $\Delta_b = ۰/۰۰۰۴$ برآورد کرد.

خطای مبنای δ_a یک عدد تقریبی a برابر با نسبت خطای مطلق عدد Δ_a به اندازه عدد a (قدر مطلق a) است یعنی:

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}, \quad a \neq ۰ \qquad (۱-۲)$$

خطای نسبی معمولاً به صورت درصد و با دو یا سه رقم بیان می‌شود. گاهی اوقات خطای نسبی با نسبت $\frac{\Delta_a}{|a_\circ|}$ تعریف می‌شود که $a_\circ$ مقدار واقعی عدد (امّا نامعلوم) مورد نظر است. اگر خطای نسبی عدد a بیشتر از پنج درصد نباشد، آنگاه اختلاف میان نسبت‌های $\frac{\Delta_a}{|a|}$ و $\frac{\Delta_a}{|a_\circ|}$ فقط در رقم دوم خطا است که قابل اغماض است.

مثال ۱ـ۳ـ خطای نسبی عدد S در مثال ۱ـ۱ را بدست آورید.

حل. داریم $S = ۲۰/۷۴۲۶$ و $\Delta_S = ۰/۰۹۲۶$. بنابراین: $\delta_S = \frac{۰/۰۹۲۶}{۲۰/۷۴۲۶} = ۰/۰۰۴۵ = ۰/۴۵\%$.

در بیشتر کاربردهای علمی و فنی دقت اعداد تقریبی معمولاً با خطای نسبی آن‌ها بیان می‌گردد. خطای نسبی یک عدد تقریبی، با تعداد ارقام صحیح آن در ارتباط است. شمارش تعداد ارقام صحیح، از اولین رقم ارزشمند عدد تا اولین رقم ارزشمند خطای مطلق عدد انجام می‌گیرد. برای مثال عدد $S = ۲۰/۷۴۲۶$ با خطای مطلق $\Delta_S = ۰/۰۹۲۶$ دارای سه رقم صحیح می‌باشد (۷ و ۰ و ۲)، یعنی تا موقعیتی که ارقام مشکوک شروع می‌شوند.
بطور تقریبی باید دانست که وجود تنها یک رقم صحیح در عدد متناظر با خطای نسبی‌ای از درجه ۱۰%، وجود دو رقم صحیح متناظر با خطای نسبی‌ای از درجه ۱%، وجود سه رقم صحیح متناظر با خطای نسبی‌ای از درجه $۰/۱\%$ و ... می‌باشد.
در جداول ریاضی تمام اعداد به ارقام صحیحشان گرد می‌شوند یعنی تمام ارقام مشخص شده، ارقام صحیح هستند و خطای مطلق بیشتر از نصف واحد آخرین رقم حفظ شده نیست. برای مثال اگر یک جدول، مقدار $e = ۲/۷۱۸$ را بدست دهد، خطای مطلق بیشتر از $۰/۵ \times ۱۰^{-۳}$ نیست.
در نتایج نهایی محاسبات، در تمامی ارقام عدد، تنها یک رقم مشکوک ذکر می‌شود و در محاسبات بینابینی ما معمولاً برای اعداد دو یا سه رقم مشکوک را نگه می‌داریم که گرد کردن آن خطایی بوجود نمی‌آورد.

مثال ۱ـ۴. عدد داده شده $S = ۲۰/۷۴۲۶$ در مثال ۱ـ۱ را با ارقام صحیحش گرد کنید.

حل. چون عدد S سه رقم صحیح دارد می‌توان آن‌را به صورت $S = ۲۰/۷$ نوشت. به هر حال در این مورد مقدار حذف شده $۰/۰۴۲۶$ در عملیات گرد کردن می‌بایستی به خطای مطلق $\Delta_S = ۰/۰۹۲۶$ افزوده شود. با توجه به خطای مطلق بدست آمده $\Delta_S = ۰/۱۳۶$ و رقم سوم عدد S (که مشکوک است) می‌توانیم عدد S را تا دو رقم گرد کنیم، یعنی:

$$S = ۲۱ \quad (\Delta_S = ۰/۴۴ < ۰/۵)$$

این مثال نشان می‌دهد که گرد کردن نتایج محاسبات تا ارقام صحیح همیشه مفید نیست.

توجه. مطابق با کاربردهای استاندارد، ما نیز در اینجا از روش گرد کردن ذیل استفاده می‌کنیم: اگر اولین رقم حذف شده بزرگتر یا مساوی ۵ است، یکی به آخرین رقم به جای مانده اضافه می‌کنیم.

مسائل

۱ـ اعداد زیر را تا سه رقم با ارزش گرد کنید و خطای مطلق Δ و نسبی δ اعداد تقریبی بدست آمده را بدست آورید.

الف) ۲٫۱۵۱۴ ب) ۰٫۱۶۱۵۲ پ) ۰٫۰۱۲۰۴ ت) ۱٫۲۲۵ ث) ۰٫۰۰۱۵۲۸۱−

ج) ۳۹۲٫۸۵− چ) ۰٫۱۵۴۵ ح) ۰٫۰۰۳۹۲۲ خ) ۶۲۵٫۵۵ د) ۹۴٫۵۲۵

۲ـ خطای مطلق اعداد تقریبی زیر را که همراه خطای نسبی‌شان آمده‌اند، بدست آورید.

الف) $a = ۱۳۲۶۷\ ,\ \delta = ۰٫۱\%$ ب) $a = ۲٫۳۲\ ,\ \delta = ۰٫۷\%$

پ) $a = ۳۵٫۷۲\ ,\ \delta = ۱\%$ ت) $a = ۰٫۸۹۶\ ,\ \delta = ۱۰\%$

ث) $a = ۲۳۲٫۴۴\ ,\ \delta = ۱\%$

۳ـ در اندازه گیری چند زاویه اعداد زیر بدست آمده‌اند:

$$\alpha_۱ = ۲۱^\circ ۳۷' ۳'', \alpha_۲ = ۴۵^\circ, \alpha_۳ = ۱^\circ ۱۰'', \alpha_۴ = ۷۵^\circ ۲۰' ۴۴''$$

خطای نسبی اعداد $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، $\alpha_۳$ و $\alpha_۴$ را با فرض خطای مطلق اندازه گیری $۱''$ بدست آورید.

۴ـ تعداد ارقام صحیح در عدد X که همراه خطای مطلقش آمده را بدست آورید:

الف) $x = ۰٫۳۹۴۱$، $\Delta_x = ۰٫۲۵ \times ۱۰^{-۲}$ ب) $x = ۰٫۱۱۳۲$، $\Delta_x = ۰٫۱ \times ۱۰^{-۳}$

پ) $x = ۳۸٫۲۵۴۳$، $\Delta_x = ۰٫۲۷ \times ۱۰^{-۲}$ ت) $x = ۲۹۳٫۴۸۱$، $\Delta_x = ۰٫۱$

ث) $x = ۲٫۳۲۵$، $\Delta_x = ۰٫۱ \times ۱۰^{-۱}$ ج) $x = ۱۴٫۰۰۲۳۱$، $\Delta_x = ۰٫۱ \times ۱۰^{-۳}$

چ) $x = ۰٫۰۸۴۲$، $\Delta_x = ۰٫۱۵ \times ۱۰^{-۲}$ ح) $x = ۰٫۰۰۳۸۱$، $\Delta_x = ۰٫۱ \times ۱۰^{-۴}$

خ) $x = -۳۲٫۲۸۵$، $\Delta_x = ۰٫۲ \times ۱۰^{-۲}$ د) $x = -۰٫۲۱۱۳$، $\Delta_x = ۰٫۵ \times ۱۰^{-۲}$

۵ـ تعداد ارقام صحیح عدد a که همراه خطای نسبی‌اش آمده را بدست آورید.

الف) $a = ۱٫۸۹۲۱, \delta_a = ۰٫۱ \times ۱۰^{-۲}$ ب) $a = ۰٫۲۲۱۸, \delta_a = ۰٫۲ \times ۱۰^{-۱}$

پ) $a = ۲۲٫۳۵۱, \delta_a = ۰٫۱$ ت) $a = ۰٫۰۲۴۲۵, \delta_a = ۰٫۵ \times ۱۰^{-۲}$

ث) $a = ۰٫۰۰۰۱۳۵, \delta_a = ۰٫۱۵$ ج) $a = ۹٫۳۵۹۸, \delta_a = ۰٫۱\%$

چ) $a = ۰٫۱۱۴۵۲, \delta_a = ۱۰\%$ ح) $a = ۴۸۳۶۱, \delta_a = ۱\%$

خ) $a = ۵۹۲٫۸, \delta_a = ۲\%$ د) $a = ۱۴٫۹۳۶۰, \delta_a = ۱\%$

۱ـ۲ـ جمع و تفریق اعداد تقریبی

۱ـ۲ـ۱ـ خطای مطلق جمع جبری چند عدد تقریبی برابر مجموع خطای مطلق آن‌ها است. اگر

$$S = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$$

در نتیجه:

$$\Delta_S = \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \cdots + \Delta_{a_n} \qquad (۱-۳)$$

اگر تعداد جملات زیاد باشند خطای مطلق مجموع بدست آمده توسط فرمول (۱-۳) افزایش یافته و بسیار بزرگ می‌گردد.
اگر در میان جملات، عددی وجود داشته باشد که خطای مطلقش به طور قابل ملاحظه‌ای بیشتر از خطای مطلق دیگر جملات باشد، آنگاه خطای مطلق حاصل جمع را می‌توان با این بزرگ‌ترین خطا برابر گرفت. در این مورد بهتر است که هر چه بیشتر تعداد ارقام موجود در این جمله را که دارای بزرگ‌ترین خطای مطلق است، حفظ کنیم.

حالا اجازه بدهید نشان دهیم که چطور اعداد تقریبی جمع شده و خطاحاصلجمع برآورد می‌شود.

مثال ۱ـ۵ـ حاصل جمع اعداد تقریبی ۰٫۳۴۸، ۰٫۱۸۳۴، ۳۴۵٫۴، ۲۳۵٫۲، ۱۱٫۷۵، ۹٫۲۷، ۰٫۰۸۴۹، ۰٫۰۲۱۴ و ۰٫۰۰۰۳۵۴ را بدست آورید. فرض کنید که تمام ارقام این اعداد صحیح هستند، یعنی خطای مطلق هر جمله بیشتر از نصف واحد رقم کم ارزش نیست.

حل‌ـ دو عدد ۳۴۵٫۴ و ۲۳۵٫۲ دارای خطای مطلق ماگزیمم $\Delta = ۰٫۰۵$ هستند.
بنابراین ما می‌توانیم خطای مطلق حاصل جمع را برابر $۲\Delta = ۰٫۱۰$ بگیریم. بخاطر اینکه جملات زیاد نیستند، تنها یک رقم اضافی از آن‌ها را نگاه می‌داریم. یعنی جملات را با دقت ۰٫۰۱ گرد می‌کنیم.

$$S = ۳۴۵٫۴ + ۲۳۵٫۲ + ۱۱٫۷۵ + ۹٫۲۷ + ۰٫۳۵ + ۰٫۱۸ + ۰٫۰۸ + ۰٫۰۲ + ۰٫۰۰ = ۶۰۲٫۲۵$$

در نتیجه نهایی رقم اضافی را حذف می‌کنیم:

$$S = ۶۰۲٫۲$$

حال خطای ۰٫۰۵ ناشی از گرد کردن را به خطای مطلق یاد شده ۰٫۱۰ می‌افزاییم. در نتیجه حاصل می‌شود:

$$\Delta_S = ۰٫۱۵ \quad \text{یا} \quad \Delta_S = ۰٫۲$$

توجه کنید که در این مثال اگر خطای تمامی جملات را به حساب می‌آوردیم (طبق فرمول ۱-۳) محاسبات پر زحمت‌تری لازم بود، بدون اینکه در دقت نتیجه حاصل شده موثر باشد.

۲ـ اگر جملات هم علامت باشند، خطای نسبی مجموع آن‌ها δ_S بیشتر از ماکزیمم خطای نسبی هر یک از جملات نیست.

$$\min \delta_{a_k} \leq \delta_S \leq \text{Max } \delta_{a_k} \qquad (a_k > ۰, k = ۱, ۲, ۳, \ldots, n)$$

مثال ۱ـ۶ـ خطای نسبی مجموع اعداد در مثال ۱ـ۵ را برآورد کنید و آن‌را با خطای نسبی هر یک از جملات مقایسه کنید.

حل‌ـ خطای نسبی مجموع S برابر است با:

$$\delta_S = \frac{۰٫۱۰}{۶۰۲٫۲۵} = ۰٫۰۱۷\%$$

و برای هر یک از عملوندها داریم:

$$\frac{۰٫۵}{۳۴۸} = ۰٫۱۵\%; \quad \frac{۰٫۵}{۱۸۳۴} = ۰٫۰۲۷\%; \quad \frac{۰۵}{۳۴۵۴} = ۰٫۰۱۵\%;$$
$$\frac{۰٫۵}{۲۳۵۲} = ۰٫۰۲۲\%; \quad \frac{۰٫۵}{۱۱۷۵} = ۰٫۰۴۳\%; \quad \frac{۰٫۵}{۹۲۷} = ۰٫۰۵۴\%;$$
$$\frac{۰٫۵}{۸۴۹} = ۰٫۰۵۹\%; \quad \frac{۰٫۵}{۲۱۴} = ۰٫۰۲۴\%; \quad \frac{۰٫۵}{۳۵۴} = ۰٫۰۱۵\%;$$

می‌بینیم که بیشترین مقدار موثر در حاصل جمع را جملات ۳۴۵٫۴ و ۲۳۵٫۲ با خطاهای نسبی ۰٫۰۱۵% و ۰٫۰۲۲% تشکیل می‌دهند که خطای نسبی مجموع بین این دو قرار گرفته است.

۳ـ خطای نسبی تفریق دو عدد مختلف‌العلامه بیشتر از خطای نسبی هر یک از دو عدد است، بخصوص اگر آن اعداد تقریباً برابر باشند (یعنی اختلاف آن‌ها در مقایسه با خودشان کوچک باشد). بدین سبب هنگام تفریق اعداد تقریباً برابر، دقت از دست می‌رود که می‌بایستی هنگام انتخاب روش محاسبه در نظر گرفته شود.

مثال ۱ـ۷ـ اعداد $a = ۱٫۱۳۷$ و $b = ۱٫۰۷۳$ با خطای مطلق $\Delta_a = \Delta_b = ۰٫۰۱۱$ موجودند. خطای اختلاف آن‌ها $C = a - b$ را برآورد کنید.

حل‌ـ داریم:

$$C = ۰٫۰۶۴,\ \Delta_c = \Delta_a + \Delta_b = ۰٫۰۲۲,\ \delta_c = \frac{۲۲}{۶۴} = ۳۵\%$$

می‌بینیم که نتیجه نهایی رقم صحیحی ندارد، با اینکه خود اعداد دارای خطای نسبی $\delta_a \simeq \delta_b \simeq ۱\%$ می‌باشند.

مثال ۱ـ۸ـ به کمک جداول چهار رقمی توابع مثلثاتی مقدار $۱ - \cos ۱^\circ$ را محاسبه کرده، خطای نتیجه را برآورد کنید.

حل- با برداشت مستقیم مقدار $\cos 1^\circ$ از جدول بدست می‌آوریم:

$$a = \cos 1^\circ = 0.9998\ ,\ \Delta_a = 0.00005$$

و

$$b = 1 - \cos 1^\circ = 0.0002 \text{ و } \Delta_b = 0.00005$$

که خطای نسبی $\delta_b = \frac{0.5}{2} = 25\%$ را بدست می‌دهد.

از همان جداول بدست می‌آوریم:

$$C = \sin 0^\circ 30' = 0.0087\ ,\ \Delta_c = 0.00005\ ,\ \delta_c = \frac{0.5}{87} = 0.58\%,$$
$$b = 2c^2 = 0.000151\ ,\ \delta_b = \delta_{c^2} = 2\delta_c = 1.16\%$$

و در نتیجه

$$\Delta_b = b\delta_b = 0.000151 \times 0.0116 = 0.0000018$$

بنابراین این تعویض فرمول، محاسبه b را با دو رقم صحیح امکان‌پذیر کرد و خطای نسبی آن‌را بیش از ۲۰ برابر تقلیل داد!

مسائل

۱ـ مجموع اعداد تقریبی را بدست آورده و خطای آن‌را مشخص کنید:

الف) $0.145 + 321 + 78.2$ (تمام ارقام صحیح هستند)

ب) $0.301 + 193.1 + 11.58$ (تمام ارقام صحیح هستند)

پ) $398.5 - 72.28 + 0.34567$ (تمام ارقام صحیح هستند)

ت) $X_1 + X_2 - X_3$ که در آن $X_1 = 197.6$، $\Delta_{x_1} = 0.2$، $X_2 = 23.44$، $\Delta_{x_2} = 0.22$، $X_3 = 201.55$، $\Delta_{x_3} = 0.17$.

۱ـ۳ـ ضرب و تقسیم اعداد تقریبی

۱ـ وقتی اعداد تقریبی را ضرب و تقسیم می‌کنیم، خطای نسبی آن‌ها (نه مطلق) جمع می‌شوند. خطای نسبی عبارت

$$r = \frac{a_1 a_2 \dots a_m}{b_1 b_2 \dots b_n} \qquad (1\text{-}4)$$

با مقدار

$$\delta_r = \delta_{a_1} + \delta_{a_2} + \dots \delta_{a_m} + \delta_{b_1} + \delta_{b_2} + \dots + \delta_{b_n} \qquad (1\text{-}5)$$

برآورد می‌شود.

اگر عدد $n+m$ خیلی بزرگ باشد، به‌کارگیری برآورد آماری که در آن جبران جزئی خطاهای مختلف‌العلامه در نظر گرفته می‌شوند، مناسب‌تر است. اگر تمام اعداد a_i و b_j ($i=۱,۲,\dots,m$ و $j=۱,۲,\dots,n$) دارای خطای نسبی نزدیک به هم باشند، خطای نسبی عبارت (۱-۴) برابر می‌شود با:

$$\delta_r = \sqrt{۳(n+m)^{\delta}} \quad (n+m > ۱۰) \tag{۱-۶}$$

اگر خطای نسبی یکی از اعداد a_i و b_j بصورت قابل ملاحظه‌ای بیشتر از دیگر اعداد باشد، خطای نسبی عبارت (۱-۴) با این خطای بزرگ‌تر قابل مقایسه است. در نظر گرفتن ارقام ارزشمند بیشتر در اعدادی که خطای نسبی بزرگ‌تری دارند اقدام مناسبی است.

۲ـ خطای نسبی عبارت (۱-۴) به کمک رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta_r = |r|\delta_r$$

اجازه بدهید نشان دهیم که چطور اعداد تقریبی ضرب و تقسیم می‌شوند و خطای نتیجه نهایی برآورد می‌گردد.

مثال ۱ـ۹ـ عبارت $r=\frac{۳/۲\times ۳۵۶/۷\times ۰/۰۴۸۱۱}{۷/۱۹۴۸\times ۳۴/۵۶}$ را محاسبه کنید. فرض کنید تمام اعداد با ارقام صحیح داده شده‌اند، یعنی خطای مطلق آن‌ها بیشتر از نصف واحد کم ارزشترین رقم موجود نیست.

حل. بزرگترین خطای نسبی به عدد $a=۳/۲$ متعلق است که شامل فقط دو رقم صحیح است (در مقایسه با چهار یا پنج رقم صحیح اعداد دیگر):

$$\delta_a = \frac{۰/۵}{۳۲} = ۱/۶\%$$

بنابراین می‌توانیم خطای نسبی نتیجه نهایی را برابر با $\delta_r = ۱/۶\%$ در نظر بگیریم، یعنی نتیجه بیش از دو رقم صحیح نیست. چون ارزش اعداد داده شده کوچک هستند ما می‌توانیم یک رقم اضافی در محاسبات نگه‌داریم و تمام اعداد را تا سه رقم گرد کنیم:

$$r = \frac{۳/۲\times ۳۵۷\times ۰/۰۴۸۱}{۷/۱۹\times ۳۴/۶} = ۰/۲۲۱$$

(این نتیجه را می‌توانستیم با یک رویه تعدیلی نیز بدست آوریم چون دقت بالایی لازم نیست).

خطای مطلق نتیجه با استفاده از خطای نسبی قابل محاسبه است و مقدار عددی آن برابر است با:

$$\Delta_r = r\delta_r = ۰/۲۲۱\times ۰/۰۱۶ = ۰/۰۰۳۶$$

با گرد کردن نتیجه تا ارقام صحیح و حذف رقم اضافی بدست می‌آوریم:

$$r = ۰٫۲۲$$

با خطای مطلق $\Delta_r < ۰٫۰۰۵$.

مسائل

۱ـ حاصل‌ضرب اعداد تقریبی زیر را یافته و خطای آن را بدست آورید (فرض کنید که تمامی ارقام اعداد داده شده صحیح هستند):

الف) $۳/۴۹ \times ۸٫۶$ ب) $۲۵٫۱ \times ۱٫۷۴۳$ پ) $۰٫۰۲ \times ۱۶٫۵$

ت) $۰٫۲۵۳ \times ۶۵۴ \times ۸۳٫۶$ ث) $۱٫۷۸ \times ۹٫۱ \times ۱٫۱۸۳$ ج) $۴۸۲٫۵۶ \times ۷۲۵۶ \times ۰٫۰۰۵۲$

۲ـ حاصل تقسیم (خارج قسمت) اعداد تقریبی زیر را بدست آورید:

الف) $۵٫۶۸۴/۵٫۰۳۲$ ب) $۰۱۴۴/۱٫۲$ پ) $۲۱۶/۴$

ت) $۷۲۶٫۶۷۶/۸۲۹$ ث) $۷۵۴٫۹۳۶۷/۳۶٫۵$ ج) $۷٫۳/۴۴۹۱$

۳ـ اضلاع مستطیلی برابر با $۴٫۰۲ \pm ۰٫۰۱m$ و $۴٫۹۶ \pm ۰٫۰۱m$ هستند مساحت مستطیل را حساب کنید.

۴ـ اضلاع زاویه قائمه یک مثلث قائم‌الزاویه برابر با $۱۲٫۱۰ \pm ۰٫۰۱cm$ و $۲۵٫۲۱ \pm ۰٫۰۱cm$ هستند. تانژانت زاویه مقابل ضلع اول را پیدا کنید.

۵ـ با اندازه گیری شعاع R در یک دایره، با دقت $۰٫۵cm$ نتیجه $۱۲cm$ حاصل شده است. خطای نسبی و مطلق در محاسبه مساحت دایره را پیدا کنید.

۶ـ هر ضلع اندازه گیری شده از یک مکعب، با دقت $۰٫۰۲cm$ برابر است با $۸cm$ است. خطای نسبی و مطلق در محاسبه حجم مکعب را پیدا کنید.

۷ـ ارتفاع h و شعاع R در یک استوانه با مقطع دایره با دقت $۰/۵\%$ اندازه گیری شده است. خطای نسبی حد در محاسبه حجم استوانه چیست؟

۱ـ۴ـ خطاهای محاسبه مقدار یک تابع

۱ـ توابع یک متغیره: خطای مطلق یک تابع مشتق پذیر $y = f(x)$ برای یک خطای به اندازه کافی کوچک آرگومان Δ_x برابر است با:

$$\Delta_y = |f'(x)|\Delta_x \qquad (۱\text{-}۷)$$

برای $f'(x) \neq ۰$.

اگر مقدار تابع $f(x)$ مثبت باشد، خطای نسبی به روش زیر برآورد می‌شود:

$$\delta_y = \frac{|f'(x)|}{|f(x)|}\Delta_x = |[\ln f(x)]'|\Delta_x \tag{۸-۱}$$

در موارد خاص و برای توابع مقدماتی پایه، قواعد زیر را بدست می‌آوریم.

الف) تابع توان $y = x^a$. خطای مطلق تابع برابر با

$$\Delta_y = ax^{a-1}\Delta_x \tag{۹-۱}$$

است. خطای نسبی تابع توان برابر با

$$\delta_y = |a|\delta_X \tag{۱۰-۱}$$

است. برای مثال، خطای نسبی مجذور x^2 دو برابر خطای نسبی x می‌باشد، خطای نسبی ریشه دوم $\sqrt{x}$ نصف خطای نسبی x می‌باشد، خطای نسبی $\frac{1}{x}$ برابر خطای نسبی خود x است.

ب) تابع نمایی $y = a^x (a > 0)$. خطای مطلق تابع نمایی برابر با

$$\Delta_y = a^x \ln\ a\Delta_x \tag{۱۱-۱}$$

می‌باشد. خطای نسبی تابع نمایی برابر با

$$\delta_y = \Delta x \ln\ a \tag{۱۲-۱}$$

می‌باشد. در این مورد خطای نسبی تابع متناسب با خطای نسبی آرگومان است.
بنابراین برای تابع $y = e^x$ خواهیم داشت:

$$\delta_y = \Delta_x \tag{۱۳-۱}$$

پ) تابع لگاریتم $y = \ln\ x$. خطای مطلق لگاریتم طبیعی یک عدد برابر با خطای نسبی خود عدد است:

$$\Delta_y = \frac{1}{x}\Delta_x = \delta_x \tag{۱۴-۱}$$

برای تابع لگاریتم جامع $y = \log\ x$ داریم:

$$\Delta_y = 0{,}4343\delta_x \tag{۱۵-۱}$$

که از آنجا نتیجه می‌شود که وقتی با اعداد با m رقم صحیح سر و کار داریم می‌بایستی جداول لگاریتمی $m+1$ رقمی مورد استفاده قرار گیرند.

ت) توابع مثلثاتی. خطای مطلق سینوس و کسینوس از خطای مطلق آرگومان بیشتر نیست:

$$\Delta_{\sin x} = |\cos x|\Delta_x \leq \Delta_x, \Delta_{\cos x} = |\sin x|\Delta_x \leq \Delta_x \qquad (۱۶\text{-}۱)$$

خطای مطلق تانژانت و کتانژانت همیشه از خطای مطلق آرگومان بیشتر است.

$$\Delta_{\tan_x} = (۱ + \tan^۲ x)\Delta_x \geq \Delta_x, \Delta_{\cot x} = (۱ + \cot^۲ x)\Delta_x \geq \Delta_x \qquad (۱۷\text{-}۱)$$

مثال ۱ـ۱۰ـ قطر دایره‌ای با دقت $۱mm$ اندازه‌گیری شده ومقدار $d = ۰/۸۴۲m$ بدست آمده است. مساحت دایره را محاسبه کنید.

حلـ مساحت دایره برابر $S = \frac{\pi d^۲}{۴}$ می‌باشد. چون عدد π با هر دقت لازم در دسترس است، خطای محاسبه مساحت از خطای محاسبه $d^۲$ بدست می‌آید. خطای نسبی $d^۲$ برابر است با:

$$\delta_{d^۲} = ۲\delta_d = ۲ \times \frac{۱}{۸۴۲} = ۰/۲۴\%$$

برای‌اینکه، هنگام گرد کردن عدد π، خطای نسبی

$$\delta_S = \delta(\frac{\pi}{۴}) + ۲\delta_d$$

افزایش پیدا نکند، عدد π می‌بایستی حداقل با چهار رقم صحیح در نظر گرفته شود، هر چند پنج رقم مطمئن‌تر است. بنابراین داریم:

$$S = \frac{۳/۱۴۱۶}{۴} \times ۰/۸۴۲^۲\ m^۲ = ۰/۷۸۵۴ \times ۰/۷۰۹۰\ m^۲ = ۰/۵۵۶۸\ m^۲$$

خطای مطلق نتیجه برابر است با

$$\Delta_S = S\delta_S = ۰/۵۵۷ \times ۰/۰۰۲۴ = ۰/۰۰۱۴$$

پس از گرد کردن نتیجه تا سه رقم (با حذف رقم اضافی) داریم :

$$S = ۰/۵۵۷m^۲ \quad , \quad \Delta_S = ۰/۰۰۲$$

مثال ۱ـ۱۱ـ زاویه $x = ۲۵^\circ ۲۰'$ با دقت $۱'$ اندازه‌گیری شده است. محاسبه کنید $\sin x$ و خطای مطلق آن را.

حل ـ ابتدا با استفاده از فرمول (۱-۱۶) خطای نسبی $\sin x$ را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور $۱'$ را بر حسب رادیان نشان می‌دهیم: رادیان $۱' = ۰٫۰۰۰۲۹۱$ و محاسبه می‌کنیم

$$\Delta_{\sin x} = \cos x \Delta_x = \cos ۲۵^\circ ۲۰' \times ۰٫۰۰۰۲۹۱ = ۰٫۰۰۰۲۶$$

بنابراین، برای محاسبه $\sin x$ می‌بایستی از جداول مثلثاتی چهار رقمی استفاده کنیم، که خواهیم داشت:

$$\sin x = \sin ۲۵^\circ ۲۰' = ۰٫۴۲۷۹$$

۲ـ توابع چند متغیره. خطای مطلق یک تابع مشتق پذیر $y = f(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ از خطاهای کوچک $\Delta_{x_۱}, \Delta_{x_۲}, \ldots, \Delta_{x_n}$ برای آرگومانهای $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ تشکیل شده و با رابطه زیر برآورد می‌گردد:

$$\Delta_y = \sum_{i=۱}^{n} |\frac{\partial f}{\partial x_i}| \Delta_{x_i} \qquad (۱۸\text{-}۱)$$

اگر مقدار تابع مثبت باشد، خطای نسبی با فرمول

$$\delta_y = \sum_{i-۱}^{n} \frac{۱}{f} |\frac{\partial f}{\partial x_i}| \Delta_{x_i} = \sum_{i-۱}^{n} |\frac{\partial \ln f}{\partial x_i}| \Delta_{x_i} \qquad (۱۹\text{-}۱)$$

برآورد می‌شود.

مثال ۱ـ۱۲ـ مقدار تابع $u = xy^۲z^۳$ را برای مقادیر $x = ۳۷٫۱$، $y = ۹٫۸۷$ و $z = ۶٫۰۵۲$ با خطاهای مطلق $\Delta_x = ۰٫۳$، $\Delta_y = ۰٫۱۱$ و $\Delta_z = ۰٫۰۱۶$ محاسبه کنید.

حل ـ در اینجا خطای نسبی آرگومان‌ها برابرند با:

$$\delta_x = \frac{۳}{۳۷۱} = ۰٫۸۱\% \ , \ \delta_y = \frac{۱۱}{۹۸۷} = ۱٫۱۲\% \ , \ \delta_z = \frac{۱۶}{۶۰۵۲} = ۰٫۲۶\%$$

و خطای نسبی تابع برابر است با

$$\delta_u = \delta_x + ۲\delta_y + ۳\delta_z = ۳٫۸\%$$

چون مقدار محاسبه شده تابع نمی‌بایستی بیشتر از دو یا سه رقم داشته باشد لذا:

$$u = ۸۰۱ \times ۱۰^۳$$

(در اینجا نوشتن ۸۰۱۰۰۰ صحیح نیست، زیرا معنی دیگر خواهد داشت!)
در این مورد خطای مطلق برابر است با:

$$\Delta_u = u\delta_u = ۸۰۱ \times ۱۰^۳ \times ۰٫۰۳۸ = ۳۰ \times ۱۰^۳$$

در این مورد بهتر است که نتیجه نهایی را تا دو رقم گرد کنیم:

$$u = ۸٫۰ \times ۱۰^۵ \quad , \quad \Delta_u = ۰٫۳ \times ۱۰^۵$$

مثال ۱ـ۱۳ـ مقدار $z = \ln(۱۰/۳ + \sqrt{۴/۴})$ را محاسبه کنید. توجه داشته باشید که تمام ارقام اعداد تقریبی $x = ۱۰/۳$ و $y = ۴/۴$ صحیح هستند.

حل‌ـ عدد y دارای خطای نسبی $\delta_y = \frac{۰/۰۵}{۴/۴} = ۱/۲\%$ و بنابراین $\sqrt{y}$ دارای خطای نسبی $۰/۶\%$ می‌باشد که می‌بایستی با سه رقم نشان داده شود:

$$\sqrt{y} = \sqrt{۴/۴} = ۲/۱۰$$

خطای مطلق این جذر برابر با $\Delta_{\sqrt{y}} = ۲/۱۰ \times ۰/۰۰۶ = ۰/۰۱۳$ می‌باشد.
خطای مطلق حاصل جمع $x + \sqrt{y} = ۱۰/۳ + ۲/۱۰ = ۱۲/۴$ با مقدار $۰/۰۵ + ۰/۰۱۳ = ۰/۰۶۳$ برآورد می‌شود که خطای نسبی آن برابر با $\frac{۰/۰۶۳}{۱۲/۴} = ۰/۵\%$ می‌گردد.
با استفاده از فرمول (۱-۱۴)، ما می‌دانیم که خطای مطلق لگاریتم طبیعی همین مقدار است، یعنی $\Delta_z = ۰/۰۰۵$. بنابراین $z = \ln(۱۰/۳ + ۲/۱۰) = ln۱۲/۴۰ = ۲/۵۱۷$.
در اینجا نتیجه سه رقم صحیح دارد و گرد کردن تا ارقام صحیح به صلاح نیست زیرا در این مورد لازم است که در مقدار Δ_z خطای گرد کردن نیز لحاظ شود:

$$z = ۲/۵۲ \quad , \quad \Delta_z = ۰/۰۰۸$$

مسائل

۱ـ زاویه‌های x با خطای مطلق Δ_x اندازه گیری شده‌اند. خطای مطلق و نسبی توابع $y = \sin x$، $y = \cos x$ و $y = \tan x$ را محاسبه کنید. با استفاده از جداول مثلثاتی مقادیر توابع را پیدا کرده و فقط ارقام صحیح را در نتیجه نهایی نگهدارید.

الف) $x = ۱۱^\circ ۲۰'$, $\Delta_x = ۱'$ ب) $x = ۴۸^\circ ۴۲' ۳۱''$, $\Delta_x = ۵''$

پ) $x = ۴۵^\circ$, $\Delta_x = ۱'$ ت) $x = ۵۰^\circ ۱۰'$, $\Delta_x = ۰/۰۵^\circ$

ث) $x = ۰/۴۵$, $\Delta_x = ۰/۵ \times ۱۰^{-۲}$ ج) $x = ۱/۱۱۵$, $\Delta_x = ۰/۱ \times ۱۰^{-۳}$

۲ـ مقادیر توابع زیر را برای مقادیر x داده شده محاسبه و خطای نسبی و مطلق نتایج را مشخص کنید.

الف) $y = x^۳ \sin x$ برای $x = \sqrt{۲}$ با قرار دادن $\sqrt{۲} \approx ۱/۴۱۴$

ب) $y = x \ln\ x$ برای $x = \pi$ با قرار دادن $\pi \approx ۳/۱۴۲$

پ) $y = e^x \cos x$ برای $x = \sqrt{۳}$ با قرار دادن $\sqrt{۳} \approx ۱/۷۳۲$

۳ـ مقادیرتوابع زیر را برای مقادیر متغیرهای داده شده محاسبه کنید. خطای مطلق و نسبی نتایج را با در نظر گرفتن این نکته که تمامی ارقام داده‌های اولیه صحیح هستند، مشخص کنید:

الف) $u = \ln(x_۱ + x_۲^۲)$، $x_۱ = ۰/۹۷$، $x_۲ = ۱/۱۳۲$

ب) $u = \frac{x_۱ + x_۲^۲}{x_۳}$، $x_۱ = ۳/۲۸$، $x_۲ = ۰/۹۳۲$، $x_۳ = ۱/۱۳۲$

پ) $u = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$، $x_1 = ۲/۱۰۴$، $x_2 = ۱/۹۳۵$، $x_3 = ۰/۸۴۵$

۴ـ خطای نسبی محاسبه مساحت کل یک مخروط ناقص را بدست آورید، در صورتیکه شعاع مقطع‌های R و r و مولد ℓ با دقت $۰/۰۱cm$ اندازه گیری شده به ترتیب برابر با $R = ۲۳/۶۴cm$، $r = ۱۷/۳۱cm$ و $\ell = ۱۰/۲۱cm$ باشند.

۱ـ۵ـ بدست آوردن خطای مجاز آرگومان‌ها با توجه به خطای مجاز یک تابع

این مسئله برای تابع یک متغیره $y = f(x)$ تنها یک حل یکتا دارد، اگر تابع مشتق پذیر بوده و $f'(x) \neq ۰$ باشد. در این صورت:

$$\Delta_x = \frac{۱}{|f'(x)|}\Delta_y$$

برای تابع چند متغیره $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ مسئله موقعی قابل حل است که چند محدودیت دیگر لحاظ شود. برای مثال اگر مقدار یکی از آرگومان‌ها خیلی مشکل‌تر از دیگر آرگومان‌ها اندازه گیری شود و یا خیلی دقیقتر محاسبه گردد، آنگاه خطای این آرگومان اصلی (مبنا) را می‌توان خطای تابع دانست.
اگر مقدار تمامی آرگومان‌ها به‌طور مشابه و با هر دقتی قابل دستیابی باشد، آنگاه اصل تأثیر یکسان (principle of equal effects) معمولاً بکار گرفته می‌شود. با در نظر گرفتن اینکه در فرمول (۱-۱۸) تمام جملات $|\frac{\partial f}{\partial_{x_i}}|\Delta_{x_i}$ برابرند، فرمول

$$\Delta_{x_i} = \frac{\Delta_y}{n|\frac{\partial f}{\partial_{x_i}}|}(i = ۱, ۲, \ldots, n) \qquad (۲۰\text{-}۱)$$

حاصل می‌شود.
در عمل ما اغلب با مسائلی معمولی سر و کار داریم. موردی که در بالا تشریح شد از مسائل مشکل می‌باشد. اجازه بدهید که برای تشریح بهتر به چند مثال بپردازیم.

مثال ۱ـ۱۴ـ زاویه x (در ربع اول) با چه دقتی می‌بایستی اندازه گیری شود تا مقدار $\sin x$ با پنج رقم صحیح بدست آید؟

حل‌ـ اگر بدانیم زاویه $x > ۶°$ است و در نتیجه $\sin x > ۰/۱$، آنگاه لازم است که Δ_x را طوری بدست آوریم که نامساوی $\Delta_{\sin x} < ۰/۵ \times ۱۰^{-۵}$ را برقرار سازد. بدین منظور با توجه به فرمول (۱-۱۶) کافی است که داشته باشیم $\Delta_x < ۰/۵ \times ۱۰^{-۵}$ ، یعنی اندازه گیری زاویه x با دقت $۱''$ انجام گیرد. علاوه بر این اگر بدانیم $x > ۶۰°$ و در نتیجه $\cos x < ۰/۵$، آنگاه استفاده از فرمول (۱-۲۰) مناسب خواهد بود،

که از آنجا داریم

$$\Delta_x = \frac{۱}{\cos x}\Delta_{\sin x} > ۲ \times ۰/۵ \times ۱۰^{-۵} = ۱۰^{-۵}$$

یعنی کافیست که x با دقت $۲''$ اندازه گیری شود.
امّا اگر $x < ۶^\circ$، مثلاً $۱^\circ < x < ۶^\circ$ آنگاه $۰/۰۱ < \sin x < ۰/۱$ و با داشتن ۵ رقم صحیح در مقدار $\sin x$، نامساوی $\Delta_{\sin x} < ۰/۵ \times ۱۰^{-۵}$ برقرار می‌شود و بدین منظور می‌بایستی زاویه x با دقت $۰/۱''$ اندازه گیری شود.

مثال ۱ـ۱۵ـ با چه دقتی می‌بایستی شعاع R و ارتفاع H یک ظرف استوانه‌ای در دست باشد تا حجم آن با دقت ۱% بدست آید؟

حل ـ در فرمول $V = \pi R^۲ H$ عدد π با هر تعداد رقم صحیح در دسترس است، پس خطای ناشی از آن تأثیری در نتیجه نخواهد داشت. بنابراین می‌توانیم در نظر بگیریم که $\delta_V = ۲\delta_R + \delta_H$. اگر ما بتوانیم با هر دقتی R و H را بدست آوریم آنگاه اصل تأثیر یکسان می‌تواند مورد استفاده قرار بگیرد، که از آنجا سهم هر یک از جملات $۲\delta_R$ و δ_H یکسان و برابر $۰/۵\%$ می‌باشد. بنابراین بر طبق این اصل می‌بایستی شعاع با خطای نسبی $۰/۲۵\%$ و ارتفاع با خطای نسبی $۰/۵\%$ در دست باشد. درکاربردهای روزمره ما خلاف این را مشاهده می‌کنیم (هنگامی که شعاع یک ظرف استوانه با دقت کمتری نسبت به ارتفاع آن بدست آید). برای مثال اگر شعاع با دقتی برابر نصف دقت ارتفاع بدست آید، خواهیم داشت $\delta_R = ۲\delta_H$ و از شرط:

$$۲\delta_R + \delta_H = ۵\delta_H = ۱\%$$

بدست می‌آوریم:

$$.\delta = ۰/۲\%, \delta_R = ۰/۴\%$$

تا اینجا عدد π بکار گرفته شده، در تمامی موارد با خطای نسبی از درجه $۰/۰۱\%$ در دست بوده است که تأثیر این خطا در نتیجه نهایی قابل چشم پوشی است. بدین ترتیب ما می‌توانیم $\pi = ۳/۱۴۲$ بگیریم که خطای نسبی $\frac{۰/۴}{۳۱۴۲} = ۰/۰۱۳\%$ را خواهد داشت امّا نمی‌توانیم از مقدار $\pi = ۳/۱۴$ با خطای نسبی $\frac{۰/۱۶}{۳۱۴} = ۰/۰۵۱\%$ استفاده کنیم.

مثال ۱ـ۱۶ـ خطای مطلق مجاز مقادیر تقریبی $x = ۱۵/۲$ و $y = ۵۷^\circ$ را طوری پیدا کنید که امکان یافتن مقدار تابع $u = ۶x^۲(\log x - \sin ۲y)$ با دقت دو رقم اعشار ممکن باشد.

حل- بدست می‌آوریم:

$$u = ۶x^۲(\log x - \sin ۲y) = ۶(۱۵/۲)^۲(log۱۵/۲ - \sin ۱۱۴^\circ) = ۳۷۱/۹$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = ۱۲x(logx - \sin ۲y) + ۶xlog = ۸۸/۵۴$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -۱۲x^۲cos۲y = ۱۱۲۷/۷$$

با فرض $\Delta_u = ۰/۰۰۵$ و با توجه به اصل تأثیر یکسان، با استفاده از فرمول (۱-۲۱) بدست می‌آوریم:

$$\Delta_x = \frac{\Delta_u}{۲|\frac{\partial u}{\partial x}|} = \frac{۰/۰۰۵}{۲\times ۸۸/۵۴} = ۰/۲۸ \times ۱۰^{-۴},$$
$$\Delta_y = \frac{\Delta_u}{۲|\frac{\partial u}{\partial y}|} = .\frac{۰/۰۰۵}{۲\times ۱۱۲۷/۷} = ۰/۲۲ \times ۱۰^{-۵} = ۰/۴۵''$$

مسائل

۱ـ با چه دقتی عدد تقریبی x می‌بایستی در دسترس باشد تا مقدار $\sin x$ با تعداد ارقام صحیح مشخص شده توسط عدد m بدست آید؟

الف) $x = ۱^\circ \ ,\ m = ۳$ ب) $x = ۲۵^\circ \ ,\ m = ۴$

پ) $x = ۳۰/۷۵^\circ \ ,\ m = ۳$ ت) $x = ۱/۰۵ \ ,\ m = ۲$ ث) $x = ۰/۰۷۵ \ ,\ m = ۲$

۲ـ با توجه به مقادیر $\sin x$ اخذ شده از جدول توابع مثلثاتی پنج رقمی، زاویه‌های x با چه دقتی بدست آمده‌اند؟

الف) $x = ۲^\circ ۱'$ ب) $x = ۱۵^\circ ۳۰'$ پ) $x = ۴۴^\circ$

ت) $x = ۵۰^\circ ۱۸'$ ث) $x = ۶۵^\circ ۲۳'$ ج) $x = ۸۷^\circ$

۳ـ با چه دقتی می‌توان عدد x را با استفاده از لگاریتم آن (با استفاده از جدول لگاریتم پنج رقمی) بدست آوریم اگر x در دامنه مشخص شده باشد.

الف) $۳۰۰ < x < ۴۰۰$ ب) $۳۵ < x < ۴۰$

پ) $۱/۵ < x < ۱/۷$ ت) $۳/۲۵ < x < ۳/۲۹$ ث) $۵۰۰۰ < x < ۶۰۰۰$

۴ـ با چه تعداد رقم صحیح می‌بایستی آرگومان x بدست آید تا دقت مقادیر توابع داده شده برابر $۰/۱ \times ۱۰^{-۵}$ باشد.

الف) $x = \sqrt{۲}, y = x^۳ \sin x$

ب) $x = \pi, y = x \ln x$ پ) $x = \sqrt{۳}, y = e^x \cos x$

۵ـ با چه تعداد رقم صحیح می‌بایستی جملات ثابت معادله $x^۲ - ۲x + \log_۲ = ۰$ مشخص باشند تا ریشه‌ها با دقت چهار رقم صحیح بدست آیند؟

۶ـ خطای مطلق مجاز آرگومان‌ها را طوری پیدا کنید که محاسبه مقادیر توابع داده شده با چهار رقم صحیح ممکن باشد.

الف) $u = \ln(x_۱ + x_۲^۲), x_۱ = ۰/۹۷۳۱, x_۲ = ۱/۱۳۲۱۴$

ب) $u = \frac{x_۱+x_۲^۲}{x_۳}, x_۱ = ۳/۲۸۳۵, x_۲ = ۰/۹۳۲۲۱, x_۳ = ۱/۱۳۲۱۴$

پ) $u = x_۱x_۲ + x_۱x_۳ + x_۲x_۳$, $x_۱ = ۲/۱۰۴۱۵$, $x_۲ = ۱/۹۳۵۲۱$, $x_۳ = ۰/۸۴۵۴۲$

۷ـ رابطه یانگ در پیچش یک میله (باسطح مقطع مربع مستطیل) با فرمول

$$E = \frac{۱}{۴}\frac{l^۳P}{d^۳b^S}$$

بیان می‌شود، که در آن ℓ طول میله، b و d به‌ترتیب عرض و طول مقطع میله، S قوس و P مقدار بار است. با چه دقتی می‌بایست طول ℓ و قوس S اندازه‌گیری شود تا خطای E از $۵/۵\%$ بیشتر نشود. فرض کنید P با دقت $۰/۱\%$، b و d با دقت ۱%، $\ell \approx ۵۰\,cm$ و $S \approx ۲/۵cm$ در دست هستند.

۲ـ محاسبه مقادیر توابع

هنگام استفاده از ماشین‌های محاسب جهت محاسبه توابعی که با فرمول مشخص شده‌اند، شکل فرمول مورد استفاده کم اهمیت نیست. عباراتی که از نظر ریاضی هم‌ارزند، با در نظر گرفتن محاسبات تقریبی معادل نخواهند بود. می‌دانیم که عملیات اساسی بیشتر کامپیوترها جمع، تفریق، ضرب و تقسیم است، در نتیجه نیاز به پرداختن به حل مسائل ریاضی طی مراحلی که از این عملیات تشکیل شده‌اند افزایش می‌یابد. با توجه به محدودیت حجم حافظه هر ماشین، لازم است که عملیات را به مرحله‌های تکراری شکسته و یک الگوریتم مناسب انتخاب کنیم. در این فصل برخی از تکنیک‌های کاربردی و مرسوم در کاهش حجم محاسبه بعضی از توابع را به مرحله‌هایی تکراری متشکل از عملیات اصلی خواهیم دید.

۲ـ۱ـ محاسبه مقدار یک چند جمله‌ای ـ روش هُرنر [1]

فرض کنید یک چند جمله‌ای از درجه n به شکل زیر داریم:

$$P(x) = a_۰ x^n + a_۱ x^{n-۱} + \cdots + a_n$$

که ضرایب $a_k (k = ۰, ۱, \ldots, n)$ حقیقی هستند و می‌خواهیم که مقدار این چند جمله‌ای را برای $x = \xi$ بدست آوریم:

$$P(\xi) = a_۰ \xi^n + a_۱ \xi^{n-۱} + \cdots + a_n \qquad (۱\text{-}۲)$$

1) Horner

محاسبه $P(\xi)$ به طریقه زیر بسیار متداول است.
فرمول (۲-۱) را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$P(\xi) = (\dots(((a_0\xi + a_1)\xi + a_2)\xi + a_3)\xi + \dots + a_n).$$

با معرفی اعداد

$$\left.\begin{array}{ll} & b_0 = a_0, \\ c_1 = b_0\xi, & b_1 = a_1 + c_1, \\ c_2 = b_1\xi, & b_2 = a_2 + c_2, \\ \dots\dots & \dots\dots \\ c_n = b_{n-1}\xi, & b_n = a_n + c_n, \end{array}\right\} \tag{۲-۲}$$

خواهیم داشت $b_n = P(\xi)$.
بدین ترتیب محاسبه مقدار چند جمله‌ای $P(x)$ برای $x = \xi$ به تکرارهایی از عملیات اصلی به صورت زیر منجر می‌شود:

$$c_k = b_{k-1}\xi \ , \ b_k = a_k + c_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

به‌راحتی مشاهده می‌گردد که اعداد $b_0 = a_0$، $b_1, \dots, b_{n-1}$ ضرایب چند جمله‌ای $Q(x)$ هستند که خارج قسمت تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر دو جمله‌ای $x - \xi$ می‌باشد و $b_n = P(\xi)$ باقیمانده این تقسیم است. بنابراین فرمول‌های (۲-۲) ما را قادر می‌سازند که بدون انجام عمل تقسیم ضرایب، خارج قسمت $Q(x)$ و همچنین باقیمانده $P(\xi)$ را پیدا کنیم. اعداد $b_0, b_1, \dots, b_n$ معمولاً به کمک روش هرنر بدست می‌آیند.

$$\begin{array}{c|llll} + & a_0 & a_1 \ a_2 & \dots a_n \\ & & b_0\xi \ b_1\xi & \dots b_{n-1}\xi \\ \hline & b_0 = a_0 & b_1 \ b_2 & \dots b_n = P(\xi) \end{array}$$

برای محاسبه مقدار چند جمله‌ای $P_n(x)$ با روش هرنر، لازم است که n عمل ضرب و $n-k$ عمل جمع انجام گیرد، که در آن k تعداد ضرایب a_i برابر با صفر می‌باشد. اگر $a_0 = 1$ باشد آنگاه $n - 1$ عمل ضرب لازم است. ثابت شده است که برای محاسبه چند جمله‌ای‌هایی به شکل عمومی، ارائه روشی که تعداد عملیات لازم در آن کمتر از روش هرنر باشد، غیر ممکن است.

مثال ۲ـ۱ـ برای $x = -1/5$ مقدار چند جمله‌ای

$$P(x) = x^7 - 2x^6 + x^5 - 3x^4 + 4x^3 - x^2 + 6x - 1$$

را محاسبه کنید.

حل- با استفاده از روش هرنر، خواهیم داشت:

$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
۱ & -۲ & ۱ & -۳ & ۴ & -۱ & ۶ & -۱ & \underline{|-۱/۵} \\
+ & -۱/۵ & ۵/۲۵ & -۹/۳۷۵ & ۱۸/۵۶۲۵ & -۳۳/۸۴۳۸ & ۵۲/۲۶۵۷ & -۸۷/۳۹۸۵ & \\
\hline
۱ & -۳/۵ & ۶/۲۵ & -۱۲/۳۷۵ & ۲۲/۵۶۲۵ & -۳۴/۸۴۳۸ & ۵۸/۲۶۵۷ & -۸۸/۳۹۸۵ & \\
 & & & & & & & = P(-۱/۵). &
\end{array}$$

بنابراین

$$P(-۱/۵) = -۸۸/۳۹۸۵$$

مسائل

۱- چند جمله‌ای $P(x) = a_۰x^۴ + a_۱x^۳ + a_۲x^۲ + a_۳x + a_۴$ مفروض است. مقدار $P(۳/۲۵)$ را برای ضرایب $a_۰, a_۱, \ldots, a_۴$ در جدول (۲-۱)، بدست آورید.

جدول ۲-۱) ضرایب a_i $(i = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴)$

	$a_۰$	$a_۱$	$a_۲$	$a_۳$	$a_۴$
(a)	۷/۵۴	۱۱/۰۸	۳/۸۲	۰/۴۴	−۰/۴۸
(b)	۹/۳۶	۱۲/۶۹	۱۴/۳۹	۰/۷۹	−۰/۹۴
(c)	۱۲/۷۸	۱۴/۳۵	۱۷/۱۹	۱/۳۴	−۱/۷۲
(d)	۱۵/۶۵	۱۷/۵۸	۲۱/۷	۲/۷۸	۱/۳۴
(e)	۲/۷۹	۹/۸۵	۱۴/۱۵	۵/۳۸	۷/۲۴
(f)	۳/۴۵	−۲/۹۱	۳/۷۹	−۶/۷۵	−۲/۳۸
(g)	۴/۷۹	۵/۳۸	−۲/۸۶	۷/۳۱	۴/۵۵
(h)	۸/۳۴	−۷/۷۵	۴/۵۳	−۹/۲۹	۵/۷۹

۲- چند جمله‌ای $P(x) = ۰/۲۲x^۵ - ۳/۲۷x^۴ - ۲/۷۴x^۳ + ۲/۸۱x^۲ - ۳/۳۶x + ۲$ مفروض است. مقدار $P(\xi)$ را برای $\xi = ۰/۸ + ۰/۰۵k$ $(k = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴)$ پیدا کنید.

۲-۲- محاسبه برخی از توابع مثلثاتی به کمک سری توان

این بخش به محاسبه توابع مثلثاتی از طریق مجموع سری مکلورن[1] آنها اختصاص دارد:

$$f(x) = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{F^{(k)}(۰)}{k!}x^k \qquad (۳\text{-}۲)$$

1) Maclaurin

با در نظر گرفتن مجموع چند جمله اول سری مکلورن به فرمول تقریبی زیر می‌رسیم:

$$f(x) \approx P_n(x)$$

که در آن $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.
در اینجا باقیمانده سری $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ نشاندهنده خطای تقریب مقدار $f(x)$ توسط مقدار $P_n(x)$ می‌باشد. برآورد باقیمانده ما را قادر خواهد ساخت که تعداد جملات لازم یعنی درجه چند جمله‌ای $P_n(x)$ را مشخص کنیم.

توجهـ چون محاسبه دقیق خطا، کاری پر زحمت و طاقت فرساست، در عمل برای حصول دقت مورد نظر تمامی محاسبات بینابینی با یک یا دو رقم اضافی انجام می‌گیرد.

۱ـ محاسبه مقادیر توابع نمایی. برای یک تابع نمایی بسط زیر را داریم:

$$e^x = \sum_{k0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (-\infty < x < \infty) \tag{۴-۲}$$

انجام محاسبات با رهنوشت تکراری زیر متداول است:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \ , \ u_k = \frac{x}{k} u_{k-1} \ , \ S_k = S_{k-1} + u_k (k = 1, 2, \ldots, n).$$

که در آن $u_0 = 1$ و $S_0 = 1$ هستند. عدد $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ نتیجه تقریب مورد نظر برای e^x می‌باشد.
برای باقیمانده سری می‌توان از برآورد زیر استفاده کرد ([۱۲] را ببینید):

$$|R_n(x)| < |u_n| \quad for \quad 0 < 2|x| \leq n$$

بنابراین به محض اینکه اندازه آخرین جمله u_k محاسبه شده از سری، کوچکتر از خطای مجاز از پیش مشخص شده ε باشد، ما می‌توانیم به فرآیند جمع کردن خاتمه دهیم.

$$|u_n| < \varepsilon \ (|x| \leq \frac{n}{2} \text{تنها اگر})$$

اگر اندازه x بزرگ‌تر باشد، محاسبه دنباله (۲-۲) مشکل خواهد بود. در چنین مواردی رویه معمول به این صورت است: x را به صورت یک جمع نشان می‌دهیم:

$$x = E(x) + q$$

که در آن $E(x)$ بخش صحیح x و q بخش کسری است ($0 \leq q < 1$).
بنابراین:

$$e^x = e^{E(x)} . e^q$$

عامل اول $e^{E(x)}$ به کمک ضرب به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$e^{E(x)} = \underbrace{e \dots e}_{E(x)\ \text{مرتبه}}, \quad E(x) > 0 \ \text{اگر}$$
$$e^{E(x)} = \underbrace{\frac{1}{e} \dots \frac{1}{e}}_{E(x)\ \text{بار}}, \quad E(x) < 0 \ \text{اگر}$$

عامل دوم به کمک بسط توان محاسبه می‌شود:

$$e^q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!}$$

این دنباله برای $0 \leq q < 1$ به سرعت همگرا می‌شود، چون

$$0 \leq R_n(q) < \frac{1}{n!n} q^{n+1}$$

مثال ۲ـ۲ـ مقدار $\sqrt{e}$ را با دقت 10^{-5} بدست آورید.

حل‌ـ با استفاده از فرمول

$$e^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{n} u_k + R_n\left(\frac{1}{2}\right) \tag{۲-۵}$$

که در آن $u_0 = 1$، $u_k = \frac{u_{k-1}}{2k}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$، عملوندهای جمع را با دو رقم اضافی محاسبه می‌کنیم، که متوالیاً خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
u_0 &= 1, \\
u_1 &= \tfrac{u_0}{2} = 0{,}50000000, \\
u_2 &= \tfrac{u_1}{4} = 0{,}12500000, \\
u_3 &= \tfrac{u_2}{6} = 0{,}02083333, \\
u_4 &= \tfrac{u_3}{8} = 0{,}00260042, \\
u_5 &= \tfrac{u_4}{10} = 0{,}00026004, \\
u_6 &= \tfrac{u_5}{12} = 0{,}00002217, \\
u_7 &= \tfrac{u_6}{14} = 0{,}00000016, \\
S_7 &= 1{,}64\bar{8}7212.
\end{aligned}$$

با گرد کردن مجموع تا پنج رقم اعشار خواهیم داشت:

$$\sqrt{e} = 1{,}64872.$$

برای محاسبه مقدار تابع نمایی $a^x (a > ۰)$ از فرمول $a^x = e^{x \ln a}$ استفاده می‌شود.

۲ـ محاسبه مقادیر سینوس و کسینوس. برای محاسبه $\sin x$ و $\cos x$ بسط دنباله توان زیر بکار گرفته می‌شود:

$$\sin x = \sum_{k=۰}^{\infty} (-۱)^k \frac{x^{۲k+۱}}{(۲k+۱)!} (-\infty < x < \infty), \tag{۶-۲}$$

$$\cos x = \sum_{k=۰}^{\infty} (-۱)^k \frac{x^{۲k}}{(۲k)!} (-\infty < x < \infty). \tag{۷-۲}$$

برای مقادیر بزرگ x دنباله های (۲-۶) و (۲-۷) به کندی متقارب می‌شوند. امّا با در نظر گرفتن خاصیت تناوبی $\sin x$ و $\cos x$ و فرمول‌های کاهش محاسبات برای توابع مثلثاتی، به سادگی می‌فهمیم که کافیست که بدانیم چطور $\sin x$ و $\cos x$ را در بازه $۰ \leq x \leq \frac{\pi}{۴}$ محاسبه کنیم.
در اینجا ما می‌توانیم از فرمول‌های تکرار زیر استفاده کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} \sin x = \sum_{k=۱}^{n} u_k + R_n(x), \\ u_۱ = x, \quad u_{k+۱} = -\frac{x^۲}{۲k(۲k+۱)} u_k \ (k = ۱, ۲, \ldots, n-۱); \end{array}\right\} \tag{۸-۲}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos x = \sum_{k=۱}^{n} v_k + R_n(x), \\ v_۱ = l, \quad v_{k+۱} = -\frac{x^۲}{(۲k-۱)۲k} v_k \ (k = ۱, ۲, \ldots, n-۱). \end{array}\right\} \tag{۹-۲}$$

چون در بازه $(۰, \frac{\pi}{۴})$ دنباله (۲-۶) یک دنباله متناوب با مقادیر جملات نزولی یکنواخت می‌باشد برای عبارت R_n تقریب $|R_n| \leq \frac{|x|^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} = |u_{n+۱}|$ معتبر است.
بطور مشابه برای دنباله (۲-۷)داریم $|R_n| \leq |V_{n+۱}|$. بنابراین فرآیند محاسبه $\sin x$ و $\cos x$ به محض برقراری نامساوی $|u_n| < \varepsilon$ که در آن ε خطای مجاز مشخص شده می‌باشد، خاتمه می‌یابد.

مثال ۲ـ۳ـ مقدار $\sin ۲۳^\circ ۵۴'$ را با دقت $۱۰^{-۴}$ محاسبه کنید.

حل‌ـ آرگومان را بر حسب رادیان و با یک رقم اضافی نشان می‌دهیم:

$$x = arc \ \ ۲۳^\circ ۵۴' = ۰/۴۱۷۱۴$$

با استفاده از فرمول (۲-۸) بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} u_۱ &= x = +۰/۴۱۷۱۴, \\ u_۲ &= -\frac{x^۲ u_۱}{۲/۳} = -۰/۰۱۲۱۰, \\ u_۳ &= -\frac{x^۲ u_۲}{۴/۵} = +۰/۰۰۰۱۱, \\ u_۴ &= -\frac{x^۲ u_۳}{۶/۷} = -۰/۰۰۰۰۰. \end{aligned}$$

سرانجام پس از گرد کردن نتیجه نهایی تا چهار رقم اعشار خواهیم داشت:

$$\sin ۲۳^\circ ۵۴' = ۰٫۴۰۵۲$$

مثال ۲ـ۴ـ مقدار $\cos ۱۷^\circ ۲۴'$ را با دقت $۱۰^{-۵}$ محاسبه کنید.

حل ـ $x = arc ۱۷^\circ ۲۴' = ۰٫۳۰۶۹$. با استفاده از فرمول (۲-۹) داریم:

$$\begin{aligned} v_۱ &= ۱٫۰۰۰۰۰۰ \\ v_۲ &= -\frac{x^۲}{۱٫۲}v_۱ = -۰٫۰۴۶۱۱۴, \\ v_۳ &= -\frac{x^۲}{۳٫۴}v_۲ = +۰٫۰۰۰۳۵۴, \\ v_۴ &= -\frac{x^۲}{۵٫۶}v_۳ = -۰٫۰۰۰۰۰۱. \end{aligned}$$

از اینرو $\cos ۱۷^\circ ۲۴' = ۰٫۹۵۴۲۴$.

۳ـ محاسبه مقادیر سینوس هذلولی و کسینوس هذلولی. از بسط‌های سری توان:

$$\sinh x = \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{x^{۲k-۱}}{(۲k-۱)!} \quad (-\infty < x < \infty), \tag{۱۰-۲}$$

$$\cosh x = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{x^{۲k}}{(۲k)!} \quad (-\infty < x < \infty) \tag{۱۱-۲}$$

و رهنوشت تکراری زیر استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned} \sinh x &= \textstyle\sum_{k=۱}^{n} u_k + R_n, \\ u_۱ &= x, \quad u_{k+۱} = -\frac{x^۲}{۲k(۲k+۱)}u_k; \end{aligned}\right\} \tag{۱۲-۲}$$

$$\left.\begin{aligned} \cosh x &= \textstyle\sum_{k=۰}^{n} v_k + R_n^*, \\ v_۰ &= ۱, \quad v_{k+۱} = -\frac{x^۲}{(۲k+۱)(۲k+۲)}v_k. \end{aligned}\right\} \tag{۱۳-۲}$$

برای $n \le |x| < ۰$ تقریب‌های $R_n < \frac{۱}{۳}|u_n|$ و $R_n^* < \frac{۲}{۳}v_n$ را داریم ([۱۲] را ببینید).

مثال ۲ـ۵ـ مقدار $\sinh ۱٫۴$ را با دقت $۱۰^{-۶}$ محاسبه کنید.

حل ـ با استفاده از فرمول (۲-۱۲) بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1/4000000, \\ u_2 &= \frac{x^2}{2\times 3}u_1 = 0/4573333 \\ u_3 &= \frac{x^2}{4\times 5}u_2 = 0/0448187 \\ u_4 &= \frac{x^2}{6\times 7}u_3 = 0/0020915 \\ u_5 &= \frac{x^2}{8\times 9}u_4 = 0/0000569 \\ u_6 &= \frac{x^2}{10\times 11}u_5 = 0/0000010 \end{aligned}$$

از اینرو $\sinh 1/4 = 1/904301$.

۴ـ محاسبه مقادیر یک تابع لگاریتمی. از بسط دنباله توان بر حسب $\frac{1-z}{1+z}$ استفاده می‌کنیم:

$$\ln z = -2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{2k-1} \quad (0 < z < \infty)$$

فرض کنیم x عدد مثبتی است. آن‌را به صورت $z = 2^m z$ نشان می‌دهیم که در آن m یک عدد صحیح است و $\frac{1}{2} \leq z < 1$. با در نظر گرفتن $\xi = \frac{1-z}{1+z}$ داریم:

$$\ln x = \ln 2^m z = m\ln 2 + \ln z = m\ln 2 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\xi^{2k-1}$$

که در آن $a < \xi \leq \frac{1}{3}$. با قرار دادن:

$$u_k = \frac{\xi^{2k-1}}{2k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

به رهنوشت تکراری زیر می‌رسیم:

$$\left.\begin{aligned} &\ln x = m\ln 2 - 2\textstyle\sum_{k=1}^{n}u_k + R_n \\ &u_1 = \xi, u_{k+1} = \frac{(2k-1)\xi^2}{2k+1}u_k \end{aligned}\right\} \qquad (۲\text{-}۱۴)$$

فرآیند جمع به محض اینکه نامساوی $u_n < 4^{\varepsilon}$ برقرار شد خاتمه می‌یابد که در آن ε خطای مجاز است ([۱۲] را ببینید).

مثال ۲ـ۶ـ مقدار $\ln 5$ را با دقت 10^{-6} پیدا کنید.

حل. محاسبات را با دو رقم اضافی انجام می‌دهیم. با دانستن $۵ = ۰{,}۶۲۵ \times ۲^۳$ داریم $z = ۰{,}۶۲۵$ و $\xi = \frac{1-z}{1+z} = \frac{۰{,}۳۷۵}{۱{,}۶۲۵} = ۰{,}۲۳۰۷۶۹۲۳$. یک ستون از چهار عملوند اول تشکیل می‌دهیم:

$$
\begin{aligned}
u_۱ &= \xi = ۰{,}۲۳۰۷۶۹۲۳\\
u_۲ &= \frac{\xi^۳}{۳} = ۰{,}۰۰۴۰۹۶۵۰\\
u_۳ &= \frac{\xi^۵}{۵} = ۰{,}۰۰۰۱۳۰۸۹\\
u_۴ &= \frac{\xi^۷}{۷} = ۰{,}۰۰۰۰۰۴۹۸\\
\hline
\text{مجموع} &= ۰{,}۲۳۵۰۰۱۶۰
\end{aligned}
$$

با استفاده از فرمول (۲-۱۴) خواهیم داشت:

$$\ln ۵ = ۳ \times ۰{,}۶۹۳۱۴۷۱۸ - ۲ \times ۰{,}۲۳۵۰۰۱۶۰ = ۱{,}۶۰۹۴۳۸$$

مسائل

۱ـ با استفاده از بسط دنباله توان، جداولی از مقادیر توابع زیر با دقت ε مشخص شده را تشکیل دهید.

الف) $e^x, \quad x = ۰{,}۳۰۰ + ۰{,}۰۰۲k \quad (k = ۰, ۱, \dots, ۱۴), \varepsilon = ۱۰^{-۵},$

ب) $e, \quad x = ۲{,}۵۰۰ + ۰{,}۰۰۲k \quad (k = ۰, ۱, \dots, ۱۴), \varepsilon = ۱۰^{-۴},$

پ) $e^{-x}, \quad x = ۱{,}۳۵ + ۰{,}۰۱k \quad (k = ۰, ۱, \dots, ۱۴) \varepsilon = ۱۰^{-۵},$

ت) $e^{-x}, \quad x = ۰{,}۵۰۵ + ۰{,}۰۰۵k \quad (k = ۰, ۱, \dots, ۱۵), \varepsilon = ۱۰^{-۵},$

ث) $e^{x^۲}, \quad x = ۰{,}۵۰ + ۰{,}۰۲k \quad (k = ۰, ۱, \dots, ۱۵), \varepsilon = ۱۰^{-۵},$

ج) $e^{-x^۲}, \quad x = ۱{,}۳۰ + ۰{,}۰۱k \quad (k = ۰, ۱, \dots, ۱۵), \varepsilon = ۱۰^{-۵},$

چ) $\frac{۱}{۲\sqrt{\pi}} e^{-x^۲/۲}, \; x = ۱{,}۷۸ + ۰{,}۰۳k \; (k = ۰, ۱, \dots, ۱۵), \varepsilon = ۱۰^{-۵},$
$x = ۲{,}۵۴۵ + ۰{,}۰۰۵k \; (k = ۰, ۱, \dots, ۱۵).$

۲ـ با استفاده از بسط دنباله‌های $\sin x$ و $\cos x$ بصورت توانی جداول مقادیر توابع زیر را با دقت $۱۰^{-۵}$ تشکیل دهید.

الف) $\sin x, \quad x = ۰{,}۳۴۵ + ۰{,}۰۰۵k \quad (k = ۰, ۱, \dots, ۱۵),$

ب) $\sin x, \quad x = ۱{,}۷۵ + ۰{,}۰۱k \quad (k = ۰, ۱, \dots, ۱۵),$

پ) $\cos x, \quad x = ۰{,}۷۴۵ + ۰{,}۰۰۵k \quad (k = ۰, ۱, \dots, ۱۵),$

ت) $\cos x, \quad x = ۱{,}۷۵ + ۰{,}۰۱k \quad (k = ۰, ۱, \dots, ۱۵),$

ث) $\frac{\sin x}{x}, \quad x = ۰{,}۴ + ۰{,}۰۱k \quad (k = ۰, ۱, \dots, ۱۵),$

ج) $\frac{\cos x}{x}, \quad x = ۰{,}۲۵ + ۰{,}۰۱k \quad (k = ۰, ۱, \dots, ۱۵),$

۳ـ با استفاده از بسط دنباله‌های $\sinh x$ و $\cosh x$ بصورت توانی جداول مقادیر توابع زیر را با دقت ε تشکیل دهید.

الف) $\sinh x, \quad x = ۰/۲۳ + ۰/۰۱k \quad (k = ۰, ۱, \ldots, ۱۵)$
$\varepsilon = ۱۰^{-۵}, \quad x = ۲/۳۰ + ۰/۰۵k \quad (k = ۰, ۱, \ldots, ۱۵), \varepsilon = ۱۰^{-۴},$
ب) $\cosh x$ برای مقادیر مشابه x در بالا

۲ـ۳ـ برخی از تقریب‌های چند جمله‌ای

محاسبه توسط سری تیلور فقط برای مقادیر کوچک $|x - x_۰|$ سرعت تقارب راضی کننده‌ای دارد. از اینرو اغلب لازم است که یک چند جمله‌ای تقریبی از درجه نسبتاً پایین و با دقت کافی را، برای تمامی نقاط یک بازه مشخص انتخاب کنیم. در این مورد از بسط توابع به کمک چند جمله‌ای‌های چبیشف[1] در یک بازه مشخص استفاده می‌کنیم. در ذیل چند مثال از چنین بسط‌هایی به همراه بازه به کار گرفته شده و خطای مطلق متناظر آورده شده است ([۲۵] را ببینید). مقدار یک چند جمله‌ای بوسیله روش هرنر قابل محاسبه است.

۱ـ محاسبه مقادیر یک تابع نمایی در بازه[۱ و ۱-]. بدین منظور تقریب چند جمله‌ای زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$e^x \approx \sum_{k=۰}^{۷} a_k x^k (|x| \le ۱), \varepsilon = ۲ \times ۱۰^{-۷} \qquad (۱۵\text{-}۲)$$

$$a_۰ = ۰/۹۹۹۹۹۹۸,\ a_۱ = ۱/۰۰۰۰۰۰۰,\ a_۲ = ۰/۵۰۰۰۰۶۳,\ a_۳ = ۰/۱۶۶۶۶۷۴,$$
$$a_۴ = ۰/۰۴۱۶۳۵۰,\ a_۵ = ۰/۰۰۸۳۲۹۸,\ a_۶ = ۰/۰۰۱۴۳۹۳,\ a_۷ = ۰/۰۰۰۲۰۴۰.$$

۲ـ محاسبه مقادیر یک تابع لگاریتمی. فرمول زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$\ln(۱ + x) \approx \sum_{k=۱}^{۷} a_k x^k (۰ \le x \le ۱), \quad \varepsilon = ۲/۲ \times ۱۰^{-۷} \qquad (۱۶\text{-}۲)$$

$$a_۱ = ۰/۹۹۹۹۸۱۰۲۸, \quad a_۲ = -۰/۴۹۹۴۷۰۱۵۰, \quad a_۳ = ۰/۳۲۸۲۳۳۱۲۲,$$
$$a_۴ = -۰/۲۲۵۸۷۳۲۸۴, \quad a_۵ = ۰/۱۳۴۶۳۹۲۶۷, \quad a_۶ = -۰/۰۵۵۱۱۹۹۵۹,$$
$$a_۷ = ۰/۰۱۰۷۵۷۳۶۹.$$

1) Chebyshev

۳ـ محاسبه مقادیر توابع مثلثاتی. از تقریب‌های چند جمله‌ای زیر استفاده می‌گردد:

$$\sin x \approx \sum_{k=0}^{4} a_{2k+1} x^{2k+1} \quad (|x| \le \pi/2), \quad \varepsilon = 6 \times 10^{-9} \qquad (17\text{-}2)$$

$a_1 = 1.000000002, \quad a_3 = -0.166666589, \quad a_5 = 0.008333075,$
$a_7 = -0.000198107, \quad a_9 = 0.000002608;$

$$\cos x \approx \sum_{k=0}^{5} a_{2k} x^{2k} \quad (|x| \le 1), \quad \varepsilon = 2.10^{-9} \qquad (18\text{-}2)$$

$a_0 = 1.0000000000, \quad a_2 = -0.49999999999942,$
$a_4 = 0.0416666665950, \quad a_6 = -0.0013888885683,$
$a_8 = 0.000024795132, \quad a_{10} = -0.000000269591;$

$$\tan x \approx \sum_{k=0}^{6} a_{2k+1} \; x^{2k+1} (|x| \le \pi/4), \quad \varepsilon = 2.10^{-8} \qquad (19\text{-}2)$$

$a_1 = 1.00000002, \quad a_3 = 0.33333082, \quad a_5 = 0.13339762,$
$a_7 = 0.05935836, \quad a_9 = 0.02457096, \quad a_{11} = 0.00294045,$
$a_{13} = 0.00947324.$

مثال ۲ـ۷ـ با استفاده از یک تقریب چند جمله‌ای مقدار $\sqrt{e}$ را با دقت 10^{-6} بدست آورید.

حل ـ محاسبه را با توجه به فرمول (۲-۱۵) و با استفاده از روش هرنر (بخش ۲ـ۱ را ببینید) برای $x = 0.5$ انجام می‌دهیم (جدول ۲-۲ را ببینید).

جدول ۲-۲) روش هرنر برای چند جمله‌ای (۲-۱۵)

۰,۰۴۱۶۳۵۰	۰,۰۰۸۳۲۹۸	۰,۰۰۱۴۳۹۳	۰,۰۰۰۲۰۴۰
۰,۰۰۴۵۵۰۲	۰,۰۰۰۷۷۰۶	۰,۰۰۰۱۰۲۰	+
۰,۰۴۶۱۸۵۲	۰,۰۰۹۱۰۰۴	۰,۰۰۱۵۴۱۳	۰,۰۰۰۲۰۴۰

$0.9999998 \vert \underline{0.5}$	۱,۰۰۰۰۰۰۰	۰,۵۰۰۰۰۶۳	۰,۱۶۶۶۶۷۴
۰,۶۴۸۷۲۱۶	۰,۲۹۷۴۴۳۱	۰,۰۹۴۸۸۰۰	۰,۰۲۳۰۹۲۶
$\underline{1.6487214 = P(0.5)}$	۱,۲۹۷۴۴۳۱	۰,۵۹۴۸۸۶۳	۰,۱۸۹۷۶۰۰

با گرد کردن نتیجه تا شش رقم بدست می‌آوریم: $e^{\frac{1}{2}} \approx 1.648721$ (مثال ۱ بخش ۲ـ۲ را ببینید).

مثال ۲ـ۸ـ به کمک تقریب چند جمله‌ای مقدار $\sin 0.5$ را با دقت 10^{-8} پیدا کنید.

حل ـ محاسبه را با توجه به فرمول (۲-۱۷) و با استفاده از روش هرنر برای $x = ۰٫۵$ انجام می‌دهیم. امّا چند جمله‌ای فرمول (۲-۱۷) تنها شامل توان‌های فرد x است که بهتر است آن‌را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\sum_{k=۰}^{۴} a_{۲k+۱}x^{۲k+۱} = (a_۱ + a_۳x^۲ + a_۵x^۴ + a_۷x^۶ + a_۹x^۸)x$$

و روش هرنر را برای چند جمله‌ای

$$P(\xi) = a_۱ + a_۳\xi + a_۵\xi^۲ + a_۷\xi^۳ + a_۹\xi^۴, \quad \xi = x^۲ = ۰٫۲۵ \qquad (۲\text{-}۲۰)$$

بکار بگیریم. محاسبه مقدار $P(۰٫۲۵)$ در جدول ۲-۳ آمده است. با ضرب مقدار بدست آمده $P(۰٫۲۵) = ۰٫۹۵۸۸۵۱۰۸۷$ در $x = ۰٫۵$ و گرد کردن نتیجه داریم:

$$\sin ۰٫۵ \approx ۰٫۴۷۹۴۲۵۵۴$$

جدول ۲-۳) روش هرنر برای چند جمله‌ای (۲-۲۰)

۰٫۲۵	۱٫۰۰۰۰۰۰۰۰۲	−۰٫۱۶۶۶۶۶۵۸۹	۰٫۰۰۸۳۳۳۰۷۵	−۰٫۰۰۰۱۹۸۱۰۷	+۰٫۰۰۰۰۰۰۲۶۰۸
	−۰٫۰۴۱۱۴۸۹۱۵	۰٫۰۰۲۰۷۰۹۲۸	−۰٫۰۰۰۰۴۹۳۶۴	۰٫۰۰۰۰۰۰۶۵۲	
	$= ۰٫۹۵۸۸۵۱۰۸۷$ $=P(۰٫۲۵)$	−۰٫۱۶۴۵۹۵۶۶۱	۰٫۰۰۸۲۸۳۷۱۱	−۰٫۰۰۰۱۹۷۴۴۵	۰٫۰۰۰۰۰۰۲۶۰۸

مسائل

۱ـ جدول مقادیر توابع زیر را با دقت ε برای مقادیر داده شده x تشکیل دهید.

الف) $e^x, \quad x = ۰٫۷۲۵ + ۰٫۰۰۱k \quad (k = ۰, ۱, ۲, \dots, ۱۵), \quad \varepsilon = ۱۰^{-۴},$

$x = ۰٫۲۱۳ + ۰٫۰۰۲k \quad (k = ۰, ۱, ۲, \dots, ۱۵), \quad \varepsilon = ۱۰^{-۵},$

ب) $e^{-x}, \quad x = ۰٫۲۱۳ + ۰٫۰۰۳k \quad (k = ۰, ۱, ۲, \dots, ۱۵), \quad \varepsilon = ۱۰^{-۵}$

$x = ۱٫۲۷ + ۰٫۰۲k \quad (k = ۰, ۱, ۲, \dots, ۱۵), \quad \varepsilon = ۱۰^{-۵},$

پ) $e^{۱/x}, \quad x = ۲ + ۰٫۵k \quad (k = ۰, ۱, ۲, \dots, ۱۵), \quad \varepsilon = ۱۰^{-۵}$

ت) $\frac{۱}{۲\sqrt{\pi}}e^{-x^۲/۲}, \quad x = ۰٫۴ + ۰٫۰۲k \quad (k = ۰, ۱, ۲, \dots, ۱۵), \quad \varepsilon = ۱۰^{-۵},$

$x = ۱٫۲ + ۰٫۱k \quad (k = ۰, ۱, ۲, \dots, ۱۵), \quad \varepsilon = ۱۰^{-۵},$

۲ـ جدول مقادیر توابع زیر را با دقت ε برای مقادیر مشخص شده x تشکیل دهید.

الف) $\sin x$ برای $x = ۰٫۸۰ + ۰٫۰۵k \quad (k = ۰, ۱, \dots, ۱۵)$

$x = ۰٫۰۵۵ + ۰٫۰۰۳k \quad (k = ۰, ۱, \dots, ۱۵)$

ب) $\cos x$ برای همان مقادیر x در الف
پ) $\tan x$ برای همان مقایر x در الف

۲ـ۴ـ استفاده از کسرهای دنباله‌دار برای محاسبه مقادیر توابع عالی[1]

۱ـ تعاریف مقدماتی. رشته‌های $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ و $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ را در نظر بگیرید. عبارتی به شکل:

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots}}} = [a_0; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \ldots] \qquad (۲۱\text{-}۲)$$

یک کسر دنباله‌دار برای رشته‌های داده شده $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ و $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ خوانده می‌شود. در حالت کلی، اجزای یک کسر دنباله‌دار $a_0, a_k, b_k (k = 1, 2, \ldots)$ اعداد حقیقی، مختلط و یا توابعی از یک یا چند متغیرند. عبارات:

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1}, \quad a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2}}, \quad a_0 + \frac{b_1}{a_1 \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3}}}, \quad \ldots, \quad a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{\ddots}{a_{n-1} + \frac{b_n}{b_n}}}}$$

به ترتیب اولین، دومین، سومین و n امین تقریب کسر دنباله‌دار مفروض هستند که معمولاً به صورت $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \ldots, \frac{P_n}{Q_n}$ ذکر می‌شوند. وقتی از یک کامپیوتر استفاده می‌شود، تقریب‌های متوالی به راحتی به کمک روش هرنر برای تقسیم بدست می‌آیند:

$$\begin{array}{ll}
c_1 = \frac{b_n}{a_n}, & d_1 = a_{n-1} + c_1, \\
c_2 = \frac{b_{n-1}}{d_1}, & d_2 = a_{n_2} + c_{-2}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_k = \frac{b_{n-k+1}}{d_{k-1}}, & d_k = a_{n-k} + c_k, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_n = \frac{b_1}{d_{n-1}}, & d_n = a_0 + c_n = \frac{P_n}{Q_n}.
\end{array}$$

رشته عملیات مشخص شده براحتی قابل برنامه سازی است.
برای صورت و مخرج تقریب‌های متوالی، فرمول‌های تکرار زیر را داریم:

$$P_n = a_n P_{n-1} + b_n P_{n-2}, \quad Q_n = a_n Q_{n-1} + b_n Q_{n-2} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

1) Transcendental

که در آن $P_{-1} = 1$، $Q_{-1} = 0$، $P_0 = a_0$ و $Q_0 = 1$.

کسر دنباله‌دار (۲-۲۱) متقارب خوانده می‌شود، اگر یک حد مشخص A برای تقریب $\frac{P_n}{Q_n}$ وقتی $n \to \infty$ موجود باشد:

$$A = \lim_{n \to \infty} \frac{P_n}{Q_n}$$

عدد بدست آمده A مقدار این کسر است. اگر حد موجود نباشد کسر دنباله‌دار (۲-۲۱) را متباعد[1] (نا متقارب) می‌گوییم. برای کسر دنباله‌دار متقارب مقدار $\frac{P_n}{Q_n}$، مقدار تقریبی آن کسر است.

۲ـ بسط e^x به کسر دنباله‌دار. از بسط:

$$e^x = [0, \frac{1}{1}, \frac{-2x}{2+x}, \frac{x^2}{6}, \frac{x^2}{10}, \ldots, \frac{x^2}{4n+2}, \ldots] \qquad (۲-۲۲)$$

که به ازای هر مقدار x متقارب می‌شود استفاده می‌کنیم. از این فرمول تقریب‌های متوالی را بدست می‌آوریم:

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{1}, \ \frac{P_2}{Q_2} = \frac{2+x}{2-x}, \ \frac{P_3}{Q_3} = \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2},$$
$$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3},$$
$$\frac{P_5}{Q_5} = \frac{1680+840x+180x^2+20x^3+x^4}{1680-840x+180x^2-20x^3+x^4}.$$

مثال ۲ـ۹ـ با استفاده از بسط e^x به یک کسر دنباله‌دار مقدار $\frac{1}{e}$ را با دقت 10^{-5} محاسبه کنید.

حل ـ اجازه دهید که تقریب چهارم و پنجم را برای $x = -1$ محاسبه کنیم:

$$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{120-60+12-1}{120+60+12+1} = \frac{71}{193} \approx 0{,}367876,$$
$$\frac{P_5}{Q_5} = \frac{1680-840+180-20+1}{1680+840+180+20+1} = \frac{1001}{2721} \approx 0{,}367879.$$

با مقایسه تقریب‌های بدست آمده، متوجه می‌شویم که پنج رقم از آنها مطابق هستند. بنابراین می‌توانیم بنویسیم: $e^{-1} \approx 0{,}36788$.

۳ـ بسط $\tan x$ به کسر دنباله‌دار. بسط زیر برای $\tan x$ موجود است:

$$\tan x = [0, \frac{x}{1}, -\frac{x^2}{3}, -\frac{x^2}{5}, \ldots, -\frac{x^2}{2n+1}, \ldots] \qquad (۲-۲۳)$$

این بسط برای کلیه نقاط پیوستگی $\tan x$ معتبر است. تقریب‌های اولیه بصورت زیر هستند:

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{x}{1}, \qquad \frac{P_4}{Q_4} = \frac{105x-10x^3}{105-45x^2+x^4},$$
$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{3x}{3-x^2}, \qquad \frac{P_5}{Q_5} = \frac{945x-105x^3+x^5}{945-420x^2+15x^4}.$$
$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{15x-x^3}{15-6x^2},$$

1) divergent

مسائل

۱ـ با استفاده از بسط به کسر دنباله‌دار، جدول مقادیر توابع زیر را با دقت ε تشکیل دهید.

الف) e^x، $x = ۰/۱۵۵ + ۰/۰۰۵k$ $(k = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۵)$ $\varepsilon = ۱۰^{-۵}$،

$x = ۰/۳۰ + ۰/۰۳k$ $(k = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۵)$ $\varepsilon = ۱۰^{-۴}$.

ب) $\tan x$، $x = ۰/۴۷ + ۰/۰۱k$ $(k = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۵)$ $\varepsilon = ۱۰^{-۵}$.

۲ـ۵ـ استفاده از روش تکرار برای تقریب مقادیر یک تابع

هر تابع $y = f(x)$ را می‌توان به صورت دیگری به طور ضمنی نمایش داد:

$$f(x, y) = ۰ \tag{۲-۲۴}$$

اغلب حل معادله (۲-۲۴) بر حسب y به کمک روش تکرار منجر به عملیات مشابه می‌شود که براحتی توسط یک کامپیوتر قابل اجراست. بنابراین، استفاده از این روش آشکارا مناسب و مفید است.

یکی از فرآیندهای تکراری ممکن، برای محاسبه $y(x)$ می‌تواند به صورت زیر باشد:

فرض کنید y_n تقریبی از y باشد. با استفاده از فرمول لاگرانژ[1] داریم:

$$F(x, y_n) = F(x, y_n) - F(x, y) = (y_n - y)F'_y(x, \bar{y}_n)$$

که در آن $\bar{y}_n$ مقداری مابین y و y_n است. بنابراین:

$$y = y_n - \frac{F(x, y_n)}{F'_y(x, \bar{y}_n)}$$

که مقدار $\bar{y}_n$ برای ما مشخص نیست. با در نظر گرفتن تقریب $\bar{y}_n \approx y_n$ فرمول زیر برای محاسبه $y \approx y_{n+۱}$ نتیجه می‌شود:

$$y_{n+۱} = y_n - \frac{F(x, y_n)}{F'_y(x, y_n)} \quad (n = ۰, ۱, ۲, \ldots) \tag{۲-۲۵}$$

فرآیند تکرار معرفی شده همان روش نیوتن است ([۱۲] را ببینید) که برای تابع $z = f(x, y)$ با x ثابت به کار رفته است. بنابراین به طور کلی می‌توان گفت که اگر $F'_y(x, y)$ و $F''_{yy}(x, y)$ موجود باشند و در فاصله‌ای که ریشه $y(x)$ قرار دارد تغییر علامت ندهند، این فرمول متقارب می‌شود.

تقریب اولیه $y_۰(x)$ طوری انتخاب می‌شود که محاسبه آن راحت باشد و تا حد ممکن به مقدار واقعی $y(x)$ نزدیک باشد. فرآیند تکرار تا وقتی تکرار می‌شود که دو تقریب متوالی y_n و $y_{n+۱}$ با دقت مشخص شده و مورد نظر مطابق باشند. آنگاه ما تقریباً خواهیم داشت: $y(x) \approx y_{n+۱}$.

1) Lagrange

۱ـ محاسبه مقادیر وارون. فرض کنید $(x > \circ)$ $y = \frac{۱}{x}$. قرار می‌دهیم:

$$F(x,y) \equiv x - \frac{۱}{y} = \circ$$

با استفاده از فرمول (۲-۲۵) داریم:

$$y_{n+۱} = y_n(۲ - xy_n) \tag{۲-۲۶}$$

بنابراین ما به یک فرآیند تکراری بدون تقسیم، دست پیدا کرده‌ایم. مقدار اولیه $y_\circ$ معمولاً به روش زیر تعیین می‌گردد. فرض کنید آرگومان x به صورت دودویی نوشته شود:

$$x = ۲^m x_۱$$

که در آن m یک عدد صحیح است و $\frac{۱}{۲} \le x_۱ < ۱$. آنگاه قرار دهید $y_\circ = ۲^{-m}$. با چنین انتخابی برای مقدار اولیه $y_\circ$ فرآیند تکرار سریعتر متقارب می‌شود ([۱۲] را ببینید).

توجه- چون تقسیم $\frac{a}{b}$ برابر حاصل ضرب a و $\frac{۱}{b}$ است، ما می‌توانیم عمل تقسیم را در کامپیوترهایی که قادر به انجام تقسیم نیستند، در دو مرحله انجام دهیم:

(۱) محاسبه $y = \frac{۱}{b}$ (وارون مقسوم‌علیه)

(۲) ضرب y در مقسوم a.

مثال ۲ـ۱۰ـ به کمک فرمول (۲-۲۶) مقدار تابع $y = \frac{۱}{x}$ را برای $x = ۵$ با دقت $۱\circ^{-۵}$ بدست آورید.

حل- آرگومان x را به شکل $x = ۲^۳ \times \frac{۵}{۸}$ می‌نویسیم و قرار می‌دهیم $y_\circ = ۲^{-۳} = \frac{۱}{۸}$. حال با توجه به فرمول (۲-۲۵) داریم:

$$y_۱ = \frac{۱}{۸}(۲ - \frac{۵}{۸}) = \frac{۱۱}{۶۴} = \circ/۱۷۱۸, \quad y_۲ = \frac{۱۱}{۶۴}(۲ - \frac{۵۵}{۶۴}) = \frac{۸\circ۳}{۴\circ۹۶} = \circ/۱۹۶\circ,$$
$$y_۳ = \circ/۱۹۶\circ(۲ - \circ/۹۸\circ\circ) = \circ/۱۹۶\circ \times ۱/\circ۲\circ\circ = \circ/۱۹۹۹۲.$$

می‌بینیم که در اینجا تقریب سوم مقدار $y(x) \approx \circ/۱۹۹۹$ را با دقت $۱\circ^{-۴}$ بدست داده است.

۲ـ محاسبه ریشه دوم. فرض کنید $(x > \circ)$ $y = \sqrt{x}$. این معادله را به صورت $F(x,y) \equiv y^۲ - x = \circ$ می‌نویسیم. با استفاده از فرمول (۲-۲۵) داریم:

$$y_{n+۱} = \frac{۱}{۲}(y_n + \frac{x}{y_n}) \quad (n = \circ, ۱, ۲, \dots) \tag{۲-۲۷}$$

که همان فرمول هِرو[1] است (فرآیند هرو).
اگر آرگومان x به صورت دودویی نوشته شود:

$$x = ۲^m x_۱$$

که در آن m یک عدد صحیح است و $\frac{۱}{۲} \leq x_۱ < ۱$، آنگاه معمولاً می‌نویسیم $y_۰ = ۲^{E(m/۲)}$، که در آن $E(m/۲)$ بخش صحیح عدد $m/۲$ است.
فرآیند تکرار به کمک فرمول هرو بسادگی توسط یک کامپیوتر دارای دستور تقسیم قابل اجراست. در این مورد فرآیند تکرار برای هر انتخاب $y_۰ > ۰$ متقارب می‌گردد (در این مثال به سادگی دیده می‌شود که شرایط ذکر شده برای تقارب برقرارند، زیرا $F'_y = ۲y > ۰$ و $F''_{yy} = ۲ > ۰$).
اگر $۰/۰۱ \leq x \leq ۱$ باشد آنگاه می‌توانیم مقدار $y_۰ = ax + b$ را به عنوان تقریب اولیه در نظر بگیریم.
ضرایب مربوطه a و b در جدول ۲-۴ آمده‌اند.

جدول ۲-۴) ضرایب تقریب اولیه در فرمول هرو (۲-۲۷)

Interval	a	b
(۰/۰۱; ۰/۰۲)	۴/۱	۰/۰۶۰
(۰/۰۲; ۰/۰۳)	۳/۲	۰/۰۷۸
(۰/۰۳; ۰/۰۸)	۲/۲	۰/۱۱۰
(۰/۰۸; ۰/۱۸)	۱/۴	۰/۱۷۴
(۰/۱۸; ۰/۳۰)	۱/۰	۰/۲۴۷
(۰/۳۰; ۰/۶۰)	۰/۸	۰/۳۰۴
(۰/۶۰; ۱/۰۰)	۰/۶	۰/۴۰۹

با چنین انتخابی برای تقریب اولیه $y_۰$، دومین تقریب یعنی $y_۲$ مقدار $\sqrt{x}$ را با هشت رقم اعشار بدست می‌دهد. برای محاسبه $y_۰$ مقدار x را می‌توان تنها با سه رقم اعشار در نظر گرفت.

مثال ۲ـ۱۱ـ مقدار $\sqrt{۷}$ را با دقت $۱۰^{-۵}$ حساب کنید.

حل‌ـ در اینجا $x = ۷ = ۲^۳ \times \frac{۷}{۸}$. از اینرو تقریب اولیه چنین بدست می‌آید:

$$y_۰ = ۲^{E(۳/۲)} = ۲$$

1) Hero

با توجه به فرمول (۲-۲۷)، به ترتیب خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \tfrac{1}{2}(2+\tfrac{7}{2}) = 2{,}75000,\\
y_2 &= \tfrac{1}{2}(\tfrac{11}{4}+\tfrac{28}{11}) = 2{,}64772,\\
y_3 &= \tfrac{1}{2}(\tfrac{233}{88}+\tfrac{616}{233}) = 2{,}64575,\\
y_4 &= \tfrac{1}{2}(2{,}64575-\tfrac{7}{2{,}64575}) = 2{,}64575.
\end{aligned}$$

چون مقادیر y_3 و y_4 با پنج رقم اعشار مطابق هستند می‌توان نتیجه گرفت:

$$\sqrt{7} \approx 2{,}64575.$$

توجه. اگر محاسبات توسط کامپیوتری که در مجموعه دستورات آن عمل تقسیم وجود ندارد انجام گیرد، ما می‌توانیم از دیگر فرمول‌های تکرار مانند:

$$y_{n+1} = y_n\left(\frac{3}{2} - \frac{y_n^2}{2x}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{۲-۲۸}$$

استفاده کنیم. طبق این فرمول یافتن یک جذر منجر به یک محاسبه وارون $\frac{1}{2x}$ و سپس یک فرآیند تکرار می‌شود، که در تمام مراحل آن تنها از دستورات ضرب و تفریق استفاده می‌شود. فرمول (۲-۲۸) از معادله اولیه‌ای به صورت $F(x,y) = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x} = 0$ نتیجه شده است.

۳ـ محاسبه وارون ریشه دوم. در اینجا داریم $(x > 0)$ $y\frac{1}{\sqrt{x}}$. فرمول تکرار برای محاسبه وارون ریشه دوم به شکل زیر است:

$$y_{n+1} = \frac{3}{2}y_n - \frac{1}{2}xy_n^3 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{۲-۲۹}$$

این فرمول با تبدیل معادله اولیه $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ به شکل $F(x,y) = \frac{1}{y^2} - x = 0$ بدست می‌آید. به عنوان تقریب اولیه ما معمولاً $y_0 = 2^{-E(m/2)}$ را در نظر می‌گیریم که در آن $x = 2^m x_1$ و $\frac{1}{2} \le x_1 < 1$. در اینجا نیز یک فرآیند تکرار بدون تقسیم داریم.

۴ـ محاسبه ریشه سوم. در اینجا داریم $y = \sqrt[3]{x}$. با به کار گرفتن فرمول (۲-۲۵) برای معادله $F(x,y) \equiv y^3 - x = 0$ فرمول تکراری برای محاسبه ریشه سوم به شکل

$$y_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{2y_n^3 + x}{y_n^2}\right) \tag{۲-۳۰}$$

بدست می‌آید.

تقریب اولیه $y_0 = 2^{E(m/3)}$ است که در آن $x = 2^m x_1$ بوده و m یک عدد صحیح است و $\frac{1}{2} \le x_1 < 1$.

مثال ۲ـ۱۲ـ مقدار $\sqrt[۳]{۵}$ را با دقت $۱۰^{-۳}$ حساب کنید.

حل ـ در اینجا $x = ۵ = ۲^{۳} \times \frac{۵}{۸}$ است. تقریب اولیه برابر است با

$$y_{\circ} = ۲^{E(۳/۳)} = ۲$$

و اولین تقریب $y_۱ = \frac{۱}{۳}(۴ + \frac{۵}{۴}) = \frac{۲۱}{۱۲} = ۱{,}۷۵۰۰$ است. محاسبات بعدی در جدول ۲-۵ آمده است. بنابراین $\sqrt[۳]{۵} \approx ۱{,}۷۱۰$.

جدول ۲-۵) محاسبه $\sqrt[۳]{۵}$

n	y_n	$y_n^۲$	$۳y_n^۲$	$y_n^۳$	$۲y_n^۳ + ۵$
۰	۲	۴	۱۲	۸	۲۱
۱	۱٫۷۵۰۰	۳٫۰۶۲۵	۹٫۱۸۷۵	۵٫۳۵۹۴	۱۵٫۷۱۸۸
۲	۱٫۷۱۰۰	۲٫۹۲۴۱	۸٫۷۷۲۳	۵٫۰۰۰۲	۱۵٫۰۰۰۴
۳	۱٫۷۱۰۰				

۵ـ محاسبه ریشه Pام. فرض کنید $y = \sqrt[P]{x}$ که در آن $x > ۰$ و P یک عدد صحیح بزرگتر از صفر است. با بکار بستن فرمول (۲-۲۵) برای معادله $F(x,y) \equiv ۱ - \frac{x}{y^P} = ۰$ خواهیم داشت:

$$y_{n+۱} = y_n[(۱ + \frac{۱}{P}) - \frac{y_n^P}{Px}] \qquad (۲\text{-}۳۱)$$

فرآیند تکرار متقارب می‌شود اگر تقریب اولیه $y_{\circ} > ۰$ طوری انتخاب شود که $y_{\circ}^P < (P + ۱)x$.

۶ـ فرمول نیوتن برای محاسبه ریشه Pام. قرار می‌دهیم $y = \sqrt[P]{x}$. با استفاده از فرمول (۲ـ۲۵) برای معادله $F(x,y) \equiv y^P - x = ۰$ نتیجه می‌گیریم:

$$y_{n+۱} = \frac{۱}{P}[(P - ۱)y_n + \frac{x}{y_n^{P-۱}}] \qquad (۲\text{-}۳۲)$$

تنها کافیست که تقریب اولیه $y_{\circ}$ یک یا دو رقم با ارزش داشته باشد. لازم به ذکر است که فرمول نیوتن برای $P = ۲$ به فرمول هرو منجر می‌شود.

مثال ۲ـ۱۳ـ مقدار $y = \sqrt[۷]{۲۷۷۲۳۴}$ را با دقت $۱۰^{-۶}$ محاسبه کنید.

حل- تقریب اولیه را $y_{\circ} = ۶$ می‌گیریم. با استفاده از فرمول (۲-۳۱) به ترتیب محاسبه می‌کنیم:

$$y_{۱} = ۶[(۱ + \frac{۱}{۷}) - \frac{۶^{۷}}{۷ \times ۲۷۷۲۳۴}] = ۵/۹۹۱۶۴۶۰۵,$$
$$y_{۲} = ۵/۹۹۱۶۹۲۲۵, \quad y_{۳} = ۵/۹۹۱۶۹۲۲۵$$

و در نتیجه $\sqrt[۷]{۲۷۷۲۳۴} \approx ۵/۹۹۱۶۹۲$.

مسائل

۱ـ با استفاده از روش تکرار جدول مقادیر توابع زیر را با دقت $۱۰^{-۶}$ تشکیل دهید.

الف) $\frac{۱}{x}$, $x = ۳ + ۲k \quad (k = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۵)$

ب) $\frac{۱}{x^{۲}}$ برای مقادیر x در الف

پ) $\frac{۱}{x^{۳}}$ برای مقادیر x در الف

ت) $\frac{x}{۱+x}$, $x = ۰/۰۰۷ + ۰/۰۰۳k, \quad (k = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۵)$

۲ـ با استفاده از روش تکرار جدول مقادیر توابع زیر را با دقت $۱۰^{-۵}$ تشکیل دهید.

الف) $\sqrt{x}$, $x = ۲ + k \quad (k = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۵)$

ب) $x\sqrt{x}$, $x = ۲ + k \quad (k = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۵)$

پ) $\sqrt{۱ + x^{۲}}$, $x = ۰/۳ + ۰/۰۰۲k \quad (k = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۵)$

ت) $\sqrt{x^{۲} + ۱}/x$ برای مقادیر x در پ

۳ـ با استفاده از روش تکرار جدول مقادیر توابع زیر را با دقت $۱۰^{-۳}$ تشکیل دهید.

الف) $\frac{۱}{\sqrt{x}}, x = ۳ + ۲k \quad (k = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۵)$

ب) $۱/\sqrt{۲ + x^{۲}}, x = ۰/۳ + ۰/۰۰۲k \quad (k = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۵)$

پ) $(۲x + ۱)/\sqrt{x}, x = ۳/۱ + ۰/۰۰۵k \quad (k = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۵)$

ت) $۱/\sqrt{x(x + ۱)}, x = ۲/۳ + ۰/۰۰۲k \quad (k = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۵)$

۴ـ با استفاده از روش تکرار جداول مقادیر توابع زیر را با دقت $۱۰^{-۶}$ تشکیل دهید.

الف) $\sqrt[۳]{x}, x = ۳ + k \quad (k = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۵)$

ب) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}$، برای مقادیر x در الف.

۵ـ با استفاده از روش تکرار جداول مقادیر توابع زیر را با دقت $۱۰^{-۶}$ تشکیل دهید.

الف) $\sqrt[۴]{x}, x = ۰/۰۵ + ۰/۰۲k \quad (k = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۵)$

ب) $\sqrt[۵]{x}$ برای مقادیر x در الف.

پ) $\sqrt[۶]{x}$ برای مقادیر x در الف.

ت) $\sqrt[۷]{x}$ برای مقادیر x در الف.

۳ـ حل عددی دستگاه‌های معادلات جبری خطی

۳ـ۱ـ مفاهیم اولیه

فرض کنید که یک دستگاه جبری خطی با n معادله و n مجهول داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{array}\right\} \qquad (۳\text{-}۱)$$

و یا به شکل ماتریسی

$$Ax = b \qquad (۳\text{-}۲)$$

که در آن

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ماتریس ضرایب است و

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

نیز بردارهای جملات ثابت و مجهول‌ها هستند.
اگر ماتریس A تکین [1] نباشد یعنی

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \ a_{n2} \ \dots \ a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

آنگاه دستگاه (۳-۱) یک جواب یکتا دارد. در این مورد حل دستگاه (۳-۱) از نقطه نظر تئوری کار مشکلی نیست. مقادیر مجهول $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ را می‌توان با بکارگیری قاعده کرامر [2] محاسبه کرد:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

که در آن ماتریس A_i از جایگزینی ستون iام ماتریس A با بردار ثابت‌ها بدست آمده است.
امّا طبق این روش حل دستگاه خطی n مجهولی به محاسبه $n + 1$ دترمینان رتبه n منجر می‌شود که عملیات طاقت فرسایی است. بخصوص وقتی که عدد n خیلی بزرگ باشد.
روش‌های حل دستگاه‌های معادلات خطی مورد استفاده بطور کلی به دو دسته دقیق و تکراری تقسیم می‌شوند.
روش‌های دقیق روش‌هایی هستند که محاسبات در آنها بطور دقیق و کامل انجام می‌گیرد (بدون گرد کردن) و به مقادیر دقیق مجهولات می‌رسند. چون در کاربردهای معمول گرد کردن اجتناب ناپذیر است، نتایج هر یک از روش‌های دقیق، تقریبی بوده و برآورد خطای ریشه‌ها لازم است. نمونه‌هایی از روش‌های دقیق، روش گوس[3]، روش ریشه دوم و ... می‌باشند.
روش‌های تکراری روش‌هایی هستند که محاسبات در آنها بدون گرد کردن انجام شده و دستیابی به ریشه‌های یک دستگاه فقط با دقت از پیش تعیین شده ممکن است. حل دقیق یک دستگاه در اینگونه روش‌ها بطور تئوریک نتیجه یک فرآیند بی‌پایان است. این گروه شامل روش‌های تکرار ساده، روش سیدل[4]، روش تخفیف[5] و دیگر روش‌هاست. هیچیک از این روش‌ها بطور حتم برای یک دسته کاملا مشخص از دستگاه‌های معادلات خطی متقارب نمی‌شوند.

1) Non Singular 2) Cramer 3) gauss 4) Seidel 5) relaxation

۲ـ۳ روش گوس

بیشتر تکنیک‌های معمول برای حل دستگاه‌های معادلات جبری خطی با الگوریتمی برای حذف متوالی مجهولات انجام می‌شوند. این روش (الگوریتم)، روش گوس خوانده می‌شود. اجازه بدهید یکی از آنها را ببینیم (روش تقسیم واحد[1]).

برای سادگی ما خود را به یک دستگاه چهار معادله چهار مجهولی محدود می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= a_{15}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= a_{25}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= a_{35}, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= a_{45}. \end{aligned}\right\} \tag{۳-۳}$$

فرض کنیم $a_{11} \neq 0$ (عنصر کلیدی). با تقسیم معادله اول دستگاه (۳-۳) بر a_{11} داریم:

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15} \tag{۴-۳}$$

که در آن

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j = 2, 3, 4, 5)$$

با استفاده از معادله (۴-۳) به راحتی می‌توان مجهول x_1 را از معادلات دوم، سوم و چهارم دستگاه (۳-۳) حذف کرد. بدین منظور معادله (۴-۳) را در a_{21}، a_{31} و a_{41} ضرب کرده و حاصل را از معادله دوم، سوم و چهارم دستگاه کم می‌کنیم. نهایتاً ما دستگاهی شامل سه معادله داریم:

$$\left.\begin{aligned} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 &= a_{25}^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 &= a_{35}^{(1)}, \\ a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 &= a_{45}^{(1)}, \end{aligned}\right\} \tag{۵-۳}$$

که در آن ضرائب $a_{ij}^{(1)}$ با فرمول

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j} \ (i = 2, 3, 4; \quad j = 2, 3, 4, 5) \tag{۶-۳}$$

محاسبه شده‌اند. حالا با تقسیم معادله اول دستگاه (۵-۳) بر عنصر کلیدی $a_{22}^{(1)}$ معادله (۷-۳) را بدست می‌آوریم:

$$x_2 + b_{23}^{(1)}x_3 + b_{24}^{(1)}x_4 = b_{25}^{(1)} \tag{۷-۳}$$

1) unique division

که در آن $b_{2j}^{(1)} = a_{2j}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ $(j = 3,4,5)$.
با حذف x_2 به همان روش که x_1 را حذف کردیم به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم:

$$\left.\begin{aligned} a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 = a_{35}^{(2)}, \\ a_{43}^{(2)}x_3 + a_{44}^{(2)}x_4 = a_{45}^{(2)}, \end{aligned}\right\} \tag{۳-۸}$$

که در آن

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)}b_{2j}^{(1)} \quad (i = 3,4; \quad j = 3,4,5). \tag{۳-۹}$$

با تقسیم معادله اول از دستگاه (۳-۸) بر عنصر کلیدی $a_{33}^{(2)}$ بدست می‌آوریم:

$$x_3 + b_{34}^{(2)}x_4 = b_{35}^{(2)} \tag{۳-۱۰}$$

که در آن $b_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(2)}/a_{33}^{(2)}$ $(j = 4,5)$.
حال با استفاده از این معادله، x_3 را از معادله دوم دستگاه (۳-۸) حذف می‌کنیم و معادله $a_{44}^{(3)}x_4 = a_{45}^{(3)}$ را بدست می‌آوریم که در آن

$$a_{4j}^{(3)} = a_{4j}^{(2)} - a_{43}^{(2)}b_{3j}^{(2)} \quad (j = 4,5) \tag{۳-۱۱}$$

بنابراین ما دستگاه (۳-۳) را به یک دستگاه معادل با ماتریس مثلثی تقلیل داریم:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}, \\ x_2 + b_{23}^{(1)}x_3 + b_{24}^{(1)}x_4 = b_{25}^{(1)}, \\ x_3 + b_{34}^{(2)}x_4 = b_{35}^{(2)}, \\ a_{44}^{(3)}x_4 = a_{45}^{(3)}, \end{aligned}\right\} \tag{۳-۱۲}$$

که از آنجا به ترتیب بدست می‌آوریم:

$$\left.\begin{aligned} &x_4 = a_{45}^{(3)}/a_{44}^{(3)}, \quad x_3 = b_{35}^{(2)} - b_{34}^{(2)}x_4, \\ &x_2 = b_{25}^{(1)} - b_{24}^{(1)}x_4 - b_{23}^{(1)}x_3, \\ &x_1 = b_{15} - b_{14}x_4 - b_{13}x_3 - b_{12}x_2. \end{aligned}\right\} \tag{۳-۱۳}$$

از اینرو فرآیند حل از دو رویه تشکیل می‌شود:
الف) رویه پیشروی [1]، یعنی تقلیل دستگاه (۳-۳) به شکل مثلثی (۳-۱۲).
ب) رویه پسروی [2]، یعنی پیدا کردن مقادیر مجهول‌ها با فرمول‌های (۳-۱۳).
همانطور که مشاهده می‌شود، رویه تشریح شده در بالا تنها موقعی بکار می‌رود که تمامی عناصر کلیدی مخالف صفر باشند. اگر یکی از آنها صفر بود، کافی است که جای معادلات را در دستگاه مورد نظر عوض

1) Direct procedure 2) Inverse procedure

کنیم تا عنصر کلیدی غیر صفر ساخته شود (البته با فرض اینکه ماتریس A تکین است). تعداد عملیات حسابی مورد نیاز برای اجرای روش گوس توسط فرمول زیر بدست می‌آید ([۲] و [۱۲] را ببینید):

$$N = \frac{2n(n+1)(n+2)}{3} + n(n-1)$$

که در آن n تعداد مجهولات است.
بنابراین زمان لازم برای اجرای عملیات حسابی جهت حل دستگاه معادلات جبری خطی با روش گوس متناسب با مجذور تعداد مجهولات است.

مثال ۳ـ۱ـ با استفاده از روش گوس دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\left.\begin{aligned}
2.0x_1 + 1.0x_2 - 0.1x_3 + 1.0x_4 &= 2.7,\\
0.4x_1 + 0.5x_2 + 4.0x_3 - 8.5x_4 &= 21.9,\\
0.3x_1 - 1.0x_2 + 1.0x_3 + 5.2x_4 &= -3.9,\\
1.0x_1 + 0.2x_2 + 2.5x_3 - 1.0x_4 &= 9.9.
\end{aligned}\right\} \qquad (14\text{-}3)$$

حل- رویه پیشروی:
با تقسیم معادله اول دستگاه (۳-۱۴) به $a_{11} = 2$ داریم:

$$x_1 + 0.5x_2 - 0.05x_3 + 0.5x_4 = 1.35$$

از اینرو $b_{12} = 0.5$، $b_{13} = -0.05$، $b_{14} = 0.5$، $b_{15} = 1.35$. با استفاده از فرمول (۳-۶) ضرایب $a_{ij}^{(1)}$ محاسبه شده و دستگاه (۳-۵) تشکیل می‌شود. برای $i = 2$ داریم:

$$\begin{aligned}
a_{22}^{(1)} &= a_{22} - a_{21}b_{12} = 0.5 - 0.4 \times 0.5 = 0.3,\\
a_{23}^{(1)} &= a_{23} - a_{21}b_{13} = 4 + 0.4 \times 0.05 = 4.02,\\
a_{24}^{(1)} &= a_{24} - a_{21}b_{14} = -8.5 - 0.4 \times 0.5 = -8.7,\\
a_{25}^{(1)} &= a_{25} - a_{21}b_{15} = 21.9 - 0.4 \times 1.35 = 21.36.
\end{aligned}$$

برای $i = 3, 4$ محاسبات به طریق مشابه انجام می‌گیرد. بنابراین ما دستگاهی با سه مجهول بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
&0.3x_2 + 4.02x_3 - 8.7x = 21.36,\\
&-1.15x_2 + 1.015x_3 + 5.05x_4 = -4.305,\\
&-0.3x_2 + 2.55x_3 - 1.5x_4 = 8.55.
\end{aligned}$$

با تقسیم معادله اول از دستگاه حاصله بر $a_{۲۲}^{(۱)} = ۰٫۳$ می‌نویسیم:

$$x_{۲} + ۱۳٫۴۰x_{۳} - ۲۹٫۰۰x_{۴} = ۷۱٫۲۰$$

که در آن $b_{۲۳}^{(۱)} = ۱۳٫۴۰$، $b_{۲۴}^{(۱)} = -۲۹٫۰۰$ و $b_{۲۵}^{(۱)} = ۷۱٫۲۰$.
با استفاده از فرمول (۳-۹) ضرایب $a_{ij}^{(۲)}$ را محاسبه کرده و دستگاه (۳-۸) را تشکیل می‌دهیم.
برای $i = ۳$ داریم:

$$\begin{aligned}
a_{۳۳}^{(۲)} &= a_{۳۳}^{(۱)} - a_{۳۲}^{(۱)}b_{۲۳}^{(۱)} = ۱٫۰۱۵ + ۱٫۱۵ \times ۱۳٫۴۰ = ۱۶٫۴۲۵,\\
a_{۳۴}^{(۲)} &= a_{۳۴}^{(۱)} - a_{۳۲}^{(۱)}b_{۲۴}^{(۱)} = ۵٫۰۵ - ۱٫۱۵ \times ۲۹٫۰۰ = -۲۸٫۳۰۰,\\
a_{۳۵}^{(۲)} &= a_{۳۵}^{(۱)} - a_{۳۲}^{(۱)}b_{۲۵}^{(۱)} = -۴٫۳۰۵ + ۱٫۱۵ \times ۷۱٫۲۰ = ۷۷٫۵۷۵.
\end{aligned}$$

برای $i = ۴$ نیز محاسبات به طریق مشابه انجام می‌شود و یک دستگاه با دو مجهول بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
۱۶٫۴۲۵x_{۳} - ۲۸٫۳۰۰x_{۴} &= ۷۷٫۵۷۵,\\
۶٫۵۷۰x_{۳} - ۱۰٫۲۰۰x_{۴} &= ۲۹٫۹۱۰.
\end{aligned}$$

با تقسیم معادله اول از این دستگاه بر $a_{۳۳}^{(۲)} = ۱۶٫۴۲۵$، بدست می‌آوریم:

$$x_{۳} - ۱٫۷۲۲۹۸x_{۴} = ۴٫۷۲۲۹۸$$

که در آن $b_{۳۴}^{(۲)} = -۱٫۷۲۲۹۸$ و $b_{۳۵}^{(۲)} = ۴٫۷۲۲۹۸$.
با استفاده از فرمول (۳-۱۱) ضرایب $a_{۴j}^{(۳)}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
a_{۴۴}^{(۳)} &= a_{۴۴}^{(۲)} - a_{۴۳}^{(۲)}b_{۳۴}^{(۲)} = -۱۰٫۲۰۰ + ۶٫۵۷۰ \times ۱٫۷۲۲۹۸ = ۱٫۱۱۹۹۸,\\
a_{۴۵}^{(۳)} &= a_{۴۵}^{(۲)} - a_{۴۳}^{(۲)}b_{۳۵}^{(۲)} = ۲۹٫۹۱۰ - ۶٫۵۷۰ \times ۴٫۷۲۲۹۸ = -۱٫۱۱۹۹۸,
\end{aligned}$$

و یک معادله یک مجهولی بدست می‌آوریم $۱٫۱۱۹۹۸x_{۴} = -۱٫۱۱۹۹۸$.
بنابراین دستگاه معادل به صورت زیر است:

$$\left.\begin{aligned}
x_{۱} + ۰٫۵x_{۲} - ۰٫۰۵x_{۳} + ۰٫۰۵x_{۴} &= ۱٫۳۵,\\
x_{۲} + ۱۳٫۴۰x_{۳} - ۲۹٫۰۰x_{۴} &= ۷۱٫۲۰,\\
x_{۳} - ۱٫۷۲۲۹۸x_{۴} &= ۴٫۷۲۲۹۸,\\
۱٫۱۱۹۸x_{۴} &= -۱٫۱۱۹۹۸.
\end{aligned}\right\} \qquad (۱۵\text{-}۳)$$

در اینجا مرحله پیشروی خاتمه می‌یابد.

رویه پسروی:

از دستگاه (۳-۱۵) خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
x_4 &= -1.00000, \\
x_3 &= 4.72298 - 1.72298 = 3.00000, \\
x_2 &= 71.20 - 13.40 \times 3 + 29.0 = 2.00000, \\
x_1 &= 1.35 - 0.5 \times 2 + 0.05 \times 3 + 0.5 = 1.00000.
\end{aligned}
$$

چون ما مصون از خطا نیستیم، تمامی محاسبات می‌بایستی وارسی شده باشد. یکی از ساده‌ترین روش‌های وارسی بر مبنای این حقیقت است که افزایش مقادیر تمام مجهولات به اندازه یک واحد هم‌ارز با جایگزینی دستگاه (۳-۳) با یک دستگاه آزمایشی است که در آن جملات ثابت برابر با مجموع تمامی ضرائب سطر متناظر هستند. برای مثال

$$a_{16} = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15}$$

با حل همزمان (موازی) دستگاه آزمایشی و دستگاه مفروض، ما امکان وارسی هر عمل در عملیات حل دستگاه داده شده را خواهیم داشت (همانطور که در روش‌های تشریح شده در ذیل نشان داده خواهد شد).

۳-۳- روش فشرده گوس[1] و بهبود کروت-دولیتل[2]

۱- روش فشرده گوس. اگر محاسبه روی یک کامپیوتر اصلی به روش تقسیم واحد انجام گیرد، در آن صورت بیشتر وقت صرف ضبط نتایج بینابینی می‌شود. روش فشرده گوس ([۲] را ببینید) منجر به یک روش صرفه جویانه در ضبط می‌گردد. اجازه دهید مراحل انجام این روش را برای دستگاه (۳-۳) ببینیم. تمامی نتایج محاسبات در جدول ۳-۱ نشان داده شده است.

این جدول به ترتیب زیر پر می‌شود:

رویه پیشروی:

(۱) ضرایب دستگاه داده شده را در چهار سطر و پنج ستون در بخش I جدول (۳-۱) وارد می‌کنیم.

(۲) تمامی ضرایب سطر را جمع زده و مجموع را در ستون $\sum$ (ستون وارسی) وارد می‌کنیم. برای مثال $a_{16} = \sum_{j=1}^{5} a_{1j}$.

(۳) تمامی اعداد سطر اول را بر a_{11} تقسیم کرده و نتایج $b_{ij} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}$ را در سطر پنجم بخش I وارد می‌کنیم.

(۴) مقدار $\sum_{j=1}^{5} b_{1j}$ را محاسبه و یک وارسی انجام می‌دهیم. اگر محاسبات با یک تعداد از ارقام دهدهی ثابت انجام شده باشد آنگاه اعداد b_{16} و $\sum_{i=1}^{5} b_{1j}$ نمی‌بایستی بیشتر از یک واحد در آخرین رقم باقیمانده اختلاف داشته باشد در غیر این صورت عملیات (۳) را وارسی می‌کنیم.

1) Caussian Compact Scheme 2) Crout-Doolittle

جدول ۳-۱) روش فشرده گوس

	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	$= a_{i6}$
I	۱	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	$\sum a_{1j} = a_{16}$
	۲	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	$\sum a_{2j} = a_{26}$
	۳	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	$\sum a_{3j} = a_{36}$
	۴	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	$\sum a_{4j} = a_{46}$
		۱	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}	$a_{16}/a_{11} = b_{16}$
II	۲		$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$	$a_{25}^{(1)}$	$a_{26}^{(1)}$
	۳		$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$a_{34}^{(1)}$	$a_{35}^{(1)}$	$a_{36}^{(1)}$
	۴		$a_{42}^{(1)}$	$a_{43}^{(1)}$	$a_{44}^{(1)}$	$a_{45}^{(1)}$	$a_{46}^{(1)}$
			۱	$b_{23}^{(1)}$	$b_{24}^{(1)}$	$b_{25}^{(1)}$	$a_{26}^{(1)}/a_{22}^{(1)} = b_{26}^{(1)}$
III	۳			$a_{33}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$	$a_{35}^{(2)}$	$a_{36}^{(2)}$
	۴			$a_{43}^{(2)}$	$a_{44}^{(2)}$	$a_{45}^{(2)}$	$a_{46}^{(2)}$
				۱	$b_{34}^{(2)}$	$b_{35}^{(2)}$	$a_{36}^{(2)}/a_{33}^{(2)} = b_{36}^{(2)}$
IV	۴				$a_{44}^{(3)}$	$a_{45}^{(3)}$	$a_{46}^{(3)}$
V					۱	x_4	$\bar{x}_4$
				۱		x_3	$\bar{x}_3$
			۱			x_2	$\bar{x}_2$
		۱				x_1	$\bar{x}_1$

(۵) با استفاده از فرمول (۳-۶) ضرایب

$$a_{ij}^{(1)}(i = 2, 3, 4;\ j = 2, 3, 4, 5, 6)$$

را محاسبه می‌کنیم. بطور معمول درکامپیوترهای مورد استفاده امکان محاسبه فرمول (۳-۶) بدون نیاز به ضبط حاصل‌ضرب $a_{ij}b_{1j}$ موجود می‌باشد.

نتایج در سه سطر اول بخش II جدول وارد می‌شود.

(۶) یک وارسی انجام می‌دهیم. مجموع عناصر هر سطر $\sum_{j=2}^{5} a_{ij}^{(2)}(i = 2, 3, 4)$ نمی‌بایستی با $a_{i6}^{(1)}$ بیشتر از یک واحد در آخرین رقم باقیمانده اختلاف داشته باشند (اگر تمامی محاسبات با تعداد ارقام دهدهی ثابتی انجام شده باشد).

(۷) تمام عناصر سطر اول بخش II را بر $a_{22}^{(1)}$ تقسیم و نتایج را در سطر چهارم بخش II وارد می‌کنیم.

(۸) مثل مرحله (۴) وارسی می‌کنیم.

(۹) با استفاده از فرمول (۳-۹) مقادیر $a_{ij}^{(۲)}(i=۳,۴;\ j=۳,۴,۵)$ را محاسبه می‌کنیم. نتایج را در دو سطر اول بخش III وارد می‌کنیم.
(۱۰) مثل مرحله (۶) وارسی می‌کنیم.
(۱۱) عناصر سطر اول بخش III را بر $a_{۳۳}^{(۲)}$ تقسیم و اعداد $b_{۳j}^{(۲)}=a_{۳j}^{(۲)}/a_{۳۳}^{(۲)}$ را بدست می‌آوریم. نتایج را در سطر سوم بخش III وارد می‌کنیم.
(۱۲) یک وارسی انجام می‌دهیم.
(۱۳) مقادیر $a_{۴j}^{(۳)}=a_{۴j}^{(۲)}-a_{۴۳}^{(۲)}b_{۳j}^{(۲)}$ را محاسبه و نتایج را در بخش IV وارد می‌کنیم.

رویه پسروی:

(۱) مقدار واحد را در بخش V همانطورکه در جدول ۳-۱ مشخص شده وارد می‌کنیم.
(۲) مقدار $x_۴=a_{۴۵}^{(۳)}/a_{۴۴}^{(۳)}$ را محاسبه می‌کنیم.
(۳) برای محاسبه مقادیر $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ فقط از سطرهایی از بخش‌های I، II و III استفاده می‌کنیم که شامل مقدار واحد هستند (در ابتدای آخرین سطر). بنابراین برای محاسبه $x_۳$ و $x_۴$ را در $b_{۳۴}^{(۲)}$ ضرب و حاصل را از $b_{۳۵}^{(۲)}$ می‌کاهیم. مقادیر واحد وارد شده در بخش V به ما در یافتن ضرایب متناظر برای $x_i(i=۱,۲,۳)$ در سطر مشخص شده (شامل مقدار واحد) کمک می‌کنند. بنابراین $x_۳=b_{۳۵}^{(۲)}-b_{۳۴}^{(۲)}x_۴$.
(۴) مقدار $x_۲$ را با عناصر مورد نظر در سطر مشخص شده در بخش II محاسبه می‌کنیم:

$$x_۲=b_{۲۵}^{(۱)}-b_{۲۴}^{(۱)}x_۴-b_{۲۳}^{(۱)}x_۳$$

(۵) مقدار $x_۱$ را با عناصر مورد نظر در سطر مشخص شده در بخش I محاسبه می‌کنیم:

$$x_۱=b_{۱۵}-b_{۱۴}x_۴-b_{۱۳}x_۳-b_{۱۲}x_۲$$

در روش همراه با وارسی، رویه پسروی به طریقه مشابه انجام می‌گیرد. جواب‌های این روش می‌بایستی با جواب‌های دیگر روش‌ها یکی اختلاف داشته باشد (با دقت یک واحد در آخرین رقم باقیمانده):

$$\bar{x}_i=x_i+۱\quad(i=۱,۲,۳,۴).$$

این وارسی به کمک ستون $\sum$ انجام می‌گیرد. برای دستگاه‌هایی با تعداد مجهول دلخواه، روش فشرده گوس به همین ترتیب انجام می‌شود.
این روش می‌تواند بخصوص در حل همزمان چندین دستگاه که تنها در ستون جملات ثابت با هم متفاوتند (و فضای حافظه را اشغال می‌کنند) مفید باشد.

مثال ۳ـ۲ـ دستگاه (۳-۱۴) را به کمک روش فشرده گوس حل کنید.

حل- چون تمام محاسبات در بخش ۳ـ۲ انجام شده، اجازه دهید ما تنها چگونگی پرکردن جدول به همراه وارسی محاسبات را نشان دهیم.

رویه پیشروی:

(۱) ضرایب a_{ij} برای $i = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$ و $j = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶$ را در بخش I جدول ۳-۲ وارد می‌کنیم.

جدول ۳-۲) روش فشرده گوس برای دستگاه (۳-۱۴)

	i	$a_{i۱}$	$a_{i۲}$	$a_{i۳}$	$a_{i۴}$	$a_{i۵}$	$\sum = a_{i۶}$
I	۱	۲٫۰	۱٫۰	−۰٫۱	۱٫۰	۲٫۷	۶٫۶
	۲	۰٫۴	۰٫۵	۴٫۰	−۸٫۵	۲۱٫۹	۱۸٫۳
	۳	۰٫۳	−۱٫۰	۱٫۰	۵٫۲	−۳٫۹	۱٫۶
	۴	۱٫۰	۰٫۲	۲٫۵	−۱٫۰	۹٫۹	۱۲٫۶
		۱	۰٫۵۰	−۰٫۰۵	۰٫۵۰	۱٫۳۵	۳٫۳۰
II	۲		۰٫۳۰	۴٫۰۲	−۸٫۷۰	۲۱٫۳۶	۱۶٫۹۸
	۳		−۱٫۱۵	۱٫۰۱۵	۵٫۰۵	−۴٫۳۰۵	۰٫۶۱۰
	۴		−۰٫۳۰	۲٫۵۵	−۱٫۵۰	۸٫۵۵	۹٫۳۰۰
			۱	۱۳٫۴۰	−۲۹٫۰۰	۷۱٫۲۰	۵۶٫۶۰
III	۳			۱۶٫۴۲۵	−۲۸٫۳۰۰	۷۷٫۵۷۵	۶۵٫۷۰۰
	۴			۶٫۵۷۰	−۱۰٫۲۰۰	۲۹٫۹۱۰	۲۶٫۲۸۰
				۱	−۱٫۷۲۲۹۸	۴٫۷۲۲۹۸	۴٫۰۰۰۰۰
IV	۴				۱٫۱۱۹۹۸	−۱٫۱۱۹۹۸	۰
V					۱	−۱٫۰۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰۰
				۱		۳٫۰۰۰۰۰	۴٫۰۰۰۰۰
			۱			۲٫۰۰۰۰۰	۳٫۰۰۰۰۰
		۱				۱٫۰۰۰۰۰	۲٫۰۰۰۰۰

(۲) مجموع ضرایب سطر را محاسبه می‌کنیم. بدین ترتیب برای $i = ۱$ داریم:

$$\sum_{j=۱}^{۵} a_{ij} = ۲٫۰ + ۱٫۰ - ۰٫۱ + ۱٫۰ + ۲٫۷ = ۶٫۶$$

نتیجه را در سطر اول ستون $\sum$ وارد می‌کنیم و همینطور برای سطرهای دیگر همین کار را انجام می‌دهیم.

(۳) عناصر سطر اول را بر $a_{۱۱} = ۲٫۰$ تقسیم کرده، نتیجه را در سطر پنجم در بخش I وارد می‌کنیم.

(۴) وارسی: با محاسبه مجموع پنج عدد اول بدست آمده در مرحله (۳) عدد ۳٫۳۰ حاصل می‌شود که بطور کامل با عدد بدست آمده در ستون $\sum$ مطابقت دارد.

(۵) اعداد $(i = ۲,۳,۴;\ j = ۲,۳,۴,۵,۶)a_{ij}^{(۱)}$ را بدست آورده و در بخش II وارد می‌کنیم.

(۶) وارسی: ضرایب بدست آمده در هر سطر را جمع می‌کنیم. بنابراین برای $i = ۲$ داریم: $\sum_{j=۲}^{۵} a_{ij}^{(۱)} = ۱۶٫۹۸$.

می‌بینیم که نتیجه با عدد وارسی مطابقت می‌کند.

(۷) عناصر سطر اول بخش II را بر $a_{۲۲}^{(۱)} = ۰٫۳$ تقسیم می‌کنیم. نتیجه را در سطر آخر این بخش وارد می‌کنیم.

(۸) وارسی: $۱ + b_{۲۳}^{(۱)} + b_{۲۴}^{(۱)} + b_{۲۵}^{(۱)} = ۵۶٫۶۰ = b_{۲۶}^{(۱)}$.

(۹) اعداد $a_{ij}^{(۲)}\ (i = ۳,۴;\ j = ۳,۴,۵,۶)$ را بدست آورده و در بخش III وارد می‌کنیم.

(۱۰) وارسی: برای $i = ۳$ داریم $a_{۳۳}^{(۲)} + a_{۳۴}^{(۲)} + a_{۳۵}^{(۲)} = ۶۵٫۷۰۰ = a_{۳۶}^{(۲)}$ و برای $i = ۴$ داریم $a_{۴۳}^{(۲)} + a_{۴۴}^{(۲)} + a_{۴۵}^{(۲)} = ۲۶٫۲۸۰ = a_{۴۶}^{(۲)}$.

(۱۱) عناصر سطر اول بخش III را بر $a_{۳۳}^{(۲)} = ۱۶٫۴۲۵$ تقسیم می‌کنیم. نتیجه را در بخش IV وارد می‌کنیم.

(۱۲) وارسی: $۱ + b_{۴۴}^{(۲)} + b_{۴۵}^{(۳)} = ۴٫۰۰۰۰۰ = b_{۴۶}^{(۲)}$.

(۱۳) مقدار $(j = ۴,۵,۶)a_{۴j}^{(۳)}$ را محاسبه می‌کنیم. نتیجه را در بخش IV وارد می‌کنیم.

(۱۴) وارسی: $a_{۴۴}^{(۳)} + a_{۴۵}^{(۳)} = ۰ = a_{۴۶}^{(۳)}$.

رویه پسروی:

طی مراحل اشاره شده (۱) تا (۵) در رویه پسروی، مقدار مجهولات را بدست می‌آوریم:

$$x_۴ = -۱٫۰۰۰۰۰;\quad x_۳ = ۳٫۰۰۰۰۰;\quad x_۲ = ۲٫۰۰۰۰۰;\quad x_۱ = ۱٫۰۰۰۰۰$$

و جواب دستگاه وارسی می‌شود:

$$\bar{x}_۴ = ۰٫۰۰۰۰۰;\quad x_۳ = ۴٫۰۰۰۰۰;\quad x_۲ = ۳٫۰۰۰۰۰;\quad x_۱ = ۲٫۰۰۰۰۰$$

مقایسه جواب‌های بدست آمده نشان می‌دهد که در محاسبات خطایی وجود نداشته است.

۲ـ بهبود کروت‌ـدولیتل. تمامی محاسبات در این روش در یک جدول وارد می‌شوند (جدول ۳-۳). برای سادگی، اجازه دهید که مراحل پرکردن جدول در این روش را برای یک دستگاه معادلات چهار مجهولی شرح دهیم. این جدول به ترتیب زیر پر می‌شود.

جدول ۳-۳) روش محاسبات کروت-دولیتل

	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	$\sum = a_{i6}$
I	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	$a_{16} = \sum a_{1j}$
	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	$a_{26} = \sum a_{2j}$
	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	$a_{36} = \sum a_{3j}$
	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	$a_{46} = \sum a_{4j}$
II	m_{21}					
	m_{31}					
	m_{41}					
III		$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$	$a_{25}^{(1)}$	$a_{26}^{(1)}$
IV		m_{32}				
		m_{42}				
V			$a_{33}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$	$a_{35}^{(2)}$	$a_{36}^{(2)}$
VI			m_{43}			
VII				$a_{44}^{(3)}$	$a_{45}^{(3)}$	$a_{46}^{(3)}$
$VIII$				۱	x_4	$\bar{x}_4$
			۱		x_3	$\bar{x}_3$
		۱			x_2	$\bar{x}_2$
	۱				x_1	$\bar{x}_1$

رویه پیشروی:

(۱) ضرایب دستگاه a_{ij} برای $i = 1, 2, 3, 4$ و $j = 1, 2, 3, 4, 5$ را در بخش I جدول ۳-۳ وارد می‌کنیم.

(۲) ضرایب هر سطر را جمع زده و نتیجه را در ستون $\sum$ وارد می‌کنیم، یعنی مقادیر $a_{i6}(i = 1, 2, 3, 4)$.

(۳) اعداد $m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$ را برای $i = 2, 3, 4$ محاسبه و نتیجه را در بخش II وارد می‌کنیم.

(۴) ضرایب $a_{2j}^{(1)}$ را برای $j = 2, 3, 4, 5, 6$ به کمک فرمول $a_{2j}^{(1)} = a_{2j} - m_{21}a_{1j}$ محاسبه و نتیجه را در بخش III وارد می‌کنیم.

(۵) وارسی: مجموع $\sum_{j=2}^{5} a_{2j}^{(1)}$ نمی‌بایستی با $a_{26}^{(1)}$ بیشتر از یک واحد در آخرین رقم باقیمانده تفاوت داشته باشد (اگر محاسبات با تعداد ارقام دهدهی ثابت انجام شده باشد).

(۶) اعداد m_{i2} را برای $i = 3, 4$ به کمک فرمول $m_{i2} = \frac{(a_{i2} - m_{i1}a_{12})}{a_{22}^{(1)}}$ پیدا کرده و نتیجه را در بخش IV وارد می‌کنیم.

(۷) ضرایب $a_{3j}^{(2)}$ را برای $j = 3, 4, 5, 6$ به کمک فرمول $a_{3j}^{(2)} = a_{3j} - m_{31}a_{1j} - m_{32}a_{2j}^{(1)}$ محاسبه

و در بخش V وارد می‌کنیم.

(۸) وارسی: مقدار $\sum_{j=3}^{5} a_{3j}^{(2)}$ را با عدد $a_{36}^{(2)}$ مقایسه می‌کنیم.

(۹) عدد $m_{43} = (a_{43} - m_{41}a_{13} - m_{42}a_{23}^{(1)}/a_{33}^{(2)})$ را بدست آورده، در بخش VI وارد می‌کنیم.

(۱۰) ضرایب $a_{4j}^{(3)}$ را برای $j = 4, 5, 6$ به کمک فرمول $a_{4j}^{(3)} = a_{4j} - m_{41}a_{1j} - m_{42}a_{2j}^{(1)} - m_{43}a_{3j}^{(2)}$ یافته و در بخش VII وارد می‌کنیم.

(۱۱) وارسی: مجموع $a_{44}^{(3)} + a_{45}^{(3)}$ را با عدد $a_{46}^{(3)}$ مقایسه می‌کنیم.

رویه پسروی:

حال به ترتیب مقادیر مجهولات x_4، x_3، x_2 و x_1 را با فرمول‌های زیر بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
a_{44}^{(3)}x_4 &= a_{45}^{(3)},\\
a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 &= a_{35}^{(2)},\\
a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 &= a_{25}^{(1)},\\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= a_{15}.
\end{aligned}$$

به کمک این فرمول‌ها محاسبات بدون نیاز به ضبط نتایج بینابینی انجام می‌گیرد. نتایج نهایی در بخش $VIII$ در جدول وارد می‌شوند و به موازات آن جواب‌های دستگاه وارسی نیز وارد جدول می‌شوند. وارسی همانند آنچه در صفحه ۵۲ دیدیم انجام می‌گیرد.

تعداد عملیات حسابی در هر دو روش (جدول ۳-۱ و ۳-۳) برابرند، بنابراین حجم عملیات یکسانی در مراحل مختلف خواهیم داشت امّا ضبط نتایج بینابینی محاسبات بطور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد که البته بسیار مهم است، بخصوص وقتی که محاسبات توسط یک کامپیوتر معمولی انجام می‌شود.

مسائل

دستگاه‌های زیر را به کمک هر دو روش گوس و بهبود کروت-دویتل حل کنید.

محاسبات را با پنج رقم اعشار انجام دهید.

(الف) $A = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/5 & 0/5 \\ 1/6 & 2/5 & -1/0 \\ 1/0 & 4/1 & -1/5 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0/90 \\ 1/55 \\ 2/08 \end{pmatrix}.$

(ب) $A = \begin{pmatrix} 1/5 & -0/2 & 0/1 \\ -0/1 & 1/5 & -0/1 \\ -0/3 & 0/2 & -0/5 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0/4 \\ 0/8 \\ 0/2 \end{pmatrix}.$

(پ) $A = \begin{pmatrix} 2/1 & -4/5 & -2/0 \\ 3/0 & 2/5 & 4/3 \\ -6/0 & 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 19/07 \\ 3/21 \\ -18/25 \end{pmatrix}.$

ت) $A = \begin{pmatrix} ۳/۰ & -۲/۰ & ۵/۳ & -۲/۱ & ۱/۰ \\ ۱/۰ & ۴/۰ & -۶/۰ & ۴/۵ & -۶/۰ \\ ۳/۰ & ۶/۰ & -۷/۳ & -۹/۰ & ۳/۴ \\ -۲/۰ & -۳/۰ & ۱/۰ & -۴/۰ & ۶/۰ \\ ۱/۰ & -۴/۰ & ۶/۵ & ۱/۰ & -۳/۰ \end{pmatrix},$

$$b = \begin{pmatrix} ۲۸/۳ \\ -۳۶/۲ \\ ۲۴/۵ \\ ۱۶/۲ \\ ۴/۳ \end{pmatrix}.$$

ث) $A = \begin{pmatrix} ۸/۶۴ - \alpha & ۱/۷۱ & ۵/۴۲ \\ -۶/۳۹ & ۴/۲۵ & ۱/۸۴ + \alpha \\ ۴/۲۱ & ۷/۹۲ - \alpha & -۳/۴۱ \end{pmatrix},$

$$b = \begin{pmatrix} ۱۰/۲۱ - \beta \\ ۳/۴۱ + \beta \\ ۱۲/۲۹ \end{pmatrix},$$

$$\alpha = ۰/۵ \times k,\ k = ۰, ۱, \ldots, ۴,\quad \beta = ۰/۲ \times k,\ k = ۰, \ldots, ۵.$$

ج) $A = \begin{pmatrix} ۸/۳۰ & ۲/۶۲ + \alpha & ۴/۱۰ & ۱/۹۰ \\ ۳/۹۲ & ۸/۴۵ & ۷/۷۸ - \alpha & ۲/۴۶ \\ ۳/۷۷ & ۷/۲۱ + \alpha & ۸/۰۴ & ۲/۲۸ \\ ۲/۲۱ & ۳/۶۵ - \alpha & ۱/۶۹ & ۶/۹۹ \end{pmatrix},$

$$b = \begin{pmatrix} -۱۰/۶۵ + \alpha \\ ۱۲/۲۱ \\ ۱۵/۴۵ - \beta \\ -۸/۳۵ \end{pmatrix}.$$

$$\alpha = ۰/۲ \times k,\ k = ۰, ۱, \ldots, ۴,\quad \beta = ۰/۲ \times k,\ k = ۰, \ldots, ۵.$$

۳ـ۴ـ روش عناصر اصلی[1]

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1}. \end{array}\right\} \qquad (16\text{-}3)$$

اجازه دهید که ماتریس مربع افزوده که شامل ضرایب دستگاه است را بنویسیم:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1q} \ldots a_{1n} a_{1,n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{p1} \ldots a_{pq} \ldots a_{pn} a_{p,n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \ldots a_{nq} \ldots a_{nn} a_{n,n+1} \end{pmatrix}.$$

یک عنصر a_{pq} (از ماتریس M و غیر متعلق به ستون جملات ثابت $(q \neq n+1)$) غیر صفر (معمولاً از نظر عددی بزرگترین) را انتخاب کنید. این عنصر را عنصر اصلی می‌خوانیم. جملات:

$$m_i = \frac{a_{iq}}{a_{pq}}$$

را برای تمامی $i \neq P$ محاسبه کنید. سطر Pام از ماتریس که شامل عنصر اصلی است، سطر اصلی خوانده می‌شود. حال عملیات زیر را انجام دهید: از هر سطر غیر اصلی iام سطر اصلی ضرب شده در m_i را، به صورت جمله به جمله بکاهید. بدین‌ترتیب ما یک ماتریس جدید بدست می‌آوریم که در آن تمام عناصر ستون qام (بجز a_{pq}) برابر صفرند. با حذف این ستون و عنصر اصلی به ماتریس جدید M_1 می‌رسیم که تعداد سطر وستون آن یکی کمتر است. این عملیات را برای ماتریس M_1 تکرار کنید و ماتریس M_2 را بدست آورید و به همین ترتیب ادامه دهید.
بنابراین ما یک سری ماتریس بدست می‌آوریم:

$$M_1, M_2, M_3, \ldots, M_{n-1}$$

که آخرین آنها یک ماتریس سطری دو جمله‌ای است. این ماتریس خود یک سطر اصلی است. حال با ادغام تمامی سطرهای اصلی با شروع از آخرین سطر اصلی یک دستگاه تشکیل می‌شود. با جایگزینی مناسب آنها یک ماتریس مثلثی معادل با ماتریس اولیه را تشکیل می‌دهیم. در اینجا مرحله محاسبات که

1) Principal elements

رویه پیشروی خوانده می‌شود پایان می‌یابد. با حل دستگاه متناظر با ماتریس ضرایب بدست آمده، مرحله به مرحله مقادیر مجهولات $x_i(i=۱,۲,\ldots,n)$ را می‌یابیم. این مرحله را رویه پسروی می‌گوییم. تمامی نتایج محاسبات تشریح شده در بالا می‌توانند در یک جدول قرار گیرند که مشابه با روش گوس می‌تواند همراه با یک وارسی مناسب در هر مرحله از محاسبات باشد.
عنصر اصلی طوری انتخاب می‌گردد که اعداد m_i هر چه کوچکتر شوند و در نتیجه خطای محاسبات کاهش یابد. بنابراین هنگام بکار بستن روش گوس توسط یک کامپیوتر معمولاً روشی همراه با عنصر اصلی منتخب بکار گرفته می‌شود (روش گوس همراه با عنصر اصلی منتخب).

توجه- اگر تعداد معادلات دستگاه زیاد باشد انتخاب عنصر اصلی کاری مشکل خواهد بود. به همین خاطر در نظر گرفتن سطر اول به عنوان یک سطر اصلی و بزرگترین عنصر عددی این سطر به عنوان عنصر اصلی، در عمل بسیار متداول است.

مثال ۳-۳- با استفاده از روش گوس به همراه عنصر اصلی منتخب، دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned}
۱/۱۱۶۱x_۱+۰/۱۲۵۴x_۲+۰/۱۳۹۷x_۳+۰/۱۴۹۰x_۴&=۱/۵۴۷۱,\\
۰/۱۵۸۲x_۱+۱/۱۶۷۵x_۲+۰/۱۷۶۸x_۳+۰/۱۸۷۱x_۴&=۱/۶۴۷۱,\\
۰/۱۹۶۸x_۱+۰/۲۰۷۱x_۲+۱/۲۱۶۸x_۳+۰/۲۲۷۱x_۴&=۱/۷۴۷۱,\\
۰/۲۳۶۸x_۱+۰/۲۴۷۱x_۲+۰/۲۵۶۸x_۳+۱/۲۶۷۱x_۴&=۱/۸۴۷۱.
\end{aligned}$$

حل- به راحتی می‌توان نتایج تمامی محاسبات را در یک جدول (جدول ۳-۴) به صورت زیر وارد کرد:
رویه پیشروی:
(۱) ضرایب دستگاه را در بخش I جدول وارد می‌کنیم.

$$a_{ij}(i=۱,۲,۳,۴;\ j=۱,۲,۳,۴,۵)$$

(۲) حاصل جمع ضرایب هر سطر را در ستون $a_{i۶}=\sum$ وارد می‌کنیم.
(۳) عنصر اصلی را انتخاب می‌کنیم. در دستگاه مورد نظر ضریب $a_{۴۴}=۱/۲۶۷۱۰(p=۴,q=۴)$ عنصر اصلی است. زیر آن خط می‌کشیم.
(۴) اعداد $m_i(i=۱,۲,۳)$ را بدست می‌آوریم. بدین منظور عناصر ستون $a_{i۴}$ را بر $a_{۴۴}$ تقسیم کرده و نتایج را در ستون m_i در بخش I وارد می‌کنیم.

$$m_۱=\frac{a_{۱۴}}{a_{۴۴}}=\frac{۰/۱۴۹۰۰}{۱/۲۶۷۱۰}=۰/۱۱۷۵۹;\quad m_۲=\frac{a_{۲۴}}{a_{۴۴}}=\frac{۰/۱۸۷۱۰}{۱/۲۶۷۱۰}=۰/۱۴۷۶۶;$$
$$m_۳=\frac{a_{۳۴}}{a_{۴۴}}=\frac{۰/۲۲۷۱۰}{۱/۲۶۷۱۰}=۰/۱۷۹۲۳.$$

جدول ۳-۴) روش گوس با عنصر اصلی منتخب

	i	m_i	$a_{i۱}$	$a_{i۲}$	$a_{i۳}$	$a_{i۴}$	$a_{i۵}$	$\sum = a_{i۶}$
I	۱	۰٫۱۱۷۵۹	۱٫۱۱۶۱۰	۰٫۱۲۵۴۰	۰٫۱۳۹۷۰	۰٫۱۴۹۰۰	۱٫۵۴۷۱۰	۳٫۰۷۷۳۰
	۲	۰٫۱۴۷۶۶	۰٫۱۵۸۲۰	۱٫۱۶۷۵۰	۰٫۱۷۶۸۰	۰٫۱۸۷۱۰	۱٫۶۴۷۱۰	۳٫۳۳۷۶۰
	۳	۰٫۱۷۹۲۳	۰٫۱۹۶۸۰	۰٫۲۰۷۱۰	۱٫۲۱۶۸۰	۰٫۲۲۷۱۰	۱٫۷۴۷۱۰	۳٫۵۹۴۹۰
	۴		۰٫۲۳۶۸۰	۰٫۲۴۷۱۰	۰٫۲۵۶۸۰	$\underline{۱٫۲۶۷۱۰}$	۱٫۸۴۷۱۰	۳٫۸۵۴۹۰
II	۱	۰٫۰۹۳۵۳	۱٫۰۸۸۲۵	۰٫۰۹۶۳۴	۰٫۱۰۹۵۰		۱٫۳۲۹۹۰	۲٫۶۲۳۹۹
	۲	۰٫۱۱۸۶۲	۰٫۱۲۳۲۳	۱٫۱۳۱۰۱	۰٫۱۳۸۸۸		۱٫۳۷۴۳۶	۲٫۷۶۷۴۸
	۳		۰٫۱۵۴۳۶	۰٫۱۶۲۸۱	$\underline{۱٫۱۷۰۷۷}$		۱٫۴۱۶۰۴	۲٫۹۰۳۹۸
III	۱	۰٫۰۷۲۹۶	۱٫۰۷۳۸۱	۰٫۰۸۱۱۱			۱٫۱۹۷۴۶	۲٫۳۵۲۳۸
	۲		۰٫۱۰۴۹۲	$\underline{۱٫۱۱۱۷۰}$			۱٫۲۰۶۳۹	۲٫۴۲۳۰۱
IV	۱		$\underline{۱٫۰۶۶۱۶}$				۱٫۱۰۹۴۴	۲٫۱۷۵۶۰
V	۱		۱				۱٫۰۴۰۵۹	۲٫۰۴۰۵۹
	۲			۱			۰٫۹۸۶۹۷	۱٫۹۸۶۹۷
	۳				۱		۰٫۹۳۵۰۵	۱٫۹۳۵۰۵
	۴					۱	۰٫۸۸۱۳۰	۱٫۸۸۱۳۰

(۵) ضرایب ماتریس جدید را محاسبه می‌کنیم. از هر سطر $i (i = ۱, ۲, ۳)$ سطر اصلی ضرب شده در عنصر متناظر m_i را کم می‌کنیم. در نتیجه برای $i = ۱$ داریم:

$$\begin{aligned}
a_{۱۱}^{(۱)} &= a_{۱۱} - m_۱ a_{۴۱} = ۱٫۱۱۶۱۰ - ۰٫۱۱۷۵۹ \times ۰٫۲۳۶۸۰ = ۱٫۰۸۸۲۵, \\
a_{۱۲}^{(۱)} &= a_{۱۲} - m_۱ a_{۴۲} = ۰٫۱۲۵۴۰ - ۰٫۱۱۷۵۹ \times ۰٫۲۴۷۱۰ = ۰٫۰۹۶۳۴, \\
a_{۱۳}^{(۱)} &= a_{۱۳} - m_۱ a_{۴۳} = ۰٫۱۳۹۷۰ - ۰٫۱۱۷۵۹ \times ۰٫۲۵۶۸۰ = ۰٫۱۰۹۵۰, \\
a_{۱۴}^{(۱)} &= ۰, \\
a_{۱۵}^{(۱)} &= a_{۱۵} - m_۱ a_{۴۵} = ۱٫۵۴۷۱۰ - ۰٫۱۱۷۵۹ \times ۱٫۸۴۷۱۰ = ۱٫۳۲۹۹۰, \\
a_{۱۶}^{(۱)} &= a_{۱۶} - m_۱ a_{۴۶} = ۳٫۰۷۷۳۰ - ۰٫۱۱۷۵۹ \times ۳٫۸۵۴۹۰ = ۲٫۶۲۳۹۹.
\end{aligned}$$

برای $i = ۲, ۳$ به همین صورت عمل می‌شود. نتایج را در بخش II وارد می‌کنیم. در اینجا سطر اصلی و ستون $a_{i۴}$ نوشته نمی‌شوند، چون برابر با صفر هستند.

(۶) وارسی: حاصل جمع $\sum_{j=۱}^{۵} a_{ij}^{(۱)}$ را یافته و آن‌را با $a_{i۶}^{(۱)}$ مقایسه می‌کنیم. برای نمونه

$$\sum_{j=۱}^{۵} a_{۱j} = ۲٫۶۲۳۹۹ = a_{۱۶}^{(۱)}$$

و به همین صورت برای بقیه سطرها عمل می‌کنیم.

(۷) عنصر اصلی را انتخاب کرده زیر آن خط می‌کشیم. در اینجا $a_{۳۳}^{(۱)} = ۱٫۷۰۷۷$ عنصر اصلی است.

(۸) عناصر ستون $a_{i۳}$ را بر $a_{۳۳}^{(۱)}$ تقسیم می‌کنیم تا مقادیر

$$m_{۱}^{(۱)} = \frac{a_{۱۳}^{(۱)}}{a_{۳۳}^{(۱)}} = \frac{۰٫۱۰۹۵۰}{۱٫۱۷۰۷۷} = ۰٫۰۹۳۵۳; \quad m_{۲}^{(۱)} = \frac{a_{۲۳}^{(۱)}}{a_{۳۳}^{(۱)}} = \frac{۰٫۱۳۸۸۸}{۱٫۱۷۰۷۷} = ۰٫۱۱۸۶۲.$$

بدست آیند.

(۹) ضرایب $a_{ij}^{(۲)}$ را محاسبه می‌کنیم. بدین منظور از هر سطر $i(i = ۱, ۲)$، سطر اصلی ضرب شده در m_i متناظر را کم می‌کنیم. در نتیجه برای $i = ۱$ داریم:

$$\begin{aligned}
a_{۱۱}^{(۱)} &= a_{۱۱}^{(۱)} - m_{۱}^{(۱)} a_{۳۱}^{(۱)} = ۱٫۰۸۸۲۵ - ۰٫۰۹۳۵۳ \times ۰٫۱۵۴۳۶ = ۱٫۰۷۳۸۱, \\
a_{۱۲}^{(۲)} &= a_{۱۲}^{(۱)} - m_{۱}^{(۱)} a_{۳۲}^{(۱)} = ۰٫۰۹۶۳۴ - ۰٫۰۹۳۵۳ \times ۰٫۱۶۲۸۱ = ۰٫۰۸۱۱۱, \\
a_{۱۳}^{(۲)} &= a_{۱۳}^{(۱)} - m_{۱}^{(۱)} a_{۳۳}^{(۱)} = ۰, \\
a_{۱۵}^{(۲)} &= a_{۱۵}^{(۱)} - m_{۱}^{(۱)} a_{۳۵}^{(۱)} = ۱٫۳۲۹۹۰ - ۰٫۹۳۵۳ \times ۱٫۴۱۶۰۴ = ۱٫۱۹۷۴۶, \\
a_{۱۶}^{(۲)} &= a_{۱۶}^{(۱)} - m_{۱}^{(۱)} a_{۳۶}^{(۱)} = ۲٫۶۲۳۹۹ - ۰٫۰۹۳۵۳ \times ۲٫۹۰۳۹۸ = ۲٫۳۵۲۳۸.
\end{aligned}$$

برای $i = ۲$ محاسبات به طور مشابه انجام می‌گیرد. نتایج را در بخش III وارد کرده و ستون‌های $a_{i۳}$ و $a_{i۴}$ را خالی می‌گذاریم.

(۱۰) وارسی: مجموع $\sum_{j=۱}^{۵} a_{ij} (i = ۱, ۲)$ می‌بایستی با $a_{i۶}$ مطابق باشد، که این شرط برقرار است.

(۱۱) عنصر اصلی را انتخاب و زیر آن خط می‌کشیم. در اینجا $a_{۲۲}^{(۲)} = ۱٫۱۱۱۷۰$ عنصر اصلی است.

(۱۲) مقدار $m_{۱}^{(۲)} = \frac{a_{۱۲}^{(۲)}}{a_{۲۲}^{(۲)}} = \frac{۰٫۰۸۱۱۱}{۱٫۱۱۱۷۰} = ۰٫۰۷۲۹۶$ را بدست آورده، نتیجه را در ستون m_i در بخش III وارد می‌کنیم.

(۱۳) از سطر اول به صورت جمله به جمله، سطر دوم (اصلی) ضرب شده در $m_{۱}^{(۲)}$ را می‌کاهیم. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
a_{۱۱}^{(۳)} &= a_{۱۱}^{(۲)} - m_{۱}^{(۲)} a_{۲۱}^{(۲)} = ۱٫۰۷۳۸۱ - ۰٫۱۰۴۹۲ \times ۰٫۰۷۲۹۶ = ۱٫۰۶۶۱۶, \\
a_{۱۲}^{(۳)} &= a_{۱۲}^{(۲)} - m_{۱}^{(۲)} a_{۲۲}^{(۲)} = ۰, \\
a_{۱۵}^{(۳)} &= a_{۱۵}^{(۲)} - m_{۱}^{(۲)} a_{۲۵}^{(۲)} = ۱٫۱۹۷۴۶ - ۰٫۰۷۲۹۶ \times ۱٫۲۰۶۳۹ = ۱٫۱۰۹۴۴, \\
a_{۱۶}^{(۳)} &= a_{۱۶}^{(۲)} - m_{۱}^{(۲)} a_{۲۶}^{(۲)} = ۲٫۳۵۲۳۸ - ۰٫۰۷۲۹۶ \times ۲٫۴۲۳۰۱ = ۲٫۱۷۵۶۰.
\end{aligned}$$

نتیجه را در بخش IV وارد می‌کنیم.

(۱۴) وارسی: $a_{۱۱}^{(۳)} + a_{۱۵}^{(۳)} = ۱٫۰۶۶۱۶ + ۱٫۱۰۹۴۴ = ۲٫۱۷۵۶۰ = a_{۱۶}^{(۲)}$

(۱۵) با استخراج سطرهای اصلی هر بخش، یک دستگاه معادل با دستگاه اولیه خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned}
&۱٫۰۶۶۱۶x_{۱} = ۱٫۱۰۹۴۴,\\
&۰٫۱۰۴۹۲x_{۱} + ۱٫۱۱۱۷۰x_{۲} = ۱٫۲۰۶۳۹,\\
&۰٫۱۵۴۳۶x_{۱} + ۰٫۱۶۲۸۱x_{۲} + ۱٫۱۷۰۷۷x_{۳} = ۱٫۴۱۶۰۴,\\
&۰٫۲۳۶۸۰x_{۱} + ۰٫۲۴۷۱۰x_{۲} + ۰٫۲۵۶۸۰x_{۳} + ۱٫۲۶۷۱۰x_{۴} = ۱٫۸۴۷۱۰.
\end{aligned}\right\} \quad (۱۷\text{-}۳)$$

رویه پسروی:

نتایج محاسبات انجام شده در رویه پسروی در بخش IV وارد می‌گردد. به ترتیب بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
x_{۱} &= ۱٫۱۰۹۴۴/۱٫۰۶۶۱۶ = ۱٫۰۴۰۵۹,\\
x_{۲} &= (۱٫۲۰۶۳۹ - ۰٫۱۰۴۹۲ \times ۱٫۰۴۰۵۹)/۱٫۱۱۱۷۰ = ۰٫۹۸۶۹۷,\\
x_{۳} &= (۱٫۴۱۶۰۴ - ۰٫۱۵۴۳۶ \times ۱٫۰۴۰۵۹ - ۰٫۱۶۲۸۱ \times ۰٫۹۸۶۹۷)/۱٫۱۷۰۷۷ =\\
&= ۰٫۹۳۵۰۵,\\
x_{۴} &= (۱٫۸۴۷۱۰ - ۰٫۲۳۶۸۰ \times ۱٫۰۴۰۵۹ - ۰٫۲۴۷۱۰ \times ۰٫۹۸۶۹۷ - ۰٫۲۵۶۸۰ \times\\
&\times ۰٫۹۳۵۰۵)/۱٫۲۶۷۱۰ = ۰٫۸۸۱۳۰.
\end{aligned}$$

رویه پسروی به کمک ستون $\sum$ به همان روش که در صفحه ۵۲ آمده است، انجام می‌شود.

مسائل

۱ـ دستگاه‌های زیر را به کمک هر دو روش گوس همراه با عنصر اصلی منتخب و روش گوس معمولی حل کنید. تمامی محاسبات را با ۵ رقم اعشار انجام دهید. مقادیر بدست آمده را با مقادیر واقعی مشخص شده مقایسه کنید.

(الف $A = \begin{pmatrix} ۰٫۱۵ & ۲٫۱۱ & ۳۰٫۷۵ \\ ۰٫۶۴ & ۱٫۲۱ & ۲٫۰۵ \\ ۳٫۲۱ & ۱٫۵۳ & ۱٫۰۴ \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} -۲۶٫۳۸ \\ ۱٫۰۱ \\ ۵٫۲۳ \end{pmatrix},$

$x = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ -۱ \end{pmatrix},$

(ب $A = \begin{pmatrix} ۰٫۱۵ & ۰٫۴۲ & ۱۰۰٫۷۱ \\ ۱٫۱۹ & ۰٫۵۵ & ۰٫۳۲ \\ ۱٫۰۰ & ۰٫۳۵ & ۳٫۰۰ \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} -۱۹۸٫۷۰ \\ ۲٫۲۹ \\ -۰٫۶۵ \end{pmatrix},$

$$x = \begin{pmatrix} ۲ \\ ۱ \\ -۲ \end{pmatrix},$$

۲ـ دستگاه زیر را به کمک (الف) روش گوس معمولی و (ب) روش گوس همراه با عنصر اصلی منتخب حل کنید. تمامی محاسبات را با چهار رقم اعشار انجام دهید.

$$\begin{aligned} x + ۵۹۲y &= ۴۳۷, \\ ۵۹۲x + ۴۳۰۸y &= ۲۲۵۱. \end{aligned}$$

برای دستگاه‌های زیر مقادیر مجهولات را با تعداد رقم اعشار مشخص شده m، با روش گوس همراه با عنصر اصلی منتخب بدست آورید.

$$۳.\ \ A = \begin{pmatrix} ۲ & ۶ & -۱ \\ ۵ & -۱ & ۲ \\ -۳ & -۴ & ۱ \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} -۱۲ \\ ۲۹ \\ ۵ \end{pmatrix},\ m = ۴.$$

$$۴.\ \ A = \begin{pmatrix} ۲٫۱۰ & -۴٫۵۰ & -۲٫۰۰ \\ ۳٫۰۰ & ۲٫۵۰ & ۴٫۳۰ \\ -۶٫۰۰ & ۳٫۵۰ & ۲٫۵۰ \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} ۱۹٫۰۷ \\ ۳٫۲۱ \\ -۱۸٫۲۵ \end{pmatrix},\ m = ۳.$$

$$۵.\ \ A = \begin{pmatrix} ۲۱٫۵۴۷ & -۹۵٫۵۱۰ & -۹۶٫۱۲۱ \\ ۱۰٫۲۲۳ & -۹۱٫۰۶۵ & -۷٫۳۴۳ \\ ۵۱٫۲۱۸ & ۱۲٫۲۶۹ & ۸۶٫۴۵۷ \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} -۴۹٫۹۳۰ \\ -۱۲٫۴۶۵ \\ ۶۰٫۸۱۲ \end{pmatrix},\ m = ۴.$$

$$۶.\ \ A = \begin{pmatrix} ۳٫۲۴ & -۲٫۱۸ & ۵٫۰۹ & -۲٫۳۷ & ۱٫۲۱ \\ ۰٫۷۳ & ۳٫۸۵ & -۶٫۲۳ & ۴٫۸۰ & -۵٫۹۳ \\ ۲٫۸۸ & ۵٫۷۳ & -۷٫۰۲ & -۹٫۱۷ & ۳٫۵۸ \\ ۲٫۱۰ & ۳٫۰۲ & -۰٫۷۸ & ۳٫۸۵ & -۶٫۰۰ \\ ۱٫۲۰ & -۴٫۱۳ & ۶٫۴۸ & ۰٫۰۰ & -۳٫۲۴ \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} ۲۸٫۳۸ \\ -۳۶٫۰۰ \\ ۲۴٫۴۸ \\ -۱۶٫۲۳ \\ ۴٫۳۴ \end{pmatrix},$$

m=3.

$$۷.\ \ A = \begin{pmatrix} ۲٫۶ & -۴٫۵ & -۲٫۰ \\ ۳٫۰ & ۳٫۰ & ۴٫۳ \\ -۶٫۰ & ۳٫۵ & ۳٫۰ \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} ۱۹٫۰۷ \\ ۳٫۲۱ \\ -۱۸٫۲۵ \end{pmatrix},\ m = ۵.$$

$$۸.\ \ A = \begin{pmatrix} ۴٫۲۱ & ۲۲٫۴۲+\alpha & ۳٫۸۵ \\ ۲٫۳۱ & ۳۱٫۴۹ & ۱٫۵۲ \\ ۳٫۴۹ & ۴٫۸۵ & ۲۸٫۷۲_{\alpha} \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} ۳۰٫۲۴ \\ ۴۰٫۹۵-\beta \\ ۴۲٫۸۱ \end{pmatrix},\ m = ۵.$$

$$\alpha = ۰٫۲۵ \times k,\ k = ۰, ۱, \ldots, ۴,\ \ \beta = ۰٫۳۵ \times k,\ k = ۰, \ldots, ۵.$$

$$۹.\quad A = \begin{pmatrix} ۳٫۸۱ & ۰٫۵۲ & ۱٫۲۸ & ۰٫۷۵+\alpha \\ ۲٫۲۵ & ۱٫۳۲ & ۴٫۵۸+\alpha & ۰٫۴۹ \\ ۵٫۳۱ & ۶٫۲۸+\alpha & ۰٫۹۸ & ۱٫۰۴ \\ ۹٫۳۹+\alpha & ۲٫۴۵ & ۳٫۳۵ & ۲٫۲۸ \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} ۴٫۲۱ \\ ۶٫۴۷ \\ ۲٫۳۸ \\ ۱۰٫۴۸+\beta \end{pmatrix},\ m = ۵.$$

$$\alpha = ۰٫۵ \times k,\ k = ۰, ۱, \ldots, ۴,\quad \beta = ۰٫۵ \times k,\ k = ۰, \ldots, ۵.$$

۳ـ۵ـ روش چالستکی[۱]

یک دستگاه از معادلات خطی را که به صورت ماتریسی زیر نوشته شده است را در نظر بگیرید:

$$Ax = b,$$

که در آن $A = (a_{ij})$ یک ماتریس مربع است $(i,\ j) = ۱, ۲, \ldots, n$ و

$$x = \begin{pmatrix} x_۱ \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix} a_{۱,n+۱} \\ \ldots\ldots \\ a_{n,n+۱} \end{pmatrix}$$

بردارهای ستونی هستند.

ماتریس A را به صورت یک ضرب $A = BC$ نشان می‌دهیم که در آن

$$B = \begin{pmatrix} b_{۱۱} & ۰ & ۰ & \ldots & ۰ \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & ۰ & \ldots & ۰ \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n۱} & b_{n۲} & b_{n۳} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} ۱ & c_{۱۲} & \ldots & c_{۱n} \\ ۰ & ۱ & \ldots & c_{۲n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ ۰ & ۰ & \ldots & ۱ \end{pmatrix}.$$

سپس ضرایب b_{ij} و c_{ij} را با فرمول‌های زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned} & b_{i۱} = a_{i۱}, \\ & b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=۱}^{j-۱} b_{ik}c_{kj} \quad (i \geq j > ۱) \end{aligned}\right\} \qquad (۱۸\text{-}۳)$$

۱) Khaletsky

و

$$\left.\begin{array}{l} c_{1j} = \frac{a_{1j}}{b_{11}}, \\ c_{ij} = \frac{1}{b_{ii}}(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}c_{kj}) \quad (1 < i < j). \end{array}\right\} \tag{۱۹-۳}$$

که از آنجا بردار x را می‌توان از دنباله معادلات

$$B_y = b \quad , \quad C_x = y \tag{۲۰-۳}$$

بدست آورد.

چون ماتریس‌های B و C مثلثی هستند، دستگاه (۳-۲۰) به راحتی حل می‌شود، بدین‌صورت که:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a_{1,n+1}/b_{11}, \\ y_i = (a_{i,n+1} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}y_k)/b_{ii} \quad (i > 1) \end{array}\right\} \tag{۲۱-۳}$$

و

$$\left.\begin{array}{l} x_n = y_n, \\ x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} c_{ik}x_k \quad (i < n). \end{array}\right\} \tag{۲۲-۳}$$

از فرمول‌های (۳-۲۱) مشخص است که اعداد y_i با کمترین هزینه به همراه ضرایب C_{ij} قابل محاسبه‌اند. این روش به عنوان روش چالتسکی شناخته شده است. این روش از وارسی ساده‌ای مثل جمع استفاده می‌کند.

روش چالتسکی برای محاسبه ماشینی مناسب است چون در این روش عملیات «انباشت» در (۳-۱۸) و (۳-۱۹) را می‌توان بدون ضبط نتایج بینابینی انجام داد.

مثال ۳ـ۴ـ دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6, \\ -5x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= -12, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 &= 1, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 3. \end{aligned}$$

حل‌ـ نتایج محاسبات را در جدول ۳-۵ نوشته‌ایم که شامل دو قسمت است:

(۱) نیمه سمت چپ که چگونگی ضبط نتایج محاسبات را نشان می‌دهد.

(۲) نیمه سمت راست که در آن نتایج محاسبات با توجه به روش تشریح شده وارد شده‌اند.

این جدول به ترتیب زیر پر می‌شود:

(۱) ضرایب دستگاه، جملات ثابت و مجموع‌های وارسی را در بخش I جدول ۳-۵ وارد می‌کنیم.

جدول ۳-۵) روش چالتسکی

	x_1	x_2	x_3	x_4		$\sum$	x_1	x_2	x_3	x_4		$\sum$
I	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	۳	۱	-1	۲	۶	۱۱
	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	-5	۱	۳	-4	-12	-17
	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	۲	۰	۱	-1	۱	۳
	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	۱	-5	۳	-3	۳	-1
III					y_1	x_1					۲	۱
					y_2	x_2					$-0/75$	-1
					y_3	x_3					$-1/75$	۲
					y_4	x_4					۳	۳

(۲) عناصر ستون x_1 را از بخش I به بخش IIمنتقل می‌کنیم چون $b_{i1} = a_{i1}(i = 1, 2, 3, 4)$.

(۳) عناصر سطر اول بخش II را محاسبه می‌کنیم. بدین‌منظور تمامی عناصر سطر اول بخش I را بر عنصر $a_{11} = b_{11}$ تقسیم می‌کنیم (یعنی بر ۳). داریم:

$$c_{12} = \frac{1}{3} = 0/333333, \quad c_{13} = -\frac{1}{3} = -0/333333, \quad c_{14} = \frac{2}{3} = 0/666667,$$

$$c_{15} = \frac{6}{3} = 2, \quad c_{16} = \frac{11}{3} = 3/666667.$$

(۴) ستون x_2 از بخش II را از سطر دوم پر می‌کنیم. با استفاده از فرمول‌های (۳-۱۸)، b_{j2} را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
b_{22} &= a_{22} - b_{21}c_{21} = 1 - (-5 \times \tfrac{1}{3}) = \tfrac{8}{3} = 2/666667,\\
b_{32} &= a_{32} - b_{31}c_{12} = 0 - 2 \times \tfrac{1}{3} = -\tfrac{2}{3} = -0/666667,\\
b_{42} &= a_{42} - b_{41}c_{12} = -5 - 1 \times \tfrac{1}{3} = -\tfrac{16}{3} = -5/333333.
\end{aligned}$$

(۵) سطر دوم از بخش II را با بدست آوردن C_{3j} برای $j = 3, 4, 5, 6$ با استفاده از فرمول‌های (۳-۱۹) پر می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
c_{23} &= \tfrac{1}{b_{22}}(a_{23} - b_{21}c_{13}) = \tfrac{3}{8}(3 - 5 \times \tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{2} = 0/5,\\
c_{24} &= \tfrac{1}{b_{22}}(a_{24} - b_{21}c_{14}) = \tfrac{3}{8}(-4 - (-5) \times \tfrac{2}{3}) = -\tfrac{1}{4} = -0/25,\\
c_{25} &= \tfrac{1}{b_{22}}(a_{25} - b_{21}c_{15}) = \tfrac{3}{8}(-12 - (-5) \times 2) = -\tfrac{3}{4} = -0/75,\\
c_{26} &= \tfrac{1}{b_{22}}(a_{26} - b_{21}c_{16}) = \tfrac{3}{8}(-17 - (-5) \times \tfrac{11}{3}) = \tfrac{1}{2} = 0/5.
\end{aligned}$$

(۶) ستون x_3 را با محاسبه عناصر b_{33} و b_{43} توسط فرمول‌های (۳-۱۸)، پر می‌کنیم.

(۷) به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا بخش II کاملاً پر شود. در نتیجه یک شکل پلکانی در بخش II پدید خواهد آمد به صورت: ستون-سطر، ستون-سطر، ستون-سطر و ...

(۸) با استفاده از فرمول‌های (۳-۲۱) و (۳-۲۲) مقادیر y_i و x_i $(i = ۱, ۲, ۳, ۴)$ را بدست آورده و در بخش III وارد می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&y_۱ = a_{۱۵}/b_{۱۱} = ۶/۳ = ۲,\\
&y_۲ = (a_{۲۵} - b_{۲۱}y_۱)/b_{۲۲} = (-۱۲ + ۵ \times ۲)/۲{,}۶۶۶۶۶۷ = -۰{,}۷۵,\\
&y_۳ = (a_{۳۵} - b_{۳۱}y_۱ - b_{۳۲}y_۲)/b_{۳۳} = (۱ - ۲ \times ۲ - ۰{,}۶۶۶۶۶۷ \times ۰{,}۷۵)/۲ = -۱{,}۷۵,\\
&y_۴ = (a_{۴۵} - b_{۴۱}y_۱ - b_{۴۲}y_۲ - b_{۴۳}y_۳)/b_{۴۴} =\\
&\qquad = (۳ - ۲ - ۵{,}۳۳۳۳۳۳ \times ۰{,}۷۵ + ۶ \times ۱{,}۷۵) = ۳,\\
&x_۴ = y_۴ = ۳,\\
&x_۳ = y_۳ - c_{۳۴}x_۴ = -۱{,}۷۵ + ۱{,}۲۵ \times ۳ = ۲,\\
&x_۲ = y_۲ - c_{۲۳}x_۳ - c_{۲۴}x_۴ = -۰{,}۷۵ - ۰{,}۵ \times ۲ + ۰{,}۲۵ \times ۳ = -۱,\\
&x_۱ = y_۱ - c_{۱۲}x_۲ - c_{۱۳}x_۳ - c_{۱۴}x_۴ =\\
&\qquad = ۲ + ۰{,}۳۳۳۳۳۳ + ۰{,}۳۳۳۳۳۳ \times ۲ - ۰{,}۶۶۶۶۶۷ \times ۳ = ۱.
\end{aligned}$$

(۹) وارسی بینابینی به کمک ستون $\sum$ انجام می‌شود، ستونی که همان عملیات انجام شده روی ستون جملات ثابت روی آن هم انجام شده است.

مسائل

دستگاه‌های زیر را به روش چالتسکی حل کنید:

$$۱.\quad A = \begin{pmatrix} ۲{,}۵ & -۳{,}۰ & ۴{,}۶ \\ -۳{,}۵ & ۲{,}۶ & ۱{,}۵ \\ -۶{,}۵ & -۳{,}۵ & ۷{,}۳ \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} -۱{,}۰۵ \\ -۱۴{,}۴۶ \\ -۱۷{,}۷۳۵ \end{pmatrix}.$$

$$۲.\quad A = \begin{pmatrix} ۲{,}۰ & -۴{,}۰ & -۳{,}۲۵ & ۱{,}۰ \\ ۳{,}۰ & -۳{,}۰ & -۴{,}۳ & ۸{,}۰ \\ ۱{,}۰ & -۵{,}۰ & ۳{,}۳ & -۲۰{,}۰ \\ ۲{,}۵ & -۴{,}۰ & ۲{,}۰ & -۳{,}۰ \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} ۴{,}۸۴ \\ ۸{,}۸۹ \\ -۱۴{,}۰۱ \\ -۲۰{,}۲۹ \end{pmatrix}.$$

$$۳.\ \ A = \begin{pmatrix} ۲ & -۱ & ۴ & -۳ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۲ & ۱ & ۳ \\ ۴ & ۲ & ۳ & ۳ & -۱ \\ -۳ & ۱ & ۳ & ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ & -۱ & ۴ & ۴ \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} ۱۱ \\ ۱۴ \\ ۴ \\ ۱۶ \\ ۱۸ \end{pmatrix}.$$

۳-۶- روش ریشه دوم

روش ریشه دوم برای حل یک دستگاه خطی به شکل

$$Ax = b \qquad (۲۳\text{-}۳)$$

بکارگرفته می‌شود، که در آن $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس متقارن [1] است یعنی

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = ۱, ۲, \ldots, n).$$

این روش در مقایسه با روشهای قبلی که برای حل دستگاه‌ها به شکل عمومی مورد استفاده قرار می‌گرفتند، بسیار بصرفه‌تر و مناسبتر است.

درکاربردهای عملی روش ریشه دوم، رویه پیشروی برای پیدا کردن t_{ij} و y_i $(i = ۱, ۲, \ldots, n)$ و پس از آن رویه پسروی برای پیدا کردن مجهولات $x_i (i = n, n-۱, \ldots, ۱)$ انجام می‌شود.

رویه پیشروی:

اجازه بدهید ماتریس A را به شکل حاصلضرب دو ماتریس مثلثی ترانهاده [2] نشان دهیم:

$$A = T'T \qquad (۲۴\text{-}۳)$$

که در آن

$$T = \begin{pmatrix} t_{۱۱} & t_{۱۲} & \ldots & t_{۱n} \\ ۰ & t_{۲۲} & \ldots & t_{۲n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ ۰ & ۰ & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}, \quad T' = \begin{pmatrix} t_{۱۱} & ۰ & \ldots & ۰ \\ t_{۱۲} & t_{۲۲} & \ldots & ۰ \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{۱n} & t_{۲n} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

با ضرب دو ماتریس T' و T و برابر قرار دادن ماتریس حاصلضرب با ماتریس A، فرمول‌های زیر را برای

1) symmetric 2) transposed triangular matrix

محاسبه t_{ij} بدست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} t_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad t_{1j} = \frac{a_{1j}}{t_{11}} \quad (j > 1), \\ t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2} \quad (1 < i \leq n), \\ t_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} t_{kj}}{t_{ii}} \quad (i < j), \\ t_{ij} = 0 \ at \ i > j. \end{array}\right\} \qquad (۲۵\text{-}۳)$$

با پیدا کردن ماتریس T، دستگاه (۳-۲۳) را با دو دستگاه معادل که ماتریسهای مثلثی دارند جایگزین می‌کنیم:

$$T'y = b \ , \ Tx = t \qquad (۲۶\text{-}۳)$$

رویه پسروی:

دستگاه‌های (۳-۲۶) را بسط می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} t_{11}y_1 = b_1, \\ t_{12}y_1 + t_{22}y_2 = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_{1n}y_1 + t_{2n}y_2 + \cdots + t_{nn}y_n = b_n, \end{array}\right\} \qquad (۲۷\text{-}۳)$$

$$\left.\begin{array}{r} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \cdots + t_{nn}x_n = y_1, \\ t_{22}x_2 + \cdots + t_{2n}x_n = y_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_{nn}x_n = y_n. \end{array}\right\} \qquad (۲۸\text{-}۳)$$

که از آنجا به ترتیب بدست می‌آوریم:

$$y_1 = \frac{b_1}{t_{11}}, \quad y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}y_k}{t_{ii}} \quad (i > 1), \qquad (۲۹\text{-}۳)$$

$$x_n = \frac{y_n}{t_{nn}}, \quad x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^{n} t_{ik}x_k}{t_{ii}} \quad (i < n). \qquad (۳۰\text{-}۳)$$

محاسبات همراه با یک رویه وارسی ساده توسط جمع انجام می‌شود که در آن تمام ضرایب سطر مربوطه در تشکیل مجموع شرکت دارند (مثال ۳ـ۱ را ببینید).

توجه داشته باشید که با a_{ij} حقیقی ما می‌توانیم t_{ij} موهومی بدست آوریم. در این مورد نیز به همان صورت قابل اجرا است (مثال ۳ـ۲ را ببینید).

روش ریشه دوم در مقایسه با روش‌های تشریح شده قبلی در زمان بسیار صرفه جویی می‌کند چون اولاً این روش تعداد ضرب‌ها و تقسیم‌ها را کاهش می‌دهد (حدود نصف برای n بزرگ) ([۲] را ببینید) و ثانیاً این روش اجازه انباشت شدن مجموع حاصلضرب‌ها بدون نیاز به ضبط نتایج بینابینی را می‌دهد.

مثال ۳ـ۵ـ با استفاده از روش ریشه دوم دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\left.\begin{array}{l} ۱/۰۰x_۱+۰/۴۲x_۲+۰/۵۴x_۳+۰/۶۶x_۴=۰/۳, \\ ۰/۴۲x_۱+۱/۰۰x_۲+۰/۳۲x_۳+۰/۴۴x_۴=۰/۵, \\ ۰/۵۴x_۱+۰/۳۲x_۲+۱/۰۰x_۳+۰/۲۲x_۴=۰/۷, \\ ۰/۶۶x_۱+۰/۴۴x_۲+۰/۲۲x_۳+۱/۰۰x_۴=۰/۹. \end{array}\right\} \qquad (۳۱\text{-}۳)$$

حل‌ـ رویه پیشروی:

(۱) ضرایب دستگاه را در بخش I از جدول ۳-۶ وارد می‌کنیم.

(۲) ضرایب هر سطر را جمع زده و نتیجه را در ستون آخر به عنوان عناصر $S_۱$، $S_۲$، $S_۳$ و $S_۴$ وارد می‌کنیم.

(۳) t_{ij}ها را پیدا می‌کنیم. برای این منظور به کمک فرمول‌های عمومی (۳-۲۵) فرمول‌های محاسبه t_{ij} را برای $n=۴$ می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} t_{۱۱}=\sqrt{a_{۱۱}}, \quad t_{۱۲}\frac{a_{۱۲}}{\sqrt{a_{۱۱}}}, \quad t_{۱۳}=\frac{a_{۱۳}}{\sqrt{a_{۱۱}}}, \quad t_{۱۴}=\frac{a_{۱۴}}{\sqrt{a_{۱۱}}}, \\ t_{۲۲}=\sqrt{a_{۲۲}-t_{۱۲}^۲}, \quad t_{۲۳}=\frac{a_{۲۳}-t_{۱۲}t_{۱۳}}{t_{۲۲}}, \quad t_{۲۴}=\frac{a_{۲۴}-t_{۱۲}t_{۱۴}}{t_{۲۲}}, \\ t_{۳۳}=\sqrt{a_{۳۳}-t_{۱۳}^۲-t_{۲۳}^۲}, \quad t_{۳۴}=\frac{a_{۳۴}-t_{۱۳}t_{۱۴}-t_{۲۳}t_{۲۴}}{t_{۳۳}}, \\ t_{۴۴}=\sqrt{a_{۴۴}-t_{۱۴}^۲-t_{۲۴}^۲-t_{۳۴}^۲}. \end{array}\right\} \qquad (۳۲\text{-}۳)$$

با استفاده از این فرمول‌ها، به ترتیب بدست می‌آوریم:

$$t_{۱۱}=۱/۰۰, \quad t_{۱۲}=۰/۴۲, \quad t_{۱۳}=۰/۵۴, \quad t_{۱۴}=۰/۶۶,$$

$$t_{۲۲}=\sqrt{۱/۰۰-۰/۴۲^۲}=\sqrt{۱/۴۲\times ۰/۵۸}=۰/۹۰۷۵۲,$$

$$t_{۲۳}\frac{۰/۳۲-۰/۴۲\times ۰/۵۴}{۰/۹۰۷۵۲}=۰/۱۰۲۷۰, \quad t_{۲۴}=\frac{۰/۴۴-۰/۴۲\times ۰/۶۶}{۰/۹۰۷۵۲}=۰/۱۷۹۳۹.$$

و همینطور الی آخر.

با توجه به چگونگی ساختار قسمت چپ جدول ۳-۶ نتایج را در بخش II وارد می‌کنیم.

جدول ۳-۶) روش ریشه دوم برای دستگاه (۳-۳۱)

I	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	b_1	S_1	۱٫۰۰	۰٫۴۲	۰٫۵۴	۰٫۶۶	۰٫۳۰	۲٫۹۲
		a_{22}	a_{23}	a_{24}	b_2	S_2	۰٫۴۲	۱٫۰۰	۰٫۳۲	۰٫۴۴	۰٫۵۰	۲٫۶۸
			a_{33}	a_{34}	b_3	S_3	۰٫۵۴	۰٫۳۲	۱٫۰۰	۰٫۲۲	۰٫۷۰	۲٫۷۸
				a_{44}	b_4	S_4	۰٫۶۶	۰٫۴۴	۰٫۲۲	۱٫۰۰	۰٫۹۰	۳٫۲۲
II	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}	y_1	σ_1	۱٫۰۰	۰٫۴۲	۰٫۵۴	۰٫۶۶	۰٫۳۰	۲٫۹۲
		t_{22}	t_{23}	t_{24}	y_2	σ_2		۰٫۹۰۷۵۲	۰٫۱۰۲۷۰	۰٫۱۷۹۳۹	۰٫۴۱۲۱۱	۱٫۶۰۱۷۳
			t_{33}	t_{34}	y_3	σ_3			۰٫۸۳۵۳۷	−۰٫۱۸۵۳۳	۰٫۵۹۳۳۶	۱٫۲۴۳۴۰
				t_{44}	y_4	σ_4				۰٫۷۰۵۶۰	۱٫۰۴۵۹۷	۱٫۷۵۱۵۷
III	x_1	x_2	x_3	x_4			−۱٫۲۵۷۷۸	۰٫۰۴۳۴۸	۱٫۰۳۹۱۷	۱٫۴۸۲۳۸		
	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$			−۰٫۲۵۷۷۹	۱٫۰۴۳۴۹	۲٫۰۳۹۱۷	۲٫۴۸۲۳۸		

(۴) عناصر σ_1، σ_2،σ_3 وσ_4 را به کمک فرمول‌های مشابه با فرمول‌های (۳-۳۲) محاسبه می‌کنیم.

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{t_{11}} = \frac{2.92}{1.00} = 2.92, \quad \sigma_1 = \frac{S_2 - a_{12}\sigma_1}{t_{22}} = \frac{2.68 - 0.42 \times 2.92}{0.90752} = 1.60173,$$
$$\sigma_3 = \frac{S_3 - a_{13}\sigma_1 - a_{23}\sigma_2}{t_{33}} = \frac{2.78 - 0.54 \times 2.92 - 0.32 \times 1.60173}{0.83537} = 1.24340,$$
$$\sigma_4 = \frac{S_4 - a_{14}\sigma_1 - a_{24}\sigma_2 - a_{34}\sigma_3}{t_{44}} = 1.75157.$$

رویه پسروی:

(۵) y_iها را بیابید ($i = 1, 2, 3, 4$). به کمک فرمول (۳-۲۹) به ترتیب بدست می‌آوریم:

$$y_1 = \frac{b_1}{t_{11}} = \frac{0.3}{1.00} = 0.30, \quad y_2 = \frac{b_2 - t_{12}y_1}{t_{22}} = \frac{0.5 - 0.42 \times 0.3}{0.90752} = 0.41211,$$
$$y_3 = \frac{b_3 - t_{13}y_1 - t_{23}y_2}{t_{33}} = \frac{0.7 - 0.54 \times 0.3 - 0.10270 \times 0.41211}{0.83537} = 0.59336,$$
$$y_4 = \frac{b_4 - t_{14}y_1 - t_{24}y_2 - t_{34}y_3}{t_{44}} = 1.04597.$$

مقادیر y_i را در بخش II وارد می‌کنیم.

(۶) وارسی: مجموع عناصر یک سطر در پنج ستون اول می‌بایستی با عنصر مربوطه در ستون آخر برابر باشد. این مجموع‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$t_{11} + t_{12} + t_{13} + t_{14} + y_1 = 2.92,$$
$$t_{22} + t_{23} + t_{24} + y_2 = 1.60173,$$
$$t_{33} + t_{34} + y_3 = 1.24340,$$
$$t_{44} + y_4 = 1.75157.$$

پس نتایج با مقادیر عناصر ستون آخر مطابقت دارند. حالا ما می‌توانیم به سراغ محاسبات مرحله بعدی برویم.

(۷) x_iها $(i = 1, 2, 3, 4)$ را پیدا می‌کنیم. با توجه به فرمول‌های (۳-۳۰) ما برای $n = 4$ بدست می‌آوریم:

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= \tfrac{y_4}{t_{44}} = \tfrac{1,04597}{0,70560} = 1,48238, \\ x_3 &= \tfrac{y_3 - t_{34}x_4}{t_{33}} 1,03917, \\ x_2 &= \tfrac{y_2 - t_{23}x_3 - t_{24}x_4}{t_{22}} = 0,04348, \\ x_1 &= \tfrac{y_1 - t_{12}x_2 - t_{13}x_3 - t_{14}x_4}{t_{11}} = -1,25778. \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}33)$$

نتایج را در بخش III وارد می‌کنیم.

(۸) وارسی: اعداد x_i به کمک فرمول (۳-۳۳) و با تعویض عناصر y_i با σ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ پیدا می‌شوند. اگر تمام محاسبات درست انجام شده باشند می‌بایستی $\bar{x}_i = x_i + 1$ باشد.

مقایسه نشان می‌دهد که مقادیر $\bar{x}_i$ و $x_i + 1$ برای $i = 3, 4$ مطابقند و برای $i = 1, 2$ تنها به اندازه یک واحد در رقم پنجم اختلاف دارند که قابل قبول است.

مثال ۳ـ۶ـ با استفاده از روش ریشه دوم دستگاه معالات زیر را حل کنید:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad - 2x_5 &= 0,5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 - 3x_5 &= 5,4, \\ -2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 5,0, \\ x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 &= 7,5, \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 3,3. \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}34)$$

حل ـ ضرایب a_{ij} و جملات ثابت b_i در دستگاه داده شده را در بخش I و ستون آخر جدول ۳-۷ وارد می‌کنیم. با استفاده از فرمول‌های (۳-۲۵) و (۳-۲۹) سطر به سطر و متوالیاً ضرایب t_{ij} را محاسبه و جملات ثابت جدید y_i را محاسبه می‌کنیم و بخش II جدول را پر می‌کنیم. بعضی از مقادیر t_{ij} موهومی می‌شوند، برای مثال:

$$\begin{aligned} t_{22} &= \sqrt{a_{22} - t_{12}^2} = \sqrt{4 - 3^2} = i\sqrt{5} = 2,2361i, \\ t_{23} &= \tfrac{a_{23} - t_{12}t_{13}}{t_{22}} = \tfrac{-5 - 3(-2)}{2,2361i} = -0,4472i. \end{aligned}$$

به منظور وارسی، ستون آخر را پر می‌کنیم. با استفاده از فرمول (۳-۳۰) مقادیر مجهولات را پیدا می‌کنیم. برای مثال:

$$\begin{aligned} x_3 = \tfrac{y_3 - t_{35}x_5 - t_{34}x_4}{t_{33}} &= \\ &= \tfrac{-7,5803i - 1,5652i \times 0,1998 - 2,0125i \times (-0,8996)}{0,8944i} = -6,8011. \end{aligned}$$

مقادیر وارسی کننده $\bar{x}_i$ از دستگاه (۳-۲۸) با تعویض y_i با σ_i بدست می‌آیند. مقادیر x_i و $\bar{x}_i$ را در بخش III وارد می‌کنیم، اگر محاسبات درست باشند مقادیر $\bar{x}_i$ و $x_i + ۱$ می‌بایستی حداکثر فقط در آخرین رقم متفاوت باشند. مقایسه نشان می‌دهد که این شرط برقرار است.

جدول ۳-۷) روش ریشه دوم برای دستگاه (۳-۳۴)

I	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	b_1	S_1	۱	۳	−۲	۰	−۲	۰٫۵	۰٫۵
		a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	b_2	S_2	۳	۴	−۵	۱	−۳	۵٫۴	۵٫۴
			a_{33}	a_{34}	a_{35}	b_3	S_3	−۲	−۵	۳	−۲	۲	۵٫۰	۱٫۰
				a_{44}	a_{45}	b_4	S_4	۰	۱	−۲	۵	۳	۷٫۵۴	۱۴٫۵
					a_{55}	b_5	S_5	−۲	−۳	۲	۳	۴	۳٫۳	۷٫۳
II	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}	t_{15}	y_1	σ_1	۱	۳	−۲	۰	−۲	۰٫۵	۰٫۵
		t_{22}	t_{23}	t_{24}	t_{25}	y_2	σ_2		۲٫۲۳۶۱i	−۰٫۴۴۷۲i	−۰٫۴۴۷۲i	−۱٫۳۴۱۶i	−۱٫۷۴۷۱i	−۱٫۷۴۷۱i
			t_{33}	t_{34}	t_{35}	y_3	σ_3			۰٫۸۹۴۴i	۲٫۰۱۲۵i	۱٫۵۶۵۳i	−۷٫۵۸۰۳i	−۳٫۱۰۸۱i
				t_{44}	t_{45}	y_4	σ_4				۳٫۰۴۱۴	۲٫۲۱۹۴	−۲٫۲۹۲۸	۲٫۹۶۷۹
					t_{55}	y_5	σ_5					۰٫۸۲۲۱i	۰٫۱۶۴۳i	۰٫۹۸۵۹i
III	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			−۶٫۰۹۷۸	−۲٫۲۰۱۶	−۶٫۸۰۱۱	−۰٫۸۹۹۶	۰٫۱۹۹۸		
	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_5$			−۵٫۰۹۷۳	−۱٫۲۰۱۷	−۵٫۸۰۰۴	۰٫۱۰۰۷	۱٫۱۹۹۸		

مسائل

با استفاده از روش ریشه دوم دستگاه‌های معادلات زیر را حل کنید. محاسبات می‌بایستی با ۵ رقم انجام شوند.

$$۱.\quad A = \begin{pmatrix} ۳٫۱ & ۱٫۵ & ۱٫۰ \\ ۱٫۵ & ۲٫۵ & ۰٫۵ \\ ۱٫۰ & ۰٫۵ & ۴٫۲ \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} ۱۰٫۸۳ \\ ۹٫۲۰ \\ ۱۷٫۱۰ \end{pmatrix}.$$

$$۲.\quad A = \begin{pmatrix} ۳٫۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۳٫۷ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۴٫۲ \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} ۴ \\ ۴٫۵ \\ ۵ \end{pmatrix}.$$

$$۳.\quad A = \begin{pmatrix} ۲٫۱۲ & ۰٫۴۲ & ۱٫۳۴ & ۰٫۸۸ \\ ۰٫۴۲ & ۳٫۹۵ & ۱٫۸۷ & ۰٫۴۳ \\ ۱٫۳۴ & ۱٫۸۷ & ۲٫۹۸ & ۰٫۴۶ \\ ۰٫۸۸ & ۰٫۴۳ & ۰٫۴۶ & ۴٫۴۴ \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} ۱۱٫۱۷۲ \\ ۰٫۱۱۵ \\ ۹٫۰۰۹ \\ ۹٫۳۴۹ \end{pmatrix}.$$

$$۴.\quad A=\begin{pmatrix} ۵/۵ & ۷ & ۶ & ۵/۵ \\ ۷ & ۱۰/۵ & ۸ & ۷ \\ ۶ & ۸ & ۱۰/۵ & ۹ \\ ۵/۵ & ۷ & ۹ & ۱۰/۵ \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} ۲۳ \\ ۳۲ \\ ۳۳ \\ ۳۱ \end{pmatrix}.$$

$$۵.\quad A=\begin{pmatrix} ۵/۱۸+\alpha & ۱/۱۲ & ۰/۹۵ & ۱/۳۲ & ۰/۸۳ \\ ۱/۱۲ & ۴/۲۸-\alpha & ۲/۱۲ & ۰/۵۷ & ۰/۹۱ \\ ۰/۹۵ & ۲/۱۲ & ۶/۱۳+\alpha & ۱/۲۹ & ۱/۵۷ \\ ۱/۳۲ & ۰/۵۷ & ۱/۲۹ & ۴/۵۷-\alpha & ۱/۲۵ \\ ۰/۸۳ & ۰/۹۱ & ۱/۵۷ & ۱/۲۵ & ۵/۲۱+\alpha \end{pmatrix},$$

$$b=\begin{pmatrix} ۶/۱۹+\beta \\ ۳/۲۱ \\ ۴/۲۸-\beta \\ ۶/۲۵ \\ ۴/۹۵+\beta \end{pmatrix},\quad \begin{array}{l} \alpha=۰/۲۵\times k,\quad k=۰,۱,\dots,۴, \\ \beta=۰/۳۵\times k,\quad k=۰,۱,۲,\dots,۵. \end{array}$$

۳ـ۷ـ محاسبه دترمینان

کاربرد روش گوس. اثبات شده است ([۲]، [۱۲] و [۵۴] را ببینید) که دترمینان ماتریس A برابر با حاصلضرب عناصر اصلی مربوط به روش گوس است. یعنی

$$\Delta=\det A=a_{۱۱}a_{۲۲}^{(۱)}\dots a_{nm}^{(n-۱)} \qquad (۳۵\text{-}۳)$$

در نتیجه برای محاسبه دترمینان $\det A$ در ابتدا ما نیاز به محاسباتی برای انجام رویه پیشروی گوس برای دستگاه $Ax=۰$ داریم و پس حاصلضرب عناصر اصلی را پیدا می‌کنیم.

بدین منظور ما از روشی مشابه با روش محاسباتی مورد استفاده برای حل دستگاه معادلات خطی استفاده می‌کنیم (در اینجا ستون جملات ثابت اضافی و زائد است). روابط وارسی نیز دست نخورده باقی خواهند ماند.

مثال ۳ـ۷ـ دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$\Delta = \begin{vmatrix} ۲/۰ & ۱/۰ & -۰/۱ & ۱/۰ \\ ۰/۴ & ۰/۵ & ۴/۰ & -۸/۵ \\ ۰/۳ & -۱/۰ & ۱/۰ & ۵/۲ \\ ۱/۰ & ۰/۲ & ۲/۵ & -۱/۰ \end{vmatrix}$$

حلـ دترمینان داده شده همان دترمینان دستگاه نشان داده شده در مثال ۳ـ۱ است. با استفاده از این مثال ما حاصلضرب عناصر اصلی را یافته و مقدار دترمینان مورد نظر را بدست می‌آوریم:

$$\Delta = ۲/۰ \times ۰/۳۰ \times ۱۶/۴۲۵ \times (-۱/۷۲۲۹۸) = -۱۶/۹۷۹۹۶$$

مثال ۳ـ۸ـ دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$\Delta = \begin{vmatrix} ۱/۱۱۶۱ & ۰/۱۲۵۴ & ۰/۱۳۹۷ & ۰/۱۴۹۰ \\ ۰/۱۵۸۲ & ۱/۱۶۷۵ & ۰/۱۷۶۸ & ۰/۱۸۷۱ \\ ۰/۱۹۶۸ & ۰/۲۰۷۱ & ۱/۲۱۶۸ & ۰/۲۲۷۱ \\ ۰/۲۳۶۸ & ۰/۲۴۷۱ & ۰/۲۵۶۸ & ۱/۲۶۷۱ \end{vmatrix}$$

حلـ دترمینان داده شده همان دترمینان دستگاه حل شده در مثال ۳ـ۳ است، که به کمک روش گوس با عنصر اصلی منتخب حل شده است. با تشکیل حاصلضرب عناصر اصلی، مقدار دترمینان مورد نظر را بدست می‌آوریم:

$$\Delta = a_{۴۴} \times a_{۳۳}^{(۱)} \times a_{۲۲}^{(۲)} \times a_{۱۱}^{(۳)} = ۱/۲۶۷۱۰ \times ۱/۱۷۰۷۷ \times ۱/۱۱۱۷۰ \times ۱/۰۶۶۱۶ = ۱/۷۵۸۲۹$$

مثال ۳ـ۹ـ دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$\Delta = \begin{vmatrix} ۲/۸ & ۲/۱ & -۱/۳ & ۰/۳ \\ -۱/۴ & ۴/۵ & -۷/۷ & ۱/۳ \\ ۰/۶ & ۲/۱ & -۵/۸ & ۲/۴ \\ ۳/۵ & -۶/۵ & ۳/۲ & -۷/۹ \end{vmatrix}$$

حل- اجازه بدهید از روش فشرده گوس استفاده کنیم. عناصر دترمینان را در بخش I جدول ۳-۸ وارد می‌کنیم و تمامی محاسبات لازم برای انجام روش فشرده گوس را انجام می‌دهیم. نتایج این محاسبات در بخش‌های II، III و IV در جدول ۳-۸ به همراه عناصر اصلی (که زیرشان خط کشیده‌ایم) آمده‌اند. ستون $\sum$ جهت وارسی محاسبات مانند حل دستگاه معادلات مورد استفاده قرار می‌گیرند.
با ضرب عناصر اصلی هر بخش در یکدیگر داریم:

$$\Delta = ۲٫۸ \times ۵٫۵۰۰ \times (-۳٫۰۳۹۰) \times (-۱۱٫۴۷۲۱) = ۵۴۱٫۷۸$$

کاربرد روش ریشه دوم. اگر A یک ماتریس متقارن باشد استفاده از روش ریشه دوم برای محاسبه دترمینان آن، بسیار مناسب است.
اجازه بدهید ماتریس A را به شکل حاصلضرب دو ماتریس مثلثی دوبدو ترانهاده نشان دهیم:

$$A = T'T$$

جدول ۳-۸) محاسبه دترمینال به کمک روش گوس

	$a_{i۱}$	$a_{i۲}$	$a_{i۳}$	$a_{i۴}$	$\sum$
I	۲٫۸ −۱٫۴ ۰٫۶ ۳٫۵	۲٫۱ ۴٫۵ ۲٫۱ −۶٫۵	−۱٫۳ −۷٫۷ −۵٫۸ ۳٫۲	۰٫۳ ۱٫۳ ۲٫۴ −۷٫۹	۳٫۹ −۳٫۳ −۰٫۷ −۷٫۷
	I	۰٫۷۵۰۰	−۰٫۴۶۴۳	۰٫۱۰۷۱	۱٫۳۹۲۸
II	۱٫۶۵۰۰	۵٫۵۰۰ −۵٫۵۲۱۴ −۹٫۱۲۵۰۰	−۸٫۳۵۰۰ ۲٫۳۳۵۷ ۴٫۸۲۵۰	۱٫۴۴۹۹ −۸٫۲۷۴۸	−۱٫۳۵۰۱ −۱٫۵۳۵۷ −۱۲٫۵۷۴۸
		I	−۱٫۵۰۴۵	۰٫۲۶۱۲	−۰٫۲۴۳۳
III			−۳٫۰۳۹۰ −۸٫۹۰۳۶	۱٫۹۰۴۷ −۵٫۸۹۱۳	−۱٫۱۳۴۳ −۱۴٫۷۹۴۹
			I	−۰٫۶۲۶۸	۰٫۳۷۳۲
				−۱۱٫۴۷۲۱	−۱۰٫۴۷۲۱

که درآن

$$T = \begin{pmatrix} t_{۱۱} & t_{۱۲} & \dots & t_{۱n} \\ ۰ & t_{۲۲} & \dots & t_{۲n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ۰ & ۰ & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

در نتیجه

$$\det A = \det T' \det T = (\det T)^{۲} = (t_{۱۱}t_{۲۲}\dots t_{nn})^{۲} \qquad (۳\text{-}۳۶)$$

اعداد $t_{ii}(i = ۱, ۲, \dots, n)$ با استفاده از فرمول (۳-۲۵) پیدا می‌شوند.

مثال ۳ـ۱۰ـ دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$\Delta = \begin{vmatrix} ۱٫۰۰ & ۰٫۴۲ & ۰٫۵۴ & ۰٫۶۶ \\ ۰٫۴۲ & ۱٫۰۰ & ۰٫۳۲ & ۰٫۴۴ \\ ۰٫۵۴ & ۰٫۳۲ & ۱٫۰۰ & ۰٫۲۲ \\ ۰٫۶۶ & ۰٫۴۴ & ۰٫۲۲ & ۱٫۰۰ \end{vmatrix}$$

حل‌ـ در مثال ۳ـ۵ دیده می‌شود که دستگاه داده شده دارای دترمینانی مشابه با دترمینان مورد نظر ماست. آن دستگاه با روش ریشه دوم حل شده و ماتریس مثلثی مربوطه تشکیل شده بود. با کسب عناصر قطری این ماتریس $t_{ii}(i = ۱, ۲, ۳, ۴)$ و به کمک فرمول (۳-۳۶) بدست می‌آوریم (جدول ۳-۶ را ببینید).

$$\Delta = (۱٫۰۰ \times ۰٫۹۰۷۵۲ \times ۰٫۸۳۵۳۷ \times ۰٫۷۰۵۶۰)^{۲} = (۰٫۵۳۴۹۲)^{۲} = ۰٫۲۸۶۱۴.$$

مسائل

با استفاده از روش‌های گوس و یا ریشه دوم، دترمینان‌های زیر را محاسبه کنید:

$$۱.\quad \Delta = \begin{vmatrix} ۸٫۶۴-\alpha & ۱٫۷۱ & ۵٫۴۲ \\ -۶٫۳۹ & ۴٫۲۵ & ۱٫۸۴+\alpha \\ ۴٫۲۱ & ۷٫۹۲-\alpha & -۳٫۴۱ \end{vmatrix}, \quad \alpha = ۰٫۵ \times n, \quad n = ۰, ۱, ۲, \dots, ۱۰.$$

$$۲.\quad \Delta = \begin{vmatrix} ۳٫۸۱ & ۰٫۲۵ & ۱٫۲۸ & ۰٫۷۵+\alpha \\ ۲٫۲۵ & ۱٫۳۲ & ۴٫۵۸+\alpha & ۰٫۴۹ \\ ۵٫۳۱ & ۶٫۲۸+\alpha & ۰٫۹۸ & ۱٫۰۴ \\ ۹٫۳۹+\alpha & ۲٫۴۵ & ۳٫۳۵ & ۲٫۲۸ \end{vmatrix}, \quad \alpha = ۰٫۵.n, \quad n = ۰, ۱, ۲, \dots, ۱۰.$$

$$۳.\quad \Delta = \begin{vmatrix} ۵٫۱۸+\alpha & ۱٫۱۲ & ۰٫۹۵ & ۱٫۳۲ & ۰٫۸۳ \\ ۱٫۱۲ & ۴٫۲۸-\alpha & ۲٫۱۲ & ۰٫۵۷ & ۰٫۹۱ \\ ۰٫۹۵ & ۲٫۱۲ & ۶٫۱۳+\alpha & ۱٫۲۹ & ۱٫۵۷ \\ ۱٫۳۲ & ۰٫۵۷ & ۱٫۲۹ & ۴٫۵۷-\alpha & ۱٫۲۵ \\ ۰٫۸۳ & ۰٫۹۱ & ۱٫۵۷ & ۱٫۲۵ & ۵٫۲۱+\alpha \end{vmatrix},$$

$$\alpha = 0{,}25 \times k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 10.$$

۸ـ۳ـ محاسبه عناصر ماتریس معکوس به کمک روش گوس

ماتریس معکوس یک ماتریس مفروض A ماتریسی مانند A^{-1} است که

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

که در آن E یک ماتریس واحد است:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

یک ماتریس مربعی A تکین خوانده می‌شود اگر دترمینان A صفر نباشد. هر ماتریس تکین یک معکوس دارد.

فرض کنید یک ماتریس تکین داریم:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

برای محاسبه عناصر ماتریس معکوس آن

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

ما از رابطه $AA^{-1} = E$ استفاده می‌کنیم.

با ضرب ماتریس‌های A و A^{-1} و برابر قرار دادن هر عنصر از ماتریس حاصل با عنصر متناظر در ماتریس E، یک دستگاه n^2 معادله n^2 مجهولی با مجهولات x_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ را خواهیم داشت. بنابراین

با ضرب جمله به جمله هر سطر از ماتریس A در ستون اول ماتریس A^{-1} و برابر قرار دادن آن با عنصر متناظر در ستون اول از ماتریس E، دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_{11}+a_{12}x_{12}+a_{13}x_{13}+\cdots+a_{1n}x_{1n}=1, \\ a_{21}x_{21}+a_{22}x_{22}+a_{23}x_{23}+\cdots+a_{2n}x_{2n}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_{11}+a_{n2}x_{12}+a_{n3}x_{13}+\cdots+a_{nn}x_{n1}=0, \end{array}\right\} \qquad (۳۷\text{-}۳)$$

بطور مشابه با ضرب جمله به جمله سطرهای ماتریس A در ستون دوم از ماتریس A^{-1} ، دستگاه دیگری تشکیل می‌شود:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_{12}+a_{12}x_{22}+a_{13}x_{32}+\cdots+a_{1n}x_{n2}=0, \\ a_{21}x_{12}+a_{22}x_{22}+a_{23}x_{32}+\cdots+a_{2n}x_{n2}=1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_{12}+a_{n2}x_{22}+a_{n3}x_{32}+\cdots+a_{nn}x_{n2}=0, \end{array}\right\} \qquad (۳۸\text{-}۳)$$

و به همین ترتیب برای دیگر ستون‌های ماتریس A^{-1} عمل می‌کنیم.
پس دستگاه n^2 معادله n^2 مجهولی به دستگاه‌های n معادله n مجهولی تجزیه شد. تمام این دستگاه‌ها مشابهند و دارای ماتریس A یکسانند و فقط در جملات ثابت متفاوتند. چون در حل یک دستگاه به روش گوس بیشتر محاسبات روی ماتریس ضرایب انجام می‌گیرد، ما می‌توانیم با در نظر گرفتن هم‌زمان n ستون جملات ثابت، حل تمام این دستگاه‌ها را ادغام کنیم.
تمام نتایج محاسبات می‌تواند در یک جدول قرار گیرد. جدول ۳-۹ روش محاسباتی برای یک ماتریس درجه چهار را نشان می‌دهد.

توجه- یک ماتریس معکوس را همچنین می‌توان با روش گوس همراه با عنصر اصلی منتخب محاسبه کرد.

مثال ۳ـ۱۱ـ ماتریس معکوس A^{-1} را برای ماتریس A پیدا کنید.

$$A=\begin{pmatrix} ۱/۸ & -۳/۸ & ۰/۷ & -۳/۷ \\ ۰/۷ & ۲/۱ & -۲/۶ & -۲/۸ \\ ۷/۳ & ۸/۱ & ۱/۷ & -۴/۹ \\ ۱/۹ & -۴/۳ & -۴/۹ & -۴/۷ \end{pmatrix} \qquad (۳۹\text{-}۳)$$

حل- محاسبات در جدول ۳-۱۰ آمده است. ستون آخر جدول شامل مجموع جملات برای هر سطر است و به منظور وارسی مورد استفاده دارد.

جدول ۳-۹) محاسبه ماتریس معکوس به کمک روش گوس

a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	$a_{i5,I}$	$a_{i5,II}$	$a_{i5,III}$	$a_{i5,IV}$
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	1	0	0	0
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	0	1	0	0
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	0	0	1	0
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	0	0	0	1
1	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}	0	0	0
	$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$	$a_{25}^{(1)}, I$	1	0	0
	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$a_{34}^{(1)}$	$a_{35}^{(1)}, I$	0	1	0
	$a_{42}^{(1)}$	$a_{43}^{(1)}$	$a_{44}^{(1)}$	$a_{45}^{(1)}, I$	0	0	1
	1	b_{23}	b_{24}	b_{25}, I	b_{25}, II	0	0
		$a_{33}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$	$a_{35}^{(2)}, I$	$a_{35}^{(2)}, II$	1	0
		$a_{43}^{(2)}$	$a_{44}^{(2)}$	$a_{45}^{(2)}, I$	$a_{45}^{(2)}, II$	0	1
		1	b_{34}	ba_{35}, I	b_{35}, II	b_{35}, III	0
			$a_{44}^{(3)}$	$a_{45}^{(3)}, I$	$a_{45}^{(3)}, II$	$a_{45}^{(3)}, III$	I
			1	b_{45}, I	b_{45}, II	b_{45}, III	b_{45}, IV
				x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}
				x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}
				x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
				x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}

توجه کنید که عناصر سطرهای ماتریس معکوس به ترتیب عکس بدست می‌آیند، بنابراین ماتریس معکوس مورد نظر به شکل زیر است:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.21121 & -0.46003 & 0.16248 & 0.26956 \\ -0.03533 & 0.16873 & 0.01573 & -0.08920 \\ 0.23030 & 0.04607 & -0.00944 & -0.19885 \\ -0.29316 & -0.38837 & 0.06128 & 0.18513 \end{pmatrix}$$

برای وارسی، ماتریس حاصلضرب را تشکیل می‌دهیم:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} ۰٫۹۹۹۹۷ & ۰٫۰۰۰۰۰ & -۰٫۰۰۰۰۱ & ۰٫۰۰۰۰۰ \\ -۰٫۰۰۰۲۵ & ۰٫۹۹۹۹۷ & -۰٫۰۰۰۰۲ & -۰٫۰۰۰۳۹ \\ -۰٫۰۰۸۰۸ & -۰٫۰۱۰۱۷ & ۰٫۹۹۹۸۲ & ۰٫۰۰۰۰۹ \\ ۰٫۰۰۰۰۰ & ۰٫۰۰۰۰۰ & ۰٫۰۰۰۰۰ & ۱٫۰۰۰۴۸ \end{pmatrix}$$

عناصر ماتریس معکوس با مقداری خطا بدست آمده‌اند که ناشی از گرد کردن در فرآیند محاسبات است. در قسمت‌های بعدی ما روشی را برای تصحیح عناصر یک ماتریس معکوس تقریبی ارائه می‌دهیم (بخش ۳ـ۱۱ را ببینید).

جدول ۳-۱۰) محاسبه معکوس ماتریس (۳-۳۹)

a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	$a_{i5,I}$	$a_{i5,II}$	$a_{i5,III}$	$a_{i5,IV}$	$\sum$
۱٫۸	−۳٫۸	۰٫۷	−۳٫۷	۱	۰	۰	۰	−۴٫۰
۰٫۷	۲٫۱	−۲٫۶	−۲٫۸	۰	۱	۰	۰	−۱٫۶
۷٫۳	۸٫۱	۱٫۷	−۴٫۹	۰	۰	۱	۰	۱۳٫۲
۱٫۹	−۴٫۳	−۴٫۹	−۴٫۷	۰	۰	۰	۱	−۱۱٫۰
I	−۲٫۱۱۱۱۱	۰٫۳۸۸۸۹	−۲٫۰۵۵۵۶	۰٫۵۵۵۵۶	۰	۰	۰	−۲٫۲۲۲۲۳
	۳٫۵۷۷۷۸	−۲٫۸۷۲۲۲	−۱٫۳۶۱۱۱	−۰٫۳۸۸۸۵	۱	۰	۰	−۰٫۰۴۴۴۰
	۲۳٫۵۱۱۱۰	−۱٫۱۳۸۹۰	۱۰٫۱۰۵۵۹	−۴٫۰۵۵۵۱	۰	۱	۰	۲۹٫۴۲۲۲۸
	−۰٫۲۸۸۸۹	−۵٫۶۳۸۸۹	−۰٫۷۹۴۴۴	−۱٫۰۵۵۵۴	۰	۰	۱	−۶٫۷۷۷۷۶
	۱	−۰٫۸۰۲۷۹	−۰٫۳۸۰۴۳	−۰٫۱۰۸۶۸	۰٫۲۷۹۵۰	۰	۰	−۰٫۰۱۲۴۱
		۱۷٫۷۳۵۷۷	۱۹٫۰۴۹۹۲	−۱٫۵۰۰۳۲	−۶٫۵۷۱۳۵	۱	۰	۲۹٫۷۱۴۰۵
		−۵٫۸۷۰۸۱	−۰٫۹۰۴۳۴	−۱٫۰۸۶۹۴	۰٫۰۸۰۷۴	۰	۱	−۶٫۷۸۱۳۴
		۱	۱٫۰۷۴۱۱	−۰٫۰۸۴۵۹	−۰٫۳۷۱۰۸	۰٫۰۵۶۳۸	۰	۱٫۶۷۵۳۹
			۵٫۴۰۱۵۵	−۱٫۵۸۳۵۵	−۲٫۰۹۷۸۰	۰٫۳۳۱۰۰	۱	۳٫۰۵۴۵۶
			۱	−۰٫۲۹۳۱۶	−۰٫۳۸۸۳۷	۰٫۰۶۱۲۸	۰٫۱۸۵۱۳	۰٫۵۶۵۴۰
				۰٫۲۳۰۳۰	۰٫۰۴۶۰۷	−۰٫۰۰۹۴۴	−۰٫۱۹۸۸۵	۱٫۰۶۸۰۹
				−۰٫۰۳۵۳۳	۰٫۱۶۸۷۳	۰٫۰۱۵۷۳	−۰٫۰۸۹۲۰	۱٫۰۶۰۱۳
				−۰٫۲۱۱۲۱	−۰٫۴۶۰۰۳	۰٫۱۶۲۸۴	۰٫۲۶۹۵۶	۰٫۷۶۲۶۶

مسائل

با استفاده از روش گوس ماتریس معکوس ماتریس‌های داده شده را بدست آورید:

۱. $$\begin{pmatrix} ۸/۳۰۱ & ۲/۶۲۵ & ۴/۱۰۰ & ۱/۹۰۳ \\ ۳/۹۲۶ & ۸/۴۵۸ & ۷/۷۸۷ & ۲/۴۶۰ \\ ۳/۷۷۳ & ۷/۲۱۱ & ۸/۰۴۱ & ۲/۲۸۰ \\ ۲/۲۱۱ & ۳/۶۵۷ & ۱/۶۹۷ & ۶/۹۹۳ \end{pmatrix}$$

۲. $$\begin{pmatrix} ۸/۶۴۴ & ۱/۷۱۵ & ۵/۴۲۲ & ۱/۴۳۳ \\ ۲/۹۶۶ & ۶/۳۹۱ & ۱/۳۷۷ & ۱/۶۱۶ \\ ۲/۹۰۸ & ۶/۲۶۶ & ۱۵/۰۷۰ & ۱/۵۸۷ \\ ۲/۵۲۲ & ۱/۵۳۵ & ۱/۳۳۱ & ۶/۱۸۸ \end{pmatrix}$$

۳. $$\begin{pmatrix} ۱/۱۱۶۱ & ۰/۱۲۵۴ & ۰/۱۳۹۷ & ۰/۱۴۹۰ \\ ۰/۱۵۸۲ & ۱/۱۶۷۵ & ۰/۱۷۶۸ & ۰/۱۸۷۱ \\ ۰/۱۹۶۸ & ۰/۲۰۷۱ & ۱/۲۱۶۸ & ۰/۲۲۷۱ \\ ۰/۲۳۶۸ & ۰/۲۴۷۱ & ۰/۲۵۶۸ & ۱/۲۶۷۱ \end{pmatrix}$$

۴. $$\begin{pmatrix} ۳/۸۱ & ۰/۲۵ & ۱/۲۸ & ۰/۷۵+\alpha \\ ۲/۲۵ & ۱/۳۲ & ۴/۵۸+\alpha & ۰/۴۹ \\ ۵/۳۱ & ۶/۲۸+\alpha & ۰/۹۸ & ۱/۰۴ \\ ۹/۳۹+\alpha & ۲/۴۵ & ۳/۳۵ & ۲/۲۸ \end{pmatrix}, \quad \alpha = ۰/۵ \times n, \quad n = ۰, ۱, \ldots, ۴.$$

۵. $$\begin{pmatrix} ۲۴/۲۱+\alpha & ۲/۴۲ & ۳/۸۵ \\ ۲/۳۱ & ۳۱/۴۹ & ۱/۵۲ \\ ۳/۴۹ & ۴/۵۸ & ۲۸/۷۲+\alpha \end{pmatrix}, \alpha = ۰/۲ \times n, \quad n = ۰, ۱, \ldots, ۴.$$

۳ـ۹ـ روش تکرار ساده

اجازه بدهید دستگاه معادلات خطی

$$Ax = b \qquad (۴۰\text{-}۳)$$

را به صورت زیر بنویسیم:

$$x = Cx + f \qquad (۴۱\text{-}۳)$$

که در آن C یک ماتریس و f یک بردار ستونی است.

با شروع از یک بردار دلخواه $x^{(0)}$:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \cdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix},$$

ما یک فرآیند تکرار تعریف می‌کنیم که در آن:

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + f \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

یا به طور دقیق و کامل:

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + \cdots + c_{1n}x_n^{(k)} + f_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_1^{(k)} + c_{n2}x_2^{(k)} + \cdots + c_{nn}x_n^{(k)} + f_n. \end{array}\right\} \qquad (۳-۴۲)$$

با استفاده از فرآیند تکرار ما یک دنباله از بردارهای $x^{(1)}$، $x^{(2)}$، ...، $x^{(k)}$، ... را خواهیم داشت. اثبات شده است ([۲]، [۱۲]، [۲۶]، [۵۴]، [۵۶] را ببینید) که اگر عناصر ماتریس C در یکی از شرایط زیر صدق کنند:

$$\sum_{i-1}^{n} |c_{ij}| \leq \alpha < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \qquad (۳-۴۳)$$

یا

$$\sum_{i-1}^{n} |c_{ij}| \leq \beta < 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad (۳-۴۴)$$

آنگاه فرآیند تکرار با هر بردار اولیه $x^{(0)}$ به یک جواب دقیق x برای دستگاه متقارب می‌گردد. یعنی

$$x = \lim x^{(k)}$$
$$k \to \infty$$

از اینرو حل دقیق دستگاه تنها نتیجه یک فرآیند نامتناهی است و هر بردار $x^{(k)}$ از دنباله بردارهای بدست آمده یک حل تقریبی است. خطای این حل تقریبی با یکی از فرمول‌های زیر برآورد می‌شود:

$$|x_i - x_i^{(k)}| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \max_{j=1,2,\dots,n} |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}|, \qquad (۳-۴۵)$$

اگر شرط (۳-۴۳) برقرار باشد و یا

$$|x_i - x_i^{(k)}| \leq \frac{\beta}{1-\beta} \sum_{j=1}^{n} |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}| \qquad (۳-۴۶)$$

اگر شرط (۳ـ۴۴) برقرار باشد. این تقریب‌ها هنوز هم می‌توانند به روش زیر دقیقتر می‌شوند:

$$\max |x_i - x_i^{(k)}| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \max |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \tag{۳-۴۷}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i^{(k)}| \leq \frac{\beta}{1-\beta} \sum_{i=1}^{n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|, \tag{۳-۴۸}$$

فرآیند تکرار وقتی پایان می‌گیرد که برآورد مشخص شده نشان دهد که دقت مورد نظر بدست آمده است. برآورد اولیه $x^{(0)}$، بطورکلی می‌تواند به صورت دلخواه انتخاب شود. در برخی موارد ما می‌توانیم $x^{(0)} = f$ را در نظر بگیریم. امّا بسیار مناسبتر است که مقادیر تقریبی مجهولات را (که از روش‌های تقریب زدن ساده و کم زحمت بدست آمده‌اند) به عنوان عناصر بردار $x^{(0)}$ در نظر بگیریم.

دستگاه (۳-۴۰) را به روش‌های مختلف می‌توان به شکل (۳-۴۱) درآورد ([۱۲]، [۵۴] را ببینید). تنها مهم این است که یکی از شرایط (۳-۴۳) یا (۳-۴۴) برقرار باشد.

اجازه بدهید بررسی را به دو روش از این دسته محدود کنیم.

روش اول- اگر عناصر قطری ماتریس A صفر نباشند، یعنی

$$a_{ii} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

آنگاه می‌توان دستگاه (۳-۴۰) را به شکل زیر نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n), \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}.) \end{array}\right\} \tag{۳-۴۹}$$

در این مورد عناصر ماتریس C به روش زیر بدست می‌آیند:

$$C_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad (i \neq j), \quad c_{ii} = 0$$

و آنگاه شرایط (۳-۴۳) و (۳-۴۴) به ترتیب به صورت زیر در می‌آیند:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j \neq 1}}^{n} |\frac{a_{ij}}{a_{ii}}| \leq \alpha < 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{۳-۵۰}$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^{n} |\frac{a_{ij}}{a_{ii}}| \leq \beta < 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{۳-۵۱}$$

نامساوی‌های (۳-۵۰) و (۳-۵۱) برقرار می‌گردند اگر عناصر قطری ماتریس A در شرط زیر صدق کنند.

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq ۱} |a_{ij}| \quad (i = ۱,, ۲ \ldots, n), \tag{۵۲-۳}$$

یعنی، اگر اندازه ضرایب قطری برای هر معادله دستگاه، از مجموع اندازه‌های تمامی ضرایب باقی‌مانده بزرگتر باشد (بدون احتساب ثابت).

روش دوم که در مثال ۲ نشان داده شد به تشریح نیاز ندارد.

بطور کلی می‌توان گفت، برای هر دستگاه با ماتریس تکین روش‌های تکرار متقارب وجود دارد امّا آنها همیشه برای کاربردهای عملی مناسب نیستند. اگر یک روش تکرار متقارب شود، آنگاه نسبت به روش‌های شرح داده شده قبلی این مزایا را دارد:

(۱) اگر سرعت تقارب تکرارها کافی باشد یعنی اگر کمتر از n تکرار برای حل یک دستگاه کافی باشد، آنگاه در زمان صرفه جویی شده است چون تعداد عملیات حسابی لازم برای یک تکرار، متناسب با $n^۲$ است و در نتیجه تعداد کل عملیات حسابی برای مثال در روش گوس متناسب با $n^۳$ خواهد بود.

(۲) خطای ناشی از گرد کردن در روش تکرار بطور محسوسی کمتر از روش گوس است. از این گذشته روش تکرار خود مصحح است یعنی یک خطای بوجود آمده در محاسبات، تأثیری در نتیجه نهایی ندارد، چون یک تقریب نادرست را می‌توان به عنوان یک بردار اولیه جدید در نظر گرفت. به همین خاطر روش تکرار اغلب به عنوان دقیقتر کردن مقادیر مجهولات بدست آمده توسط روش گوس مورد استفاده قرار می‌گیرد (مثال ۳ـ۱۵ را ببینید).

(۳) روش تکرار به‌خصوص در حل دستگاه‌هایی که تعداد قابل ملاحظه‌ای از ضرایب آنها صفر هستند ارجح است. چنین دستگاه‌هایی برای مثال در حل معادلات مشتقات جزئی پدید می‌آیند.

(۴) فرآیند تکرار منجر به اجرای عملیات یکنواخت می‌گردد که در مقایسه با دیگر روش‌ها روی یک کامپیوتر به راحتی قابل برنامه‌ریزی است.

مثال ۳ـ۱۲ـ با استفاده از روش تکرار ساده دستگاه زیر را حل کنید:

$$\left.\begin{aligned}
۲۰/۹x_۱ + ۱/۲x_۲ + ۲/۱x_۳ + ۰/۹x_۴ &= ۲۱/۷۰,\\
۱/۲x_۱ + ۲۱/۲x_۲ + ۱/۵x_۳ + ۲/۵x_۴ &= ۲۷/۴۶,\\
۲/۱x_۱ + ۱/۵x_۲ + ۱۹/۸x_۳ + ۱/۳x_۴ &= ۲۸/۷۶,\\
۰/۹x_۱ + ۲/۵x_۲ + ۱/۳x_۳ + ۳۲/۱x_۴ &= ۴۹/۷۲.
\end{aligned}\right\} \tag{۵۳-۳}$$

حل- دستگاه را به شکل (۳-۴۹) در می‌آوریم:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{20.9}(21.70 - 1.2x_2 - 2.1x_3 - 0.9x_4),\\ x_2 &= \tfrac{1}{21.2}(27.46 - 1.2x_1 - 1.5x_3 - 2.5x_4),\\ x_3 &= \tfrac{1}{19.8}(28.76 - 2.1x_1 - 1.5x_2 - 1.3x_4),\\ x_4 &= \tfrac{1}{32.1}(49.72 - 0.9x_1 - 2.5x_2 - 1.3x_3). \end{aligned}$$

در اینجا توجه داشته باشید که ضرایب دستگاه بدست آمده شرط (۳-۴۳) را برقرار می‌سازد. در واقع:

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{i=1}^{4} |c_{1j}| \approx 0.20 < 1, \quad \sum_{i=1}^{4} |c_{2j}| \approx 0.24 < 1,\\ &\textstyle\sum_{i=1}^{4} |c_{3j}| \approx 0.25 < 1, \quad \sum_{i=1}^{4} |c_{4j}| \approx 0.15 < 1. \end{aligned}$$

از اینرو، تقارب تکرار تضمین شده است. چون $a = 0.25$، دقت تقریب kام با فرمول زیر برآورد می‌گردد:

$$\frac{a}{1-a} = \frac{1}{3}$$

اجازه بدهید که عناصر ستون جملات ثابت که مقادیرشان تا دو رقم اعشارگرد شده‌اند را به عنوان بردار اولیه $x^{(0)}$ در نظر بگیریم:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.04 \\ 1.30 \\ 1.45 \\ 1.55 \end{pmatrix}$$

ما محاسبات را تا وقتی که مقدار $|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|(i = 1,2,3,4)$ کمتر از $\varepsilon = 10^{-3}$ شود ادامه می‌دهیم. به ترتیب محاسبه می‌کنیم: برای $k = 1$

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \tfrac{1}{20.9}(21.70 - 1.560 - 3.045 - 1.395) = 0.75,\\ x_2^{(1)} &= \tfrac{1}{21.2}(27.46 - 1.248 - 2.175 - 3.875) = 0.95,\\ x_3^{(1)} &= \tfrac{1}{19.8}(28.76 - 2.184 - 1.950 - 2.015) = 1.14,\\ x_4^{(1)} &= \tfrac{1}{32.1}(49.72 - 0.936 - 3.250 - 1.885) = 1.36; \end{aligned}$$

برای $k = 2$

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \tfrac{16.942}{20.9} = 0.8106, \quad x_3^{(2)} = \tfrac{23.992}{19.8} = 1.2117,\\ x_2^{(2)} &= \tfrac{21.450}{21.2} = 1.0118, \quad x_4^{(2)} = \tfrac{45.188}{32.1} = 1.4077; \end{aligned}$$

برای $k = 3$

$$\begin{aligned} x_1^{(3)} &= \tfrac{16.67434}{20.9} = 0.7978, \quad x_3^{(3)} = \tfrac{23.71003}{19.8} = 1.1975,\\ x_2^{(3)} &= \tfrac{21.15048}{21.2} = 0.9977, \quad x_4^{(3)} = \tfrac{44.88575}{32.1} = 1.3983; \end{aligned}$$

برای $k = 4$

$$x_1^{(4)} = \frac{16.7295}{20.9} = 0.8004, \quad x_3^{(4)} = \frac{23.7703}{19.8} = 1.2005,$$
$$x_2^{(4)} = \frac{21.2106}{21.2} = 1.0005, \quad x_4^{(4)} = \frac{44.9510}{32.1} = 1.4003.$$

اندازه اختلاف مقادیر $x_i^{(k)}$ برای $k = 3$ و $k = 4$ را محاسبه می‌کنیم:

$$|x_1^{(3)} - x_1^{(4)}| = 0.0026, \quad |x_3^{(3)} - x_3^{(4)}| = 0.0030,$$
$$|x_2^{(3)} - x_2^{(4)}| = 0.0028, \quad |x_4^{(3)} - x_4^{(4)}| = 0.0020.$$

چون همه آنها بزرگتر از عدد از پیش مشخص شده $\varepsilon = 10^{-3}$ هستند، فرآیند تکرار ادامه می‌یابد. برای $k = 5$ خواهیم داشت:

$$x_1^{(5)} = \frac{16.71808}{20.9} = 0.7999, \quad x_3^{(5)} = \frac{23.75802}{19.8} = 1.1999,$$
$$x_2^{(5)} = \frac{21.19802}{21.2} = 0.9999, \quad x_4^{(5)} = \frac{44.93774}{32.1} = 1.3999.$$

اندازه اختلاف مقادیر $x_i^{(k)}$ را برای $k = 4$ و $k = 5$ بدست می‌آوریم:

$$|x_1^{(4)} - x_1^{(5)}| = 0.0005, \quad |x_3^{(4)} - x_3^{(5)}| = 0.0006,$$
$$|x_2^{(4)} - x_2^{(5)}| = 0.0006, \quad |x_4^{(4)} - x_4^{(5)}| = 0.0004.$$

این مقادیر از عدد ε داده شده کوچکترند، بنابراین ما مقادیر زیر را به عنوان جواب بدست می‌آوریم:

$$x_1 \approx 0.7999, \quad x_2 = 0.9999, \quad x_3 = 1.1999, \quad x_4 = 1.3999.$$

طبق برآورد پیشین خطای این مقادیر از $\frac{1}{3} \times 0.0006 = 0.0002$ بیشتر نخواهد بود. برای مقایسه، مقادیر واقعی مجهولات را ارئه می‌کنیم:

$$x_1 = 0.8, \quad x_2 = 1.0, \quad x_3 = 1.2, \quad x_4 = 1.4.$$

مثال ۳ـ۱۳ـ دستگاه زیر را حل کنید:

$$\left.\begin{aligned} 1.02x_1 - 0.05x_2 - 0.10x_3 &= 0.795, \\ -0.11x_1 + 1.03x_2 - 0.05x_3 &= 0.849, \\ -0.11x_1 - 0.12x_2 + 1.04x_3 &= 1.398, \end{aligned}\right\} \qquad (54\text{-}3)$$

عملیاتی با سه تکرار انجام دهید. خطای نتیجه بدست آمده را مشخص کنید.

حل- ماتریس این دستگاه دارای عناصر قطری نزدیک به یک و دیگر عناصری که بطور قابل ملاحظه‌ای کوچکتر از یک هستند، می‌باشد. بنابراین برای استفاده از روش تکرار بالطبع دستگاه (۳-۵۴) را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0{,}795 - 0{,}02x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}10x_3, \\ x_2 &= 0{,}849 + 0{,}11x_1 - 0{,}03x_2 + 0{,}05x_3, \\ x_3 &= 1{,}398 + 0{,}11x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}04x_3. \end{aligned}\right\}$$

شرایط تقارب (۳-۴۳) برای دستگاه بدست آمده برقرار هستند. در واقع:

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{i=1}^{3} |c_{1j}| = 0{,}02 + 0{,}05 + 0{,}10 = 0{,}17 < 1, \\ &\textstyle\sum_{i=1}^{3} |c_{2j}| = 0{,}11 + 0{,}03 + 0{,}05 = 0{,}19 < 1, \\ &\textstyle\sum_{i=1}^{3} |c_{3j}| = 0{,}11 + 0{,}12 + 0{,}04 = 0{,}27 < 1. \end{aligned}$$

ما به عنوان بردار اولیه $x^{(0)}$، ستون جملات ثابت که عناصرش تا دو رقم اعشار گرد شده، را در نظر می‌گیریم:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0{,}80 \\ 0{,}85 \\ 1{,}40 \end{bmatrix}$$

حال به ترتیب بدست می‌آوریم:

برای $k = 1$

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 0{,}795 - 0{,}016 + 0{,}0425 + 0{,}140 = 0{,}9615 \approx 0{,}962, \\ x_1^{(1)} &= 0{,}849 + 0{,}088 - 0{,}0255 + 0{,}070 = 0{,}9815 \approx 0{,}982, \\ x_3^{(1)} &= 1{,}398 + 0{,}088 + 0{,}1020 - 0{,}056 = 1{,}532; \end{aligned}$$

برای $k = 2$

$$x_1^{(2)} = 0{,}97806 \approx 0{,}978, \quad x_2^{(2)} = 1{,}00196 \approx 1{,}002,$$
$$x_3^{(2)} = 1{,}56038 \approx 1{,}560;$$

برای $k = 3$

$$x_1^{(3)} = 0{,}980, \quad x_2^{(3)} = 1{,}004, \quad x_3^{(3)} = 1{,}563.$$

اختلاف مقادیر مجهولات برای $k = 2$ و $k = 3$ بیشتر از 3×10^{-3} نیست. بنابراین اگر

$$x_1 \approx 0{,}980, \quad x_2 \approx 1{,}004, \quad x_3 \approx 1{,}563.$$

به عنوان مقادیر تقریبی مجهولات داده شوند، آنگاه خطای آنها بیشتر از

$$\frac{۰٫۲۷}{۱-۰٫۲۷}\times ۳\times ۱۰^{-۳} < ۱٫۱\times ۱۰^{-۳}.$$

نخواهد بود.

مسائل

دستگاه‌های زیر را به کمک روش تکرار ساده حل کنید. فرآیند تکرار را تا وقتی که اختلاف میان دو تقریب متوالی مجهولات $x_i^{(k)}$ کمتر از عدد ε مشخص شده شود، ادامه دهید. در مسائل ۱ و ۲ جواب را با مقادیر واقعی مجهولات داده شده مقایسه کنید.

$$۱.\quad A=\begin{pmatrix} ۱٫۰۲ & -۰٫۲۵ & -۰٫۳۰\\ -۰٫۴۱ & ۱٫۱۳ & -۰٫۱۵\\ -۰٫۲۵ & -۰٫۱۴ & ۱٫۲۱\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} ۰٫۵۱۵\\ ۱٫۵۵۵\\ ۲٫۷۸۰\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} ۲٫۰\\ ۲٫۵\\ ۳٫۰\end{pmatrix},\quad \varepsilon=۱۰^{-۳}.$$

$$۲.\quad A=\begin{pmatrix} ۱۰٫۹ & ۱٫۲ & ۲٫۱ & ۰٫۹\\ ۱٫۲ & ۱۱٫۲ & ۱٫۵ & ۲٫۵\\ ۲٫۱ & ۱٫۵ & ۹٫۸ & ۱٫۳\\ ۰٫۹ & ۲٫۵ & ۱٫۳ & ۱۲٫۱\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} -۷٫۰\\ ۵٫۳\\ ۱۰٫۳\\ ۲۴٫۶\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} -۱\\ ۰\\ ۱\\ ۲\end{pmatrix},\quad \varepsilon=۱۰^{-۳}.$$

$$۳.\quad A=\begin{pmatrix} ۴٫۰۰ & ۰٫۲۴ & -۰٫۰۸ & ۰٫۱۶\\ ۰٫۰۹ & ۳٫۰۰ & -۰٫۱۵ & -۰٫۱۲\\ ۰٫۰۴ & -۰٫۰۸ & ۴٫۰۰ & ۰٫۰۶\\ ۰٫۰۲ & ۰٫۰۶ & ۰٫۰۴ & -۱۰٫۰۰\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} ۸\\ ۹\\ ۲۰\\ ۱\end{pmatrix},\quad \varepsilon=۰٫۵\times ۱۰^{-۳}.$$

$$۴.\quad A=\begin{pmatrix} ۸٫۷۱۴ & ۲٫۱۸۰ & ۵٫۶۸۴\\ -۱٫۳۵۱ & ۱۰٫۷۲۴ & ۵٫۲۲۴\\ ۲٫۴۸۹ & -۰٫۴۵۹ & ۶٫۷۹۹\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} ۴۹٫۹۱\\ ۵۰٫۱۷\\ ۳۲٫۶۸\end{pmatrix},\quad \varepsilon ۱۰^{-۴}.$$

$$۵.\quad A=\begin{pmatrix} ۲۴٫۲۱+\alpha & ۲٫۴۲ & ۳٫۸۵\\ ۲٫۳۱ & ۳۱٫۴۹ & ۱٫۵۲\\ ۳٫۴۹ & ۴٫۸۵ & ۲۸٫۷۲+\alpha\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} ۳۰٫۲۴\\ ۴۰٫۹۵-\beta\\ ۴۲٫۸۱\end{pmatrix},$$

$$\varepsilon=۱۰^{-۴},\quad \alpha=۰٫۲\times k,\quad k=۰,۱,\ldots,۴,\quad \beta=۰٫۲\times k,\quad k=۰,۱,\ldots,۵.$$

۳ـ۱۰ـ روش سیدل [1]

روش سیدل یک بهبود خاص در روش تکرار ساده است. ایده اصلی این است که در محاسبه $k+1$امین تقریب مجهول x_i برای $i > 1$ آخرین تقریب‌های محاسبه شده مجهولات x_1، x_2، $\ldots$، x_{i-1} مورد استفاده قرار می‌گیرند. از اینرو برای دستگاه (۳-۴۱)، محاسبات به کمک روش سیدل با استفاده از فورمول‌های زیر انجام می‌گیرد:

$$\left.\begin{array}{l}
x_1^{(k+1)} = c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + \cdots + c_{1n}x_n^{(k)} + f_1, \\
x_2^{(k+1)} = c_{21}x_1^{(k+1)} + c_{22}x_2^{(k)} + \cdots + c_{2n}x_n^{(k)} + f_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_1^{(k+1)} + c_{n2}x_2^{(k+1)} + \cdots + c_{n,n-1}x_{n-1}^{k+1} + c_{nn}x_n^{(k)} + f_n.
\end{array}\right\} \quad (۵۵\text{-}۳)$$

توجه کنید که شرایط تقارب بدست آمده (بخش ۳ـ۹ را ببینید) برای تکرار ساده در بالا برای روش تکرار سیدل نیز معتبر هستند.

معمولاً روش سیدل تقارب بهتری را از روش تکرار ساده بدست می‌دهد، گرچه بکارگیری آن همیشه مناسب نیست ([۵۴] را ببینید). به علاوه روش سیدل برای برنامه سازی مناسبتر است، زیرا برای محاسبه $x_i^{(k+1)}$ به ذخیره مقادیر $x_1^{(k)}, \ldots, x_{i-1}^{(k)}$ نیازی نیست. توصیه‌های ذکر شده برای روش تکرار ساده برای روش سیدل نیز معتبر هستند.

مثال ۳ـ۱۴ـ دستگاه (۳-۵۳) را به کمک روش سیدل حل کنید.

حل ـ در مثال ۳ـ۱۲ دستگاه مورد نظر به شکل (۳-۴۹) تبدیل شده است. بردار اولیه $x^{(0)}$ نیز در آنجا انتخاب شده است. با بکارگیری فرآیند سیدل، ما به ترتیب بدست می‌آوریم:

برای $k = 1$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{20{,}9}(21{,}70 - 1{,}560 - 3{,}045 - 1{,}395) = 0{,}7512.$$

در محاسبه $x_2^{(1)}$ ما از مقدار بدست آمده برای $x_1^{(1)}$ استفاده می‌کنیم.

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{21{,}2}(27{,}46 - 0{,}900 - 2{,}175 - 3{,}875) = 0{,}9674.$$

در محاسبه $x_3^{(1)}$ ما از مقادیر بدست آمده برای $x_1^{(1)}$ و $x_2^{(1)}$ استفاده می‌کنیم.

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{19{,}8}(28{,}76 - 1{,}575 - 1{,}455 - 2{,}015) = 1{,}1977.$$

1) Seidel

سرانجام با استفاده از $x_۱^{(۱)}$، $x_۲^{(۱)}$ و $x_۳^{(۱)}$ خواهیم داشت:

$$x_۴^{(۱)} = \frac{۱}{۳۲,۱}(۴۹,۷۲ - ۰,۶۷۵ - ۲,۴۲۵ - ۱,۵۶۰) = ۱,۴۰۳۷$$

برای $k = ۲$ و $k = ۳$ محاسبات به روش مشابه انجام می‌گیرد.

برای $k = ۲$

$$\begin{aligned} x_۱^{(۲)} &= \tfrac{۱۶,۷۶۰۶۲}{۲۰,۹} = ۰,۸۰۱۹, \quad x_۳^{(۲)} = \tfrac{۲۳,۷۵۱۸۰}{۱۹,۸} = ۱,۹۹۹۶, \\ x_۲^{(۲)} &= \tfrac{۲۱,۱۹۲۰۲}{۲۱,۲} = ۰,۹۹۹۶, \quad x_۴^{(۲)} = \tfrac{۴۴,۹۳۹۸۱}{۳۲,۱} = ۱,۴۰۰۰; \end{aligned}$$

برای $k = ۳$

$$\begin{aligned} x_۱^{(۳)} &= \tfrac{۱۶,۷۲۱۳۲}{۲۰,۹} = ۰,۸۰۰۰۶, \quad x_۳^{(۳)} = \tfrac{۲۳,۷۵۹۸۴۴}{۱۹,۸} = ۱,۱۹۹۹۹, \\ x_۲^{(۳)} &= \tfrac{۲۱,۲۰۰۵۲۸}{۲۱,۲} = ۱,۰۰۰۰۲, \quad x_۴^{(۳)} = \tfrac{۴۴,۹۳۹۹۰۹}{۳۲,۱} = ۱,۴۰۰۰۰. \end{aligned}$$

جدول ۳-۱۱ مقادیر مجهولات دستگاه (۳-۵۳) را که نتیجه سومین تکرار بدست آمده به روش‌های سیدل و تکرار ساده است، را نشان می‌دهد. مقادیر دقیق مجهولات نیز آورده شده‌اند. مقایسه نشان می‌دهد که در اینجا روش سیدل سریعتر به نتیجه می‌رسد.

جدول ۳-۱۱) مقادیر مجهولات دستگاه (۳-۵۳)

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$
Method of simple iteration	۰,۷۹۷۸	۰,۹۹۷۷	۱,۱۹۷۵	۱,۳۹۸۳
Seidel method	۰,۸۰۰۰۶	۱,۰۰۰۰۲	۱,۹۹۹۹	۱,۴۰۰۰۰
Exact values	۰,۸	۱,۰	۱,۲	۱,۴

مثال ۳ـ۱۵ـ برای دستگاه

$$\left.\begin{aligned} ۶x_۱ - x_۲ - x_۳ &= ۱۱,۳۲, \\ -x_۱ + ۶x_۲ - x_۳ &= ۳۲, \\ -x_۱ - x_۲ + ۶x_۳ &= ۴۲, \end{aligned}\right\} \qquad (۳\text{-}۵۶)$$

مقادیر تقریبی مجهولات بدست آمده به کمک روش گوس با سه رقم با ارزش برابرهستند با:

$$x_۱ \approx ۴,۶۷ \quad x_۲ \approx ۷,۶۲ \quad x_۳ \approx ۹,۰۵$$

با بکارگیری روش سیدل، جواب‌ها را طوری تصحیح می‌کنیم که اختلاف مقادیر مجهولات $x_i^{(k)}$ و $x_i^{(k+۱)}$ بیشتر از ۵×۱۰^{-۴} نباشند.

حل- دستگاه (۳-۵۶) را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} x_{۱} &= \tfrac{۱}{۶}(۱۱٫۳۳ + x_{۲} + x_{۳}),\\ x_{۲} &= \tfrac{۱}{۶}(۳۲ + x_{۱} + x_{۳}),\\ x_{۳} &= \tfrac{۱}{۶}(۴۲ + x_{۱} + x_{۲}). \end{aligned}$$

با گرفتن مقادیر بدست آمده از روش گوس به عنوان تقریب اولیه

$$x_{۱}^{(۰)} = ۴٫۶۷,\quad x_{۲}^{(۰)} = ۷٫۶۲,\quad x_{۳}^{(۰)} = ۹٫۰۵,$$

خواهیم داشت:

برای $k = ۱$

$$\begin{aligned} x_{۱}^{(۱)} &= \tfrac{۱}{۶}(۱۱٫۳۳ + ۱۶٫۶۷) = ۴٫۶۶۶۶۷,\\ x_{۲}^{(۱)} &= \tfrac{۱}{۶}(۳۲ + ۱۳٫۷۱۶۶۷) = ۷٫۶۱۹۴۴,\\ x_{۳}^{(۱)} &= \tfrac{۱}{۶}(۴۲ + ۱۲٫۲۸۶۱۱) = ۹٫۰۴۷۶۸; \end{aligned}$$

برای $k = ۲$

$$\begin{aligned} x_{۱}^{(۱)} &= \tfrac{۱}{۶}(۱۱٫۳۳ + ۱۶٫۶۶۷۱۲) = ۴٫۶۶۶۱۹,\\ x_{۲}^{(۱)} &= \tfrac{۱}{۶}(۳۲ + ۱۳٫۷۱۳۸۷) = ۷٫۶۱۸۹۷,\\ x_{۳}^{(۱)} &= \tfrac{۱}{۶}(۴۲ + ۱۲٫۲۸۵۱۶) = ۹٫۰۴۷۵۲. \end{aligned}$$

تقریب بدست آمده خطایی بیشتر از $\frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۱۰^{-۶} = ۲٫۵ \times ۱۰^{-۴}$ ندارد، چون برای دستگاه بالا شرط (۳-۴۳) برقرار شده است (برای $\alpha = \frac{۱}{۲}$).

بنابراین مقادیر زیر جواب‌های بدست آمده می‌باشند:

$$x_{۱} \approx ۴٫۶۶۶,\quad x_{۲} \approx ۷٫۶۱۹,\quad x_{۳} \approx ۹٫۰۴۸$$

مسائل

دستگاه‌های ۱ و ۲ را با روش‌های تکرار ساده و سیدل حل کنید و سرعت تقارب تکرارها را مقایسه کنید. مقادیر بدست آمده را با مقادیر دقیق مجهولات داده شده مقایسه کنید.

$$۱.\quad A = \begin{pmatrix} ۶٫۱ & ۲٫۲ & ۱٫۲ \\ ۲٫۲ & ۵٫۵ & -۱٫۵ \\ ۱٫۲ & -۱٫۵ & ۷٫۲ \end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix} ۱۶٫۵۵ \\ ۱۰٫۵۵ \\ ۱۶٫۸۰ \end{pmatrix},\quad x = \begin{pmatrix} ۱٫۵ \\ ۲٫۰ \\ ۲٫۵ \end{pmatrix}.$$

$$۲.\quad A=\begin{pmatrix} ۳/۸۲ & ۱/۰۲ & ۰/۷۵ & ۰/۸۱ \\ ۱/۰۵ & ۴/۵۳ & ۰/۹۸ & ۱/۵۳ \\ ۰/۷۳ & ۰/۸۵ & ۴/۷۱ & ۰/۸۱ \\ ۰/۸۸ & ۰/۸۱ & ۱/۲۸ & ۳/۵۰ \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} ۱۵/۶۵۵ \\ ۲۲/۷۰۵ \\ ۲۳/۴۸۰ \\ ۱۶/۱۱۰ \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} ۲/۵ \\ ۳/۰ \\ ۳/۵ \\ ۲/۰ \end{pmatrix}.$$

۳ـ دستگاه‌های مسائل ۳ تا ۵ (بخش ۳ـ۹) را با روش سیدل حل کنید.

۳ـ۱۱ـ بکارگیری روش تکرار برای تصحیح عناصر یک ماتریس معکوس

فرض کنید مقادیر عناصر یک ماتریس معکوس $A^{-۱}$ برای یک ماتریس A بدست آمده‌اند. ماتریسی را با چنین عناصری تعریف می‌کنیم: $D_۰ \approx A^{-۱}$. برای بهبود عناصر ماتریس معکوس فرآیند تکرار زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$F_{k-۱}=E-AD_{k-۱}\quad (k=۱,۲,\dots) \tag{۵۷-۳}$$

$$D_k=D_{k-۱}(E+F_{k-۱})\quad (k=۱,۲,\dots) \tag{۵۸-۳}$$

ثابت شده است ([۲] و [۱۲] را ببینید) که اگر ماتریس اولیه $D_۰$ به اندازه کافی به مقدار ماتریس اولیه $A^{-۱}$ نزدیک باشد، تکرارها متقارب می‌شوند.

معمولاً فرآیند تکرار تا وقتی ادامه پیدا می‌کند که اندازه عناصر ماتریس F_k کوچکتر از عدد مشخص ε شود، آنگاه به صورت تقریبی قرار می‌دهیم:

$$A^{-۱}\approx D_k$$

فرآیند تکرار معرفی شده بسیار مفید است، زیرا روش‌های دقیق محاسبه ماتریس معکوس اغلب با خطاهای قابل ملاحظه‌ای در عملیات گرد کردن همراه است و به حجم زیادی از عملیات محاسباتی نیاز دارند.

مثال ۳ـ۱۶ـ عناصر ماتریس معکوس تقریبی بدست آمده در مثال ۱ بخش ۳ـ۸ را تصحیح کنید. فرآیند تکرار را تا وقتی که اندازه عناصر ماتریس F_k کوچکتر و یا مساوی ۵×۱۰^{-۵} هستند، ادامه دهید.

حل- با استفاده از روش گوس، معکوس تقریبی ماتریس (۳-۳۹) بدست می‌آید. اجازه بدهید آن‌را برای تقریب اولیه $D_۰$در نظر بگیریم:

$$D_۰=\begin{pmatrix} -۰٫۲۱۱۲۱ & -۰٫۴۶۰۰۳ & ۰٫۱۶۲۸۴ & ۰٫۲۶۹۵۶ \\ -۰٫۰۳۵۳۳ & ۰٫۱۶۸۷۳ & ۰٫۰۱۵۷۳ & -۰٫۰۸۹۲۰ \\ ۰٫۲۳۰۳۰ & ۰٫۰۴۶۰۷ & -۰٫۰۰۹۴۴ & -۰٫۱۹۸۸۵ \\ -۰٫۲۹۳۱۶ & -۰٫۳۸۸۳۷ & ۰٫۰۶۱۲۸ & ۰٫۱۸۵۱۳ \end{pmatrix}.$$

ماتریس $F_۰=E-AD_۰$ را بدست می‌آوریم.

حاصلضرب $AD_۰$ در صفحه ۷۸ محاسبه شده است. با کاستن آن از ماتریس واحد خواهیم داشت:

$$F_۰=E-AD_۰=۱۰^{-۳}\times\begin{pmatrix} ۰٫۰۳ & ۰٫۰۰ & ۰٫۰۱ & ۰٫۰۰ \\ ۰٫۲۵ & ۰٫۰۳ & ۰٫۰۲ & ۰٫۳۹ \\ ۸٫۰۸ & ۱۰٫۱۷ & ۰٫۱۸ & -۰٫۰۹ \\ ۰٫۰۰ & ۰٫۰۰ & ۰٫۰۰ & -۰٫۴۸ \end{pmatrix}.$$

حالا ما حاصلضرب $D_۰F_۰$ را پیدا می‌کنیم:

$$D_۰F_۰=\begin{pmatrix} -۰٫۲۱۱۲۱ & -۰٫۴۶۰۰۳ & ۰٫۱۶۲۸۴ & ۰٫۲۶۹۵۶ \\ -۰٫۰۳۵۳۳ & ۰٫۱۶۸۷۳ & ۰٫۰۱۵۷۳ & -۰٫۰۸۹۲۰ \\ ۰٫۲۳۰۳۰ & ۰٫۰۴۶۰۷ & -۰٫۰۰۹۴۴ & -۰٫۱۹۸۸۵ \\ -۰٫۲۹۳۱۶ & -۰٫۳۸۸۳۷ & ۰٫۰۶۱۲۸ & ۰٫۱۸۵۱۳ \end{pmatrix}\times$$

$$\times۱۰^{-۳}\times\begin{pmatrix} ۰٫۰۳ & ۰٫۰۰ & ۰٫۰۱ & ۰٫۰۰ \\ ۰٫۲۵ & ۰٫۰۳ & ۰٫۰۲ & ۰٫۳۹ \\ ۸٫۰۸ & ۱۰٫۱۷ & ۰٫۱۸ & -۰٫۰۹ \\ ۰٫۰۰ & ۰٫۰۰ & ۰٫۰۰ & -۰٫۴۸ \end{pmatrix}=$$

$$=۱۰^{-۳}\times\begin{pmatrix} ۱٫۱۹ & ۱٫۶۴ & ۰٫۰۲ & -۰٫۳۲ \\ ۰٫۱۷ & ۰٫۱۶ & ۰٫۰۱ & ۰٫۱۱ \\ -۰٫۰۶ & -۰٫۰۹ & ۰٫۰۰ & ۰٫۱۱ \\ ۰٫۳۹ & ۰٫۶۱ & ۰٫۰۰ & -۰٫۲۴ \end{pmatrix}.$$

سپس، به کمک فرمول (۳-۵۶) ما برای $k = 1$ بدست می‌آوریم:

$$D_1 = D_0 + D_0 F_0 = \begin{pmatrix} -0.21121 & -0.46003 & 0.16284 & 0.26956 \\ -0.03533 & 0.16873 & 0.01573 & -0.08920 \\ 0.23030 & 0.04607 & -0.00944 & -0.19885 \\ -0.29316 & -0.38837 & 0.06128 & 0.18513 \end{pmatrix} +$$

$$+10^{-3} \times \begin{pmatrix} 1.19 & 1.64 & 0.02 & -0.32 \\ 0.17 & 0.16 & 0.01 & 0.11 \\ -0.06 & -0.09 & 0.00 & 0.11 \\ 0.39 & 0.61 & 0.00 & -0.24 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -0.21002 & -0.45839 & 0.16286 & 0.26924 \\ -0.03516 & 0.16889 & 0.01574 & -0.08909 \\ 0.23024 & 0.04598 & -0.00944 & -0.19874 \\ -0.29277 & -0.38776 & 0.06128 & 0.18489 \end{pmatrix}.$$

برای وارسی اینکه آیا دقت از قبل مشخص شده بدست آمده حاصلضرب ماتریسی AD_1 را محاسبه می‌کنیم:

$$AD_1 = E - 10^{-5} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

آنگاه

$$F_1 = E - AD_1 = 10^{-5} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

چون بزرگترین عنصر ماتریس F_1 برابر با 5×10^{-5} است، می‌توانیم با دقت مورد نظر بنویسیم:

$$A^{-1} \approx D_1.$$

مسائل

۱ـ برای ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} ۲۴/۲۱ + \alpha & ۲/۴۲ & ۳/۸۵ \\ ۲/۳۱ & ۳۱/۴۹ & ۱/۵۲ \\ ۳/۴۹ & ۴/۸۵ & ۲۸/۷۲ + \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = ۰/۲ \times n, \quad n = ۰, ۱, \ldots, ۱۰,$$

ماتریس معکوس $A^{-۱}$ را بیابید. ماتریس معکوس بدست آمده از مسئله ۵ بخش **۳ـ۸** را به عنوان تقریب اولیه (با گرد کردن عناصر آن تا سه رقم اعشار) در نظر بگیرید. فرآیند تکرار را تا وقتی که اندازه عناصر ماتریس F_k کوچکتر از $۱۰^{-۵}$ شوند، ادامه دهید.

۴ـ حل عددی دستگاه‌های معادلات غیر خطی

۱ـ۴ روش نیوتن برای یک دستگاه دو معادله‌ای

فرض کنید یک دستگاه به صورت زیر داریم:

$$\left.\begin{array}{l} F(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \end{array}\right\} \tag{۱-۴}$$

مطابق با روش نیوتن تقریب‌های متوالی، به‌کمک فرمول‌های زیر محاسبه می‌شوند:

$$\left.\begin{array}{l} x_{n+1}=x_n-\frac{1}{J(x_n,y_n)}\begin{vmatrix} F(x_n,y_n) & F'_y(x_n,y_n) \\ G(x_n,y_n) & G'_y(x_n,y_n)\end{vmatrix}=x_n-\frac{\Delta_x^{(n)}}{J(x_n,y_n)}, \\ y_{n+1}=y_n-\frac{1}{J(x_n,y_n)}\begin{vmatrix} F'_x(x_n,y_n) & F(x_n,y_n) \\ G'_x(x_n,y_n) & G(x_n,y_n)\end{vmatrix}=y_n-\frac{\Delta_y^{(n)}}{J(x_n,y_n)}, \end{array}\right\} \tag{۲-۴}$$

که در آن

$$\Delta_x^{(n)}=\begin{vmatrix} F(x_n,y_n) & F'_y(x_n,y_n) \\ G(x_n,y_n) & G'_y(x_n,y_n)\end{vmatrix},\quad \Delta_y^{(n)}=\begin{vmatrix} F'_x(x_n,y_n) & F(x_n,y_n) \\ G'_x(x_n,y_n) & G(x_n,y_n)\end{vmatrix},$$

و ژاکوبین

$$J(x,y)=\begin{vmatrix} F'_x(x,y) & F'_y(x,y) \\ G'_x(x,y) & G'_y(x,y)\end{vmatrix}\neq 0.$$

معمولاً تقریب‌های اولیه x_0و y_0 به سختی بدست می‌آیند.
روش نیوتن تنها وقتی موثر است که تقریب اولیه به اندازه کافی به جواب دستگاه نزدیک باشد.

مثال ۴ـ۱ـ ریشه‌های دستگاه زیر را بیابید.

$$\begin{aligned} F(x,y) &\equiv 2x^3 - y^2 - 1 = 0, \\ G(x,y) &\equiv xy^3 - y - 4 = 0. \end{aligned}$$

حلـ بطور گرافیکی (از روی نمودار) مقادیر تقریبی $x_0 = 1{,}2$ و $y_0 = 1{,}7$ را بدست می‌آوریم.
با محاسبه ژاکوبین در نقطه $(1{,}2, 1{,}7)$ داریم:

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} 6x^2 & -2y \\ y^3 & 3xy^2 - 1 \end{vmatrix},$$

$$J(1{,}2; 1{,}7) = \begin{vmatrix} 8{,}64 & -3{,}40 \\ 4{,}91 & 9{,}40 \end{vmatrix} = 97{,}910.$$

از فرمول (۴-۲) بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1{,}2 - \tfrac{1}{97{,}910} \begin{vmatrix} -0{,}434 & -3{,}40 \\ 0{,}1956 & 9{,}40 \end{vmatrix} = 1{,}2 + 0{,}0349 = 1{,}2349, \\ y_1 &= 1{,}7 - \tfrac{1}{97{,}910} \begin{vmatrix} 8{,}64 & -0{,}434 \\ 4{,}91 & 0{,}1956 \end{vmatrix} = 1{,}7 - 0{,}0390 = 1{,}6610, \end{aligned}$$

با ادامه این فرآیند با مقادیر کسب شده y_1, x_1 خواهیم داشت:

$$x_2 = 1{,}2343, \quad y_2 = 1{,}6615$$

و همینطور ادامه می‌دهیم.

مثال ۴ـ۲ـ دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\begin{aligned} F(x,y) &\equiv \cos(0{,}4y + x^2) + x^2 + y^2 - 1{,}6 = 0, \\ G(x,y) &\equiv 1{,}5x^2 - \tfrac{y^2}{0{,}36} - 1 = 0. \end{aligned}$$

حل- مقادیر تقریبی را به صورت گرافیکی پیدا می‌کنیم

$$x_\circ = ۱٫۰۴\ ,\quad y_\circ = ۰٫۴۷$$

تقریب‌های بعدی از فرمول (۴-۲) بدست می‌آیند:

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{\Delta_x^{(n)}}{J(x_n, y_n)},$$
$$y_{n+۱} = y_n - \frac{\Delta_y^{(n)}}{J(x_n, y_n)}.$$

نتایج محاسبات در جدول زیر آمده است. جواب $x = ۱٫۰۳۸۶۴$ و $y = ۰٫۴۷۱۷۳$ است.

جدول ۴ـ۱)

x	۱٫۰۴	۱٫۰۳۸۶۴	F'_y	۰٫۵۵۸۰۱	۰٫۵۶۱۷۲	J	$-$۱٫۹۸۵۴۹	$-$۱٫۹۹۸۸۹
y	۰٫۴۷	۰٫۴۷۱۷۳	G_x	۳٫۱۲	۳٫۱۱۵۹۲	$-\frac{\Delta_x}{J}$	$-$۰٫۰۰۱۳۶	۰٫۰۰۰۰۰
F	$-$۰٫۰۰۰۸۴	۰٫۰۰۰۰۰	G'_y	$-$۲٫۶۱۱۱۱	$-$۲٫۶۲۰۷۲			
G	۰٫۰۰۸۷۹	۰٫۰۰۰۰۲	Δx	$-$۰٫۰۰۲۷۱	۰٫۰۰۰۰۱			
F'_x	۰٫۰۹۳۶۴	۰٫۰۹۴۸۳	Δy	+۰٫۰۰۳۴۴	۰٫۰۰۰۰۰	$-\frac{\Delta y}{J}$	۰٫۰۰۱۷۳	۰٫۰۰۰۰۰

مسائل

دستگاه‌های زیر را توسط روش نیوتن حل کنید. نتایج را با پنج رقم صحیح بدست آورید. تقریب‌های اولیه را بطور گرافیکی بیابید.

۱. $\left.\begin{array}{l}\tan(xy+k) = x^۲,\\ \sigma x^۲ + ۲y^۲ = ۱,\end{array}\right\} x > \circ, y > \circ, \sigma = ۰٫۵ + ۰٫۱ \times m,$
$k = ۰٫۱ \times m\ (m = \circ, ۱, \ldots, ۴).$

۲. $\left.\begin{array}{l}e^{xy} = x^۲ - y + \alpha,\\ (x + ۰٫۵)^۲ + y = k,\end{array}\right\} x > \circ,\ \ y > \circ,\ \ \alpha = ۱ + ۰٫۱ \times m,$
$k = ۰٫۶ + ۰٫۱ \times m\ (m = \circ, ۱, \ldots, ۴).$

۴ـ۲ـ روش تکرار ساده برای یک دستگاه دو معادله‌ای

یک دستگاه دو معادله دو مجهولی به شکل زیر مفروض است:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x,y) &= 0 \\ F_2(x,y) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{۳-۴}$$

که لازم است ریشه‌های حقیقی آن با درجه دقت مشخصی بدست آیند.
فرض کنید دستگاه (۴-۳) فقط می‌تواند ریشه‌های مجزا داشته باشد. مقادیر تقریبی این ریشه‌ها را می‌توان با رسم منحنی‌های $F_1(x,y) = 0$ و $F_2(x,y) = 0$ و با مشخص کردن نقطه تقاطع پیدا کرد.
برای بکار بستن روش تکرار دستگاه (۴-۳) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi_1(x,y) \\ y &= \varphi_2(x,y) \end{aligned}\right\} \tag{۴-۴}$$

توابع $\varphi_1(x,y)$ و $\varphi_2(x,y)$ را توابع تکرار می‌خوانند. الگوریتم حل، از فرمول‌های زیر نتیجه می‌شود:

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= \varphi_1(x_n,y_n) \\ y_{n+1} &= \varphi_2(x_n,y_n) \quad (n = 0,1,2,\dots) \end{aligned}\right\} \tag{۵-۴}$$

که در آن x_0 و y_0 تقریب اولیه هستند.
در همسایگی بسته $R(\alpha \le x \le A, \quad b \le y \le B)$ تنها و تنها یک حل $x = \xi$ و $y = \eta$ برای دستگاه (۴-۴) وجود دارد اگر

(۱) تابع $\varphi_1(x,y)$ و $\varphi_2(x,y)$ در R تعریف شده و پیوسته مشتق پذیر باشد.

(۲) تقریب‌های اولیه x_0 و y_0 و تمامی تقریب‌های متوالی $x_n, y_n (n = 1,2,\dots)$ در R باشند.

(۳) نامساوی‌های زیر در R برقرار باشند:

$$\left.\begin{aligned} |\tfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}| + |\tfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}| \le q_1 < 1, \\ |\tfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}| + |\tfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}| \le q_2 < 1, \end{aligned}\right\} \tag{۶-۴}$$

در اینصورت فرآیند محاسبه تقریب‌های متوالی (۴-۵) به جواب $x = \xi$ و $y = \eta$ متقارب می‌شود، یعنی

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi \quad , \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \eta$$

این نتیجه همچنین صادق خواهد بود اگر شرط (۴-۶) با شرط زیر جایگزین شود:

$$\left.\begin{aligned} |\tfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}| + |\tfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}| \le q_1 < 1, \\ |\tfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}| + |\tfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}| \le q_2 < 1, \end{aligned}\right\} \tag{۷-۴}$$

برآورد خطای تقریب nام به کمک نامساوی زیر انجام می‌شود:

$$|\xi - x_n| + |\eta - y_n| \le \frac{M}{۱ - M}(|x_n - x_{n-۱}| + |y_n - y_{n-۱}|),$$

که در آن M بزرگترین عدد در بین اعداد $q_۲, q_۱$ در نامساوی‌های (۴-۶) و (۴-۷) است. تقارب روش تکرار به شرط $M < \frac{۱}{۲}$ و $\frac{M}{۱-M} < ۱$ به خوبی قابل قبول است، بطوریکه اگر سه رقم اول در دو تقریب متوالی برابر باشند، خطای آخرین تقریب از ۰٫۰۰۱ بیشتر نخواهد بود.

مثال ۴-۳- برای دستگاه $x^۳ - y^۳ - ۶y + ۲ = ۰$ و $x^۳ + y^۳ - ۶x + ۳ = ۰$ ریشه‌های مثبت را با سه رقم صحیح بدست آورید.

حل- برای بکار بستن روش تکرار دستگاه را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$x = \frac{x^۳ + y^۳}{۶} + \frac{۱}{۲} \equiv \varphi_۱(x,y), \quad y = \frac{x^۳ - y^۳}{۶} + \frac{۱}{۳} \equiv \varphi_۲(x,y).$$

مربع $۰ \le x \le ۱$ و $۰ \le y \le ۱$ را در نظر بگیرید. اگر نقطه $(x_۰, y_۰)$ در این مربع باشد، در آن صورت داریم:

$$۰ < \varphi_۱(x_۰, y_۰) < ۱ \, , \quad ۰ < \varphi_۲(x_۰, y_۰) < ۱$$

چون $۰ < \frac{x_۰^۳+y_۰^۳}{۶} < \frac{۱}{۳}$ و $-\frac{۱}{۶} < \frac{x_۰^۳-y_۰^۳}{۶} < \frac{۱}{۶}$ توالی‌های (x, y_k) در مربع قرار می‌گیرند (برای هر نقطه انتخابی $(x_۰, y_۰)$). همچنین نقاط (x, y_k) در چهار ضلعی $\frac{۱}{۲} < x < \frac{۵}{۶}$ و $\frac{۱}{۶} < y < \frac{۱}{۲}$ قرار می‌گیرند (چون $\frac{۵}{۶} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۳}$). برای نقاط این مربع مستطیل داریم:

$$\begin{aligned} &|\tfrac{\partial \varphi_۱}{\partial x}| + |\tfrac{\partial \varphi_۱}{\partial y}| = \tfrac{x^۲}{۲} + \tfrac{y^۲}{۲} < \tfrac{۲۵/۳۶ + ۱/۴}{۲} = \tfrac{۳۴}{۷۲} < ۱, \\ &|\tfrac{\partial \varphi_۲}{\partial x}| + |\tfrac{\partial \varphi_۲}{\partial y}| = \tfrac{x^۲}{۲} + |-\tfrac{y^۲}{۲}| < \tfrac{۳۴}{۷۲} < ۱. \end{aligned}$$

در نتیجه جواب یکتا در چهار ضلعی مشخص شده قرار دارد و آن را می‌توان به کمک روش تکرار بدست آورد. با در نظر گرفتن $x_۰ = \frac{۱}{۲}$ و $y_۰ = \frac{۱}{۲}$ داریم:

$$\begin{aligned} &x_۱ = \tfrac{۱}{۲} + \tfrac{۱/۸ + ۱/۸}{۶} = ۰٫۵۴۲, \quad x_۲ = \tfrac{۱}{۲} + \tfrac{۰٫۱۹۶۱۵}{۶} = ۰٫۵۳۳, \\ &y_۱ = \tfrac{۱}{۳} + \tfrac{۱/۸ - ۱/۸}{۶} = ۰٫۳۳۳, \quad y_۲ = \tfrac{۱}{۳} + \tfrac{۰٫۱۲۲۳}{۶} = ۰٫۳۵۴. \end{aligned}$$

با ادامه این فرآیند خواهیم داشت:

$$x_۳ = ۰٫۵۳۳, \quad x_۴ = ۰٫۵۳۲, \quad y_۳ = ۰٫۳۵۱, \quad y_۴ = ۰٫۳۵۱$$

چون در اینجا $q_۱ = q_۲ = \frac{۳۴}{۷۲} < ۰٫۵$، پس همسانی سه رقم اول بدین معنی است که دقت لازم حاصل شده است. بنابراین ما می‌توانیم بنویسیم:

$$\xi = ۰٫۵۳۲ \quad , \quad \eta = ۰٫۳۵۱$$

توجه- بجای فرآیند تکرار تشریح شده (۴-۵)، گاهی اوقات از فرآیند سیدل به روش مشابه استفاده می‌شود:

$$x_{n+1} = \varphi_1(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = \varphi_2(x_{n+1}, y_n)$$

ایجاد توابع تکراری برای دستگاه (۴-۳). ما می‌توانیم روش زیر را برای تبدیل دستگاه معادلات (۴-۳) به صورت (۴-۴) توصیه کنیم (به شرط برقراری شرط (۴-۶)).
قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x,y) &= x + \alpha F_1(x,y) + \beta F_2(x,y), \\ \varphi_2(x,y) &= y + \gamma F_1(x,y) + \delta F_2(x,y) \qquad (\alpha\delta \neq \beta\gamma) \end{aligned}$$

ضرایب $\delta, \gamma, \beta, \alpha$ را به عنوان جواب‌های تقریبی دستگاه معادلات زیر بدست می‌آوریم:

$$\left.\begin{aligned} 1 + \alpha\frac{\partial F_1(x_0,y_0)}{\partial x} + \beta\frac{\partial F_2(x_0,y_0)}{\partial x} &= 0, \\ \alpha\frac{\partial F_1(x_0,y_0)}{\partial y} + \beta\frac{\partial F_2(x_0,y_0)}{\partial y} &= 0, \\ \gamma\frac{\partial F_1(x_0,y_0)}{\partial x} + \delta\frac{\partial F_2(x_0,y_0)}{\partial x} &= 0, \\ 1 + \gamma\frac{\partial F_1(x_0,y_0)}{\partial y} + \delta\frac{\partial F_2(x_0,y_0)}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (۴\text{-}۸)$$

با چنین انتخابی برای پارامترها، شرط (۴-۶) برقرار می‌گردد اگر مشتقات جزیی $F_1(x,y)$ و $F_2(x,y)$ در همسایگی (x_0, y_0) اختلاف زیادی نداشته باشند.

مثال ۴-۴- توابع تکرار مناسب $\varphi_1(x,y)$ و $\varphi_2(x,y)$ برای دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^3 - y = 0 \end{cases}$$

را انتخاب کنید (برای $x_0 = 0{,}8$ و $y_0 = 0{,}55$).

حل- توابع φ_1, φ_2 را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x,y) &= x + \alpha(x^2 + y^2 - 1) + \beta(x^3 - y), \\ \varphi_2(x,y) &= x + \gamma(x^2 + y^2 - 1) + \delta(x^3 - y). \end{aligned}$$

که پارامترهای $\delta, \gamma, \beta, \alpha$ از دستگاه (۴-۸) بدست می‌آیند. داریم:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F_1(x_0,y_0)}{\partial x} = 1{,}6, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F_1(x_0,y_0)}{\partial y} = 1{,}1, \\ &\frac{\partial F_2}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial F_2(x_0,y_0)}{\partial x} = 1{,}92, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial F_2(x_0,y_0)}{\partial y} = -1. \end{aligned}$$

که در نتیجه دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} 1 + 1.6\alpha + 1.92\beta &= 0, \\ 1.1\alpha - \quad \beta &= 0, \\ 1.6\gamma + 1.92\delta &= 0, \\ 1 + 1.1\gamma - \quad \delta &= 0. \end{aligned}$$

با حل این دستگاه، خواهیم داشت

$$\alpha \approx -0.3,\quad \gamma \approx -0.5,\quad \beta \approx -.03,\quad \delta \approx 0.4$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \varphi_1(x,y) &= x - 0.3(x^2+y^2-1) - 0.3(x^3-y), \\ \varphi_2(x,y) &= y - 0.5(x^2+y^2-1) + 0.4(x^3-y). \end{aligned}$$

مسائل

۱ـ برای دستگاه

$$2x^2 - xy - 5x + 1 = 0,\quad x + 3\log x - y^2 = 0$$

ریشه‌های مثبت را با چهار رقم صحیح پیدا کنید.

در مسائل ۲ و ۳ ریشه‌های قرارگرفته در دامنه محدود شده با خطوط $x = 0.5$ ، $y = x$ و $y = 0$ را بدست آورید.

۲. $2x^2 - xy - y^2 + 2x - 2y + 6 = 0,\quad y - x - 1 = 0.$

۳. $\alpha x^3 - y^2 - 1 = 0,$
$\quad xy^3 - y - 4 = 0,\ \alpha = 1 + 0.5 \times k\quad (k = 0, 1, \ldots, 5).$

در مسائل ۴ و ۵ دستگاه‌های معادلات را حل کنید. نتایج می‌بایست با پنج رقم صحیح بدست آیند.

۴. $x^2y^2 - 3x^3 - 6y + 8 = 0,\quad x^4 - 9y + 2 = 0.$

۵. $\sin x - y = 1.32,\quad \cos y - x = -0.85.$

۴ـ۳ـ بسط روش نیوتن برای دستگاه‌های n معادله n مجهولی

یک دستگاه معادلات غیر خطی (با توابع حقیقی در سمت چپ معادلات) را در نظر بگیرید:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{array}\right\} \qquad (۴\text{-}۹)$$

این دستگاه را می‌توان به صورت خیلی فشرده بیان کرد. تمامی آرگومان‌های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ را می‌توان به صورت یک بردار n بعدی نوشت.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

بطور مشابه، تمامی توابع $f_1, f_2, \ldots, f_n$ نیز تشکیل یک بردار n بعدی می‌دهند (بردار توابع):

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

بنابراین دستگاه (۴-۹) به صورت مختصر

$$f(x) = 0 \qquad (۴\text{-}۱۰)$$

نوشته می‌شود. دستگاه (۴-۱۰) بروش تقریب‌های متوالی قابل حل است.
فرض کنید تقریب Pام یکی از رشته‌های مجزای $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ از معادله برداری (۴-۱۰) پیدا شده است:

$$x^{(p)} = (x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)})$$

حال می‌توان ریشه دقیق معادله را به صورت

$$x = x^{(p)} + \varepsilon^{(p)} \qquad (۴\text{-}۱۱)$$

نشان داد که در آن $\varepsilon^{(p)} = (\varepsilon_1^{(p)}, \varepsilon_2^{(p)}, \dots, \varepsilon_n^{(p)})$ خطای ریشه است.

اجازه دهید ماتریس ژاکوبی دستگاه توابع $f_1, f_2, \dots, f_n$ متناظر با متغیرهای $x_1, x_2, \dots, x_n$ را تعریف کنیم:

$$W(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}).$$

اگر این ماتریس تکین باشد یعنی $\det W(x) \neq 0$ باشد، آنگاه مقدار خطای $\varepsilon^{(p)}$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\varepsilon^{(p)} = -W^{-1}(x^{(p)}) f(x^{(p)}) \qquad (۴\text{-}۱۲)$$

که در آن $W^{-1}(x^{(p)})$ معکوس ماتریس ژاکوبی است. بنابراین تقریب‌های متوالی توسط فرمول

$$x^{(p+1)} = x^{(p)} - W^{-1}(x^{(p)}) f(x^{(p)}) \quad (p = 0, 1, 2, \dots) \qquad (۴\text{-}۱۳)$$

بدست می‌آیند. در این روش می‌توان یک مقدار نامناسب را به عنوان تقریب اولیه ریشه در نظر گرفت. شرایط تقارب روش نیوتن توسط ال.بی.کانترویچ[1] و ای.ام.آستروسکی[2] بررسی شده است ([۱۶]و [۳۴] را ببینید).

مثال ۴-۵- با استفاده از روش نیوتن حل دستگاه معادلات زیر را تقریب بزنید. از تقریب‌های اولیه $x_0 = y_0 = z_0 = 0.5$ شروع کنید.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad 2x^2 + y^2 - 4z = 0, \quad 3x^2 - 4y + z^2 = 0,$$

حل- داریم:

$$f(x) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4z \\ 3x^2 - 4y + z^2 \end{pmatrix},$$

که از آنجا

$$f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0.25 + 0.25 + 0.25 - 1 \\ 0.50 + 0.25 - 2.00 \\ 0.75 - 2.00 + 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.25 \\ -1.25 \\ -1.00 \end{pmatrix}.$$

1) L.B. Kantorovich 2) A.M. Ostrowski

ماتریس ژاکوبی را تشکیل می‌دهیم:

$$W(x)=\begin{pmatrix} ۲x & ۲y & ۲z \\ ۴x & ۲y & -۴ \\ ۶x & -۴ & ۲z \end{pmatrix}.$$

پس داریم:

$$W(x^{(۰)})=\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۴ \\ ۳ & -۴ & ۱ \end{pmatrix}.$$

و

$$\det W(x^{(۰)})=\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۴ \\ ۳ & -۴ & ۱ \end{vmatrix}=-۴۰.$$

ماتریس معکوس را پیدا می‌کنیم:

$$W^{-۱}(x^{(۰)})=-\frac{۱}{۴۰}\begin{pmatrix} -۱۵ & -۵ & -۵ \\ -۱۴ & -۲ & ۶ \\ -۱۱ & ۷ & -۱ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{۳}{۸} & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۸} \\ \frac{۷}{۲۰} & \frac{۱}{۲۰} & -\frac{۳}{۲۰} \\ \frac{۱۱}{۴۰} & -\frac{۷}{۴۰} & \frac{۱}{۴۰} \end{pmatrix}$$

با استفاده از فرمول (۴-۱۳)، اولین تقریب را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} x^{(۱)} &= x^{(۰)}-W^{-۱}(x^{(۰)})f(x^{(۰)})= \\ &= \begin{pmatrix} ۰٫۵ \\ ۰٫۵ \\ ۰٫۵ \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \frac{۳}{۸} & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۸} \\ \frac{۷}{۲۰} & \frac{۱}{۲۰} & -\frac{۳}{۲۰} \\ \frac{۱۱}{۴۰} & -\frac{۷}{۴۰} & \frac{۱}{۴۰} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -۰٫۲۵ \\ -۱٫۲۵ \\ -۱٫۰۰ \end{pmatrix}= \\ &\qquad \begin{pmatrix} ۰٫۵ \\ ۰٫۵ \\ ۰٫۵ \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} ۰٫۳۷۵ \\ ۰ \\ -۰٫۱۲۵ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۰٫۸۷۵ \\ ۰٫۵۰۰ \\ ۰٫۳۷۵ \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

حال تقریب دوم $x^{(۲)}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x^{(۱)}=\begin{pmatrix} ۰٫۸۷۵^۲+۰٫۵۰۰^۲+۰٫۳۷۵^۲-۱ \\ ۲\times ۰٫۸۷۵^۲+۰٫۵۰۰^۲-۴\times ۰٫۳۷۵ \\ ۳\times ۰٫۸۷۵^۲-۴\times ۰٫۵۰۰+۰٫۳۷۵^۲ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۰٫۱۵۶۲۵ \\ ۰٫۲۸۱۲۵ \\ ۰٫۴۳۷۵۰ \end{pmatrix},$$

$$W(x^{(۱)})\begin{pmatrix} ۲\times ۰٫۸۷۵ & ۲\times ۰٫۵۰۰ & ۲\times ۰٫۳۷۵ \\ ۴\times ۰٫۸۷۵ & ۲\times ۰٫۵۰۰ & -۴ \\ ۶\times ۰٫۸۷۵ & -۴ & ۲\times ۰٫۳۷۵ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱٫۷۵۰ & ۱ & ۰٫۷۵۰ \\ ۳٫۵۰۰ & ۱ & -۴ \\ ۵٫۲۵۰ & -۴ & ۰٫۷۵۰ \end{pmatrix}.$$

در نتیجه

$$\det W(x^{(۱)}) = \begin{vmatrix} ۱٫۷۵۰ & ۱ & ۰٫۷۵۰ \\ ۳٫۵۰۰ & ۱ & -۴ \\ ۵٫۲۵۰ & -۴ & ۰٫۷۵۰ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱٫۷۵۰ & ۱ & ۰٫۷۵۰ \\ ۱٫۷۵۰ & ۰ & -۴٫۷۵۰ \\ ۱۲٫۲۵۰ & ۰ & ۳٫۷۵۰ \end{vmatrix} = -۶۴٫۷۵۰,$$

$$W^{-۱}(x^{(۱)}) = -\frac{۱}{۶۴٫۷۵۰}\begin{pmatrix} -۱۵٫۲۵ & -۳٫۷۵ & -۴٫۷۵ \\ -۲۳٫۶۲۵ & -۲٫۶۲۵۰ & ۹٫۶۲۵ \\ -۱۹٫۲۵ & ۱۲٫۲۵ & -۱٫۷۵ \end{pmatrix}.$$

به کمک فرمول (۴-۱۳) بدست می‌آوریم:

$$x^{(۲)} = x^{(۱)} - W^{-۱}(x^{(۱)})f(x^{(۱)}) =$$

$$= \begin{pmatrix} ۰٫۸۷۵ \\ ۰٫۵۰۰ \\ ۰٫۳۷۵ \end{pmatrix} + \frac{۱}{۶۴٫۷۵}\begin{pmatrix} -۱۵٫۲۵ & -۳٫۷۵ & -۴٫۷۵ \\ -۲۳٫۶۲۵ & -۲٫۶۲۵۰ & ۹٫۶۲۵ \\ -۱۹٫۲۵ & ۱۲٫۲۵ & -۱٫۷۵ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰٫۱۵۶۲۵ \\ ۰٫۲۸۱۲۵ \\ ۰٫۴۳۷۵۰ \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ۰٫۸۷۵ \\ ۰٫۵۰۰ \\ ۰٫۳۷۵ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ۰٫۰۸۵۱۹ \\ ۰٫۰۰۳۳۸ \\ ۰٫۰۰۵۰۷ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰٫۷۸۹۸۱ \\ ۰٫۴۹۶۶۲ \\ ۰٫۳۶۹۹۳ \end{pmatrix}$$

تقریب‌های بعدی به روش مشابه محاسبه می‌شوند.

$$x^{(۳)} = \begin{pmatrix} ۰٫۷۸۵۲۱ \\ ۰٫۴۹۶۶۲ \\ ۰٫۳۶۹۹۲ \end{pmatrix}, \quad f(x^{(۳)}) = \begin{pmatrix} ۰٫۰۰۰۰۱ \\ ۰٫۰۰۰۰۴ \\ ۰٫۰۰۰۰۵ \end{pmatrix}$$

با قناعت به تقریب سوم داریم

$$x = ۰٫۷۸۵۲, \quad y = ۰٫۴۹۶۶, \quad z = ۰٫۳۶۹۹$$

۴ـ۴ـ به کار بستن روش تکرار برای دستگاه‌های n معادله n مجهولی

فرض کنید دستگاه معادلات غیر خطی مفروض شکل خاص زیر را داشته باشد:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{array}\right\} \qquad (۱۴\text{-}۴)$$

که در آن توابع $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ حقیقی هستند و در همسایگی ω یک پاسخ مجزای $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ این دستگاه، تعریف شده و پیوسته هستند. به عبارت دیگر به صورت بسیار مختصر

$$x = \varphi(x) \qquad (۱۵\text{-}۴)$$

که در آن

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

بردار ریشه معمولاً به کمک روش تکرار پیدا می‌شود:

$$x^{(p+1)} = \varphi(x^{(p)}) \quad (p = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (۱۶\text{-}۴)$$

اگر یک دستگاه از معادلات به صورت کلی زیر داده شده باشد

$$f(x) = 0 \qquad (۱۷\text{-}۴)$$

که در آن $f(x)$ بردار تابع تعریف شده و پیوسته در همسایگی ω ریشه مجزای x^* می‌باشد. حل آن‌را به شکل معادل زیر می‌نویسیم:

$$x = \varphi(x) \qquad (۱۸\text{-}۴)$$

که در آن $\varphi(x)$ یک تابع تکرار برداری است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varphi(x) = x + \Lambda f(x)$$

ماتریس Λ به صورت زیر انتخاب می‌شود (رهنوشت صفحه ۱۰۲ را نگاه کنید).

$$\Lambda = -W^{-1}(x^{(0)})$$

در اینجا فرض می‌کنیم که $W^{(0)}$ یک ماتریس تکین است.

با جانشین ساختن $\varphi(x)$ در (۴-۱۶) فرمول تکرار زیر بدست می‌آوریم:

$$x^{(p+1)} = x^{(p)} + \Lambda f(x^{(p)}) \tag{۴-۱۹}$$

مسائل

دستگاه‌های معادلات زیر را به کمک روش تکرار حل کنید.

$$1.\quad \left.\begin{aligned} x &= \log\frac{y}{z} + 1, \\ y &= 0/4 + z^2 - 2x^2, \\ z &= 2 + \frac{xy}{20} \end{aligned}\right\} x_0 = 1,\quad y_0 = 2/2,\quad z_0 = 2.$$

$$2.\quad \left.\begin{aligned} x + x^2 - 2yz &= 0/1, \\ y - y^2 + 3xz &= -0/2, \\ z + z^2 + 2xy &= 0/3, \end{aligned}\right\} x_0 = y_0 = z_0 = 0.$$

۵ـ درون‌یابی توابع

۵ـ۱ـ معرفی مسئله درون‌یابی

فرض کنید یک تابع $y = f(x)$ به صورت جدولی داده شده است:

$$y_\circ = f(x_\circ), \quad y_\backslash = f(x_\backslash), \quad \ldots, \quad y_n = f(x_n)$$

مسئله درون‌یابی معمولاً به صورت زیر بیان می‌شود:

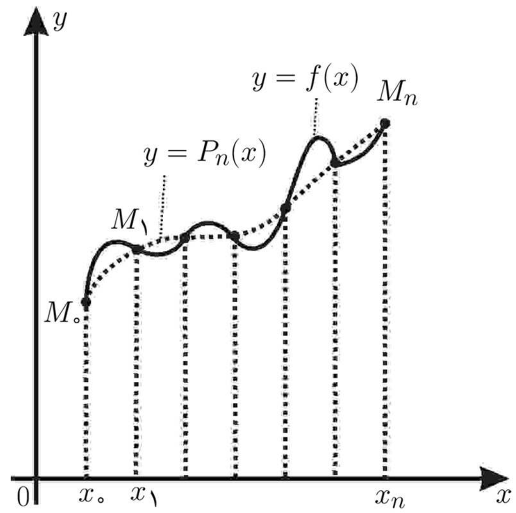
چند جمله‌ای $P(x) = Pn(x)$ از درجه نابزرگتر از n را که مقادیر آن در نقاط $x_i(i = \circ, ۱, ۲, \ldots, n)$ با مقادیر تابع داده شده برابر است را پیدا کنید، یعنی $P(x_i) = y_i$.

از نظر هندسی، بدین معنی است که یک منحنی جبری به شکل $y = a_\circ x^n + a_۱ x^{n-۱} + \cdots + a_n$ که از مجموعه نقاط داده شده $M_i(x_i, y_i)(i = \circ, ۱, \ldots, n)$ می‌گذرد را پیدا کنیم (شکل ۵-۱).

با چنین تعریفی مسئله درون‌یابی را می‌توان «مشابه سازی» خواند.

چند جمله‌ای $P(x)$ را چند جمله‌ای درون‌یابی می‌گوییم. نقاط $x_i(i = \circ, ۱, \ldots, n)$ را نقاط چشمه[1] می‌خوانند (نقاط درون‌یابی).

1) Mesh



شکل ۵-۱

همچنین اثبات شده است ([۱]، [۱۱] و [۵۸] را ببینید) که طبق تعریف بالا مسئله درون‌یابی همیشه یک جواب یکتا دارد. فرمول‌های درون‌یابی معمولاً هنگامی مورد استفاده قرار می‌گیرند که بخواهیم مقادیر نامعین $f(x)$ برای آرگومان با مقدار میانی (میان نقاط مشخص) را بدست آوریم. ما بین درون‌یابی در بازه مشخص (وقتی که مقدار x بین $x_۰$ و x_n است) و برون‌یابی (وقتی x خارج از بازه $[x_۰, x_n]$ است) تفاوت قائل می‌شویم.

در برآورد خطای نتایج می‌بایستی علاوه بر خطای روش درون‌یابی (خطای جملات باقیمانده)، خطای گرد کردن در محاسبات را نیز در نظر داشت.

۵-۲- درون‌یابی با نقاط متساوی‌الفاصله: فرمول‌های درون‌یابی اول و دوم نیوتن.

نقاط درون‌یابی را متساوی‌الفاصله گوییم اگر

$$x_{i+۱} - x_i = \Delta_{x_i} = h = \text{مقدار ثابت} \quad (i = ۰, ۱, \ldots, n-۱)$$

عبارات زیر تفاضل محدود تابع $y = f(x)$ خوانده می‌شوند:

تفاضلات محدود درجه اول	$\Delta y_i = y_{i+۱} - y_i$
تفاضلات محدود درجه دوم	$\Delta^۲ y_i = \Delta y_{i+۱} - \Delta y_i$
	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
تفاضلات محدود درجه kام	$\Delta^k y_i = \Delta^{k-۱} y_{i+۱} + \Delta^{k-۱} y_i$

جدول ۵-۱ نشان دهنده یک جدول تفاضلات محدود برای $n = 5$ می‌باشد.

۱ـ فرمول درون‌یابی اول نیوتن به شکل زیر است:

$$y(x) = P_n(x) = \\ = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \qquad (۵-۱)$$

که در آن $q = \frac{x-x_0}{h}$. توجه داشته باشید که این فرمول از بالاترین سطر افقی جدول ۵-۱ استفاده می‌کند. زیر عناصر این سطر در جدول خط کشیده شده است. جمله باقیمانده $R_n(x)$ فرمول (۵-۱) به صورت زیر است ([۱]، [۱۲] را ببینید):

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \qquad (۵-۲)$$

که در آن ξ یک نقطه داخل کوچکترین بازه شامل تمام نقاط $x_i(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ و نقطه x می‌باشد. وقتی یک نقطه اضافی x_{n+1} وجود داشته باشد، ما از یک فرمول تقریب بسیار مناسبتر برای محاسبات کاربردی استفاده می‌کنیم ([۱۲] را ببینید).

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{n+1}y_0}{(n+1)!}q(q-1)\ldots(q-n). \qquad (۵-۳)$$

جدول ۵-۱) جدول تفاضلات محدود

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0	$\underline{\Delta y_0}$	$\underline{\Delta^2 y_0}$	$\underline{\Delta^3 y_0}$	$\underline{\Delta^4 y_0}$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$		
x_4	y_4	Δy_4			
x_5	y_5				

به عنوان مثال آخرین فرمول برای موردی که تابع به صورت آزمایشی و تجربی بدست آمده، مفید می‌باشد. عدد n طوری انتخاب می‌شود که تفاضل‌های $\Delta^n_{y_i}$ مقداری ثابت باشند (مثال ۵-۱ را ببینید).
فرمول (۵-۱) برای درون‌یابی و برون‌یابی نقاط x نزدیک به ابتدای جدول (x_0) مورد استفاده قرار می‌گیرد.
برای $n = 1$ و $n = 2$ موارد خاصی خواهیم داشت:
الف ـ درون‌یابی خطی (درجه اول)

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 \qquad (۵-۴)$$

ب ـ درون‌یابی درجه دوم

$$y(x) = y_۰ + q\Delta y_۰ + \frac{q(q-۱)}{۲!}\Delta^۲ y_۰ \qquad (۵\text{-}۵)$$

مثال ۵ـ۱ـ یک جدول از مقادیر تابع $y = \log x$ در دست است (جدول ۵-۲). مقدار $\log ۱۰۰۱$ را بیابید.

جدول ۵-۲) مقادیر و تفاضلات تابع $y = \log x$

x	y	Δy	$\Delta^۲ y$	$\Delta^۳ y$
۱۰۰۰	۳٫۰۰۰۰۰۰۰	۴۳۲۱۴	$-$۴۲۶	۸
۱۰۱۰	۳٫۰۰۴۳۲۱۴	۴۲۷۸۸	$-$۴۱۸	۹
۱۰۲۰	۳٫۰۰۸۶۰۰۲	۴۲۳۷۰	$-$۴۰۹	۸
۱۰۳۰	۳٫۰۱۲۸۳۷۲	۴۱۹۶۱	$-$۴۰۱	
۱۰۴۰	۳٫۰۱۷۰۳۳۳	۴۱۵۶۰		
۱۰۵۰	۳٫۰۲۱۱۸۹۳			

حل ـ یک جدول تفاضلی (جدول ۵-۲) تشکیل می‌دهیم (با نوشتن تفاضلات تا هفت رقم اعشار). می‌بینیم که سومین تفاضلات عملاً ثابت هستند. بنابراین کافی است که مقدار $n = ۳$ را در فرمول (۵-۱) در نظر بگیریم:

$$y(x) = y_۰ + q\Delta y_۰ + \frac{q(q-۱)}{۲!}\Delta^۲ y_۰ \frac{q(q-۱)(q-۲)}{۳!}\Delta^۳ y_۰.$$

برای $x = ۱۰۰۱$ داریم $q = ۰٫۱$. بنابراین

$$\log ۱۰۰۱ = ۳٫۰۰۰۰۰۰۰ + ۰٫۱ \times ۰٫۰۰۴۳۲۱۴ + \tfrac{۰٫۱\times۰٫۹}{۲}۰٫۰۰۰۰۴۲۶ + \\ + \tfrac{۰٫۱\times۰٫۹\times۱٫۹}{۶}۰٫۰۰۰۰۰۰۸ = ۳٫۰۰۰۴۳۴۱.$$

حال جمله باقیمانده را برآورد می‌کنیم. با فرمول (۵-۲) برای $n = ۳$ خواهیم داشت:

$$R_۳(x) = \frac{h^۴ q(q-۱)(q-۲)(q-۳)}{۴!} f^{(۴)}(\xi)$$

که در آن $۱۰۰۰ < \xi < ۱۰۳۰$ است. چون $F(x) = \log x$، داریم $f^{(۴)}(x) = -\frac{۳!}{x^۴}\log e$. بنابراین

$$|f^{(۴)}(\xi)| < \frac{۳!}{(۱۰۰۰)^۴}\log e$$

برای $h = ۱۰$ و $q = ۰/۱$ نهایتاً خواهیم داشت:

$$|R_۳(۱۰۰۱)| < \frac{۰/۱ \times ۰/۹ \times ۱/۹ \times ۲/۹ \times ۱۰^۴ \log e}{۴ \times (۱۰۰۰)^۴} \approx ۰/۵ \times ۱۰^{-۹}.$$

بنابراین جمله باقیمانده می‌تواند تنها در رقم نهم اعشار موثر باشد. توجه کنید که مقدار بدست آمده برای $\log ۱۰۰۱$ با مقدار آن در جدول هفت رقمی لگاریتمی مطابقت دارد.

مثال ۵ـ۲ـ با داشتن جدول مقادیر تابع $y = \frac{۱}{x}$ (جدول ۵-۳)، مقدار $\frac{۱}{۲/۷۱۸}$ را با استفاده از درون‌یابی خطی بیابید.

حل ـ داریم $\Delta y_۰ = -۰/۰۰۲۸$ و $q = ۰/۰۱۸/۰/۰۲ = ۰/۹$ و از فرمول (۵-۴) پیدا می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲/۷۱۸} = ۰/۳۷۰۴ - ۰/۰۰۲۸ \times ۰/۹ = ۰/۳۶۷۹$$

حال جمله باقیمانده را برآورد می‌کنیم. بوسیله فرمول (۵-۲) برای $n = ۱$ داریم: $R_۱(x) = \frac{h^۲ q(q-۱)}{۲!} f''(\xi)$ که در آن $۲/۷۰ < \xi < ۲/۷۲$.

چون $f(x) = ۱/x$ پس $f''(x) = \frac{۲}{x^۳}$. بنابراین

$$|R_۱(۲/۷۱۸)| < \frac{(۰/۰۲)^۲ \times ۰/۹ \times ۰/۱}{(۲/۷)^۳} \approx ۰/۲ \times ۱۰^{-۵}.$$

از اینرو، جمله باقیمانده می‌تواند فقط در رقم ششم اعشار موثر باشد.

مثال ۵ـ۳ـ با استفاده از جدول مقادیر تابع $y = e^x$ (جدول ۵-۴)، مقادیر $e^{۳/۶۲}$ و $e^{۳/۵۸}$ را به کمک فرمول درون‌یابی درجه دوم پیدا کنید.

حل ـ تفاضلات را تا رتبه دوم محاسبه می‌کنیم (جدول ۵-۴ را ببینید).

جدول ۵-۳) مقادیر تفاضلات تابع $y = \frac{۱}{x}$

x	y	Δy
۲/۷۰	۰/۳۷۰۴	-۲۸
۲/۷۲	۰/۳۶۷۶	-۲۶
۲/۷۴	۰/۳۶۵۰	

جدول ۵-۴) تفاضلات محدود برای تابع $y = fx$

x	y	Δy	$\Delta^{۲} y$
۳٫۶۰	۳۶٫۵۹۸	۱٫۸۷۷	۹۵
۳٫۶۵	۳۸٫۴۷۵	۱٫۹۷۲	۱۰۲
۳٫۷۰	۴۰٫۴۴۷	۲٫۰۷۴	
۳٫۷۵	۴۲٫۵۲۱		

برای $x = ۳٫۶۲$ پیدا می‌کنیم $q = \frac{۰٫۰۲}{۰٫۰۵} = ۰٫۴$ و با استفاده از فرمول (۵-۵) محاسبه می‌کنیم:

$$e^{۳٫۶۲} = ۳۶٫۵۹۸ + ۰٫۴ \times ۱٫۸۷۷ - \frac{۰٫۴ \times ۰٫۶}{۲} ۰٫۰۹۵ = ۳۷٫۳۳۸.$$

برای $n = ۲$ جمله باقیمانده به صورت زیر است:

$$R_{۲}(x) = \frac{h^{۳} q(q-۱)(q-۲)}{۳!} f'''(\xi).$$

چون $f'''(x) = e^x$ و $۳٫۶۰ < \xi < ۳٫۷۰$، خواهیم داشت:

$$|R_{۲}(۳٫۶۲)| < \frac{(۰٫۰۵)^{۳} \times ۰٫۴ \times ۰٫۶ \times ۱٫۶}{۶} e^{۳٫۷۰} \approx ۰٫۳ \times ۱۰^{-۳}.$$

از اینرو، می‌بینیم که تمام ارقام پاسخ با ارزش هستند.
برای $x = ۳٫۵۸$ پیدا می‌کنیم $q = \frac{-۰٫۰۲}{۰٫۰۵} = -۰٫۴$ و از فرمول (۵-۵) بدست می‌آوریم:

$$e^{۳٫۵۸} = ۳۶٫۵۹۸ - ۰٫۴ \times ۱٫۸۷۷ + \frac{۰٫۴ \times ۱٫۴}{۲} ۰٫۰۹۵ = ۳۵٫۸۷۴.$$

برای برآورد جمله باقیمانده داریم $۳٫۶ < \xi < ۳٫۷$، بنابراین

$$|R_{۲}(۳٫۵۸)| < \frac{(۰٫۰۵)^{۲} \times ۰٫۴ \times ۱٫۴ \times ۲٫۴}{۶} e^{۳٫۷۰} \approx ۱۰^{-۳}.$$

با مقایسه جملات باقیمانده برای $x = ۳٫۶۲$ و $x = ۳٫۵۸$ می‌بینیم که برون‌یابی برای $x = ۳٫۵۸$ به یک نتیجه با دقت کمتر منجر شده است.

۲ـ فرمول درون‌یابی دوم نیوتن. این فرمول به شکل زیر است:

$$y(x) = P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-۱} + \frac{q(q+۱)}{۲!}\Delta^{۲} y_{n-۲} + \dots$$
$$\dots + \frac{q(q+۱)\dots(q+n-۱)}{n!}\Delta^n y_{۰}, \qquad (۵-۶)$$

که در آن $q = \frac{x-x_n}{n}$. این فرمول از آخرین سطر تفاضلات (سطر مایل) استفاده می‌کند (جدول ۵-۱ را ببینید). جمله باقیمانده $R_n(x)$ فرمول (۵-۶) به شکل زیر است ([۱] و [۱۴] را ببینید):

$$R_n(x) = h^{n+۱}\frac{q(q+۱)\dots(q+n)}{(n+۱)!}f^{(n+۱)}(\xi), \quad (۵\text{-}۷)$$

که در آن ξ یک نقطه مفروض در کوچکترین بازه شامل نقاط x_i $(i = ۰, ۱, ۲, \dots, n)$ و x می‌باشد. فرمول (۵-۶) برای درون‌یابی و برون‌یابی نقاط x نزدیک به انتهای جدول یعنی x_n مناسب می‌باشد.

مثال ۵ـ۴ـ با استفاده از جدول مقادیر تابع $y = \sin x$ (جدول ۵-۵ را ببینید) مقدار $\sin ۵۴^\circ$ و $\sin ۵۶^\circ$ را پیدا کرده و خطای نتایج را مشخص کنید.

جدول ۵-۵) مقادیر و تفاضلات تابع $y = \sin x$

x	y	Δy	$\Delta^۲ y$	$\Delta^۳ y$
۳۰°	۰٫۵۰۰۰	۷۳۶	-۴۴	-۵
۳۵°	۰٫۵۷۳۶	۶۹۲	-۴۹	-۵
۴۰°	۰٫۶۴۲۸	۶۴۳	-۵۳	-۳
۴۵°	۰٫۷۰۷۱	۵۸۹	-۵۷	
۵۰°	۰٫۷۶۶۰	۵۳۲		
۵۵°	۰٫۸۱۹۲			

حل‌ـ با تشکیل یک جدول تفاضلی (جدول ۵-۵) می‌بینیم که تفاضلات سوم عملاً ثابت می‌شوند. بنابراین کافی است که چهار جمله را در فرمول (۵-۶) در نظر بگیریم. برای محاسبه $\sin ۵۴^\circ$ داریم: $q = \frac{۵۴^\circ - ۵۵^\circ}{۵^\circ} = -۰٫۲$. از فرمول (۵-۶) بدست می‌آوریم:

$$\sin ۵۴^\circ = ۰٫۸۱۹۲ + (-۰٫۲)۰٫۰۵۳۲ - \\ -\frac{(-۰٫۲)\times ۰٫۸}{۲}۰٫۰۰۵۷ - \frac{(۰٫۲)\times ۰٫۸ \times ۱٫۸}{۶}۰٫۰۰۰۳ = ۰٫۸۰۹۰۳.$$

برای $n = ۳$ جمله باقیمانده به شکل زیر است (فرمول (۵-۷) را ببینید):

$$R_۳(x) = h^۴\frac{q(q+۱)(q+۲)(q+۳)}{۴!}f^{(۴)}(\xi).$$

در این مورد $h = ۵^\circ = ۰٫۰۸۷۳$ و $q = -۰٫۲$ و $f^{(۴)}(\xi) = \sin\xi \le ۱$. از اینرو

$$|R_۳(۵۴^\circ)| \le \frac{(۰٫۰۸۷)^۴ \times ۰٫۲ \times ۰٫۸ \times ۱٫۸ \times ۲٫۸}{۲۴} \approx ۰٫۲ \times ۱۰^{-۵}$$

می‌بینیم که جمله باقیمانده تنها در رقم پنجم اعشار موثر است. بنابراین ما نتیجه نهایی $\sin ۵۴^\circ = ۰٫۸۰۹۰$ را داریم. مقدار بدست آمده با مقدار کسب شده از جدول سینوس کاملاً مطابقت دارد.
حالا اجازه دهید که $\sin ۵۶^\circ$ را پیدا کنیم. در این مورد

$$q = \frac{۵۶^\circ - ۵۵^\circ}{۵^\circ} = ۰٫۲$$

و از فرمول (۵-۶) بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\sin ۵۶^\circ = ۰٫۸۱۹۲ + ۰٫۲ \times ۰٫۰۵۳۲ - \\ - \tfrac{۰٫۲ \times ۱٫۲}{۲} ۰٫۰۰۵۷ - \tfrac{۰٫۲ \times ۱٫۲ \times ۲٫۲}{۳!} ۰٫۰۰۰۳ = ۰٫۸۲۹۱۳.\end{aligned}$$

برای $q = ۰٫۲$ و $h = ۰٫۰۸۷۳$ جمله باقیمانده به طریق زیر برآورد می‌گردد:

$$|R_۳(۵۶^\circ)| \le \frac{(۰٫۰۸۷)^۴ \times ۰٫۲ \times ۱٫۲ \times ۲٫۲ \times ۳٫۲}{۲۴} \approx ۰٫۴ \times ۱۰^{-۵}$$

بنابراین، جمله باقیمانده تنها در رقم پنجم می‌تواند موثر باشد. از اینرو:

$$\sin ۵۶^\circ = ۰٫۸۲۹۱$$

مسائل

۱ـ با داشتن جدول مقادیر تابع $y = e^x$ و با استفاده از فرمول درون‌یابی خطی مقدار e^x را برای مقادیر x در زیر محاسبه کرده و برآورد جمله $R_۱$ را بدست آورید.

x	e^x
۰٫۵۰	۱٫۶۴۸۷
۰٫۵۱	۱٫۶۶۵۳
۰٫۵۲	۱٫۶۸۲۰
۰٫۵۳	۱٫۶۹۸۹
۰٫۵۴	۱٫۷۱۶۰
۰٫۵۵	۱٫۷۳۳۳
۰٫۵۶	۱٫۷۵۰۷
۰٫۵۷	۱٫۷۶۸۳
۰٫۵۸	۱٫۷۸۶۰
۰٫۵۹	۱٫۸۰۴۰
۰٫۶۰	۱٫۸۲۲۱

الف) ۰٫۵۰۷ ب) ۰٫۵۱۲
پ) ۰٫۵۲۳ ت) ۰٫۵۳۵
ث) ۰٫۵۴۱ ج) ۰٫۵۵۶
چ) ۰٫۵۶۸ ح) ۰٫۵۷۱
خ) ۰٫۵۸۹ د) ۰٫۵۹۴

۲ـ با جدول مقادیر تابع $y = \sin x$ و با استفاده از فرمول‌های اول و دوم نیوتن برای $n = ۲$ (درون‌یابی درجه دوم)، مقدار $\sin x$ را برای مقادیر x زیر محاسبه کرده و برآورد جمله باقیمانده $R_۲$ را بدست آورید.

الف) ۱٫۱۵۱ ب) ۱٫۲۱۸ پ) ۱٫۳۴۵
ت) ۱٫۴۲۱ ث) ۱٫۵۳۸ ج) ۱٫۶۰۹
چ) ۱٫۷۳۲ ح) ۱٫۸۴۹ خ) ۱٫۹۲۹
د) ۲٫۰۳۱ ذ) ۲٫۱۷۳ ر) ۲٫۲۱۸
ز) ۲٫۳۱۳ ژ) ۲٫۴۳۷ س) ۲٫۴۷۸

x	$\sin x$
۱٫۱	۰٫۸۹۱۲۱
۱٫۲	۰٫۹۳۲۰۴
۱٫۳	۰٫۹۶۳۵۶
۱٫۴	۰٫۹۸۵۴۵
۱٫۵	۰٫۹۹۷۴۹
۱٫۶	۰٫۹۹۹۵۷
۱٫۷	۰٫۹۹۱۶۶
۱٫۸	۰٫۹۷۳۸۵
۱٫۹	۰٫۹۴۶۳۰
۲٫۰	۰٫۹۰۹۳۰
۲٫۱	۰٫۸۶۳۲۱
۲٫۲	۰٫۸۰۸۵۰
۲٫۳	۰٫۷۴۵۷۱
۲٫۴	۰٫۶۷۵۴۶
۲٫۵	۰٫۵۹۸۴۷

۳ـ با داشتن جدول سینوس با فواصل ${}^\circ$۱، بیشترین خطای درون‌یابی خطی (R_1) چقدر است؟

۴ـ با داشتن جدولی از مقادیر لگاریتم طبیعی برای اعداد ۱ تا ۱۰ با فواصل ۰٫۰۰۱ ، بیشترین خطای درون‌یابی خطی (R_1) چقدر است؟

۵ـ با داشتن یک جدول از مقادیر انتگرال احتمال $\frac{2}{\pi}\int_0^x e^{-z^2}dz$ برای $x = 0$ تا $x = 3$ با فواصل ۰٫۰۰۱، حداکثر خطای درون‌یابی خطی (R_1) چیست؟

۶ـ توابع $f(x)$، $g(x)$ و $h(x)$ بوسیله جداول ۵-۶، ۵-۷ و ۵-۸ داده شده‌اند. با استفاده از فرمول‌های درون‌یابی درجه اول و دوم نیوتن مقادیر این توابع را برای آرگومان‌های با مقدار زیر بدست آورید.

جدول ۵-۸)

x	$h(x)$
۰٫۰۰	۰٫۲۸۰۸۱
۰٫۰۵	۰٫۳۱۲۷۰
۰٫۱۰	۰٫۳۴۵۴۹
۰٫۱۵	۰٫۳۷۹۰۴
۰٫۲۰	۰٫۴۱۳۱۸
۰٫۲۵	۰٫۴۴۷۷۴
۰٫۳۰	۰٫۴۸۲۵۵
۰٫۳۵	۰٫۵۱۷۴۵
۰٫۴۰	۰٫۵۵۲۲۶
۰٫۴۵	۰٫۵۸۶۸۲
۰٫۵۰	۰٫۶۲۰۹۶

جدول ۵-۷)

x	$g(x)$
۱٫۰	۰٫۵۶۵۲
۱٫۱	۰٫۶۳۷۵
۱٫۲	۰٫۷۱۷۴
۱٫۳	۰٫۷۹۷۳
۱٫۴	۰٫۸۸۶۱
۱٫۵	۰٫۹۸۱۷
۱٫۶	۰٫۰۸۴۸
۱٫۷	۱٫۱۹۶۴
۱٫۸	۱٫۳۱۷۲
۱٫۹	۱٫۴۴۸۲
۲٫۰	۱٫۵۹۰۶

جدول ۵-۶)

x	$f(x)$
۱٫۵۰	۰٫۵۱۱۸۳
۱٫۵۱	۰٫۵۰۶۲۴
۱٫۵۲	۰٫۵۰۰۶۴
۱٫۵۳	۰٫۴۹۵۰۳
۱٫۵۴	۰٫۴۸۹۴۰
۱٫۵۵	۰٫۴۸۳۷۶
۱٫۵۶	۰٫۴۷۸۱۱
۱٫۵۷	۰٫۴۷۲۴۵
۱٫۵۸	۰٫۴۶۶۷۸
۱٫۵۹	۰٫۴۶۱۱۰
۱٫۶۰	۰٫۴۵۵۴۰

(۱)	برای تابع $f(x)$	(۲)	برای تابع $g(x)$	(۳)	برای تابع $h(x)$
الف)	۱٫۵۰۹۱۱	الف)	۱٫۰۱۱۳	الف)	۰٫۰۱۹۲۸
ب)	۱٫۵۰۸۲۰	ب)	۱٫۰۲۱۹	ب)	۰٫۰۱۳۹۲
پ)	۱٫۵۰۲۵۳	پ)	۱٫۰۳۲۱	پ)	۰٫۰۲۴۷۵
ت)	۱٫۵۰۱۹۲	ت)	۱٫۰۴۲۸	ت)	۰٫۰۲۷۱۳
ث)	۱٫۵۹۵۱۳	ث)	۱٫۹۵۹۲	ث)	۰٫۴۷۱۱۳
ج)	۱٫۵۹۵۷۵	ج)	۱٫۹۶۷۵	ج)	۰٫۴۷۵۳۱
چ)	۱٫۵۹۶۱۴	چ)	۱٫۹۷۲۸	چ)	۰٫۴۸۳۹۸
ح)	۱٫۵۹۷۲۸	ح)	۱٫۹۸۱۹	ح)	۰٫۴۸۶۷۵

۵ـ۳ـ فرمول‌های درون‌یابی گوس، استرلینگ[1] و بسل[2]

۱ـ فرمول‌های درون‌یابی گوس. فرمول درون‌یابی اول گوس (درون‌یابی پیشرونده) به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \\ &+ \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + \dots \\ &\dots + \frac{(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(q+n-1)\dots(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}, \end{aligned} \qquad (۵\text{-}۸)$$

که در آن $q = \frac{x-x_0}{h}$. تفاضلات Δy_0، $\Delta^2 y_{-1}$، $\Delta^3 y_{-1}$، $\Delta^4 y_{-2}$، $\Delta^5 y_{-2}$، $\Delta^6 y_{-3}$، ... مورد استفاده در این فرمول سطر شکسته پایین در جدول ۵-۹ را تشکیل می‌دهند.

فرمول دوم درون‌یابی گوس (درون‌یابی پسرونده) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{(q+1)q}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \\ &+ \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \dots + \frac{(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} + \\ &+ \frac{(q+n)(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \end{aligned} \qquad (۵\text{-}۹)$$

که در آن $q = \frac{x-x_0}{h}$. تفاضلات Δy_{-1} ، $\Delta^2 y_{-1}$، $\Delta^3 y_{-2}$، $\Delta^4 y_{-2}$، $\Delta^5 y_{-3}$، $\Delta^6 y_{-3}$، ... مورد استفاده در این فرمول سطر شکسته بالا در جدول ۵-۹ را تشکیل می‌دهند.جمله باقیمانده فرمول (۵-۸) و (۵-۹) را می‌توان به صورت زیر نوشت ([۱] را ببینید):

$$R_{2n} = \frac{h^{2n+1} f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} q(q^2-1^2)(q^2-2^2)\dots(q^2-n^2), \qquad (۵\text{-}۱۰)$$

که در آن ξ یک نقطه واقع در بازه‌ای است که تمام نقاط x_i $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n)$ و نقطه x را شامل می‌شود.

1) Stirling 2) Bessel

فرمول‌های گوس برای درون‌یابی در اواسط جدول (نزدیک به x_0) مورد استفاده قرار می‌گیرند. فرمول اول برای $x > x_0$ و فرمول دوم برای $x < x_0$ به کار می‌رود.

مثال ۵ـ۵ـ با استفاده از جدول مقادیر تابع $y = e^{x}$ (جدول ۵-۱۰) مقدار $e^{1/13}$ و $e^{1/17}$ را بیابید.

حل ـ با تشکیل یک جدول تفاضلی (جدول ۵-۱۰) می‌بینیم که تفاضلات سوم عملاً ثابت می‌شوند. بنابراین کافیست که مقدار $n = 3$ را در فرمول‌های (۵-۸) و (۵-۹) قرار دهیم.
برای محاسبه $e^{1/17}$ از فرمول (۵-۸) برای $n = 3$ و $q = \frac{1/17-1/15}{0/05} = 0/4$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} e^{1/17} &= y_0 + q\Delta y_0 + \tfrac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \tfrac{q(q-1)(q+1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} = \\ &= 3/1582 + 0/4 \times 0/1619 + \tfrac{0/4\times(-0/6)}{2} 0/0079 + \\ &+ \tfrac{0/4\times(-0/6)\times 1/4}{6} 0/0004 = 3/2220. \end{aligned}$$

برای محاسبه $e^{1/13}$ ما از فرمول (۵-۹) برای $n = 3$ و $q = \frac{1/13-1/15}{0/05} = -0/4$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} e^{1/13} &= y_0 + q\Delta y_{-1} + \tfrac{(q+1)q}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \tfrac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} = \\ &= 3/1582 - 0/4 \times 0/1540 - \tfrac{0/6\times 0/4}{2} 0/0079 + \\ &+ \tfrac{0/6\times(-0/4)\times(-1/4)}{6} 0/0004 = 3/0957. \end{aligned}$$

جدول ۵-۹) جدول تفاضلات مثلثی

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
x_{-4}	y_{-4}						
		Δy_{-4}					
x_{-3}	y_{-3}		$\Delta^2 y_{-4}$				
		Δy_{-3}		$\Delta^3 y_{-4}$			
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		$\Delta^4 y_{-4}$		
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$		$\Delta^5 y_{-4}$	
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$		$\Delta^6 y_{-4}$
		Δy_{-1}	$\downarrow$	$\Delta^3 y_{-2}$	$\downarrow$	$\Delta^5 y_{-3}$	$\downarrow$
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta 64 y_{-2}$		$\Delta^6 y_{-3}$
		Δy_0	$\uparrow$	$\Delta^4 y_{-1}$	$\uparrow$	$\Delta^5 y_{-2}$	$\uparrow$
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^3 y_{-1}$		$\Delta^6 y_{-2}$
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		$\Delta^5 y_{-1}$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$		
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$			
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$				
		Δy_3					
x_4	y_4						

۲ـ فرمول درون‌یابی استرلینگ. با محاسبه میانگین حسابی دو فرمول درون‌یابی اول و دوم گوس این فرمول را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} P(x) = {} & y_0 + q\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2}\Delta^2 y_{-1} + \\ & + \frac{q(q^2-1^2)}{3!}\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{q^2(q^2-1^2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \\ & + \frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)}{5!}\frac{\Delta^5 y_{-3}+\Delta^5 y_{-2}}{2} + \frac{q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2)}{6!}\Delta^6 y_{-3} + \dots \\ & \dots + \frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)\dots[q^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!}\frac{\Delta^{2n-1}y_{-n}+\Delta^{2n-1}y_{-(n-1)}}{2} + \\ & + \frac{q^2(q^2-1^2)\dots[q^2-(n-1)^2]}{(2n)!}\Delta^{2n}y_{-n}, \end{aligned} \qquad (11\text{-}5)$$

که در آن $q = \frac{x-x_0}{h}$. جمله باقیمانده این فرمول به همان شکل (۵-۱۰) است.

این فرمول برای درون‌یابی در اواسط جدول و برای مقادیر q نزدیک به صفر کاربرد دارد و درکاربردهای عملی برای مقادیر $|q| \leq 0{,}25$ استفاده می‌شود.

مثال ۵ـ۶ـ با استفاده از جدول مقادیر تابع $y = \sin hx$ (جدول ۵-۱۱) مقدار $\sin h1{,}41710$ را بدست آورید.

جدول ۵-۱۰) مقادیر و تفاضلات تابع $y = e^x$

i	x_i	y_i	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
۳−	۱٫۰۰	۲٫۷۱۸۳			
			۱۳۹۴		
۲−	۱٫۰۵	۲٫۸۵۷۷		۷۱	
			۱۴۶۵		۴
۱−	۱٫۱۰	۳٫۰۰۴۲		۷۵	
			۱۵۴۰		۴
۰	۱٫۱۰	۳٫۱۵۸۲		۷۹	
			۱۶۱۹		۴
۱	۱٫۲۰	۳٫۳۲۰۱		۸۳	
			۱۷۰۲		۵
۲	۱٫۲۵	۳٫۴۹۰۳		۸۸	
			۱۷۹۰		
۳	۱٫۳۰	۳٫۶۶۹۳			

جدول ۵-۱۱) مقادیر و تفاضلات تابع $y = \sin hx$

i	x_i	y_i	Δy	$\Delta^۲ y$	$\Delta^۳ y$	$\Delta^۴ y$
-۴	۱٫۰	۱٫۱۷۵۲۰				
			۱۶۰۴۵			
-۳	۱٫۱	۱٫۳۳۵۶۵		۱۳۳۶		
			۱۷۳۸۱		۱۷۵	
-۲	۱٫۲	۱٫۵۰۹۴۶		۱۵۱۱		۱۴
			۱۸۸۹۲		۱۸۹	
-۱	۱٫۳	۱٫۶۹۸۳۸		۱۷۰۰		۱۷
			۲۰۵۹۲		۲۰۶	
۰	۱٫۴	۱٫۹۰۴۳۰		۱۹۰۶		۱۹
			۲۲۴۹۸		۲۲۵	
۱	۱٫۵	۲٫۱۲۹۲۸		۲۱۳۱		۲۱
			۲۴۶۲۹		۲۴۶	
۲	۱٫۶	۲٫۳۷۵۵۷		۲۳۷۷		۲۵
			۲۷۰۰۶		۲۷۱	
۳	۱٫۷	۲٫۶۴۵۶۳		۲۶۴۸		
			۲۹۶۵۵			
۴	۱٫۸	۲٫۹۴۲۱۷				

حل- یک جدول تفاضلی تشکیل می‌دهیم (جدول ۵-۱۱). با توجه به اینکه تفاضلات چهارم عملاً ثابت شده‌اند، ما مقدار $n = ۴$ را در فرمول (۵-۱۱) قرار می‌دهیم:

$$y(x) = y_۰ + q\frac{\Delta y_{-۱} + \Delta y_۰}{۲} + \frac{q}{۲}\Delta^۲ y_{-۱} + \\ + \frac{q(q^۲-۱)}{۳!}\frac{\Delta^۳ y_{-۲} + \Delta^۳ y_{-۱}}{۲} + \frac{q^۲(q^۲-۱)}{۴!}\Delta^۴ y_{-۲}.$$

برای $x = ۱٫۴۱۷۱۰$ داریم:

$$q = \frac{۱٫۴۱۷۱۰ - ۱٫۴}{۰٫۱} = ۰٫۱۷۱۰$$

بنابراین

$$\sinh ۱٫۴۱۷۱۰ = ۱٫۹۰۴۳۰ + ۰٫۱۷۱۰ \times \frac{۰٫۲۰۵۹۲ + ۰٫۲۲۴۹۸}{۲} + \\ + \frac{(۰٫۱۷۱۰)^۲}{۲} \times ۰٫۰۱۹۰۶ + \frac{۰٫۱۷۱۰((۰٫۱۷۱۰)^۲-۱)}{۳!} \times \frac{۰٫۰۰۲۰۶ + ۰٫۰۰۲۲۵}{۲} + \\ + \frac{(۰٫۱۷۱۰)^۲ \times ((۰٫۱۷۱۰)^۲-۱)}{۴!} \times ۰٫۰۰۰۱۹ = ۱٫۹۰۴۳۰ + ۰٫۱۷۱۰ \times ۰٫۲۱۵۴۵ + \\ + ۰٫۰۱۴۶۲ \times ۰٫۰۱۹۰۶ - ۰٫۰۲۷۶۷ \times ۰٫۰۰۲۱۵ - ۰٫۰۰۱۱۸ \times ۰٫۰۰۰۱۹ = ۱٫۹۴۱۳۶.$$

با مقایسه نتیجه بدست آمده با مقدار متناظر تابع $y = \sin hx$ بدست آمده از جدول پنج رقمی می‌بینیم که تمام ارقام نتیجه صحیح می‌باشد.

۳ـ فرمول درون‌یابی بسل. این فرمول به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}P(x) = {} & \tfrac{y_0+y_1}{2} + (q-\tfrac{1}{2})\Delta y_0 + \tfrac{q(q-1)}{2}\tfrac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2} + \\ & + \tfrac{(q-0.5)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \tfrac{q(q-1)(q+1)(q-2)}{4!}\tfrac{\Delta^4 y_{-2}+\Delta^4 y_{-1}}{2} + \\ & + \tfrac{(q-0.5)q(q-1)(q+1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + \\ & + \tfrac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)(q-3)}{5!}\tfrac{\Delta^6_{y-3}+\Delta^6 y_{-2}}{2} + \dots \\ & \dots + \tfrac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\dots(q-n)(q+n-1)}{(2n)!}\tfrac{\Delta^{2n} y_{-n}+\Delta^{2n} y_{-n+1}}{2} + \\ & + \tfrac{(q-0.5)q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\dots(q-n)(q+n-1)}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1} y_{-n},\end{aligned} \qquad (12\text{-}5)$$

که در آن $q = \frac{x-x_0}{h}$.

جمله باقیمانده را می‌توان به صورت زیر نوشت ([۱] و [۱۴] را ببینید):

$$R_n(x) = \frac{h^{2n+2}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) q(q^2-1^2)(q^2-2^2)\dots(q^2-n^2)(q-n-1) \qquad (13\text{-}5)$$

که در آن ξ بین $x_0 - nh$ و $x_0 + nh$ قرار دارد.

فرمول بسل برای درون‌یابی در اواسط جدول برای مقادیر q نزدیک به ۰٫۵ مناسب است و در کاربردهای عملی برای مقادیر $0.25 \le q \le 0.75$ به کار گرفته می‌شود. فرمول برای $q = 0.5$ شکل ساده‌ای دارد زیرا تمام جملات شامل تفاضلات فرد حذف می‌شوند. این مورد خاص فرمول درون‌یابی بسل را فرمول درون‌یابی نیمه‌ها (Halves) می‌خوانند. این فرمول برای تشکیل جداول با فواصل کوچک مورد استفاده است. جمله باقیمانده برای $q = 0.5$ برابر است با ([۱۴] را ببینید):

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} h^{2n+2}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) \frac{[1\times 3\times 5\dots(2n+1)]^2}{2^{2n+2}}. \qquad (14\text{-}5)$$

مثال ۵ـ۷ـ با استفاده از جدول ۵ـ۱۱ مقدار $\sin h 1.45224$ را بدست آورید.

حل‌ـ چون q نزدیک به ۰٫۵ است، از فرمول بسل استفاده می‌کنیم. با محدود کردن محاسبه تا پنج جمله اول داریم:

$$\begin{aligned}y(x) = {} & \tfrac{y_0+y_1}{2} + (q-0.5)\Delta y_0 + \tfrac{q(q-1)}{2}\tfrac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2} + \\ & + \tfrac{(q-0.5)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \tfrac{q(q-1)(q+1)(q-1)}{4!}\tfrac{\Delta^4 y_{-2}+\Delta^4 y_{-1}}{2}\end{aligned}$$

عبارات زیر را جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\tfrac{q(q-1)}{2} = -0.12475, \quad \tfrac{(q-0.5)q(q-1)}{3!} = -0.00093,$$
$$\tfrac{q(q^2-1)(q-2)}{4!} = 0.02339.$$

و سرانجام بدست می‌آوریم:

$$\sin h۱٫۴۵۲۲۴ = \frac{۱٫۹۰۴۳۰+۲٫۱۲۹۲۸}{۲} + ۰٫۰۲۲۴ \times ۰٫۲۲۴۹۸ - ۰٫۱۲۴۷۵ \times \frac{۰٫۰۱۹۰۶+۰٫۰۲۱۳۱}{۲} - ۰٫۰۰۰۹۳ \times ۰٫۰۰۲۲۵ + ۰٫۰۲۳۳۹ \times \frac{۰٫۰۰۰۱۹+۰٫۰۰۰۲۱}{۲} = ۲٫۰۱۹۳۱$$

با مقایسه نتیجه حاصله با مقدار متناظر بدست آمده از جدول می‌بینیم که تمام ارقام نتیجه صحیح هستند.

توجه- همانطورکه در مثال‌های قبل مشاهده می‌شود (مثال‌های ۵ـ۵ تا ۵ـ۷)، که در فرمول‌های درون‌یابی گوس، استرلینگ و بسل جملات بسیار سریعتر از فرمول‌های نیوتن کوچک می‌شوند و جمله آخر معمولاً هیچ تأثیری در نتیجه نهایی ندارد.

مسائل

در مسائل ۱ تا ۳ فرمول‌های درون‌یابی گوس، استرلینگ وبسل را بکار بندید.

۱ـ مقادیر تابع $f(x)$ (جدول ۵-۶) را برای مقادیر x زیر بیابید.

الف) ۱٫۵۵۰۳۱, ب) ۱٫۵۵۱۹۳, پ) ۱٫۵۵۲۳۲, ت) ۱٫۵۵۳۸۱, ث) ۱٫۵۵۴۸۲,
ج) ۱٫۵۵۵۶۸, چ) ۱٫۵۵۶۳۲, ح) ۱٫۵۵۷۱۳, خ) ۱٫۵۵۸۲۳, د) ۱٫۵۵۹۱۲,
ذ) ۱٫۵۴۱۱۳, ر) ۱٫۵۴۲۲۸, ز) ۱٫۵۴۳۴۳, ژ) ۱٫۵۴۴۳۵, س) ۱٫۵۴۵۸۱,
ش) ۱٫۵۴۶۱۲, ص) ۱٫۵۴۶۴۱, ض) ۱٫۵۴۷۱۸, ط) ۱٫۵۴۸۱۳, ظ) ۱٫۵۴۹۲۱.

۲ـ مقادیر تابع $g(x)$ (جدول ۵-۷) را برای مقادیر x زیر بدست آورید.

الف) ۱٫۵۰۹۵, ب) ۱٫۵۱۸۲, پ) ۱٫۵۲۶۵, ت) ۱٫۵۳۲۸, ث) ۱٫۵۴۵۵, ج) ۱٫۵۵۷۸,
چ) ۱۵۷۲۸, ح) ۱٫۵۸۲۳, خ) ۱٫۵۹۱۹, د) ۱٫۴۰۹۵, ذ) ۱٫۴۱۲۸, ر) ۱٫۴۲۱۳,
ز) ۱٫۴۳۱۸ ژ) ۱٫۴۴۲۴, س) ۱٫۴۵۸۳, ش) ۱٫۴۶۱۹, ص) ۱٫۴۷۲۴, ض) ۱٫۴۸۴۳,
ط) ۱٫۴۹۲۱.

۳ـ مقادیر تابع $h(x)$ (جدول ۵-۸) را برای مقادیر x زیر بیابید.

الف) ۰٫۲۵۰۵۵, ب) ۰٫۲۵۳۸۱, پ) ۰٫۲۶۱۱۹, ت) ۰٫۲۶۶۲۹, ث) ۰٫۲۶۹۲۱,
ج) ۰٫۲۷۱۰۵, چ) ۰٫۲۷۳۲۱, ح) ۰٫۲۸۴۷۲, خ) ۰٫۲۸۷۳۱, د) ۰٫۲۹۲۱۴,
ذ) ۰٫۲۰۹۳۱, ر) ۰٫۲۰۸۳۵, ز) ۰٫۲۱۴۱۳, ژ) ۰٫۲۱۶۱۸, س) ۰٫۲۲۳۹۲,
ش) ۰٫۲۲۶۹۲, ص) ۰٫۲۳۳۲۱, ض) ۰٫۲۳۷۱۹, ط) ۰٫۲۴۱۸۲.

۴ـ با استفاده از فرمول بسل جدول مقادیر تابع $f(x)$ را دو برابر دقیقترکنید (یعنی بین هر دو سطر یک سطر وارد کنید):

(الف)

x	$f(x)$
۰٫۵	۰٫۹۳۸۴
۰٫۶	۰٫۹۱۲۰
۰٫۷	۰٫۸۸۱۲
۰٫۸	۰٫۸۴۶۳
۰٫۹	۰٫۸۰۷۵
۱٫۰	۰٫۷۶۵۲
۱٫۱	۰٫۷۱۹۶
۱٫۲	۰٫۶۷۱۱
۱٫۳	۰٫۶۲۰۱
۱٫۴	۰٫۵۶۶۹
۱٫۵	۰٫۵۱۱۸

(ب)

x	$f(x)$
۱٫۰	۱٫۲۶۶۱
۱٫۱	۱٫۳۲۶۲
۱٫۲	۱٫۳۹۳۷
۱٫۳	۱٫۴۶۹۳
۱٫۴	۱٫۵۵۳۴
۱٫۵	۱٫۶۴۶۷
۱٫۶	۱٫۷۵۰۰
۱٫۷	۱٫۸۶۴۰
۱٫۸	۱٫۹۸۹۶
۱٫۹	۲٫۱۲۷۷
۲٫۰	۲٫۲۷۹۶

(پ)

x	$f(x)$
۲٫۰	۱٫۵۹۰۶
۲٫۱	۱٫۷۴۵۵
۲٫۲	۱٫۹۱۴۱
۲٫۳	۲٫۰۹۷۸
۲٫۴	۲٫۲۹۸۱
۲٫۵	۲٫۵۱۶۷
۲٫۶	۲٫۷۵۵۴
۲٫۷	۳٫۰۱۶۱
۲٫۸	۳٫۳۰۱۱
۲٫۹	۳٫۶۱۲۶
۳٫۰	۳٫۹۵۳۴

۵ـ۴ـ فرمول درون‌یابی لاگرانژ[1]ـ روش ایتکن[2]

فرض کنید که x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ نقاط مشخص شده دلخواهی هستند و $y_i = f(x_i)$ مقادیر تابع $f(x)$ در آن نقاط است. چند جمله‌ای درجه n زیر که مقادیر y_i در نقاط x_i را بدست می‌دهد را چند جمله لاگرانژ گویند ([۱]، [۱۱]، [۱۲] و [۵۸] را ببینید):

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}. \tag{5-15}$$

جمله باقیمانده برابر است با:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n), \tag{5-16}$$

که در آن ξ نقطه‌ای در کوچکترین بازه شامل تمام نقاط درون‌یابی x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ و نقطه x است. عبارت

$$L_i^{(n)}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}. \tag{5-17}$$

را ضرایب لاگرانژ گویند.

1) Lagrange 2) Aitken

برای محاسبه $L_i^{(n)}(x)$ استفاده از تفاضل‌هایی به شکل زیر مناسب می‌باشد (زیر تفاضل‌های واقع بر قطر اصلی خط کشیده شده است).

$$\left.\begin{array}{lllll} \underline{x - x_0} & x_0 - x_1 & x_0 - x_2 & \ldots & x_0 - x_n \\ x_1 - x_0 & \underline{x - x_1} & x_1 - x_2 & \ldots & x_1 - x_n \\ x_2 - x_0 & x_2 - x_1 & \underline{x - x_2} & \ldots & x_2 - x_n \\ \multicolumn{5}{l}{\dotfill} \\ x_n - x_0 & x_n - x_1 & x_n - x_2 & \ldots & \underline{x - x_n} \end{array}\right\} \qquad (۱۸\text{-}۵)$$

اگر حاصلضرب عناصر سطر iام را با D_i مشخص کنیم و حاصلضرب عناصر قطر اصلی را با $\Pi_{n+1}(x)$ یعنی $\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$، آنگاه خواهیم داشت:

$$L_i^{(n)}(x) = \frac{\Pi_{n+1}(x)}{D_i} \quad (i = 0, 1, \ldots, n) \qquad (۱۹\text{-}۵)$$

گاهی اوقات مناسب است که برای کاهش حجم محاسبات از این خاصیت که ضرایب لاگرانژ تحت یک جانشینی خطی تغییر نمی‌کنند استفاده کنیم. یعنی اگر $x = at + b$ و $x_i \; at_i + b \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$ آنگاه $L_i^{(n)}(x) = L_i^{(n)}(t)$. در مورد نقاط متساوی‌الفاصله درون‌یابی بسیار ساده می‌بود اگر جداول ضرایب لاگرانژ مورد استفاده قرار می‌گرفت.

اگر پیدا کردن عبارات عمومی $L_n(x)$ مدنظر نباشد و تنها مقادیر آنها را برای x بخواهیم و مقادیر تابع برای نقاط به تعداد کافی زیاد در دست باشد، آنگاه بکارگیری روش درون‌یابی ایتکن مناسب می‌باشد ([۱] را ببینید). طبق این روش چند جمله‌ای‌ها به ترتیب زیر محاسبه می‌شوند:

$$L_{i,i+1}(x) = \tfrac{1}{x_{i+1} - x_i} \begin{vmatrix} y_i & x_i - x \\ y_{i+1} & x_{i+1} - x \end{vmatrix}.$$

$$L_{i,i+1,i+2}(x) = \tfrac{1}{x_{i+2} - x_i} \begin{vmatrix} L_{i,i+1}(x) & x_i - x \\ L_{i+1,i+2}(x) & x_{i+2} - x \end{vmatrix},$$

$$L_{i,i+1,i+2,i+3}(x) = \tfrac{1}{x_{i+3} - x_i} \begin{vmatrix} L_{i,i+1,i+2}(x) & x_i - x \\ L_{i+1,i+2,i+3}(x) & x_{i+3} - x \end{vmatrix}, \ldots$$

چند جمله‌ای درون‌یابی درجه n که مقادیر y_i را در نقاط $x_i (i = 0, 1, \ldots, n)$ بدست می‌دهد به صورت زیر است:

$$L_{01\ldots n}(x) = \frac{1}{x_n - x_0} \begin{vmatrix} L_{01\ldots(n-1)} & (x)x_0 - x \\ L_{12\ldots n}(x) & x_n - x \end{vmatrix}$$

برای راحتی کار معمولاً نتیجه محاسبات بالا را در جدولی می‌آورند.

جدول ۵-۱۲) روش درون‌یابی ایتکن

x_i	y_i	$x_i - x$	$L_{i-1,i}$	$L_{i-2,i-1,i}$	$L_{i-3,i-2,i-1,i}$	$\dots$
x_0	y_0	$x_0 - x$				
x_1	y_1	$x_1 - x$	$L_{01}(x)$			
x_2	y_2	$x_2 - x$	$L_{12}(x)$	$L_{012}(x)$		
x_3	y_3	$x_3 - x$	$L_{23}(x)$	$L_{123}(x)$	$L_{0123}(x)$	$\dots$
x_4	y_4	$x_4 - x$	$L_{34}(x)$	$L_{234}(x)$	$L_{1234}(x)$	$\dots$

در مورد روش ایتکن محاسبات آنقدر ادامه پیدا می‌کند تا مقادیر متوالی $L_{01\dots n(x)}$ و $L_{01\dots n(n+1)}(x)$ با دقت مورد نظر مطابق شوند. این روش به راحتی توسط کامپیوتر قابل پیاده سازی بوده و امکان وارسی اتوماتیک دقت محاسبه را نیز دارد.

مثال ۵ـ۸ـ چند جمله‌ای درون‌یابی لاگرانژ را برای تابع $f(x)$ داده شده با جدول زیر را پیدا کنید.

i	۰	۱	۲	۳
x_i	۰	۰٫۱	۰٫۳	۰٫۵
y_i	۰٫۵−	۰	۰٫۲	۱

حل ـ توسط فرمول (۵-۱۷) برای $n = 3$ عبارات $L_i^{(3)}(x)$ $(i = 0, 2, 3)$ را بدست می‌آوریم:

$$L_0^{(3)}(x) = \frac{(x-0.1)(x-0.3)(x-0.5)}{(-0.1)(-0.3)(-0.5)} = -\frac{x^3-0.9x^2+0.23x-0.015}{0.015},$$
$$L_2^{(3)}(x) = \frac{x(x-0.1)(x-0.5)}{0.3\times 0.2(-0.2)} = -\frac{x^3-0.6x^2+0.05x}{0.012},$$
$$L_3^{(3)}(x) = \frac{x(x-0.1)(x-0.3)}{0.5\times 0.4\times 0.2} = \frac{x^3-0.4x^2+0.03x}{0.04}$$

(در اینجا نیازی نیست که $L_1^{(3)}(x)$ محاسبه شود چون $y_1 = 0$).

پس چند جمله‌ای مطلوب به شکل زیر خواهد بود:

$$L_3(x) = L_0^{(3)}(x)y_0 + L_1^{(3)}(x)y_1 + L_2^{(3)}(x)y_2 + L_3^{(3)}(x)y_3 = \\ = \frac{125}{3}x^3 - 30x^2 + \frac{73}{12}x - 0.5.$$

مثال ۵ـ۹ـ تابع $y = f(x)$ در جدول زیر داده شده است:

x	۰٫۰۵	۰٫۱۵	۰٫۲۰	۰٫۲۵	۰٫۳۵	۰٫۴۰	۰٫۵۰	۰٫۵۵
y	۰٫۹۵۱۲	۰٫۸۶۰۷	۰٫۸۱۸۷	۰٫۷۷۸۸	۰٫۷۰۴۷	۰٫۶۷۰۳	۰٫۶۰۶۵	۰٫۵۷۶۹

مقدار $f(0.45)$ را بیابید.

حل- برای سادگی محاسبات قرار می‌دهیم: $x = ۰/۰۵t$. آنگاه مقادیر متغیر جدید t متناظر با نقاط درون‌یابی برابر با ۱، ۳، ۴، ۵، ۷، ۸، ۱۰ و ۱۱ خواهند شد. بدین ترتیب برای $x = ۰/۴۵$ داریم $t = ۹$. با استفاده از خاصیت ثبات ضرایب لاگرانژ در تغییرات خطی، مقدار $L_i^{(n)}(t)$ را به جای $L_i^{(n)}(x)$ محاسبه می‌کنیم (به جدول بعدی نگاه کنید).
از اینرو بدست می‌آوریم:

$$y(۰/۴۵) = \Pi(t)\sum_{i=۰}^{۷}\frac{y_i}{D_i} = \Pi(t).S = ۳۸۴۰ \times ۱/۶۶۰۴ \times ۱۰^{-۴} = ۰/۶۳۷۶.$$

مثال ۵-۱۰- با چه دقتی امکان محاسبه $\ln ۱۰۰/۵$ توسط فرمول لاگرانژ و با در دست داشتن مقادیر $\ln ۱۰۰$، $\ln ۱۰۱$، $\ln ۱۰۲$ و $\ln ۱۰۳$ وجود دارد؟

حل- جمله باقیمانده فرمول لاگرانژ برای $n = ۳$ به شکل زیر است:

$$R_۳(x) = \frac{f^{(۴)}(\xi)}{۴!}(x - x_۰)(x - x_۱)(x - x_۲)(x - x_۳).$$

جدول ۵-۱۳) محاسبه ضرایب لاگرانژ

i	$t_i - t_j$ $(i \neq j)$								D_i	y_i	$\frac{y_i}{D_i}$
۰	۸	−۲	−۳	−۴	−۶	−۷	−۸	−۱۰	−۷۲۵۷۶۰	۰/۹۵۱۲	$-۰/۰۱۳۱ \times ۱۰^{-۴}$
۱	۲	۶	−۱	−۲	−۴	−۵	−۷	−۸	۲۶۸۸۰	۰/۸۶۰۷	$۰/۳۲۰۲ \times ۱۰^{-۴}$
۲	۳	۱	۵	−۱	−۳	−۴	−۶	−۷	−۷۵۶۰	۰/۸۱۸۷	$-۱/۰۸۲۹ \times ۱۰^{-۴}$
۳	۴	۲	۱	۴	−۲	−۳	−۵	−۶	۵۷۶۰	۰/۷۷۸۸	$۱/۳۵۲۰ \times ۱۰^{-۴}$
۴	۶	۴	۳	۲	۲	−۱	−۳	−۴	−۳۴۵۶	۰/۷۰۴۷	$-۲/۰۳۹۰ \times ۱۰^{-۴}$
۵	۷	۵	۴	۳	۱	۱	−۲	−۳	۲۵۲۰	۰/۶۷۰۳	$۲/۶۵۹۹ \times ۱۰^{-۴}$
۶	۹	۷	۶	۵	۳	۲	−۱	−۱	۱۱۳۴۰	۰/۶۰۶۵	$۰/۵۳۴۸ \times ۱۰^{-۴}$
۷	۱۰	۸	۷	۶	۴	۳	۱	−۲	−۸۰۶۴۰	۰/۵۷۶۹	$-۰/۰۷۱۵ \times ۱۰^{-۴}$
$\Pi(t) = ۳۸۴۰$									$S = \sum_{i=۰}^{۷}\frac{y_i}{D_i} = ۱/۶۶۰۴ \times ۱۰^{-۴}$		

در این مورد $x_۰ = ۱۰۰$، $x_۱ = ۱۰۱$، $x_۲ = ۱۰۲$، $x_۳ = ۱۰۳$ و $x = ۱۰۰/۵$ هستند و $۱۰۰ < \xi < ۱۰۳$. چون $f(x) = \ln x$، پس $f^{(۴)}(x) = -\frac{۶}{x^۴}$. بنابراین:

$$|R_۳(۱۰۰/۵)| \leq \frac{۶}{۱۰۰^۴ \times ۴!} \times ۰/۵ \times ۰/۵ \times ۱/۵ \times ۲/۵ = ۰/۲۳ \times ۱۰^{-۸}$$

مثال ۵-۱۱- تابع $y = \sqrt[3]{x}$ به صورت جدولی داده شده است:

x	۱٫۰	۱٫۱	۱٫۳	۱٫۵	۱٫۶
y	۱٫۰۰۰	۱٫۰۳۲	۱٫۰۹۱	۱٫۱۴۵	۱٫۱۷۰

با بکارگیری روش ایتکن مقدار $\sqrt[3]{1/15}$ را بدست آورید.

حل- مقادیر تابع داده شده و محاسبه تفاضلات $x_i - x$ برای $x = 1/15$ را در جدول وارد می‌کنیم. سپس به ترتیب بدست می‌آوریم:

$$L_{01} = \frac{1}{x_1 - x_0}\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix} = \frac{1}{0/1}\begin{vmatrix} 1 & -0/15 \\ 1/032 & -0/05 \end{vmatrix} = 1/048,$$

$$L_{12} = \frac{1}{x_2 - x_1}\begin{vmatrix} y_1 & x_1 - x \\ y_2 & x_2 - x \end{vmatrix} = \frac{1}{0/2}\begin{vmatrix} 1/032 & 0/05 \\ 1/091 & 0/15 \end{vmatrix} = 1/047,$$

$$L_{23} = \frac{1}{x_3 - x_2}\begin{vmatrix} y_2 & x_2 - x \\ y_3 & x_3 - x \end{vmatrix} = \frac{1}{0/2}\begin{vmatrix} 1/091 & 0/15 \\ 1/145 & 0/35 \end{vmatrix} = 1/050,$$

$$L_{34} = \frac{1}{x_4 - x_3}\begin{vmatrix} y_3 & x_3 - x \\ y_4 & x_4 - x \end{vmatrix} = \frac{1}{0/1}\begin{vmatrix} 1/145 & 0/35 \\ 1/170 & 0/45 \end{vmatrix} = 1/057.$$

جدول ۵-۱۴) روش ایتکن برای مثال ۵-۱۱

i	x	y	$x_i - x$	$L_{i-1,i}$	$L_{i-2,i-1,i}$
۰	۱٫۰	۱٫۰۰۰	−۰٫۱۵		
۱	۱٫۱	۱٫۰۳۲	−۰٫۰۵	۱٫۰۴۸	
۲	۱٫۳	۱٫۰۹۱	۰٫۱۵	۱٫۰۴۷	۱٫۰۴۸
۳	۱٫۵	۱٫۱۴۵	۰٫۳۵	۱٫۰۵۰	
۴	۱٫۶	۱٫۱۷۰	۰٫۴۵	۱٫۰۵۷	

مقادیر بدست آمده را در جدول ۵-۱۴ وارد کرده و آنگاه محاسبه می‌کنیم:

$$L_{012} = \frac{1}{0/3}\begin{vmatrix} 1/048 & -0/15 \\ 1/047 & 0/15 \end{vmatrix} = 1/048.$$

مقادیر L_{01} و L_{012} تا رقم سوم مطابق هستند. پس همین‌جا متوقف می‌شویم. بنابراین خواهیم داشت: $\sqrt[3]{1/15} = 1/048$ با دقت 10^{-3}.

مسائل

۱ـ چند جمله‌ای با کمترین درجه که شامل مقادیر مشخص شده در نقاط داده شده هستند را پیدا کنید.

(الف

x	y
۱٫۴۵	۳٫۱۴
۱٫۳۶	۴٫۱۵
۱٫۱۴	۵٫۶۵

(ب

x	y
۰	۲
۱	۳
۲	۱۲
۵	۱۴۷

(پ

x	y
۰	۱٫۴۵
۱٫۵	۳٫۱۴
۳٫۴	۴٫۶۵
۶٫۸	۴٫۱۱

(ت

x	y
۱۱	۱۳۴۲
۱۳	۲۲۱۰
۱۴	۲۷۵۸
۱۸	۵۸۵۰
۱۹	۶۸۷۸
۲۱	۹۲۸۲

(ث

x	y
−۲	۲۵
۱	−۸
۲	−۱۵
۴	−۲۳

(ج

x	y
−۲	۶
−۱	۰
۰	۲
۱	۰
۲	۶

۲ـ یک جدول از مقادیر تابعی به صورت زیر داده شده است:

x	۱٫۵۰	۱٫۵۴	۱٫۵۶	۱٫۶۰	۱٫۶۳	۱٫۷۰
y	۳٫۸۷۳	۳٫۹۲۴	۳٫۹۵۰	۴٫۰۰۰	۴٫۰۳۷	۴٫۱۲۳

با استفاده از فرمول لاگرانژ مقادیر تابع را در نقاط مشخص شده بدست آورید:

الف) ۱٫۵۲ ب) ۱٫۵۵ پ) ۱٫۵۸ ت) ۱٫۶۱ ث) ۱٫۶۷

۳ـ یک جدول از مقادیر تابعی داده شده است:

x	۲٫۰	۲٫۳	۲٫۵	۳٫۰	۳٫۵	۳٫۸	۴٫۰
y	۵٫۸۴۸	۶٫۱۲۷	۶٫۳۰۰	۶٫۶۹۴	۷٫۰۴۷	۷٫۲۴۳	۷٫۳۶۸

با استفاده از فرمول لاگرانژ مقادیر تابع را در نقاط مشخص شده بدست آورید:

الف) ۲٫۲۲ ب) ۲٫۴۱ پ) ۲٫۷۸ ت) ۳٫۳۴ ث) ۳٫۷۵ ج) ۳٫۸۸

۴ـ با دانستن مقادیر $\sin x$ برای $x = ۰, \frac{\Pi}{۶}, \frac{\Pi}{۴}, \frac{\Pi}{۳}, \frac{\Pi}{۲}$ مقدار $\sin x$ را برای $x = \frac{\Pi}{۱۲}$ پیدا کرده و خطا را برآورد کنید.

۵ـ با دانستن مقادیر $\cos x$ برای $x = ۰, \frac{V}{۶}, \frac{\Pi}{۴}, \frac{\Pi}{۳}, \frac{\Pi}{۲}$ مقدار $\cos x$ را برای $x = \frac{\Pi}{۵}$ پیدا کرده و خطا را برآورد کنید.

۶ـ با استفاده از روش ایتکن مقادیر تابع‌هایی که به صورت جدولی (در زیر) مشخص شده‌اند را در نقاط داده شده بدست آورید.

الف)

x	۱۴	۱۷	۳۱	۳۵
y	۶۸٫۷	۶۴٫۰	۴۴٫۰	۳۹٫۱

مقدار $y(27)$؟

ب)

x	۹۳٫۰	۹۶٫۲	۱۰۰٫۰	۱۰۴٫۲	۱۰۸٫۷
y	۱۱٫۳۸	۱۲٫۸۰	۱۴٫۷۰	۱۷٫۰۷	۱۹٫۹۱

مقدار $y(102)$؟

پ)

x	۰	۲	۳	۶	۷	۹
y	۶۵۸ ۵۰۳	۷۰۴ ۹۶۹	۷۲۹ ۰۰۰	۸۰۴ ۳۵۷	۸۳۰ ۵۸۴	۸۸۴ ۷۳۶

مقدار $y(5)$؟

۷ـ تابع $f(x)$ به صورت جدولی در زیر داده شده است:

x	۱٫۰۰	۱٫۰۸	۱٫۱۳	۱٫۲۰	۱٫۲۷	۱٫۳۱	۱٫۳۸
$f(x)$	۱٫۱۷۵۲۰	۱٫۳۰۲۵۴	۱٫۳۸۶۳۱	۱٫۵۰۹۴۶	۱٫۲۱۷۳۰	۱٫۲۲۳۶۱	۱٫۲۳۴۷۰

با استفاده از روش درون‌یابی ایتکن و با دقت 10^{-5} مقادیر تابع را برای xهای زیر بدست آورید:

الف) ۱٫۱۳۴ ب) ۱٫۱۳۹ پ) ۱٫۱۴۳ ت) ۱٫۱۵۱ ث) ۱٫۱۶۶

ج) ۱٫۱۷۵ چ) ۱٫۱۸۲ ح) ۱٫۱۹۷ خ) ۱٫۱۸۵ د) ۱٫۱۹۲

ذ) ۱٫۱۹۵ ر) ۱٫۱۷۸

۵ـ۵ـ درون‌یابی معکوس

فرض کنید که یک تابع $y = f(x)$ را به صورت جدولی در اختیار داریم. مسئله درون‌یابی معکوس یعنی یافتن یک مقدار آرگومان x برای یک مقدار داده شده تابع y. فرض می‌کنیم که تابع $f(x)$ در بازه مورد نظر یکنوا[1] است، بنابراین مسئله یک جواب یکتا دارد. در این مورد مسئله مستقیماً با استفاده از چندجمله‌ای درون‌یابی لاگرانژ حل می‌شود. بدین‌منظور کافی است که متغیر y را به عنوان متغیری مستقل در نظر گرفته و یک فرمول برای x به عنوان یک تابع بر حسب y بنویسیم:

$$x = \sum_{i=0}^{n} x_i \frac{(y-y_0)(y-y_1)\dots(y-y_{i-1})(y-y_{i+1})\dots(y-y_n)}{(y_i-y_0)(y_i-y_1)\dots(y_i-y_{i-1})(y_i-y_{i+1})\dots(y_i-y_n)} \qquad (۵\text{-}۲۰)$$

که در آن $y_i = f(x_i)\ (i = 0, 1, \dots, n)$. در اینجا نیز جمله باقیمانده را می‌توان با عوض کردن x و y در جمله باقیمانده فرمول لاگرانژ بدست آورد.

1) Monotonic

مثال ۵ـ۱۲ـ تابع $y = f(x)$ به صورت جدولی داده شده است، مقدار x متناظر با $y = 10$ را بیابید.

x	۱۰	۱۵	۱۷	۲۰
y	۳	۷	۱۱	۱۷

حل‌ـ در این مورد فرمول درون‌یابی لاگرانژ به صورت زیر است:

$$x(y) = \sum_{i=0}^{3} x_i L_i^{(3)}(y)$$

که در آن $L_i^{(3)}(y)$ ضرایب لاگرانژ هستند.
برای $y = 10$ داریم:

$$\begin{aligned} x(10) = {} & 10\,\tfrac{(10-7)(10-11)(10-17)}{(3-7)(3-11)(3-17)} + 15\tfrac{(10-3)(10-11)(10-17)}{(7-3)(7-11)(7-17)} + \\ & + 17\tfrac{(10-3)(10-7)(10-17)}{(11-3)(11-7)(11-17)} + 20\,\tfrac{(10-3)(10-7)(10-11)}{(17-3)(17-7)(17-11)} = \\ & = -\tfrac{15}{32} + \tfrac{147}{32} + \tfrac{17\times 49}{64} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{33}{8} + \tfrac{833}{64} - \tfrac{1}{2} = 16{,}641. \end{aligned}$$

در این مورد، به‌هرحال، روش ایتکن (بخش ۵ـ۴ را ببینید) بسیار مناسب‌تر می‌باشد.

روش‌های تکرار. اگر یک تابع $y = f(x)$ با جدولی شامل نقاط متساوی‌الفاصله داده شود، آنگاه ما برای آن یکی از فرمول‌های درون‌یابی را می‌نویسیم، برای مثال فرمول درون‌یابی اول نیوتن:

$$y = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}q + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}q(q-1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}q(q-1)\ldots(q-n+1) \qquad (5\text{-}21)$$

با در نظر گرفتن عبارت آخر به عنوان یک تابع بر حسب q و با استفاده از مقادیر y داده شده، محاسبه می‌کنیم:

$$x = x_0 + qh$$

اگر تعداد نقاط زیاد باشد، آنگاه یک معادله درجه بالا بدست خواهیم آورد که بهتر است با روش تکرار حل شود. بدین منظور معادله (۵-۲۱) را بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} q = \varphi(q) = \tfrac{y-y_0}{\Delta y_0} - \tfrac{\Delta^2 y_0}{2!\Delta y_0}q(q-1) - \cdots - \\ -\tfrac{\Delta^n y_0}{n!\Delta y_0}q(q-1)\ldots(q-n+1). \end{aligned}$$

ما مقدار تقریب اولیه را $q_0 = \frac{y-y_0}{\Delta y_0}$ در نظر می‌گیریم و از فرآیند تکرار $q_m = \varphi(q_{m-1})$ استفاده می‌کنیم. در اغلب موارد فرآیند تکرار برای یک فاصله به اندازه کافی کوچک $h = x_{i+1} - x_i$ متقارب می‌شود و به مقدار ریشه همگرا می‌گردد. یعنی

$$q = \lim_{m\to\infty} q_m$$

شرط تقارب، برقراری نامساوی $|\varphi'(q)| \leq \alpha < ۱$ است. در واقع فرآیند تکرار تا هنگامی ادامه می‌یابد که مقادیر متوالی q_m و $q_{m+۱}$ با دقت مورد نظر مطابق شوند و آنگاه می‌توان در نظر گرفت:

$$q \approx q_{m+۱}$$

توجه- در روش تکرار تشریح شده برای درون‌یابی معکوس لازم است که تابع $f(x)$ تنها در بازه $(x_۰, x_۱)$ یکنوا باشد، که در نتیجه $y_۰ < y < y_۱$ و یا $y_۰ > y > y_۱$ خواهد بود. به‌هرحال نقاط مورد استفاده توسط فرمول درون‌یابی می‌توانند در بازه یکنوایی تابع $f(x)$ واقع باشند.

مثال ۵ـ۱۳ـ با استفاده از جدول مقادیر تابع $y = \sin hx$ (جدول ۵ـ۱۵ را ببینید) مقدار x را برای $\sin hx = ۵$ بیابید.

جدول ۵ـ۱۵) مقادیر تابع $y = \sin hx$

x	y	Δy	$\Delta^۲ y$	$\Delta^۳ y$
۲٫۲	۴٫۴۵۷	۱٫۰۰۹	۰٫۲۲۰	۰٫۰۵۴
۲٫۴	۵٫۴۶۶	۱٫۲۲۹	۰٫۲۷۴	۰٫۰۴۳
۲٫۶	۶٫۶۹۵	۱٫۵۰۳	۰٫۳۱۷	
۲٫۸	۸٫۱۹۸	۱٫۸۲۰		
۳٫۰	۱۰٫۰۱۸			

حل- چند جمله‌ای درون‌یابی اول نیوتن را تشکیل می‌دهیم. برای راحتی خودمان تا تفاضل سوم را در نظر می‌گیریم که عملاً مقدارشان ثابت شده است:

$$y = y_۰ + \Delta y_۰ q + \frac{\Delta^۲ y_۰}{۲} q(q-۱) + \frac{\Delta^۳ y_۰}{۶} q(q-۱)(q-۲).$$

قرار می‌دهیم $x_۰ = ۲٫۲$ زیرا مقدار داده شده $y = ۵$ بین $y_۰ = ۴٫۴۵۷$ و $y_۱ = ۵٫۴۶۶$ قرار می‌گیرد. در این مورد تابع تکرار به شکل زیر است:

$$\varphi(q) = \frac{y - y_۰}{\Delta y_۰} - \frac{\Delta^۲ y_۰}{۲\Delta y_۰} q(q-۱) - \frac{\Delta^۳ y_۰}{۶\Delta y_۰} q(q-۱)(q-۲).$$

با فرض $y_۰ = ۴٫۴۵۷$، تقریب اولیه را بدست می‌آوریم:

$$q_۰ = \frac{۵ - ۴٫۴۵۷}{۱٫۰۰۹} = ۰٫۵۳۸$$

سپس به ترتیب بدست می‌آوریم:

$$q_1 = \frac{y-y_0}{\Delta y_0} - \frac{\Delta^2 y_0}{2\Delta y_0} q_0(q_0-1) - \frac{\Delta^3 y_0}{6\Delta y_0} q_0(q_0-1)(q_0-2) =$$
$$= 0{,}538 + \frac{0{,}538 \times 0{,}462}{2} \times \frac{0{,}220}{1{,}009} - \frac{0{,}538 \times 0{,}462 \times 1{,}462}{6} \times \frac{0{,}054}{1{,}009} = 0{,}5641,$$
$$q_2 = \frac{y-y_0}{\Delta y_0} - \frac{\Delta^2 y_0}{2\Delta y_0} q_1(q_1-1) - \frac{\Delta^3 y_0}{6\Delta y_0} q_1(q_1-1)(q_1-2) =$$
$$= 0{,}538 + \frac{0{,}5644 \times 0{,}4356}{2} \times \frac{0{,}220}{1{,}009} - \frac{0{,}5644 \times 0{,}4356 \times 1{,}4356}{6} \times \frac{0{,}054}{1{,}009} = 0{,}5644.$$

از اینرو، با سه رقم اعشار دقت داریم:

$$q = 0{,}564$$
$$x = 2{,}2 + 0{,}564 \times 0{,}2 = 2{,}2 + 0{,}113 = 2{,}313$$

مثال ۵ـ۱۴ـ در جدول زیر مقادیر انتگرال احتمال داده شده است (جدول ۵-۱۶).

جدول ۵-۱۶) مقادیر انتگرال احتمال

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	Δ^4
۰٫۴۵	۰٫۴۷۵۴۸۱۸				
		۹۱ ۷۳۷			
۰٫۴۶	۰٫۴۸۴۶۵۵۵		−۸۴۰	−۱۱	۱
		۹۰ ۸۹۷			
۰٫۴۷	۰٫۴۹۳۷۴۵۲		−۸۵۱		
		۹۰ ۰۴۶		−۱۰	
۰٫۴۸	۰٫۵۰۲۷۴۹۸		−۸۶۱		۲
		۸۹ ۱۸۵		−۸	
۰٫۴۹	۰٫۵۱۱۶۶۸۳		−۸۶۹		
		۸۸ ۳۱۶			
۰٫۵۰	۰٫۵۲۰۴۹۹۹				

$$y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz.$$

مقدار xی را که انتگرال برابر $\frac{1}{2}$ می‌شود را پیدا کنید.

حل‌ـ همانطورکه در جدول دیده می‌شود، نزدیکترین مقدار x متناظر با مقدار $y = \frac{1}{2}$، نقطه $x_0 = 0{,}47$ است. بنابراین، در اینجا بکارگیری فرمول بسل مناسب است:

$$y = \frac{y_0+y_1}{2} + (q-\tfrac{1}{2})\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2}\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2} + \\ + \frac{(q-1/2)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1}. \qquad (۲۲\text{-}۵)$$

در این مورد $x_0 = 0{,}47$، $h = 0{,}01$ و $y = 0{,}5$ هستند.

برای راحتی محاسبه از جانشینی $p = q - ۰{,}۵$ استفاده می‌کنیم که از آنجا $q = p + ۰{,}۵$ نتیجه می‌شود. حال فرمول (۵-۲۲) به صورت زیر در می‌آید:

$$۰{,}۵ = \frac{y_۰ + y_۱}{۲} + p\Delta y_۰ + \frac{p^۲ - ۰{,}۲۵}{۲}\frac{\Delta^۲ y_{-۱} + \Delta^۲ y_۰}{۲} + \frac{p(p^۲ - ۰{,}۲۵)}{۳!}\Delta^۳ y_{-۱}.$$

با جدا کردن جملات شامل p داریم:

$$p = \frac{۱}{\Delta y_۰}(-\frac{y_۰+y_۱}{۲} + ۰{,}۵) - \frac{p^۲-۰{,}۵}{۲}\frac{\Delta^۲ y_{-۱}+\Delta^۲ y_۰}{۲\Delta y_۰} - \\ - \frac{p(p^۲-۰{,}۲۵)}{۶}\frac{\Delta^۳ y_{-۱}}{\Delta y_۰} = \varphi(p).$$

به عنوان تقریب اولیه داریم:

$$p_۰ = \frac{۱}{\Delta y_۰}(۰{,}۵ - \frac{y_۰+y_۱}{۲}) = \\ = \frac{۱}{۰{,}۰۰۹۰۰۴۶}(۰{,}۵ - \frac{۰{,}۴۹۳۷۴۵۲+۰{,}۵۰۲۷۴۹۸}{۲}) = ۰{,}۱۹۴۶۲۳.$$

سپس بترتیب بدست می‌آوریم:

$$p_۱ = p_۰ - \frac{p_۰^۲-۰{,}۲۵}{۲}\frac{\Delta^۲ y_{-۱}+\Delta^۲ y_۰}{۲\Delta y_۰} - \frac{p_۰(p_۰^۲-۰{,}۲۵)}{۶}\frac{\Delta^۳ y_{-۱}}{\Delta y_۰} = \\ = ۰{,}۱۹۴۶۲۳ + ۴{,}۷۵۳ \times ۱۰^{-۳}[(۰{,}۱۹۴۶۲۳)^۲ - ۰{,}۲۵] + \\ + ۱{,}۸۵ \times ۱۰^{-۵} \times ۰{,}۱۹۴۶۲۳[(۰{,}۱۹۴۶۲۳)^۲ - ۰{,}۲۵] \times (-۰{,}۰۰۰۰۱۸۵) = \\ = ۰{,}۱۹۴۶۲۳ - ۰{,}۰۰۱۰۸ - ۰{,}۰۰۰۰۰۰۱ = ۰{,}۱۹۳۶۱۴,$$

$$p_۲ = p_۰ - \frac{p_۱^۲-۰{,}۲۵}{۲}\frac{\Delta^۲ y_{-۱}+\Delta^۲ y_۰}{۲\Delta y_۰} - \frac{p_۱(p_۱^۲-۰{,}۲۵)}{۶}\frac{\Delta^۳ y_{-۱}}{\Delta y_۰} = ۰{,}۱۹۳۶۱۲.$$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم (با دقت ۵ رقم اعشار):

$$p \approx ۰{,}۱۹۳۶۱$$

که از آنجا $q = p + ۰{,}۵ = ۰{,}۶۹۳۶۱$ و $x = x_۰ + qh = ۰{,}۴۷۶۹۳۶۱$ که مقدار مطلوب x با دقت ۵ رقم اعشار بدست آمده است.

مسائل

۱ـ با استفاده از جداول مقادیر توابع زیر، مقدار آرگومان x متناظر با مقادیر y داده شده را بیابید.

الف) $y = ۰,$

x	۱	۲	۲٫۵	۳
y	−۶	−۱	۵٫۶۲۵	۱۶

ب) $y = ۲۰.$

x	۴	۶	۸	۱۰
y	۱۱	۲۷	۵۰	۸۳

در مسائل ۲ تا ۴ جداول مقادیر توابع یکنواختی داده شده‌اند. با بکارگیری یکی از روش‌های درون‌یابی معکوس شرح داده شده، مقادیر x متناظر با مقادیر y مشخص شده را پیدا کنید.

۲ـ

x	۱٫۰۰	۱٫۰۵	۱٫۱۰	۱٫۱۵	۱٫۲۰	۱٫۲۵
y	۲٫۰۰۰۰۰	۲٫۰۰۲۳۸	۲٫۰۰۹۰۹	۲٫۰۱۹۵۷	۲٫۰۳۳۱۳	۲٫۰۵۰۰۰

الف) ۲٫۰۰۱۳۰ ب) ۲٫۰۰۱۹۴ پ) ۲٫۰۰۳۷۳ ت) ۲٫۰۰۴۸۴
ث) ۲٫۰۱۱۴۷ ج) ۲٫۰۱۴۵۲ چ) ۲٫۰۲۲۵۹ ح) ۲٫۰۲۸۸۸
خ) ۲٫۰۳۸۰۵ د) ۲٫۰۴۶۱۰

۳ـ

x	۰٫۵۰	۰٫۵۵	۰٫۶۰	۰٫۶۵	۰٫۷۰
y	۲٫۲۵۰۰۰	۲٫۱۲۰۶۸	۲٫۰۲۶۶۷	۱٫۹۶۰۹۶	۱٫۹۱۸۵۷

الف) ۲٫۱۸۰۳۸ ب) ۲٫۱۴۱۱۱ پ) ۲٫۰۸۳۱۸ ت) ۲٫۰۴۸۱۵
ث) ۱٫۹۹۳۲۷ ج) ۱٫۹۸۲۹۵ ح) ۱٫۹۴۳۲۳ خ) ۱٫۹۳۳۷۹

۴ـ

x	۱٫۰۰	۱٫۱۰	۱٫۱۵	۱٫۲۰	۱٫۲۵	۱٫۳۰
y	۱٫۳۶۷۸۸	۱٫۲۴۱۹۶	۱٫۱۸۶۲۱	۱٫۱۳۴۵۲	۱٫۱۰۵۳۰	۱٫۰۴۱۷۶

الف) ۱٫۲۷۱۵۳ ب) ۱٫۲۱۵۷۷ پ) ۱٫۱۹۹۱۹ ت) ۱٫۱۷۶۶۱ ث) ۱٫۱۵۹۸۸
ج) ۱٫۱۱۶۸۴ چ) ۱٫۱۱۴۶۱ ح) ۱٫۰۸۸۳۶ د) ۱٫۰۶۹۱۳

در مسائل ۵ تا ۷ مقادیر توابع غیر یکنوا[1] در جداولی ارائه شده‌اند. با استفاده از یکی از فرمول‌های درون‌یابی، مقادیر x متناظر با مقادیر y داده شده را به ترتیب بدست آورید.

۵ـ

x	۰٫۰۵	۰٫۱۰	۰٫۱۵	۰٫۲۰
y	۰٫۵۲۹۴۳	۰٫۹۴۱۴۷	۱٫۱۴۷۴۹	۱٫۱۰۹۳۰

الف) ۰٫۵۷۷۶۹ ب) ۰٫۸۱۳۱۵ پ) ۱٫۰۶۵۴۹

۶ـ

x	۱٫۱۰	۱٫۱۵	۱٫۲۰	۱٫۲۵	۱٫۳۰	۱٫۳۵
y	۰٫۹۱۹۰۹	۰٫۸۹۲۰۷	۰٫۸۷۳۳۳	۰٫۸۶۲۵۰	۰٫۸۵۹۲۳	۰٫۸۶۳۲۴

1) Non-monotonic

الف) ۰٫۹۱۱۲۴ ب) ۰٫۸۹۷۷۷ پ) ۰٫۸۸۴۷۹ ت) ۰٫۸۷۴۸۴
ث) ۰٫۸۶۷۸۴ ج) ۰٫۸۶۳۷۱

۷ـ

x	۰٫۰۵	۰٫۱۰	۰٫۱۵	۰٫۲۰
y	۰٫۴۸۱۹۳	۰٫۸۵۱۴۷	۱٫۰۱۹۹۹	۰٫۹۴۹۳۰

الف) ۰٫۷۳۷۸۷ ب) ۰٫۷۹۷۷۸ پ) ۰٫۹۱۷۱۸

۵ـ۶ـ یافتن ریشه یک معادله با درون‌یابی معکوس

فرض کنید می‌خواهیم معادله زیر را حل کنیم:

$$f(x) = 0$$

بدین‌منظور تابع $y = f(x)$ را در نظر گرفته و یک جدول از مقادیر نزدیک به صفر آن را تشکیل می‌دهیم (با انتخاب تعدادی نقطه، بسته به دقت مورد انتظار برای ریشه). نقاط همسایه‌ای مثل x_0 و x_1 را در نظر می‌گیریم که: $f(x_0)f(x_1) < 0$ باشد و آنگاه با استفاده از درون‌یابی معکوس مقدار x برای $y = 0$ را بدست می‌آوریم. در این مورد استفاده از روش ایتکن نیز مناسب می‌باشد.

مثال ۵ـ۱۵ـ معادله $e^{-x} - x = 0$ را حل کنید.

حل‌ـ این معادله در بازه $(0.5, 0.7)$ تنها یک ریشه دارد. یک جدول از مقادیر تابع $y = e^{-x} - x$ با فاصله ۰٫۰۵ را در بازه مشخص شده تشکیل می‌دهیم:

x	e^{-x}	$y = e^{-x} - x$
۰٫۵۰	۰٫۶۰۶۵۳	۰٫۱۰۶۵۳
۰٫۵۵	۰٫۵۷۶۹۵	۰٫۰۲۶۹۵
۰٫۶۰	۰٫۵۴۸۸۱	−۰٫۰۵۱۱۹
۰٫۶۵	۰٫۵۲۲۰۵	−۰٫۱۲۷۹۵
۰٫۷۰	۰٫۴۹۶۵۸	−۰٫۲۰۳۴۲

همانطور که از جدول مشاهده می‌شود، وقتی که از نقطه $x = ۰/۵۵$ به نقطه $x = ۰/۶۰$ می‌گذریم y تغییر علامت می‌دهد. مقادیر $x_۰ = ۰/۵۵$ و $x_۱ = ۰/۶۰$ را در نظر گرفته و محاسبات را به روش ایتکن انجام می‌دهیم.
نتایج محاسبات در جدول زیر آمده است:

j	$y_i = e^{-x_i} - x_i$	$۰ - y_i$	x_i	$P_{۰,i}(۰)$	$P_{۰,۱,i}(۰)$
۰	۰/۰۲۶۹۵	−۰/۰۲۶۹۵	۰/۵۵		
۱	−۰/۰۵۱۱۹	۰/۰۵۱۱۹	۰/۶۰	۰/۵۶۷۲۴۵	
۲	۰/۱۰۶۵۳	−۰/۱۰۶۵۳	۰/۵۰	۰/۵۶۶۹۳۳	۰/۵۶۷۱۴۴
۳	−۰/۱۲۷۹۵	۰/۱۲۷۹۵	۰/۶۵	۰/۵۶۷۳۹۸	۰/۵۶۷۱۴۲

ارقام دو تقریب آخر ریشه یعنی ۰/۵۶۷۱۴۴ و ۰/۵۶۷۱۴۲ تا مکان $۱۰^{-۵}$ مطابقند. بنابراین $x = ۰/۵۶۷۱۴$ را می‌توان جواب مسئله دانست (با دقت $۱۰^{-۵}$).

مسائل

در مسئله‌های ۱ تا ۱۵ به کمک درون‌یابی معکوس (با دقت ε از پیش مشخص شده) ریشه معادله را در بازه $[a, b]$ پیدا کنید.

۱. $x^۲ + Inx = ۰, \quad \varepsilon = ۱۰^{-۴}, \quad a = ۰/۵, \quad b = ۱.$
۲. $x^۲ - \log(x+۲) = ۰, \quad \varepsilon = ۱۰^{-۴}, \quad a = ۰/۵, \quad b = ۱.$
۳. $x^۲ + Inx - ۴ = ۰, \quad \varepsilon = ۱۰^{-۴}, \quad a = ۱/۵, \quad b = ۲.$
۴. $(x-۱)^۲ - ۰/۵e^x = ۰, \quad \varepsilon = ۱۰^{-۵}, \quad a = ۰/۲, \quad b = ۰/۳.$
۵. $(x-۱)^۲ - e^{-x} = ۰, \quad \varepsilon = ۱۰^{-۵}, \quad a = ۱/۴, \quad b = ۱/۵.$
۶. $x^۳ - \sin x = ۰, \quad \varepsilon = ۱۰^{-۴}, \quad a = ۰, \quad b = ۱.$
۷. $۴x - \cos x = ۰, \quad \varepsilon = ۱۰^{-۴}, \quad a = ۰, \quad b = ۰/۵.$
۸. $x^۲ - \sin x = ۰, \quad \varepsilon = ۱۰^{-۴}, \quad a = ۰/۵, \quad b = ۱.$
۹. $x - \cos x = ۰, \quad \varepsilon = ۱۰^{-۴}, \quad a = ۰/۵, \quad b = ۱$
۱۰. $x^۲ - \cos \pi x = ۰, \quad \varepsilon = ۱۰^{-۴}, \quad a = ۰, \quad b = ۰/۵.$
۱۱. $۲\sqrt{x} - \cos(\pi x/۲) = ۰, \quad \varepsilon = ۱۰^{-۵}, \quad a = ۰/۲, \quad b = ۰/۳.$
۱۲. $\sqrt{x} - ۲\cos(\pi x/۲) = ۰, \quad \varepsilon = ۱۰^{-۴}, \quad a = ۰/۷, \quad b = ۰/۸.$
۱۳. $x^۲ - \cot(\pi x/۳) = ۰, \quad \varepsilon = ۱۰^{-۵}, \quad a = ۰/۸, \quad b = ۰/۹.$
۱۴. $x^۲ - \cos^۲ \pi x = ۰, \quad \varepsilon = ۱۰^{-۵}, \quad a = ۰/۳, \quad b = ۰/۴.$
۱۵. $x^۲ - \sin \pi x = ۰, \quad \varepsilon = ۱۰^{-۴}, \quad a = ۰/۷۵, \quad b = ۰/۸۵.$

۱۶ـ کوچکترین ریشه مثبت معادله $\tan mx - ax = ۰$ را با دقت $\varepsilon = ۱۰^{-۳}$ برای مقادیر پارامترهای زیر، پیدا کنید.

ردیف\ پارامتر	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
m	۱٫۱	۱٫۲	۱٫۳	۱٫۴	۱٫۵	۱٫۶	۱٫۷	۱٫۸	۱٫۹	۲٫۰
a	۲	۳	۴	۵	۶	۲	۳	۴	۵	۶

۱۷ـ کوچکترین ریشه مثبت معادله $\cot mx - ax = ۰$ را با دقت $۱۰^{-۴}$ برای مقادیر پارامترهای زیر پیدا کنید:

ردیف\ پارامتر	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
m	۱٫۱	۱٫۲	۱٫۳	۱٫۴	۱٫۵	۱٫۶	۱٫۷	۱٫۸	۱٫۹	۲٫۰
a	۲	۳	۴	۵	۲	۳	۴	۵	۶	۷

۱۸ـ کوچکترین ریشه مثبت معادله $\sin kx - bx = ۰$ را با دقت $۱۰^{-۴}$ برای مقادیر پارامترهای زیر پیدا کنید:

ردیف\ پارامتر	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
b	۱٫۱	۱٫۲	۱٫۳	۱٫۴	۱٫۵	۱٫۶	۱٫۷	۱٫۸	۲٫۰	۲٫۱
k	۲	۲	۲	۲	۲	۳	۳	۳	۳	۳

در مسائل ۱۹ الی ۲۷ ریشه‌های جبری معادلات را در بازه $[a, b]$ با دقت $۱۰^{-۴}$ پیدا کنید:

۱۹. $x^۴ + ۳x^۳ - ۹ = ۰, \quad a = ۱, \quad b = ۲.$

۲۰. $x^۴ - ۴x^۳ + ۴x^۲ - ۴ = ۰, \quad a = -۱, \quad b = ۰.$

۲۱. $x^۴ + ۳x^۳ + ۴x^۲ + x - ۳ = ۰, \quad a = ۰, \quad b = ۱.$

۲۲. $x^۴ - ۱۰x^۲ - ۱۶x + ۵ = ۰, \quad a = ۰, \quad b = ۱.$

۲۳. $x^۴ - x^۳ - ۹x^۲ + ۱۰x - ۱۰ = ۰, \quad a = -۴, \quad b = -۳.$

۲۴. $x^۴ - ۶x^۲ + ۱۲x - ۸ = ۰, \quad a = ۱, \quad b = ۲.$

۲۵. $x^۴ - ۳x^۲ + ۴x - ۳ = ۰, \quad a = -۳, \quad b = -۲.$

۲۶. $x^۴ - x^۳ - ۷x^۲ - ۸x - ۶ = ۰, \quad a = ۳, \quad b = ۴.$

۲۷. $x^۴ - ۳x^۳ + ۳x^۲ - ۲ = ۰, \quad a = ۱, \quad b = ۲.$

۶ـ دیفرانسیل‌گیری عددی

۶ـ۱ـ فرمول‌های دیفرانسیل‌گیری عددی

دیفرانسیل‌گیری عددی در مواردی که تابع $y = f(x)$ با جدولی از مقادیر $y_i = f(x_i)$ برای نقاط متساوی‌الفاصله $x_i = x_۰ + ih$ $(i = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots, \pm n)$ داده شده است، بکارگرفته می‌شود. ابتدا یک مجموعه $n + ۱$ نقطه‌ای تابع $y = f(x)$ با یک چند جمله‌ای درون‌یابی $P_n(x)$ جایگزین می‌گردد. سپس مشتق این چند جمله‌ای $P'_n(x)$ برای دیفرانسیل‌گیری عددی (مشتق مطلوب $y' = f(x)$) مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$f'(x) \approx P'_n(x)$$

برای مثال اگر ما نقاط $x_۴, x_۳, x_۲, x_۱, x_۰$ را انتخاب و چند جمله‌ای درون‌یابی اول نیوتن را بکار بگیریم (بخش ۵ـ۲ را ببینید) آنگاه فرمولی را به شکل زیر برای دیفرانسیل‌گیری عدد بدست می‌آوریم:

$$f'(x) \approx \frac{۱}{h}\Big(\Delta y_۰ + \frac{۲q-۱}{۲}\Delta^۲ y_۰ + \frac{۳q^۲-۶q+۲}{۶}\Delta^۳ y_۰ + \\ + \frac{۲q^۳-۹q^۲+۱۱q-۳}{۱۲}\Delta^۴ y_۰\Big), \tag{۶-۱}$$

که در آن $q = \frac{x-x_۰}{h}$.

اگر ما نقاط درون‌یابی را $x_{-۲}, x_{-۱}, x_۰, x_۱, x_۲$ بگیریم و از چند جمله‌ای درون‌یابی استرلینگ استفاده کنیم (بخش ۵ـ۳ را ببینید) خواهیم داشت:

$$f'(x) \approx \frac{۱}{h}\Big(\frac{\Delta y_{-۱} + \Delta y_۰}{۲} + q\Delta^۲ y_{-۱} + \frac{۳q^۲-۱}{۶}.\frac{\Delta^۳ y_{-۲} + \Delta^۳ y_{-۱}}{۲} + \\ + \frac{۲q^۳-q}{۱۲}\Delta^۴ y_{-۲}\Big), \tag{۶-۲}$$

که در آن $q=\frac{x-x_{\circ}}{h}$.

فرمول‌های دیفرانسیل‌گیری عددی معمولاً برای پیدا کردن مشتق در نقاط x_i به‌کار گرفته می‌شوند. چون در این مورد هر نقطه را می‌توان به عنوان اولین نقطه فرض کرد، تمامی فرمول‌ها برای نقطه $x_{\circ}$ نوشته شده‌اند که معادل با جایگزینی مقدار $q=\circ$ در فرمول نوع (۶-۱) یا (۶-۲) است. بدین ترتیب دیفرانسیل‌گیری از چند جمله‌ای‌های درون‌یابی نیوتن به فرمول‌های زیر منجر می‌شود:

$$y'_{\circ}=f'(x_{\circ})\approx\frac{1}{h}(\Delta y_{\circ}-\frac{1}{2}\Delta^2 y_{\circ}+\frac{1}{3}\Delta^3 y_{\circ}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\Delta^n y_{\circ}), \qquad (۶\text{-}۳)$$

$$y'_{\circ}=f'(x_{\circ})\approx\frac{1}{h}(\Delta y_{-1}-\frac{1}{2}\Delta^2 y_{-2}+\frac{1}{3}\Delta^3 y_{-3}+\cdots+\frac{1}{n}\Delta^n y_{-n}). \qquad (۶\text{-}۴)$$

که اولی برای سطرهای ابتدایی جدول و دومی برای سطرهای انتهایی بکارگرفته می‌شود. برای اواسط جدول معمولاً از فرمول دیفرانسیل‌گیری عددی بدست آمده از طریق دیفرانسیل گرفتن از چند جمله‌ای درون‌یابی استرلینگ، استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned}y'_{\circ}=f'(x)\approx\tfrac{1}{h}(\tfrac{\Delta y_{-1}+\Delta y_{\circ}}{2}-\tfrac{1}{6}\tfrac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2}+\\ +\tfrac{1}{30}\tfrac{\Delta^5 y_{-3}+\Delta^5 y_{-2}}{2}+\ldots).\end{aligned} \qquad (۶\text{-}۵)$$

این فرمول برای محاسبه مناسب‌تر است و دقت بالاتری در مقایسه با فرمول‌های (۶-۳) و (۶-۴) دارد. توجه داشته باشید که در استفاده از فرمول‌های (۶-۳) تا (۶-۵) ما عملیات را با فرض صحت نسبی در رفتار تفاضلات محدود شروع می‌کنیم (مثال ۶ـ۱ و ۶ـ۲ را ببینید). هر زمان که صحت جدول تفاضلی نقض شود یک بررسی خاص در رفتار تابع انجام می‌گیرد.

در بعضی موارد (مثلاً هنگام انجام محاسبات توسط یک کامپیوتر) بسیار مناسب است که مشتقات را بر حسب جملاتی از تفاضلات محدود یک تابع بیان نکنیم و مستقیماً بر حسب مقادیر داده شده تابع بیان کنیم. در اینجا بعضی از این روش‌ها که بسیار مورد استفاده هستند را بررسی می‌کنیم.

با در نظر گرفتن تنها جمله اول در فرمول (۶-۵) داریم:

$$y'_{\circ}\approx\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_{\circ}}{2h}=\frac{y_1-y_{-1}}{2h} \qquad (۶\text{-}۶)$$

با در نظر گرفتن دو جمله اول در همان فرمول داریم:

$$y'_{\circ}=\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_{\circ}}{2h}-\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{12h}=\frac{y_{-2}-8y_{-1}+8y_1-y_2}{12h} \qquad (۶\text{-}۷)$$

و بطور مشابه از فرمول (۶-۳) بدست می‌آوریم:

$$\left.\begin{aligned} y'_0 &\approx \tfrac{1}{h}(\Delta y_0 - \tfrac{1}{2}\Delta^2 y_0) = \tfrac{-3y_0+4y_1-y_2}{2h}, \\ y'_0 &\approx \tfrac{1}{h}(\Delta y_0 - \tfrac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \tfrac{1}{3}\Delta^3 y_0) \\ &= \tfrac{-11y_0+18y_1-9y_2+2y_3}{6h}, \\ y'_0 &\approx \tfrac{1}{h}(\Delta y_0 - \tfrac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \tfrac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \tfrac{1}{4}\Delta^4 y_0) = \\ &= \tfrac{-25y_0+48y_1-36y_2+16y_3-3y_4}{12h}. \end{aligned}\right\} \qquad (۸-۶)$$

فرمول‌های تقریبی محاسبه مشتق دوم به کمک دیفرانسیل‌گیری مجدد از چند جمله‌ای‌های درون‌یابی بدست می‌آیند. بنابراین با دوبار دیفرانسیل‌گیری از چند جمله‌ای درون‌یابی استرلینگ (برای $q = 0$) داریم:

$$y''_0 = f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_{-1} - \frac{1}{12}\Delta^4 y_{-2} + \frac{1}{90}\Delta^6 y_{-3} + \dots) \qquad (۹-۶)$$

برای سطرهای ابتدایی و انتهایی جدول ما از فرمول‌هایی که از چند جمله‌ای‌های درون‌یابی نیوتن بدست می‌آیند استفاده می‌کنیم:

$$y''_0 = f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + \dots) \qquad (۱۰-۶)$$

$$y''_0 = f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_{-2} + \Delta^3 y_{-3} + \frac{11}{12}\Delta^4 y_{-4} + \frac{5}{6}\Delta^5 y_{-5} + \dots) \qquad (۱۱-۶)$$

این فرمول‌ها برای محاسبه کمتر مناسبند و دقت پایین‌تری نسبت به فرمول (۶-۹) دارند.
گاهی اوقات دیفرانسیل‌گیری مجدد با استفاده از فرمول‌هایی که مستقیماً مشتق دوم را بر حسب مقادیر تابع بیان می‌کنند انجام می‌شود. در اینجا ما خود را تنها به معرفی فرمولی که بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد، محدود می‌کنیم:

$$y''_0 \approx \frac{\Delta^2 y_{-1}}{h^2} = \frac{y_{-1} - 2y_0 + y_1}{h^2} \qquad (۱۲-۶)$$

توجه کنید که با افزایش درجه مشتق دقت دیفرانسیل‌گیری عددی به شدت کاهش می‌یابد. بنابراین در کاربردهای عملی فرمول‌های دیفرانسیل‌گیری عددی به ندرت برای محاسبات مشتقات با درجه بزرگتر از ۲ استفاده می‌شوند.

مثال ۶ـ۱ـ دو ستون اول جدول ۶ـ۱ مقادیر تابع $y = \sinh\ 2x$ را با فواصل $h = 0{,}05$ نشان می‌دهد. مقادیر مشتقات y' و y'' را در نقاط $x = 0{,}0$ و $x = 0{,}1$ بیابید.

جدول ۶-۱) مقادیر تابع $y = sinh \;\; ۲x$ و تفاضلات متوالی (مثال ۶-۱)

x	y	Δy	$\Delta^۲ y$	$\Delta^۳ y$	$\Delta^۴ y$
۰٫۰۰	۰٫۰۰۰۰۰				
		۱۰ ۰۱۷			
۰٫۰۵	۰٫۱۰۰۱۷		۱۰۰		
		۱۰ ۱۱۷		۱۰۱	
۰٫۱۰	۰٫۲۰۱۳۴		۲۰۱		۳
		۱۰ ۳۱۸			
۰٫۱۵	۰٫۳۰۴۵۲		۳۰۵		۳
		۱۰ ۶۲۳		۱۰۷	
۰٫۲۰	۰٫۴۱۰۷۵		۴۱۲		
		۱۱ ۰۳۵			
۰٫۲۵	۰٫۲۵۱۱۰				

حل. جدول تفاضلی (جدول ۶-۱ را ببینید) را تشکیل داده و آن را تنها تا تفاضلات مرتبه چهارم ادامه می‌دهیم زیرا تفاضلات مرتبه‌های بالاتر عملاً برای فواصل مورد نظر برابر صفر هستند. برای دیفرانسیل‌گیری عددی در نقطه $x = ۰٫۰$ از فرمول (۶-۳) و (۶-۱۰) با قرار دادن $x_۰ = ۰٫۰$ استفاده می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
y'|_{x=۰٫۰} &\approx \tfrac{۱}{h}(\Delta y_۰ - \tfrac{۱}{۲}\Delta^۲ y_۰ + \tfrac{۱}{۳}\Delta^۳ y_۰ - \tfrac{۱}{۴}\Delta^۴ y_۰) = \\
&= ۲۰(۰٫۱۰۰۱۷ - ۰٫۰۰۰۵۰ + ۰٫۰۰۰۳۴ - ۰٫۰۰۰۰۱) = ۲٫۰۰۰۰, \\
y''|_{x=۰٫۰} &\approx \tfrac{۱}{h^۲}(\Delta^۲ y_۰ - \Delta^۳ y_۰ + \tfrac{۱۱}{۱۲}\Delta^۴ y_۰) = \\
&= ۴۰۰(۰٫۰۰۱۰۰ - ۰٫۰۰۱۰۱ + ۰٫۰۰۰۰۳) = ۰٫۰۰۸.
\end{aligned}
$$

برای دیفرانسیل‌گیری عددی در نقطه $x = ۰٫۱$ از فرمول‌های (۶-۵) و (۶-۹) با $x_۰ = ۰٫۱$ استفاده می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
y'|_{x=۰٫۱} &\approx \tfrac{۱}{h}\left(\tfrac{\Delta y_{-۱} + \Delta y_۰}{۲} - \tfrac{۱}{۶}\tfrac{\Delta^۳ y_{-۲} + \Delta^۳ y_{-۱}}{۲}\right) = \\
&= ۲۰(۰٫۱۰۲۱۷ - ۰٫۰۰۰۱۷) = ۲٫۰۴۰۰, \\
y''|_{x=۰٫۱} &\approx \tfrac{۱}{h^۲}(\Delta^۲ y_{-۱} - \tfrac{۱}{۱۲}\Delta^۴ y_{-۲}) = ۴۰۰(۰٫۰۰۲۰۱ - ۰٫۰۰۰۰۰) = ۰٫۸۰۴.
\end{aligned}
$$

برای مقایسه مقادیر دقیق مشتقات $y' = ۲\cosh ۲x$ و $y'' = ۴\sinh ۲x$ را برای نقاط مورد نظر بدست می‌آوریم: $y' = ۲$ و $y'' = ۰$ برای $x = ۰٫۰$ و $y' = ۲\cosh \; ۰٫۲ = ۲٫۰۴۰۱$ و $y'' = ۴\sinh ۰٫۲ = ۰٫۸۰۵۲$ برای $x = ۰٫۱$.

مثال ۶-۲. جدول ۶-۲ بخشی از جدول هفت رقمی تابع بسل $y = J_۰(x)$ را با فواصل $h = ۰٫۰۲$ نشان می‌دهد.
مشتقات y' و y'' را در نقطه $x = ۱٫۰۰$ محاسبه کنید، اگر بدانیم که با چنین فاصله‌ای (در مجاورت نقطه $x = ۱٫۰۰$) تفاضلات از مرتبه بالاتر از سه صحیح نخواهند بود.

جدول ۶-۲) جدول مثال ۶-۲

x	۰٫۹۶	۰٫۹۸	۱٫۰۰	۱٫۰۲	۱٫۰۴
y	۰٫۷۸۲۵۳۶۱	۰٫۷۷۳۹۳۳۲	۰٫۷۶۵۱۹۷۷	۰٫۷۵۶۳۳۲۱	۰٫۷۴۷۳۹۰

حل- چون طبق فرض تفاضلات بالاتر از رتبه سوم صحیح نیستند، از مزیت فرمول‌های (۶-۷) و (۶-۱۲) بهره می‌گیریم:

$$y'|_{x=۱٫۰۰} \approx \frac{۰٫۷۸۲۵۳۶۱-۸\times ۰٫۷۷۳۹۳۳۲+۸\times ۰٫۷۵۶۳۳۲۱-۰٫۷۴۷۳۳۹۰}{۱۲٫۰٫۰۲} = \\ = \frac{۰٫۰۳۵۱۹۷۱-۸\times ۰٫۰۱۷۶۰۱۱}{۰٫۲۴} = -۰٫۴۴۰۰۴۹,$$

$$y''|_{x=۱٫۰۰} \approx \frac{۰٫۷۷۳۹۳۳۲-۲\times ۰٫۷۶۵۱۹۷۷+۰٫۷۵۶۳۳۲۱}{۰٫۰۲^{۲}} = \frac{-۰٫۰۰۰۱۳۰۱}{۰٫۰۰۰۴} = -۰٫۳۲۵۲.$$

در اینجا برای مقایسه مقادیر دقیق مشتقات $y' = -J_۱(x)$ و $y'' = J_۱(x) - J_۰(x)$ را در نقاط مورد نظر آورده‌ایم: $y' = -۰٫۴۴۰۰۵۰۶$ و $y'' = -۰٫۳۲۵۱۴۷۱$ برای $x = ۱٫۰۰$.

مسائل

۱ـ یک جدول از مقادیر تابع $y = f(x)$ داده شده است (جدول ۶-۳).

جدول ۶-۳) جدول مسئله۱

x	y	x	y	x	y	x	y
۱٫۰	۱٫۲۶۶۱	۱٫۱	۱٫۳۲۶۲	۱٫۲	۱٫۳۹۳۷	۱٫۳	۱٫۴۶۹۳
۱٫۴	۱٫۵۵۳۴	۱٫۵	۱٫۶۴۶۷	۱٫۶	۱٫۷۵۰۰	۱٫۷	۱٫۸۶۴۰
۱٫۸	۱٫۹۸۹۶	۱٫۹	۲٫۱۲۷۷	۲٫۰	۲٫۲۷۹۶	۲٫۱	۲٫۴۴۶۳
۲٫۲	۲٫۶۲۹۱	۲٫۳	۲٫۸۲۹۶	۲٫۴	۳٫۰۴۹۳	۲٫۵	۳٫۲۸۹۸
۲٫۶	۳٫۵۵۳۳	۲٫۷	۳٫۸۴۱۷	۲٫۸	۴٫۱۵۷۳	۲٫۹	۴٫۵۰۲۷
۳٫۰	۴٫۸۸۰۸						

الف) یک جدول از مقادیر مشتق y' در نقاط $x = ۱٫۲ + ۰٫۱k$ $(k = ۰, ۱, \ldots, ۱۶)$ تشکیل دهید.

ب) یک جدول از مقادیر مشتق دوم y'' در نقاط $x = ۱٫۲ + ۰٫۱k$ $(k = ۰, ۱, \ldots, ۱۶)$ تشکیل دهید.

ج) به کمک فرمول‌های درون‌یابی نیوتن مقادیر مشتقات y' را در نقاط $x = ۱٫۰$، ۱٫۱ ، ۲٫۹ و ۳٫۰ بیابید.

د) مقادیر مشتق y'' را در نقاط $x = ۱٫۰$ و $x = ۳٫۰$ پیدا کنید.

۲ـ یک جدول از مقادیر تابع $y = f(x)$ (جدول ۶-۴) داده شده است.

الف) یک جدول از مقادیر مشتق y' را در نقاط $x = ۰٫۸ + ۰٫۲k$ $(k = ۰, ۱, \ldots, ۱۳)$ تشکیل دهید.

ب) یک جدول از مقادیر مشتق دوم y'' را در نقاط $x = ۰٫۸ + ۰٫۲k$ $(k = ۰, ۱, \dots, ۱۳)$ تشکیل دهید.

ج) با استفاده از فرمول‌های درون‌یابی نیوتن مقادیر مشتق y' را در نقاط $x = ۰٫۴$، ۰٫۶، ۳٫۶ و ۳٫۸ بیابید.

جدول ۶-۴) جدول مسئله۲

x	y	x	y	x	y	x	y
۰٫۴	۰٫۴۰۰۰	۰٫۶	۱٫۴۸۴۸	۰٫۸	۲٫۶۸۱۱	۱٫۰	۳٫۹۹۸۳
۱٫۲	۵٫۴۴۶۵	۱٫۴	۷٫۰۳۷۱	۱٫۶	۸٫۷۸۲۶	۱٫۸	۱۰٫۶۹۶۷
۲٫۰	۱۲٫۷۹۴۵	۲٫۲	۱۵٫۰۹۲۶	۲٫۴	۱۷٫۶۰۹۳	۲٫۶	۲۰٫۳۶۴۷
۲٫۸	۲۳٫۳۸۰۸	۳٫۰	۲۶٫۶۸۱۹	۳٫۲	۳۰٫۲۹۴۵	۳٫۴	۳۴٫۲۴۷۹
۳٫۶	۳۸٫۵۷۴۱	۳٫۸	۴۳٫۳۰۸۴				

د) مقادیر مشتق y'' را در نقاط $x = ۰٫۴$، ۰٫۶، ۳٫۶ و ۳٫۸ بیابید.

۶ـ۲ـ خطاهای ناشی از دیفرانسیل‌گیری عددی

دو نوع خطا در طول فرآیند دیفرانسیل‌گیری عددی یک تابع $y = f(x)$ که به صورت جدولی داده شده، وجود دارد.

الف) خطای برش ناشی از جایگزینی تابع $f(x)$ با چند جمله‌ای درون‌یابی $P_n(x)$.

ب) خطای گرد کردن ناشی از بدست آوردن نادقیق مقادیر اولیه y_i.

خطاهای برش برای فرمول‌های (۶-۳) و (۶-۴) با مقدار $\frac{۱}{(n+۱)}h^n|f^{n+۱}(\xi)|$ برآورد می‌شود که در آن ξ دربازه $(x_۰, x_n)$ و یا $(x_{-n}, x_۰)$ قرار دارد. به هرحال این فرمول برآورد کم کاربرد است زیرا ما معمولاً $f^{(n+۱)}(x)$ را نداریم. در عمل می‌توان از توضیحات زیر برای برآورد خطای برش استفاده کرد.

فرض می‌کنیم در تابع مورد نظر اجزایی که به سرعت تغییرمی‌کنند (یعنی جملاتی که دوره تناوب آنها بزرگتر از مقدار فاصله h نباشند). تحت این شرایط کوچک بودن تفاضلات، گواه این حقیقت است که با انتخاب چند جمله‌ای درون‌یابی مناسب به اندازه کافی به تابع $f(x)$ نزدیک می‌شویم. اگر تفاضلات مرتبه m کمتر از مقدار خطای گرد کردن اختلاف داشته باشند (جدول ۶-۵ را ببینید) آنها را عملاً ثابت فرض می‌کنیم. تفاضلات مرتبه‌های بالاتر در فرمول‌های دیفرانسیل‌گیری عددی مورد استفاده نیستند و فقط برای اینکه خطای برش رقم کم ارزش مقادیر y_i تقسیم شده بر h بیشتر نشود، در نظر گرفته می‌شوند.

جدول ۶-۵) اثر خطای مطلق ε مقادیر y_i در خطای مطلق تفاضلات محدود آنها

تفاضل	Δy_i	$\Delta^۲ y_i$	$\Delta^۳ y_i$	$\dots$	$\Delta^k y_i$
خطای مطلق	۲ε	۴ε	۸ε	$\dots$	$۲^k\varepsilon$

امّا اگر فرمول زودتر از آنچه در بالا آمده برش داده شود (که غالباً رخ می‌دهد) آنگاه جملات نادقیق برای برآورد خطای گرد کردن مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای مثال اگر تفاضلات مرتبه سوم به اندازه کافی آرام تغییر کنند آنگاه خطای برش فرمول (۶-۶) بطور تقریبی با فرمول $\frac{۱}{۶h}\frac{|\Delta^۳ y_{-۲}+\Delta^۳ y_{-۱}|}{۲}$ برآورد می‌شود و اگر تفاضلات مرتبه چهارم به اندازه کافی آرام تغییر کنند آنگاه خطای برش فرمول (۶-۱۲) بطور تقریبی با مقدار $\frac{۱}{۱۲h^۲}|\Delta^۴ y_{-۲}|$ برآورد می‌شود.

لازم است توجه داشته باشیم که اثر فاصله محاسبه h بطور مستقیم و نمایی در تمامی فرمول‌های برآورد خطای برش ظاهر می‌گردد، بنابراین با کاهش فاصله h خطای برش علی‌القاعده کاهش می‌یابد.

خطای گرد کردن بطور معکوس با فاصله محاسباتی h در فرمول‌های مشتق اول، با $h^۲$ برای مشتق دوم و ... بستگی دارد. بنابراین با کاهش h خطای گرد کردن افزایش می‌یابد. برای برآورد خطای گرد کردن مجموعه قاعده‌های آمده در فصل ۱ مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای مثال اگر خطای مطلق مقادیر اولیه y_i بیشتر از ε نباشند آنگاه خطای مطلق گرد کردن فرمول‌های (۶-۶)، (۶-۷) و (۶-۸) به ترتیب بیشتر از مقادیر $\frac{\varepsilon}{h}=\frac{۲\varepsilon}{۲h}$، $\frac{۳}{۲}\frac{\varepsilon}{h}=\frac{۱۸\varepsilon}{۱۲h}$ و $\frac{۴\varepsilon}{h^۲}$ نمی‌شوند.

برای فرمول‌های از نوع (۱ـ۸) خطاهای گرد کردن کمی بزرگتر هستند و به ترتیب برابرند با:

$۴\frac{\varepsilon}{h}=\frac{۸\varepsilon}{۲h}$، $۶\frac{۲}{۳}\frac{\varepsilon}{h}=\frac{۴۰\varepsilon}{۶h}$ و $۱۰\frac{۲}{۳}\frac{\varepsilon}{h}=\frac{۱۲۸\varepsilon}{۱۲h}$.

در اینجا می‌بایست توجه کرد که خطا گرد کردن به سرعت با افزایش مرتبه مشتق افزایش می‌یابد.

مثال ۶ـ۳ـ خطای محاسبه مشتقات در مثال ۶ـ۱ را با فرض اینکه تمامی ارقام مقادیر y_i صحیح هستند (یعنی خطای مقادیر y_i کمتر از $\varepsilon = ۰/۵ \times ۱۰^{-۵}$ هستند) بدست آورید.

حل ـ در مثال ۶ـ۱ در فرمول مورد استفاده برای دیفرانسیل‌گیری عددی تمامی تفاضلات را تا درجه چهارم در نظر گرفته بودیم. بنابراین خطاهای برش به کمک تفاضلات درجه پنجم که بیشتر از $۱۰^{-۵}$ نیستند، برآورد می‌شوند (جدول ۶-۱ را ببینید). مقدار این برآورد به فرمول مورد استفاده در دیفرانسیل‌گیری عددی نیز بستگی دارد: در نقطه $x = ۰/۰$ فرمول نیوتن استفاده شده بود، در نقطه $x = ۰/۱$ فرمول استرلینگ مورد استفاده قرار گرفته بود. نتیجه محاسبات به همراه خطاهای گرد کردن در جدول ۶-۶ آورده شده است. این جدول نشان می‌دهد که خطاهای گرد کردن بطور قابل ملاحظه‌ای از خطاهای برش بیشتر است، بطوریکه خطای کل دیفرانسیل‌گیری عددی، بیشتر ناشی از خطاهای گرد کردن است (البته مقایسه با خطاهای واقعی آمده در بخش ۶ـ۱ نشان می‌دهد که آن مقادیر کمی از مقادیر خطاهای پیش برآورد در اینجا هستند).

جدول ۶-۶) خطاهای محاسبه برای مثال ۶-۳

مشتق	نقطه	خطای برش	خطای گرد کردن
y'	$x = ۰/۰$	$\frac{۱}{۵h}\|\Delta^۵ y\| = ۴ \times ۱۰^{-۵}$	$۱۰ \times \frac{\varepsilon}{h} = ۱۰^{-۳}$
	$x = ۰/۱$	$\frac{۱}{۳۰h}\|\Delta^۵ y\| < ۰/۷ \times ۱۰^{-۵}$	$\frac{۳}{۲} \times \frac{\varepsilon}{h} = ۱/۵ \times ۱۰^{-۴}$
y''	$x = ۰/۰$	$\frac{۵}{۶}\frac{۱}{h^۲}\|\Delta^۵ y\| < ۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۲۰ \times \frac{\varepsilon}{h^۲} = ۴ \times ۱۰^{-۲}$
	$x = ۰/۱$	$\frac{۱}{۱۲}\frac{۱}{h^۲}\|\Delta^۴ y\| < ۱۰^{-۳}$	$۴ \times \frac{\varepsilon}{h^۲} = ۸ \times ۱۰^{-۳}$

برای کمتر کردن خطاهای گرد کردن می‌توان برای h مقدار بزرگتری را انتخاب کرد.

مسائل

خطاهای محاسبه مشتقات، در مسائل ۱ (الف)، (ب) و ۲ (الف)، (ب) بخش ۶ـ۱ را برآورد کنید. فرض کنید تمام مقادیر y_i جدول با ارقام صحیح داده شده‌اند.

۶ـ۳ـ انتخاب یک بازه بهینه دیفرانسیل‌گیری عددی

خطای کل در محاسبه یک مشتق را می‌توان مجموع دو خطای برش و گرد کردن دانست. چون با کاهش فاصله h خطای برش کاهش یافته و خطای گرد کردن افزایش پیدا می‌کند، پس یک فاصله بهینه محاسباتی (یعنی اینکه هر فرمول دیفرانسیل‌گیری عددی، فاصله بهینه مربوط به خود را دارد) وجود دارد. از اینرو برای فرمول (۶-۶) خطای برش بیشتر از

$$\frac{h^۲}{۶}M_۳ = \frac{h^۲}{۶}\max_{(x_{-۱}, x_۱)}|f'''(x)|$$

نخواهد بود و خطای گرد کردن با مقدار زیر برآورد می‌شود:

$$\frac{۲\varepsilon}{۲h} = \frac{\varepsilon}{h}$$

که در آن ε خطای مطلق مقادیر اولیه تابع y_i است. خطای کل با مقدار

$$\frac{h^۲}{۶}M_۳ + \frac{\varepsilon}{h}$$

برآورد می‌شود که مقدارش کمینه می‌شود اگر

$$(\frac{h^۲}{۶}M_۳ + \frac{\varepsilon}{h})' = \frac{h}{۳}M_۳ - \frac{\varepsilon}{h^۲} = ۰$$

یعنی اگر $h = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M_3}}$، که فاصله بهینه محاسباتی برای فرمول (۶-۶) را بدست می‌دهد. بسیار مناسب است که فرمول بدست آمده را به شکل زیر بنویسیم:

$$\frac{h^2}{6}M_3 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{h} \qquad (۱۳\text{-}۶)$$

یا به شکل

$$\frac{1}{6h}|\Delta^3 y| \approx \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{h} \qquad (۱۴\text{-}۶)$$

که به سادگی تفسیر می‌شود: فاصله بهینه برای فرمول (۶-۶) فاصله‌ای است که در آن خطای برش تقریباً نصف خطای گرد کردن شود (خطای کل از $\frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{h}$ بیشتر نمی‌شود).

فاصله بهینه برای دیگر فرمول‌های دیفرانسیل‌گیری عددی به طریق مشابه بدست می‌آید. برای فرمول (۶-۷) فاصله بهینه هنگامی حاصل می‌شود که خطای برش $\frac{1}{30h}|\Delta^5 y|$ تقریباً برابر با یک سوم خطای گرد کردن $\frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{h}$ باشد. تحت این شرایط خطای کل بیشتر از $2\frac{\varepsilon}{h}$ نخواهد شد. برای فرمول (۶-۱۲) فاصله بهینه هنگامی حاصل می‌شود که خطای برش $\frac{1}{12h^2}|\Delta^4 y|$ تقریباً برابر با خطای گرد کردن $4\frac{\varepsilon}{h^2}$ باشد که کل خطا بیشتر از $8\frac{\varepsilon}{h^2}$ نمیشود.

در فرمول‌های بالا مقادیر $|\Delta^3 y|$، $|\Delta^4 y|$ و $|\Delta^5 y|$ نشان‌دهنده مقادیر میانگین (برای یک ناحیه داده شده از جدول) قدر مطلق تفاضلات از یک مرتبه مشخص هستند.

مثال ۶-۴- اجازه دهید، تغییر خطای محاسبه یک مشتق را با کاهش فاصله h برای تابع $y = e^x$ که در آن $y' = e^x = y$ است را بررسی کنیم.

حل- یک جدول چهار رقمی از مقادیر تابع e^x را در نظر بگیرید که دارای خطای مطلق $\varepsilon = ۰٫۵ \times ۱۰^{-۴}$ می‌باشد. از فرمول ساده دیفرانسیل‌گیری عددی (۶-۶) با کاهش فاصله h از ۰٫۱ تا ۰٫۰۱ با قرار دادن $x_0 = ۱٫۱۵$ استفاده می‌کنیم.

محاسبات در جدول ۶-۷ آمده است، که در آن از رهنوشت‌های زیر استفاده شده است (برای اختصار):

$$\frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = D_h y_0$$

همانطور که در جدول دیده می‌شود، با کاهش فاصله h از ۰٫۱ به ۰٫۰۳ قدر مطلق خطای دیفرانسیل‌گیری عدد کاهش می‌یابد (از ۰٫۰۰۴۸ به ۰٫۰۰۰۱)، که به دنبال آن با کاهش بیشتر فاصله h با افزایش آن مواجه هستیم (تا ۰٫۰۰۳۲ برای $h = ۰٫۰۱$). این بدان معنی است که برای فاصله $h \le ۰٫۰۳$ نقش اصلی را خطاهای گرد کردن بازی می‌کنند. در اینجا فاصله بهینه برای دیفرانسیل‌گیری عددی به راحتی توسط فرمول (۶-۱۳) محاسبه می‌شود:

$$h_{opt} = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M_3}} = \sqrt[3]{\frac{۰٫۰۰۰۱۵}{۳٫۵}} \approx ۰٫۰۳۵$$

جدول ۶-۸ نشان‌دهنده نتایج دیفرانسیل‌گیری عددی با این فاصله است.

مقایسه جدول ۶-۷ و ۶-۸ نشان می‌دهد که فاصله بهینه h توسط فرمول (۶-۱۳) به سادگی بدست آمده است. در مثال تشریح شده در بالا، کمترین خطا با فاصله $h = ۰/۰۳$ حاصل می‌شود.

جدول ۶-۷) دیفرانسیل‌گیری عددی با فاصله h

$h = ۰/۰۹$

x	$y = e^x$	$D_h y_0$	خطا
۱/۰۶	۲/۸۸۶۴		
۱/۱۵	۳/۱۵۸۲	۳/۱۶۲۲	−۰/۰۰۴۰
۱/۲۴	۳/۴۵۵۶		

$h = ۰/۱۰$

x	$y = e^x$	$D_h y_0$	خطا
۱/۰۵	۲/۸۵۷۷		
۱/۱۵	۳/۱۵۸۲	۳/۱۶۳۰	−۰/۰۰۴۸
۱/۲۵	۳/۴۹۰۳		

$h = ۰/۰۷$

x	$y = e^x$	$D_h y_0$	خطا
۱/۰۸	۲/۹۴۴۷		
۱/۱۵	۳/۱۵۸۲	۳/۱۶۰۷	−۰/۰۰۲۵
۱/۲۲	۳/۳۸۷۲		

$h = ۰/۰۸$

x	$y = e^x$	$D_h y_0$	خطا
۱/۰۷	۲/۹۱۵۴		
۰/۱۵	۳/۱۵۸۲	۳/۱۶۱۳	−۰/۰۰۳۱
۱/۲۳	۳/۴۲۱۲		

$h = ۰/۰۵$

x	$y = e^x$	$D_h y_0$	خطا
۱/۱۰	۳/۰۰۴۲		
۱/۱۵	۳/۱۵۸۲	۳/۱۵۹۰	−۰/۰۰۰۸
۱/۲۰	۳/۳۲۰۱		

$h = ۰/۰۶$

x	$y = e^x$	$D_h y_0$	خطا
۱/۰۹	۲/۹۷۴۳		
۱/۱۵	۳/۱۵۸۲	۳/۱۶۰۰	−۰/۰۰۱۸
۱/۲۱	۳/۳۵۳۵		

$h = ۰/۰۳$

x	$y = e^x$	$D_h y_0$	خطا
۱/۱۲	۳/۰۶۴۹		
۱/۱۵	۳/۱۵۸۲	۳/۱۵۸۳	−۰/۰۰۰۱
۱/۱۸	۳/۲۵۴۴		

$h = ۰/۰۴$

x	$y = e^x$	$D_h y_0$	خطا
۱/۱۱	۳/۰۳۴۴		
۱/۱۵	۳/۱۵۸۲	۳/۱۵۸۸	−۰/۰۰۰۶
۱/۱۹	۳/۲۸۷۱		

$h = ۰/۰۱$

x	$y = e^x$	$D_h y_0$	خطا
۱/۱۴	۳/۱۲۶۸		
۱/۱۵	۳/۱۵۸۲	۳/۱۵۵۰	۰/۰۰۳۲
۱/۱۶	۳/۱۸۹۹		

$h = ۰/۰۲$

x	$y = e^x$	$D_h y_0$	خطا
۱/۱۳	۳/۰۹۵۷		
۱/۱۵	۳/۱۵۸۲	۳/۱۵۷۵	۰/۰۰۰۷
۱/۱۷	۳/۲۲۲۰		

جدول ۶-۸) دیفرانسیل‌گیری عددی با فاصله $h = ۰/۰۳۵$

x	$y = e^x$	$D_h y_0$	Error
۱/۱۱۵	۳/۰۴۹۶		
۱/۱۵	۳/۱۵۸۲	۳/۱۵۸۶	−۰/۰۰۰۴
۱/۱۸۵	۳/۲۷۰۷		

مثال ۶-۵ـ یک فرمول مناسب و فاصله بهینه دیفرانسیل‌گیری عددی برای تابع نشان داده شده توسط جدول ۶-۹ را پیدا کنید. مقادیر تابع y با ارقامی تماماً صحیح داده شده‌اند.

حل‌ـ در اینجا خطای مطلق مقادیر اولیه تابع بیشتر از $\varepsilon = ۰٫۵ \times ۱۰^{-۴}$ نیست. در دیفرانسیل‌گیری عددی به کمک فرمول (۶-۶)، فاصله بهینه از شرط $\frac{۱}{۶}\Delta^{۳} y \approx \frac{۱}{۲}\varepsilon$ بدست می‌آید.
چون در جدول ۶-۹ تفاضلات محدود درجه سوم از -۳×۱۰^{-۴} تا ۳×۱۰^{-۴} متغیرند، مقدار $\frac{۱}{۶}\Delta^{۳} y$ از $-۰٫۵ \times ۱۰^{-۴}$ تا $۰٫۵ \times ۱۰^{-۴}$ تغییر می‌کند یعنی در میانگین، رتبه‌ای مناسب دارد. بنابراین محاسبه مشتق‌ها با استفاده از فرمول (۶-۶) با فاصله $h = ۰٫۱$ ممکن می‌باشد. این انتخاب یک خطای کل بین $\frac{\varepsilon}{h} \times ۱٫۵$ و $۲\frac{\varepsilon}{h}$ را بدست می‌دهد، یعنی از درجه $۱۰^{-۳}$.

جدول ۶-۹) جدول مثال ۶-۵

x	y	Δy	$\Delta^{۲} y$	$\Delta^{۳} y$
۱٫۰	۰٫۴۴۰۱	۳۰۸	−۳۴	−۳
۱٫۱	۰٫۴۷۰۹	۲۷۴	−۳۷	−۱
۱٫۲	۰٫۴۹۸۳	۲۳۷	−۳۸	−۱
۱٫۳	۰٫۵۲۲۰	۱۹۹	−۳۹	−۱
۱٫۴	۰٫۵۴۱۹	۱۶۰	−۴۰	−۱
۱٫۵	۰٫۵۵۷۹	۱۲۰	−۴۱	−۱
۱٫۶	۰٫۵۶۹۹	۷۹	−۴۲	۲
۱٫۷	۰٫۵۷۷۸	۳۷	−۴۰	−۲
۱٫۸	۰٫۵۸۱۵	−۳	−۴۲	۳
۱٫۹	۰٫۵۸۱۲	−۴۵	−۳۹	۰
۲٫۰	۰٫۵۷۶۷	−۸۴	−۳۹	۱
۲٫۱	۰٫۵۶۸۳	−۱۲۳	−۳۸	۲
۲٫۲	۰٫۵۵۶۰	−۱۶۱	−۳۶	۲
۲٫۳	۰٫۵۳۹۹	−۱۹۷	−۳۴	۲
۲٫۴	۰٫۵۲۰۲	−۲۳۱	−۳۲	۳
۲٫۵	۰٫۴۹۷۱	−۲۶۳	−۲۹	۲
۲٫۶	۰٫۴۷۰۸	−۲۹۲	−۲۷	
۲٫۷	۰٫۴۴۱۶	−۳۱۹		
۲٫۸	۰٫۴۰۹۷			

برای کاهش خطای کل، فاصله h را افزایش داده و از فرمول دقیقتر (۶-۷) استفاده می‌کنیم. با دو برابر کردن فاصله h جدول داده ذیل بدست می‌آید (جدول ۶-۱۰).
همانطور که در جدول ۶-۱۰ دیده می‌شود برای فاصله $h_{۱} = ۲h = ۰٫۲$ میانگین مقادیر مطلق تفاضلات درجه پنجم برابر با $۳٫۶ \times ۱۰^{-۴}$ هستند که در نتیجه $\frac{۱}{۳}|\Delta^{۵} y| \approx ۱٫۲ \times ۱۰^{-۵}$ تقریباً $\frac{۱}{۴}$ مقدار $\varepsilon = ۰٫۵ \times ۱۰^{-۴} = ۵ \times ۱۰^{-۵}$ می‌باشد. اگر ما یک چنین فاصله‌ای را در نظر بگیریم آنگاه خطای برش برابر با $\frac{۱}{۳۰h_{۱}}|\Delta^{۵} y| \approx ۰٫۶ \times ۱۰^{-۴}$ خواهد شد و خطای گرد کردن برابر با $۴ \times ۱۰^{-۴} \approx \frac{۳}{۲}\frac{\varepsilon}{h}$ می‌شود که در نتیجه خطای کل با مقدار ۵×۱۰^{-۴} برآورد می‌گردد (جدول ۶-۱۰).

جدول ۶-۱۰) جدول مثال ۶-۵ با فاصله h دو برابر

x	y	Δy	$\Delta^۲ y$	$\Delta^۳ y$	$\Delta^۴ y$	$\Delta^۵ y$
۱٫۰	۰٫۴۴۰۱					
		۵۸۲				
۱٫۲	۰٫۴۹۸۳		−۱۴۶			
		۴۳۶		−۱۰		
۱٫۴	۰٫۵۴۱۹		−۱۵۶		۲	
		۲۸۰		−۸		۶
۱٫۶	۰٫۵۶۹۹		−۱۶۴		۸	
		۱۱۶		۰		−۳
۱٫۸	۰٫۵۸۱۵		−۱۶۴		۵	
		−۴۸		۵		−۲
۲٫۰	۰٫۵۷۶۷		−۱۵۹		۳	
		−۲۰۷		۸		۴
۲٫۲	۰٫۵۵۶۰		−۱۵۱		۷	
		−۳۵۸		۱۵		−۳
۲٫۴	۰٫۵۲۰۲		−۱۳۶		۴	
		−۴۹۴		۱۹		
۲٫۶	۰٫۴۷۰۸		−۱۱۷			
		−۶۱۱				
۲٫۸	۰٫۴۰۹۷					

این نتیجه دو یا سه برابر بهتر از نتیجه با فاصله $h = ۰٫۱$ است امّا هنوز امکان افزایش بیشتر فاصله وجود دارد.

با افزایش فاصله محاسبات به λ برابر، تفاضلات درجه اول λ برابر، تفاضلات درجه دوم $\lambda^۲$ برابر، ... و تفاضلات درجه پنجم $\lambda^۵$ برابر افزایش می‌یابند. بنابراین فاصله $h_۲ = \frac{۳}{۲}h_۱ = ۳h = ۰٫۳$، خطای برشی برابر با $\frac{۱}{۳۰h_۲}(۱٫۵)^۵ \times ۴ \times ۱۰^{-۴} = ۳٫۳ \times ۱۰^{-۴}$ و خطای گرد کردن $\frac{۳}{۲}\frac{\varepsilon}{h_۲} = ۲٫۵ \times ۱۰^{-۴}$ را بدست می‌دهد که کاملاً قابل قبول است. افزایش بیشتر فاصله به سختی ممکن است به خصوص که جدول ۶-۱۰ فاقد داده لازم برای پردازش یک جدول از تفاضلات تا درجه پنجم با فاصله $h = ۰٫۴$ می‌باشد. بنابراین $h = ۰٫۳$ به عنوان فاصله بهینه انتخاب می‌شود. این فاصله برای محاسبه مقادیر مشتقات تنها در نقاط $x = ۱٫۶, ۱٫۷, ۱٫۸, \ldots, ۲٫۲$ مناسب است. در این مورد استفاده از فرمول (۶-۷) به صورت عبارتی غیر تفاضلی (فاقد جملات تفاضل) مناسب است یعنی به صورت:

$$y' \approx \frac{۱}{۱۲h}(y_{-۲} - ۸y_{-۱} + ۸y_۱ - y_۲)$$

که در آن y_i همان $y(x_۰ + ih_۲)$ است. برای مثال:

$$y'|_{x=۱٫۶} \approx \frac{۱}{۱۲\times ۰٫۳}(۰٫۴۴۰۱ - ۸ \times ۰٫۵۲۲۰ + ۸ \times ۰٫۵۸۱۲ - ۰٫۵۵۶۰) = ۰٫۰۹۹۴,$$
$$y'|_{x=۱٫۷} \approx \frac{۱}{۱۲\times ۰٫۳}(۰٫۴۷۰۹ - ۸ \times ۰٫۵۴۱۹ + ۸ \times ۰٫۵۷۶۷ - ۰٫۵۳۹۹) = ۰٫۰۵۸۲.$$

در نقاط $x = ۱٫۴$ و $x = ۱٫۵$ و $x = ۲٫۳$ و $x = ۲٫۴$ ما همچنین می‌توانیم از فرمول (۶-۷) با فاصله $h_۱ = ۰٫۲$ استفاده کنیم که به فاصله بهینه نزدیک بوده و تقریباً به همان دقت منجر می‌شود. در نقاط با

موقعیت نزدیک به حدود جدول (حدهای بالا و پایین) ما می‌توانیم از فرمول (۶-۶) با فاصله $h = ۰٫۱$ و یا از فرمول نیوتن استفاده کنیم. در خاتمه بار دیگر یادآور می‌شویم که برآوردهای واقعی معمولاً از پیش‌برآوردهای بدست آمده بیشتر هستند. از اینرو در مثالی که دیدیم خطای واقعی محاسبه مشتقات، چندین برابر کوچکتر از برآوردهای ذکر شده بود. برای مقایسه اجازه بدهید مقدار مشتق y' را در نقطه $x = ۱٫۶$، توسط فرمول (۶-۶) با فاصله $h = ۰٫۱$ محاسبه کنیم.
خواهیم داشت:

$$y'|_{x=۱٫۶} \approx \frac{۱}{۲ \times ۰٫۱}(۰٫۵۷۷۸ - ۰٫۵۵۷۹) = ۰٫۰۹۹۵$$

که با مقدار دقیق ۰٫۰۹۹۲ تنها به اندازه ۳×۱۰^{-۴} اختلاف دارد.

مسائل

فاصله بهینه دیفرانسیل‌گیری عددی و فرمول مناسب در مسائل ۱ (الف)،۱ (ب)،۲ (الف)،۲ (ب) در بخش ۶ـ۱ را با فرض اینکه تمام مقادیر y_i جدول با ارقام صحیح داده شده‌اند بدست آورید. در مسائل ۱ (ب) و ۲ (ب) مقدار مشتق y'' را در نقطه $x = ۱٫۶$ پیدا کنید.

۷ـ محاسبه تقریبی انتگرال‌ها

۷ـ۱ـ فرمولهای تربیع[1] با نقاط متساوی‌الفاصله

با جایگزینی تابع انتگرال با برخی از چند جمله‌ای‌های درون‌یابی، فرمول‌های تربیعی به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=\circ}^{n} A_k f(x_k) + R \qquad (۷\text{-}۱)$$

که در آن x_k نقاط منتخب درون‌یابی، $A_k (k=\circ,۱,\ldots,n)$ ضرایبی هستند که تنها به نقاط انتخابی بستگی دارند و نه به شکل تابع و R عبارت باقیمانده یا خطای فرمول تربیع هستند. با حذف خطای باقیمانده R خطای برش به وجود می‌آوریم که در فرآیند محاسبه نیز خطاهای گرد کردن به این خطا افزوده می‌شود. با تقسیم کردن بازه انتگرالی $[a,b]$ به n بخش مساوی توسط نقاط

$$x_i = x_\circ + ih \quad (i=\circ,۱,\ldots,n)\ ,\ x_\circ = a,\quad x_n = b,\quad h=\frac{b-a}{n}$$

تابع زیر انتگرال را در نقاط x_i محاسبه می‌کنیم:

$$y_i = f(x) \quad (i=\circ,۱,\ldots,n)$$

فرمول‌های تربیع برای نقاط متساوی‌الفاصله، فرمول‌های نیوتن-کوتز[2] خوانده می‌شوند ([۱]، [۱۲] و [۲۱] را ببینید). فرمول‌های نیوتن-کوتز از نظر درجه چند جمله‌ای درون‌یابی مورد استفاده متفاوتند. برای خلاصی

1) Quadrature 2) Cotes

از چند جمله‌ای‌های با درجه بالا تقسیم کردن بازه انتگرالگیری به زیر بازه‌های مجزا برای به‌کارگیری فرمول‌های نیوتن-کوتز از درجه پایین در هر بازه و سپس جمع زدن نتایج بدست آمده، درکاربردها معمول است (که به فرمول‌های مرکب منجرمی‌شود). چند فرمول ساده از این گونه در ادامه تشریح می‌گردد.

۱ـ فرمول ذوزنقه[1]

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right), \qquad (7\text{-}2)$$

که در آن $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. عبارت باقیمانده به صورت زیر است:

$$R_1 = -\frac{nh^3}{12} f''(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi), \quad a < \xi < b.$$

اگر تابع زیر انتگرال $f(x)$ یک تابع خطی باشد، فرمول ذوزنقه مقدار دقیق انتگرال را بدست می‌دهد، زیرا داریم $f''(x) = 0$.

۲ـ فرمول سیمپسون[2]

$$\int_a^b f(x)dx \approx \tfrac{h}{3}[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2m-2}) + \\ + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2m-1})], \qquad (7\text{-}3)$$

که در آن $h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$. عبارت باقیمانده به صورت زیر است:

$$R_2 = -\frac{mh^5}{90} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi), \ a < \xi < b.$$

فرمول سیمپسون برای چند جمله‌ای‌های تا درجه ۳ دقیق است، زیرا در این موارد $f^{(4)}(x) = 0$ است. توجه کنید که در فرمول سیمپسون تعداد نقاط الزاماً فرد است یعنی n زوج است $n = 2m$.

۳ـ فرمول نیوتن (قاعده سه هشتم)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \tfrac{3h}{8}[y_0 + y_{3m} + 2(y_3 + y_6 + \cdots + y_{3m-3}) + \\ + 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + \cdots + y_{3m-2} + y_{3m-1})], \qquad (7\text{-}4)$$

که در آن $h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{3m}$. عبارت باقیمانده به شکل زیر است:

$$R_3 = -\frac{3mh^5}{80} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{80} f^{(4)}(\xi), \quad a < \xi < b.$$

1) Trapezoidal formula 2) Simpson

توجه کنید که در فرمول (۷-۴) تعداد نقاط الزاماً برابر با $۳m+۱$ است یعنی $n=۳m$.
اگر تابع $y=f(x)$ به شکل جدولی داده شده باشد و پیدا کردن مشتقات آن مشکل باشد، آنگاه با فرض عدم وجود جملات عناصر شدیداً متغیر، می‌توانیم فرمول‌های تقریبی برای محاسبه خطا را با عباراتی از تفاضلات محدود به کار ببریم:

$$R_۱ \approx -\frac{b-a}{۱۲}\overline{\Delta^۲ y}, \qquad (۷\text{-}۵)$$

$$R_۲ \approx -\frac{b-a}{۱۸۰}\overline{\Delta^۴ y}, \qquad (۷\text{-}۶)$$

$$R_۳ \approx -\frac{b-a}{۸۰}\overline{\Delta^۴ y}, \qquad (۷\text{-}۷)$$

که در آن $\overline{\Delta^۲ y}, \overline{\Delta^۴ y}$ نشان دهنده میانگین حسابی مقادیر تفاضلات از درجه مربوطه هستند.

مثال ۷ـ۱ـ انتگرال $\int_۰^۱ e^{-x^۲}dx$ را با قاعده ذوزنقه برای $n=۱۰$ محاسبه، خطای محاسبه را برآورد کنید.

حل ـ ابتدا عبارت باقیمانده را برآورد می‌کنیم. بدین‌منظور مشتق دوم تابع $y=e^{-x^۲}$ را پیدا می‌کنیم:

$$y'' = ۲(۲x^۲-۱)e^{-x^۲}$$

حداکثر اندازه مشتق دوم $|y''(x)|$ در بازه [۰، ۱] در نقطه $x=۰$ است. از اینرو داریم:

$$|R_۱| \le \frac{\max|y''(x)|}{۱۲}|b-a|h^۲ = \frac{۲\times(۰/۱)^۲}{۱۲} < ۰/۰۰۲.$$

برای از بین بردن تأثیر خطای گرد کردن در دقت نتیجه، محاسبات را با یک رقم اضافی انجام می‌دهیم، یعنی با چهار رقم اعشار. جدول مقادیر زیر انتگرال را تشکیل می‌دهیم (جدول ۷-۱). با استفاده از فرمول ذوزنقه بدست می‌آوریم:

$$\int_۰^۱ e^{-x^۲}dx \approx ۰/۱\times ۷/۴۶۲۰ = ۰/۷۴۶۲.$$

و پاسخ نهایی را به سه رقم گرد می‌کنیم:

$$\int_۰^۱ e^{-x^۲}dx \approx ۰/۷۴۶$$

مثال ۷ـ۲ـ انتگرال $\int_{۰}^{۱} e^{x^{۲}}dx$ را به کمک فرمول سیمپسون برای $n = ۱۰$ محاسبه و عبارت باقیمانده را برآورد کنید.

جدول ۷-۱) مقادیر تابع $y = e^{-x^{۲}}$

i	xi	$x_i^{۲}$	y_i	i	x_i	$x_i^{۲}$	yi
۰	۰	۰	۱٫۰۰۰۰	۶	۰٫۶	۰٫۳۶	۰٫۶۹۷۷
۱	۰٫۱	۰٫۰۱	۰٫۹۹۰۰	۷	۰٫۷	۰٫۴۹	۰٫۶۱۲۶
۲	۰٫۲	۰٫۰۴	۰٫۹۶۰۸	۸	۰٫۸	۰٫۶۴	۰٫۵۲۷۳
۳	۰٫۳	۰٫۰۹	۰٫۹۱۳۹	۹	۰٫۹	۰٫۸۱	۰٫۴۴۴۹
۴	۰٫۴	۰٫۱۶	۰٫۸۵۲۱	۱۰	۱٫۰	۱٫۰۰	۰٫۳۶۷۹
۵	۰٫۵	۰٫۲۵	۰٫۷۷۸۸				
$\frac{۱}{۲}(y_{۰} + y_{۱۰}) + \sum_{i=۱}^{۹} yi = ۷٫۴۶۲۰$							

حل ـ اجازه دهید عبارت باقیمانده را برآورد کنیم. مشتق چهارم تابع $y = e^{x^{۲}}$ را پیدا می‌کنیم:

$$y^{(۴)}(x) = ۴(۴x^{۴} + ۱۲x^{۲} + ۳)e^{x^{۲}}$$

مشتق چهارم $y^{(۴)}(x)$ در بازه $[۰, ۱]$ در نقطه $x = ۱$ دارای بزرگترین مقدار است. از اینرو

$$|R_{۲}| \leq \frac{۵ \times (۰٫۱)^{۵}}{۹۰} \times ۷۶ \times ۲٫۷۱۸ \approx ۰٫۰۰۰۱۱۵$$

جدول مقادیر تابع زیر انتگرال را تشکیل داده (جدول ۷-۲) و مقادیر را بر حسب زوج و یا فرد بودن شماره‌اش در دو ستون مجزا وارد می‌کنیم. سطر آخر از جدول نشان دهنده نتایج جمع هر ستون می‌باشد. حال با بکارگیری فرمول سیمپسون بدست می‌آوریم:

$$\int_{۰}^{۱} e^{x^{۲}}dx \approx \frac{۱}{۳۰}(۳٫۷۱۸۳ + ۴ \times ۷٫۲۶۸۵ + ۲ \times ۵٫۵۴۴۱) = ۱٫۴۶۲۶۸$$

جواب نهایی را تا چهار رقم گرد می‌کنیم:

$$\int_{۰}^{۱} e^{x^{۲}}dx \approx ۱٫۴۶۲۷$$

مثال ۷ـ۳ـ انتگرال $\int_{۰}^{۰٫۶} \frac{dx}{۱+x}$ را با استفاده از فرمول نیوتن (قاعده سه هشتم) برای $h = ۰٫۱$ محاسبه و عبارت باقیمانده را برآورد کنید.

حل ـ برای برآورد عبارت باقیمانده مشتق چهارم تابع زیر انتگرال $y = (۱+x)^{-۱}$ را پیدا می‌کنیم:

$$y^{(۴)} = ۲۴(۱+x)^{-۵}$$

در بازه $[۰, ۰/۶]$ بزرگترین مقدار مشتق چهارم در نقطه $x = ۰$ حاصل می‌شود. بنابراین

$$|R_۳| \leq \frac{۶ \times (۰/۱)^۵}{۸۰} \times ۲۴ = ۱/۸ \times ۱۰^{-۵}$$

با تشکیل جدولی از مقادیر تابع زیر انتگرال (جدول ۷ـ۳) مقادیر تابع را در سه ستون مجزا (بسته به شماره‌اش) وارد می‌کنیم. با استفاده از نتایج محاسبات، با فرمول (۷-۴) بدست می‌آوریم:

$$\int_۰^{۰/۶} \frac{dx}{۱+x} \approx \frac{۳}{۸} \times ۰/۱ \times (۱/۶۲۵۰۰ + ۱/۵۳۸۴۶ + ۹/۳۷۰۱۴) = ۰/۴۷۰۰۱$$

جدول ۷-۲) مقادیر تابع $y = e^{x^۲}$

i	xi	$x_i^۲$	Values of $y_i = e^{x_i^۲}$: for $i=۰,\ i=۱۰$	for even i	for add i
۰	۰/۰	۰/۰۰	۱/۰۰۰۰		
۱	۰/۱	۰/۰۱			۱/۰۱۰۱
۲	۰/۲	۰/۰۴		۱/۰۴۰۸	
۳	۰/۳	۰/۰۹			۱/۰۹۴۲
۴	۰/۴	۰/۱۶		۱/۱۷۳۵	
۵	۰/۵	۰/۲۵			۱/۲۸۴۰
۶	۰/۶	۰/۳۶		۱/۴۳۳۳	
۷	۰/۷	۰/۴۹			۱/۶۳۲۳
۸	۰/۸	۰/۶۴		۱/۸۹۶۵	
۹	۰/۹	۰/۸۱			۱/۲۴۷۹
۱۰	۱/۰	۱/۰۰	۲/۷۱۸۳		
		$\sum$	۳/۷۱۸۳	۵/۴۴۴۱	۷/۲۶۸۵

مثال ۷ـ۴ـ انتگرال $\int_۰^{۰/۸} f(x)dx$ را با فرمول سیمپسون محاسبه و عبارت باقیمانده را برآورد کنید و تابع زیر انتگرال $f(x)$ با جدول زیر مشخص شده است:

x	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸
$f(x)$	۱/۰۰۰۰	۰/۹۹۵۰	۰/۹۸۰۱	۰/۹۵۵۳	۰/۹۲۱۱	۰/۸۷۷۶	۰/۸۲۵۳	۰/۷۶۴۸	۰/۶۹۶۷

حل- با قرار دادن $h = ۰٫۱$ (فاصله در جدول) داریم $n = ۲m = ۸$. محاسبه مجموع‌های لازم در جدول ۷ـ۴ آمده است. با بکارگیری نتایج بدست آمده، با فرمول (۷-۳) بدست می‌آوریم:

$$\int_{۰}^{۰٫۸} f(x)dx \approx \frac{۱}{۳}(۱٫۶۹۶۷ + ۴ \times ۳٫۵۹۲۷ + ۲ \times ۲٫۷۲۶۵) = ۰٫۷۱۷۳۵$$

برای برآورد خطاها جدولی از تفاضلات محدود برای تابع داده شده تشکیل می‌دهیم (جدول ۷-۵) و از فرمول (۷-۶) استفاده می‌کنیم. مقدار میانگین تفاضلات درجه چهارم (در جدول ۷-۵) برابر است با $\overline{\Delta_y^۴} \approx ۲ \times ۱۰^{-۴}$. بنابراین با استفاده از فرمول (۷-۶) بدست می‌آوریم:

$$R_۲ \approx \frac{۰٫۸ \times ۲ \times ۱۰^{-۴}}{۱۸۰} \approx ۱۰^{-۶}$$

از اینرو تمام ارقام نتیجه بدست آمده صحیح می‌باشند.

مسائل

۱ـ بطور تقریبی و به کمک فرمول ذوزنقه انتگرال $\int_۰^۱ (۳x^۲ - ۴x)dx$ را با $n = ۱۰$ محاسبه کنید. مقدار دقیق این انتگرال را محاسبه کرده و خطاهای نسبی و مطلق نتیجه را بدست آورید.

۲ـ انتگرال $\int_۰^۱ \frac{x\,dx}{۱+x}$ را با استفاده از فرمول سیمپسون با $n = ۱۰$ محاسبه کنید. خطای مطلق Δ نتیجه را با استفاده از فرمول عبارت باقیمانده برآورد کنید.

در مسائل زیر بطور تقریبی انتگرال‌ها را به کمک فرمول مشخص شده محاسبه و عبارت باقیمانده R را برآورد کنید.

۳ـ انتگرال $\int_۱^۵ \frac{dx}{x}$ با فرمول ذوزنقه برای $n = ۴$.

جدول ۷-۳) مقادیر تابع $y = \frac{۱}{۱+x}$

i	xi	$۱ + x_i$	$y = \frac{۱}{۱+x_i}$		
۰	۰٫۰	۱٫۰	۱٫۰۰۰۰۰		
۱	۰٫۱	۱٫۳			۰٫۹۰۹۰۹
۲	۰٫۲	۱٫۲			۰٫۸۳۳۳۳
۳	۰٫۳	۱٫۳		۰٫۷۶۹۲۳	
۴	۰٫۴	۱٫۴			۰٫۷۱۴۲۹
۵	۰٫۵	۱٫۵			۰٫۶۶۶۶۷
۶	۰٫۶	۱٫۶	۰٫۶۲۵۰۰		
		$\sum$	۱٫۶۲۵۰۰	۰٫۷۶۹۲۳	۳٫۱۲۳۳۸

جدول ۷-۴) مقادیر تابع $f(x)$

i	xi	$f(x_i)$ $i=۰$ $i=۸$	 i فرد	 i زوج
۰	۰	۱٫۰۰۰۰		
۱	۰٫۱		۰٫۹۹۵۰	
۲	۰٫۲			۰٫۹۸۰۱
۳	۰٫۳		۰٫۹۵۵۳	
۴	۰٫۴			۰٫۹۲۱۱
۵	۰٫۵		۰٫۸۷۷۶	
۶	۰٫۶			۰٫۸۵۳
۷	۰٫۷		۰٫۷۶۴۸	
۸	۰٫۸	۰٫۶۹۶۷		
	$\sum$	۱٫۶۹۶۷	۳٫۵۹۲۷	۲٫۷۲۶۵

جدول ۷-۵) تفاضلات محدود برای تابع $y = f(x)$

x	y	Δy	$\Delta^۲ y$	$\Delta^۳ y$	$\Delta^۴ y$
۰	۱٫۰۰۰۰	−۵۰	−۹۹	۰	+۵
۰٫۱	۰٫۹۹۵۰	−۱۴۹	−۹۹	۵	−۴
۰٫۲	۰٫۹۸۰۱	−۲۴۸	−۹۴	۱	+۴
۰٫۳	۰٫۹۵۵۳	−۳۴۲	−۹۳	۵	+۱
۰٫۴	۰٫۹۲۱۱	−۴۳۵	−۸۸	۶	۰
۰٫۵	۰٫۸۷۷۶	−۵۲۳	−۸۲	۶	
۰٫۶	۰٫۸۲۵۳	−۶۰۵	−۷۶		
۰٫۷	۰٫۷۶۴۸	−۶۸۱			
۰٫۸	۰٫۶۹۶۷				

۴ـ انتگرال $\int_۱^۹ \sqrt{۶x-۵}dx$ با فرمول ذوزنقه برای $n = ۸$.

۵ـ انتگرال $\int_۰^{۱/۲} \ln(۱+x^۲)dx$

الف) با استفاده از فرمول ذوزنقه برای $n = ۶$.

ب) با استفاده از فرمول سیمپسون برای $n = ۶$.

۶ـ انتگرال $\int_۰^۱ \sin x^۲ dx$

الف) با استفاده از فرمول ذوزنقه برای $n = ۱۰$.

ب) با استفاده از فرمول سیمپسون برای $n = ۱۰$.

۷ـ انتگرال $\int_۰^۱ \cos x^۲ dx$

الف) با استفاده از فرمول ذوزنقه برای $n = ۱۰$.

ب) با استفاده از فرمول سیمپسون برای $n = ۱۰$.

۸ـ انتگرال $\int_۴^{۵/۲} \ln x dx$

الف) با استفاده از فرمول ذوزنقه برای $n = ۶$.

ب) با استفاده از فرمول سیمپسون برای $n = ۶$.

۹ـ انتگرال $\int_۱^۳ \frac{dx}{۱+x}$

الف) با استفاده از فرمول ذوزنقه برای $n = ۴$.

ب) با استفاده از فرمول سیمپسون برای $n = ۴$.

۱۰ـ انتگرال $\int_{۰/۱}^{۱/۶} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ با استفاده از فرمول قاعده سه هشتم با $n = ۳۰$.

۷ـ۲ـ انتخاب فاصله انتگرالگیری

هدف انتخاب فاصله h برای رسیدن به دقت مشخص شده ε برای محاسبه انتگرال به وسیله یک فرمول انتگرالگیری عددی مشخص است. اجازه دهید که دو روش حل این مسئله را بررسی کنیم:

۱ـ انتخاب فاصله به وسیله برآورد عبارت باقیمانده. فرض کنید می‌خواهیم یک انتگرال را با دقت ε حساب کنیم. با استفاده از فرمول جمله باقیمانده R متناظر، h را طوری انتخاب می‌کنیم که نامساوی $|R| < \frac{\varepsilon}{۲}$ برقرار گردد. سپس انتگرال را به وسیله فرمول تقریبی و با فاصله بدست آمده محاسبه می‌کنیم. تعداد ارقام را آنقدر در نظر می‌گیریم که خطای گرد کردن از $\frac{\varepsilon}{۲}$ بیشتر نشود.

توجه- مواردی وجود دارد که دو خطای برش و گرد کردن ε، سهم برابری ندارند. برای مثال اگر محاسبه مقادیر تابع زیر انتگرال منجر به یک عملیات سنگین و مشکل شود امّا بتوان آن‌را با هر دقت مورد نظر انجام داد آنگاه انتخاب h با شرط $|R| < \varepsilon$ به راحتی ممکن است. مورد نادر دیگر تابعی است که به صورت تجربی و آزمایشی مشخص شده که دسترسی به یک دقت بالا درمحاسبه مقادیر آن مشکل است.

مثال ۷ـ۵ـ به کمک فرمول سیمپسون انتگرال زیر را با دقت $\varepsilon = ۱۰^{-۳}$ محاسبه کنید.

$$\int_{\pi/۴}^{\pi/۲} \frac{\sin x}{x} dx$$

حلـ جمله باقیمانده فرمول سیمپسون به شکل زیر است:

$$R = -\frac{h^۴(b-a)}{۱۸۰} f^{(۴)}(\xi) \ , \ a < \xi < b$$

فاصله h را طوری انتخاب می‌کنیم که نامساوی زیر برقرار گردد:

$$\frac{h^۴(b-a)}{۱۸۰} Max_{[a,b]} |f^{(۴)}(x)| < ۰/۵ \times ۱۰^{-۳}$$

مقدار $f^{(۴)}(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$f^{(۴)}(x) = \frac{\sin x}{x} + ۴\frac{\cos x}{x^۲} - ۱۲\frac{\sin x}{x^۳} - ۲۴\frac{\cos x}{x^۴} + ۲۴\frac{\sin x}{x^۵}$$

در برآورد $|f^{(۴)}(x)|$ در بازه $[\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۲}]$ از این واقعیت استفاده می‌کنیم که مقادیر

$$\frac{\sin x}{x}(۱ - \frac{۱۲}{x^۲} + \frac{۲۴}{x^۴}) \ , \ ۴\frac{\cos x}{x^۲}(\frac{۶}{x^۲} - ۱)$$

مثبت هستند و در این بازه کاهش می‌یابند. بنابراین آنها در نقطه $\frac{\pi}{۴}$ به حداکثر مقدار خود می‌رسند و

$$|f^{(۴)}(x)| \leq \frac{\sin x}{x}(۱ - \frac{۱۲}{x^۲} + \frac{۲۴}{x^۴}) + ۴\frac{\cos x}{x^۲}(\frac{۶}{x^۲} - ۱) < ۸۱.$$

از اینرو برای بدست آوردن فاصله محاسباتی h، نامساوی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{h^۴ \frac{\pi}{۴}}{۱۸۰} \times ۸۱ < ۰/۵ \times ۱۰^{-۳}$$

که از آنجا بدست می‌آوریم $h^۴ < ۱۴ \times ۱۰^{-۴}$ و $h < ۱/۹ \times ۱۰^{-۱} = ۰/۱۹$. از سوی دیگر، فاصله h می‌بایستی طوری انتخاب شود که تقسیم بازه $[\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۲}]$ به تعدادی زوج از فواصل برابر ممکن باشد. دو شرط ذکر شده با مقادیر زیر برقرار می‌شوند:

$$h = \frac{\pi}{۲۴} = ۰/۱۳ < ۰/۱۹ \quad , \quad n = \frac{b-a}{h} = ۶$$

برای اینکه خطا از $۰/۵ \times ۱۰^{-۳}$ بیشتر نشود کافی است که محاسبات را با دقت چهار رقم اعشار انجام دهیم.

یک جدول از مقادیر تابع $y = \frac{\sin x}{x}$ با $h = \frac{\pi}{۲۴} = ۷^\circ ۳۰' = ۰/۱۳۰۹۰$ (جدول ۷-۶)، که سطر آخر آن شامل مجموع سه ستون آخر است را تشکیل می‌دهیم. حال با استفاده از فرمول سیمپسون برای $n = ۶$ بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\int_{\pi/۴}^{\pi/۲} \frac{\sin x}{x}dx &\approx \frac{h}{۳}[(y_۰ + y_۶) + ۴(y_۱ + y_۳ + y_۵) + ۲(y_۲ + y_۴)] = \\ &= ۰/۰۴۳۶۳۳(۱/۵۳۶۹ + ۴ \times ۲/۳۳۸۶ + ۲ \times ۱/۵۶۴۹) = ۰/۶۱۱۸.\end{aligned}$$

نتیجه نهایی را تا سه رقم اعشار گرد می‌کنیم:

$$\int_{\pi/۴}^{\pi/۲} \frac{\sin x}{x}dx \approx ۰/۶۱۲$$

۲- محاسبه مضاعف. چون پیدا کردن حداکثر مقدار $|f^{(k)}(x)|$ اغلب به محاسباتی مشکل منجر می‌شود، روش ذیل در عملیات محاسبه مورد استفاده قرار می‌گیرد: انتگرال I با استفاده از فرمول تربیع دو بار محاسبه می‌شود (اولین بار با فاصله h و سپس با فاصله $h/۲$ یعنی با مقدار n دو برابر).

با توجه به نتایج محاسبات برای I_n و $I_{۲n}$ مقایسه‌ای انجام می‌دهیم. اگر $|I_n - I_{۲n}| < \varepsilon$ (که در آن ε خطای مجاز است)، آنگاه قرار می‌دهیم:

$$I \approx I_{۲n}$$

جدول ۷-۶) مقادیر تابع $y = \frac{\sin x}{x}$

i	x_i°	x_i	$\sin x$	y_0, y_6	y_{2m}	y_{2m-1}
۰	۴۵°۰۰′	۰٫۷۸۵۴	۰٫۷۰۷۱	۰٫۹۰۰۳		
۱	۵۲°۳۰′	۰٫۹۱۶۳	۰٫۷۹۳۴			۰٫۸۶۵۹
۲	۶۰°۰۰′	۱٫۰۴۷۲	۰٫۸۶۶۰		۰٫۸۲۷۰	
۳	۶۷°۳۰′	۱٫۱۷۸۱	۰٫۹۲۳۹			۰٫۷۸۴۲
۴	۷۵°۰۰′	۱٫۳۰۹۰	۰٫۹۶۵۹		۰٫۷۳۷۹	
۵	۸۲°۳۰′	۱٫۴۳۹۹	۰٫۹۹۱۴			۰٫۶۸۸۵
۶	۹۰°۰۰′	۱٫۵۷۰۸	۱٫۰۰۰۰	۰٫۶۳۶۶		
			$\sum$	۱٫۵۳۶۹	۱٫۵۶۴۹	۲٫۳۳۸۶

امّا اگر $|I_n - I_{2n}| \geq \varepsilon$ باشد، آنگاه محاسبات با فاصله $\frac{h}{4}$ تکرار می‌شود. گاهی اوقات برای فاصله اولیه عددی نزدیک به $\sqrt[m]{\varepsilon}$ انتخاب می‌شود که در آن $m = 2$ برای فرمول ذوزنقه و $m = 4$ برای فرمول سیمپسون می‌باشد.

این روش بطور وسیعی در محاسبه انتگرال‌ها توسط کامپیوتر بکارگرفته می‌شود، زیرا ما را قادر می‌سازد که به همراه وارسی محاسبات مقدار فاصله را برای دقت مورد نظر بطور اتوماتیک انتخاب کنیم.

توجه کنید که برای یک برآورد تقریبی خطای برش Δ می‌توانیم از اصل رانگ [1] استفاده کنیم، که طبق آن برای فرمول ذوزنقه $\Delta \approx \frac{1}{3}|I_n - I_{2n}|$ و برای فرمول سیمپسون $\Delta \approx \frac{1}{15}|I_n - I_{2n}|$ می‌باشد.

مثال ۷ـ۶ـ انتگرال زیر را با فرمول سیمپسون و با دقت $\varepsilon = 3 \times 10^{-4}$ محاسبه کنید.

$$\int_0^\pi \frac{dx}{x + \cos x}$$

حل‌ـ بازه $[0, \pi]$ را به هشت قسمت تقسیم کرده و مقادیر تابع زیر انتگرال را در نقاط تقسیم بدست می‌آوریم (جدول ۷-۷). حال انتگرال را به وسیله فرمول سیمپسون ابتدا برای فاصله $h = \frac{\pi}{8}(h = 8)$ و سپس برای $h = \frac{\pi}{4}(n = 4)$ محاسبه می‌کنیم.

نتایج محاسبات در جدول زیر (جدول ۷-۷) وارد شده است. اعدادی که در ستون y_i زیرشان خط کشیده شده است، مقادیر y_i مورد استفاده در محاسبه انتگرال با فاصله $h = \frac{\pi}{4}$ است. ستونهای m_i و m_i' به ترتیب مشخص کننده ضرایب y_i در فرمول سیمپسون هستند وقتی محاسبات برای فاصله $h = \frac{\pi}{8}$ و $h = \frac{\pi}{4}$ انجام می‌شود. سطر آخر از جدول نشان‌دهنده حاصل جمع‌های مربوطه $\sum m_i y_i$ و $\sum m_i' y_i$ است.

به وسیله فرمول سیمپسون بدست می‌آوریم:

1) Rung

جدول ۷-۷) مقادیر تابع $y = \frac{۱}{x+\cos x}$

i	x_i°	x_i	$\cos x_i$	$x_i + \cos x_i$	y_i	m'_i	m_i
۰	۰°	۰	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰	$\underline{۱٫۰۰۰۰}$	۱	۱
۱	۲۲°۳۰′	۰٫۳۹۲۷	۰٫۹۲۳۹	۱٫۳۱۶۶	۰٫۷۵۹۵	۴	
۲	۴۵°	۰٫۷۸۵۴	۰٫۷۰۷۱	۱٫۴۹۲۵	$\underline{۰٫۶۷۰۰}$	۲	۴
۳	۶۷°۳۰′	۱٫۱۷۸۱	۰٫۳۸۲۷	۱٫۵۶۰۸	۰٫۶۴۰۷	۴	
۴	۹۰°	۱٫۵۷۰۸	۰٫۰۰۰۰	۱٫۵۷۰۸	$\underline{۰٫۶۳۶۶}$	۲	۲
۵	۱۱۲°۳۰′	۱٫۹۶۳۵	−۰٫۳۸۲۷	۱٫۵۸۰۸	۰٫۶۳۲۶	۴	
۶	۱۳۵°	۲٫۳۵۶۲	−۰٫۷۰۷۱	۱٫۶۴۹۱	$\underline{۰٫۶۰۶۴}$	۲	۴
۷	۱۵۷°۳۰′	۲٫۷۴۸۹	−۰٫۹۲۳۹	۱٫۸۲۵۰	۰٫۵۴۸۰	۴	
۸	۱۸۰°	۳٫۱۴۱۶	−۱٫۰۰۰۰	۲٫۱۴۱۶	$\underline{۰٫۴۶۶۹}$	۱	۱
					$\sum$	۱۵٫۶۱۶۱	۷٫۸۴۵۷

برای $n = ۴$، $h = \frac{\pi}{۴} = ۰٫۷۸۵۴۰$ و $h/۳ = ۰٫۲۶۱۸۰$:

$$I_۴ = ۰٫۲۶۱۸۰ \times ۷٫۸۴۵۷ = ۲٫۰۵۴۰$$

و برای $n = ۸$، $h = \frac{\pi}{۸} = ۰٫۳۹۲۷۰$ و $h/۳ = ۰٫۱۳۰۹۰$:

$$I_۸ = ۰٫۱۳۰۹۰ \times ۱۵٫۶۱۶۱ = ۲٫۰۴۴۱$$

با مقایسه مقادیر $I_۴$ و $I_۸$ خواهیم داشت:

$$|I_۴ - I_۸| = ۰٫۰۰۹۹ > ۳ \times ۱۰^{-۴}$$

علاوه بر آن $\frac{۱}{۱۵}|I_۴ - I_۸| > ۳ \times ۱۰^{-۴}$. بنابراین دقت مقدار دقیقتر $I_۸$ هنوز کافی نیست. در نتیجه فاصله را کاهش می‌دهیم و به طور مشابه محاسبه را با فاصله‌های $h = \frac{\pi}{۸}$ و $h = \frac{\pi}{۱۶}$ انجام می‌دهیم. نتایج محاسبات برای $h = \frac{\pi}{۸}$ در جدول ۷-۷ و برای $h = \frac{\pi}{۱۶}$ در جدول ۷-۸ آمده‌اند. برای $h = \frac{\pi}{۱۶} = ۰٫۱۹۶۳۵$ خواهیم داشت:

$$I_{۱۶} = ۰٫۰۶۵۴۵ \times ۳۱٫۲۱۶۹ = ۲٫۰۴۳۱$$

مقایسه $I_۸$ و $I_{۱۶}$ نتیجه می‌دهد:

$$|I_۸ - I_{۱۶}| = ۰٫۰۰۱$$

با توجه به قاعده رانگ خطای مقدار دقیقتر $I_{۱۶}$ بیشتر از $\frac{۱}{۱۵} \times ۰٫۰۰۱ < ۳ \times ۱۰^{-۴}$ نیست. بنابراین مقدار $I_{۱۶}$ با دقت مورد نظر محاسبه شده است. از اینرو

$$\int_{۰}^{\pi} \frac{dx}{x+\cos x} = ۲٫۰۴۳۲$$

جدول ۷-۸) مقادیر تابع $y = \frac{۱}{x+\cos x}$ با فاصله $h = \frac{\pi}{۱۶}$

i	x_i°	x_i	$\cos x_i$	$x_i + \cos x_i$	y_i	m_i
۰	۰°	۰	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰	۱
۱	۱۱°۱۵′	۰٫۱۹۶۳	۰٫۹۸۰۸	۱٫۱۷۷۱	۰٫۸۴۹۵	۴
۲	۲۲°۳۰′	۰٫۳۹۲۷	۰٫۹۲۳۹	۱٫۳۱۶۱	۰٫۷۵۹۵	۲
۳	۳۳°۴۵′	۰٫۵۸۹۰	۰٫۸۳۱۵	۱٫۴۲۰۵	۰٫۷۰۴۰	۴
۴	۴۵°	۰٫۷۸۵۴	۰٫۷۰۷۱	۱٫۴۹۲۵	۰٫۶۷۰۰	۲
۵	۶۵°۱۵′	۰٫۹۸۱۷	۰٫۵۵۵۴	۱٫۵۳۷۱	۰٫۶۵۰۶	۴
۶	۶۷°۳۰′	۱٫۱۷۸۱	۰٫۳۸۲۷	۱٫۵۶۰۸	۰٫۶۴۰۷	۲
۷	۷۸°۴۵′	۱٫۳۷۴۴	۰٫۱۹۵۱	۱٫۵۶۹۵	۰٫۶۳۷۱	۴
۸	۹۰°	۱٫۵۷۰۸	۰	۱٫۵۷۰۸	۰٫۶۳۶۶	۲
۹	۱۰۱°۱۵′	۱٫۷۶۷۰	−۰٫۱۹۵۱	۱٫۵۷۱۹	۰٫۶۳۶۱	۴
۱۰	۱۱۲°۳۰′	۱٫۹۶۳۵	−۰٫۳۸۲۷	۱٫۵۸۰۸	۰٫۶۳۲۶	۲
۱۱	۱۲۳°۴۵′	۲٫۱۵۹۹	−۰٫۵۵۵۴	۱٫۶۰۴۵	۰٫۶۲۳۲	۴
۱۲	۱۳۵°	۲٫۳۵۶۲	−۰٫۷۰۷۱	۱٫۶۴۹۱	۰٫۶۰۶۴	۲
۱۳	۱۴۶°۱۵′	۲٫۵۵۲۵	−۰٫۸۳۱۵	۱٫۷۲۱۰	۰٫۵۸۱۰	۴
۱۴	۱۵۷°۳۰′	۲٫۷۴۸۹	−۰٫۹۲۳۹	۱٫۸۲۵۰	۰٫۵۴۸۰	۲
۱۵	۱۶۸°۴۵′	۲٫۹۴۵۲	−۰٫۹۸۰۸	۱٫۹۶۴۴	۰٫۵۰۹۰	۴
۱۶	۱۸۰°	۳٫۱۴۱۶	−۱٫۰۰۰۰	۲٫۱۴۱۶	۰٫۴۶۶۹	۱
					$\sum$	۳۱٫۲۱۶۹

مسائل

در مسائل ۱ تا ۳ انتگرال‌ها را توسط فرمول ذوزنقه و با دقت مورد نظر محاسبه کنید. فاصله h را به وسیله برآورد عبارت باقیمانده بدست آورید.

۱. $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{۱+x}$ با دقت $۱۰^{-۲}$

۲. $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{۱+x^{۲}}$ با دقت $۱۰^{-۲}$

۳. $\int_{\circ}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱+x^{۲}}}$ با دقت $۱\circ^{-۵}$

در مسائل ۴ تا ۳۳ انتگرال‌ها را با دقت مشخص شده محاسبه کنید. مقدار h برای کسب دقت لازم را توسط محاسبه مضاعف بدست آورید.

انتگرال‌های زیر را به وسیله فرمول ذوزنقه و با دقت $۱\circ^{-۲}$ محاسبه کنید:

۴. $\int_{\circ}^{۱} \frac{dx}{۱+x^{۳}}$. ۵. $\int_{۱}^{۲} x\log x \ dx$. ۶. $\int_{۱}^{۲} \frac{\log x}{x}dx$.

۷. $\int_{۱}^{۲} \frac{\cos x}{x}dx$. ۸. $\int_{\circ}^{\pi/۲} \frac{\cos x}{۱+x}dx$.

انتگرال‌های زیر را به وسیله فرمول سیمپسون و با دقت $۱\circ^{-۴}$ محاسبه کنید:

۹. $\int_{\circ}^{\circ/۲} \cos\frac{\pi x^{۲}}{۲}dx$. ۱۰. $\int_{\circ}^{۱} \frac{In(۱+x)}{۱+x^{۲}}dx$.

۱۱. $\int_{\circ}^{۱} \frac{arc\tan x}{x}dx$. ۱۲. $\int_{\circ}^{\circ/۵} \frac{dx}{\sqrt{(۱-x^{۲})(۱-\circ/۲۵x^{۲})}}$.

۱۳. $\int_{\circ}^{\circ/۵} \frac{dx}{\sqrt{(۱-x^{۲})(۱-\circ/۷۵x^{۲})}}$. ۱۴. $\int_{\circ}^{\circ/۵} \cos\frac{x^{۲}}{۴}dx$.

۱۵. $\int_{\circ}^{۱} \frac{In(۱+x^{۲})}{۱+x^{۲}}dx$. ۱۶. $\int_{\circ}^{\circ/۵} \frac{(arc\tan x)^{۲}}{x}dx$.

۱۷. $\int_{\circ}^{\pi/۳} \frac{dx}{\sqrt{۱-\circ/۲۵\sin^{۲}x}}$. ۱۸. $\int_{\circ}^{\circ/۵} \sqrt{\frac{۱-\circ/۲۵x^{۲}}{۱-x^{۲}}}dx$.

۱۹. $\int_{\circ}^{\circ/۵} \sqrt{\frac{۱-\circ/۷۵x^{۲}}{۱-x^{۲}}}dx$.

انتگرال‌های زیر را به کمک فرمول سیمپسون و با دقت $۱\circ^{-۳}$ محاسبه کنید.

۲۰. $\int_{\circ}^{۱} \sqrt{x}\sin x \ dx$. ۲۱. $\int_{\circ}^{۱} \sqrt{x}\cos x \ dx$. ۲۲. $\int_{\circ}^{pi} \frac{dx}{۱+x+\sqrt{\sin x}}$.

۲۳. $\int_{\circ}^{\pi/۲} \frac{dx}{x+\sqrt{\cos x}}$. ۲۴. $\int_{۲}^{۳} \frac{dx}{۱+\sqrt{Inx}}$. ۲۵. $\int_{\circ}^{\pi} \frac{dx}{۱+\sin^{۲}x}$.

۲۶. $\int_{\circ}^{\pi/۲} \frac{dx}{۱+\cos^{۲}x}$. ۲۷. $\int_{\circ}^{۱} e^{-۵x^{۲}+x+\circ/۵}dx$. ۲۸. $\int_{\circ}^{۱} e^{-۴x^{۲}+۲x+۱}dx$.

۲۹. $\int_{\circ}^{۱} \frac{\sin x}{x^{۲}+۱}d$. ۳۰. $\int_{\circ}^{۱} \frac{In(۱+\sqrt{x})}{\sqrt[۳]{x}}dx$.

۳۱. $\int_{\circ}^{\pi/۲} \sqrt{۱-\circ/۵\sin^{۲}x} \ dx$.

انتگرال‌های زیر را به وسیله فرمول سیمپسون و با دقت $۱\circ^{-۴}$ محاسبه کنید.

۳۲. $I_{۱} = \int_{\circ}^{\pi/۲} \frac{\sin ax}{x}dx, \quad I_{۲} = \int_{\circ/۵}^{۱/۵} = \frac{e^{ax}}{x}dx, \quad a = \circ/\circ۵k, \ k = ۲,۳,\ldots,۲۲.$

۳۳. $I_{۱} = \int_{\circ}^{۱} = \frac{e^{-x^{۲}}\sin ax}{a+x^{۲}}dx, \quad I_{۲} = \int_{\circ}^{۲} \frac{\sqrt{a+x^{۲}}}{۱+\cos ax}dx, \quad a = \circ/۵+\circ/۱k,$

$k = \circ,۱,۲,\ldots,۱۵.$

۳۴ـ مقدار تقریبی انتگرال $\int_{\circ}^{۲} f(x)dx$ را به کمک فرمول سیمپسون و با محاسبه مضاعف بیابد اگر تابع زیر انتگرال $f(x)$ با جدول ۷-۹ مشخص شده باشد. خطای R را با استفاده از قاعده رانگ بدست آورید.

جدول ۷-۹) جدول مسئله ۳۴

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
۰٫۰	۱٫۰۰۰۰۰	۰٫۷	۰٫۶۱۲۶۳	۱٫۴	۰٫۱۴۰۸۶
۰٫۱	۰٫۹۹۰۰۵	۰٫۸	۰٫۵۲۷۲۹	۱٫۵	۰٫۱۰۵۴۰
۰٫۲	۰٫۹۶۰۷۹	۰٫۹	۰٫۴۴۴۸۶	۱٫۶	۰٫۰۷۷۳۰
۰٫۳	۰٫۹۱۳۹۳	۱٫۰	۰٫۳۶۷۸۸	۱٫۷	۰٫۰۵۵۵۸
۰٫۴	۰٫۸۵۲۱۴	۱٫۱	۰٫۲۹۸۲۰	۱٫۸	۰٫۰۳۹۱۶
۰٫۵	۰٫۷۷۸۸۰	۱٫۲	۰٫۲۳۶۹۳	۱٫۹	۰٫۰۲۷۰۵
۰٫۶	۰٫۶۹۷۶۸	۱٫۳	۰٫۱۸۴۵۲	۲٫۰	۰٫۰۱۸۳۲

۷ـ۳ـ فرمول‌های تربیع گوس

در فرمول‌های تربیع گوس ضرایب A_i و طول‌های $t_i(i = ۱, ۲, \dots, n)$ طوری انتخاب می‌شوند که فرمول برای تمامی چند جمله‌ایها از بزرگترین درجه ممکن دقیق باشد.
اثبات شده است ([۱] و [۱۲] را ببینید) که چنین اعدادی (t_i, A_i) برای $N = ۲n - ۱$ به صورت یکتا بدست می‌آیند. جدول ۷-۱۰ شامل مقادیر طول‌های t_i و ضرایب A_i و همینطور عبارات باقیمانده $R_n(f)$ برای $n = ۴, ۵, ۷$ می‌باشد.

جدول ۷-۱۰) طول‌های t_i و ضرایب A_i در فرمول‌های تربیع گوس

n	t_i	A_i	$R_n(f)$
۴	$-t_۱ = t_۴ = ۰٫۸۶۱۱۳۶۳۱۲$	$A_۱ = A_۴ = ۰٫۳۴۷۸۵۴۸۴۵$	$R_۴(f) \approx ۲٫۸۸ \times ۱۰^{-۷} f^{(۸)}(\xi)$
	$-t_۲ = t_۳ = ۰٫۳۳۹۹۸۱۰۴۴$	$A_۲ = A_۳ = ۰٫۶۵۲۱۴۵۱۵۵$	$-۱ < \xi < ۱$
۵	$-t_۱ = t_۵ = ۰٫۹۰۶۱۷۹۸۴۶$	$A_۱ = A_۵ = ۰٫۲۳۶۹۲۶۸۸۵$	$R_۵(f) \approx ۸٫۰۸ \times ۱۰^{-۴} f^{۱۰}(\xi)$
	$-t_۲ = t_۴ = ۰٫۵۳۸۴۶۹۳۱۰$	$A_۲ = A_۴ = ۰٫۴۷۸۶۲۸۶۷۰$	$-۱ < \xi < ۱$
	$t_۳ = ۰$	$A_۳ = ۰٫۵۶۸۸۸۸۸۸۹$	
۷	$-t_۱ = t_۷ = ۰٫۹۴۹۱۰۷۹۱۲$	$A_۱ = A_۷ = ۰٫۱۲۹۴۸۴۹۶۶$	$R_۷(f) \approx ۲٫۱۳ \times ۱۰^{-۱۵} f^{(۱۴)}(\xi)$
	$-t_۲ = t_۶ = ۰٫۷۴۱۵۳۱۱۸۶$	$A_۲ = A_۶ = ۰٫۲۷۹۷۰۵۳۹۱$	$-۱ < \xi < ۱$
	$-t_۳ = t_۵ = ۰٫۴۰۵۸۴۵۱۵۱$	$A_۳ = A_۵ = ۰٫۳۸۱۸۳۰۰۵۱$	
	$t_۴ = ۰$	$A_۴ = ۰٫۴۱۷۹۵۹۱۸۴$	

مانع اصلی در بکارگیری فرمول تربیع گوس این است که طول‌های t_i و ضرایب A_i، اغلب اعداد گنگ و نامشخصی هستند. امّا این عیب با دقت بالای آن با تعداد نقاط انتگرال‌گیری کم (در مقایسه با دیگر

روش‌ها) جبران می‌شود. استفاده از فرمول گوس به خصوص هنگامی که تابع زیر انتگرال خیلی پیچیده است و زمان زیادی برای محاسبه مقادیر آن در نقاط انتگرال‌گیری لازم است، بسیار مناسب است.
برآورد موفقیت‌آمیز خطای نتیجه فرمول گوس با عبارت باقیمانده به ندرت ممکن می‌شود چون اینکار همراه با محاسبه مشتقات درجه بالا از تابع زیر انتگرال است (جدول ۷-۱۰ را ببینید). در حال حاضر روش‌های متداول که برای کاربردهای عملی ارائه و توسعه داده شده‌اند امکان انجام وارسی را می‌دهند ([۱۹] را ببینید).
در محاسبه انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ تغییر متغیر زیر مفید واقع می‌شود:

$$x = \frac{b+a}{۲} + \frac{b-a}{۲}t$$

در نتیجه فرمول گوس به صورت زیر در می‌آید:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{۲}\sum_{i=۱}^{n} A_i f(x_i) + R_n^*(f) \qquad (۸\text{-}۷)$$

که در آن

$$x_i = \frac{b+a}{۲} + \frac{b-a}{۲}t_i \qquad (۹\text{-}۷)$$

$$R_n^*(f) = (\frac{b-a}{۲})^{۲n+۱} R_n(f) \qquad (۱۰\text{-}۷)$$

مثال ۷ـ۷ـ انتگرال زیر را با فرمول گوس برای $n = ۵$ محاسبه کنید:

$$I = \int_۰^۱ \frac{dx}{۱+x^۲} \qquad (۱۱\text{-}۷)$$

حل‌ـ اجازه دهید از تغییر متغیر زیر استفاده کنیم:

$$x = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}t$$

که منجر به انتگرال زیر می‌شود:

$$I = ۲\int_{-۱}^{۱} \frac{dx}{۴+(t+۱)^۲}$$

جدول ۷-۱۱) محاسبه انتگرال (۷-۱۱) با فرمول گوس

i	t_i	$f(t_i)$	A_i
۱	−۰٫۹۰۶۱۷۹۸۴۶	۰٫۲۴۹۴۵۱۰۷	۰٫۲۳۶۹۲۶۸۸۵
۲	−۰٫۵۳۸۴۶۹۳۱۰	۰٫۲۳۷۳۵۹۹۵	۰٫۴۷۸۶۲۸۶۷۰
۳	۰	۰٫۲	۰٫۵۶۸۸۸۸۸۸۹
۴	۰٫۵۳۸۴۶۹۳۱۰	۰٫۱۵۷۰۶۲۶۱	۰٫۴۷۸۲۸۶۷۰
۵	۰٫۹۰۶۱۷۹۸۴۶	۰٫۱۳۱۰۰۱۱۴	۰٫۲۳۶۹۲۶۸۸۵

با مقادیر تابع زیر انتگرال جدولی تشکیل می‌دهیم (جدول ۷-۱۱) و سپس انتگرال را با فرمول گوس برای $n = ۵$ محاسبه می‌کنیم:

$$I \approx ۲[A_۱ f(t_۱) + A_۲ f(t_۲) + A_۴ f(t_۴) + A_۵ f(t_۵)] = ۰٫۷۸۵۳۹۸۱۶$$

برای مقایسه مقدار دقیق انتگرال $I = \frac{\pi}{۴} = ۰٫۷۸۵۳۹۸۱۶۳\ldots$ را بدست می‌آوریم. همانطور که مشاهده می‌شود درنتیجه بدست آمده تمامی هشت رقم صحیح هستند. توجه کنید که حتی رقم ششم نتیجه محاسبه شده با فرمول سیمپسون در محاسبه این انتگرال ($h = ۰٫۱$) صحیح نیست.

مثال ۷ـ۸ـ دقت محاسبه انتگرال‌های

$$In = \int_{-۱}^{۱} |x|^n dx (n = ۱, ۲, ۳, \ldots)$$

را برای فرمول‌های ذوزنقه، سیمپسون و گوس (با سه نقطه) مقایسه کنید.

حلـ با فرمول ذوزنقه با فاصله $h = ۱$ داریم: $I_n \approx ۱(\frac{۱}{۲} + ۰ + \frac{۱}{۲}) = ۱$ با فرمول سیمپسون با همان فاصله داریم: $I_n \approx \frac{۱}{۳}(۱ + ۰ + ۱) = \frac{۲}{۳}$ با فرمول گوس برای $f(x) = |x|^n$ خواهیم داشت:

$$I_n \approx \frac{۵}{۹}[f(-\sqrt{\frac{۳}{۵}}) + f(\sqrt{\frac{۳}{۵}})] + \frac{۸}{۹}f(۰) = \frac{۱۰}{۹}(\frac{۳}{۵})^{n/۲}$$

مقدار دقیق انتگرال برابر است با:

$$I_n \approx ۲\int_{۰}^{۱} x^n dx = \frac{۲}{n + ۱}$$

از اینرو برای $n = ۱$ فرمول ذوزنقه به مقدار دقیق می‌رسد، فرمول سیمپسون $\frac{۱}{۳}$ خطا دارد و فرمول گوس به مقدار $\frac{۱۰}{۹}\sqrt{\frac{۳}{۵}} = ۰٫۸۶۱$ با خطای ۰٫۱۳۹ می‌رسد. برای $n = ۲$ فرمول‌های گوس به سیمپسون به مقدار دقیق $I = \frac{۲}{۳}$ می‌رسند، در صورتی که فرمول ذوزنقه خطای $\frac{۱}{۳}$ را خواهد داشت. برای $n = ۳$ مقدار

دقیق برابر است با $I_3 = \frac{2}{3}$، که فرمول گوس نتیجه می‌دهد ۰٫۵۱۶۴ با خطای ۰٫۱۶۴، فرمول سیمپسون خطای $\frac{2}{3} - \frac{2}{4} = 0.167$ را خواهد داشت و فرمول ذوزنقه خطای ۰٫۵ را دارد یعنی به اندازه ٪۱۰۰ خطا دارد. برای $n = 4$ فرمول گوس مقدار دقیق $I_4 = \frac{2}{5}$ را بدست می‌دهد، فرمول سیمپسون خطای $\frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \approx 0.267$ را بدست می‌دهد و فرمول ذوزنقه خطای $\frac{3}{5} = 0.6$ را بدست می‌دهد.
این مقایسه نشان می‌دهد که فرمول ذوزنقه قادر است دقت بالاتری را نسبت به فرمول‌های گوس و سیمپسون بدست می‌دهد اگر مشتق تابع زیر انتگرال پیوسته نباشد. امّا برای توابعی که به تعداد کافی مشتقات پیوسته دارند فرمول گوس بطور قابل ملاحظه‌ای نسبت به فرمول سیمپسون دقیق‌تر است و از فرمول ذوزنقه بسیار دقیق‌تر است. این موضوع به خوبی با مثال زیر در مورد انتگرال با سه نقطه نشان داده شده است.

$$I = \int_{-1}^{1} e^x dx = e - e^{-1} = 2.3504$$

با فرمول ذوزنقه بدست می‌آوریم:

$I \approx \frac{0.3679}{2} + 1 + \frac{2.7183}{2} = 2.5431$ با خطای ۰٫۱۹۳

با فرمول سیمپسون خواهیم داشت:

$I \approx \frac{1}{3}(0.3679 + 4.1 + 2.7183) = 2.3621$ با خطای ۰٫۰۱۱۷

با فرمول گوس بدست می‌آوریم:

$I \approx \frac{5}{9}(0.4609 + 2.1686) + \frac{8}{9} = 2.3497$ با خطای ۰٫۰۰۰۷

مسائل

با استفاده از فرمول گوس انتگرال‌های زیر را محاسبه و خطا را برآورد کنید (عبارت باقیمانده R را).

۱. $\int_1^3 \frac{dx}{1+x}$ $for\ n = 4.$

۲. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x+3}$ $for\ n = 5.$

۳. $\int_0^1 \sqrt{1+x}dx$ $for\ n = 4$

انتگرال زیر را با استفاده از فرمول گوس محاسبه کنید:

۴. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)(3t^2+4)}}\ ,\ n = 4$

۵. $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx\ ,\ n = 5$

۶. $\int_0^1 \frac{In(1+x)}{1+x^2}dx\ ,\ n = 4.$

۷. $\int_0^1 \frac{In(1+x)}{x}dx\ ,\ n = 4.$

۸. $I = \int_0^1 \frac{e^{ax^2}dx}{1+\sin ax}\ ,\ n = 5,\quad a = 0.5 + 0.2 \times k,\quad k = 0, 1, \ldots, 10.$

۹. $I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{3 - ax}\cos ax dx\ ,\ n = 5,\quad a = 0.5 + 0.1 \times k,\quad k =$
$= 0, 1, \ldots, 14.$

۷ـ۴ـ انتگرال‌گیری به کمک دنباله توان

انتگرال معین زیر را در نظر بگیرید:

$$\int_a^b f(x)dx \tag{۷-۱۲}$$

اجازه دهید تابع زیر انتگرال $f(x)$ را به یک دنباله توان بسط دهیم:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

که در بازه $(-R, R)$ متقارب است (که شامل بازه انتگرال‌گیری است).
با بکارگیری اصل انتگرال‌گیری جمله به جمله از دنباله توان ([۵۵] را ببینید)، می‌توانیم انتگرال (۷-۱۲) را به صورت یک دنباله عددی نشان دهیم:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(b^{k+1} - a^{k+1}) \tag{۷-۱۳}$$

اگر دنباله (۷-۱۳) با سرعت کافی متقارب شود آنگاه ما می‌توانیم بطور تقریبی انتگرال معین را به کمک مجموع جزیی دنباله

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{N} \frac{c_k}{k+1}(b^{k+1} - a^{k+1}) \tag{۷-۱۴}$$

محاسبه کنیم. خطای نتیجه نهایی از خطاهای زیر تشکیل می‌شود:
(۱) خطای ناشی از جایگزینی دنباله با مجموع جزیی: این خطا (خطای برش) برابر باقیمانده سری است.
(۲) خطای ناشی از گرد کردن محاسبه مجموع (۷-۱۴).
برای یک دنباله متناوب با جملات نزولی یکنوا (از نظر قدر مطلق)، قدر مطلق عبارت باقیمانده دنباله از قدر مطلق اولین جملات به حساب نیامده از دنباله بیشتر نیست (مثال‌های ۷ـ۹ و ۷ـ۱۰ را ببینید). در دیگر موارد برای برآورد عبارت باقیمانده یک دنباله، ما معمولاً از دنباله‌های عددی که عبارت باقیمانده آنها به راحتی برآورد می‌شوند استفاده می‌کنیم (مثال ۷ـ۱۱ را ببینید).

مثال ۷ـ۹ـ انتگرال $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ را به کمک بسط تابع زیر انتگرال به دنباله توان و استفاده از هفت جمله بسط محاسبه و خطا را برآورد کنید.

حل. داریم:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots \ .$$

این دنباله برای هر x متقارب است. با انتگرال‌گیری جمله به جمله از هفت جمله اول بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2}dx &\approx [x - \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^5}{5\times 2!} - \tfrac{x^7}{7\times 3!} + \tfrac{x^9}{9\times 4!} - \tfrac{x^{11}}{11\times 5!} + \tfrac{x^{13}}{13\times 6!}]_0^1 = \\ &= 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{216} - \tfrac{1}{1320} + \tfrac{1}{9360}. \end{aligned} \tag{15-7}$$

با برآورد باقیمانده دنباله بدست می‌آوریم: $|R_7| \leq \frac{x^{15}}{15\times 7!}|_0^1 = \frac{1}{75600} < 1.5 \times 10^{-5}$ با این حساب ما مجموع (۷-۱۵) را با ۵ رقم اعشار (با یک رقم اضافی) محاسبه می‌کنیم. نهایتاً بدست می‌آوریم: $\int_0^1 e^{-x^2}dx = 0.7468$ که تمام ارقام آن صحیح است.

مثال ۷ـ۱۰ـ انتگرال $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x^2)dx$ را با دقت 10^{-4} به کمک بسط تابع زیر انتگرال به دنباله توان محاسبه کنید.

حل. تابع $f(x)$ را به یک دنباله توان بسط می‌دهیم:

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots$$

این دنباله برای هر مقدار x متقارب است. انتگرال این دنباله را جمله به جمله در بازه ۰ تا $\frac{\pi}{4}$ می‌گیریم:

$$\begin{aligned} I &= [\tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^7}{7\times 3!} + \tfrac{x^{11}}{11\times 5!} - \tfrac{x^{15}}{15\times 7!} + \dots]_0^{\pi/4} = \\ &= \tfrac{1}{3}(\tfrac{\pi}{4})^3 - \tfrac{1}{7\times 3!}(\tfrac{\pi}{4})^7 + \tfrac{1}{11\times 5!}(\tfrac{\pi}{4})^{11} - \tfrac{1}{15\times 7!}(\tfrac{\pi}{4})^{15} + \dots \ . \end{aligned}$$

چون دنباله عددی حاصل شده، یک دنباله متناوب است، کافیست که تعدادی از جملات را در نظر بگیریم که جملات بلافاصله بعدی از 10^{-4} کوچکتر باشند. این شرط با جمله سوم برقرار می‌شود زیرا:

$$\frac{\pi^{11}}{11 \times 5! \times 4^{11}} < \frac{(0.786)^{11}}{1320} = \frac{0.051}{1320} < 4 \times 10^{-5}$$

مجموع دو جمله اول را پیدا می‌کنیم. محاسبات را با پنج رقم اعشار انجام داده، جواب نهایی را گرد می‌کنیم:

$$I = \frac{\pi^3}{3 \times 4^3} - \frac{\pi^7}{7 \times 3! \times 4^7} = \frac{1}{3}(0.78540)^3[1 - \frac{(0.78540)^4}{14}] = 0.1571.$$

مثال ۷ـ۱۱ـ انتگرال $I = \int_0^{0.5} \frac{dx}{1-x^5}$ را با دقت $\varepsilon = 10^{-4}$ محاسبه کنید.

حل- تابع $f(x)=\frac{۱}{۱-x^۵}$ را به دنباله توان بسط می‌دهیم:

$$\frac{۱}{۱-x^۵}=۱+x^۵+x^{۱۰}+x^{۱۵}+\cdots+x^{۵n-۵}+\ldots .$$

دامنه تقارب این دنباله بازه $(-۱,۱)$ است. بازه انتگرال‌گیری در این بازه قرار دارد، بنابراین دنباله نوشته شده در بالا، به صورت جمله به جمله قابل انتگرال‌گیری است. با انتگرال‌گیری در بازه $[۰,۰/۵]$ بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}I&=[x+\tfrac{x^۶}{۶}+\tfrac{x^{۱۱}}{۱۱}+\tfrac{x^{۱۶}}{۱۶}+\cdots+\tfrac{x^{۵n-۴}}{۵n-۴}+\ldots]_۰^{۱/۲}=\\&=\tfrac{۱}{۲}+\tfrac{۱}{۶\times ۲^۶}+\tfrac{۱}{۱۱\times ۲^{۱۱}}+\tfrac{۱}{۱۶\times ۲^{۱۶}}+\cdots+\tfrac{۱}{(۵n-۴)۲^{۵n-۴}}+\ldots .\end{aligned}$$

چون جمله سوم از $۱۰^{-۴}$ کوچکتر است، ما مجموع دو جمله اول را به عنوان مقدار تقریبی انتگرال در نظر گرفته و مجموع جملات به حساب نیامده را برآورد می‌کنیم (باقیمانده دنباله یعنی $R_۲$ را):

$$R_۲=\frac{۱}{۱۱\times ۲^{۱۱}}+\frac{۱}{۱۶\times ۲^{۱۶}}+\frac{۱}{۲۱\times ۲^{۲۱}}+\cdots+\frac{۱}{(۵n-۴)۲^{۵n-۴}}+\ldots .$$

در تمامی جملات (از جمله دوم به بعد) ضرایب ۱۶، ۲۱ و... را با مقدار ۱۱ جایگزین می‌کنیم. سپس بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}R_۲&<\tfrac{۱}{۱۱\times ۲^{۱۱}}+\tfrac{۱}{۱۱\times ۲^{۱۶}}+\cdots+\tfrac{۱}{۱۱\times ۲^{۵n-۴}}+\cdots=\tfrac{۱}{۱۱\times ۲^{۱۱}}\times\tfrac{۱}{۱-\frac{۱}{۲۵}}=\\&=\tfrac{۱}{۱۱\times ۲^۶\times ۳۱}=\tfrac{۱}{۲۱\ ۸۲۴}<\tfrac{۱}{۲}\times ۱۰^{-۴}.\end{aligned}$$

از اینرو مجموع دو جمله اول از دنباله انتگرال‌گیری شده، مقدار انتگرال را با دقت مورد نظر بدست می‌دهد:

$$\int_۰^{۰/۵}\frac{dx}{۱-x^۵}\approx\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶\times ۲^۶}=۰/۵۰۲۶$$

مسائل

در مسائل ۱ تا ۴ انتگرال‌ها را به وسیله بسط تابع زیر انتگرال به دنبال توان و در نظر گرفتن سه جمله از این بسط محاسبه کنید. خطای R را برآورد کنید.

۱- $\int_۰^{۰/۱}\frac{ln(۱+x)}{x}dx$ ۲- $\int_۰^۱\cos(x^۲)dx$

۳- $\int_۰^{۰/۲۵}\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}dx.$ ۴- $\int_۰^{۰/۵}x^۲\sqrt{۱+x^۲}dx.$

انتگرال‌های زیر را با دقت مورد نظر ε محاسبه کنید:

۵ـ $\int_0^2 \frac{\sin x}{x}dx,\quad \varepsilon = 10^{-5}.$ ۶ـ $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx,\quad \varepsilon = 10^{3}.$
۷ـ $\int_0^1 \frac{ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx,\quad \varepsilon = 10^{-4}.$

۸- انتگرال $\int_0^{0/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin 0/2$ را با دقت 10^{-5} را محاسبه کنید.

با بسط تابع زیر انتگرال به یک دنباله، انتگرال‌های زیر را با دقت 10^{-3} محاسبه کنید:

۹ـ $\int_0^1 \frac{\sin h\ x}{x}dx.$ ۱۰ـ $\int_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}.$ ۱۱ـ $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$
۱۲ـ $\int_0^{0/5} \frac{\arctan x}{x}dx.$ ۱۳ـ $\int_0^{0/5} \frac{\arcsin x}{x}dx.$

انتگرال‌های زیر را با دقت 10^{-4} محاسبه کنید:

۱۴ـ $\int_0^{\sqrt{3}/3} x^3 \arctan x dx.$ ۱۵ـ $\int_0^1 \sqrt[3]{x}\cos x dx.$
۱۶ـ $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx.$ ۱۷ـ $\int_0^{0/25} ln(1+\sqrt{x})dx.$
۱۸ـ $\int_{0/1}^{0/2} \frac{e^{-x}}{x^3}dx.$ ۱۹ـ $\int_0^{1/9} \sqrt{x}e^x dx.$ ۲۰ـ $\int_{0/2}^{0/3} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}.$
۲۱ـ $\int_{0/5}^{0/6} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$ ۲۲ـ $\int_0^{0/5} \sqrt{1+x^5}dx.$ ۲۳ـ $\int_0^{0/5} \sqrt{x-x^3}dx.$
۲۴ـ $\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}dx.$ ۲۵ـ $\int_{0/5}^{0/8} \sqrt{1+x^3}dx.$ ۲۶ـ $\int_{0/5}^1 \sqrt{1+x^3}dx.$

۷ـ۵ـ انتگرال‌های توابع غیر پیوسته، روش کانتورویچ[1] برای مشخص کردن نقاط انفصال

می‌خواهیم انتگرال غیر متعارف

$$\int_a^b f(x)dx \tag{۷-۱۶}$$

را محاسبه کنیم که در آن تابع زیر انتگرال در بعضی از نقاط C در بازه $[a,b]$ نا معین است (منفصل است). همانطور که می‌دانیم طبق تعریف، قرار می‌دهیم:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\delta_1 \to 0 \\ \delta_2 \to 0}} \left\{ \int_a^{c-\delta_1} f(x)dx + \int_{c+\delta_2}^b f(x)dx \right\} \tag{۷-۱۷}$$

برای محاسبه انتگرال غیر متعارف با دقت ε، اعداد δ_1 و δ_2 را به قدری کوچک انتخاب می‌کنیم که نامساوی

1) Kantorovich

زیر برقرار شود:

$$|\int_{c-\delta_1}^{c+\delta_2} f(x)dx| < \frac{\varepsilon}{2}$$

سپس با استفاده از فرمول‌های تربیع بطور تقریبی انتگرال‌های معین زیر را حساب می‌کنیم:

$$\int_0^{c-\delta_1} f(x)dx, \int_{c+\delta_2}^{b} f(x)dx \qquad (۷-۱۸)$$

اگر S_1 و S_2 مقادیر تقریبی انتگرال‌های (۷-۱۸) با دقت $\frac{\varepsilon}{4}$ باشند، آنگاه دقت برابر با ε می‌گردد.

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_1 + S_2$$

مثال ۷-۱۲- انتگرال زیر را با دقت ۰٫۰۵ حساب کنید.

$$I = \int_{0.3}^{2} \frac{e^{-x}dx}{\sqrt[4]{2 + x - x^2}}$$

حل- تابع زیر انتگرال یک انفصال در نقطه $x = 2$ دارد. اجازه دهید انتگرال را به صورت مجموع دو انتگرال I_1 و I_2 بنویسیم:

$$I_1 = \int_{0.3}^{2-\delta} \frac{e^{-x}dx}{\sqrt[4]{2 + x - x^2}}, \quad I_2 = \int_{2-\delta}^{2} \frac{e^{-x}dx}{\sqrt[4]{2 + x - x^2}}$$

و δ را به نحوی انتخاب کنیم که مقدار I_2 به اندازه کافی کوچک شود. برای مثال، برای $\delta \leq 0.1$ انتگرال I_2 شرط زیر را برقرار می‌کند:

$$0 < I_2 < \frac{e^{-1.9}}{\sqrt[4]{2.9}} \int_{2-\delta}^{2} \frac{dx}{\sqrt[4]{2 - x}} = 0.115 \times \frac{4}{3}\delta^{3/4} = 0.153\delta^{3/4}$$

با قرار دادن $\delta = 0.1$ خواهیم داشت $I_2 < 0.028$. جهت برآورد انتگرال I_2، اجازه دهید که

$$I_1 = \int_{0.3}^{1.9} \frac{e^{-x}dx}{\sqrt[4]{2 + x - x^2}}$$

را به وسیله فرمول سیمپسون و با دقت ۰٫۰۲۲ محاسبه کنیم. محاسبات برای فاصله‌های $2h = 0.8$ و $h = 0.4$ منجر به نتایج $I_1 : h = 0.513$ و $I_1 : 2h = 0.519$ می‌گردد. در نتیجه می‌توانیم با دقت ۰٫۰۰۴ بنویسیم:

$$I_1 \approx 0.51$$

از اینرو با قرار دادن $I \approx I_1$ خواهیم داشت $I \approx 0.51$. که خطای آن قابل قبول است.

۱ـ روش کانتروویچ برای مشخص کردن نقاط انفصال. در اغلب موارد برای محاسبه مقدار تقریبی یک انتگرال معین از یک تابع منفصل، از روش مفید کانتروویچ برای مشخص کردن نقاط انفصال استفاده می‌شود ([۱]، [۱۲]، [۲۱] و [۲۷] را ببینید). نکته اصلی در این روش این است که ما یک تابع $y(x)$ از تابع زیر انتگرال $f(x)$ بدست آوریم که همان انفصال‌های $f(x)$ را داشته باشد و در جملات و عبارات مقدماتی در بازه داده شده $[a,b]$ قابل انتگرالگیری باشد، بطوریکه اختلاف $f(x)-g(x)$ به تعداد لازم مشتق داشته باشد. انتگرال را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx + \int_a^b (f(x)-g(x))dx$$

انتگرال اول مستقیماً بدست می‌آید و انتگرال دوم توسط فرمول‌های تربیع استاندارد به راحتی محاسبه می‌گردد. تابع $g(x)$ با استفاده از روش‌های مختلف بسته به کاربرد انتخاب می‌شود. اجازه بدهید تا قاعده تشکیل چنین تابعی را برای یک دسته از انتگرال‌های پرکاربرد استنتاج کنیم. فرض کنید که تابع زیر انتگرال به صورت زیر است:

$$f(x) = (x-c)^{\alpha}\varphi(x), a \le c \le b \qquad (۱۹\text{-}۷)$$

که در آن $-1 < \alpha < 0$ و $\varphi(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته و به دفعات کافی مشتق‌پذیر است. حال $f(x)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} f(x) &= [\varphi(c)(x-c)^{\alpha} + \tfrac{\varphi'(c)}{1!}(x-c)^{\omega+1} + \tfrac{\varphi''(c)}{2!}(x-c)^{\alpha+2} + \cdots \\ &\cdots + \tfrac{\varphi^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^{\alpha+k}] + (x-c)^{\alpha}[\varphi(x)-\varphi(c) \\ &-\tfrac{\varphi'(c)}{1!}(x-c) - \tfrac{\varphi''(c)}{2!}(x-c)^{2} - \cdots - \tfrac{\varphi^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^{k}] \end{aligned} \qquad (۲۰\text{-}۷)$$

اولین کروشه مجذور، شامل یک تابع توان است که مستقیماً انتگرال‌گیری می‌شود. دومین عبارت مجذور و مشتقاتش تا درجه k در نقطه $x=c$ صفر می‌شوند. حاصلضرب این عبارت در فاکتور $(x-c)^{\alpha}$، تابعی است که مشتقاتش تا درجه k پیوسته است. بنابراین انتگرال این تابع قابل محاسبه است (به وسیله یکی از فرمول‌های تربیع).

مثال ۷ـ۱۳ـ مقدار تقریبی انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \int_0^{0/5} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

حل‌ـ تابع زیر انتگرال در نقطه $x=0$ منفصل است. اجازه دهید آن‌را به صورت زیر بنویسیم:

$$f(x) = x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}$$

از اینرو $\alpha = -\frac{۱}{۲}$، $c = ۰$ و $\varphi(x) = (۱-x)^{-۱/۲}$ می‌باشند. به وسیله فرمول تیلور داریم:

$$\varphi(x) = ۱ + \frac{۱}{۲}x + \frac{۳}{۸}x^۲ + \frac{۵}{۱۶}x^۳ + \frac{۳۵}{۱۲۸}x^۴ + R_۴(x)$$

حال $f(x)$ را می‌توان نوشت:

$$f(x) = [x^{-۱/۲} + \frac{۱}{۲}x^{۱/۲} + \frac{۳}{۸}x^{۳/۲} + \frac{۵}{۱۶}x^{۵/۲} + \frac{۳۵}{۱۲۸}x^{۷/۲}] + \frac{\psi(x)}{\sqrt{x}}$$

که در آن

$$\psi(x) = \frac{۱}{\sqrt{۱-x}} - (۱ + \frac{۱}{۲}x + \frac{۳}{۸}x^۲ + \frac{۵}{۱۶}x^۳ + \frac{۳۵}{۱۲۸}x^۴)$$

و $\psi(۰) = ۰$. بنابراین

$$I = \int_۰^{۰/۵} (x^{-۱/۲} + \frac{۱}{۲}x^{۱/۲} + \frac{۳}{۸}x^{۳/۲} + \frac{۵}{۱۶}x^{۵/۲} + \frac{۳۵}{۱۲۸}x^{۷/۲})dx + I_۱ = ۱/۵۶۹۱۵۸۵ + I_۱$$

که در آن

$$I_۱ = \int_۰^{۰/۵} \frac{\psi(x)}{\sqrt{x}}dx.$$

انتگرال $I_۱$ را به وسیله فرمول سیمپسون برای $n = ۱۰$ محاسبه می‌کنیم یعنی $h = ۰/۰۵$. جدول ۷-۱۲ مقادیر تابع انتگرال را با دقت $۱۰^{-۶}$ بدست می‌دهد. سطر آخر جدول نشان‌دهنده مجموع حاصل‌ضرب‌های y_i در m_i است، پس داریم:

$$I_۱ = \frac{۰/۰۵}{۳} * ۰/۰۹۸۳۰۹ = ۰/۰۰۱۶۳۸۵$$

و سرانجام بدست می‌آوریم:

$$I = \int_۰^{۰/۵} \frac{dx}{\sqrt{x(۱-x)}} = ۱/۵۶۹۱۵۸۵ + ۰/۰۰۱۶۳۸۵ = ۱/۵۷۰۷۹۷۰$$

به منظور مقایسه مقدار دقیق انتگرال $I = \frac{\pi}{۲} = ۱/۵۷۰۷۹۶۳$ را داریم.

جدول ۷-۱۲) مقادیر تابع $y = \frac{\psi(x)}{\sqrt{x}}$

i	x_i	y_i	m_i
۰	۰	۰٫۰۰۰۰۰۰۰	۱
۱	۰٫۰۵	۰٫۰۰۰۰۰۰۰	۴
۲	۰٫۱۰	۰٫۰۰۰۰۰۰۹	۲
۳	۰٫۱۵	۰٫۰۰۰۰۰۵۶	۴
۴	۰٫۲۰	۰٫۰۰۰۰۲۱۶	۲
۵	۰٫۲۵	۰٫۰۰۰۰۶۲۴	۴
۶	۰٫۳۰	۰٫۰۰۰۱۵۰۸	۲
۷	۰٫۳۵	۰٫۰۰۰۳۲۲۵	۴
۸	۰٫۴۰	۰٫۰۰۰۶۳۱۶	۲
۹	۰٫۴۵	۰٫۰۰۱۱۵۸۸	۴
۱۰	۰٫۵۰	۰٫۰۰۲۰۲۳۹	۱
$\sum$			۰٫۰۰۹۸۳۰۹

توجه- روش کانتروویچ همچنین برای انتگرال‌های غیر متعارف از توابع منفصل از انواع دیگر نیز کاربرد دارد ([۱] و [۲۱] را ببینید). اگر تابع زیر انتگرال دارای چندین نقطه انفصال باشد، آنگاه می‌توانیم بازه انتگرالگیری را به قسمت‌هایی تقسیم کنیم که هر کدام تنها شامل یک نقطه انفصال تابع زیر انتگرال باشد و سپس از خاصیت جمع‌پذیری انتگرال کمک بگیریم. این روش همچنین می‌تواند در محاسبه انتگرال‌های متعارف مفید باشد (وقتی که تابع زیر انتگرال، پیوسته است ولی به تعداد کافی مشتقات پیوسته ندارد که سبب مشکل شدن برآورد خطاها می‌شود).

۲ـ به کارگیری فرمول‌های تربیع وزن‌دار. انتگرال نامتعارفی از یک تابع منفصل را در نظر بگیرید. تابع زیر انتگرال را به شکل حاصلضرب دو تابع $\varphi(x)$ و $P(x)$ نشان می‌دهیم.

$$f(x) = \varphi(x)P(x) \tag{۷-۲۱}$$

$\varphi(x)$ در بازه $[a,b]$ محدود و به تعداد کافی مشتق دارد و $P(x) > ۰$ در بازه $[a,b]$. حال انتخاب یک فرمول تربیع به شکل زیر ممکن خواهد بود:

$$\int_a^b P(x)\varphi(x)dx \approx \sum_{k=۱}^{n} C_k^{(n)}\varphi(x_k) \tag{۷-۲۲}$$

که در آن ضرایب مستقل $C_k^{(n)}$ به $\varphi(x)$ بستگی نداشته و طول‌های x_k طوری بدست می‌آیند که برای چند جمله‌ای‌های با هر درجه بزرگ ممکن دقیق باشد. چگونگی تشکیل چنین فرمول‌هایی در [۱] و [۲۱] آمده است. تابع $P(x)$ را«تابع وزن» و یا «وزن» می‌گویند. دلیل بکارگیری فرمول‌های تربیع با وزن $P(x)$ برای انتگرال‌گیری توابع منفصل این است که در آن عبارت باقیمانده به $P(x)$ بستگی ندارد یعنی عدم بستگی به قسمت‌های منفصل تابع.

مقادیر ضرایب $C_k^{(n)}$ و طول‌های x_k در فرمول‌های تربیع به شکل (۷-۲۲) برای توابع مختلف وزن $P(x)$ در [۱۹] و [۲۲] آمده‌اند.

جدول ۷-۱۳ شامل مقادیر $C_k^{(n)}$ و x_k برای موردی است که $a = ۰$ و $b = ۱$ بوده و تابع وزن به صورت $P(x) = x^{-\frac{۱}{۲}}$ است.

برای $a = -۱$ و $b = ۱$ و $P(x) = \frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$ فرمول تربیع گوشه‌دار[1] می‌شود ([۱] را ببینید).

$$\int_{-۱}^{۱} \frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{۱-x^۲}} \approx \frac{\pi}{n}\sum_{k=۱}^{n}\varphi(x_k) \qquad (۷\text{-}۲۳)$$

که در آن $x_k = \cos\frac{۲k-۱}{۲n}\pi$ و

$$R(f) = \frac{\pi}{(۲n)!۲^{n-۱}} f^{(۲n)}(\xi), \quad -۱ < \xi < ۱ \qquad (۷\text{-}۲۴)$$

جدول ۷-۱۳) مقادیر x_k و $C_k^{(n)}$ برای فرمول تربیع
$\int_۰^۱ \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}dx \approx \sum_{k=۱}^{n} c_k^{(n)}\varphi(x_k)$

n	k	x_k	$C_k^{(n)}$
۳	۱	۰٫۰۵۶۹۳۹	۰٫۹۳۵۸۲۸
	۲	۰٫۴۳۷۱۹۸	۰٫۷۲۱۵۲۳
	۳	۰٫۸۶۹۴۹۹	۰٫۳۴۲۶۴۹
۴	۱	۰٫۰۳۳۶۴۸	۰٫۷۲۵۳۶۸
	۲	۰٫۲۷۶۱۸۴	۰٫۶۲۷۴۱۳
	۳	۰٫۶۳۴۶۷۷	۰٫۴۴۴۷۶۲
	۴	۰٫۹۲۲۱۵۷	۰٫۲۰۲۴۵۷
۵	۱	۰٫۰۲۲۱۶۴	۰٫۵۹۱۰۴۸
	۲	۰٫۱۸۷۸۳۱	۰٫۵۳۸۵۳۳
	۳	۰٫۴۶۱۵۹۷	۰٫۴۳۸۱۷۳
	۴	۰٫۷۴۸۳۳۵	۰٫۲۹۸۹۰۳
	۵	۰٫۹۴۸۴۹۴	۰٫۱۳۳۳۴۳

مثال ۷ـ۱۴ـ مقدار تقریبی انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \int_{-۱}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱-x^۴}}$$

1) Hermitian

حل- اجازه دهید تابع زیر انتگرال را به شکل $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ نشان دهیم و در نظر بگیریم که $P(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ تابع وزن است.

در اینصورت انتگرال داده شده می‌تواند به وسیله فرمول تربیع گوشه‌دار (۷-۲۳) محاسبه شود:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+x_k^2}}.$$

با قرار دادن $n = 6$ داریم:

$$I \approx \frac{\pi}{6}\left[\frac{2}{\sqrt{1+\cos^2 15^\circ}} + \frac{2}{\sqrt{1+\cos^2 45^\circ}} + \frac{2}{\sqrt{1+\cos^2 75^\circ}}\right] = 2{,}221329.$$

اجازه دهید یادآور شویم که محاسبه مستقیم انتگرال با شش رقم صحیح مقدار $I = 2{,}221441$ را بدست می‌دهد.

مثال ۷-۱۵- مقدار تقریبی انتگرال $I = \int_0^1 \frac{dx}{(4-x)\sqrt{x}}$ را محاسبه کنید.

حل- قرار می‌دهیم:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{4-x}$$

با استفاده از مقادیر x_k و $C_k^{(n)}$ موجود در جدول ۷-۱۳ برای $n = 4$، به کمک فرمول (۷-۲۲) بدست می‌آوریم:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(4-x)\sqrt{x}} \approx \frac{0{,}7254}{3{,}9664} + \frac{0{,}6274}{3{,}7238} + \frac{0{,}4448}{3{,}3653} + \frac{0{,}2025}{3{,}0778} = 0{,}5493.$$

محاسبه مستقیم انتگرال به نتیجه $\int_0^1 \frac{dx}{(4-x)\sqrt{x}} = \frac{1}{2}ln3 \approx 0{,}5493.$ منجر می‌گردد.

مسائل

با استفاده از روش کانترورویچ برای مشخص کردن نقاط انفصال، مقدار تقریبی انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

۱. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt[4]{(1-x)^3}}$ (با دقت 10^{-5})

۲. $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ (با دقت 10^{-6})

۳. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}(e^{x/2}+3)}$ (با دقت 10^{-5})

۴. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (با دقت 10^{-6})

۵. $\int_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ (با دقت 10^{-6})

با استفاده ازفرمول‌های تربیع وزن‌دار، انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید:

۶. $\int_{-1}^{1} \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad (n=5).$

۷. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \quad (n=5).$

۸. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}(e^{0/4x}+1/5)} \quad (n=4).$

۹. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} \quad (n=5).$

۱۰. $\int_{0}^{1} \frac{e^{a(x-1)}}{\sqrt{x}(x+b)}dx \quad (n=5),\ a=0/60+0/07\times k,\ k=0,1,\ldots,8,$
$b=2/00+0/25\times k,\ k=0,1,2,\ldots,6).$

۱۱. $I=\int_{-1}^{1} \frac{\cos\ ax}{(0/3+x^2)\sqrt{1-x^2}}dx \quad (n=12,\ a=2/6+0/04\times k,\ k=0,1,2,\ldots,10).$

۷ـ۶ـ انتگرال‌های با حدود نامعین

۱ـ روش برش. برای محاسبه انتگرال نامتعارف همگرای $\int_a^\infty f(x)dx$ با دقت داده شده، آن‌را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^\infty f(x)dx$$

که در آن b آنقدر بزرگ انتخاب می‌شود که نامساوی $|\int_b^\infty f(x)dx| < \frac{\varepsilon}{2}$ برقرار باشد. در اینصورت انتگرال متعارف $\int_a^b f(x)dx$ را می‌توان توسط یکی از فرمول‌های تربیع با دقت $\frac{\varepsilon}{2}$ محاسبه کرد. سپس ما تقریباً قرار می‌دهیم:

$$\int_a^\infty f(x)dx \approx \int_a^b f(x)dx$$

مثال ۷ـ۱۶ـ مقدار تقریبی انتگرال $\int_2^\infty \frac{dx}{1+x^3}$ را با دقت $\varepsilon = 10^{-2}$ بیابید.

حل‌ـ مقدار b را طوری انتخاب می‌کنیم که نامساوی $\int_b^\infty \frac{dx}{1+x^3} < \frac{10^{-2}}{2}$ برقرار شود. با توجه به اینکه $\int_b^\infty \frac{dx}{1+x^3} < \int_b^\infty \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2b^2}$ ، مقدار b را با توجه با شرط $\frac{1}{2b^2} = \frac{10^{-2}}{2}$ بدست می‌آوریم. که از آنجا نتیجه می‌شود $b=10$. بطور تقریبی قرار می‌دهیم:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{1+x^3} \approx \int_2^{10} \frac{dx}{1+x^3} = I$$

و انتگرال محدود بدست آمده را به وسیله فرمول سیمپسون با دقت $\frac{1}{2} \times 10^{-2}$ و با قرار دادن $h_1 = 1$ و $h_2 = 2$ محاسبه می‌کنیم. نتایج محاسبات در جدول زیر آمده است. سطر آخر جدول حاصل جمع‌های $\sum y_k m_k$ و $\sum y_k m'_k$ هستند که همان مقادیر تقریبی انتگرال محاسبه شده هستند. برای $h_1 = 1$ مقدار $I_1 = \frac{1}{3} \times 0{,}3477 = 0{,}1159$ و برای $h_2 = 2$ مقدار $I_2 = \frac{2}{3} \times 0{,}1809 = 0{,}1206$ را بدست می‌آوریم، که اختلاف میان این دو مقدار کمتر از $\frac{1}{2} \times 10^{-2}$ است.

پس داریم:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{1+x^3} = 0{,}12$$

۲ـ بکارگیری فرمول‌های تربیع وزن‌دار. در محاسبه انتگرال $\int_\alpha^\infty P(x)\varphi(x)dx$ اغلب استفاده از فرمول‌های تربیع به صورت زیر مناسب است:

$$\int_a^\infty P(x)\varphi(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)}\varphi(x_k)$$

که در آن ضرایب $A_k^{(n)}$ بستگی به $\varphi(x)$ ندارند و طول‌های x_k طوری انتخاب می‌شوند که فرمول برای چند جمله‌ای‌های از بزرگترین درجه ممکن دقیق باشد.

جدول ۷-۱۴) محاسبه انتگرال I توسط فرمول سیمپسون

k	x_k	$1+x^3$	y_k	m_k	m'_k
۰	۲٫۰	۹	۰٫۱۱۱۱	۱	۱
۱	۳٫۰	۲۸	۰٫۰۳۵۷	۴	
۲	۴٫۰	۶۵	۰٫۰۱۵۴	۲	۴
۳	۵٫۰	۱۲۶	۰٫۰۰۷۹	۴	
۴	۶٫۰	۲۱۷	۰٫۰۰۴۶	۲	۲
۵	۷٫۰	۳۴۴	۰٫۰۰۲۹	۴	
۶	۸٫۰	۵۱۳	۰٫۰۰۲۰	۲	۴
۷	۹٫۰	۷۳۰	۰٫۰۰۱۴	۴	
۸	۱۰٫۰	۱۰۰۱	۰٫۰۰۱۰	۱	۱
$\sum$				۰٫۳۴۷۷	۰٫۱۸۰۹

برای $P(x) = e^{x^2}$ فرمول تربیع وزن‌دار چبیشف‌ـهرمیت بدست می‌آید ([۲۱]، [۲۲]، [۲۳] را ببینید):

$$\int_{\infty}^\infty e^{-x^2}\varphi(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)}\varphi(x_k) \qquad (۲۵-۷)$$

که برای چند جمله‌ای‌های از درجه کوچکتر یا مساوی $۲n - ۱$ دقیق است. عبارت باقیمانده فرمول (۷-۲۵) به صورت زیر است:

$$R_n(\varphi) = \frac{n!\sqrt{\pi}}{۲^n(۲n)!}\varphi^{(۲n)}(\xi) \qquad (۲۶\text{-}۷)$$

جدول ۷-۱۵) مقادیر $A_k^{(n)}$ و x_k برای فرمول تربیع وزن‌دار چبیشف ـ هرمیت

n	x_k	$A_k^{(n)}$
۳	$-x_۱ = x_۳ = ۱/۲۲۴۷۵$	$A_۱ = A_۳ = ۰/۲۹۵۴۰۹$
	$x_۲ = ۰$	$A_۲ = ۱/۱۸۱۶۳۶$
۴	$-x_۱ = x_۴ = ۱/۶۵۰۶۸۰$	$A_۱ = A_۴ = ۰/۰۸۱۳۱۳$
	$-x_۲ = x_۳ = ۰/۵۲۴۶۴۸$	$A_۲ = A_۳ = ۰/۸۰۴۹۱۴$
۵	$-x_۱ = x_۵ = ۲/۰۲۰۱۸۳$	$A_۱ = A_۵ = ۰/۰۱۹۹۵۳$
	$-x_۲ = x_۴ = ۰/۹۵۸۵۷۲$	$A_۲ = A_۴ = ۰/۳۹۳۶۱۹$
	$x_۳ = ۰$	$A_۳ = ۰/۹۴۵۳۰۹$

جدول ۷-۱۵ نشان‌دهنده مقادیر ضرایب $A_k^{(n)}$ و طول‌های x_k برای چند n مختلف است. برای $P(x) = e^{-x}$ فرمول تربیع وزن‌دار چبیشف‌ـلاگر[1] را داریم ([۲۱]، [۲۲] و [۳۳] را ببینید)

$$\int_۰^{\infty} e^{-x}\varphi(x)dx \approx \sum_{k=۱}^{n} A_k^{(n)}\varphi(x_k) \qquad (۲۷\text{-}۷)$$

که برای چند جمله‌ای‌های از درجه کوچکتر یا مساوی $۲n - ۱$ دقیق می‌باشد. عبارت باقیمانده فرمول (۷-۲۷) به شکل زیر است:

$$R_n(\varphi) = \frac{n!\Gamma(n+۱)}{(۲n)!}\varphi^{(۲n)}(\xi)$$

که در آن $\Gamma(n+۱)$ یک تابع گاما است. در ذیل جدول مقادیر $A_k^{(n)}$ و x_k برای چند n آمده است.

مثال ۷ـ۱۷ـ انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^۲}\cos x dx$ را با استفاده از فرمول تربیع (۷-۲۵) برای $n = ۵$ محاسبه کنید.

حل‌ـ چون طول‌های فرمول تربیع به صورت همگن حول $x = ۰$ قرار دارند و ضرایب متناظر با طول‌های همگن برابرند، به کمک فرمول (۷-۲۵) داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^۲}\cos x dx \approx A_۳\cos x_۳ + ۲(A_۴\cos x_۴ + A_۵\cos x_۵) = ۰/۹۴۵۳۰۹ +$$
$$+۲(۰/۳۹۳۶۱۹ \times ۰/۵۷۴۶۸۹ - ۰/۰۱۹۹۵۳ \times ۰/۴۳۴۴۱۳) = ۱/۳۸۰۳۹۰.$$

1) Lagerr

جدول ۷-۱۶) مقادیر $A_k^{(n)}$ و x_k برای فرمول‌های تربیع وزن‌دار چبیشف‌ـلاگر

n	k	x_k	$A_k^{(n)}$
۳	۱	۰٫۴۱۵۷۷۴	۰٫۷۱۱۰۹۳
	۲	۲٫۲۹۴۲۸۰	۰٫۲۷۸۵۱۸
	۳	۶٫۲۸۹۹۴۵	۰٫۰۱۰۳۸۹
۴	۱	۰٫۳۲۲۵۴۸	۰٫۶۰۳۱۵۴
	۲	۱٫۷۴۵۷۶۱	۰٫۳۵۷۴۱۹
	۳	۴٫۵۳۶۶۲۰	۰٫۰۳۸۸۸۸
	۴	۹٫۳۹۵۰۷۱	۰٫۰۰۰۵۳۹
۵	۱	۰٫۲۶۳۵۶۰	۰٫۵۲۱۷۵۶
	۲	۱٫۴۱۳۴۰۳	۰٫۳۹۸۶۶۷
	۳	۳٫۵۹۶۴۲۵	۰٫۰۷۵۹۴۲
	۴	۷٫۰۸۵۸۱۰	۰٫۰۰۳۶۱۲
	۵	۱۲٫۶۴۰۸۰۱	۰٫۰۰۰۰۲۳

برای مقایسه متذکر می‌شویم که مقدار دقیق انتگرال برابر است با:

$$\sqrt{\pi}e^{-۱/۴} = ۱٫۳۸۰۳۸۸۵$$

مسائل

انتگرال‌های نا متعارف زیر را به روش برش محاسبه کنید:

۱. $\int_{۱}^{\infty} \frac{\arctan x}{۱+x^{۳}}dx,\ \varepsilon = ۱۰^{-۲}.$ ۲. $I = \int_{۱}^{\infty} \frac{xe^{-x^{۲}}}{۲+\sin x}dx,\ \varepsilon = ۱۰^{-۵}.$

۳. $I = \int_{۵}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{۱+ax^{۵}}},\ \varepsilon = ۱۰^{-۳},\ a = ۰٫۵ + ۰٫۱ \times k,\ k = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۰.$

۴. $\int_{۱}^{\infty} \frac{e^{-x}}{a+x}dx,\ \varepsilon = ۱۰^{-۵},\ a = ۰٫۴ + ۰٫۲ \times k,\ k = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۲,$

انتگرال‌های زیر را به کمک فرمول‌های تربیع وزن‌دار محاسبه کنید:

۵. $\int_{۰}^{\infty} \frac{x^{e^{-x}}}{x+۲}dx,\ n = ۴.$ ۶. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+۱}{x+۲}e^{-x^{۲}}dx,\ n = ۴.$

۷. $I = \int_{۰}^{\infty} \frac{\sin ax}{a+x}e^{-x}dx,\ n = ۵,\ a = ۰٫۵ + ۰٫۱ \times k,\ k = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۰.$

۸. $I = \int_{۰}^{\infty} \frac{e^{-x}}{a+\sqrt{x}}dx,\ n = ۵,\ a = ۰٫۶ + ۰٫۲ \times k,\ k = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۰.$

۹. $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^{۲}}}{\sqrt{۲+\sin ax}}dx,\ n = ۵,\ a = ۱٫۵ + ۰٫۲ \times k,\ k = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۰.$

۱. $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{a+x^{۲}}e^{-x^{۲}}dx,\ n = ۵,\ a = ۱٫۰ + ۰٫۲ \times k,\ k = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۰^{-\infty}.$

۷ـ۷ـ انتگرال‌های چندگانه. روش انتگرالگیری مضاعف. روش لیوسترنیک[۱] و دیتکین[۲]. روش مونت کارلو[۳].

۱ـ روش کاربرد مکرر فرمول‌های تربیع ([۱]، [۱۱] و [۱۲] را ببینید). فرض کنید محاسبه انتگرال مضاعف

$$I = \int_{\zeta}\int f(x,y)dxdy \qquad (۲۸\text{-}۷)$$

مطلوب است، که در آن دامنه ζ مشخص کننده یک مربع مستطیل است:

$$a \leq x \leq b \quad , \quad c \leq y \leq d$$

محاسبه یک چنین انتگرالی به انتگرالگیری مضاعف منجر می‌گردد یعنی

$$I = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \qquad (۲۹\text{-}۷)$$

با فرض $\int_c^d f(x,y)dx = F(x)$ و با محاسبه انتگرال

$$\int_a^b F(x)dx \qquad (۳۰\text{-}۷)$$

اجازه دهید که فرمول سیمپسون را با فاصله h بر حسب x به کار بندیم:

$$\int_a^b F(x)dx \approx \frac{h}{۳}[F_۰ + F_n + ۲(F_۲ + F_۴ + \cdots + F_{n-۲}) + \\ +۴(F_۱ + F_۳ + \cdots + F_{n-۱})],$$

که در آن $h = \frac{b-a}{n}$ (n زوج است) و

$$F_i = F(x_i) = \int_a^b f(x_i, y)dy, \;\; x_i = a + ih \;\; (i = ۰, ۱, ..., n) \qquad (۳۱\text{-}۷)$$

از اینرو مسئله به محاسبه $n+۱$ انتگرال به شکل (۷-۳۱) تبدیل می‌شود. روش تشریح شده روشی است ساده برای محاسبه انتگرال‌های چندگانه. این روش هنگامی که محاسبه توسط یک کامپیوتر انجام می‌گیرد بسادگی قابل برنامه‌ریزی است، زیرا به کاربر اجازه می‌دهد تا از برنامه‌های استاندارد موجود برای محاسبه انتگرال‌های یگانه استفاده کند. در محاسبه انتگرال‌های (۷-۳۰) و (۷-۳۱) می‌توانیم فرمول‌های تربیع مختلف را بکار ببندیم. انتگرال‌های چندگانه از درجه $n > ۲$ را نیز می‌توان به روشی مشابه محاسبه کرد.

نکاتی پیرامون روش:

1) Lyusternik 2) Ditkin 3) Monte Carlo

(۱) این روش تنها برای دامنه‌های انتگرالگیری مربع‌ـمستطیل استفاده می‌شود.
(۲) با اضافه شدن به تعداد انتگرال‌ها، حجم محاسبات شدیداً افزایش می‌یابد.
(۳) دقت بیشتر در محاسبه انتگرال‌های جزیی بدست آمده، حجم محاسبات را بطور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌دهد.

مثال ۷ـ۱۸ـ مقدار تقریبی انتگرال $\int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/4} \sin(x+y)dy$ را محاسبه کنید.

حل ـ اجازه دهید رهنوشت زیر را معرفی کنیم:

$$\int_0^{\pi/4} \sin(x+y)dy = F(x)$$

حال به وسیله فرمول سیمپسون برای $n = 4$ داریم:

$$\int_0^{\pi/2} F(x)dx \approx \frac{\pi}{24}[F_0 + F_4 + 2F_2 + 4(F_1 + F_3)] \qquad (۳۲\text{-}۷)$$

مقدار تقریبی انتگرال‌های

$$F_I = F(x_i) = \int_0^{\pi/4} \sin(x_i + y)dy \quad (x_i = \frac{\pi}{8}i, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4)$$

به وسیله فرمول سیمپسون برای $n = 2$ محاسبه می‌شود. به ترتیب بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
F_0 &= \textstyle\int_0^{\pi/4} \sin y dy \approx \frac{\pi}{24}[\sin y_0 + 4\sin y_1 + \sin y_2] = \\
&= \tfrac{\pi}{24}[\sin 0 + 4\sin\tfrac{\pi}{8} + \sin\tfrac{\pi}{4}] = \tfrac{\pi}{24}(0 + 4\times 0.3827 + 0.7071) = \\
&= \tfrac{\pi}{24}\times 2.2379, \\
F_1 &= \textstyle\int_0^{\pi/4} \sin(\frac{\pi}{8}+y)dy \approx \frac{\pi}{24}(\sin\frac{\pi}{8} + 4\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{8}) = \frac{\pi}{24}\times 4.1350, \\
F_2 &= \textstyle\int_0^{\pi/4} \sin(\frac{\pi}{4}+y)dy \approx \frac{\pi}{24}(\sin\frac{\pi}{4} + 4\sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{24}\times 5.4027, \\
F_3 &= \textstyle\int_0^{\pi/4} \sin(\frac{3\pi}{8}+y)dy \approx \frac{\pi}{24}(\sin\frac{3\pi}{8} + 4\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{5\pi}{8}) = \frac{\pi}{24}\times 5.8478, \\
F_4 &= \textstyle\int_0^{\pi/4} \sin(\frac{\pi}{2}+y)dy \approx \frac{\pi}{24}(\sin\frac{\pi}{2} + 4\sin\frac{5\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{4}) = \frac{\pi}{24}\times 5.4027.
\end{aligned}$$

با جایگزینی مقادیر $F_i(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ در فرمول (۷-۳۲) بدست می‌آوریم: بمنظور مقایسه، مقدار دقیق انتگرال $I = 1$ را داریم.

$$\begin{aligned}
I = \textstyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi/4} \sin(x,y)dxdy &\approx (\tfrac{\pi}{24})^2[2.2379 + 5.4027 + 2\times 5.4027 \\
&+ 4\times(4.1350 + 5.8478)] = 0.0171347 \times 58.3772 = 1.00028.
\end{aligned}$$

۲ـ روش ال.ای.لیوسترنیک و وی.ای.دیکتین ([۱]، [۱۱] و [۲۴] را ببینید). برای محاسبه انتگرال مضاعف $\int_G\int f(x,y)dxdy$ فرمول تقریبی زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$\int_G\int f(x,y)dxdy \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i,y_i), \tag{۳۳-۷}$$

که در آن ضرایب c_i و نقاط $M_i(x_i,y_i)$ طوری انتخاب می‌شوند که فرمول (۷-۳۳) برای چند جمله‌ای‌های از درجه‌ای به اندازه کافی بزرگ و نقاط کمینه M_i(minimum)، دقیق باشد.
اگر دامنه G یک دایره واحد با مرکزی واقع بر مبداء باشد، آنگاه انتگرال به وسیله فرمول مکعب لیوسترنیک‌ـدیتکین محاسبه می‌شود ([۲۴] را ببینید)

$$\int_G\int f(x,y)dxdy \approx \pi\left[\frac{1}{4}f(0)+\frac{1}{8}\sum_{i=0}^{5} f(M_i)\right] \tag{۳۴-۷}$$

که در آن نقاط M_i مختصات قطبی زیر را دارند:

$$\rho_i=\sqrt{\frac{2}{3}},\quad \varphi_i=\frac{\pi}{3}i\quad (i=0,1,2,3,4,5).$$

یعنی نقاط M_i رئوس یک شش ضلعی منتظم محاطی در یک دایره به شعاع $\sqrt{\frac{2}{3}}$ هستند. اگر دامنه G به شکل یک شش ضلعی منتظم محاطی در یک دایره واحد باشد آنگاه فرمول مکعب لیوسترنیک دیکتین زیر به کار گرفته می‌شود ([۲۴] را ببینید):

$$\int_G\int f(x,y)dxdy \approx \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{43}{56}f(0)+\frac{125}{336}\sum_{i=0}^{5} f(M_i)\right], \tag{۳۵-۷}$$

که در آن نقاط M_i مختصات قطبی زیر را دارند:

$$\rho_i=\frac{\sqrt{14}}{15},\quad \varphi_i=\frac{\pi}{3}i\quad (i=0,1,2,3,4,5)$$

اگر دامنه G یک مربع باشد

$$-1\le x\le 1,\quad -1\le y\le 1$$

آنگاه فرمول مکعب شکل زیر را دارد ([۷] را ببینید):

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)dxdy \approx{}& \tfrac{8}{7}f(0,0)+\tfrac{20}{63}\Big[f\big(\sqrt{\tfrac{14}{15}},0\big)+\\ &+f\big(-\sqrt{\tfrac{14}{15}},0\big)\Big]+\tfrac{5}{9}\Big[f\big(\sqrt{\tfrac{1}{3}},\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big)+\\ &+f\big(-\sqrt{\tfrac{1}{3}},\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big)+f\big(-\sqrt{\tfrac{1}{3}},-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big)+\\ &+f\big(\sqrt{\tfrac{1}{3}},-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big)\Big].\end{aligned} \tag{۳۶-۷}$$

نکته ۱. اگر یک جایگذاری مناسب برای متغیرها انجام شود.فرمول‌های (۷-۳۴) تا (۷-۳۶) درکاربردهایی با دامنه‌ای به شکل زیر به کار گرفته می‌شوند:

(۱) یک دایره به شعاع دلخواه

(۲) یک شش ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع دلخواه

(۳) یک بیضی

(۴) یک مربع-مستطیل

یک دامنه به شکل دلخواه را می‌توان به طور تقریبی با مجموعه‌ای از دامنه‌های استاندارد از نوع بالا جایگزین کرد.

نکته ۲. خطاها در [۷] و [۲۴] برآورد شده‌اند. در این منابع نشان داده شده است که حجم محاسبات فرمول‌های لیوسترنیک- دیکتین برای دستیابی به دقتی مشخص، بطور قابل ملاحظه‌ای از دیگر روش‌های شرح داده شده در بخش‌های قبلی کمتر است.امّا ضرایب c_i و مختصات $M_i(x_i, y_i)$ برای دامنه‌های ساده حاوی تعداد کم نقاط M_i راحت‌تر محاسبه می‌شوند.

وقتی که با دامنه‌هایی از یک نوع امّا در اندازه‌های مختلف سروکار داریم می‌توانیم برای برآورد خطاها از محاسبه مضاعف استفاده کنیم.

مثال ۷-۱۹- انتگرال

$$\int_G\int \sqrt{x^۲+y^۲}dxdy \tag{۷-۳۷}$$

را در دامنه G محصور شده توسط دایره $x^۲ + y^۲ = ۲x$ محاسبه کنید.

حل- معادله دایره داده شده را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$(x-۱)^۲ + y^۲ = ۱$$

و با تغییر متغیر $y = y_۱$ و $x_۱ = x - ۱$ انتگرال (۷-۳۷) به انتگرال زیر تبدیل می‌شود:

$$I = \int_{G_i}\int \sqrt{(x_۱+۱)^۲ + y_۱^۲}dx_۱dy_۱$$

که در آن $G_۱$ دایره واحد $x_۱^۲ + y_۱^۲ = ۱$ است.

برای محاسبه انتگرال I از فرمول (۷-۳۴) استفاده می‌کنیم وبرای راحتی بیشتر، تابع زیرانتگرال را در مختصات قطبی می‌نویسیم:

$$f(x_۱, y_۱) = \sqrt{\rho^۲ + ۲\rho\cos\varphi + ۱}$$

که در آن $x_۱ = \rho\cos\varphi$ و $y_۱ = \rho\sin\varphi$. از اینرو بدست می‌آوریم:

$$I \approx \pi\left[\tfrac{۱}{۴}\times ۱ + \tfrac{۱}{۸}\textstyle\sum_{i=۰}^{۵}\sqrt{\tfrac{۵}{۳} + ۲\sqrt{\tfrac{۲}{۳}}\cos\tfrac{\pi}{۳}i}\right] =$$
$$= \pi[۰/۲۵ + \tfrac{۱}{۸}(\sqrt{۳/۲۹۹۶} + ۲\sqrt{۲/۴۸۳۲} + ۲\sqrt{۰/۸۵۰۲} + \sqrt{۰/۰۳۳۷})] =$$
$$= ۳/۵۳۳.$$

مقدار دقیق انتگرال (۷-۳۷) برابر است با $۳/۵۵۵ = \frac{۳۲}{۹}$.

۳ـ روش مونت کارلو (روش آزمایشات آماری ـ [۴] و [۱۲] را ببینید).
روش اول ـ فرض کنیم محاسبه انتگرال mـگانه زیر

$$I = \int\int\int\cdots_{G}\int f(x_۱, x_۲, \ldots, x_m)dx_۱\ldots dx_m \tag{۷-۳۸}$$

روی دامنه G مشمول در یک مکعب mـبعدی واحد $۰ \le x_i \le ۱ (i = ۱, ۲, \ldots, m)$، مطلوب است.
اجازه بدهید m رشته از اعداد تصادفی با توزیع یکنواخت را در بازه [۱ , ۰] انتخاب کنیم (برای اعداد تصادفی [۶] و [۱۰] را ببینید):

$$\begin{array}{l} x_۱^{(۱)}, x_۲^{(۱)}, x_۳^{(۱)}, \ldots, x_n^{(۱)}, \ldots, \\ x_۱^{(۲)}, x_۲^{(۲)}, x_۳^{(۲)}, \ldots, x_n^{(۲)}, \ldots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_۱^{(m)}, x_۲^{(m)}, x_۳^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}, \ldots, \end{array}$$

در این‌صورت نقاط $M_i(x_i^{(۱)}, x_i^{(۲)}, \ldots, x_i^{(m)}) (i = ۱, ۲, \ldots)$ را می‌توان نقاط تصادفی با توزیع یکنواخت توزیع شده در مکعب mـبعدی واحد دانست.
فرض کنید از کل N نقطه تصادفی، nنقطه در دامنه G باشند و در نتیجه $N - n$ نقطه خارج آن باشند. آنگاه برای یک N به اندازه کافی بزرگ، فرمول تقریبی زیر را داریم:

$$I \approx \frac{V_G}{n}\sum_{i=۱}^{n} f(M_i) \tag{۷-۳۹}$$

که در آن V_G حجمی mـبعدی است که به عنوان دامنه انتگرال‌گیری است. اگر محاسبه حجم V_G مشکل باشد، می‌توانیم قرار دهیم $V_G \approx \frac{n}{N}$ و برای محاسبه مقدار تقریبی انتگرال بنویسیم:

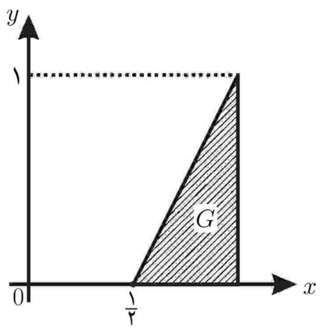
$$I \approx \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{n} f(M_i) \tag{۷-۴۰}$$

مثال ۷ـ۲۰ـ انتگرال زیر را به روش مونت کارلو محاسبه کنید.

$$I = \int_G \int (x^۲ + y^۲) dxdy \qquad (۷\text{-}۴۱)$$

که در آن دامنه G با نامساوی‌های زیر تعریف می‌شود (شکل ۷-۱):

$$\frac{۱}{۲} \leq x \leq ۱ \ , \quad ۰ \leq y \leq ۲x - ۱$$



شکل ۷-۱

حلـ دامنه انتگرالگیری در مربع واحد $۰ \leq x \leq ۱$ و $۰ \leq y \leq ۱$ قرار دارد.
برای محاسبه انتگرال اجازه دهید که از جدول اعداد تصادفی (جدول ۷-۱۷) استفاده کنیم (با گرفتن دو عدد متوالی از این جدول به عنوان مختصات نقطه تصادفی $M(x, y)$).
مختصات x و y نقاط تصادفی را تا سه رقم اعشار گرد کرده و در جدولی مثل جدول ۷-۱۸ درج می‌کنیم و تعدادی از آنها را که متعلق به دامنه انتگرالگیری هستند را انتخاب می‌کنیم.

جدول ۷-۱۷) اعداد تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه [۰, ۱]

۰٫۶۵۳۳۹	۰٫۱۱۵۷۸	۰٫۳۵۴۸۳	۰٫۵۷۷۰۵
۰٫۹۳۳۸۲	۰٫۹۳۰۴۵	۰٫۰۹۳۹۳	۰٫۷۱۶۱۸
۰٫۰۵۷۵۸	۰٫۹۳۰۱۱	۰٫۳۰۳۰۴	۰٫۷۳۷۱۰
۰٫۰۰۳۳۶	۰٫۴۲۸۴۴	۰٫۵۵۱۸۶	۰٫۷۰۱۳۱
۰٫۸۸۲۲۲	۰٫۵۲۹۰۶	۰٫۶۴۰۰۳	۰٫۱۶۹۶۱
۰٫۹۸۵۸۵	۰٫۰۹۴۶۱	۰٫۲۰۵۱۴	۰٫۵۳۳۲۴
۰٫۵۲۱۰۳	۰٫۹۹۶۰۲	۰٫۰۰۱۸۸	۰٫۴۳۱۶۶
۰٫۹۱۸۲۷	۰٫۶۹۹۶۲	۰٫۵۵۷۰۹	۰٫۲۶۲۷۵
۰٫۰۷۰۶۹	۰٫۳۱۳۱۱	۰٫۸۶۹۷۷	۰٫۰۵۹۲۶
۰٫۱۳۹۲۸	۰٫۲۷۰۰۴	۰٫۳۱۳۰۳	۰٫۶۶۲۸۹

ترتیب پر کردن جدول ۷-۱۸:
(۱) از میان تمام مقادیر x فقط مقادیر بین $\underline{x} = ۰/۵$ و $\bar{x} = ۱$ را در نظر می‌گیریم. برای این مقادیر قرار میدهیم $\varepsilon_۱ = ۱$ و برای تمام مقادیر دیگر قرار می‌دهیم $\varepsilon_۱ = ۰$. برای مثال برای $x = ۰/۵۷۷$ داریم $\varepsilon_۱ = ۱$ و برای $x = ۰/۱۷۰$ داریم $\varepsilon_۱ = ۰$.
(۲) از میان تمام مقادیر y متناظر با xهای انتخاب شده، آنهایی را که بین $\overline{y(x)} = ۲x - ۱$ و $\underline{y(x)} = ۰$ قرار دارند را انتخاب می‌کنیم.
برای این مقادیر قرار می‌دهیم $\varepsilon_۲ = ۱$ و برای مقادیر دیگر قرار می‌دهیم $\varepsilon_۲ = ۰$. برای مثال برای $y = ۰/۷۰۱$ داریم $\varepsilon_۲ = ۰$ و برای $y = ۰/۲۰۵$ بدست می‌آوریم $\varepsilon_۲ = ۱$.
(۳) مقادیر $\varepsilon = \varepsilon_۱\varepsilon_۲$ را محاسبه می‌کنیم. نقاطی که در آن $\varepsilon = ۱$ است را در دامنه انتگرالگیری مشخص می‌کنیم. برای مثال برای نقطه $M(۰/۶۴۰, ۰/۲۰۵)$ داریم $\varepsilon = ۱$. در مثال مورد نظر، چهار نقطه از دامنه انتگرالگیری انتخاب می‌شوند، یعنی $N = ۲۰$ و $n = ۴$.
(۴) تابع زیر انتگرال را برای نقاط بدست آمده محاسبه می‌کنیم.
هنگام پر کردن جدول ۷-۱۸ محدوده دامنه انتگرالگیری را محاسبه می‌کنیم

$$V_G = \frac{۱}{۲} \times ۱ \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

و با استفاده از فرمول (۷-۳۹) بدست می‌آوریم:

$$I \approx \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴} \times (۰/۴۵۲ + ۰/۸۵۵ + ۱/۰۴۸ + ۱/۴۸۲) = \frac{۱}{۱۶} \times ۳/۸۳۷ = ۰/۲۴۰$$

به منظور مقایسه مقدار دقیق انتگرال را $I = \frac{۷}{۳۲} = ۰/۲۱۸۷۵$ بدست می‌آوریم. نتیجه بدست آمده دقت نسبتاً کمی دارد زیرا تعداد نقاط $N = ۲۰$ به اندازه کافی زیاد نیست.
روش دوم- اگر تابع $y = f(x_۱, x_۲, \ldots, x_m) \geq ۰$ باشد، آنگاه انتگرال (۷-۳۸) را می‌توان به عنوان حجم یک جسم در فضای $(m + ۱)$-بعدی در نظر گرفت، یعنی:

$$I = \int\int \cdots_{V} \int dx_۱ dx_۲ \ldots dx_m dy \qquad (۷\text{-}۴۲)$$

که در آن دامنه انتگرالگیری V با شرایط زیر مشخص می‌شود:

$$x = (x_۱, x_۲, \ldots, x_m) \in G, \quad ۰ \leq y \leq f(x).$$

اگر در دامنه G

$$۰ \leq f(x) \leq B, \quad ۰ \leq x_i \leq ۱ \quad (i = ۱, ۲, \ldots, n)$$

جدول ۷-۱۸) محاسبه انتگرال مضاعف (۷-۴۱) به روش مونت کارلو

x	$\underline{x}$	$\bar{x}$	ε_1	y	$\underline{y(x)}$	$\overline{y(x)}$	ε_2	ε	$f(x,y)$
۰٫۵۷۷	۰٫۵۰۰	۱٫۰۰۰	۱	۰٫۷۱۶	۰	۰٫۱۵۴	۰	۰	
۰٫۷۳۷	۰٫۵۰۰	۱٫۰۰۰	۱	۰٫۷۰۱	۰	۰٫۴۷۴	۰	۰	
۰٫۱۷۰	۰٫۵۰۰	۱٫۰۰۰	۱	۰٫۵۳۳				۰	
۰٫۴۳۲	۰٫۵۰۰	۱٫۰۰۰	۱	۰٫۲۶۳				۰	
۰٫۰۵۹	۰٫۵۰۰	۱٫۰۰۰	۰	۰٫۶۶۳				۰	
۰٫۳۵۵	۰٫۵۰۰	۱٫۰۰۰	۰	۰٫۰۹۴				۰	
۰٫۳۰۳	۰٫۵۰۰	۱٫۰۰۰	۰	۰٫۵۵۲				۰	
۰٫۶۴۰	۰٫۵۰۰	۱٫۰۰۰	۰	۰٫۲۰۵	۰	۰٫۲۸۰	۱	۱	۰٫۴۵۲
۰٫۰۰۲	۰٫۵۰۰	۱٫۰۰۰	۰	۰٫۵۵۷				۰	
۰٫۸۷۰	۰٫۵۰۰	۱٫۰۰۰	۱	۰٫۳۲۳	۰	۰٫۷۴۰	۱	۱	۰٫۸۵۵
۰٫۱۱۶	۰٫۵۰۰	۱٫۰۰۰	۰	۰٫۹۳۰				۰	
۰٫۹۳۰	۰٫۵۰۰	۱٫۰۰۰	۱	۰٫۴۲۸	۰	۰٫۸۶۰	۱	۱	۱٫۰۴۸
۰٫۵۲۹	۰٫۵۰۰	۱٫۰۰۰	۱	۰٫۰۹۵	۰	۰٫۰۵۸	۰	۰	
۰٫۹۹۶	۰٫۵۰۰	۱٫۰۰۰	۱	۰٫۷۰۰	۰	۰٫۹۹۲	۱	۱	۱٫۴۸۲
۰٫۳۱۳	۰٫۵۰۰	۱٫۰۰۰	۰	۰٫۲۷۰				۰	
۰٫۶۵۳	۰٫۵۰۰	۱٫۰۰۰	۱	۰٫۹۳۴	۰	۰٫۳۰۶	۰	۰	
۰٫۰۵۸	۰٫۵۰۰	۱٫۰۰۰	۰	۰٫۰۰۳				۰	
۰٫۸۸۲	۰٫۵۰۰	۱٫۰۰۰	۱	۰٫۹۸۶	۰	۰٫۷۶۴	۰	۰	
۰٫۵۲۱	۰٫۵۰۰	۱٫۰۰۰	۱	۰٫۹۱۸	۰	۰٫۰۴۲	۰	۰	
۰٫۰۷۱	۰٫۵۰۰	۱٫۰۰۰	۰	۰٫۱۳۹				۰	
$\sum$								۴	۳٫۸۳۷

آنگاه با تعریف یک متغیر جدید

$$\eta = \frac{1}{B} y$$

خواهیم داشت:

$$I = B \int \int \dots_V \int dx_1 dx_2 \dots dx_m d\eta$$

که در آن دامنه V در مکعب $m+1$بعدی واحد قرار می‌گیرد:

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad 0 \leq \eta \leq 1.$$

اجازه دهید در بازه $[0, 1]$، به تعداد $m+1$ رشته تصادفی با توزیع یکنواخت را در نظر بگیریم:

$$\begin{array}{llllll} x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & x_3^{(1)}, & \dots, & x_n^{(1)}, & \dots, \\ x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & x_3^{(2)}, & \dots, & x_n^{(2)}, & \dots, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(m)}, & x_2^{(m)}, & x_3^{(m)}, & \dots, & x_n^{(m)}, & \dots, \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3, & \dots, & \eta_n, & \dots . \end{array}$$

رشته‌های متناظر نقاط تصادفی را تشکیل می‌دهیم.

$$M_i(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(m)}, \eta_i) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

از N نقطه تصادفی، n نقطه را در حجم V انتخاب می‌کنیم، در این‌صورت فرمول تقریبی زیر معتبر است:

$$I \approx B\frac{n}{N} \tag{۴۳-۷}$$

مثال ۷ـ۲۱ـ مقدار تقریبی حجم محصور به سطوح

$$z = ۲ + \sqrt{(۰/۵)^۲ - (x - ۰/۵)^۲ - (y - ۰/۵)^۲},$$
$$(x - ۰/۵)^۲ + (y - ۰/۵)^۲ = (۰/۵)^۲, z = ۰.$$

را محاسبه کنید (شکل ۷-۲).

حلـ حجم مورد نظر از نظر عددی برابر است با مقدار انتگرال

$$I = \int\int_{\nu}\int dxdydz. \tag{۴۴-۷}$$

در دامنه V داریم:

$$۰ \leq z \leq ۲/۵$$

یک متغیر جدید تعریف می‌کنیم:

$$\eta = \frac{z}{۲/۵}$$

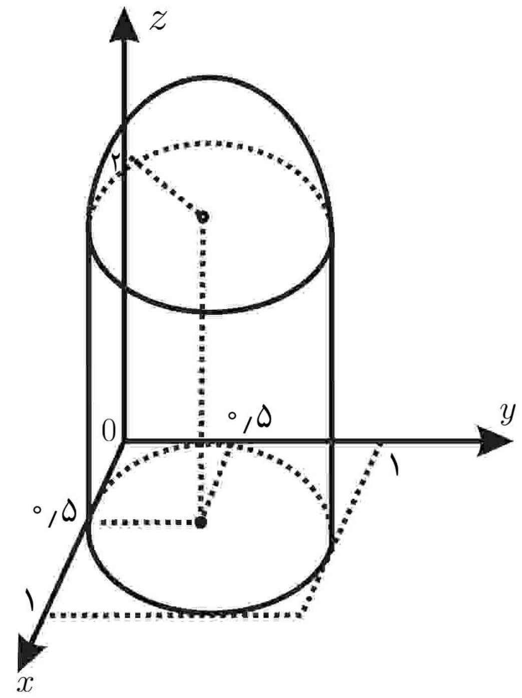
که انتگرال (۷-۴۴) را به انتگرال

$$I = ۲/۵\int\int_{\nu}\int dxdyd\eta \tag{۴۵-۷}$$

تبدیل می‌کند که در آن V دامنه محصور به سطوح

$$(x - ۰/۵)^۲ + (y - ۰/۵)^۲ = (۰/۵)^۲$$
$$\eta = ۰/۸ + ۰/۴\sqrt{(۰/۵)^۲ - (x - ۰/۵)^۲ - (y - ۰/۵)^۲}, \quad \eta = ۰,$$

است یعنی V متعلق به مکعب واحد $۰ \leq z \leq ۱$، $۰ \leq y \leq ۱$ و $۰ \leq x \leq ۱$ است.



شکل ۷-۲

حال در بازه [۱ ,۰] سه رشته از اعداد تصادفی با توزیع یکنواخت را در نظر گرفته و آنها را با مختصات x و y و η در جدول ۷-۱۹ وارد می‌کنیم (برای مثال برای مختصات x اعداد دو ستون اول جدول ۷-۱۷ را در نظر گرفته و برای y اعداد دو ستون آخر را). اکنون وارسی می‌کنیم که کدامیک از این نقاط به دامنه V تعلق دارد.

مراحل پر کردن جدول ۷-۱۹:

(۱) نقاطی که در آن $\eta \leq ۰/۸$ می‌باشد را مشخص کرده و برای آنها قرار می‌دهیم $\varepsilon_۲ = ۱$.

(۲) نقاطی از دامنه V را که در نامساوی زیر صدق می‌کنند را مشخص می‌کنیم:

$$(x - ۰/۵)^۲ + (y - ۰/۵)^۲ \leq (۰/۵)^۲$$

برای این نقاط $\varepsilon_۱ = ۱$ و برای مابقی $\varepsilon_۱ = ۰$ می‌شود.

(۳) مقدار $\varepsilon = \varepsilon_۱\varepsilon_۲$ را محاسبه می‌کنیم. نقاط متعلق به دامنه V که در آن‌ها $\varepsilon = ۱$ است را در نظر می‌گیریم.

(۴) نقاط متعلق به دامنه V که برای آنها $۰/۸ < \eta < ۱$ است و نامساوی زیر را برقرار می‌کنند را مشخص می‌کنیم.

$$(x - ۰/۵)^۲ + (y - ۰/۵)^۲ + ۶/۲۵(\eta - ۰/۸)^۲ \leq (۰/۵)^۲$$

جدول ۷-۱۹) محاسبه انتگرال (۷-۴۵) به روش مونت کارلو

i	x	y	$\lvert x - ۰/۵\rvert$	$\lvert y - ۰/۵\rvert$	$(x - ۰/۵)^۲+$ $+(y - ۰/۵)^۲$	$\varepsilon_۱$	η	$\lvert\eta - ۰/۸\rvert$	$۶/۲۵(\eta - ۰/۸)^۲$	$\varepsilon_۲$	ε
۱	۰/۵۷۷	۰/۱۱۶	۰/۰۷۷	۰/۳۸۴	۰/۱۴۷	۱	۰/۶۶۷			۱	۱
۲	۰/۷۱۶	۰/۹۳۰	۰/۲۱۶	۰/۴۳۰	۰/۲۳۲		۰/۹۹۳	۰/۱۹۳	۰/۲۳۱		۰
۳	۰/۷۳۷	۰/۹۳۰	۰/۲۳۷	۰/۴۳۰	۰/۲۴۱	۱	۰/۲۴۲			۱	۱
۴	۰/۷۰۱	۰/۴۲۸	۰/۲۰۱	۰/۰۷۲	۰/۰۴۵		۰/۹۴۰	۰/۱۴۰	۰/۱۲۲		۱
۵	۰/۱۷۰	۰/۵۲۹	۰/۳۳۰	۰/۰۲۹	۰/۱۱۰	۱	۰/۶۱۰			۱	۱
۶	۰/۵۳۳	۰/۰۹۵	۰/۰۳۳	۰/۴۰۵	۰/۱۶۵	۱	۰/۱۳۱			۱	۱
۷	۰/۴۳۲	۰/۹۹۶	۰/۰۶۸	۰/۴۹۶	۰/۲۵۱	۰	۰/۳۵۲			۱	۰
۸	۰/۲۶۳	۰/۶۹۹	۰/۲۳۷	۰/۱۹۹	۰/۰۹۶	۱	۰/۶۴۵			۱	۱
۹	۰/۰۵۹	۰/۳۱۳	۰/۴۴۱	۰/۱۸۷	۰/۲۲۹	۱	۰/۶۴۶			۱	۱
۱۰	۰/۶۶۳	۰/۲۷۰	۰/۱۶۳	۰/۲۳۰	۰/۰۸۰	۱	۰/۶۸۰			۱	۱
۱۱	۰/۳۵۵	۰/۶۵۳	۰/۱۴۵	۰/۱۵۳	۰/۰۴۶	۱	۰/۵۷۷			۱	۱
۱۲	۰/۰۹۴	۰/۹۳۴	۰/۴۰۶	۰/۴۳۴	۰/۳۵۳	۰	۰/۷۱۶			۱	۰
۱۳	۰/۳۰۳	۰/۰۵۸	۰/۱۹۷	۰/۴۴۲	۰/۲۳۴	۱	۰/۷۳۷			۱	۱
۱۴	۰/۵۵۲	۰/۰۰۳	۰/۰۵۲	۰/۴۹۷	۰/۲۵۰	۱	۰/۷۰۱			۱	۱
۱۵	۰/۶۴۰	۰/۸۸۲	۰/۱۴۰	۰/۳۸۲	۰/۱۶۵	۱	۰/۱۶۹			۱	۱
۱۶	۰/۲۰۵	۰/۹۸۶	۰/۲۹۵	۰/۴۸۶	۰/۳۲۳	۰	۰/۵۳۳			۱	۰
۱۷	۰/۰۰۲	۰/۵۲۱	۰/۴۹۸	۰/۰۲۱	۰/۲۴۸	۱	۰/۴۳۲			۱	۱
۱۸	۰/۵۵۷	۰/۹۱۸	۰/۰۵۷	۰/۴۱۸	۰/۱۷۸	۱	۰/۲۶۳			۱	۱
۱۹	۰/۸۷۰	۰/۰۷۱	۰/۳۷۰	۰/۴۲۹	۰/۳۱۸	۰	۰/۰۵۹			۱	۰
۲۰	۰/۳۱۳	۰/۱۳۹	۰/۱۸۷	۰/۳۶۱	۰/۱۸۵	۱	۰/۶۶۳			۱	۱
											$n = ۱۵$

برای این نقاط $\varepsilon = ۱$ است. در مثال ما تعداد کل نقاط $N = ۲۰$ بوده و تعداد نقاط متعلق به دامنه V برابر با ۱۵ است. توسط فرمول (۷-۴۳) بدست می‌آوریم:

$$I \approx ۲/۵\frac{n}{N} = ۲/۵ \times \frac{۱۵}{۲۰} = ۱/۸۷۵$$

مقدار دقیق حجم V برابر است با ۱/۸۳۳.

تذکر۱ـ خطای فرمول (۷-۴۳) نسبت معکوس با جذر تعداد آزمایشات دارد یعنی

$$R = \circ(\frac{۱}{\sqrt{N}})$$

این بدین معنی است که برای کسب دقت بالا تعداد نقاط N می‌بایستی خیلی بزرگ باشد. امّا چون فرمول‌های تقریبی (۷-۴۰) و (۷-۴۳) بستگی به مرتبه انتگرال ندارند، روش مونت کارلو برای محاسبه انتگرال‌های مرتبه بالا نیز مناسب است.

تذکر ۲ـ کاربرد روش مونت کارلو متأثر از رشته‌های اعداد تصادفی (یا شبه تصادفی) است. در حال حاضر بعضی از روش‌های نو برای تولید این اعداد توسط کامپیوتر توسعه داده شده‌اند[برای نمونه [۴۹] را ببینید]، جدول اعداد تصادفی را نیز می‌توان مورد استفاده قرار داد ([۳] و [۱۵] را ببینید).

مسائل

انتگرال‌های زیر را به کمک انتگرالگیری مکرر با استفاده از فرمول‌های تربیع مختلف محاسبه کنید. در مسائل ۱ تا ۳ مقدار حاصله را با مقدار دقیق انتگرال مقایسه کنید.

۱. $\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2 + 2y)dxdy$ ؛ با فرمول ذوزنقه برای $n_x = 4$ و $n_y = 8$

۲. $\int_3^4 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$ ؛ با فرمول سیمپسون برای $n_x = n_y = 4$

۳. $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 dy}{1+y^2}$ ؛ با فرمول گوس برای $n_x = n_y = 4$

۴. $\int_0^1 \int_1^2 \frac{\sin(x^2+y^2)}{1+ax+by}dxdy,\ a = 0/5 + 0/1 \times n,\ n = 0, 1, 2, 3, 4, 5,$
$b = 0/5 + 0/1 \times k,\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

۵. $\int_0^2 \int_{0/5}^{1/5} \frac{e^{-a(x+y)}}{1+b(x+y)}dxdy,\ a = 0/2 \times n,\ n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, b = 0/1 \times k,$
$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

۶ـ انتگرال‌های مسائل (۱) تا (۳) را به کمک فرمول (۷-۳۶) محاسبه کنید.

انتگرال‌های زیر را به کمک فرمول‌های (۷-۳۴) و (۷-۳۵) لیوسترنیک‌ـدیکتین محاسبه کنید.

۷ـ $\int_G \int \sqrt{1 + x^2 + y^2}dxdy$ که در آن G دامنه $x^2 + y^2 \leq 2x$ است.

۸ـ $\int_G \int \frac{x^2y^2dxdy}{x^2+y^2}$ که در آن G دامنه $x^2 + y^2 \leq 4$ است.

۹ـ $\int_G \int \frac{(1+x)dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ که در آن G شش ضلعی منتظم محاط در دایره واحد است.

۱۰ـ $\int_G \int \frac{x^2dxdy}{\sqrt{2-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}}$ که در آن G دامنه $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} \leq 1$ است.

با استفاده از فرمول مونت کارلو انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱۱ـ $\int_G \int \sqrt{x^2 - y^2}dxdy$ که در آن G یک مثلث با رئوس $O(0, 0)$، $A(1, 0)$ و $B(1, 1)$ است.

۱۲ـ $\int_G \int e^{x/y}dxdy$ که در آن G یک شبه مثلث محصور شده توسط سهمی $x = y^2$ و خطوط $x = 0$ و $y = 1$ است.

۱۳ـ $\int \int \int_G \int \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$ که در آن دامنه انتگرالگیری G محصور به صفحات مختصات و صفحه $x + y + z = 1$ است.

۱۴ـ حجم یک جسم محصور شده توسط صفحه $z = 0$، سطح $z = e^{-(x^2+y^2)}$ و استوانه $x^2 + y^2 = 1$ را بدست آورید.

۸ـ حل تقریبی معادلات دیفرانسیل معمولی

۸ـ۱ـ مسئله کوشی- نگاهی اجمالی

مسئله کوشی برای معادله دیفرانسیل مرتبه nام

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-۱)}) \qquad (۱\text{-}۸)$$

شامل پیدا کردن تابع $y = f(x)$ است که در معادله (۸-۱) و شرایط اولیه

$$y(x_۰) = y_۰, \quad y'(x_۰) = y'_۰, \quad \dots, \quad y^{(n-۱)}(x_۰) = y_۰^{(n-۱)} \qquad (۲\text{-}۸)$$

صدق کند، که در آن $x_۰ \quad y_۰, \quad y'_۰, \quad \dots \; y^{n+۱}$ اعداد مشخصی هستند.
مسئله کوشی برای یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل به شکل زیر

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dy_۱}{dx} = f_۱(x, y_۱, y_۲, \dots, y_n), \\ \frac{dy_۲}{dx} = f_۲(x, y_۱, y_۲, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_۱, y_۲, \dots, y_n) \end{array}\right\} \qquad (۳\text{-}۸)$$

شامل پیدا کردن توابع $y_۱$، $y_۲$، $y_۳$، ...، y_n است که در دستگاه (۸-۳) و شرایط اولیه

$$y_۱(x_۰) = y_{۱۰}, \quad y_۲(x_۰) = y_{۲۰}, \quad \dots, \quad y_n(x_۰) = y_{n۰} \qquad (۴\text{-}۸)$$

صدق کنند. یک دستگاه شامل مشتقات درجه بالا را می‌توان به وسیله تعریف توابع مجهول جدید به شکل (۸-۳) تبدیل کرد. در موارد خاص معادله دیفرانسیل مرتبه n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

به کمک جایگزینی‌های $y_1 = y', \quad y_1 = y'', \quad \ldots, \quad y_{n-1} = y^{(n-1)}$ به شکل (۸-۳) در می‌آید، که دستگاه زیر را بدست می‌دهد:

$$\begin{array}{ll}\frac{dy}{dx} = y_1 & , \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ & \vdots \\ \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1} & , \quad \frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\end{array}$$

اگر جواب عمومی معادله (۸-۱) یا دستگاه (۸-۳) پیدا شود آنگاه مسئله کوشی به پیدا کردن مقادیر ثابت اختیاری منجر می‌شود. امّا پیدا کردن جواب دقیق مسئله کوشی بسیار مشکل است و فقط در بعضی موارد نادر بدست می‌آید. ما در اغلب موارد، جواب مسئله کوشی را با استفاده از روش‌های تقریبی پیدا می‌کنیم. با توجه به راه حل، این روش‌های تقریبی به دو گروه تقسیم می‌شوند:

۱ـ روش‌های تحلیلی که به حل تقریبی یک معادله دیفرانسیل به صورت عبارتی تحلیلی منجر می‌شوند.

۲ـ روش‌های عددی که حل تقریبی را با یک جدول ارائه می‌دهند. از این پس فرض می‌کنیم که برای معادلات مورد بحث، شرایط وجود و یکتایی جواب برقرار است.

۸ـ۲ـ انتگرال‌گیری از معادلات دیفرانسیل به کمک سری توان

۱ـ روش دیفرانسیل‌گیری متوالی. معادله (۸-۱) با شرایط اولیه (۸-۲) را در نظر بگیرید. فرض کنید جواب مطلوب $y = y(x)$ را بتوان به یک دنباله توان تیلور بر حسب $x - x_0$ بسط داد:

$$\begin{aligned} y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \\ \cdots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots . \end{aligned} \tag{۸-۵}$$

شرایط اولیه (۸-۲) مقادیر $y^{(k)}(x_1)$ را برای $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ مستقیماً بدست می‌دهند. مقدار $y^{(n)}(x_0)$ از معادله (۸-۱) با جایگزینی $x = x_0$ و استفاده از شرایط اولیه (۸-۲) بدست می‌آید.

$$y^{(n)}(x_0) = f(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}) \tag{۸-۶}$$

مقادیر $y^{(n+1)}(x_0)$، $y^{(n+2)}(x_0)$، ... به ترتیب با دیفرانسیل‌گیری از معادله (۸-۱) و با جایگزینی $x = x_0$، $y^{(k)}(x_0) = y_{0k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ بدست می‌آیند.

اثبات شده است که اگر عنصر سمت راست معادله (۸-۵) در همسایگی نقطه $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$ تابعی تحلیلی از آرگومان‌هایش باشد، آنگاه برای مقادیر به حد کافی نزدیک به x_0 یک جواب یکتا برای مسئله (۸-۱) و (۸-۲) وجود دارد که به دنباله تیلور (۸-۵) بسط داده می‌شود. سپس مجموع جزیی این دنباله حل تقریبی مسئله مورد نظر خواهد بود.

بطور مشابه به این روش برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی نیز بکار گرفته می‌شود.

مثال ۸ـ۱ـ هفت جمله اول بسط دنباله توان پاسخ $y = y(x)$ را برای معادله زیر بدست آورید.

$$y'' + 0.1(y')^2 + (1 + 0.1x)y = 0$$

با شرایط اولیه $y(0) = 1$ و $y'(0) = 2$.

حل ـ پاسخ معادله به شکل دنباله زیر می‌باشد:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

مستقیماً از شرایط اولیه داریم $y(0) = 1$ و $y'(0) = 2$. برای بدست آوردن $y''(0)$ معادله داده شده را بر حسب y'' حل می‌کنیم:

$$y'' = -0.1(y')^2 - (1 + 0.1x)y \qquad (۸\text{-}۷)$$

با استفاده از شرایط اولیه خواهیم داشت:

$$y''(0) = -0.1 \times 4 - 1 \times 1 = -1.4$$

حال متوالیاً از دو طرف معادله (۸-۷) بر حسب x مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
y''' &= -0.2y'y'' - 0.1(xy' + y) - y', \\
y^{(4)} &= -0.2(y'y''' + y''^2) - 0.1(xy'' + 2y') - y'', \\
y^{(5)} &= -0.2(y'y^{(4)} + 3y''y''') - 0.1(xy''' + 3y'') - y''', \\
y^{(6)} &= -0.2(y'y^{(5)} + 4y''y^{(4)} + 3y'''^2) - 0.1(xy^{(4)} + 4y''') - y^{(4)}.
\end{aligned} \qquad (۸\text{-}۸)$$

با جایگذاری شرایط اولیه و مقدار $y''(0)$ پیدا می‌کنیم:

$$y'''(0) = -1.54, \quad y^{(4)}(0) = 1.224, \quad y^{(5)}(0) = 0.1768,$$
$$y^{(5)}(0) = -0.7308.$$

از اینرو حل تقریبی مطلوب به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y(x) \approx 1 + 2x - 0.7x^2 - 0.2567x^3 + 0.051x^4 + 0.00147x^5 - 0.00101x^6.$$

مثال ۸ـ۲ـ چهار جمله اول بسط دنباله توان جواب‌های $y = y(x)$ و $z = z(x)$ دستگاه

$$\left.\begin{aligned} y'(x) &= y\cos x - z\sin x \\ z'(x) &= y\sin x + z\cos x \end{aligned}\right\} \qquad (۹\text{-}۸)$$

را با شرایط اولیه $y(\circ) = ۱$ و $z(\circ) = \circ$ بدست آورید.

حل- توابع $y(x)$ و $z(x)$ را به صورت دنباله‌های توان زیر در نظر می‌گیریم:

$$y(x) = y(\circ) + \frac{y'(\circ)}{۱!}x + \frac{y''(\circ)}{۲!}x^{۲} + \cdots + \frac{y^{(k)}(\circ)}{k!}x^k + \dots, \qquad (۱\circ\text{-}۸)$$

$$z(x) = z(\circ) + \frac{z'(\circ)}{۱!}x + \frac{z''(\circ)}{۲!}x^{۲} + \cdots + \frac{z^{(k)}(\circ)}{k!}x^k + \dots, \qquad (۱۱\text{-}۸)$$

بطور مستقیم از شرایط اولیه داریم $y(\circ) = ۱$ و $z(\circ) = \circ$. با قرار دادن $x = \circ$ در دستگاه (۸-۹) و با توجه به شرایط اولیه بدست می‌آوریم: $y'(\circ) = ۱$ و $z'(\circ) = \circ$.
از دستگاه (۸-۹) نسبت به x دیفرانسیل می‌گیریم:

$$\left.\begin{aligned} y''(x) &= -(y+z')\sin x - (z-y')\cos x, \\ z''(x) &= -(z-y')\sin x + (y+z')\cos x. \end{aligned}\right\} \qquad (۱۲\text{-}۸)$$

بنابراین بدست می‌آوریم: $y''(\circ) = ۱$ و $z''(\circ) = ۱$.
از دستگاه (۸-۱۲) دیفرانسیل می‌گیریم:

$$\left.\begin{aligned} y'''(x) &= (z - ۲y' - z'')\sin x - (y + ۲z' - y'')\cos x \\ z'''(x) &= -(y + ۲z' - y'')\sin x - (z - ۲y' - z'')\cos x \end{aligned}\right\} \qquad (۱۳\text{-}۸)$$

و بدست می‌آوریم $y'''(\circ) = \circ$ و $z'''(\circ) = ۳$. با جایگذاری مقادیر پیدا شده برای مشتقات در دنباله‌های (۸-۱۰) و (۸-۱۱) می‌توانیم بنویسیم:

$$y(x) \approx ۱ + x + \frac{۱}{۲}x^{۲} \quad , \quad z(x) \approx \frac{۱}{۲}x^{۲} + \frac{۱}{۲}x^{۳}$$

توجه- برای بکارگیری موفقیت‌آمیز برخی از روش‌های عددی در انتگرال‌گیری از معادلات دیفرانسیل لازم است که مقادیر توابع را برای چند نقطه بدست آوریم. این مقادیر می‌توانند با دنباله توان محاسبه شوند. از اینرو روش بسط پاسخ‌ها به دنباله توان، می‌تواند به عنوان یک دسته از روش‌های عددی بسیار موثر برای انتگرال‌گیری تقریبی معادلات دیفرانسیل مورد استفاده قرار گیرد (روش‌های آدامز، میلن و غیره). در ذیل یک مثال از تشکیل یک جدول از جواب‌ها با فاصله‌ای مشخص را می‌بینید.

اگر معادله شامل نقطه‌ای نامتعارف باشد مثلاً یک نقطه به صورت $\frac{\circ}{\circ}$، آنگاه حل عددی ممکن نخواهد بود. در این موارد استفاده از دنباله‌های توان امکان برطرف کردن چنین نقطه‌ای را فراهم می‌کند (مسائل ۱۱ تا ۱۳ را ببینید).

مثال ۸ـ۳ـ برای تابع $y = y(x)$ که در معادله زیر و شرایط اولیه $y(\circ) = \circ$ و $y'(\circ) = ۱$ صدق می‌کند یک جدول مقادیر، در بازه $[\circ, \circ/۲]$ و با فاصله $\circ/\circ۵$ تشکیل دهید.

$$y'' + xy' + y = \circ \qquad (۱۴\text{-}۸)$$

پاسخ را با دقت $\circ/۵ \times ۱\circ^{-۴}$ بدست آورید.

حل ـ تابع $y = y(x)$ را به صورت یک دنباله بازنویسی می‌کنیم:

$$y(x) = y(\circ) + \frac{y'(\circ)}{۱!}x + \frac{y''(\circ)}{۲!}x^{۲} + \cdots + \frac{y^{(n)}(\circ)}{n!}x^{n} + \ldots,$$

که در آن $y(\circ) = \circ$ و $y'(\circ) = ۱$.

از معادله (۸-۱۴) بدست می‌آوریم: $y'' = -xy' - y$. که از آنجا بدست می‌آوریم $y''(\circ) = -y(\circ) = \circ$. با دیفرانسیل‌گیری متوالی از معادله (۸-۱۴) داریم:

$$\begin{aligned}
&y'''(x) = -xy'' - ۲y',\\
&y^{(۴)}(x) = -xy''' - ۳y'',\\
&y^{(۵)}(x) = -xy^{(۴)} - ۴y''',\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

و به صورت عمومی $y^{n+۱}(x) = -xy^{(n)} - ny^{n-۱}$. از این معادلات بدست می‌آوریم:

$$y'''(\circ) = -۲\ ,\quad y^{(۴)}(\circ) = \circ\ ,\quad y^{(۵)}(\circ) = ۸$$

و به صورت عمومی $y^{(۲n)}(\circ) = \circ, y^{(۲n+۱)}(\circ) = -۲ny^{(۲n-۱)}(\circ) = (-۱)^{n}۲^{n}n!$ و در نتیجه

$$y(x) = x - \frac{x^{۳}}{۳} + \frac{x^{۵}}{۱۵} - \cdots + (-۱)^{n}\frac{۲^{n}n!x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} + \ldots.$$

این یک دنباله متناوب است و قدر مطلق جملات آن در بازه $[\circ, \circ/۲]$ بطور یکنواخت کاهش می‌یابند. چون قدر مطلق عبارت باقیمانده چنین دنباله‌ای کمتر از اولین جمله صرف‌نظر شده است، لذا فرمول تقریب $y(x) \approx x - \frac{x^{۳}}{۳}$ منجر به مقادیر تابع مورد نظر در بازه $[\circ, \circ/۲]$ و با خطای کمتر از $\frac{x^{۵}}{۱۵} \leq \frac{\circ/۲^{۵}}{۱۵} \approx \circ/\circ\circ\circ\circ۲$ می‌گردد.

با استفاده از فرمول بدست آمده جدول ۸-۱ را تشکیل می‌دهیم:

جدول ۸-۱) حل معادله (۸-۱۴)

x	۰	۰٫۰۵	۰٫۱۰	۰٫۱۵	۰٫۲۰
$y(x)$	۰	۰٫۰۵۰۰	۰٫۰۹۹۷	۰٫۱۴۸۹	۰٫۱۹۷۳

۲ـ روش ضرایب نامحدود. توصیه می‌شود که این روش برای حل معادلات دیفرانسیل خطی (با ضرایب متغیر) مورد استفاده قرار گیرد. جهت تشریح این روش، به عنوان مثال معادله درجه ۲

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \qquad (۱۵\text{-}۸)$$

را با شرایط اولیه $y(۰) = y_۰$ و $y'(۰) = y'_۰$ در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم که هر ضریب از معادله (۸-۱۵) را می‌توان به یک دنباله بر حسب توان‌های x بسط داد:

$$p(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} q_n x^n, \quad r(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} r_n x^n.$$

ما برای پاسخ معادله مفروض، دنباله‌ای به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$y(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} c_n x^n \qquad (۱۶\text{-}۸)$$

که در آن c_n ضرایبی هستند که بدست می‌آیند.
از دو طرف معادله (۸-۱۶) دو بار بر حسب x مشتق می‌گیریم:

$$y'(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} n c_n x^{n-۱}, \quad y''(x) = \sum_{n=۲}^{\infty} n(n-۱) c_n x^{n-۲}.$$

با جایگذاری دنباله‌های بدست آمده به عنوان y، y'، y''، p، q و r در معادله (۸-۱۵) خواهیم داشت:

$$\sum_{n=۲}^{\infty} n(n-۱)c_n x^n + \sum_{n=۰}^{\infty} p_n x^n . \sum_{n=۱}^{\infty} n c_n x^{n-۱} + \sum_{n=۰}^{\infty} q_n x^n . \sum_{n=۰}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=۰}^{\infty} r_n x^n \qquad (۱۷\text{-}۸)$$

با ضرب دنباله‌ها و برابر قرار دادن ضرایب توان‌های برابر x در عناصر سمت چپ و راست معادله (۸-۱۷) دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^۰ & ۲c_۲ + c_۱ p_۰ + c_۰ q_۰ = r_۰, \\ x^۱ & ۳ \times ۲c_۳ + ۲c_۲ p_۰ + c_۱ p_۱ + c_۱ q_۰ + c_۰ q_۱ = r_۱, \\ x^۲ & ۴ \times ۳c_۴ + ۳c_۳ p_۰ + ۲c_۲ p_۱ + c_۱ p_۲ + c_۲ q_۰ + c_۱ q_۱ + c_۰ q_۲ = r_۲, \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^n & (n+۲)(n+۱)c_{n+۲} + L(c_{n+۱}, c_n, \ldots, c_۱, c_۰) = q_n, \end{array}\right\} \qquad (۱۸\text{-}۸)$$

که در آن $L(c_{n+1}, c_n, \dots, c_1, c_0)$ مشخص‌کننده تابعی خطی از آرگومان‌های $c_{n+1}, c_n, \dots, c_1, c_0$ است. هر معادله از دستگاه (۸-۱۸) شامل یک مجهول بیشتر در مقایسه با معادله قبلی است. ضرایب c_0 و c_1 از شرایط اولیه بدست می‌آیند و ضرایب دیگر به ترتیب از دستگاه (۸-۱۸) حاصل می‌شوند.

اثبات شده است که اگر دنباله‌های $\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$، $\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n$ برای $|x| < R$ متقارب شوند، آنگاه دنباله توان بدست آمده در همان دامنه متقارب شده و پاسخ معادله (۸-۱۵) می‌باشد.

توجه. اگر شرایط اولیه برای $x = x_0$ داده شده باشند آنگاه تغییر متغیر $x - x_0 = t$ مفید واقع می‌شود و مسئله را به شکل تشریح شده در بالا تبدیل می‌کند.

مثال ۸-۴. پاسخ معادله

$$y'' - xy' + y = 1 - \cos x \tag{۸-۱۹}$$

را با شرایط اولیه $y(0) = 0$ و $y'(0) = 1$ بیابید.

حل. ضرایب معادله مفروض را به دنباله توان بسط می‌دهیم:

$$p(x) = -x, \quad q(x) = 1, \quad r(x) = 1 - \cos x = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots.$$

پاسخ معادله (۸-۱۹) را با دنباله زیر نشان می‌دهیم:

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_n x^n + \dots.$$

آنگاه

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \dots + nc_n x^{n-1} + \dots,$$
$$y'' = 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + \dots + n(n-1)c_n x^{n-2} + \dots.$$

با جایگذاری دنباله‌های بدست آمده در معادله (۸-۱۹) و برابر قرار دادن ضرایب جملات با نماهای برابر x، یک دستگاه برای بدست آوردن ضرایب c_i بدست می‌آید:

$$\begin{array}{l|l}
x^0 & c_0 + 2c_2 = 0, \\
x^1 & \quad 6c_3 = 0, \\
x^2 & -c_2 + 12c_4 = \frac{1}{2}, \\
x^3 & -2c_3 + 20c_5 = 0, \\
x^4 & -3c_4 + 30c_6 = -\frac{1}{24}, \\
x^5 & -4c_5 + 42c_7 = 0, \\
x^6 & -5c_6 + 56c_8 = \frac{1}{720}.
\end{array}$$

از شرایط اولیه پیدا می‌کنیم $c_0 = 0$ و $c_1 = 1$.
به راحتی مشخص است که $c_{2n+1} = 0\ (n = 1, 2, \ldots)$. در نتیجه

$$c_2 = 0, \quad c_4 = \frac{1}{24}, \quad c_6 = \frac{1}{360}, \quad c_8 = \frac{11}{40320}.$$

از اینرو پاسخ تقریبی مسئله به شکل زیر است:

$$y(x) \approx x + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{360} + \frac{11x^8}{40320}$$

توجه- گاهی اوقات هنگام حل یک معادله دیفرانسیل با روش ضرایب نامحدود، ما می‌توانیم یک عبارت برای ضرایب یک دنباله به صورت عمومی پیدا کنیم. این موضوع با مثال بعدی نشان داده می‌شود.

مثال ۸-۵- پاسخ معادله

$$y'' + xy' + 2y = 12 \tag{۸-۲۰}$$

که در شرایط اولیه $y(0) = 5$ و $y'(0) = 2$ صدق می‌کند را به صورت یک دنباله توان بر حسب x بدست آورید.

حل- دنباله زیر را به عنوان پاسخ معادله مفروض در نظر می‌گیریم:

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_n x^n + \ldots.$$

در نتیجه:

$$y'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots + nc_c x^{n-1} + \ldots,$$
$$y''(x) = 2c_2 + 2.3c_3 x + \cdots + n(n-1)c_n x^{n-2} + \ldots.$$

با جایگذاری دنباله‌های بدست آمده در معادله (۸-۲۰) و برابر قرار دادن ضرایب توان‌های برابر x در دو طرف معادله، دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^0 & 2c_2 + 2c_0 = 12, \\ x^1 & 3 \times 2c_3 + 3c_1 = 0, \\ x^2 & 4 \times 3c_4 + 4c_2 = 0, \\ x^3 & 5 \times 4c_5 + 5c_3 = 0, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n & (n+1)(n+2)c_{n+2} + (n+2)c_n = 0. \end{array}\right\} \tag{۸-۲۱}$$

از شرایط اولیه داریم $c_0 = 5$ و $c_1 = 2$.

با حل دستگاه (۸-۲۱) به ترتیب بدست می‌آوریم:

$$\begin{array}{ll} c_۲ = ۶ - c_۰ = ۱, & c_۵ = -\frac{c_۳}{۴}, \\ c_۳ = -\frac{c_۱}{۲} = -۱, & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_۴ = -\frac{c_۲}{۳}, & c_{n+۲} = \frac{c_n}{n+۱}. \end{array}$$

ضرایب با موقعیت فرد و زوج را بطور جداگانه می‌نویسیم:

$$\begin{array}{ll} c_۳ = -\frac{c_۱}{۲}, & c_۴ = -\frac{c_۲}{۳}, \\ c_۵ = -\frac{c_۳}{۴}, & c_۶ = -\frac{c_۴}{۵}, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ c_{۲k+۱} = -\frac{c_{۲k-۱}}{۲k}, & c_{۲k} = -\frac{c_{۲k-۲}}{۲k-۱}, \end{array}$$

که از آنجا بدست می‌آوریم:

$$c_{۲k+۱} = \frac{(-۱)^k c_۱}{۲ \times ۴ \ldots ۲k}, \quad c_{۲k} = \frac{(-۱)^{k-۱} c_۲}{۳ \times ۵ \times ۷ \ldots (۲k-۱)}.$$

مقادیر $c_۱$ و $c_۲$ را جایگذاری می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$c_{۲k+۱} = \frac{(-۱)^k \times ۲}{(۲k)!!}, \quad c_{۲k} = \frac{(-۱)^{k-۱}}{(۲k-۱)!!} \quad (k = ۱, ۲, ۳, \ldots)$$

دو دنباله می‌نویسیم: یکی برای توان‌های زوج و دیگری برای توان‌های فرد x

$$\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{k-۱}}{(۲k-۱)!!} x^{۲k}, \quad ۲\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^k}{(۲k)!!} x^{۲k+۱}.$$

و دامنه تقارب دنباله‌های بدست آمده را بدست می‌آوریم.
برای دنباله اول حد قدر مطلق نسبت دو جمله متوالی برابر است با:

$$\lim_{k\to\infty} |\frac{u_{k+۱}}{u_k}| = \lim_{k\to\infty} |\frac{x^{۲k+۲} \times ۳ \times ۵ \ldots (۲k-۱)}{۳ \times ۵ \ldots (۲k-۱)(۲k+۱)x^{۲k}}| = x^۲ \lim_{k\to\infty} \frac{۱}{۲k+۱} = ۰.$$

و به طور مشابه برای دنباله دوم برابر است با:

$$\lim_{k\to\infty} |\frac{u_{k+۱}}{u_k}| = \lim_{k\to\infty} |\frac{x^{۲k+۳} \times ۲ \times ۴ \ldots ۲k}{۲.۴ \ldots ۲k(۲k+۲)x^{۲k+۱}}| = x^۲ \lim_{k\to\infty} \frac{۱}{۲k+۲} = ۰.$$

از اینرو هر دو دنباله متقاربند و بنابراین پاسخ معادله (۸-۲۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y(x) = ۵ + ۲x + \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{k-۱}}{(۲k-۱)!!} x^{۲k} + ۲\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^k}{(۲k)!!} x^{۲k+۱}.$$

مسائل

با بکارگیری روش دیفرانسیل‌گیری متوالی پاسخ معادلات و دستگاه‌های زیر که در شرایط اولیه داده شده صدق می‌کنند را به صورت یک مجموع جزیی از دنباله بنویسید (خود را به ۴ تا ۵ جمله محدود کنید).

۱. $y' = y^۲ + x^۲,\ y(۰) = ۱/۲.$ ۲. $y' = \cos(x+y),\ y(۰) = ۰.$

۳. $y' = e^y + x^۲,\ y(۱) = ۰.$ ۴. $y' = x \ln y,\ y(۱) = ۱.$

۵. $y'' + y\cos x = ۰,\ y(۰) = a,\ y'(۰) = ۰.$

۶. $y'' + xy' = e^{-x^۲},\ y(۰) = ۱,\ y'(۰) = ۰.$

۷. $\left.\begin{array}{l} y' = xy + z, \\ z' = y - z, \end{array}\right\} y(۰) = ۰,\ z(۰) = ۱.$

۸. $\left.\begin{array}{l} y' = x + z^۲, \\ z' = xy, \end{array}\right\} y(۰) = ۱,\ z(۰) = -۱.$

پاسخ معادلات زیر را با استفاده از روش ضرایب نامحدود پیدا کنید.

۹. $y'' + y' + x^۲y = \frac{x}{۱-x},\ y(۰) = ۰,\ y'(۰) = ۱.$

۱۰. $y'' - xy' - ۲y = e^{-x^۲},\ y(۰) = ۱,\ y'(۰) = ۱/۲.$

۱۱. $۴xy'' + ۲y' + y = ۰,\ y(۰) = ۱,\ y'(۰) = -۱/۲.$

۱۲. $xy'' + y' + xy = ۰,\ y(۰) = ۱,\ y'(۰) = ۰.$

۱۳. $xy'' + ۲y' + xy = ۰,\ y(۰) = ۱,\ y'(۰) = ۰.$

۱۴ـ یک جدول از مقادیر پاسخ در بازه $[۰, ۰/۱۵]$ با فاصله $h = ۰/۰۵$ را تشکیل دهید. از مجموع جزیی بدست آمده از دنباله‌های

الف) معادله (۸-۵)

ب) دستگاه (۸-۶)

ج) دستگاه (۸-۱۴)

استفاده کنید.

۸ـ۳ـ روش تقریب‌های متوالی

مسئله کوشی را برای معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$y' = f(x, y) \qquad (۲۲\text{-}۸)$$

با شرط اولیه

$$y(x_0) = y_0 \tag{۲۳-۸}$$

در نظر بگیرید.

در روش تقریب‌های متوالی پاسخ $y(x)$ به عنوان حد یک رشته از توابع $y_n(x)$ که به وسیله فرمول بازگشتی

$$y_n(x) = y_0 + \int_0^x f(x, y_{n-1}(x))dx \tag{۲۴-۸}$$

پیدا می‌شوند، بدست می‌آید.

اثبات شده است ([۳۶] را ببینید) که اگر عنصر سمت راست $f(x,y)$ در ناحیه مربع‌ـمستطیل $R\{|x-x_0| \leq a, |y-y_0| \leq b\}$ شرط لیپ شیتس[1] را بر حسب y بر قرار سازد:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq N|y_1 - y_2|, \quad N = \text{ثابت} \tag{۲۵-۸}$$

آنگاه بدون توجه به انتخاب تابع اولیه، تقریب‌های متوالی $y_n(x)$ در بازه $[x_0, x_0 + h]$ به جواب مسئله (۸-۲۲) و (۸-۲۳) متقارب می‌شوند.

اگر $f(x,y)$ در یک ناحیه مربع‌ـمستطیل R پیوسته باشد آنگاه خطای پاسخ تقریبی $y_n(x)$ در بازه $[x_0, x_0 + h]$ با نامساوی زیر برآورد می‌شود:

$$\varepsilon_n = |y(x) - y_n(x)| \leq MN^n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{۲۶-۸}$$

که در آن $M = \max\limits_{(x,y)\in R} |f(x,y)|$ و h از شرط زیر بدست می‌آید:

$$h = \min(a, \frac{b}{M}) \tag{۲۷-۸}$$

هر تابع به اندازه کافی نزدیک به پاسخ دقیق را می‌توان به عنوان تقریب اولیه $y_0(x)$ در نظر گرفت. گاهی اوقات برای $y_0(x)$ می‌توان از حل تقریبی معادله (۸-۲۲) که به صورت مجموع جزیی سری توان بدست آمده، استفاده کرد (مثال ۸ـ۷).

توجهـ روش تقریب‌های متوالی می‌تواند برای حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل (مثال ۸ـ۸) و یک معادله رتبه n مورد استفاده قرار گیرد (البته اگر این معادله را به یک دستگاه معادل تبدیل کنیم). ما دیدیم که برای حل یک معادله دیفرانسیل که به دنباله توان بسط داده شده، لازم است که عنصر سمت راست معادله تحلیلی باشد در صورتی که برای بکارگیری روش تقریب‌های متوالی تحلیلی بودن عنصر سمت راست الزامی

1) Lipshits

نیست. بنابراین می‌توان گفت که روش تقریب‌های متوالی دامنه کاربرد وسیعتری دارد. این روش همچنین وقتی که بسط جواب یک معادله دیفرانسیل به دنباله توان غیر ممکن باشد، بکارگرفته می‌شود. امّا این روش متأسفانه دارای ضعف‌هایی است که همانا محاسبه انتگرال‌های سخت و سختتر است.

مثال ۸ـ۶ـ سه تقریب متوالی از پاسخ معادله

$$y' = x^۲ + y^۲ \tag{۲۸-۸}$$

را برای شرط اولیه $y(۰) = ۰$ بیابید.

حل ـ با در نظر گرفتن شرط اولیه، معادله (۸-۲۸) را با انتگرالی به شکل زیر جایگزین می‌کنیم:

$$y(x) = \int_۰^x (x^۲ + y^۲)dx$$

و $y_۰(x) = ۰$ را به عنوان تقریب اولیه می‌گیریم. حال تقریب اول با فرمول

$$y_۱(x) = \int_۰^x (x^۲ + y_۰^۲(x))dx = \int_۰^x x^۲ dx = \frac{x^۳}{۳}$$

بدست می‌آید. تقریب‌های دوم و سوم به طریق مشابه بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned} y_۲(x) &= \textstyle\int_۰^x (x^۲ + y_۱^۲)dx = \int_۰^x (x^۲ + \frac{x^۶}{۹})dx = \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۷}{۶۳}, \\ y_۳(x) &= \textstyle\int_۰^x (x^۲ + y_۲^۲)dx = \int_۰^x (x^۲ + \frac{x^۶}{۹} + \frac{۲}{۱۸۹}x^{۱۰} + \frac{x^{۱۴}}{۳۹۶۹})dx = \\ &= \tfrac{x^۳}{۳} + \tfrac{x^۷}{۶۳} + \tfrac{۲x^{۱۱}}{۲۰۷۹} + \tfrac{x^{۱۵}}{۵۹۵۳۵} \end{aligned}$$

خطای آخرین تقریب را با فرمول (۸-۲۶) برآورد می‌کنیم. چون تابع $f(x,y) = x^۲ + y^۲$ در تمام صفحه تعریف شده و پیوسته است، می‌توانیم هر عددی را برای a و b در نظر بگیریم. جهت محدود شدن ما مقادیر $a = ۱$ و $b = ۰/۵$ را در نظر می‌گیریم. آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} M &= \max|f(x,y)| = \max|x^۲ + y^۲| = ۱/۲۵, \\ N &= \max|f'_y(x,y)| = \max|۲y| = ۱. \end{aligned}$$

با توجه به شرط (۸-۲۷) بدست می‌آوریم $h = ۰/۴$. از اینرو در بازه $[۰, ۰/۴]$ داریم

$$|y(x) - y_۳(x)| \le ۱/۲۵ \times ۱^۳ \times \frac{x^۴}{۴!} = \frac{۵}{۹۶}x^۴$$

و در نتیجه $\max\limits_{[۰,۰/۴]} |y(x) - y_۳(x)| \le \dfrac{۵ \times ۰/۴^۴}{۹۶} \approx ۰/۰۰۱۳۳$

توجه ـ فرمول (۸-۲۶) اغلب خطا را پیش برآورد می‌کند (یعنی دقیق نیست). در استفاده از روش تقریب‌های متوالی برای منظورهای عملی، nای را انتخاب می‌کنیم که برای آن مقادیر y_{n-1} و y_n در حدود دقت مجاز مطابقت داشته باشند (مثال ۸ـ۷ را ببینید).

مثال ۸ـ۷ـ برای معادله

$$y' = x + 0.1y^2 \tag{۸-۲۹}$$

با شرط اولیه $y(0) = 1$ حل تقریبی را در بازه $[0, 0.2]$ با دقت 10^{-5} بدست آورید.

حل ـ تقریب اولیه $y_0(x)$ را به صورت $y_0(x) = y_0 + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)x^2}{2!}$ انتخاب می‌کنیم. بدین منظور از معادله (۸-۲۹) و شرط اولیه بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1, \\ y'(0) &= 0.1y_0^2 = 0.1, \\ y''(0) &= 1 + 0.2y_0y_0' = 1.02. \end{aligned}$$

از اینرو $y_0(x) = 1 + 0.1x + 0.51x^2$.

حال بدست می‌آوریم:

$$f(x, y_0) = x + 0.1y_0^2 = 0.1 + 1.02x + 0.103x^2 + 0.0102x^3 + 0.0260x^4$$

و تقریب اول را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + \int_0^x (x + 0.1y_0^2)dx = \\ &= 1 + 0.1x + 0.51x^2 + 0.034x^3 + 0.0025x^4 + 0.0052x^5 \end{aligned}$$

توجه داریم که اختلاف $y_1(x) - y_0(x) = 0.034x^3 + 0.0025x^4 + 0.0052x^5$ در نقطه $x = 0.2$ مقدار ماکزیمم خود را داراست، بنابراین دقت مورد نظر هنوز حاصل نشده است. توجه داشته باشید که در عبارت بدست آمده برای y_1 جمع دو عبارت آخر از 10^{-5} بزرگتر نیست، بنابراین قرار می‌دهیم:

$$y_1(x) = 1 + 0.1x + 0.51x^2 + 0.034x^3$$

و پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(x, y_1) = x + 0.1y_1^2 &= 0.1 + 1.02x + 0.103x^2 + 0.0170x^3 + 0.0267x^4 + \\ &+ 0.0017x^5 + 0.0001x^6 \end{aligned}$$

و تقریب دوم را محاسبه می‌کنیم:

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (x + 0{,}1y_1^2)dx = 1 + 0{,}1x + 0{,}51x^2 + 0{,}034x^3 \\ + 0{,}0042x^4 + 0{,}0053x^5.$$

اختلاف $y_2(x) - y_1(x)$ را در بازه $[0, 0{,}2]$ برآورد می‌کنیم:

$$|y_2(x) - y_1(x)| = 0{,}0042x^4 + 0{,}0053x^5 < 0{,}000008 < 10^{-5}$$

از اینرو خواهیم داشت:

$$y(x) \approx 1 + 0{,}1x + 0{,}51x^2 + 0{,}034x^3 + 0{,}0042x^4 + 0{,}0053^5$$

مثال ۸ـ۸ـ دستگاه

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = x + yz, \\ \frac{dz}{dx} = x^2 - y^2 \end{array}\right\} \qquad (۸-۳۰)$$

با شرایط اولیه $y(0) = 1$ و $z(0) = \frac{1}{2}$ مفروض است. با استفاده از روش تقریب‌های متوالی جواب این دستگاه را در بازه $[0, 0{,}3]$ با دقت 5×10^{-3} بدست آورید.

حل ـ دستگاه (۸-۳۰) را به صورت انتگرالی می‌نویسیم:

$$y = 1 + \int_0^x (x + yz)dx, \qquad z = \frac{1}{2} + \int_0^x (x^2 - y^2)dx.$$

با استفاده از مقادیر اولیه، از دستگاه (۸-۳۰) پیدا می‌کنیم $y'(0) = \frac{1}{2}$ و $z'(0) = -1$. بنابراین برای تقریب‌های اولیه انتخاب می‌کنیم:

$$y_0(x) = 1 + \frac{1}{2}x, \qquad z_0(x) = \frac{1}{2} - x$$

تقریب‌های اول $y_1(x)$ و $z_1(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (x + \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{2}x^2)dx = 1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{6}x^3,$$
$$z_1(x) = \tfrac{1}{2} + \int_0^x (x^2 - 1 - x - \tfrac{1}{4}x^2)dx = \tfrac{1}{2} - x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4}x^3.$$

و بطور مشابه بدست می‌آوریم:

$$y_2(x) = 1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{5}{16}x^3 - \tfrac{5}{96}x^4 + \tfrac{11}{240}x^5 + \tfrac{11}{576}x^6 - \tfrac{1}{168}x^7,$$
$$z_2(x) = \tfrac{1}{2} - x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{5}{96}x^4 + \tfrac{29}{960}x^5 + \tfrac{1}{144}x^6 - \tfrac{1}{252}x^7.$$

اختلافات $y_۱(x) - y_۲(x)$ و $z_۱(x) - z_۲(x)$ را در بازه $[۰, ۰/۳]$ برآورد می‌کنیم:

$$\begin{aligned}|y_۱(x) - y_۲(x)| &= |-\tfrac{۷}{۴۸}x^۳ - \tfrac{۵}{۹۶}x^۴ + \tfrac{۱۱}{۲۴۰}x^۵ + \tfrac{۱۱}{۵۷۶}x^۶ - \tfrac{۱}{۱۶۸}x^۷| \leq \\ &\leq x^۳|\tfrac{۷}{۴۸} + \tfrac{۵}{۹۶}x + \tfrac{۱}{۱۶۸}x^۴| \leq ۰/۰۰۴۳, \\ |z_۱(x) - z_۲(x)| &= |\tfrac{۱}{۱۲}x^۳ - \tfrac{۵}{۹۶}x^۴ - \tfrac{۲۹}{۹۶۰}x^۵ - \tfrac{۱}{۱۴۴}x^۶ - \tfrac{۱}{۲۵۲}x^۷| \leq \\ &\leq x^۳|\tfrac{۱}{۱۲} + \tfrac{۱}{۲۵۲}x^۴| \leq ۰/۰۰۲۴.\end{aligned}$$

این اختلاف با همان محدودیت‌های دقت مشخص شده بدست می‌آیند (جملات شامل $x^۴$، $x^۵$ و $x^۶$ در بازه $[۰, ۰/۳]$ کوچک هستند). در نتیجه با دقت مورد نظر خواهیم داشت:

$$y \approx ۱ + ۰/۵x + ۰/۱۲۵x^۲ - ۰/۳۱۲x^۳, \quad z \approx ۰/۵ - x - ۰/۵x^۲ + ۰/۱۶۷x^۳$$

مسائل

سه تقریب متوالی از جواب معادلات دیفرانسیل و دستگاه‌های زیر را با قرار دادن $y_۰(x) = y_۰$ و $z_۰(x) = z_۰$ بدست آورید:

۱. $y' = x^۲ - y^۲,\ y(۰) = ۰.$ ۲. $y' = e^{-x} - y^۲,\ y(۰) = ۱.$

۳. $y' = ۲x - ۱ + y^۲,\ y(۰) = ۱.$ ۴. $y' = \sqrt{x} + y^۲,\ y(۰) = ۰.$

۵. $y' = xy + \sqrt{x},\ y(۰) = ۰.$ ۶. $y' = y\sin x + x,\ y(۰) = ۰.$

۷. $y' = x + y\cos x,\ y(۰) = ۰.$

۸. $\left.\begin{aligned} y' &= x + y + z, \\ z' &= y - z, \end{aligned}\right\}\ y(۰) = ۱,\ z(۰) = -۲.$

۹. $\left.\begin{aligned} y' &= xy + z, \\ z' &= y + xz, \end{aligned}\right\}\ y(۰) = ۰,\ z(۰) = ۱.$

۱۰. $\left.\begin{aligned} y' &= x - z^۲, \\ z' &= x + y, \end{aligned}\right\}\ y(۰) = ۰,\ z(۰) = ۱.$

۱۱. $\left.\begin{aligned} y' &= y - z, \\ z' &= yz, \end{aligned}\right\}\ y(۰) = ۰,\ z(۰) = ۰/۵.$

۱۲. $y' = x + y^۲,\ y(۰) = ۰.$ ۱۳. $y' = x + y,\ y(۰) = ۱.$

۱۴. $y' = ۲y - ۲x^۲ - ۳,\ y(۰) = ۲.$ ۱۵. $xy' = ۲x - y,\ y(۱) = ۲.$

با استفاده از روش تقریب‌های متوالی جواب‌های تقریبی معادلات دیفرانسیل زیر را در بازه $[۰, ۱]$ با دقت $۱۰^{-۳}$ و با قرار دادن $y_۰(x) = y_۰$ بدست آورید.

$۱۶.\ y' = ۲x - ۰/۰۱y^۲,\ y(۰) = ۱.$ $\quad$ $۱۷.\ y' = ۴/۵\sqrt{x} + ۰/۱y^۲,\ y(۰) = ۰.$

$۱۸.\ y' = x + y\sqrt{x},\ y(۰) = ۰.$

۸ـ۴ـ روش اولر

در بخش‌های قبلی به روش‌های تقریب تحلیلی در حل مسئله کوشی پرداختیم. روش اولر از روش‌های عددی است که پاسخ را به صورت یک جدول از مقادیر تقریبی تابع $y(x)$ بدست می‌آورد.

یک معادله دیفرانسیل به صورت

$$y' = f(x, y) \qquad (۸\text{-}۳۱)$$

با شرط اولیه

$$y(x_۰) = y_۰ \qquad (۸\text{-}۳۲)$$

را در نظر بگیرید. با فرض انتخاب یک فاصله بقدر کافی کوچک h، یک دستگاه از نقاط متساوی‌الفاصله $x_i = x + ih$ $(i = ۰, ۱, ۲, \ldots)$ تشکیل می‌دهیم.

در روش اولر مقادیر تقریبی $y_i \approx y(x_i)$ توسط فرمول زیر بطور متوالی محاسبه می‌شوند:

$$y_{i+۱} = y_i + hf(x_i, y_i)\ (i = ۰, ۱, ۲, \ldots) \qquad (۸\text{-}۳۳)$$

در اینجا منحنی انتگرال مورد نظر $y = y(x)$ که از نقطه $M_۰(x_۰, y_۰)$ می‌گذرد با یک کثیرالخط $M_۰M_۱M_۲\ldots$ با رئوس $M(x_i, y_i)$ $(i = ۰, ۱, ۲, \ldots)$ جایگزین می‌گردد. هر قسمت $M_iM_{i+۱}$ از این خط که کثیرالخط اولر نامیده می‌شود یک تطابق سوئی (driection) با منحنی انتگرال معادله (۸-۳۱) که از نقطه M_i می‌گذرد، دارد.

اگر عبارت سمت راست معادله (۸-۳۱) در مربع‌ـمستطیل $R\{|x - x_۰| \le a, |y - y_۰| \le b\}$ شرایط

$$|f(x, y_۱) - f(x, y_۲)| \le N|y_۱ - y_۲| \quad (N = \text{ثابت}) \qquad (۸\text{-}۳۴)$$

$$|\frac{df}{dx}| = |\frac{\delta f}{\delta x} + f\frac{\delta f}{\delta y}| \le M \quad (M = \text{ثابت}) \qquad (۸\text{-}۳۵)$$

را برقرار سازد آنگاه ما برآورد خطای زیر را داریم:

$$|y(x_n) - y_n| \le \frac{hM}{۲N}[(۱ + hN)^n - ۱] \qquad (۸\text{-}۳۶)$$

که در آن $y(x_n)$ مقدار جواب دقیق معادله برای $x = x_n$ است و y_n مقدار تقریبی بدست آمده برای رأس nام است. فرمول (۸-۳۵) تنها کاربرد تئوریک دارد. برای مقاصد عملی استفاده از محاسبه مضاعف

بسیار مناسب است، یعنی محاسبه با فاصله $\frac{h}{2}$ تکرار شده و خطای مقدار y_n^* دقیقتر (بدست آمده با $\frac{h}{2}$) با روش زیر به صورت تقریبی برآورد می‌گردد:

$$|y_n^* - y(x_n)| \approx |y_n^* - y_n| \qquad (۸\text{-}۳۷)$$

روش اولر به راحتی و به همان صورت که برای دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل بکار گرفته می‌شود برای معادلات دیفرانسیل مرتبه‌های بالا نیز بکار میرود (در ابتدا می‌بایستی معادله مرتبه بالا را به دستگاهی از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل کرد، مانند مثال ۸ـ۷).
دستگاهی از دو معادله مرتبه اول

$$\left.\begin{aligned} y' &= f_1(x,y,z) \\ z' &= f_z(x,y,z) \end{aligned}\right\} \qquad (۸\text{-}۳۸)$$

با شرایط اولیه $y(x_0) = y_0$ و $z(x_0)z_0$ در نظر بگیرید.
مقادیر تقریبی $y_i \approx y(x_i)$ و $z_i \approx z(x_i)$ بطور متوالی توسط فرمول‌های

$$\left.\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + hf_1(x_i,y_i,z_i), \\ z_{i+1} &= z_i + hf_2(x_i,y_i,z_i) \ (i = 0,1,2,\ldots). \end{aligned}\right\} \qquad (۸\text{-}۳۹)$$

محاسبه می‌شوند.

مثال ۸ـ۹ـ با بکار بستن روش اولر در بازه $[0,1]$ یک جدول از مقادیر جواب معادله

$$y' = y - \frac{2x}{y} \qquad (۸\text{-}۴۰)$$

را با شرایط اولیه $y(0) = 1$ و با فاصله $h = 0٫2$ تشکیل دهید.

حل- نتایج محاسبات در جدول ۸-۲ آمده است.

جدول ۸-۲) حل معادله دیفرانسیل (۸-۴۰) به روش اولر

			محاسبه $f(x_i,y_i)$			جواب دقیق
i	x_i	y_i	$\frac{2x_i}{y_i}$	$y_i - \frac{2x_i}{y_i}$	Δy_i	$y = \sqrt{2x+1}$
۰	۰	۱٫۰۰۰۰	۰	۱٫۰۰۰۰	۰٫۲۰۰۰	۱٫۰۰۰۰
۱	۰٫۲	۱٫۲۰۰۰	۰٫۳۳۳۳	۰٫۸۶۶۷	۰٫۱۷۳۳	۱٫۱۸۳۲
۲	۰٫۴	۱٫۳۷۳۳	۰٫۵۹۲۸	۰٫۷۸۰۵	۰٫۱۵۶۱	۱٫۳۴۱۶
۳	۰٫۶	۱٫۳۷۳۳	۰٫۷۸۴۶	۰٫۷۴۵۸	۰٫۱۴۹۲	۱٫۴۸۳۲
۴	۰٫۸	۱٫۵۲۹۴	۰٫۹۵۳۲	۰٫۷۲۵۴	۰٫۱۴۵۱	۱٫۶۱۲۴
۵	۱٫۰	۱٫۸۲۳۷				۱٫۷۳۲۰

این جدول به ترتیب زیر پر شده است. مقادیر اولیه $x_0 = 0$ و $y_0 = 1{,}0000$ (برای $i = 0$) در سطر اول وارد می‌شوند. با استفاده از آن $f(x_0, y_0) = 1$ و سپس $\Delta y_0 = hf(x_0, y_0) = 0{,}2$ را محاسبه می‌کنیم. حالا توسط فرمول (۸-۳۴) برای $i = 0$ بدست می‌آوریم:

$$y_1 = 1 + 0{,}2 = 1{,}2$$

مقادیر $x_1 = 0{,}2$ و $y_1 = 1{,}2$ در سطر دوم وارد می‌شوند (برای $i = 1$). با استفاده از آنها می‌توان مقادیر $f(x_1, y_1) = 0{,}8667$ و سپس $\Delta y_1 = hf(x_1, y_1) = 0{,}1733$ را محاسبه کرد. از اینرو بدست می‌آوریم:

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1{,}2 + 0{,}1733 = 1{,}3733$$

برای $i = 2, 3, 4, 5$ محاسبات بطور مشابه انجام می‌شوند.
برای مقایسه، ستون آخر جدول مقادیر دقیق پاسخ $y = \sqrt{2x + 1}$ را نشان می‌دهید. همانطورکه از جدول مشهود است خطای مطلق y_5 برابر است با $\varepsilon = 0{,}0917$، یعنی خطای نسبی ۵% را داراست.

مثال ۸ـ۱۰ـ با استفاده از روش اولر برای بازه $[1, 1{,}5]$ یک جدول از مقادیر جواب معادله

$$y'' + \frac{y'}{x} + y = 0 \qquad (۸\text{-}۴۱)$$

را با شرایط اولیه $y(1) = 0{,}77$ و $y'(1) = -0{,}44$ برای فاصله $h = 0{,}1$ تشکیل دهید.

حل‌ـ با استفاده از جایگزینی $z = y'$ و $z' = y''$، معادله (۸-۴۱) را به دستگاه معادلات

$$y' = z\ ,\ \ z' = -\frac{z}{x} - y$$

با شرایط اولیه $y(1) = 0{,}77$ و $z(1) = -0{,}44$ تبدیل می‌کنیم. از اینرو $f_1(x, y, z) = z$ و $f_z(x, y, z) = -\frac{z}{x} - y$ هستند. نتایج محاسبات با فرمول (۸-۳۹) در جدول ۸-۳ وارد شده است (محاسبات با یک رقم اضافی انجام شده است). جدول به صورت زیر پر شده است. سطر اول را تشکیل می‌دهیم: $z_0 = -0{,}44$ و $y_0 = 0{,}77$ و $x_0 = 1{,}0$ و $i = 0$.
سپس بدست می‌آوریم:

$$f_{10} = f_1(x_0, y_0, z_0) = z_0 - 0{,}44,$$
$$f_{20} = f_2(x_0, y_0, z_0) = -\frac{z_0}{x_0} - y_0 = -0{,}33.$$

جدول ۸-۳) حل معادله (۸-۴۱) به روش اولر

i	x_i	y_i	Δy_i	$f_{1i}=z_i$	Δz_i	$f_{2i}=-\frac{z_i}{x_i}-y_i$
۰	۱٫۰	۰٫۷۷	−۰٫۰۴۴	−۰٫۴۴	−۰٫۰۳۳	−۰٫۳۳
۱	۱٫۱	۰٫۷۲۶	−۰٫۰۴۷	−۰٫۴۷۳	−۰٫۰۳۰	−۰٫۲۹۶
۲	۱٫۲	۰٫۶۷۹	−۰٫۰۵۰	−۰٫۵۰۳	−۰٫۰۲۶	−۰٫۲۶۰
۳	۱٫۳	۰٫۶۲۹	−۰٫۰۵۳	−۰٫۵۲۹	−۰٫۰۲۲	−۰٫۲۲۲
۴	۱٫۴	۰٫۵۷۶	−۰٫۰۵۵	−۰٫۵۵۱		
۵	۱٫۵	۰٫۵۲۱				

با استفاده از فرمول (۸-۳۹) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\Delta y_0 &= hf_{10} = 0{,}1(-0{,}44) = -0{,}044, \quad y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0{,}726,\\ \Delta z_0 &= hf_{20} = 0{,}1(-0{,}33) = -0{,}033, \quad z_1 = z_0 + \Delta z_0 = -0{,}473.\end{aligned}$$

از اینرو ما می‌توانیم سطر دوم جدول را به صورت $z_1 = -0{,}473$ و $y_1 = 0{,}726$ و $x_1 = 1{,}1$ و $i = 1$ وارد کنیم. با این مقادیر بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}f_{11} &= f_1(x_1, y_1, z_1) = z_1 = -0{,}473,\\ f_{21} &= f_2(x_1, y_1, z_1) = -\frac{z_1}{x_1} - y_1 = -0{,}296.\end{aligned}$$

و از آنجا

$$\begin{aligned}\Delta y_1 &= hf_{11} = 0{,}1(-0{,}47) = -0{,}047, \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 0{,}679,\\ \Delta z_1 &= hf_{21} = 0{,}1(-0{,}30) = -0{,}030, \quad z_2 = z_1 + \Delta z_1 = -0{,}503.\end{aligned}$$

برای $i = 2, 3, 4, 5$ بطریقه مشابه جدول را مقداردهی می‌کنیم.

مسائل

به کمک روش اولر، به صورت عددی معادلات دیفرانسیل و دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل زیر را با شرایط اولیه داده شده در بازه $[a, b]$ و با فاصله $h = 0{,}1$ برای پارامترهای با مقادیر مشخص شده، حل کنید.

۱. $y' = \frac{1}{2}xy,\ y(0) = 1,\ a = 0,\ b = 1.$

۲. $y' = x^2 + y^2,\ y(0) = 0,\ a = 0,\ b = 1.$

۳. $y' = 1 + xy^2,\ y(0) = 0,\ a = 0,\ b = 1.$

۴. $y' = \frac{y}{x+1} - y^2,\ y(0) = 1,\ a = 0,\ b = 1.$

۵. $y' = \alpha y^2 + \frac{\beta}{x^2},\ y(1) = 1,\ a = 1,\ b = 2.$

الف) $\alpha = -1,\ \beta = 0{,}05 + 0{,}05 \times k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, 7,$

ب) $\alpha = -0{,}5,\ \beta = 0{,}1 + 0{,}1 \times k,\ k = 0, 1, 2, 3.$

۶. $y' = \frac{\alpha}{x^2} - \frac{y}{x} - \beta y^2,\ y(1) = \gamma,\ a = 1,\ b = 2.$

مقادیر پارامترهای α و β و γ در جدول ۸-۴ داده شده‌اند.

۷. $y' = 1 + \alpha y \sin x - \beta y^2,\ y(0) = 0,\ a = 0,\ b = 1,\ \alpha = 0{,}2 \times k,$
$k = 1, 2, \ldots, 5,\ \beta = 1 + 0{,}25 \times n,\ n = 0, 1, 2, 3, 4.$

۸. الف) $\left.\begin{array}{l} y' = -xz, \\ z' = \frac{y}{z}, \end{array}\right\} y(0) = 0,\ z(0) = 1,\ a = 0,\ b = 1.$

ب) $\left.\begin{array}{l} y' = (z - y)x, \\ z' = (z + y)x, \end{array}\right\} y(0) = 1,\ z(0) = 1,\ a = 0,\ b = 1.$

جدول ۸-۴) مقادیر پارامترهای α، β و γ

مرتبه	α	β	γ	مرتبه	α	β	γ
۱	۰٫۲	۰٫۸	۰٫۵	۱۱	۱٫۰	۰٫۲۵	۲٫۰
۲	۰٫۲۵	۲٫۰	۰٫۵	۱۲	۱٫۰	۰٫۵	۲٫۰
۳	۰٫۲۵	۱٫۰	۰٫۵	۱۳	۱٫۰	۴٫۰	۰٫۵
۴	۰٫۴	۰٫۴	۱٫۰	۱۴	۱٫۶	۰٫۴	۲٫۰
۵	۰٫۵	۲٫۰	۰٫۵	۱۵	۲٫۰	۰٫۵	۲٫۰
۶	۰٫۸	۰٫۲	۲٫۰	۱۶	۲٫۵	۰٫۴	۲٫۵
۷	۰٫۹	۰٫۴	۱٫۵	۱۷	۴٫۰	۱٫۰	۲٫۰
۸	۱٫۰	۱٫۰	۱٫۰	۱۸	۴٫۰	۰٫۲۵	۴٫۰
۹	۱٫۰	۱٫۰	۲٫۰	۱۹	۰٫۹	۱٫۶	۰٫۷۵
۱۰	۱٫۰	۲٫۰	۲٫۰	۲۰	۱٫۰	۰٫۷۵	۲٫۰

$$۹.\quad \left.\begin{aligned} y' &= -yz + \tfrac{\sin x}{x}, \\ z' &= -z^۲ + \tfrac{\alpha x}{۱+x^۲}, \end{aligned}\right\} y(۰) = ۰,\ z(۰) = -۰/۴۱۲۲,\ a = ۰,\ b = ۱,$$

$$\alpha = ۲/۵ + \tfrac{\beta}{۴۰},\ \beta = ۲۵, ۲۶, \ldots, ۴۸.$$

$$۱۰.\quad \left.\begin{aligned} y' &= z - (\alpha y + \beta z)y, \\ z' &= e^y - (y + \alpha z)y, \end{aligned}\right\} y(۰) = ۱,\ z(۰) = ۰,\ a = ۰,\ b = ۱,\ \alpha = ۲+$$

$$+۰/۲۵ \times n,\ n = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴,\ \beta = ۰/۲۵ \times k,\ k = ۱, ۲, \ldots, ۵.$$

۱۱ـ شدت تشعشع در یک ماده رادیواکتیو متناسب با مقدار باقیمانده از ماده رادیواکتیو است. معادله دیفرانسیل مربوطه به شکل $y' = -ky$ می‌باشد. با قرار دادن $k = ۰/۰۱ \frac{۱}{\sec}$ و $t_۰ = ۰$ و $y_۰ = ۱۰۰g$، پیدا کنید که چه مقدار ماده در لحظه $t = ۱۰۰\sec$ باقیمانده است. جواب را با روش اولر برای $h_۱ = ۲۵$ ، $h_۲ = ۱۰$ و $h_۳ = ۵$ پیدا کنید. نتایج بدست آمده برای $t = ۱۰۰\sec$، $y = ۳۶/۷۸۸g$ را باجواب دقیق $y = ۱۰۰e^{-kt}$ مقایسه کنید.

۱۲ـ متحرکی با جرم اولیه $۲۰۰kg$ تحت نیروی $۲۰۰۰N$ در حال حرکت است و در هر ثانیه ۱ کیلوگرم از جرم آن کاسته می‌شود. معادله دیفرانسیل مربوطه به صورت زیر است:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{۲۰۰۰}{۲۰۰ - t}$$

با فرض اینکه در لحظه $t = ۰$ بی‌حرکت باشد، سرعت آن‌را پس از ۵۰ ثانیه محاسبه کنید. پاسخ را با روش اولر برای $h_۱ = ۱۰$، $h_۲ = ۵$ و $h_۳ = ۲$ پیدا کنید. نتایج محاسبات را با جواب دقیق $v = ۲۰۰۰ \ln \frac{۲۰۰}{۲۰۰-t}$ برای $t = ۵۰\sec$، $v = ۵۷۵/۳۶ \frac{m}{\sec}$ مقایسه کنید. .

۱۳ـ اگر فرض کنیم که جسم متحرک مسئله ۱۲ در برابر مقاومت هوا که مقدار عددی آن دو برابر مقدار سرعت v است قرار دارد، آنگاه معادله دیفرانسیل مربوط به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{۲۰۰ - ۲v}{۲۰۰ - t}$$

سرعت آن‌را برای $t = ۵۰\sec$ پیدا کنید اگر در $t = ۰$ جسم در حالت سکون باشد، پاسخ را به روش اولر برای $h_۱ = ۱۰$ و $h_۲ = ۵$ محاسبه کنید. حل دقیق معادله به صورت $v = ۱۰t - \frac{t^۲}{۴۰}$ می‌باشد، بنابراین $v(۵۰) = ۴۳۷/۵ \frac{m}{\sec}$.

۵ـ۸ـ بهبود روش اولر

روش بهبود یافته اول اولر ([۱۸] را ببینید) برای حل مسئله (۱) و (۲) بخش ۸ـ۴ به این صورت است که

در ابتدا مقادیر بینابینی محاسبه می‌شود:

$$\left.\begin{array}{l} x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}, \\ y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f_i, \\ f_{i+\frac{1}{2}} = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}), \end{array}\right\} \qquad (۴۲\text{-}۸)$$

و سپس قرار می‌دهیم:

$$y_{i+1} = y_i + h f_{i+1/2} \qquad (۴۳\text{-}۸)$$

با استفاده از روش بهبود یافته دوم (روش اولرـ کوشی[۱۸] را ببینید)، ابتدا تقریب‌های غیر دقیق را بدست می‌آوریم:

$$\widetilde{y}_{i+1} = y_i + h f_i \qquad (۴۴\text{-}۸)$$

و سپس $\widetilde{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \widetilde{y}_{i+1})$ را محاسبه کرده و بطور تقریبی قرار می‌دهیم:

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{f_i + \widetilde{f}_{i+1}}{2} \qquad (۴۵\text{-}۸)$$

عبارت باقیمانده روش‌های بهبود یافته اول و دوم اولر از مرتبه $o(h^3)$ است (برای هر فاصله مورد نظر [۲۶] را ببینید). خطا در نقطه x_n می‌تواند توسط محاسبه مضاعف برآورد شود: محاسبات با فاصله $\frac{h}{2}$ تکرار شده و خطای مقدار دقیقتر y_n^* (برای $\frac{h}{2}$) بطور تقریبی به صورت زیر برآورد می‌شود:

$$|y_n^* - y(x_n)| \approx \frac{1}{3} |y_n^* - y_n|$$

که در آن $y(x)$ حل دقیق معادله دیفرانسیل است.

مثال ۸ـ۱۱ـ با استفاده از روش‌های بهبود یافته اول و دوم، معادله زیر را با شرط اولیه $y(0) = 1$ و فاصله $h = 0/2$ انتگرال‌گیری کنید.

$$y' = y - \frac{2x}{y}$$

نتایج بدست آمده را با جواب دقیق مقایسه کنید.

حل‌ـ روش بهبود یافته اول‌ـ نتیجه محاسبات در جدول ۸-۵ نشان داده شده است.

جدول ۸-۵) حل معادله (۸-۴۶) به روش بهبود یافته اول اولر

i	x_i	y_i	$\frac{h}{۲}f_i$	$x_{i+۱/۲}$	$y_{i+۱/۲}$	$\Delta y_i = hf_{i+۱/۲}$
۰	۰	۱	۰٫۱	۰٫۱	۱٫۱	۰٫۱۸۳۶
۱	۰٫۲	۱٫۱۸۳۶	۰٫۰۸۴۶	۰٫۳	۱٫۲۶۸۲	۰٫۱۵۹۰
۲	۰٫۴	۱٫۳۴۲۶	۰٫۰۷۴۷	۰٫۵	۱٫۴۱۷۳	۰٫۱۴۲۴
۳	۰٫۶	۱٫۴۸۵۰	۰٫۰۶۷۷	۰٫۷	۱٫۵۵۲۷	۰٫۱۳۰۲
۴	۰٫۸	۱٫۶۱۵۲	۰٫۰۶۲۵	۰٫۹	۱٫۶۷۷۷	۰٫۱۲۱۰
۵	۱٫۰	۱٫۷۳۶۲				

جدول به صورت زیر پر می‌شود. در سطر اول می‌نویسیم $i = ۰$، $x_۰ = ۰$ و $y_۰ = ۱$. مقدار $f_۰ = f(x_۰, y_۰) = ۱$ را محاسبه می‌کنیم. سپس به وسیله فرمول (۸-۴۲) برای $x_{۱/۲} = ۰٫۱$ بدست می‌آوریم:

$$y_{۱/۲} = ۱ + ۰٫۱ = ۱٫۱$$

سپس بدست می‌آوریم $f(x_{۱/۲}, y_{۱/۲}) = ۰٫۹۱۸۲$ و $\Delta y_۰ = hf(x_{۱/۲}, y_{۱/۲}) = ۰٫۲ \times ۰٫۹۱۸۲ = ۰٫۱۸۳۶$. حال با استفاده از فرمول (۸-۴۳) داریم $y_۱ = y_۰ + \Delta y_۰ = ۱٫۱۸۳۶$. با استفاده از این نتیجه سطر دوم جدول را پر می‌کنیم. $i = ۱$، $x_۱ = ۰٫۲$ و $y_۱ = ۱٫۱۸۳۶$ و مقدار $\frac{h}{۲}f(x_۱, y_۱) = ۰٫۰۸۴۶$ را بدست می‌آوریم. سپس با فرمول (۸-۴۲) برای $x_{۳/۲} = ۰٫۳$ محاسبه می‌کنیم:

$$y_{۳/۲} = ۱٫۱۸۳۶ + ۰٫۰۸۴۶ = ۱٫۲۶۸۲$$

مقادیر $f(x_{۳/۲}, y_{۳/۲}) = ۰٫۷۹۴۲$ و $\Delta y_۱ = hf(x_{۳/۲}, y_{۳/۲}) = ۰٫۲ \times ۰٫۷۹۴۲ = ۰٫۱۵۹۰$ را بدست می‌آوریم. سپس با فرمول (۸-۴۳) داریم:

$$y_۲ = y_۱ + \Delta y_۱ = ۱٫۱۸۳۶ + ۰٫۱۵۹۰ = ۱٫۳۴۲۶$$

برای $i = ۲, ۳, ۴, ۵$ جدول را بطریقه مشابه تکمیل می‌کنیم.

روش بهبود یافته دوم (روش اولر-کوشی).- نتایج محاسبات به کمک این روش در جدول ذیل آمده است. این جدول بطریق زیر تشکیل شده است. سطر اول را می‌نویسیم:

$$y_۰ = ۱, x_۰ = ۰, i = ۰$$

بدست می‌آوریم $f_۰ = f(x_۰, y_۰) = ۱$ و توسط فرمول (۸-۴۴) محاسبه می‌کنیم

$$\widetilde{y}_۱ = ۱ + ۰٫۲ \times ۱ = ۱٫۲$$

و مقادیر $\frac{h}{2}f_0 = 0.1$، $x_1 = 0.2$ و $\widetilde{y}_1 = 1.2$ را در ستون‌های متناظر در سطر اول وارد می‌کنیم. سپس بدست می‌آوریم

$$\frac{h}{2}f(x,\widetilde{y}_1) = 0.1(1.2 - \frac{0.4}{1.2}) = 0.0867$$

و به وسیله فرمول (۸-۴۵) خواهیم داشت:

$$\Delta y_0 = \frac{h}{2}(f_0 + \widetilde{f}_1) = 0.1 + 0.0867 = 0.1867$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0.1867 = 1.1867.$$

حال با سطر دوم از جدول $i = 1$، $x_1 = 0.2$ و $y_1 = 1.1867$ ادامه می‌دهیم. محاسبه می‌کنیم:

$$f_1 = f(x_1, y_1) = 1.1867 - \frac{0.4}{1.1867} = 0.8497$$

$$\widetilde{y}_2 = 1.1867 + 0.1699 = 1.3566$$

و ستون به ستون پر می‌کنیم: $\frac{h}{2}f_1 = 0.0850$، $x_2 = 0.4$ و $\widetilde{y}_2 = 1.3566$.

جدول ۸-۶) حل معادله (۸-۴۶) با فرمول اولر-کوشی

i	x_i	y_i	$\frac{h}{2}f_i$	x_{i+1}	$\widetilde{y}_{i+1}$	$\frac{h}{2}\widetilde{f}_{i+1}$	$\Delta y_i = \frac{h}{2}(f_i + \widetilde{f}_{i+1})$
۰	۰	۱	۰٫۱	۰٫۲	۱٫۲	۰٫۰۸۶۷	۰٫۱۸۶۷
۱	۰٫۲	۱٫۱۸۶۷	۰٫۰۸۵۰	۰٫۴	۱٫۳۵۶۶	۰٫۰۷۶۷	۰٫۱۶۱۷
۲	۰٫۴	۱٫۳۴۸۴	۰٫۰۷۵۵	۰٫۶	۱٫۴۹۹۳	۰٫۰۶۹۹	۰٫۱۴۵۴
۳	۰٫۶	۱٫۴۹۳۸	۰٫۰۶۹۰	۰٫۸	۱٫۶۱۸۰	۰٫۰۶۵۱	۰٫۱۳۴۱
۴	۰٫۸	۱٫۶۲۷۲	۰٫۰۶۴۵	۱٫۰	۱٫۷۵۶۹	۰٫۰۶۱۸	۰٫۱۲۶۳
۵	۱٫۰	۱٫۷۵۴۲					

با استفاده از مقادیر بدست آمده برای x_2 و $\widetilde{y}_2$ محاسبه می‌کنیم $\frac{h}{2}f(x_2,\widetilde{y}_2) = 0.0767$ و به وسیله فرمول (۸-۴۵) بدست می‌آوریم:

$$\Delta y_1 = \frac{h}{2}(f_1 + \widetilde{f}_2) = 0.0850 + 0.0767 = 0.1617$$
$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1.1867 + 0.1617 = 1.3484$$

برای $i = 2, 3, 4, 5$ جدول را بطریقه مشابه پر می‌کنیم. روش‌های بهبود یافته اولر نسبت به روش معمولی اولر بسیار دقیقتر هستند، همانطورکه در جدول ۸-۷ که مقادیر حل دقیق معادله (۸-۴۶) و حل‌های تقریبی آمده در جدول‌های ۸-۲، ۸-۵ و ۸-۶ را نشان می‌دهد، دیده می‌شود.

جدول ۸-۷) حل دقیق معادله (۸-۴۶) و حل‌های تقریبی بدست آمده توسط روش اولر و روش‌های بهبود یافته اولر

x	۰٫۲	۰٫۴	۰٫۶	۰٫۸	۱٫۰
حل دقیق Exaet solution	۱٫۱۸۳۲	۱٫۳۴۱۶	۱٫۴۸۳۲	۱٫۶۱۲۴	۱٫۷۳۲۰
روش اولر Euler's method	۱٫۲۰۰۰	۱٫۳۷۳۳	۱٫۵۲۹۴	۱٫۶۷۸۶	۱٫۸۲۳۷
روش بهبود یافته اول اولر Euler's first improved method	۱٫۱۸۳۶	۱٫۳۴۲۶	۱٫۴۸۵۰	۱٫۶۱۵۲	۱٫۷۳۶۲
The Euler - Cauchy method روش اولر-کوشی	۱٫۱۸۶۷	۱٫۳۴۸۴	۱٫۴۹۳۸	۱٫۶۲۷۲	۱٫۷۵۴۲

مسائل

با بکارگیری یکی از روش‌های بهبود یافته اولر حل عددی هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر را با شرط اولیه داده شده و فاصله داده شده، پیدا کنید.

۱. $y' = x + y^{۲},\ y(۰) = ۰,\ h = ۰٫۰۳;\ \ y(۰٫۳) = ?$

۲. $y' = ۱ + x - y^{۲},\ y(۰) = ۱,\ h = ۰٫۰۲;\ \ y(۰٫۱) = ?$

۳. $y' = x^{۲} - y^{۲},\ y(۰) = ۰,\ h = ۰٫۱;\ \ y(۱) = ?$

۴. $y' = xy - ۰٫۱y^{۲},\ y(۰) = ۰,\ h = ۰٫۰۲;\ \ y(۰٫۲) = ?$

۵. $y' = x^{۳} + y^{۲},\ y(۰) = ۰٫۵,\ h = ۰٫۱;\ \ y(۰٫۵) = ?$

۶. $y' = x + \sqrt{y},\ y(۰٫۵) = ۰٫۷۲۴۰,\ h = ۰٫۱;\ \ y(۱٫۵) = ?$

۷. $y' = ۲x + \cos y,\ y(۰) = ۰,\ h = ۰٫۰۲;\ \ y(۰٫۱) = ?$

۸. $y' = e^{x} - y^{۲},\ y(۰) = ۰,\ h = ۰٫۰۴;\ \ y(۰٫۴) = ?$

۹. $y' = \lambda \ln y - y \ln x,\ y(۱) = ۱,\ h = ۰٫۱;\ \ y(۱٫۶) = ?$

۱۰. $y' = ۰٫۱|\sqrt[۳]{y} + \ln(x+y) - ۱|,\ y(-۱) = ۲,\ h = ۰٫۲;\ \ y(۱) = ?$

۱۱ـ مسئله ۱۱ بخش ۸ـ۴ را به روش بهبود یافته اول و دوم اولر برای $h_۱ = ۲۰$ و $h_۲ = ۱۰$ حل کنید.

۸ـ۶ـ روش کامل اولر با یک فرآیند تکرار

روش اولرـکوشی برای حل مسئله (۸-۲۶) و (۸-۲۷) هنوز هم می‌تواند دقیقتر شود (با بکارگیری یک فرآیند تکرار برای هر مقدار y_i- [۴۵] را ببینید).یعنی با شروع از یک تقریب غیر دقیق

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i) \tag{۸-۴۶}$$

اجازه دهید یک فرآیند تکرار تشکیل دهیم:

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)})] \tag{۸-۴۷}$$

عملیات آنقدر تکرار می‌شود تا وقتی که ارقام اعشاری متناظر در دو تقریب متوالی $y_{i+1}^{(k)}$ و $y_{i+1}^{(k+1)}$ تطابق داشته باشند. آنگاه قرار می‌دهیم:

$$y_{i+1} \approx y_{i+1}^{(k+1)}$$

بطور معمول برای مقدار h به اندازه کافی کوچک تکرارها به سرعت متقارب می‌شوند. اگر پس از سه چهار تکرار تعداد ارقام اعشاری مورد نظر مطابق نشدند، فاصله h می‌بایستی کاهش یابد.

مثال ۸ـ۱۲ـ با استفاده از روش تکرار با دقت 10^{-4} مقدار $y(0/1)$ را با حل معادله

$$y' = x + y$$

و با شرط اولیه $y(0) = 1$ بدست آورید.

حل‌ـ فاصله را $h = 0/05$ می‌گیریم. با فرمول (۸-۴۷) محاسبه می‌کنیم:

$$y_1^{(0)} = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1/0 + 0/05 \times 1 = 1/05$$

سپس با فرمول (۸-۴۸) متوالیاً داریم:

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= 1 + \tfrac{0/05}{2}(1 + 1/10) = 1/0525, \\ y_1^{(2)} &= 1 + \tfrac{0/05}{2}(1 + 1/1025) = 1/05256. \end{aligned}$$

دقت لازم بدست آمده است. با گرد کردن نتیجه بدست آمده تا چهار رقم اعشار خواهیم داشت:

$$y_1 = 1/0526$$

حال با بکارگیری فرمول (۸-۴۷) برای $i = 1$ محاسبه می‌کنیم:

$$y_2^{(0)} = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1/0526 + 0/05 \times 1/1026 = 1/1077$$

با کمک همان فرآیند تکرار (۸-۴۸) بدست می‌آوریم:

$$y^{(۱)} = ۱/۰۵۲۶ + ۰/۰۲۵(۱/۱۰۲۶ + ۱/۲۰۷۷) = ۱/۱۱۰۳۶,$$
$$y_۲^{(۲)} = ۱/۰۵۲۶ + ۰/۰۲۵(۱/۱۰۲۶ + ۱/۲۱۰۴) = ۱/۱۱۰۴۲.$$

از اینرو $y_۲ = ۱/۱۱۰۴$.

به منظور مقایسه اجازه بدهید مقدار دقیق $y(۰/۱)$ را توسط پاسخ تجلیلی $y = ۲e^x - x - ۱$ محاسبه کنیم:

$$y(۰/۱) = ۲e^{۰/۱} - ۱/۱ = ۱/۱۱۰۳$$

مسائل

با بکارگیری روش اولر همراه با فرآیند تکرار، پاسخ‌های معدلات زیر را برای شرایط اولیه داده شده در بازه $[۰, ۱]$ و فاصله $h = ۰/۱$ بدست آورید (با دقت $۱۰^{-۴}$).

۱. $y' = ۱ - \sin(\alpha x + y) + \frac{\beta y}{۲+x}, \quad y(۰) = ۰, \quad \alpha = ۱ + ۰/۲۵ \times n, \quad n = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, \quad \beta = -۰/۳ + ۰/۲ \times k, \quad k = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴.$

۲. $y' = \frac{\cos y}{\alpha + x} + \beta y^۲, \quad y(۰) = ۰, \quad \alpha = ۱ + ۰/۲۵ \times k, \quad k = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, \quad \beta = -۰/۵ + ۰/۲ \times n, \quad n = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴.$

۳. $y' = -y^۲ + \frac{\beta x}{۱+x^۲}, \quad y(۰) = -۰/۴۱۲۲, \quad \beta = ۲/۵ + \frac{\alpha}{۴۰}, \quad \alpha = ۱۴, ۱۵, \ldots, ۳۷.$

۸ـ۷ـ روش رانگ‌ـکوتا[۱]

مسئله کوشی را برای یک معادله دیفرانسیل به شکل

$$y' = f(x, y) \qquad (۴۸\text{-}۸)$$

با شرط اولیه

$$y(x_۰) = y_۰ \qquad (۴۹\text{-}۸)$$

در نظر بگیرید.

1) Runge-Kutta

مقدار تقریبی y_i را به عنوان جواب یکتا در نقطه x_i در نظر می‌گیریم. طبق روش رانگ-کوتا ([۲]، [۱۳] و [۱۸] را ببینید) مقدار تقریبی y_{i+1} در نقطه بعدی $x_{i+1} = x_i + h$ با فرمول‌های زیر محاسبه می‌شود:

$$\left.\begin{array}{l} y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \\ \Delta y_i = \frac{1}{6}(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}), \end{array}\right\} \tag{۵۰-۸}$$

که در آن

$$\left.\begin{array}{l} K_1^{(i)} = hf(x_i, y_i), \\ K_2^{(i)} = hf(x_i + \frac{h}{2}, \quad y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}), \\ K_3^{(i)} = hf(x_i + \frac{h}{2}, \quad y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}), \\ K_4^{(i)} = hf(x_i + h, \quad y_i + K_3^{(i)}). \end{array}\right\} \tag{۵۱-۸}$$

بهتر است که تمامی محاسبات را طبق روند محاسبه نشان داده شده در جدول ۸-۸ انجام دهیم. جدول به صورت زیر پر می‌شود:

(۱) مقادیر عددی x_0 و y_0 را در سطر اول می‌نویسیم.

(۲) مقدار $f(x_0, y_0)$ را محاسبه و نتیجه را در h ضرب کرده و حاصل را به عنوان $K_1^{(0)}$ در جدول وارد می‌کنیم.

(۳) مقادیر عددی $x_0 + \frac{h}{2}$ و $y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}$ را در سطر دوم می‌نویسیم.

(۴) مقدار $f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2})$ را محاسبه و در h ضرب می‌کنیم و نتیجه را به عنوان $K_2^{(0)}$ در جدول وارد می‌کنیم.

(۵) مقادیر عددی $x_0 + \frac{h}{2}$ و $y + \frac{K_2^{(0)}}{2}$ را در سطر سوم وارد می‌کنیم.

(۶) مقدار $f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2})$ را محاسبه و در h ضرب می‌کنیم و نتیجه را به عنوان $K_3^{(0)}$ در جدول وارد می‌کنیم.

(۷) مقادیر عددی $x_0 + h$ و $y_0 + K_3^{(0)}$ را در سطر چهارم می‌نویسیم.

(۸) مقدار $f(x_0 + h, y_0 + K_3^{(0)})$ را محاسبه و در h ضرب می‌کنیم و نتیجه را به عنوان $K_4^{(0)}$ در جدول وارد می‌کنیم.

(۹) اعداد $K_1^{(0)}$، $2K_2^{(0)}$، $2K_3^{(0)}$ و $K_4^{(0)}$ را در ستون Δy وارد می‌کنیم.

(۱۰) با جمع اعداد ستون Δy و تقسیم آن بر ۶ نتیجه را به عنوان Δy_0 وارد جدول می‌کنیم.

جدول ۸-۸) روند محاسبات برای روش رانگ-کوتا

i	x	y	$K = hf(x,y)$	Δy
0	x_0	y_0	$K_1^{(0)}$	$K_1^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}$	$K_2^{(0)}$	$2K_2^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}$	$K_3^{(0)}$	$2K_3^{(0)}$
	$x_0 + h$	$y_0 + K_3^{(0)}$	$K_4^{(0)}$	$K_4^{(0)}$
				Δy_0
1	x_1	y_1		

(۱۱) محاسبه می‌کنیم $y_1 = y_0 + \Delta y_0$. سپس به همین ترتیب محاسبات را ادامه می‌دهیم (با در نظر گرفتن نقطه (x_1, y_1) به عنوان نقطه اولیه).

نتایج محاسبه عناصر سمت راست $f(x,y)$ در جدول ۸-۸ آورده شده است (مثال‌های ۸-۱۳ و ۸-۱۴ را ببینید). امّا چون محاسبات سخت و گیج کننده است بهتر است که نتایج را در جدولی جدگانه وارد کنیم (مثال ۸-۱۵ را ببینید).

توجه داشته باشید که فاصله محاسبه ممکن است در گذر از یک نقطه به نقطه بعدی تغییر کند.

جهت وارسی h به عنوان یک فاصله مناسب توصیه می‌شود که نسبت

$$\theta = \left| \frac{K_2^{(i)} - K_3^{(i)}}{K_1^{(i)} - K_2^{(i)}} \right| \tag{۸-۵۲}$$

را محاسبه کنید ([۱۸] را ببینید). مقدار θ نمی‌بایستی از چند صدم بیشتر شود در غیر این صورت از h می‌بایستی کاسته شود. البته دقت روش رانگ‌ـکوتا h^4 است (در کل بازه $[x_0, X]$).

برآورد خطا در این روش بسیار مشکل است. خطا را می‌توان بطور غیر دقیق به کمک محاسبه مضاعف (نصف کردن فاصله نقاط h) با فرمول

$$|y_n^* - y(x_n)| \approx \frac{|y_n^* - y_n|}{15}$$

برآورد کرد که در آن $y(x_n)$ مقدار دقیق جواب معادله (۸-۴۹) برای نقطه x_n بوده و y_n^* و y_n مقادیر تقریبی بدست آمده برای فاصله‌های $\frac{h}{2}$ و h است.

مثال ۸ـ۱۳ـ با استفاده از روش رانگ‌ـکوتا جواب معادله

$$y' = 0/25y^2 + x^2 \tag{۸-۵۳}$$

را با شرط اولیه $y(0) = -1$ در بازه $[0, 0/5]$ و با در نظر گرفتن $h = 0/1$ پیدا کنید.

جدول ۸-۹) حل معادله (۸-۵۳) به روش رانگ‌ـکوتا

i	x	y	$0.25y$	$K = hf(x, y)$	Δy	$\theta = \lvert\frac{K_2 - K_3}{K_1 - K_2}\rvert$
۰	۰ ۰٫۰۵ ۰٫۰۵ ۰٫۱	−۱ −۰٫۹۸۷۵۰ −۰٫۹۸۷۶۹ −۰٫۹۷۵۳۶	−۰٫۲۵ −۰٫۲۴۶۸۸ −۰٫۲۴۶۹۲ −۰٫۲۴۳۸۴	۰٫۰۲۵ ۰٫۰۲۴۶۲۹ ۰٫۰۲۴۶۳۸ ۰٫۰۲۴۷۸۳	۰٫۰۲۵ ۰٫۰۴۹۲۵۸ ۰٫۰۴۹۲۷۶ ۰٫۰۲۴۷۸۳	۰٫۰۲۴
					۰٫۰۲۴۷۲	
۱	۰٫۱ ۰٫۱۵ ۰٫۱۵ ۰٫۲	−۰٫۹۷۵۲۸ −۰٫۹۶۲۸۹ −۰٫۹۶۲۵۷۵ −۰٫۹۴۹۸۷	−۰٫۲۴۳۸۲ −۰٫۲۴۰۷۲ −۰٫۲۴۰۶۴ −۰٫۲۳۷۴۷	۰٫۰۲۴۷۷۹ ۰٫۰۲۵۴۲۹ ۰٫۰۲۵۴۱۳ ۰٫۰۲۶۵۵۷	۰٫۰۲۴۷۷۹ ۰٫۰۵۰۸۵۸ ۰٫۰۵۰۸۲۶ ۰٫۰۲۶۵۵۷	۰٫۰۲۵
					۰٫۰۲۵۵۰	
۲	۰٫۲ ۰٫۲۵ ۰٫۲۵ ۰٫۳	−۰٫۹۴۹۷۸ −۰٫۹۳۶۵۰ −۰٫۹۳۵۶۹ −۰٫۹۲۱۶۴	−۰٫۲۳۷۴۵ −۰٫۲۳۴۱۳ −۰٫۲۳۳۹۲ −۰٫۲۳۰۴۱	۰٫۰۲۶۵۵۳ ۰٫۰۲۸۱۷۶ ۰٫۰۲۸۱۳۸ ۰٫۰۳۰۲۳۶	۰٫۰۲۶۵۵۳ ۰٫۰۵۶۳۵۲ ۰٫۰۵۶۲۷۶ ۰٫۰۳۰۲۳۶	۰٫۰۲۳
					۰٫۰۲۸۲۴	
۳	۰٫۳ ۰٫۳۵ ۰٫۳۵ ۰٫۴	−۰٫۹۲۱۵۴ −۰٫۹۰۶۴۲ −۰٫۹۰۵۱۴ −۰٫۸۸۸۸۱	−۰٫۲۳۰۳۹ −۰٫۲۲۶۶۱ −۰٫۲۲۶۲۹ −۰٫۲۲۲۲۰	۰٫۰۳۰۲۳۱ ۰٫۰۳۲۷۹۰ ۰٫۰۳۲۷۳۲ ۰٫۰۳۵۷۴۳	۰٫۰۳۰۲۳۱ ۰٫۰۶۵۵۸۰ ۰٫۰۶۵۴۶۴ ۰٫۰۳۵۷۴۹	۰٫۰۲۳
					۰٫۰۳۲۸۴	
۴	۰٫۴ ۰٫۴۵ ۰٫۴۵ ۰٫۵	−۰٫۸۸۸۷۰ −۰٫۸۷۰۸۳ −۰٫۸۶۹۱۰ −۰٫۸۴۹۵۷	−۰٫۲۲۲۱۸ −۰٫۲۱۷۷۱ −۰٫۲۱۷۲۸ −۰٫۲۱۲۳۹	۰٫۰۳۵۷۴۵ ۰٫۰۳۹۲۰۹ ۰٫۰۳۹۱۳۴ ۰٫۰۴۳۰۷	۰٫۰۳۵۷۴۵ ۰٫۰۷۸۴۱۸ ۰٫۰۷۸۲۶۸ ۰٫۰۴۳۰۴۴	۰٫۰۲۲
					۰٫۰۳۹۲۵	
۵	۰٫۵	−۰٫۸۴۹۴۵				

حل‌ـ نتایج محاسبه در جدول ۸-۹ آمده است که به ترتیب زیر تشکیل شده است.

برای $i = 0$:

(۱) در سطر اول می‌نویسیم $x_0 = 0$، $y_0 = -1$.

(۲) مقدار $f(x_0, y_0) = 0.25$ و سپس $K_1^{(0)} = 0.1 \times 0.25 = 0.025$ را محاسبه می‌کنیم.

(۳) در سطر دوم می‌نویسیم: $x_0 + \frac{h}{2} = 0.05$ و $y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2} = -0.98750$.

(۴) مقدار $f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}) = 0.24629$ و سپس $K_2^{(0)} = 0.024629$ را محاسبه می‌کنیم.

(۵) در سطر سوم می‌نویسیم: $x_0 + \frac{h}{2} = 0.05$ و $y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2} = -0.98769$.

(۶) مقدار $f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}) = 0.25 \times 0.98769^2 + 0.05^2$ و سپس $K_3^{(0)} = 0.024638$ را محاسبه می‌کنیم.

(۷) در سطر چهارم می‌نویسیم: $x_۰ + h = ۰٫۱$ و $y_۰ + K_۳^{(۰)} = -۰٫۹۷۵۳۶$.

(۸) مقدار $f(x_۰ + h, y_۰ + K_۳^{(۰)}) = ۰٫۲۵ \times ۰٫۹۷۵۳۶^۲ + ۰٫۱^۲ \approx ۰٫۲۴۷۸۳$ و سپس $K_۴^{(۰)} = ۰٫۰۲۴۷۸۳$ را محاسبه می‌کنیم.

(۹) اعداد $K_۱^{(۰)}$، $۲K_۲^{(۰)}$، $۲K_۳^{(۰)}$ و $K_۴^{(۰)}$ را تشکیل و در ستون Δy وارد می‌کنیم.

(۱۰) مقدار $\Delta y_۰ = \frac{۱}{۶} \times ۰٫۱۴۸۳۱۷ = ۰٫۰۲۴۷۲$ را محاسبه می‌کنیم.

(۱۱) مقدار $y_۱ = y_۰ + \Delta y_۰ = -۰٫۹۷۵۲۸$ را بدست می‌آوریم.

مقادیر $x_۱ = ۰٫۱$ و $y_۱ = -۰٫۹۷۵۲۸$ را در سطر $i = ۱$ وارد کرده و محاسبات را با فرمول‌های (۸-۵۱) و (۸-۵۲) دوباره انجام می‌دهیم. ستون آخر جدول مقادیر θ بدست آمده توسط فرمول (۸-۵۳) را در بر دارد.

مثال ۸-۱۴- با استفاده از روش رانگ-کوتا با دقت ۵×۱۰^{-۶} حل معادله دیفرانسیل

$$y' = \frac{\sin h(۰٫۵y + x)}{۱٫۵} + ۰٫۵y \qquad (۸-۵۴)$$

را با شرط اولیه $y(۰) = ۰$ در بازه $[۰, ۰٫۲]$ بدست آورید.

جدول ۸-۱۰) حل معادله (۸-۵۴) به روش رانگ-کوتا ($h = ۰٫۰۵$)

x	y	$۰٫۵y$	$۰٫۵y + x$	$sh(۰٫۵ + x)$	$f(x, y)$	$K = hf(x, y)$	Δy
۰ ۰٫۰۲۵ ۰٫۰۲۵ ۰٫۰۵	۰ ۰ ۰٫۰۰۰۴۱۷ ۰٫۰۰۰۸۵۱	۰ ۰ ۰٫۰۰۰۲۰۸ ۰٫۰۰۰۴۲۶	۰ ۰٫۰۲۵ ۰٫۰۲۵۲۰۸ ۰٫۰۵۰۴۲۶	۰ ۰٫۰۲۵۰۰ ۰٫۰۲۵۲۱ ۰٫۰۵۰۴۵	۰ ۰٫۰۱۶۶۷ ۰٫۰۱۷۰۲ ۰٫۰۳۴۰۶	۰ ۰٫۰۰۰۸۳۴ ۰٫۰۰۰۸۵۱ ۰٫۰۰۱۷۰۳	۰٫۰۰۰۸۴۶
۰٫۰۵ ۰٫۰۷۵ ۰٫۰۷۵ ۰٫۱	۰٫۰۰۰۸۴۶ ۰٫۰۰۱۶۹۷ ۰٫۰۰۲۱۳۲ ۰٫۰۰۳۴۳۸	۰٫۰۰۰۴۲۳ ۰٫۰۰۰۸۴۸ ۰٫۰۰۱۰۶۶ ۰٫۰۰۱۷۱۹	۰٫۰۵۰۴۲۳ ۰٫۰۷۵۸۴۸ ۰٫۰۷۶۰۶۶ ۰٫۱۰۱۷۱۹	۰٫۰۵۰۴۴ ۰٫۰۷۵۹۲ ۰٫۰۷۶۱۴ ۰٫۱۰۱۹۰	۰٫۰۳۴۰۵ ۰٫۰۵۱۴۶ ۰٫۰۵۱۸۳ ۰٫۰۶۹۶۵	۰٫۰۰۱۷۰۲ ۰٫۰۰۲۵۷۳ ۰٫۰۰۲۵۹۲ ۰٫۰۰۳۴۸۲	۰٫۰۰۲۵۸۶
۰٫۱	۰٫۰۰۳۴۳۲						

حل- برای انتخاب فاصله جواب را برای نقطه $x = ۰٫۱$ با هر دو فاصله $h = ۰٫۱$ و $h = ۰٫۰۵$ محاسبه می‌کنیم. وقتی محاسبات با $h = ۰٫۱$ انجام می‌شود متوالیاً داریم:

$$K_۱^{(۰)} = ۰,$$
$$K_۲^{(۰)} = ۰٫۱ \times \frac{\sin h ۰٫۰۵}{۱٫۵} = ۰٫۰۰۳۳۳۵,$$
$$K_۳^{(۰)} = ۰٫۱ \times \frac{\sin h(۰٫۵ \times ۰٫۰۰۱۶۶۷ + ۰٫۰۵)}{۱٫۵} + ۰٫۵ \times ۰٫۰۰۱۶۶۷ = ۰٫۰۰۳۴۷۵,$$
$$K_۴^{(۰)} = ۰٫۱ \times \frac{\sin h(۰٫۵ \times ۰٫۰۰۳۴۷۵ + ۰٫۱)}{۱٫۵} + ۰٫۵ \times ۰٫۰۰۳۴۷۵ = ۰٫۰۰۶۹۶۹.$$

و از آن جا $\Delta y_۰ = ۰٫۰۰۳۴۳۲$ و سپس $y_۱ = y_۰ + \Delta y_۰ = ۰٫۰۰۳۴۳۲$ را محاسبه می‌کنیم. سپس مقدار $y(۰٫۱)$ را به عنوان محاسبات با $h = ۰٫۰۵$ بدست می‌آوریم (جدول ۸-۱۰ را ببینید).

چون نتایج بدست آمده با دقت مورد نظر مطابقت دارد، محاسبه را با یکی از دو فاصله $h = ۰٫۱$ و $h = ۰٫۲$ ادامه می‌دهیم. نتایج محاسبات بعدی در جدول ۸-۱۱ و ۸-۱۲ آمده است. مقایسه نتایج بدست آمده برای $h = ۰٫۱$ و $h = ۰٫۲$ نشان می‌دهد که ما می‌توانیم با دقت ۵×۱۰^{-۶} قرار دهیم $y(۰٫۲) \approx ۰٫۰۱۴۱۵۸$. برای محاسبات بعدی فاصله h می‌بایستی دوباره مضاعف شود.

جدول ۸-۱۱) حل معادله (۸-۵۴) با روش رانگ‌ـکوتا $(h = ۰٫۱)$

x	y	$۰٫۵y$	$۰٫۵y + x$	$sh(۰٫۵y + x)$	$f(x, y)$	$K = hf(x, y)$	Δy
۰٫۱	۰٫۰۰۳۴۳۲	۰٫۰۰۱۷۱۷	۰٫۱۰۱۷۱۷	۰٫۱۰۱۹۰	۰٫۰۶۹۶۵	۰٫۰۰۶۹۶۵	۰٫۰۱۰۷۲۶
۰٫۱۵	۰٫۰۰۶۹۱۴	۰٫۰۰۳۴۵۷	۰٫۱۵۳۴۵۷	۰٫۱۵۴۰۶	۰٫۱۰۶۱۷	۰٫۰۱۰۶۱۷	
۰٫۱۵	۰٫۰۰۸۷۴۰	۰٫۰۰۴۳۷۰	۰٫۱۵۴۳۷۰	۰٫۱۵۴۹۹	۰٫۱۰۷۷۰	۰٫۰۱۰۷۷۰	
۰٫۲	۰٫۰۱۴۲۰۲	۰٫۰۰۷۱۰۱	۰٫۲۰۷۱۰۱	۰٫۲۰۸۵۸	۰٫۱۴۶۱۵	۰٫۰۱۴۶۱۵	
۰٫۲	۰٫۰۱۴۱۵۸						

جدول ۸-۱۲) حل معادله (۸-۵۴) با روش رانگ‌ـکوتا $(h = ۰٫۲)$

x	y	$۰٫۵y$	$۰٫۵y + x$	$sh(۰٫۵y + x)$	$f(x, y)$	$K = hf(x, y)$	Δy
۰٫۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰٫۰۱۴۱۵۵
۰٫۱	۰	۰	۰٫۱	۰٫۱۰۰۱۷	۰٫۰۶۶۷۸	۰٫۰۱۳۳۵۶	
۰٫۱	۰٫۰۰۶۶۷۸	۰٫۰۰۳۳۳۹	۰٫۱۰۳۳۳۹	۰٫۱۰۳۵۲	۰٫۰۷۲۳۵	۰٫۰۱۴۴۷۰	
۰٫۲	۰٫۰۱۴۴۷۰	۰٫۰۰۷۲۳۵	۰٫۲۰۷۲۳۵	۰٫۲۰۸۷۲	۰٫۱۴۶۳۸	۰٫۰۲۹۲۷۶	
۰٫۲	۰٫۰۱۴۱۵۵						

توجه ـ روش رانگ‌ـکوتا بطور مشابه برای حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل و معادله‌های مرتبه بالا بکار گرفته می‌شود (که برای معادله‌های بامرتبه بالا ابتدا بایستی آن را به دستگاهی از معادلات رتبه اول تبدیل کرد).

مثال ۸ـ۱۵ـ برای دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -۲x + ۵z, \\ \frac{dy}{dt} &= -(۱ - \sin t)x - y + ۳z, \\ \frac{dz}{dt} &= -x + ۲z \end{aligned}\right\} \qquad (۸\text{-}۵۵)$$

با شرایط اولیه $y(۰) = ۱$، $x(۰) = ۲$ و $z(۰) = ۱$ یک جدول از مقادیر توابع $x(t)$، $y(t)$ و $z(t)$ در بازه $[۰, ۰٫۳]$ برای $h = ۰٫۱$ تشکیل دهید (با استفاده از روش رانگ‌ـکوتا).

جدول ۸-۱۳) حل دستگاه (۸-۵۵) با روش رانگ-کوتا

i	t	X	$K = hf$	qK	$\Delta X + \frac{1}{6}\sum qK$
۰	۰	۲ ۱ ۱	۰٫۱ ۰ ۰	۰٫۱ ۰ ۰	۰٫۰۸۹۸۴ ۰٫۰۰۴۹۷ −۰٫۰۰۵۰۰
	۰٫۰۵	۲٫۰۵ ۱ ۱	۰٫۰۹ ۰٫۰۰۵۲۵ −۰٫۰۰۵	۰٫۱۸ ۰٫۰۱۰۵۰ −۰٫۰۱۰	
	۰٫۰۵	۲٫۰۴۵ ۱٫۰۰۲۶۲ ۰٫۹۹۷۵۰	۰٫۰۸۹۷۵ ۰٫۰۰۴۷۱ −۰٫۰۰۵۰۰	۰٫۰۱۷۹۵۰ ۰٫۰۰۹۴۲ −۰٫۰۱۰۰۰	
	۰٫۱	۲٫۰۸۹۷۶ ۱٫۰۰۴۷۱ ۰٫۹۹۵۰۰	۰٫۰۷۹۵۵ ۰٫۰۰۹۹۲ −۰٫۰۰۹۹۸	۰٫۰۷۹۵۵ ۰٫۰۰۹۹۲ −۰٫۰۰۹۹۸	
۱	۰٫۱	۲٫۰۸۹۸۴ ۱٫۰۰۴۹۷ ۰٫۹۹۵۰۰	۰٫۰۷۹۵۳ ۰٫۰۰۹۸۸ −۰٫۰۰۹۹۸	۰٫۰۷۹۵۳ ۰٫۰۰۹۸۸ −۰٫۰۰۹۸۸	۰٫۰۶۸۹۶ ۰٫۰۱۴۵۶ −۰٫۰۱۴۹۴
	۰٫۱۵	۲٫۱۲۹۶۰ ۱٫۰۰۹۹۱ ۰٫۹۹۰۰۱	۰٫۰۶۹۰۸ ۰٫۰۱۴۸۰ −۰٫۰۱۴۹۶	۰٫۱۳۸۱۶ ۰٫۰۲۹۶۰ −۰٫۰۲۹۹۲	
	۰٫۱۵	۲٫۱۲۴۳۸ ۱٫۰۱۲۳۷ ۰٫۹۸۷۵۲	۰٫۰۶۸۸۸ ۰٫۰۱۴۳۳ −۰٫۰۱۴۹۳	۰٫۱۳۷۷۷ ۰٫۰۲۸۶۶ −۰٫۰۲۹۸۶	
	۰٫۲	۲٫۱۵۸۷۲ ۱٫۰۱۹۳۰ ۰٫۹۸۰۰۷	۰٫۰۵۸۲۹ ۰٫۰۱۹۱۱ −۰٫۰۱۹۸۶	۰٫۰۵۸۲۹ ۰٫۰۱۹۱۱ −۰٫۰۱۹۸۶	
۲	۰٫۲	۲٫۱۵۸۸۰ ۱٫۰۱۹۵۳ ۰٫۹۸۰۰۶	۰٫۰۵۸۲۷ ۰٫۰۱۹۰۷ −۰٫۰۱۹۸۷	۰٫۰۵۸۲۷ ۰٫۰۱۹۰۷ −۰٫۰۱۹۸۷	۰٫۰۴۷۳۹ ۰٫۰۲۳۱۳ −۰٫۰۲۴۷۳
	۰٫۲۵	۲٫۱۸۷۹۴ ۱٫۰۲۹۰۷ ۰٫۹۷۰۱۲	۰٫۰۴۷۴۷ ۰٫۰۲۳۴۶ −۰٫۰۲۴۷۷	۰٫۰۹۴۹۴ ۰٫۰۴۶۹۲ −۰٫۰۴۹۵۴	
	۰٫۲۵	۲٫۱۸۲۵۴ ۱٫۰۳۱۲۶ ۰٫۹۶۷۵۸	۰٫۰۴۷۳۳ ۰٫۰۲۲۹۲ −۰٫۰۲۴۷۲	۰٫۰۹۴۶۶ ۰٫۰۴۵۸۴ −۰٫۰۴۹۴۴	
	۰٫۳	۲٫۲۰۶۱۳ ۱٫۰۴۲۴۵ ۰٫۹۵۵۳۴	۰٫۰۳۶۴۴ ۰٫۰۲۶۹۴ ۰٫۰۲۹۵۴	۰٫۰۳۶۴۴ ۰٫۰۲۶۹۴ ۰٫۰۲۹۵۴	

حل- تمام محاسبات برای توابع x، y و z به ترتیب زیر در جدول ۸-۱۳ وارد شده‌اند.
توجه داریم که: $f_1 = -2x + 5z$، $f_2 = -(1 - \sin t)x - y + 3z$ و $f_3 = -x + 2z$

(۱) برای $i = 0$ می‌نویسیم $t = 0$ و مقادیر $x_0 = 2$، $y_0 = 1$ و $z_0 = 1$ را در ستون X وارد می‌کنیم.
(۲) محاسبه می‌کنیم:

$$f_1(t_0, x_0, y_0, z_0) = -4 + 5 = 1,$$
$$f_2(t_0, x_0, y_0, z_0) = -2 - 1 + 3 = 0,$$
$$f_3(t_0, x_0, y_0, z_0) = -2 + 2 = 0.$$

با ضرب مقادیر بدست آمده در h، مقادیر K_1 را برای x، y و z بدست آورده و در ستون K وارد می‌کنیم.
(۳) سه سطر بعدی از جدول را برای $t = 0{,}05$ پر می‌کنیم. در ستون X مقادیر $x_0 + \frac{K_{1x}^{(0)}}{2} = 2{,}05$، $y_0 + \frac{K_{1y}^{(0)}}{2} = 1$ و $z_0 + \frac{K_{1z}^{(0)}}{2} = 1$ را وارد می‌کنیم.
(۴) مقادیر f_1، f_2 و f_3 را برای مقادیر نوشته شده t، x، y و z محاسبه می‌کنیم و در ستون K مقادیر $K_{2x}^{(0)} = 0{,}09$، $K_{2y}^{(0)} = 0{,}00525$ و $K_{2z}^{(0)} = -0{,}005$ را وارد می‌کنیم.
(۵) سه سطر بعدی از جدول را برای $t = 0{,}05$ پر می‌کنیم. در ستون X مقادیر $x_0 + \frac{K_{2x}^{(0)}}{2} = 2{,}045$، $y_0 + \frac{K_{2y}^{(0)}}{2} = 1{,}00262$ و $z_0 + \frac{K_{2z}^{(0)}}{2} = 0{,}99750$ را می‌نویسیم و محاسبات را به روش مشابه انجام می‌دهیم.
مقادیر $K_1^{(0)}$، $2K_2^{(0)}$، $2K_3^{(0)}$ و $K_4^{(0)}$ را برای x و y و z در ستون q_k وارد می‌کنیم.
سپس با استفاده از این اعداد پیدا می‌کنیم:

$$\Delta x_0 = \frac{1}{6}(K_{1k}^{(0)} + 2K_{2x}^{(0)} + 2K_{3x}^{(0)} + K_{4x}^{(0)}) = 0{,}0984$$

و بطور مشابه بدست می‌آوریم $\Delta y_0 = 0{,}00497$ و $\Delta z_0 = -0{,}00500$. سپس محاسبه می‌کنیم: $x_1 = x_0 + \Delta x_0 = 2{,}0984$، $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1{,}00497$، $z_1 = z_0 + \Delta z_0 = 0{,}99500$.
مقادیر x_1، y_1 و z_1 بدست آمده را در جدول ۸-۱۳ برای $i = 1$ وارد کرده و محاسبات را بطریقه تشریح شده در بالا ادامه می‌دهیم.

مسائل

۱ـ با استفاده از روش رانگ‌ـکوتا با $h = 0{,}2$، جواب معادلات و دستگاه‌های داده شده را در بازه مشخص شده $[a, b]$ بدست آورید:

الف) $y' = y - x,\ y(0) = 1{,}5,\ a = 0,\ b = 1,$

ب) $y' = \frac{y}{x} - y^2,\ y(1) = 1,\ a = 1,\ b = 2,$

پ) $\left.\begin{aligned} y' &= z + 1, \\ z' &= y - x, \end{aligned}\right\} y(0) = 1,\ z(0) = 1,\ a = 0,\ b = 1.$

با بکارگیری روش رانگ-کوتا با $h = ۰/۱$ در بازه $[۰, ۰/۳]$ جواب معادلات دیفرانسیل و دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل زیر را با شرایط اولیه داده شده بدست آورید.

۲. $x' = \frac{\cos bt}{a+x^۲},\ x(۰) = ۰,\ a = ۱/۰ + ۰/۴ \times n,\ n = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵,$

$b = ۱/۰ + ۰/۸ \times k,\ k = ۰, ۱, ۲.$

۳. $x' = \frac{a}{t^۲+x^۲+b},\ x(۰) = ۰,\ a = ۱/۰ + ۰/۴ \times n,\ n = ۰, ۱, \ldots, ۵,$

$b = ۱/۰ + ۰/۴ \times k,\ k = ۰, ۱, \ldots, ۵.$

۴. $x' = e^{-at}(x^۲ + b),\ x(۰) = ۰,\ a = ۱/۰ + ۰/۴ \times n,\ n = ۰, ۱, \ldots, ۵,$

$b = ۱/۰ + ۰/۴ \times k,\ k = ۰, ۱, \ldots, ۵.$

۵. $x' = \cos(at + x) + t - x,\ x(۰) = ۰,\ a = ۱/۰ + ۰/۴ \times k,$
$k = ۰, ۱, \ldots, ۵.$

۶. $x' = ۱ - \sin(at + x) + \frac{bx}{۲+t},\ x(۰) = ۰,\ a = ۱/۰ + ۰/۴ \times k,$
$k = ۰, ۱, \ldots, ۵,\ b = ۱/۰ + ۰/۸ \times n,\ n = ۰, ۱, ۲.$

۷. $x' = \frac{\cos x}{a+t} + x^۲,\ x(۰) = ۰,\ a = ۱/۰ + ۰/۴ \times k,$
$k = ۰, ۱, \ldots, ۵.$

۸. $x' = ۱ + ax \sin t - x^۲,\ x(۰) = ۰,\ a = ۱/۰ + ۰/۴ \times k,$
$k = ۰, ۱, \ldots, ۵.$

۹. $$\left.\begin{aligned} x' &= \cos(x + ay) + b, \\ y' &= \frac{a}{t+bx^۲} + t + ۱, \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &x(۰) = ۱,\ y(۰) = ۰/۰۵,\ a = ۲/۰ + ۰/۵ \times n, \\ &n = ۰, ۱, ۲, ۳,\ b = ۲/۰ + ۰/۵ \times k, \\ &k = ۰, ۱, \ldots, ۵. \end{aligned}$$

۱۰. $$\left.\begin{aligned} x' &= \sin(ax^۲) + t + y, \\ y' &= t + x - by^۲ + ۱, \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &x(۰) = ۱,\ y(۰) = ۰/۰۵,\ a = ۲/۰ + ۰/۵ \times n, \\ &n = ۰, ۱, ۲, ۳,\ b = ۲/۰ + ۰/۵ \times k, \\ &k = ۰, ۱, \ldots, ۵. \end{aligned}$$

۱۱. $$\left.\begin{aligned} x' &= \sqrt{t^۲ + ax^۲} + y, \\ y' &= \cos(by) + x, \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &x(۰) = ۰/۵,\ y(۰) = ۱,\ a = ۲/۰ + ۰/۵ \times n, \\ &n = ۰, ۱, ۲, ۳,\ b = ۲/۰ + ۰/۵ \times k, \\ &k = ۰, ۱, \ldots, ۵. \end{aligned}$$

$$12.\quad \left.\begin{aligned} x' &= e^{-(x^2+y^2)} + at, \\ y' &= bx^2 + y, \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &x(0) = 0.5,\ y(0) = 1,\ a = 2.0 + 0.5 \times n, \\ &n = 0, 1, 2, 3,\ b = 2.0 + 0.5 \times k, \\ &k = 0, 1, \ldots, 5. \end{aligned}$$

$$13.\quad \left.\begin{aligned} x' &= \ln(bt + \sqrt{a^2t^2 + y^2}), \\ y' &= \sqrt{a^2t^2 + x^2}, \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &x(0) = 1,\ y(0) = 0.05,\ a = 2.0 + 0.5 \times n, \\ &n = 0, 1, 2, 3,\ b = 2.0 + 0.5 \times k, \\ &k = 0, 1, \ldots, 5. \end{aligned}$$

۱۴ـ مسئله ۱۱ بخش ۸ـ۴ را با روش رانگ‌ـکوتا با $h_1 = 100$ و $h_2 = 50$ حل کنید.

۱۵ـ مسئله ۱۲ بخش ۸ـ۴ را به روش رانگ‌ـکوتا با $h = 10$ حل کنید.

۱۶ـ مسئله ۱۳ بخش ۸ـ۴ را به روش رانگ‌ـکوتا با $h = 10$ حل کنید.

۸ـ۸ روش آدامز[1]

برای معادله

$$y' = f(x, y) \qquad (۸-۵۶)$$

با شرط اولیه $y(x_0) = y_0$ سه مقدار متوالی از تابع مورد نظر (بازه اولیه) بدست آمده با یکی از روش‌های تشریح شده قبل را در نظر بگیرید:

$$y_1 = y(x_1) = y(x_0 + h),\ y_2 = y(x_2) = y(x_0 + 2h),$$
$$y_3 = y(x_3) = y(x_0 + 3h).$$

با کمک این مقادیر، مقادیر زیر را حساب می‌کنیم:

$$q_0 = hy'_0 = hf(x_0, y_0), \quad q_1 = hy'_1 = hf(x_1, y_1),$$
$$q_2 = hy'_2 = hf(x_2, y_2), \quad q_3 = hy'_3 = hf(x_3, y_3).$$

اعداد x_k، y_k، y'_k و q_k $(k = 0, 1, 2, 3)$ را در جدول ۸-۱۴ وارد کرده و تفاضلات محدود مقدار q را محاسبه می‌کنیم (اعداد بالای خط پله‌ای مشخص شده در جدول ۸-۱۴).

1) Adams

جدول ۸-۱۴) چگونگی روش آدامز

k	x_k	y_k	$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$	$y'_k = f(x_k, y_k)$	$q_k = hy'_k$	$\Delta q_k = q_{k+1} - q_k$	$\Delta^2 q_k$	$\Delta^3 q_k$
۰	x_0	y_0	Δy_0	$f(x_0, y_0)$	q_0	Δq_0	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
۱	x_1	y_1	Δy_1	$f(x_1, y_1)$	q_1	Δq_1	$\Delta^2 q_1$	$\Delta^3 q_1$
۲	x_2	y_2	Δy_2	$f(x_2, y_2)$	q_2	Δq_2	$\Delta^2 q_2$	$\Delta^3 q_2$
۳	x_3	y_3	Δy_3	$f(x_3, y_3)$	q_3	Δq_3	$\Delta^2 q_3$	
۴	x_4	y_4	Δy_4	$f(x_4, y_4)$	q_4	Δq_4		
۵	x_5	y_5	Δy_5	$f(x_5, y_5)$	q_5			
۶	x_6	y_6						

در روش آدامز ([۲]، [۱۳] و [۲۰] را ببینید) جدول تفاضلی به کمک فرمول

$$\Delta y_k = q_k + \frac{1}{2}\Delta q_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{k-3} \quad (k = 3, 4, \ldots), \qquad (۸\text{-}۵۷)$$

تشکیل می‌گردد که فرمول برون‌یابی آدامز نام دارد و برای پیش‌بینی مقدار $y_{k+1} = y_k + \Delta_{y_k}$ مورد استفاده قرار می‌گیرد. ما مقدار پیش‌بینی شده توسط این فرمول را با y_{k+1}^{pred} نشان می‌دهیم. مقدار Δ_{y_k} توسط فرمول (۸-۵۷) که قبلاً مشخص شده، بدست می‌آید. بدین‌منظور ما می‌بایستی مقادیر x_{k+1} ، y_{k+1}، y'_{k+1} و q_{k+1} را وارد جدول کرده، جدول تفاضلات را تکمیل و نهایتاً وارسی محاسبات را با فرمول تصحیح

$$\Delta y_k = q_k + \frac{1}{2}\Delta q_k - \frac{1}{2}\Delta^2 q_{k-1} - \frac{1}{24}\Delta^3 q_{k-2} \qquad (۸\text{-}۵۸)$$

که فرمول درون‌یابی آدامز نام دارد، انجام دهیم. مقدار مشخص شده توسط فرمول (۸-۵۸) را با y_{k+1}^{corr} نشان می‌دهیم.

فرمول‌های (۸-۵۷) و (۸-۵۸) که دارای دقت بسیار بالایی هستند، دارای خطایی از رتبه $o(h^4)$ می‌باشند امّا فرمول‌های برآورد خطای آنها بسیار پیچیده هستند.

برای مقاصد کاربردی معمولاً مورد ذیل را در نظر می‌گیرند. خطای فرمول تصحیح دقیقتر (۸-۵۸) حدوداً از $\frac{1}{14}$ اختلاف میان مقادیر Δ_{y_k} محاسبه شده توسط فرمول‌های (۸-۵۷) و (۸-۵۸) تشکیل می‌شود، بنابراین اگر این اختلاف بطور قابل ملاحظه‌ای از خطای محاسباتی مجاز بیشتر نشود، آنگاه فاصله h به عنوان یک انتخاب کافی و مناسب در نظرگرفته شده و محاسبات با فاصله انتخاب شده ادامه پیدا می‌کند. امّا اگر در هر مرحله‌ای از محاسبات اختلاف مذکور بزرگ شود (و خود محاسبات دارای خطا نباشند) آنگاه فاصله h می‌بایستی کاهش یابد (معمولاً نصف می‌شود).

پرکردن جدول ۸-۱۴:

(۱) اعداد x_k، y_k، y'_k و q_k $(k = 0, 1, 2, 3)$ را وارد جدول کرده و تفاضلات Δ_{q_k} $(k = 0, 1, 2)$ و $\Delta^2 q_k (k = 0, 1)$ و $\Delta^3 q_0$ را محاسبه می‌کنیم.

(۲) با استفاده از اعداد q_3، Δq_2، $\Delta^2 q_1$ و $\Delta^3 q_0$ که به صورت قطری در جدول قرار گرفته‌اند، توسط فرمول (۸-۵۷) برای $k = 3$ بدست آورید:

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_0$$

(۳) مقادیر $x_4 = x_3 + h$ و $y_4 = y_3 + \Delta y_3$ را محاسبه می‌کنیم.

(۴) مقادیر x_4 و y_4 را وارد جدول کرده و مقادیر $y'_4 = f(x_4, y_4)$ و $q_4 = hy'_4$ را بدست آورده و جدول تفاضلی را با مقادیر Δq_3، $\Delta^2 q_2$ و $\Delta^3 q_1$ تکمیل می‌کنیم.

(۵) با استفاده از مقادیر بدست آمده تفاضلات q، مقدار Δy_3 را توسط فرمول (۸-۵۸) برای $k = 3$ مشخص می‌کنیم:

$$\Delta y_3 = q + \frac{1}{2}\Delta q_3 - \frac{1}{2}\Delta^2 q_2 - \frac{1}{24}\Delta^3 q$$

(۶) اگر مقدار تصحیح شده Δy_3 با مقدار پیش‌بینی شده اختلاف دارد (با اندازه چند واحد از رقم باقیمانده آخر)، آنگاه تصحیح متناظر در مقادیر Δy_3 و y_4 را بکار بسته و اگر دیده شد که تصحیح تأثیر قابل ملاحظه‌ای در مقدار q_k نداشته باشد محاسبات را با فاصله منتخب ادامه می‌دهیم. در غیر این صورت یک فاصله کوچکتر را می‌بایستی انتخاب کنیم.

محاسبات برای $k = 4, 5$ بطور مشابه صورت می‌گیرد. وقتی توسط یک کامپیوتر محاسبات انجام می‌گیرد، بسیار مناسبتر است که از فرمول تبدیل شده آدامز استفاده کنیم که y_{k+1} را بر حسب جملات تفاضل Δq بیان نکرده بلکه مستقیماً بر حسب q بیان کرده است. از اینرو ما فرمول برون‌یابی آدامز را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(55y'_k - 59y'_{k-1} + 37y'_{k-2} - 9y'_{k-3}) \qquad (۸\text{-}۵۹)$$

و فرمول درون‌یابی آدامز را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(9y'_{k+1} + 19y'_k - 5y'_{k-1} + y'_{k-2}) \qquad (۸\text{-}۶۰)$$

روش آدامز بسادگی برای دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل به همان صورت که برای معادلات دیفرانسیل رتبه n بکار گرفته می‌شود، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

فرض کنید یک دستگاه دو معادله‌ای داریم:

$$\left.\begin{aligned} y' &= f_1(x, y, z), \\ z' &= f_2(x, y, z). \end{aligned}\right\} \qquad (۸\text{-}۶۱)$$

فرمول‌های برون‌یابی آدامز برای این دستگاه به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\left.\begin{aligned} \Delta y_k &= p_k + \tfrac{1}{2}\Delta p_{k-1} + \tfrac{5}{12}\Delta^2 p_{k-2} + \tfrac{3}{8}\Delta^3 p_{k-3}, \\ \Delta z_k &= q_k + \tfrac{1}{2}\Delta q_{k-1} + \tfrac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2} + \tfrac{3}{8}\Delta^3 q_{k-3}, \end{aligned}\right\} \qquad (۸\text{-}۶۲)$$

که در آن

$$p_k = hy'_k = hf_۱(x_k, y_k, z_k), \quad q_k = hz'_k = hf_۲(x_k, y_k, z_k)$$

فرمول‌های درون‌یابی آدامز برای دستگاه مورد نظر به صورت مشابه نوشته می‌شود.

مثال ۸ـ۱۶ـ با استفاده از روش آدامز پاسخ معادله دیفرانسیل

$$y' = \frac{\sin h(۰/۵y + x)}{۱/۵} + ۰/۵y \tag{۸-۶۳}$$

را در بازه $[۰, ۰/۵]$ و با شرط اولیه $y(۰) = ۰$ و در نظرگرفتن $h = ۰/۰۵$ بدست آورید.

حلـ در مثال ۸-۱۴ بخش ۸ـ۷ مقادیر توابع لازم توسط روش رانگ‌ـکوتا برای $x_۱ = ۰/۰۵$ و $x_۲ = ۰/۱۰$ محاسبه شده بودند. بطور مشابه می‌توانیم مقدار تابع را برای نقطه $x_۳ = ۰/۱۵$ محاسبه کنیم. اجازه دهید که از این نتایج استفاده کنیم و محاسبات را با فرمول (۸-۵۸) ادامه بدهیم. نتایج حاصله را در دو جدول، یکی جدول ۸-۱۵ برای تفاضلات پایه و دیگری جدول ۸-۱۶ که جدول کمکی برای محاسبه عناصر سمت راست معادله (۸-۶۴) است، وارد می‌کنیم.

جدول ۸-۱۵) حل معادله (۸-۶۳) به روش آدامز

k	x_k	y_k	Δy_k	$q_k = hf(x_k, y_k)$	Δq_k	$\Delta^۲ q_k$	$\Delta^۳ q_k$
۰	۰	۰		۰	۱۷۰۲	۷۸	۷
۱	۰/۰۵	۰/۰۰۰۸۴۶		۰/۰۰۱۷۰۲	۱۷۸۰	۸۵	۹
۲	۰/۱۰	۰/۰۰۳۴۳۲		۰/۰۰۳۴۸۲	۱۸۶۵	۹۴	۱۱
۳	۰/۱۵	۰/۰۰۷۸۳۸	۰۶۳۱۸	۰/۰۰۵۳۴۷	۱۹۵۹	۱۰۵	۱۱
۴	۰/۲۰	۰/۰۱۴۱۵۶	۰۸۳۲۹	۰/۰۰۷۳۰۶	۲۰۶۴	۱۱۶	۱۳
۵	۰/۲۵	۰/۰۲۲۴۸۵	۱۰۴۵۱	۰/۰۰۹۳۷۰	۲۱۸۰	۱۲۹	۱۳
۶	۰/۳۰	۰/۰۳۲۹۳۶	۱۲۶۹۲	۰/۰۱۱۵۵۰	۲۳۰۹	۱۴۲	۱۷
۷	۰/۳۵	۰/۰۴۵۶۲۸	۱۵۰۷۰	۰/۰۱۳۸۵۹	۲۴۵۱	۱۵۹	
۸	۰/۴۰	۰/۰۶۰۶۹۸	۱۷۶۰۳	۰/۰۱۶۳۱۰	۲۶۱۰		
۹	۰/۴۵	۰/۰۷۸۳۰۱	۲۰۲۹۵	۰/۰۱۸۹۲۰			
۱۰	۰/۵۰	۰/۰۹۸۵۹۶					

جدول ۸-۱۶) محاسبه عنصر سمت راست معادله (۸-۶۳)

k	x_k	y_k	$۰٫۵y_k$	$۰٫۵y_k + x_k$	$\sin h(۰٫۵y_k + x_k)$	$f(x_k, y_k)$
۴	۰٫۲۰	۰٫۰۱۴۱۵۶	۰٫۰۰۷۰۷۸	۰٫۲۰۷۰۷۸	۰٫۲۰۸۵۶	۰٫۱۴۶۱۲
۵	۰٫۲۵	۰٫۰۲۲۴۸۵	۰٫۰۱۱۲۴۲	۰٫۲۶۱۲۴۲	۰٫۲۶۴۲۲	۰٫۱۸۷۳۹
۶	۰٫۳۰	۰٫۰۳۲۹۳۶	۰٫۰۱۶۴۶۸	۰٫۳۱۶۴۶۸	۰٫۳۲۱۷۸	۰٫۲۳۰۹۹
۷	۰٫۳۵	۰٫۰۴۵۶۲۸	۰٫۰۲۲۸۱۴	۰٫۳۷۸۸۱۴	۰٫۳۸۱۵۱	۰٫۲۷۷۱۵
۸	۰٫۴۰	۰٫۰۶۰۶۹۸	۰٫۰۳۰۳۴۹	۰٫۴۳۰۳۴۹	۰٫۴۴۳۷۶	۰٫۳۲۶۱۹
۹	۰٫۴۵	۰٫۰۷۸۳۰۱	۰٫۰۳۹۱۵۰	۰٫۴۸۹۱۵۰	۰٫۵۰۸۸۹	۰٫۳۷۸۴۱

پر کردن جدول‌ها:

(۱) در جدول ۸-۱۵ مقادیر $x_۰ = ۰$، $x_۱ = ۰٫۰۵$، $x_۲ = ۰٫۱۰$، $x_۳ = ۰٫۱۵$ و مقادیر متناظر y_k ($k = ۰, ۱, ۲, ۳$) را وارد کرده و مقادیر $f(x_k, y_k)$ و q_k را بدست آورده و یک جدول تفاضلی تشکیل می‌دهیم.

(۲) با فرمول (۸-۵۸) برای $k = ۳$ بدست می‌آوریم:

$$\Delta y_۳ = ۰٫۰۰۵۳۴۷ + \frac{۱}{۲} \times ۰٫۰۰۱۸۶۵ + \frac{۵}{۱۲} \times ۰٫۰۰۰۰۸۵ + \frac{۳}{۸} \times ۰٫۰۰۰۰۰۷ = ۰٫۰۰۶۳۱۸$$

(۳) مقدار $y_۴ = ۰٫۰۰۷۸۳۸ + ۰٫۰۰۶۳۱۸ = ۰٫۰۱۴۱۵۶$ را محاسبه می‌کنیم.

(۴) با وارد کردن مقادیر $x_۴$ و $y_۴$ در جدول ۸-۱۶ مقدار

$$y'_۴ = (x_۴, y_۴) = \frac{۲}{۳} \sin h(۰٫۵ \times ۰٫۰۱۴۱۵۶ + ۰٫۲) + ۰٫۵ \times ۰٫۰۱۴۱۵۶ = ۰٫۱۴۶۱۲$$

را بدست آورده و سپس خواهیم داشت:

$$q_۴ = hy'_۴ = ۰٫۰۰۷۳۰۶$$

نتایج بدست آمده را در جدول نوشته و تفاضلات $\Delta q_۳$، $\Delta^۲ q_۲$ و $\Delta^۳ q_۱$ را محاسبه می‌کنیم.

(۵) مقدار تصحیح شده را با فرمول (۸-۵۹) محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta y_۳ = ۰٫۰۰۵۳۴۷ + \frac{۱}{۲} ۰٫۰۰۱۹۵۹ - \frac{۱}{۱۲} ۰٫۰۰۰۰۹۴ - \frac{۱}{۲۴} ۰٫۰۰۰۰۰۹ = ۰٫۰۰۶۳۱۸.$$

چون مقدار تصحیح شده $\Delta y_۳$ با مقدار پیش‌بینی شده مطابقت دارد، محاسبه را با فاصله منتخب ادامه می‌دهیم (بدون اعمال تصحیح بیشتر).

(۶) با فرمول (۸-۵۷) برای $k = ۴$ بدست می‌آوریم:

$$\Delta y_۴ = ۰٫۰۰۷۳۰۶ + \frac{۱}{۲} ۰٫۰۰۱۹۵۹ + \frac{۵}{۱۲} ۰٫۰۰۰۰۹۴ + \frac{۳}{۸} ۰٫۰۰۰۰۰۹ = ۰٫۰۰۸۳۲۹,$$

و به همین ترتیب الی آخر.

توجه. در اینجا نیز مثل حل مثال ۸ـ۱۴، ما می‌توانیم محاسبات را با فاصله‌ای بزرگتر ادامه دهیم. زیرا در حالت مقادیر تفاضلات کوچک $\Delta^3 q$ این تصمیم را تأیید می‌کند.

مثال ۸ـ۱۷. با استفاده از روش آدامز در بازه $[0, 0{,}5]$ جواب معادله

$$y' = 0{,}25y^2 + x^2 \qquad (۸\text{-}۶۴)$$

را با شرط اولیه $y(0) = -1$ و با دقت 10^{-5} پیدا کنید.

حل. در مثال ۷ـ۱ مقادیر تابع مورد نظر محاسبه شده بود (با روش رانگ‌ـکوتا برای فاصله $h = 0{,}1$ و نقاط $x_1 = 0{,}1$، $x_2 = 0{,}2$ و $x_3 = 0{,}3$). محاسبات بعدی با استفاده از فرمول (۸-۶۰) توسط یک کامپیوتر قابل انجام بوده و توسط فرمول (۸-۶۱) تصحیح شده و نتایج در دو جدول وارد می‌شوند.
جدول ۸-۱۷ شامل محاسبات با فرمول (۸-۶۰) که توسط فرمول (۸-۶۱) تصحیح شده می‌باشند. جدول ۸-۱۸ نتایج محاسبه عضو سمت راست را در بر دارد. در جدول ۸-۱۷ مقادیر α_k و β_k نشاندهنده مجموع‌های

$$\alpha_k = 55y'_k - 59y'_{k-1} + 37y'_{k-2} - 9y'_{k-3}, \beta_k = 9y'_{k+1} - 5y'_{k-1} + y'_{k-2}.$$

می‌باشند.

پر کردن جدول‌ها:
(۱) در جدول ۸-۱۸ مقادیر $x_0 = 0$، $x_1 = 0{,}1$، $x_2 = 0{,}2$ و $x_3 = 0{,}3$ و مقادیر متناظر $y_k(k = 0, 1, 2, 3)$ را وارد می‌کینم و با استفاده از آنها $y'_k = f(x_k, y_k)$ را محاسبه می‌کنیم.
(۲) مقدار $\frac{\alpha_3}{24} = \frac{1}{24}(55y'_3 - 59y'_2 + 37y'_1 - 9y'_0) = 0{,}32834$ را محاسبه و در جدول ۸-۱۷ وارد کرده و با استفاده از فرمول (۸-۶۰) برای $k = 4$ بدست می‌آوریم:

$$y_4^{\text{pred.}} = y_3 + h\frac{\alpha_3}{24} = -0{,}92154 + 0{,}1 \times 0{,}32834 = -0{,}88871.$$

(۳) مقادیر x_4 و y_4 را در جدول ۸-۱۸ وارد کرده و با استفاده از آنها محاسبه می‌کنیم:

$$y'_4 = f(x_4, y_k) = 0{,}35745$$

(۴) مقدار $\frac{\beta_3}{24} = \frac{1}{24}(9y'_4 + 19y'_3 - 5y'_2 + y'_1) = 0{,}32840$. را محاسبه کرده و آن‌را در جدول ۸-۱۷ برای $k = 3$ وارد می‌کنیم و مقدار y_4 را با فرمول (۸ـ۵) بدست می‌آوریم:

$$y_4^{\text{corr.}} = y_3 + h\frac{\beta_3}{24} = -0{,}92154 + 0{,}1 \times 0{,}32840 = -0{,}88870$$

جدول ۸-۱۷) حل معادله (۸-۶۴) به روش آدامز

k	x_k	y_k	y'_k	$\frac{\alpha_k}{24}$	$\frac{\beta_k}{24}$	$h\frac{\alpha_k}{24}$	$h\frac{\beta_k}{24}$
۰	۰٫۰	۱-	۰٫۲۵				
۱	۰٫۱	۰٫۹۷۵۲۸-	۰٫۲۴۷۷۹				
۲	۰٫۲	۰٫۹۴۹۷۸-	۰٫۲۶۵۵۲				
۳	۰٫۳	۰٫۹۲۱۵۴-	۰٫۳۰۲۳۲	۰٫۳۲۸۳۴	۰٫۳۲۸۴۰	۰٫۰۳۲۸۳	۰٫۰۳۲۸۴
۴	۰٫۴	۰٫۸۸۸۷۱-	۰٫۳۵۷۴۵	۰٫۳۹۲۳۷	۰٫۳۹۲۴۶	۰٫۰۳۹۲۴	۰٫۰۳۹۲۵
		۰٫۸۸۸۷۰-					
۵	۰٫۵	۰٫۸۴۹۴۶-	۰٫۴۳۰۴۰				
		۰٫۸۴۹۴۶-					

جدول ۸-۱۸) محاسبه عنصر سمت راست معادله (۸-۶۴)

k	x	x^2	y	$0{,}25y^2$	$f(x,y) = 0{,}25y^2 + x^2$
۰	۰	۰	۱-	۰٫۲۵	۰٫۲۵
۱	۰٫۱	۰٫۰۱	۰٫۹۷۵۲۸-	۰٫۲۳۷۷۹	۰٫۲۴۷۷۹
۲	۰٫۲	۰٫۰۴	۰٫۹۴۹۷۸-	۰٫۲۲۵۵۲	۰٫۲۶۵۵۲
۳	۰٫۳	۰٫۰۹	۰٫۹۲۱۵۴-	۰٫۲۱۲۳۲	۰٫۳۰۲۳۲
۴	۰٫۴	۰٫۱۶	۰٫۸۸۸۷۱-	۰٫۱۹۷۴۵	۰٫۳۵۷۴۵
			۰٫۸۸۸۷۰-		
۵	۰٫۵	۰٫۲۵	۰٫۸۴۹۴۶-	۰٫۱۸۰۴۰	۰٫۴۳۰۴۰
			۰٫۸۴۹۴۶-		

(۵) چون مقدار بدست آمده y_4^{pred} و y_4^{corr} تنها به اندازه 10^{-5} اختلاف دارند، یک تصحیح در مقدار y_4 در جدول ۸-۱۷ و ۸-۱۸ انجام می‌دهیم: $y_4 = -0{,}88870$.

(۶) مقدار $y_4 = y_4^{\text{corr}}$ بدست آمده را در جدول ۸-۱۸ وارد می‌کنیم، با این اطمینان که تصحیح دوباره مقدار $y'_4 = f(x_4, y_4)$ را تغییر نمی‌دهد. محاسبه y_5 به صورت مشابه انجام می‌گیرد.

مثال ۸ـ۱۸ـ دستگاه معادلات زیر با شرایط اولیه $y(0) = \pi$ و $z(0) = 0$ مفروض است.

$$\begin{aligned} y' &= \cos(y + 1{,}1z) + 1 \\ z' &= \frac{1}{x + 2{,}1y^2} + x + 1 \end{aligned} \qquad (۸\text{-}۶۵)$$

با استفاده از روش آدامز جواب‌های این دستگاه را در بازه $[۰, ۰٫۶]$ و با در نظرگرفتن فاصله $h = ۰٫۱$ و دانستن مقادیر توابع $y(x)$ و $z(x)$ برای $x_۱ = ۰٫۱$، $x_۲ = ۰٫۲$ و $x_۳ = ۰٫۳$ بدست آورید.
این مقادیر به ترتیب عبارتند از $y(۰٫۱) = ۳٫۱۴۱۸۴$، $y(۰٫۲) = ۳٫۱۴۳۶۴$، $y(۰٫۳) = ۳٫۱۴۹۰۳$، $z(۰٫۱) = ۰٫۱۰۹۸۱$، $z(۰٫۲) = ۰٫۲۲۹۶۰$ و $z(۰٫۳) = ۰٫۳۵۹۳۴$.

جدول ۸-۱۹) حل دستگاه (۸-۶۵) به روش آدامز

k	x_k	y_k	Δy_k	p_k	Δp_k	$\Delta^۲ p_k$	$\Delta^۳ p_k$
۰	۰	۳٫۱۴۱۵۹		۰	۷۳	۱۷۶	۵۳
۱	۰٫۱	۳٫۱۴۱۸۴		۰٫۰۰۰۷۳	۲۴۹	۲۲۹	۶۳
۲	۰٫۲	۳٫۱۴۳۶۴		۰٫۰۰۳۲۲	۴۷۸	۲۹۲	۷۶
۳	۰٫۳	۳٫۱۴۹۰۳	۰٫۰۱۱۵۴	۰٫۰۰۸۰۰	۷۷۰	۳۶۸	
۴	۰٫۴	۳٫۱۶۰۵۷	۰٫۰۲۱۰۱	۰٫۰۱۵۷۰	۱۱۳۸		
۵	۰٫۵	۳٫۱۸۱۵۸	۰٫۰۳۴۴۶	۰٫۰۲۷۰۸			
۶	۰٫۶	۳٫۲۱۶۱۴					

k	z_k	Δz_k	q_k	Δq_k	$\Delta^۲ q_k$	$\Delta^۳ q_k$
۰	۰		۰٫۱۰۴۸۲	۹۹۸	-۱	۰
۱	۰٫۱۰۹۸۱		۰٫۱۱۴۸۰	۹۹۷	-۱	۰
۲	۰٫۲۲۹۶۰		۰٫۱۲۴۷۷	۹۹۶	-۱	۲
۳	۰٫۳۵۹۳۴	۰٫۱۳۹۷۱	۰٫۱۳۴۷۳	۹۹۵	-۳	
۴	۰٫۴۹۹۰۵	۰٫۱۴۹۶۵	۰٫۱۴۴۶۸	۹۹۲		
۵	۰٫۶۴۸۷۰	۰٫۱۵۹۵۵	۰٫۱۵۴۶۰			
۶	۰٫۸۰۸۲۵					

حل- ما مقادیر توابع $y(x)$ و $z(x)$ را برای $x_۴ = ۰٫۴$، $x_۵ = ۰٫۵$ و $x_۶ = ۰٫۶$ توسط فرمول‌های (۸-۷) بادر نظرگرفتن

$$f_۱(x, y, z) = \cos(y + ۱٫۱z) + ۱, \ \ f_۲(x, y, z) = \frac{۱}{x + ۲٫۱y^۲} + x + ۱$$

محاسبه می‌کنیم.
تمامی محاسبات در دو جدول آورده شده‌اند یکی جدول ۸-۱۹ که جدول اصلی روش آدامز است و دیگری جدول ۸-۲۰ که جدول کمکی برای محاسبه عضوهای سمت راست است.

پر کردن جدول:

(۱) مقادیر $x_k = kh$ و مقادیر متناظر y_k و z_k و $(k = ۰, ۱, ۲, ۳)$ را در جدول وارد می‌کنیم.

(۲) مقادیر $y_k^۱ = f_۱(x_k, y_k, z_k)$ و $z_k^۱ = f_۲(x_k, y_k, z_k)$ $(k = ۰, ۱, ۲, ۳)$ را محاسبه می‌کنیم.

(۳) اعداد $p_k = hy'_k$ و $q = hz_k$ $(k = ۰, ۱, ۲, ۳)$ را پیدا کرده و در جدول ۸-۱۹ وارد و تفاضلات Δp، $\Delta^۲ p$، $\Delta^۳ p$، Δq، $\Delta^۲ q$ و $\Delta^۳ q$ را تشکیل می‌دهیم.

(۴) با استفاده از تفاضلات حاصله به کمک فرمول‌های (۸-۶۳) برای $k = ۳$ بدست می‌آوریم:

$$\Delta y_۳ = ۰٫۰۰۸۰۰ + \frac{۱}{۲} \times ۰٫۰۰۴۷۸ + \frac{۵}{۱۲} \times ۰٫۰۰۲۲۹ + \frac{۳}{۸} \times ۰٫۰۰۰۵۳ = ۰٫۰۱۱۵۴,$$
$$\Delta z_۳ = ۰٫۱۳۴۷۳ + \frac{۱}{۲} \times ۰٫۰۰۹۹۶ + \frac{۵}{۱۲}(-۰٫۰۰۰۰۱) = ۰٫۱۳۹۷۱.$$

جدول ۸-۲۰) محاسبه عناصر سمت راست دستگاه (۸-۶۶)

k	x	$y^۲$	$\frac{۱}{x+۲٫۱y^۲}$	$z' = f_۲(x, y, z)$	$y + ۱٫۱z$	$y' = f(x, y, z)$
۰	۰٫۰	۹٫۸۶۹۶	۰٫۰۴۸۲۴	۱٫۰۴۸۲۴	۳٫۱۴۱۵۹	۰
۱	۰٫۱	۹٫۸۷۱۲	۰٫۰۴۸۰۱	۱٫۱۴۸۰۱	۳٫۲۶۲۶۴	۰٫۰۰۷۳۲
۲	۰٫۲	۹٫۸۸۲۵	۰٫۰۴۷۷۳	۱٫۲۴۷۷۳	۳٫۳۹۶۲۰	۰٫۰۳۲۲۴
۳	۰٫۳	۹٫۹۱۶۴	۰٫۰۴۷۳۴	۱٫۳۴۷۳۴	۳٫۵۴۴۳۳	۰٫۰۸۰۰۱
۴	۰٫۴	۹٫۹۸۹۶	۰٫۰۴۴۷۸	۱٫۴۴۶۷۸	۳٫۷۰۹۵۴	۰٫۱۵۷۰۰
۵	۰٫۵	۱۰٫۱۲۳۳	۰٫۰۴۵۹۶	۱٫۵۴۵۹۶	۳٫۸۹۵۲۴	۰٫۲۷۰۸۰

(۵) مقادیر $y_۴ = y_۳ + \Delta y_۳ = ۳٫۱۶۰۵۷$ و $z_۴ = z_۳ + \Delta z_۳ = ۰٫۴۹۹۰۵$ را محاسبه کرده و مقادیر بدست آمده را در جدول ۸ـ۶ و ۸ـ۷ وارد می‌کنیم و با استفاده از آنها محاسبه می‌کنیم:

$$y'_۵ = f_۱(x_۵, y_۵, z_۵), \quad z'_۵ = f_۲(x_۵, y_۵, z_۵)$$

(۶) اعداد $p_۵ = hy'_۵$ و $q_۵ = hz'_۵$ را یافته و آنها را در جدول وارد می‌کنیم و جدول تفاضلات را تکمیل کرده و محاسبات را با فرمول (۸-۶۳) برای $k = ۴$ ادامه می‌دهیم.

در اینجا ما مقادیر بدست آمده را با فرمول‌های تصحیح مشخص نکردیم، چون مقادیر تصحیح شده تفاضلات با مقادیر پیش‌بینی شده آنها در حدود دقت محاسبات، مطابقت دارد. برای مثال برای $k = ۴$:

$$\Delta y_۴^{\mathrm{corr}} = ۰٫۰۱۵۷۰ + \frac{۱}{۲} \times ۰٫۰۱۱۲۸ - \frac{۱}{۱۲} \times ۰٫۰۰۳۵۸ - \frac{۱}{۲۴} \times ۰٫۰۰۰۶۶ = ۰٫۰۲۱۰۱,$$
$$\Delta z_۴^{\mathrm{corr}} = ۰٫۱۴۴۶۸ + \frac{۱}{۲} \times ۰٫۰۰۹۹۲ - \frac{۱}{۱۲}(-۰٫۰۰۰۰۳) = ۰٫۱۴۹۶۴.$$

مسائل

۱ـ با استفاده از روش آدامز با دقت 10^{-2} جواب‌های عددی معالات دیفرانسیل و دستگاه‌های معادلات زیر را برای مقادیر آرگومان‌های داده شده بدست آورید. بازه اولیه را به روش رانگ‌ـکوتا پیدا کنید.

الف) $y' = x + y,\ y(0) = 1,\ \ y(0/5) = ?$

ب) $y' = x^2 + y,\ y(0) = 1,\ \ y(1) = ?$

پ) $y' = 2y - 3,\ y(0) = 1,\ \ y(0/5) = ?$

مقدار y و z را برای $x = 0/5$ پیدا کنید.

ت) $$\left.\begin{array}{l} y' = -x + 2y + z, \\ z' = x + 2y + 3z, \end{array}\right\} y(0) = 2,\ z(0) = -2,$$

مقدار y و z را برای $x = 0/5$ پیدا کنید.

ث) $$\left.\begin{array}{l} y' = -3y - z \\ z' = y - z, \end{array}\right\} y(0) = 2,\ z(0) = -1,$$

۲ـ با استفاده از روش آدامز معادلات دیفرانسیل زیر را در بازه $[a, b]$ و با دقت 10^{-4} به صورت عددی حل کنید. بازه اولیه را به وسیله روش رانگ‌ـکوتا پیدا کنید.

الف) $y' = xy^3 - y$، $y(0) = 1$، $a = 0$، $b = 1$

ب) $y' = y^2e^x + 2y$، $y(0) = 1$، $a = 0$، $b = 1$

پ) $y' = \frac{1}{y^2 - x}$، $y(1) = 0$، $a = 1$، $b = 2$

با استفاده از روش آدامز جدول‌های حل عددی معادلات زیر را با شرط اولیه $x(0) = 0$ برای دو فاصله تشکیل دهید. مقدار h را برابر $0/1$ بگیرید. بازه اولیه را با روش رانگ‌ـکوتا پیدا کنید (بخش ۸ـ۷ مسائل ۲ تا ۸ را ببینید).

۳. $x' = \frac{\cos bt}{a + x^2},\ a = 1/0 + 0/4 \times n,\ n = 0, 1, \ldots, 5,\ b = 1/0 + 0/8 \times k,$
$k = 0, 1, 2.$

۴. $x' = \frac{a}{t^2 + x^2 + b},\ a = 1/0 + 0/4 \times n,\ n = 0, 1, \ldots, 5,$
$b = 1/0 + 0/4 \times k,\ k = 0, 1, \ldots, 5.$

۵. $x' = e^{at}(x^2 + b),\ a = 1/0 + 0/4 \times n,\ n = 0, 1, \ldots, 5;$
$b = 1/0 + 0/4 \times k,\ k = 0, 1, \ldots, 5.$

۶. $x' = \cos(at + x) + (t - x),\ a = 1/0 + 0/4 \times k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, 5.$

۷. $x' = 1 - \sin(at + x) + \frac{bx}{2 + t},\ a = 1/0 + 0/4 \times k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, 5,$
$b = 1/0 + 0/8n,\ n = 0, 1, 2.$

۸. $x' = \frac{\cos x}{a + t} + x^2,\ a = 1/0 + 0/4 \times k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, 5.$

۹. $x' = 1 + ax\sin t - x^2,\ a = 1/0 + 0/4 \times k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, 5.$

با استفاده از روش آدامز جدول‌های عددی دستگاه‌های زیر را با شرایط اولیه مشخص شده تشکیل دهید. مقدار h را برابر ۰٫۱ بگیرید. بازه اولیه را با روش رانگ‌ـکوتا پیدا کنید (بخش ۸ـ۷ مسائل ۹ تا ۱۳ را ببینید).

۱۰. $\left.\begin{array}{l} x' = \cos(x+at)+b, \\ y' = \frac{a}{t+bx^2}+t+1, \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x(0)=1, y(0)=0/05, \\ a = 2/0 + 0/5\times n, n = 0, 1, 2, 3, \\ b = 2/0 + 0/5 \times k, k = 0, 1, 2, \ldots, 5. \end{array}$

۱۱. $\left.\begin{array}{l} x' = \sin(at^3)+t+y, \\ y' = t+x-by^2+1, \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x(0)=1, y(0)=0/05, a = 2/0 + 0/5\times n, \\ n = 0, 1, 2, 3,\ b = 2/0 + 0/5 \times k, \\ k = 0, 1, 2, \ldots, 5. \end{array}$

۱۲. $\left.\begin{array}{l} x' = \sqrt{t^2+ax^2}+y, \\ y' = \cos(by)+x, \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x(0)=0/5, y(0)=1, a = 2/0 + 0/5\times n, \\ n = 0, 1, 2, 3, b = 2/0 + 0/5 \times k, \\ k = 0, 1, 2, \ldots, 5. \end{array}$

۱۳. $\left.\begin{array}{l} x' = e^{-(x^2+y^2)}+at, \\ y' = bx^2+y, \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x(0)=0/5, y(0)=1, a = 2/0 + 0/5\times n, \\ n = 0, 1, 2, 3, b = 2/0 + 0/5 \times k, \\ k = 0, 1, 2, \ldots, 5. \end{array}$

۱۴. $\left.\begin{array}{l} x' = \ln(bt+\sqrt{a^2t^2+y^2}) \\ y' = \sqrt{a^2t^2+x^2}, \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x(0)=1, y(0)=0/5, \\ a = 2/0 + 0/5\times n, n = 0, 1, 2, 3, \\ b = 2/0 + 0/5 \times k, k = 0, 1, 2, \ldots, 5. \end{array}$

۱۵ـ با استفاده از روش آدامز حل عددی معادلات دیفرانسیل زیر را برای $x = 0/2$ بدست آورید. مقادیر بدست آمده در مسئله ۱۴ بخش ۸ـ۲ را برای بازه اولیه بکار ببرید.

الف) $y' = y^2 + x^2,\ y(0) = 0/5,$

ب) $\left.\begin{array}{l} y' = xy+z, \\ z' = y-z, \end{array}\right\} y(0) = 0,\ z(0) = 1,$

پ) $\left.\begin{array}{l} y' = x+z^2, \\ z' = xy, \end{array}\right\} y(0) = 1,\ z(0) = 1,$

۸ـ۹ـ روش میلن[1]

فرض کنید که برای معادله (۸-۵۷) با شرط اولیه $y(x_0) = y_0$، بازه اولیه مشخص شود یعنی مقادیر تابع

1) Milne

مورد نظر $y_i = y(x_i)$ برای نقاط $x_i = x_۰ + ih$ برای $i = ۱,۲,۳$ (می‌توانند توسط یکی از روش‌های تشریح شده در قبل بدست آیند). مقادیر بعدی y_i $(i = ۴,۵,\ldots,)$ بطریقه زیر بدست می‌آیند ([۱۳] را ببینید). برای پیش‌بینی، فرمول اول میلن مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$y_i^{\text{pred}} = y_{i-۴} + \frac{۴h}{۳}(۲y'_{i-۳} - y'_{i-۲} + ۲y'_{i-۱}) \qquad (۶۶\text{-}۸)$$

با استفاده از y_i^{pred}، بدست می‌آوریم ($y'_i = f(x_i, y_i^{\text{pred}})$) و تصحیح را با فرمول دوم میلن انجام می‌دهیم:

$$y_i^{\text{corr}} = y_{i-۲} + \frac{h}{۳}(y'_{i-۲} + ۴y'_{i-۱} + y'_i) \qquad (۶۷\text{-}۸)$$

خطای مطلق ε_i مقدار صحیحتر y_i^{corr}، بطور تقریبی با فرمول زیر برآورد می‌شود:

$$\varepsilon_i \approx \frac{۱}{۲۹}|y_i^{\text{corr}} - y_i^{\text{perd}}| \qquad (۶۸\text{-}۸)$$

این فرمول ما را قادر می‌سازد تا دقت نتایج بدست آمده را مرحله به مرحله وارسی کنیم. اگر ما جواب مطلوب را با دقت ε بدست آوریم و داشته باشیم $\varepsilon_i \leq \varepsilon$، آنگاه می‌توان قرار داد $y_i \approx y_i^{\text{corr}}$ و برای محاسبه $y_{i+۱}$ اقدام کرد. در غیر این صورت فاصله h را می‌بایست کاهش داد.
جملات باقیمانده از فرمول‌های (۸-۶۷) و (۸-۶۸) برای هر فاصله $(x_i, x_i + h)$ از رتبه $o(h^۵)$ و برای کل بازه $[x_۰, x_n]$ از رتبه $o(h^۴)$ است.
روش میلن در پیدا کردن جواب تقریبی دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل مرتبه اول کاربرد دارد، که برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه‌های بالاتر ابتدا می‌بایستی آن‌را به چنین دستگاه‌هایی تبدیل کرد.

مثال ۸ـ۱۹ـ با استفاده از روش میلن با دقت ۳×۱۰^{-۴} در بازه $[۰,۱]$ جواب معادله

$$xy'' + y' + xy = ۰ \qquad (۶۹\text{-}۸)$$

را با شرایط اولیه $y(۰) = ۱$ و $y'(۰) = ۰$ بدست آورید.

حل‌ـ معادله (۸-۶۹) را به یک دستگاه تبدیل می‌کنیم. در این مورد از تغییر متغیر $xy' = z$ استفاده می‌کنیم. نهایتاً دستگاه زیر را بدست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} y' = \frac{z}{x} \\ z' = -xy \end{array}\right\} \qquad (۷۰\text{-}۸)$$

با شرایط اولیه $y(۰) = ۱$ و $z(۰) = ۰$.

مقدار h را برابر ۰٫۲ می‌گیریم. برای بدست آوردن بازه اولیه از جواب مسئله ۱۲ بخش ۸ـ۲ استفاده می‌کنیم که در آن جواب معادله (۸-۷۰) به صورت یک سری بدست آمده بود. $y(x)$ را به صورتی در نظر می‌گیریم که تنها جملاتی که برای $x_۳ = ۰٫۶$ منجر به مقداری بزرگتر از $۱۰^{-۴}$ می‌شوند باقی بمانند:

$$y(x) \approx ۱ - \frac{x^۲}{۴} + \frac{x^۴}{۱۶} - \frac{x^۶}{۳۸۴}$$

در نتیجه $z' \approx -x + \frac{x^۳}{۴} - \frac{x^۵}{۶۴}$. با نگه داشتن جملاتی که از $۱۰^{-۴}$ در نقطه $x_۳ = ۰٫۶$ بزرگتر هستند، بدست می‌آوریم $z(x) \approx -\frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۴}{۱۰} - \frac{x^۶}{۳۸۴}$.

جدول ۸-۲۱) حل دستگاه (۸-۷۱) بروش میلن

i	x_i	y_i	z_i	y'_i	z'_i	y تفاضل	z تفاضل	
۰	۰	۱	۰	۰	۰			
۱	۰٫۲	۰٫۹۹۰۰	−۰٫۰۱۹۹۰	−۰٫۰۹۹۵	−۰٫۱۹۸۰			
۲	۰٫۴	۰٫۹۶۰۴	−۰٫۰۷۸۴۱	−۰٫۱۹۶۰	−۰٫۳۸۴۲			
۳	۰٫۶	۰٫۹۱۲۰	−۰٫۱۷۲۰۲	−۰٫۲۸۶۷	−۰٫۵۴۷۲			
۴	۰٫۸	۰٫۸۴۶۳	−۰٫۲۹۵۰	−۰٫۳۶۸۸	−۰٫۶۷۷۰	−۰٫۱۵۳۷	−۰٫۲۹۵۰	پیش بینی
		۰٫۸۴۶۳	−۰٫۲۹۵۱	−۰٫۳۶۸۹	−۰٫۶۷۷۰	−۰٫۱۱۴۱	−۰٫۲۱۶۷	تصحیح
۵	۱٫۰	۰٫۷۶۵۲	−۰٫۴۴۰۰	−۰٫۴۴۰۰	−۰٫۷۶۵۲			پیش بینی
		۰٫۷۶۵۲	−۰٫۴۴۰۰					تصحیح

پر کردن جدول: (۱) یک جدول از مقادیر چهار رقمی $y(x)$ و $z(x)$ برای $x_۱ = ۰٫۲$، $x_۲ = ۰٫۴$ و $x_۳ = ۰٫۶$ تشکیل می‌دهیم (جدول ۸-۲۱).

(۲) مقادیر $y'_i = z_i/x_i$ و $z'_i = -x_i y_i$ $(i = ۰, ۱, ۲, ۳)$ را محاسبه می‌کنیم.

(۳) تفاضلات y و تفاضلات z پیش‌بینی را با فرمول (۸-۶۷) محاسبه می‌کنیم:

$$y_۴^{\text{pred}} - y_۰ = \frac{۴h}{۳}(۲y'_۱ - y'_۲ + ۲y'_۳) = -۰٫۱۵۳۷,$$
$$z_۴^{\text{pred}} - z_۰ = \frac{۴h}{۳}(۲z'_۱ - z'_۲ + ۲z'_۳) = -۰٫۲۹۵۰.$$

نتایج را در سطر $i = ۴$ وارد می‌کنیم.

(۴) مقادیر پیش‌بینی شده توابع مورد نظر را در نقطه $x_۴ = ۰٫۸$ محاسبه می‌کنیم:

$$y_۴^{\text{pred}} = ۱ - ۰٫۱۵۳۷ = ۰٫۸۴۶۳,$$
$$z_۴^{\text{pred}} = ۰ - ۰٫۲۹۵۰ = -۰٫۲۹۵۰.$$

این مقادیر را در سطر $i = ۴$ نوشته و مقادیر $y'_۴ = \frac{z_۴^{\text{pred}}}{x_۴}$ و $z'_۴ = -x_۴ y_۴^{\text{pred}}$ را بدست می‌آوریم.

(۵) تفاضلات y و z تصحیح شده را با فرمول (۸-۶۸) محاسبه می‌کنیم:

$$y_۴^{\text{corr}} - y_۲ = \frac{h}{۳}(y'_۲ - ۴y'_۳ + y'_۴) = -۰٫۱۱۴۱,$$
$$z_۴^{\text{corr}} - z_۲ = \frac{h}{۳}(z'_۲ - ۴z'_۳ + z'_۴) = -۰٫۲۱۶۷.$$

نتایج را در سطر $i=۴$ وارد می‌کنیم.
(۶) مقادیر تصحیح شده توابع مورد نظر را در نقطه $x_۴ = ۰٫۸$ محاسبه می‌کنیم:

$$y_۴^{\text{corr}} = ۰٫۹۶۰۴ - ۰٫۱۱۴۱ = ۰٫۸۴۶۳,$$
$$z_۴^{\text{corr}} = -۰٫۰۷۸۴ - ۰٫۲۱۶۷ = -۰٫۲۹۵۱.$$

(۷) چون اختلاف بین مقادیر پیش‌بینی شده و تصحیح شده از $۱۰^{-۴}$ بیشتر نیست قرار می‌دهیم $z_۴ = -۰٫۲۹۵۱$ و $y_۴ = ۰٫۸۴۶۳$ و محاسبه را برای $i = ۵$ ادامه می‌دهیم.

توجه- روش میلن پایدار نمی‌شود (دارای ثبات نیست)، بنابراین استفاده از آن تنها برای مواقعی که تعداد نقاط مشخص شده بازه کم هستند توصیه می‌شود.

مسائل

با استفاده از روش میلن با دقت $۱۰^{-۴}$ جواب معادلات زیر را در بازه $[a,b]$ با شرایط اولیه داده شده بدست آورید. بازه اولیه را به وسیله یکی از روش‌های تشریح شده قبلی بدست آورید.

۱. $y' = -\frac{y}{x} - \frac{۲y^۲}{\alpha}\ln x,\ y(۱) = ۱,\ a = ۱,\ b = ۲,\ \alpha = ۰٫۵ + ۰٫۲۵ \times k,$
$k = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۲۰.$
۲. $y' = \frac{۱}{\alpha \cos x} - y\tan x,\ y(۰) = ۱,\ a = ۰,\ b = ۱,\ \alpha = ۰٫۲ + ۰٫۰۱ \times k,$
$k = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۲۰.$

۸-۱۰ روش ای.ان.کرایلف[۱] برای پیدا کردن بازه اولیه

روش‌های میلن و آدامز با داشتن چهار مقدار اولیه از تابع مورد نظر فراخوانی می‌شود. اگر عضو سمت راست معادله

$$y' = f(x,y) \tag{۷۱-۸}$$

تحلیلی باشد آنگاه مقادیر اولیه لازم را می‌توان با یکی از روش‌های تشریح شده قبلی بدست آورد (روش تقریب‌های متوالی، روش سری توان، روش رانگ-کوتا). امّا اگر عضو سمت راست معادله (۸-۷۲) به صورت جدولی مشخص شده باشد آنگاه برای ساختن بازه اولیه استفاده از روش نزدیک شدن متوالی ([۱۳] و [۲۰] را ببینید) پیشنهاد شده توسط کرایلف و بهبود یافته توسط میلن بسیار مناسب است.

1) A.N.Kraylov

اجازه دهید رهنوشت زیر را معرفی کنیم:

$$x_i = x_0 + ih, y_i = y(x_i), \quad y'_i = f(x_i, y_i),$$
$$q_i = hy'_i = hf(x_i, y_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

روش مورد نظر بر مبنای پردازش تکراری نقاط با استفاده از فرمول اولر، آدامز و میلن است.

حل مسئله.

جدول ۸-۲۲) محاسبه بازه اولیه به کمک روش نزدیک شدن متوالی

نزدیکی	i	x	y	Δy	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
I	-1	x_{-1}	$y_{-1}^{(1)}$	$\Delta y_{-1}^{(1)}$	$q_{-1}^{(1)}$	$\Delta q_{-1}^{(1)}$	$\Delta^2 q_{-1}^{(1)}$	
	0	x_0	y_0	$\Delta y_0^{(1)}$	q_0	$\Delta q_0^{(1)}$		
	1	x_1	$y_1^{(1)}$		$q_1^{(1)}$			
II	-1	x_{-1}	$y_{-1}^{(2)}$	$\Delta y_{-1}^{(2)}$	$q_{-1}^{(2)}$	$\Delta q_{-1}^{(2)}$	$\Delta^2 q_{-1}^{(2)}$	$\Delta^3 q_{-1}^{(2)}$
	0	x_0	y_0	$\Delta y_0^{(2)}$	q_0	$\Delta q_0^{(2)}$	$\Delta^2 q_0^{(2)}$	
	1	x_1	$y_1^{(2)}$	$\Delta y_1^{(2)}$	$q_1^{(2)}$	$\Delta q_1^{(2)}$		
	2	x_2	$y_2^{(2)}$		$q_2^{(2)}$			
III	0	x_0	y_0	$\Delta y_0^{(3)}$	q_0	$\Delta q_0^{(3)}$	$\Delta^2 q_0^{(3)}$	$\Delta^3 q_0^{(3)}$
	1	x_1	$y_1^{(3)}$	$\Delta y_1^{(3)}$	$q_1^{(3)}$	$\Delta q_1^{(3)}$	$\Delta^2 q_1^{(3)}$	
	2	x_2	$y_2^{(3)}$	$\Delta y_2^{(3)}$	$q_2^{(3)}$	$\Delta q_2^{(3)}$		
	3	x_3	$y_3^{(3)}$		$q_3^{(3)}$			

Iـ نزدیکی اول: به کمک فرمول اولر قرار می‌دهیم:

$$\Delta y_0^{(1)} = q_0 = hf(x_0, y_0), \ \Delta y_{-1}^{(1)} = q_0$$

و محاسبه می‌کنیم $y_1^{(1)} = y_0 + \Delta y_0^{(1)}$ و $y_{-1}^{(1)} = y_0 - \Delta_{y-1}^{(1)}$ و سپس بدست می‌آوریم $q_1^{(1)} = hf(x_1, y_1^{(1)})$ و $q_{-1}^{(1)} = hf(x, y_{-1}^{(1)})$ و تفاضلات $\Delta q_0^{(1)} = q_1^{(1)} - q_0$ و $\Delta q_{-1}^{(1)} = q_0 - q_{-1}^{(1)}$ و $\Delta^2 q_{-1}^{(1)} = \Delta q_0^{(1)} - \Delta q_{-1}^{(1)}$ را تشکیل می‌دهیم. تمام نتایج حاصله را در بخش I جدول ۸-۲۲ وارد می‌کنیم.

IIـ نزدیکی دوم: مقادیر Δy_0 و Δy_{-1} را توسط فرمول درون‌یابی آدامز (۸-۵۹) و فرمول تصحیح میلن (۸-۵۸) محاسبه می‌کنیم (با حذف تمام تفاضلات بالاتر از رتبه دوم):

$$\Delta y_0^{(2)} = q_0 + \frac{1}{2}\Delta q_0^{(1)} - \frac{1}{12}\Delta^2 q_{-1}^{(1)}, \quad \Delta y_{-1}^{(2)} = q_0 - \frac{1}{2}\Delta q_{-1}^{(1)} - \frac{1}{12}\Delta^2 q_{-1}^{(1)},$$

و همچنین

$$\Delta y_{-۱}^{(۲)} + \Delta y_{۰}^{(۲)} = y_{۱} - y_{-۱} = ۲q_{۰} + \frac{۱}{۳}\Delta^{۲} q_{-۱}^{(۱)} = \frac{۱}{۳}(q_{-۱}^{(۱)} + ۴q_{۰} + q_{۱}^{(۱)}).$$

سپس مقدار $\Delta y_{۱}^{(۲)}$ را به وسیله فرمول درون‌یابی آدامز (۸-۵۷) پیش‌بینی می‌کنیم:

$$\Delta y_{۱}^{(۲)} = q_{۱}^{(۱)} + \frac{۱}{۲}\Delta q_{۰}^{(۱)} + \frac{۵}{۱۲}\Delta^{۲} q_{(}^{۱} - ۱)$$

این ما را قادر می‌سازد تا تقریب‌های زیر را محاسبه کنیم:

$$y_{-۱}^{(۲)} = y_{۰} - \Delta y_{-۱}^{(۲)},$$
$$y_{۱}^{(۲)} = y_{۰} + \Delta y_{۰}^{(۲)}, \quad y_{۲}^{(۲)} = y_{۱}^{(۲)} + \Delta y_{۱}^{۲},$$

و سرانجام می‌توانیم بدست آوریم:

$$q_{-۱}^{(۲)} = hf(x, y_{-۱}^{(۲)}), \quad q_{۱}^{(۲)} = hf(x_{۱}, y_{۱}^{(۲)}), \quad q_{۲}^{(۲)} = hf(x_{۲}, y_{۲}^{(۲)}).$$

نتایج را در بخش II جدول ۸-۲۲ وارد کرده و تفاضلات $\Delta q_{-۱}^{(۲)}$، $\Delta q_{۰}^{(۲)}$، $\Delta q_{۱}^{(۲)}$، $\Delta^{۲} q_{-۱}^{(۲)}$، $\Delta^{۲} q_{۰}^{(۲)}$ و $\Delta^{۳} q_{-۱}^{(۲)}$ را محاسبه می‌کنیم.

IIIـ نزدیکی سوم. حالا ما به تعداد کافی نقطه برای ادامه محاسبه پیدا کرده‌ایم. امّا لازم است که نقاط پیدا شده را با فرمول‌های تکمیل (۸-۵۷) و (۸-۵۸) مشخص کنیم.

در نتیجه:

$$\Delta y_{۰}^{(۳)} = q_{۰} + \tfrac{۱}{۲}\Delta q_{۰}^{(۲)} - \tfrac{۱}{۱۲}\Delta^{۲} q_{-۱}^{(۲)} - \tfrac{۱}{۲۴}\Delta^{۳} q_{-۱}^{(۲)},$$
$$\Delta y_{۱}^{(۳)} = q_{۱}^{(۲)} + \tfrac{۱}{۲}\Delta q_{۱}^{(۲)} - \tfrac{۱}{۱۲}\Delta^{۲} q_{۰}^{(۲)} - \tfrac{۱}{۲۴}\Delta^{۳} q_{-۱}^{(۲)}.$$

حالا می‌توانیم $\Delta y_{۲}^{(۳)}$ را به وسیله فرمول آدامز پیدا کنیم:

$$\Delta y_{۲}^{(۳)} = q_{۲}^{(۲)} + \frac{۱}{۲}\Delta q_{۱}^{(۲)} + \frac{۵}{۱۲}\Delta^{۲} q_{۰}^{(۲)} + \frac{۳}{۸}\Delta^{۳} q_{-۱}^{(۲)}$$

در نتیجه:

$$y_{۱}^{(۳)} = y_{۰} + \Delta y_{۰}^{(۳)}, \ y_{۲}^{(۳)} = y_{۱}^{(۳)} + \Delta y_{۱}^{(۳)}, \ y_{۳}^{(۳)} = y_{۲}^{(۳)} + \Delta y_{۲}^{(۳)}.$$

سپس ما مقادیر $q_{۱}^{(۳)}$، $q_{۲}^{(۳)}$ و $q_{۳}^{(۳)}$ را محاسبه کرده و نتایج را در بخش III جدول وارد می‌کنیم و تفاضلات $\Delta q_{۰}^{(۳)}$، $\Delta q_{۱}^{(۳)}$ و $\Delta q_{۲}^{(۳)}$ را محاسبه می‌کنیم و به همین ترتیب الی آخر.

اگر فاصله h به صورت مناسب انتخاب شده باشد آنگاه محاسبه دوباره توسط فرمول‌های آدامز مقدار $\Delta y_{۰}$ و $\Delta y_{۱}$ را بطور قابل ملاحظه‌ای تغییر نمی‌دهد. حالا تنها چیزی که باقی مانده است مشخص کردن $y_{۲}^{(۳)}$ و انجام یک محاسبه تکراری برای مقادیر $y_{۳}$، $q_{۳}$، $\Delta q_{۲}$، $\Delta^{۲} q_{۱}$ و $\Delta^{۳} q_{۰}$ است.

توجه. اگر عضو سمت راست معادله (۸-۷۱) به صورت تحلیلی با فرمول‌های خیلی پیچیده مشخص شده باشد، آنگاه روش نزدیک شدن متوالی نسبت به روش رانگ‌ـکوتا در زمان صرفه‌جویی می‌کند (بدون اینکه در دقت حاصله تغییری حاصل شود). در عمل در استفاده از روش رانگ‌ـکوتا، محاسبه مقادیر تابع $f(x,y)$ را برای هر فاصله چهار بار انجام می‌دهیم و سه مقدار اولیه ۱۲ مرتبه محاسبه می‌شوند، در صورتی‌که در محاسبه بازه اولیه توسط روش کرایلف مقادیر تابع $f(x,y)$ هفت مرتبه محاسبه می‌شوند.

مثال ۸ـ۲۰. حل عددی معادله

$$y' = 2x + y \qquad (8\text{-}72)$$

را با شرط اولیه $y(0) = 0{,}1$ و فاصله $h = 0{,}1$ بدست آورید.

حل. اجازه دهید حل عددی معادله داده شده را به کمک روش آدامز و استفاده از روش کرایلف برای محاسبه بازه اولیه استفاده کنیم. نتایج با دقت 10^{-4} در جدول ۸-۲۳ آمده است.

جدول ۸-۲۳) حل معادله (۸-۷۲) به روش آدامزـکرایلف

نزدیکی	i	x	y	Δy	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
I	-1	$-0{,}1$	$0{,}0900$	$0{,}0100$	$-0{,}0110$	210	0	
	0	$0{,}0$	$0{,}1000$	$0{,}0100$	$0{,}0100$	210		
	1	$0{,}1$	$0{,}1100$		$0{,}0310$			
II	-1	$-0{,}1$	$0{,}1005$	$-0{,}0005$	$-0{,}0100$	200	20	3
	0	$0{,}0$	$0{,}1000$	$0{,}0205$	$0{,}0100$	220	23	
	1	$0{,}1$	$0{,}1205$	$0{,}0425$	$0{,}0320$	243		
	2	$0{,}2$	$0{,}1630$		$0{,}0563$			
III	0	0	$0{,}100$	$0{,}0208$	$0{,}0100$	221	23	2
	1	$0{,}1$	$0{,}1208$	$0{,}0440$	$0{,}0321$	244	25	4
	2	$0{,}2$	$0{,}1648$	$0{,}0697$	$0{,}0565$	269	29	3
	3	$0{,}3$	$0{,}2345$	$0{,}0980$	$0{,}0834$	298	32	2
IV	4	$0{,}4$	$0{,}3325$	$0{,}1295$	$0{,}1132$	330	34	
	5	$0{,}5$	$0{,}4620$	$0{,}1641$	$0{,}1462$	364		
	6	$0{,}6$	$0{,}6261$		$0{,}1826$			

پر کردن جدول:

I- نزدیکی اول- در بخش I می‌نویسیم $x_{-1} = -0.1$، $x_0 = 0$ و $x_1 = 0.1$ و محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{gathered}
\Delta y_{-1}^{(1)} = \Delta y_0^{(1)} = 0.1 \times 0.1 = 0.0100, \\
y_1^{(1)} = y_0 + \Delta y_0^{(1)} = 0.1 + 0.0100 = 0.1100, \quad y_{-1}^{(1)} = 0.1 - 0.0100 = 0.0900, \\
q_1^{(1)} = 0.1(2x_1 + y_1^{(1)}) = 0.1(0.2 + 0.110) = 0.0310, \\
q_{-1}^{(1)} = 0.1(-0.2 + 0.090) = -0.0110,
\end{gathered}$$

و همچنین تمام تفاضلات q را بدست می‌آوریم.

II- نزدیکی دوم-

$$\begin{aligned}
\Delta y_{-1}^{(2)} &= 0.0100 - 0.5 \times 0.0210 = -0.0005, \\
\Delta y_0^{(2)} &= 0.0100 + 0.5 \times 0.0210 = 0.0205, \\
\Delta y_1^{(2)} &= 0.0310 + 0.5 \times 0.0210 = 0.0415.
\end{aligned}$$

سپس

$$\begin{gathered}
y_{-1}^{(2)} = 0.1000 + 0.0005 = 0.1005, \; y_1^{(2)} = 0.1000 + 0.0205 = 0.1205, \\
y_2^{(2)} = 0.1205 + 0.0425 = 0.1630.
\end{gathered}$$

محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
q_{-1}^{(2)} &= 0.1(2x_{-1} + y_{-1}^{(2)}) = 0.1(-0.2 + 0.1005) = -0.0100, \\
q_1^{(2)} &= 0.1(2x_1 + y_1^{(2)}) = 0.1(0.2 + 0.1205) = 0.0320, \\
q_2^{(2)} &= 0.1(2x_2 + y_2^{(2)}) = 0.1(0.4 + 0.1630) = 0.0563.
\end{aligned}$$

نتایج را در بخش II وارد کرده و تفاضلات را محاسبه می‌کنیم.

III- نزدیکی سوم:

$$\begin{aligned}
\Delta y_0^{(3)} &= 0.0100 + \tfrac{1}{2}0.0220 - \tfrac{1}{12}0.0020 = 0.0208, \\
\Delta y_1^{(3)} &= 0.0320 + \tfrac{1}{2}0.0243 - \tfrac{1}{12}0.0023 = 0.0440, \\
\Delta y_2^{(3)} &= 0.0563 + \tfrac{1}{2} \times 0.0243 + \tfrac{5}{12} \times 0.0023 + \tfrac{3}{8} \times 0.0003 = 0.0695.
\end{aligned}$$

سپس

$$\begin{aligned}
y_1^{(3)} &= 0.1000 + 0.0208 = 0.1208, \\
y_2^{(3)} &= 0.1208 + 0.0440 = 0.1648, \\
y_3^{(3)} &= 0.1648 + 0.0695 = 0.2343.
\end{aligned}$$

محاسبه مقادیر q و تفاضلات آن نشان می‌دهد که فاصله بطور مناسب انتخاب شده است و بازه اولیه با دقت کافی بدست آمده است (خطا از 3×10^{-4} بیشتر نیست).

IVـ ادامه محاسبات. و اینجا پایان محاسبه بازه اولیه است. محاسبات بعدی به وسیله روش آدامز انجام می‌گیرد. ابتدا y_3 را بدست می‌آوریم:

$$\Delta y_2^{\text{corr}} = 0{,}0565 + \tfrac{1}{2}\times 0{,}0269 - \tfrac{1}{12}\times 0{,}0025 = 0{,}0697,$$
$$y_3^{\text{corr}} = 0{,}1648 + 0{,}0697 = 0{,}2345.$$

سپس برای $i=4$ بدست می‌آوریم:

$$\Delta y_3 = q_3 + \tfrac{1}{2}\Delta q_2 + \tfrac{5}{12}\Delta^2 q_1 + \tfrac{3}{8}\Delta^3 q_0 =$$
$$= 0{,}0834 + \tfrac{1}{2}\times 0{,}269 + \tfrac{5}{12}\times 0{,}0025 + \tfrac{3}{8}\times 0{,}0002 = 0{,}0980.$$

سپس محاسبه می‌کنیم: $y_4 = y_3 + \Delta y_3 = 0{,}2343 + 0{,}980 = 0{,}3323$ که تصحیح به مقداری مشابه منجر شده است.

محاسبات برای $i=5,6$ بطور مشابه انجام می‌گیرد. توصیه می‌شود که محاسبات بعدی با $h=0{,}2$ و با جواب‌های عددی پیدا شده برای $x=0{,}0$، $0{,}2$، $0{,}4$ و $0{,}6$ مورد استفاده قرارگیرد (به عنوان بازه اولیه).

مثال ۸ـ۲۱ـ در بازه $[0,0{,}6]$ حل عددی دستگاه

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x+y \\ \frac{dy}{dt} &= -x+y \end{aligned}\right\} \tag{۸-۷۳}$$

را با شرایط اولیه $x(0)=1$، $y(0)=0$ و با دقت 5×10^{-4} بدست آورید.

حل‌ـ با در نظرگرفتن $h=0{,}1$ و معرفی رهنوشت زیر

$$f_1(x,y)=x+y,\ f_2(x,y)=-x+y,\ p=hf_1,\ q=hf_2$$

تمام مقادیر بازه اولیه محاسبه شده به وسیله روش کرایلف و محاسبات بعدی به وسیله روش آدامز در جدول ۸-۲۴ و ۸-۲۵ آمده است.

پر کردن جدول:

I نزدیکی اول‌ـ در جداول ۸-۲۴ و ۸-۲۵ مقادیر اولیه $t_0=0$، $x_0=1$ و $y_0=0$ را نوشته و محاسبه می‌کنیم: $p_0 = 0{,}1\times 1 = 0{,}1$، $q_0 = 0{,}1\times(-1) = -0{,}1$.

با استفاده از فرمول‌های نزدیکی اول بدست می‌آوریم:

$$\Delta x_{-1}^{(1)} = \Delta x_0^{(1)} = p_0 = 0{,}1,\ \Delta y_{-1}^{(1)} = \Delta y_0^{(1)} = q_0 = -0{,}1$$

که از آنجا

$$x_{-۱}^{(۱)} = ۱ - ۰٫۱ = ۰٫۹, \quad y_{-۱}^{(۱)} = ۰٫۱,$$
$$x_{۱}^{(۱)} = ۱ + ۰٫۱ = ۱٫۱, \quad y_{۱}^{(۱)} = -۰٫۱.$$

سپس مقادیر

$$p_{-۱}^{(۱)} = ۰٫۱(۰٫۹ + ۰٫۱) = ۰٫۱, \quad q_{-۱}^{(۱)} = ۰٫۱(-۰٫۹ + ۰٫۱) = -۰٫۰۸,$$
$$p_{۱}^{(۱)} = ۰٫۱(۱٫۱ - ۰٫۱) = ۰٫۱, \quad q_{۱}^{(۱)} = ۰٫۱(-۱٫۱ - ۰٫۱) = -۰٫۱۲$$

و تفاضلات متناظر را محاسبه می‌کنیم.

IIـ نزدیکی دوم- با استفاده از نتایج نزدیکی اول محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta x_{-۱}^{(۲)} = p_{۰} - \tfrac{۱}{۲}\Delta p_{-۱} - \tfrac{۱}{۱۲}\Delta^{۲} p_{-۱} = ۰٫۱,$$
$$\Delta x_{۰}^{(۲)} = p_{۰} + \tfrac{۱}{۲}\Delta p_{۰} - \tfrac{۱}{۱۲}\Delta^{۲} p_{-۱} = ۰٫۱,$$
$$\Delta x_{۱}^{(۲)} = p_{۱} + \tfrac{۱}{۲}\Delta p_{۰} + \tfrac{۵}{۱۲}\Delta^{۲} p_{-۱} = ۰٫۱,$$
$$\Delta y_{-۱}^{(۲)} = -۰٫۱۰ - \tfrac{۱}{۲}(-۰٫۰۲) = -۰٫۰۹,$$
$$\Delta y_{۰}^{(۲)} = -۰٫۱۰ + \tfrac{۱}{۲}(-۰٫۰۲) = -۰٫۱۱,$$
$$\Delta y_{۱}^{(۲)} = -۰٫۱۲ + \tfrac{۱}{۲}(-۰٫۰۲) = -۰٫۱۳,$$

که از آنجا بدست می‌آوریم:

$$x_{-۱}^{(۲)} = ۰٫۹, \quad y_{-۱}^{(۲)} = +۰٫۰۹,$$
$$x_{۱}^{(۲)} = ۱٫۱, \quad y_{۱}^{(۲)} = -۰٫۱۱,$$
$$x_{۲}^{(۲)} = ۱٫۲, \quad y_{۲}^{(۲)} = -۰٫۲۴.$$

سپس مقادیر

$$p_{-۱}^{(۲)} = ۰٫۱(۰٫۹ + ۰٫۰۹) = ۰٫۰۹۹, \quad q_{-۱}^{(۲)} = ۰٫۱(-۰٫۹ + ۰٫۰۹) = -۰٫۰۸۱,$$
$$p_{۱}^{(۲)} = ۰٫۱(۱٫۱ - ۰٫۱۱) = ۰٫۰۹۹, \quad q_{۱}^{(۲)} = ۰٫۱(-۱٫۱ - ۰٫۱۱) = -۰٫۱۲۱,$$
$$p_{۲}^{(۲)} = ۰٫۱(۱٫۲ - ۰٫۲۴) = ۰٫۰۹۶, \quad q_{۲}^{(۲)} = ۰٫۱(-۱٫۲ - ۰٫۲۴) = -۰٫۱۴۴$$

و تفاضلات متناظر را بدست می‌آوریم.

IIIـ نزدیکی سوم- با استفاده از نتایج نزدیکی دوم محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta x_{۰}^{(۳)} = p_{۰} + \tfrac{۱}{۲}\Delta p_{۰} - \tfrac{۱}{۱۲}\Delta^{۲} p_{-۱} - \tfrac{۱}{۲۴}\Delta^{۳} p_{-۱} = ۰٫۰۹۹۷,$$
$$\Delta x_{۱}^{(۳)} = p_{۱} + \tfrac{۱}{۲}\Delta p_{۱} - \tfrac{۱}{۱۲}\Delta^{۲} p_{۰} - \tfrac{۱}{۲۴}\Delta^{۳} p_{-۱} = ۰٫۰۹۷۷,$$
$$\Delta x_{۲}^{(۳)} = p_{۲} + \tfrac{۱}{۲}\Delta p_{۱} + \tfrac{۵}{۱۲}\Delta^{۲} p_{۰} + \tfrac{۳}{۸}\Delta^{۳} p_{-۱} = ۰٫۰۹۳۹,$$
$$\Delta y_{۰}^{(۳)} = -۰٫۱۰۰ + \tfrac{۱}{۲}(-۰٫۰۲۱) - \tfrac{۱}{۱۲}(-۰٫۰۰۲) = -۰٫۱۱۰۳,$$
$$\Delta y_{۱}^{(۳)} = -۰٫۱۲۱ + \tfrac{۱}{۲}(-۰٫۰۲۳) - \tfrac{۱}{۱۲}(-۰٫۰۰۲) = -۰٫۱۳۲۳,$$
$$\Delta y_{۲}^{(۳)} = -۰٫۱۴۴ + \tfrac{۱}{۲}(-۰٫۰۲۳) + \tfrac{۵}{۱۲}(-۰٫۰۰۲) = -۰٫۱۵۶۱,$$

که از آنجا

$$x_۱^{(۳)} = ۱٫۰۹۹۷, \quad y_۱^{(۳)} = -۰٫۱۱۰۳,$$
$$x_۲^{(۳)} = ۱٫۱۹۷۴, \quad y_۲^{(۳)} = -۰٫۲۴۲۶,$$
$$x_۳^{(۳)} = ۱٫۲۹۱۳, \quad y_۳^{(۳)} = -۰٫۳۹۸۷.$$

جدول ۸-۲۴) حل دستگاه (۸-۷۳) به روش آدامز_کرایلف. محاسبه $x(t)$

نزدیکی	i	t	x	Δx	$f_۱(x,y)$	p	Δp	$\Delta^۲ p$	$\Delta^۳ p$
I	−۱	−۰٫۱	۰٫۹	۰٫۱	۱٫۰	۰٫۱۰	۰	۰	
	۰	۰٫۰	۱٫۰	۰٫۱	۱٫۰	۰٫۱۰	۰		
	۱	۰٫۱	۱٫۱		۱٫۰	۰٫۱۰			
II	−۱	−۰٫۱	۰٫۹	۰٫۱	۰٫۸۹	۰٫۰۹۹	۱	−۲	۰
	۰	۰٫۰	۱٫۰	۰٫۱	۱٫۰۰	۰٫۱۰۰	−۱	−۲	
	۱	۰٫۱	۱٫۱	۰٫۱	۰٫۹۹	۰٫۰۹۹	−۳		
	۲	۰٫۲	۱٫۲		۰٫۹۶	۰٫۰۹۶			
III	۰	۰٫۰	۱٫۰۰۰۰	۰٫۰۹۹۷	۱٫۰۰۰۰	۰٫۱۰۰۰	−۱۱	−۲۳	−۵
	۱	۰٫۱	۱٫۰۹۹۷	۰٫۰۹۷۷	۰٫۹۸۹۴	۰٫۰۹۸۹	−۳۴	−۲۸	
	۲	۰٫۲	۱٫۱۹۷۴	۰٫۰۹۳۹	۰٫۹۵۴۸	۰٫۰۹۵۵	−۶۲		
	۳	۰٫۳	۱٫۲۹۱۳		۰٫۸۹۲۶	۰٫۰۸۹۳			
IV	۰	۰٫۰	۱٫۰۰۰۰	۰٫۰۹۹۶	۱٫۰۰۰۰	۰٫۱۰۰۰	−۱۱	−۲۴	−۴
	۱	۰٫۱	۱٫۰۹۹۶	۰٫۰۹۷۴	۰٫۹۸۹۳	۰٫۰۹۸۹	−۳۵	−۲۸	
	۲	۰٫۲	۱٫۱۹۷۰	۰٫۰۹۲۷	۰٫۹۵۴۴	۰٫۰۹۵۴	−۶۳		−۷
	۳	۰٫۳	۱٫۲۸۹۷		۰٫۸۹۰۸	۰٫۰۸۹۱		−۳۵	
تصحیح	۳	۰٫۳	۱٫۲۸۹۵	۰٫۰۸۴۶			−۹۸		−۴
پیش بینی	۴	۰٫۴	۱٫۳۷۴۱		۰٫۷۹۳۳	۰٫۰۷۹۳		−۳۹	
تصحیح	۴	۰٫۴	۱٫۳۷۴۰	۰٫۰۷۲۶			−۱۳۷		−۵
پیش بینی	۵	۰٫۵	۱٫۴۴۶۶		۰٫۶۵۶۲	۰٫۰۶۵۶		−۴۴	
تصحیح	۵	۰٫۵	۱٫۴۴۶۸	۰٫۰۵۷۰			−۱۸۱		
پیش بینی	۶	۰٫۶	۱٫۵۰۳۸		۰٫۴۷۴۸	۰٫۰۴۷۵			
تصحیح	۶	۰٫۶	۱٫۵۰۳۸						

جدول ۸-۲۵) حل دستگاه (۸-۷۳) به روش آدامز_کرایلف.محاسبه $y(t)$

نزدیکی	i	t	y	Δy	$f_۲(x,y)$	q	Δq	$\Delta^۲ q$	$\Delta^۳ q$
I	−۱	−۰٫۱	۰٫۱	−۰٫۱	−۰٫۸	−۰٫۰۸	−۲	۰	
	۰	۰٫۰	۰٫۰	−۰٫۱	−۱٫۰	−۰٫۱۰	−۲		
	۱	۰٫۱	−۰٫۱		−۱٫۲	−۰٫۱۲			
II	−۱	−۰٫۱	۰٫۰۹	−۰٫۰۹	−۰٫۸۱	−۰٫۰۸۱	−۱۹	−۲	۰
	۰	۰٫۰	۰٫۰۰	−۰٫۱۱	−۱٫۰۰	−۰٫۱۰۰	−۱۲	−۲	
	۱	۰٫۱	−۰٫۱۱	−۰٫۱۳	−۱٫۲۱	−۰٫۱۲۱	−۲۳		
	۲	۰٫۲	−۰٫۲۴		−۱٫۴۴	−۰٫۱۴۴			
III	۰	۰٫۰	۰٫۰۰۰۰	−۰٫۱۱۰۳	−۱٫۰۰۰۰	−۰٫۱۰۰۰	−۲۱۰	−۲۰	۱
	۱	۰٫۱	−۰٫۱۱۰۳	−۰٫۱۳۲۳	−۱٫۲۱۰۰	−۰٫۱۲۱۰	−۲۳۰	−۲۰	۰
	۲	۰٫۲	−۰٫۲۴۲۶	−۰٫۱۵۶۱	−۱٫۴۴۰۰	−۰٫۱۴۴۰	−۲۵۰	−۲۰	
	۳	۰٫۳	−۰٫۳۹۸۷		−۱٫۶۹۰۰	−۰٫۱۶۹۰			
IV	۰	۰٫۰	۰٫۰۰۰۰	−۰٫۱۱۰۳	−۱٫۰۰۰۰	−۰٫۱۰۰۰	−۲۱۰	−۲۰	۱
	۱	۰٫۱	−۰٫۱۱۰۳	−۰٫۱۳۲۳	−۱٫۲۰۹۹	−۰٫۱۲۱۰	−۲۳۰	−۱۹	
	۲	۰٫۲	−۰٫۲۴۲۶	−۰٫۱۵۶۳	−۱٫۴۳۹۶	−۰٫۱۴۴۰	−۲۴۹		۲
	۳	۰٫۳	−۰٫۳۹۸۹		−۱٫۶۸۸۶	−۰٫۱۶۸۹		−۱۷	
تصحیح	۳	۰٫۳	−۰٫۳۹۸۹	−۰ ۱۸۱۹			−۲۶۶		۱
پیش بینی	۴	۰٫۴	−۰٫۵۸۰۸		−۱٫۹۵۴۹	−۰٫۱۹۵۵		−۱۶	
تصحیح	۴	۰٫۴	−۰٫۵۸۱۰	−۰٫۲۰۹۴			−۲۸۲		۲
پیش بینی	۵	۰٫۵	−۰٫۷۹۰۴		−۲٫۲۳۷۰	−۰٫۲۲۳۷		−۱۴	
تصحیح	۵	۰٫۵	−۰٫۷۹۰۵	−۰٫۲۳۸۵			−۲۹۶		
پیش بینی	۶	۰٫۶	−۱٫۰۲۹۰		−۲٫۵۳۲۸	−۰٫۲۵۳۳			
تصحیح	۶	۰٫۶	−۱٫۰۲۸۹						

سپس محاسبه می‌کنیم:

$$p^{(۳)}_{۱} = ۰٫۱(۱٫۰۹۹۷ - ۰٫۱۱۰۳) = ۰٫۰۹۸۹, \quad q^{(۳)}_{۱} = -۰٫۱۲۱۰,$$
$$p^{(۳)}_{۲} = ۰٫۱(۱٫۱۹۷۴ - ۰٫۲۴۲۶) = ۰٫۰۹۵۵, \quad q^{(۳)}_{۱} = -۰٫۰۱۴۴۰,$$
$$p^{(۳)}_{۳} = ۰٫۱(۱٫۲۹۱۳ - ۰٫۳۹۸۷) = ۰٫۰۸۹۳, \quad q^{(۳)}_{۳} = -۰٫۰٫۱۶۹۰.$$

و تفاضلات مربوطه را بدست می‌آوریم.

IVـ نزدیکی چهارم جهت وارسی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\Delta x_0^{(4)} &= p_0 + \tfrac{1}{2}\Delta p_0 - \tfrac{1}{12}\Delta^2 p_0 + \tfrac{1}{24}\Delta^3 p_0 = 0.0996,\\
\Delta x_1^{(4)} &= p_1 + \tfrac{1}{2}\Delta p_1 - \tfrac{1}{12}\Delta^2 p_0 - \tfrac{1}{24}\Delta^3 p_0 = 0.0974,\\
\Delta x_2^{(4)} &= p_2 + \tfrac{1}{2}\Delta p_2 - \tfrac{1}{12}\Delta^2 p_1 - \tfrac{1}{24}\Delta^3 p_0 = 0.0927,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta y_0^{(4)} &= -0.1000 + \tfrac{1}{2}(-0.0210) - \tfrac{1}{12}(-0.0020) = -0.1103.\\
\Delta y_1^{(4)} &= -0.1210 + \tfrac{1}{2}(-0.0230) - \tfrac{1}{12}(-0.0020) = -01323,\\
\Delta y_2^{(4)} &= -0.1440 + \tfrac{1}{2}(-0.0250) - \tfrac{1}{12}(-0.0020) = -0.1563,
\end{aligned}$$

که از آنجا

$$\begin{aligned}
x_1^{(4)} &= 1.0996, \quad y_1^{(4)} = -0.1103,\\
x_2^{(4)} &= 1.1970, \quad y_2^{(4)} = -0.2426,\\
x_3^{(4)} &= 1.2897, \quad y_3^{(4)} = -0.3989.
\end{aligned}$$

سپس محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
p_1^{(4)} &= 0.1(1.0996 - 0.1103) = 0.0989, \quad q_1^{(4)} = -0.1210,\\
p_2^{(4)} &= 0.1(1.1970 - 0.2426) = 0.0954, \quad q_1^{(4)} = -0.1440,\\
p_3^{(4)} &= 0.1(1.2897 - 0.3989) = 0.0891, \quad q_3^{(4)} = -0.1689.
\end{aligned}$$

و تفاضلات متناظر را بدست می‌آوریم.
چون نتایج نزدیکی سوم و چهارم تنها به اندازه مقدار مجاز اختلاف دارند، نتایج نزدیکی چهارم را برای بازه اولیه در نظر می‌گیریم و با استفاده از فرمول زیر به عنوان فرمول پیش‌بینی:

$$\Delta x_i^{\text{pred}} = p_i + \frac{1}{2}\Delta p_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 p_{i-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 p_{i-3},$$

و فرمول تصحیح:

$$\Delta x_i^{\text{corr}} = p_i + \frac{1}{2}\Delta p_i - \frac{1}{12}\Delta^2 p_{i-1} + \frac{1}{24}\Delta^3 p_{i-2},$$

محاسبات بعدی را به کمک روش آدامز ادامه می‌دهیم.
برای مثال، اول تصحیح x_3:

$$\begin{aligned}
\Delta x_2 &= p_2 + \tfrac{1}{2}\Delta p_2 - \tfrac{1}{12}\Delta^2 p_1 - \tfrac{1}{24}\Delta^3 p_0 =\\
&= 0.0954 + \tfrac{1}{2}(-0.0063) - \tfrac{1}{12}(-0.0028) - \tfrac{1}{24}(-0.0004) = 0.0925\\
x_3^{\text{corr}} &= x_2 + \Delta x_2 = 1.2895.
\end{aligned}$$

و سپس پیش‌بینی x_4:

$$\Delta x_3 = p_3 + \tfrac{1}{2}\Delta p_2 - \tfrac{5}{12}\Delta^2 p_1 - \tfrac{3}{8}\Delta^3 p_3 =$$
$$= 0{,}0891 + \tfrac{1}{2}(-0{,}0063) - \tfrac{5}{12}(-0{,}0028) - \tfrac{3}{8}(-0{,}0004) = 0{,}0846,$$
$$x_4^{\text{pred}} = x_3 + \Delta x_3 = 1{,}3741.$$

انجام می‌گیرد.

توجه. ما می‌توانیم با بکارگیری روش سیدل برای حل تکراری دستگاه‌های معادلات خطی (فصل ۳ بخش ۳ـ۱۰)، در بعضی موارد پردازش نزدیکی در روش کرایلف را شتاب بدهیم. در این مورد روش سیدل را به صورت زیر مورد استفاده قرار می‌دهیم: با شروع از نزدیکی دوم، از مقادیر محاسبه شده p_i، Δ_{i-1} و... برای محاسبه تمام تفاضلات $\Delta x_i (i > 0)$ بعدی استفاده می‌کنیم.
در مثال آمده در بالا استفاده از روش سیدل انجام محاسبات با فاصله $h = 0{,}2$ را ممکن می‌سازد. چهار نزدیکی محاسبه شده توسط روش کرایلف و مقادیر شتاب داده شده توسط روش سیدل در جدول ۸-۲۶ و ۸-۲۷ آمده‌اند.

پر کردن جدول:
Iـ نزدیکی اول. به همان روش بالا محاسبه می‌شود امّا با فاصله $h = 0{,}2$.
IIـ نزدیکی دوم. با شروع از نقطه $t = 0$ انجام می‌گیرد. در ابتدا با استفاده از نتایج نزدیکی اول محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta x_0^{(2)} = p_0 + \tfrac{1}{2}\Delta p_0 - \tfrac{1}{12}\Delta^2 p_{-1} = 0{,}20,$$
$$\Delta y_0^{(2)} = q_0 + \tfrac{1}{2}\Delta q_0 - \tfrac{1}{12}\Delta^2 q_{-1} = -0{,}20 + \tfrac{1}{2}(-0{,}08) = -0{,}24,$$

که مقادیر $x_1^{(2)} = 1{,}2$ و $y_1^{(2)} = -0{,}24$ حاصل می‌شود. سپس مقادیر $p_1^{(2)} = 0{,}2(1{,}20 - 0{,}24) = 0{,}192$ و $q_1^{(2)} = 0{,}2(-1{,}20 - 0{,}24) = -0{,}288$ و تفاضلات متناظر $\Delta p_0 = -0{,}008$ و $\Delta q_0 = -0{,}088$ را محاسبه می‌کنیم.
و پس از این است که تفاضلات $\Delta x_1^{(2)}$ و $\Delta y_1^{(2)}$ را محاسبه می‌کنیم. با استفاده از مقادیر p_1 و q_1 از نزدیکی دوم داریم:

$$\Delta x_1^{(2)} = p_1 + \tfrac{1}{2}\Delta p_0 \tfrac{5}{12}\Delta^2 p_{-1} = 0{,}192 + \tfrac{1}{2}(-0{,}008) = 0{,}188,$$
$$\Delta y_1^{(2)} = -0{,}288 + \tfrac{1}{2}(-0{,}088) = -0{,}332.$$

سپس محاسبه می‌کنیم:

$$p_2^{(2)} = 0{,}2(1{,}388 - 0{,}572) = 0{,}1632, \quad q_2^{(2)} = 0{,}2(-1{,}388 - 0{,}572)$$
$$= -0{,}3920$$

و تفاضلات متناظر را بدست می‌آوریم.

IIIـ نزدیکی سوم‌ـ با استفاده از نتایج نزدیکی دوم تنها نقطه اول بدست می‌آید:

$$\Delta x_۰^{(۳)} = p_۰ + \tfrac{۱}{۲}\Delta p_۰ - \tfrac{۱}{۱۲}\Delta^۲ p_۰ = ۰٫۲۰۰۰ + \tfrac{۱}{۲}(-۰٫۰۰۸۰) - \tfrac{۱}{۱۲}(-۰٫۰۲۰۸) = ۰٫۱۹۷۷,$$
$$\Delta y_۰^{(۳)} = -۰٫۲۰۰۰ + \tfrac{۱}{۲}(-۰٫۰۸۸۰) - \tfrac{۱}{۱۲}(-۰٫۰۱۶۰) = -۰٫۲۴۲۷,$$
$$x_۱^{(۳)} = ۱٫۱۹۷۷,\quad y_۱^{(۳)} = -۰٫۲۴۲۷.$$

جدول ۸-۲۶) حل دستگاه (۸-۷۴) با روش کرایلف‌ـسیدل. محاسبه $x(t)$

نزدیکی	i	t	x	Δx	$f_۱(x,y)$	p	Δp	$\Delta^۲ p$	$\Delta^۳ p$
I	−۱	−۰٫۲	۰٫۸	۰٫۲	۱٫۰	۰٫۲۰	۰	۰	
	۰	۰٫۰	۱٫۰	۰٫۲	۱٫۰	۰٫۲۰	۰		
	۱	۰٫۲	۱٫۲		۱٫۰	۰٫۲۰			
II	۰	۰٫۰	۱٫۰۰۰	۰٫۲۰۰	۱٫۰۰۰	۰٫۲۰۰۰	−۸۰	−۲۰۸	
	۱	۰٫۲	۱٫۲۰۰	۰٫۱۸۸	۰٫۹۶۰	۰٫۱۹۲۰	−۲۸۸		
	۲	۰٫۴	۱٫۳۸۸		۰٫۸۱۶	۰٫۱۶۳۲			
III	۰	۰٫۰	۱٫۰۰۰۰	۰٫۱۹۷۷	۱٫۰۰۰۰	۰٫۲۰۰۰	−۹۰	−۲۳۲	−۷۹
	۱	۰٫۲	۱٫۱۹۷۷	۰٫۱۷۷۸	۰٫۹۵۵۰	۰٫۱۹۱۰	−۳۲۲	−۳۱۱	
	۲	۰٫۴	۱٫۳۷۵۵	۰٫۱۳۳۰	۰٫۷۹۴۰	۰٫۱۵۸۸	−۶۳۳		
	۳	۰٫۶	۱٫۵۰۸۵		۰٫۴۷۷۶	۰٫۰۹۵۵			
IV	۰	۰٫۰	۱٫۰۰۰۰	۰٫۱۹۷۱	۱٫۰۰۰۰	۰٫۲۰۰۰	−۹۱	−۲۳۲	−۸۲
	۱	۰٫۲	۱٫۱۹۷۱	۰٫۱۷۷۰	۰٫۹۵۴۴	۰٫۱۹۰۹	−۳۲۳	−۳۱۴	
	۲	۰٫۴	۱٫۳۷۴۱	۰٫۱۲۹۹	۰٫۷۹۳۰	۰٫۱۵۸۶	−۶۳۷		
	۳	۰٫۶	۱٫۵۰۴۰		۰٫۴۷۴۷	۰٫۰۹۴۹			
تصحیح	۳	۰٫۶	۱٫۵۰۳۸		۰٫۴۷۴۹	۰٫۰۹۵۰			

سپس محاسبه می‌کنیم:

$$p_۱^{(۳)} = ۰٫۲(۱٫۱۹۷۷ - ۰٫۲۴۲۷) = ۰٫۱۹۱۰,$$
$$q_۱^{(۳)} = ۰٫۲(-۱٫۱۹۷۷ - ۰٫۲۴۲۷) = -۰٫۲۸۸۱$$

و تفاضلات متناظر را بدست می‌آوریم.

سپس با استفاده از مقادیر $p_۱$ و $q_۱$ از نزدیکی سوم (و تفاضلات دوم از نزدیکی دوم) بدست می‌آوریم:

$$\Delta x_۱^{(۳)} = ۰٫۱۹۱۰ + \tfrac{۱}{۲}(-۰٫۰۰۹۰) + \tfrac{۵}{۱۲}(-۰٫۰۲۰۸) = ۰٫۱۷۷۸,$$
$$\Delta y_۱^{(۳)} = -۰٫۲۸۸۱ + \tfrac{۱}{۲}(-۰٫۰۸۸۱) + \tfrac{۵}{۱۲}(-۰٫۰۱۶۰) = -۰٫۳۳۸۸,$$
$$x_۲^{(۳)} = ۱٫۳۷۵۵, \quad y_۲^{(۳)} = -٫۰۵۸۱۵.$$

دوباره محاسبه می‌کنیم:

$$p_۲^{(۳)} = ۰٫۲(۱٫۳۷۷۵ - ۰٫۵۸۱۵) = ۰٫۱۵۸۸,$$
$$q_۱^{(۳)} = ۰٫۲(-۱٫۳۷۵۵ - ۰٫۵۸۱۵) = -۰٫۳۹۱۴$$

و تفاضلات متناظر را بدست می‌آوریم.

و سرانجام بدست می‌آوریم:

$$\Delta x_۲^{(۳)} = ۰٫۱۵۸۸ + \tfrac{۱}{۲}(-۰٫۰۳۲۲) + \tfrac{۵}{۱۲}(-۰٫۰۲۳۲) = ۰٫۱۳۳۰,$$
$$\Delta y_۲^{(۳)} = -۰٫۳۹۱۴ + \tfrac{۱}{۲}(-۰٫۱۰۳۳) + \tfrac{۵}{۱۲}(-۰٫۰۱۵۲) = -٫۴۴۹۴,$$
$$x_۲^{(۳)} = ۱٫۵۰۸۵, \quad y_۳^{(۳)} = -۱٫۰۳۰۹.$$

جدول ۸-۲۷) حل دستگاه (۸-۷۳) با روش کرایلف‌ـسیدل. محاسبه $y(t)$

نزدیکی	i	t	y	Δy	$f_۲(x,y)$	q	Δq	$\Delta^۲ q$	$\Delta^۳ q$
I	−۱	−۰٫۲	۰٫۲	−۰٫۲	−۰٫۶	−۰٫۱۲	−۸	۰	
	۰	۰٫۰	۰٫۰	−۰٫۲	−۱٫۰	−۰٫۲۰	−۸		
	۱	۰٫۲	−۰٫۲		−۱٫۴	−۰٫۲۸			
II	۰	۰٫۰	۰٫۰۰۰	−۰٫۲۴۰	−۱٫۰۰۰	−۰٫۲۰۰۰	−۸۸۰	−۱۶۰	
	۱	۰٫۲	−۰٫۲۴۰	−۰٫۳۳۲	−۱٫۴۴۰	−۰٫۲۸۸۰	−۱۰۴۰		
	۲	۰٫۴	−۰٫۵۷۲		−۱٫۹۶۰	−۰٫۳۹۲۰			
III	۰	۰٫۰	۰٫۰۰۰۰	−۰٫۲۴۲۷	−۱٫۰۰۰۰	−۰٫۲۰۰۰	−۸۸۱	−۱۵۲	۲۰
	۱	۰٫۲	−۰٫۲۴۲۷	−۰٫۳۳۸۸	−۱٫۴۴۰۴	−۰٫۲۸۸۱	−۱۰۳۳	−۱۳۲	
	۲	۰٫۴	−۰٫۵۸۱۵	−۰٫۴۴۹۴	−۱٫۹۵۷۰	−۰٫۳۹۱۴	−۱۱۶۵		
	۳	۰٫۶	−۱٫۰۳۰۹		−۲٫۵۳۹۴	−۰٫۵۰۷۹			
IV	۰	۰٫۰	۰٫۰۰۰۰	−۰٫۲۴۲۷	−۱٫۰۰۰۰	−۰٫۲۰۰۰	−۸۸۰	−۱۵۰	۲۳
	۱	۰٫۲	−۰٫۲۴۲۷	−۰٫۳۳۸۴	−۱٫۴۳۹۸	−۰٫۲۸۸۰	−۱۰۳۰	−۱۲۷	
	۲	۰٫۴	−۰٫۵۸۱۱	−۰٫۴۴۸۲	−۱٫۹۵۵۲	−۰٫۳۹۱۰	−۱۱۵۷		
	۳	۰٫۶	−۱٫۰۲۹۳		−۲٫۵۳۳۳	−۰٫۵۰۶۷			
تصحیح	۳	۰٫۶	−۱٫۰۲۸۹		−۲٫۵۳۲۷	−۰٫۵۰۶۵			

سپس مقادیر p_3 و q_3 و تفاضلات متناظر را محاسبه می‌کنیم.

IVـ نزدیکی چهارم ـ نقطه اول با در نظرگرفتن مقادیر $\Delta^3 p_0$ و $\Delta^3 q_0$ بطریقه مشابه پیدا می‌شوند:

$$\Delta x_0^{(4)} = p_0 + \tfrac{1}{2}\Delta p_0 - \tfrac{1}{12}\Delta^2 p_0 + \tfrac{1}{24}\Delta^3 p_0 = 0.2000 - 0.0045 - 0.0019 - 0.0003 = 0.1917,$$
$$\Delta y_0^{(4)} = -0.2000 - 0.0441 + 0.0013 + 0.0001 = -0.2427,$$
$$x_1^{(4)} = 1.1971, \quad y_1^{(4)} = -0.2427.$$

حال مقادیر p_1 و q_1 را برای محاسبه نقطه دوم بکار می‌گیریم:

$$\Delta x_1^{(4)} = p_1 + \tfrac{1}{2}\Delta p_1 - \tfrac{1}{12}\Delta^2 p_0 + \tfrac{1}{24}\Delta^3 p_0 = 0.1909 - 0.0161 + 0.0019 + 0.0003 = 0.1770,$$
$$\Delta y_1^{(4)} = -0.2880 - 0.0516 + 0.0013 + 0.0001 = -0.3384,$$
$$x_2^{(4)} = 1.3741, \quad y_2^{(4)} = -0.5811.$$

سپس مقادیر p_2 و q_2 را محاسبه کرده و برای تقطه سوم استفاده می‌کنیم:

$$\Delta x_2^{(4)} = 0.1586 - 0.0316 + 0.0026 + 0.0003 = 0.1299,$$
$$\Delta y_2^{(4)} = -0.3910 - 0.0582 + 0.0011 - 0.0001 = -0.4482,$$
$$x_3^{(4)} = 1.5040, \quad x_3^{(4)} = -1.0293.$$

چون اختلاف میان نزدیکی سوم و چهارم مقدار کوچکی است، محاسبات بعدی برای تصحیح آخرین نقطه بدست آمده توسط فرمول تصحیح آدامز را متوقف می‌کنیم. در نتیجه داریم:

$$\Delta x_2 = 0.1586 - 0.0318 + 0.0026 + 0.0003 - 0.1297, \quad x_3 - 1.5038,$$
$$\Delta y_2 = -0.3910 - 0.0578 + 0.0011 - 0.0001 = -0.4478, \; y_3 = -1.0289.$$

مسائل

با استفاده از روش نزدیکی متوالی و روش آدامز جواب‌های تقریبی معادلات دیفرانسیل زیر را با فاصله $h = 0.05$ در بازه $[0, C]$ بدست آورید:

۱. $y' = \cos^2(ax+y) + by, \quad y(0) = 0, \quad c = 0.25, \quad a = 1.0 + 0.4 \times n,$
$n = 0, 1, \dots, 5, \quad b = 1.0 + 0.4 \times k, \quad k = 0, 1, \dots, 5.$

۲. $y' = e^{-(a+xy)} + by, \quad y(0) = 0, \quad c = 0.25, \quad a = 1.0 + 0.4 \times n,$
$n = 0, 1, \dots, 5, \quad b = 1.0 + 0.4 \times k, \quad k = 0, 1, \dots, 5.$

۳. $y' = -axy, \quad y(۰) = ۱, \quad c = ۰/۲, \quad a_۱ = ۱/۸, \quad a_۲ = ۲/۰.$

۴. $y' = -\frac{a(y+x)^k}{a(y+x)^k + ۱}, \quad y(۰) = ۰, \quad c = ۰/۲, \quad a = ۱/۰ + ۰/۳ \times n,$
$n = ۰, ۱, ۲, \quad k = ۱, ۲, ۳, ۴.$

۹ـ مسائل مقدارمرزی برای معادلات دیفرانسیل معمولی

۹ـ۱ـ بیان مسئله

فرض کنید که یک معادله مرتبه دوم

$$F(x, y, y', y'') = \circ \tag{۹-۱}$$

داده شده است.

یک مسئله مرزی دو نقطه‌ای برای معادله (۹-۱) به صورت زیر مطرح می‌شود: تابع $y = y(x)$ را طوری پیدا کنید که در تمام بازه $[a, b]$ در تابع (۹-۱) صدق کند و در نقاط مرزی بازه شرایط مرزی زیر برقرار باشد

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_{۱}[y(a), y'(a)] = \circ \\ \varphi_{۲}[y(b), y'(b)] = \circ \end{array}\right\} \tag{۹-۲}$$

در نظر داشته باشید که معادله (۹-۱) و شرایط مرزی (۹-۲) خطی هستند. یک چنین مسئله مقدار مرزی را مسئله مقدار مرزی خطی می‌نامند. در این مورد معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{۹-۳}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{\circ} y(a) + \alpha_{۱} y'(a) = A \\ \beta_{\circ} y(b) + \beta_{۱} y'(b) = B \end{array}\right\} \tag{۹-۴}$$

که در آن $p(x)$، $q(x)$ و $f(x)$ توابع با مقدارهای پیوسته و معلوم در بازه $[a,b]$ هستند. مقادیر $\alpha_۰$، $\alpha_۱$، $\beta_۰$، $\beta_۱$، A و B ثابت‌های داده شده هستند و داریم $|\alpha_۰| + |\alpha_۱| \neq ۰$ و $|\beta_۰| + |\beta_۱| \neq ۰$.
اگر $A = B = ۰$ باشد آنگاه شرایط مرزی (۹-۴) را یکنواخت (uniform) می‌خوانند. روش‌های حل تقریبی مسائل مقدارمرزی به دو دسته روش‌های تفاضلی و روش‌های تحلیلی تقسیم می‌شوند. راجع به این روش‌ها در بخش‌های بعدی بحث می‌کنیم.

۹ـ۲ـ روش تفاضلات محدود برای معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی

در نظر بگیرید که $x_۰ = a$، $x_n = b$، $x_i = x_۰ + ih$ $(i = ۱, ۲, \ldots, n-۱)$ یک مجموعه از نقاط متساوی‌الفاصله با فواصل $h = \frac{b-a}{n}$ باشند و همچنین

$$p_i = p(x_i),\ \ q_i = q(x_i),\ \ f_i = f(x_i).$$

فرض می‌کنیم که مقادیر تقریبی بدست آمده از تابع مورد نظر و مشتقات آن $y'(x)$ و $y''(x)$ در نقاط x_i به ترتیب با y_i، y'_i و y''_i نشان داده می‌شوند. اجازه دهید که بطور تقریبی مشتقات $y'(x_i)$ و $y''(x_i)$ در هر نقطه را با نسبت‌های تفاضل‌ـمحدود[1] زیر جایگزین کنیم:

$$y'_i = \frac{y_{i+۱} - y_{i-۱}}{۲h},\ \ y''_i = \frac{y_{i+۱} - ۲y_i + y_{i-۱}}{h^۲} \qquad (۹\text{-}۵)$$

حال دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{y_{i+۱}-۲y_i+y_{i-۱}}{h^۲} + p_i\frac{y_{i+۱}-y_{i-۱}}{۲h} + q_iy_i = f_i, \quad (i = ۱, ۲, \ldots, n-۱), \\ \alpha_۰y_۰ + \alpha_۱\frac{y_۱-y_۰}{h} = A, \quad \beta_۰y_n + \beta_۱\frac{y_n-y_{n-۱}}{h} = B. \end{array}\right\} \qquad (۹\text{-}۶)$$

برای nهای بزرگ حل مستقیم دستگاه (۹-۶) بسیار دشوار است. در بخش ۹ـ۳ یک روش ساده که بخصوص برای حل دستگاه‌هایی از این نوع ارائه شده بود را معرفی خواهیم کرد. برآورد خطای روش تفاضلات محدود برای مسئله (۹-۳) و (۹-۴) به صورت زیر است:

$$|y_i - y(x_i)| \leq \frac{h^۲M_۴}{۹۶}(b-a)^۲ \qquad (۹\text{-}۷)$$

که در آن $y(x_i)$ جواب دقیق برای $x = x_i$ است و $M_۴ = \max|y^{(۴)}(x)|$.
دقت روش تفاضل می‌تواند بطور قابل ملاحظه‌ای با استفاده از رویه‌های تفاضلی چند نقطه‌ای افزایش یابد (هنگامی‌که مشتقات را جایگزین می‌کنیم‌ـ[۳۹] را ببینید).
در مسائل کاربردی ما اغلب به معادلاتی برخورد می‌کنیم که در آن $p(x)$، $q(x)$ و $f(x)$ با جداولی بر حسب فاصله h داده شده‌اند. حل چنین معادلاتی به روش تفاضل با فاصله h داده شده امکان‌پذیر است.

1) finite-difference

مثال ۹ـ۱ـ با استفاده از روش تفاضلات محدود پاسخ مسئله مقدارمرزی زیر را پیدا کنید.

$$\left.\begin{aligned} x^2y'' + xy' &= 1, \\ y(1) = 0, y(1.4) = \tfrac{1}{2}\ln^2(1.4) &= 0.0566. \end{aligned}\right\} \qquad (8\text{-}9)$$

حل ـ با استفاده از فرمول (۹-۵) معادله (۹-۸) را به دستگاهی از معادله‌های تفاضل‌ـمحدود زیر تبدیل می‌کنیم:

$$x_i^2\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = 1.$$

با فاکتورگیری از جملات مشترک بدست می‌آوریم:

$$y_{i-1}(2x_i^2 - hx_i) - 4x_i^2y_i + y_{i+1}(2x_i^2 + hx_i) = 2h^2. \qquad (9\text{-}9)$$

با انتخاب فاصله $h = 0.1$، ما سه نقطه از بازه $x_i = 0.1x_i + 1 (i = 1, 2, 3)$ را بدست می‌آوریم. با نوشتن معادله (۹-۵) برای هر یک از این نقاط دستگاه زیر را بدست می‌آوریم:

$$\left.\begin{aligned} 2.31y_0 - 4.84y_1 + 2.53y_2 &= 0.02, \\ 2.76y_1 - 5.76y_2 + 3.00y_3 &= 0.02, \\ 3.25y_2 - 6.76y_3 + 3.51y_4 &= 0.02. \end{aligned}\right\} \qquad (10\text{-}9)$$

در نقاط مرزی داریم: $y_0 = 0$ و $y_4 = 0.0566$.
با استفاده از این مقادیر دستگاه (۹-۱۰) را برای بدست آوردن مقادیر $y_1 = 0.0046$، $y_2 = 0.0167$ و $y_3 = 0.0345$ حل می‌کنیم.
به منظور مقایسه مقادیر دقیق جواب معادله $y = \frac{1}{2}\ln^2 x$ را برای نقاط متناظر ارائه می‌کنیم:

$$y(x_1) = 0.0047,\ y(x_2) = 0.0166,\ y(x_3) = 0.0344$$

۹ـ۳ـ روش گذر[1]

روش گذر را برای حل دستگاهی که از جایگزینی معادله (۹-۳) و شرط مرزی دوم (۹-۴). با نسبت‌های تفاضل‌ـمحدود مرکزی بدست آمده بکار می‌بندیم:

$$\left.\begin{aligned} &\tfrac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} + p_i\tfrac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h} + q_iy_i = f_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ &\alpha_0y_0 + \alpha_1\tfrac{y_1-y_0}{h} = A, \quad \beta_0y_n + \beta_1\tfrac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2h} = B. \end{aligned}\right\} \qquad (11\text{-}9)$$

1) The "passage" method

$n-۱$ معادله اول از دستگاه (۹-۱۱) را به صورت $y_{i+۱}+m_iy_i+k_iy_{i-۱}=\frac{۲h^۲f_i}{۲+hp_i}=\varphi_i,$ می‌نویسیم که در آن

$$m_i=\frac{۲q_ih^۲-۴}{۲+hp_i},\quad k_i=\frac{۲-hp_i}{۲+hp_i}. \qquad (۹\text{-}۱۲)$$

سپس این معادله را به شکل زیر تبدیل می‌کنیم:

$$y_i=c_i(d_i-y_{i+۱})\quad (i=۱,۲,\dots,n-۱), \qquad (۹\text{-}۱۳)$$

که در آن ضرایب c_i و d_i با فرمول‌های زیر محاسبه شده‌اند. برای $i=۱$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} c_۱=\frac{\alpha_۱-\alpha_۰h}{m_۱(\alpha_۱-\alpha_۰h)+k_۱\alpha_۱}. \\ d_۱=\frac{۲f_۱h^۲}{۲+p_۱h}+k_۱\frac{Ah}{\alpha_۱-\alpha_۰h}=\varphi_۱+k_۱\frac{Ah}{\alpha_۱-\alpha_۰h}; \end{array}\right\} \qquad (۹\text{-}۱۴)$$

و برای $i=۲,۳,\dots,n$ داریم:

$$c_i=\frac{۱}{m_i-k_ic_{i-۱}},\quad d_i=\frac{۲f_ih^۲}{۲+hp_i}-k_ic_{i-۱}d_{i-۱}=\varphi_i-k_ic_i-۱^d_{i-۱}. \qquad (۹\text{-}۱۵)$$

محاسبات به طریقه زیر انجام می‌شوند.

رویه پیشروی:

مقادیر m_i و k_i را با فرمول‌های (۹-۱۲) بدست می‌آوریم. مقادیر $c_۱$ و $d_۱$ را محاسبه کرده سپس با استفاده از فرمول‌های بازگشتی (۹-۱۵) به ترتیب مقادیر c_i و $d_i(i=۲,۳,\dots,n)$ را بدست می‌آوریم.

رویه پسروی:

معادله (۹-۱۳) را برای $i=n$ و $i=n-۱$ و آخرین معادله دستگاه (۹-۱۱) را می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} y_n=c_n(d_n-y_{n+۱}), \\ y_{n-۱}=c_{n-۱}(d_{n-۱}-y_n), \\ \beta_۰y_n+\beta_۱\frac{y_{n+۱}-y_{n-۱}}{۲h}=B. \end{array}\right\} \qquad (۹\text{-}۱۶)$$

با حل این دستگاه بر حسب y_n داریم:

$$y_n=\frac{۲Bh-\beta_۱(d_n-c_{n-۱}d_{n-۱})}{۲\beta_۰h+\beta_۱(c_{n-۱}-\frac{۱}{c_n})}. \qquad (۹\text{-}۱۷)$$

با استفاده از اعداد معلوم c_n، d_n، $c_{n-۱}$ و $d_{n-۱}$ مقدار y_n را پیدا می‌کنیم. مقادیر y_i $(i=n-۱,\dots,۲,۱)$ از فرمول‌های بازگشتی (۹-۱۳) بدست می‌آیند و $y_۰$ از معادله (۹-۱۱):

$$y_۰=\frac{\alpha_۱y_۱-Ah}{\alpha_۱-\alpha_۰h}. \qquad (۹\text{-}۱۸)$$

مثال ۹ـ۲ـ با استفاده از روش گذر پاسخ تقریبی معادله

$$y'' - 2xy' - 2y = -4x \tag{۹-۱۹}$$

را که در شرایط مرزی

$$y(0) - y'(0) = 0, \quad 2y(1) - y'(1) = 1 \tag{۹-۲۰}$$

صدق می‌کند پیدا کنید.

حل ـ قرار می‌دهیم $h = 0.1$ و معادله (۹-۱۹) و شرایط مرزی (۹-۲۰) را با یک دستگاه از معادلات تفاضل محدود جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{gathered}\tfrac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} - 2x_i\tfrac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h} - 2y_i = -4x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 9),\\ y_0 - \tfrac{y_1-y_0}{h} = 0,\ 2y_{10} - \tfrac{y_{11}-y_9}{2h} = 1.\end{gathered}$$

با فاکتورگیری از جملات مشترک بدست می‌آوریم:

$$y_{i+1} - \frac{2+2h^2}{1-x_ih}y_i + \frac{1+x_ih}{1-x_ih}y_{i-1} = -\frac{4h^2}{1-x_ih}x_i.$$

از اینرو داریم:

$$\begin{gathered}m_i = -\tfrac{2+2h^2}{1-x_ih}{}_i \quad k_i = \tfrac{1+x_ih}{1+x_ih}, \quad \varphi_i = \tfrac{4h^2}{1-x_ih}x_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, 10),\\ \alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = -1,\ \beta_0 = 2,\ \beta_1 = -1,\ A = 0,\ B = 1.\end{gathered}$$

رویه پیشروی:

اعداد $x_i = 0.1i$ را در جدول ۹-۱ وارد کرده و مقادیر m_i، k_i و φ_i را محاسبه می‌کنیم. سپس با فرمول‌های (۹-۱۴) پیدا می‌کنیم:

$$c_1 = \frac{-1.1}{2.040 \times 1 - 1.020} = -0.899, \quad d_1 = -0.004$$

اعداد بدست آمده را در جدول ۹ـ۱ نوشته و محاسبات متوالی c_i و d_i را به کمک فرمول (۹-۱۵) پی می‌گیریم. از اینرو برای $i = 2$ بدست می‌آوریم:

$$\begin{gathered}c_2 = \tfrac{1}{m_2-k_2c_1} = \tfrac{1}{-2.060+1.040\times0.899} = -0.889,\\ d_2 = \varphi_2 - k_2c_1d_1 = -0.008 - 1.040 \times 0.899 \times 0.004 = -0.012.\end{gathered}$$

محاسبات برای $i = 3, 4, \ldots, 10$ بطور مشابه انجام می‌گیرد. تمام نتایج در ستون‌هایی که برای رویه پیشروی در نظر گرفته شده در جدول ۹-۱ وارد شده‌اند.

رویه پسروی:

$y_۰$ را با فرمول (۹-۱۷) بدست می‌آوریم:

$$y_{۱۰} = \frac{۰٫۲ - ۰٫۲۲۲ - ۰٫۸۱۰ \times ۰٫۱۸۰}{۰٫۴ + ۰٫۸۱۰ - \frac{۱}{۰٫۷۹۷}} = ۳٫۷۳$$

جدول ۹-۱) روش گذر برای مثال ۹-۲

i	x_i	m_i	k_i	φ_i	رویه پیشروی c_i	d_i	رویه پیشروی y_i	$y(x_i)$
۰	۰٫۰						۱٫۰۳	۱٫۰۰
۱	۰٫۱	−۲٫۰۴۰	۱٫۰۲۰	−۰٫۰۰۴	−۰٫۸۹۹	−۰٫۰۰۴	۱٫۱۳	۱٫۱۱
۲	۰٫۲	−۲٫۰۶۱	۱٫۰۴۰	−۰٫۰۰۸	−۰٫۸۸۹	−۰٫۰۱۲	۱٫۲۶	۱٫۲۴
۳	۰٫۳	−۲٫۰۸۳	۱٫۰۶۲	−۰٫۰۱۲	−۰٫۸۷۸	−۰٫۰۲۳	۱٫۴۱	۱٫۳۹
۴	۰٫۴	−۲٫۱۰۵	۱٫۰۸۳	−۰٫۰۱۷	−۰٫۸۶۸	−۰٫۰۳۹	۱٫۶۰	۱٫۵۷
۵	۰٫۵	−۲٫۱۲۷	۱٫۱۰۵	−۰٫۰۲۱	−۰٫۸۵۶	−۰٫۰۵۸	۱٫۸۱	۱٫۷۸
۶	۰٫۶	−۲٫۱۴۹	۱٫۱۲۸	−۰٫۰۲۵	−۰٫۸۴۵	−۰٫۰۸۱	۲٫۰۶	۲٫۰۳
۷	۰٫۷	−۲٫۱۷۲	۱٫۱۵۱	−۰٫۰۳۰	−۰٫۸۳۳	−۰٫۱۰۹	۲٫۳۶	۲٫۳۳
۸	۰٫۸	−۲٫۱۹۶	۱٫۱۷۴	−۰٫۰۳۵	−۰٫۸۲۲	−۰٫۱۴۲	۲٫۷۲	۲٫۷۰
۹	۰٫۹	−۲٫۲۲۰	۱٫۱۹۸	−۰٫۰۴۰	−۰٫۸۱۰	−۰٫۱۸۰	۳٫۱۷	۳٫۱۵
۱۰	۱٫۰	−۲٫۲۴۴	۱٫۲۲۲	−۰٫۰۴۴	−۰٫۷۹۷	−۰٫۲۲۲	۳٫۷۳	۳٫۷۲

مقدار بدست آمده را در آخرین سطر جدول ۹-۱ برای $i = ۱۰$ وارد می‌کنیم. سپس به ترتیب مقادیر $y_i(i = ۹, ۸, \ldots, ۱)$ را توسط فرمول‌های (۹-۱۳)بدست می‌آوریم:

$$y_۹ = c_۹(d_۹ - y_{۱۰}) = -۰٫۸۱۰(-۰٫۱۸ - ۳٫۷۳) = ۳٫۱۷,$$
$$y_۸ = c_۸(d_۸ - y_۹) = -۰٫۸۲۲(-۰٫۱۴ - ۳٫۱۷) = ۲٫۷۲.$$

و به همین ترتیب الی آخر.

و سرانجام با فرمول (۹-۱۸) بدست می‌آوریم: $y_۰ = \frac{-۱٫۱۳}{-۱٫۱} = ۱٫۰۳$.

به منظور مقایسه در ستون آخر جدول ۹ـ۱ مقادیر جواب دقیق مسئله یعنی $y = x + e^x$ را آورده‌ایم.

توجه. در بخش ۹ـ۲ برای برآورد خطای روش تفاضلات محدود فرمول (۹-۱۳) پیشنهاد شده بود. امّا آن فرمول در عمل کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. استفاده از محاسبه مضاعف (مثال ۹ـ۳ را ببینید) و

همچنین اصل رانگ[1] ([۱۸] را ببینید) برای بدست آوردن یک برآورد تقریبی از خطای مقدار y_i^*:

$$|y_i^* - y(x_i)| \approx \frac{۱}{۳}|y_i^* - y_i|$$

که در آن $y(x_i)$ جواب دقیق مسئله مقدار مرزی برای نقطه $x = x_i$ است و y_i و y_i^* مقادیر جواب‌های تقریبی برای همان نقطه هستند که به ترتیب با فاصله‌های h و $\frac{h}{۲}$ بدست آمده‌اند، از روش‌های معمول هستند.

مثال ۹ـ۳ـ با استفاده از روش گذر با دقت ۰٫۰۰۱ جواب معادله

$$y'' + ۲xy' + ۲y = ۴x \qquad (۹\text{-}۲۱)$$

را طوری پیدا کنید که در شرایط مرزی

$$y(۰) = ۱, \quad y(۰٫۵) = e^{-۰٫۲۵} + ۰٫۵ = ۱٫۲۷۹ \qquad (۹\text{-}۲۲)$$

صدق کند.

حل‌ـ برای پیدا کردن جواب تقریبی معادله (۹-۲۱) با دقت مورد نظر، در ابتدا محاسبات را با فاصله $h = ۰٫۰۱$ انجام داده و سپس با $h = ۰٫۱$ انجام می‌دهیم و نتایج بدست آمده را مقایسه می‌کنیم.
برای معادله داده شده داریم

$$p(x) = ۲x, \quad q(x) = ۲, \quad f(x) = ۴x \qquad (۹\text{-}۲۳)$$

با استفاده از فرمول‌های (۹-۱۲) جدولی از مقادیر m_i، k_i و $\varphi_i = \frac{۲f_ih^۲}{۲+hp_i}$ با فاصله $h = ۰٫۰۱$ تشکیل می‌دهیم. با احتساب اینکه $\alpha_۰ = ۱$، $\alpha_۱ = ۰$، $\beta_۰ = ۱$ و $\beta_۱ = ۰$ با فرمول‌های (۹-۱۴) مقادیر $c_۱$ و $d_۱$ را بدست می‌آوریم:

$$c_۱ = \frac{۱}{m_۱} = -۰٫۵۰۲, \quad d_۱ = \varphi_۱ - k_۱ = -۰٫۹۹۴$$

با بکارگیری متوالی فرمول (۹-۱۵) جدول مقادیر c_i و $d_i(i = ۲, ۳, \ldots, ۹)$ را پر می‌کنیم.
با توجه به شرط مرزی داریم $y_{۱۰} = y(۰٫۵) = ۱٫۲۷۹$ و با استفاده از فرمول بازگشتی (۹-۱۳) مقادیر $y_i(i = ۹, ۸, \ldots, ۱)$ را محاسبه می‌کنیم. نتایج محاسبات را در جدول ۹-۲ وارد می‌کنیم.
حالا فاصله را $h = ۰٫۱$ می‌گیریم و یک جدول از مقادیر m_i، k_i و $\varphi_i = \frac{۲f_ih^۲}{۲+hp_i}$ را با فاصله جدید تشکیل داده و c_i و d_i را محاسبه می‌کنیم. برای مثال برای $c_۱$ و $d_۱$ بدست می‌آوریم:

$$c_۱ = \frac{۱}{m_۱} = -۰٫۵۱۰, \quad d_۱ = \frac{۲f_۱h^۲}{۲ + hp_۱} - k_۱ = -۰٫۹۷۶$$

1) Runge

اعداد بدست آمده را در جدول ۹-۳ وارد کرده و با استفاده از فرمول (۹-۱۲) متوالیاً مقادیر $y_i(i = 1, 2, 3, 4)$ را محاسبه می‌کنیم.

با مقایسه مقادیر متناظر y_i برای ۰٫۴، ۰٫۳، ۰٫۲ و $x = 0.1$ در جدول‌های ۹-۲ و ۹-۳ می‌بینیم که تفاضل آنها بیشتر از ۰٫۰۰۲ نیست و بنابراین خطای جواب دقیقتر با فاصله $h = 0.05$ از $\frac{0.002}{3}$ بیشتر نیست.

جدول ۹-۲) روش گذر برای مثال ۹-۳ با $h = 0.05$

i	x_i	m_i	k_k	$\frac{2f_ih^2}{2+hp_i} = \varphi_i$	رویه پیشروی		رویه پسروی
					c_i	d_i	y_i
۱	۰٫۰۵	−۱٫۹۹۰	۰٫۹۹۵	۰٫۰۰۰۵	−۰٫۵۰۲	−۰٫۹۹۴	۱٫۰۴۶
۲	۰٫۱۰	−۱٫۹۸۵	۰٫۹۹۰	۰٫۰۰۱۰	−۰٫۶۷۲	−۰٫۴۹۳	۱٫۰۸۸
۳	۰٫۱۵	−۱٫۹۸۰	۰٫۹۸۵	۰٫۰۰۱۵	−۰٫۷۵۹	−۰٫۳۲۵	۱٫۱۲۵
۴	۰٫۲۰	−۱٫۹۷۵	۰٫۹۸۰	۰٫۰۰۲۰	−۰٫۸۱۲	−۰٫۲۳۹	۱٫۱۵۸
۵	۰٫۲۵	−۱٫۹۷۰	۰٫۹۷۵	۰٫۰۰۲۵	−۰٫۸۴۸	−۰٫۱۸۷	۱٫۱۸۷
۶	۰٫۳۰	−۱٫۹۶۵	۰٫۹۷۰	۰٫۰۰۳۰	−۰٫۸۷۶	−۰٫۱۵۱	۱٫۲۱۳
۷	۰٫۳۵	−۱٫۹۶۷	۰٫۹۶۶	۰٫۰۰۳۵	−۰٫۸۹۷	−۰٫۱۲۴	۱٫۲۳۴
۸	۰٫۴۰	−۱٫۹۵۶	۰٫۹۶۱	۰٫۰۰۴۰	−۰٫۹۱۴	−۰٫۱۰۳	۱٫۲۵۳
۹	۰٫۴۵	−۱٫۹۵۱	۰٫۹۵۶	۰٫۰۰۴۵	−۰٫۹۲۸	−۰٫۰۸۷	۱٫۲۶۷
۱۰	۰٫۵۰						۱٫۲۷۹

جدول ۹-۳) روش گذر برای مثال ۹-۳ با فاصله $h = 0.1$

i	x_i	m_i	k_k	$\frac{2f_ih^2}{2+hp_i} = \varphi_i$	رویه پیشروی		رویه پسروی
					c_i	d_i	y_i
۱	۰٫۱	−۱٫۹۶۰	۰٫۹۸۰	۰٫۰۰۴	−۰٫۵۱۰	−۰٫۹۷۶	۱٫۰۸۹
۲	۰٫۲	−۱٫۹۴۱	۰٫۹۶۱	۰٫۰۰۸	−۰٫۶۸۹	−۰٫۴۷۰	۱٫۱۶۰
۳	۰٫۳	−۱٫۹۹۲	۰٫۹۴۲	۰٫۰۱۲	−۰٫۷۸۶	−۰٫۲۹۳	۱٫۲۱۴
۴	۰٫۴	−۱٫۹۰۴	۰٫۹۲۳	۰٫۰۱۵	−۰٫۸۴۸	−۰٫۱۹۷	۱٫۲۵۲
۵	۰٫۵						۱٫۲۷۹

بنابراین مقدار y_i بدست آمده با فاصله $h = 0.05$ شرط مسئله را برقرار می‌سازد و می‌توان آنرا به عنوان جواب در نظر گرفت.

مثال ۹ـ۴ـ جواب معادله

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (24\text{-}9)$$

که در شرایط مرزی

$$y(0) = 0, \quad y(0.4) = 0.335 \qquad (25\text{-}9)$$

صدق می‌کند را پیدا کنید، اگر توابع $p(x)$، $q(x)$ و $f(x)$ به صورت جدولی داده شده باشند (جدول ۹-۴).

حل‌ـ نتایج محاسبات با فاصله $h = 0.1$ در جدول ۹-۵ آمده است.

جدول ۹-۴) ضرایب معادله (۹-۲۴)

x_i	p_i	q_i	f_i
۰	−۱٫۲۰	۰٫۷۸	۰٫۲۸
۰٫۱	−۱٫۲۲	۰٫۷۵	۰٫۲۵
۰٫۲	−۱٫۲۴	۰٫۶۹	۰٫۲۰
۰٫۳	−۱٫۲۶	۰٫۶۴	۰٫۱۸
۰٫۴	−۱٫۲۸	۰٫۶۰	۰٫۱۵

جدول ۹-۵) روش گذر برای مثال ۹-۴

x_i	m_i	k_i	$h^2 f_i$	c_i	d_i	y_i
۰	−۲٫۱۲۰	۱٫۱۲۸	۰٫۰۰۲۸	−۰٫۴۷۲	۰٫۰۰۳	۰
۰٫۱	−۲٫۱۲۲	۱٫۱۲۹	۰٫۰۰۲۵	−۰٫۶۲۹	۰٫۰۰۴	۰٫۰۷۴
۰٫۲	−۲٫۱۲۴	۱٫۱۳۱	۰٫۰۰۲۰	−۰٫۷۰۸	۰٫۰۰۵	۰٫۱۵۷
۰٫۳	−۲٫۱۲۶	۱٫۱۳۲	۰٫۰۰۱۸			۰٫۲۳۳
۰٫۴	−۲٫۱۲۸	۱٫۱۳۴	۰٫۰۰۱۵			۰٫۳۳۵

پر کردن جدول:

رویه پیشروی:

با استفاده از جدول ۹-۴ مقادیر m_i، k_i و $h^2 f_i$ را بوسیله فرمول‌های (۹-۱۲) محاسبه می‌کنیم. با در نظر گرفتن اینکه در مسئله داده شده $\alpha_0 = 1$ ، $\alpha_1 = 0$ و $A = 0$ است بدست می‌آوریم:

$$c_0 = \frac{1}{m_0} = -0.472, \quad d_0 = f_0 h^2 = 0.003$$

سپس متوالیاً مقادیر c_1، c_2، d_1 و d_2 را بدست می‌آوریم.

رویه پسروی:

از شرایط مرزی داریم $y_0 = 0$ و $y_4 = 0.335$. مقادیر دیگر $y_i (i = 1, 2, 3)$ را متوالیاً و با استفاده از فرمول‌های (۹-۱۳) بدست می‌آوریم. برای مثال:

$$y_3 = c_2(d_2 - y_4) = 0.708(0.005 - 0.335) = 0.233.$$

مسائل

۱ـ با استفاده از روش گذر با دقت 10^{-2} جواب معادله‌های دیفرانسیل زیر را طوری پیدا کنید که در شرایط مرزی $y(0) = 1$ و $y(1) = e^{-1} + 1 = 1.367$ صدق کنند.

الف) $y'' + \frac{x}{2}y' + (1 + 2\pi^2 x^2)y = 4x$

ب) $y'' + (x - 1)y' + 3.125y = 4x$

پ) $y'' + 2xy' + 2y = \frac{2(5-2x)}{(2-x)^3}$

۲ـ جواب‌های تقریبی مسئله مقدار مرزی زیر را به روش گذر پیدا کنید:

$$y'' + f_j(x)y' + \cos(ax)y = 2x^2 + 2x - 4, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$
$$a = 0.7 + 0.05k, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

جدول ۹-۶) مقادیر توابع $f_j(x)$

x_i	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$
۰٫۰	−۱٫۷۹۳۰	−۱٫۷۰۱۲	−۱٫۶۱۸۴	−۱٫۵۴۳۲	−۱٫۴۷۴۷
۰٫۲	−۱٫۷۸۶۳	−۱٫۶۸۷۷	−۱٫۵۹۹۴	−۱٫۵۲۰۰	−۱٫۴۴۸۰
۰٫۴	−۱٫۷۸۳۲	−۱٫۶۷۷۶	−۱٫۵۸۳۸	−۱٫۵۰۰۰	−۱٫۴۲۴۶
۰٫۶	−۱٫۷۸۳۸	−۱٫۶۷۰۹	−۱٫۵۷۱۴	−۱٫۴۸۳۲	−۱٫۴۰۴۳
۰٫۸	−۱٫۷۸۷۸	−۱٫۶۶۷۳	−۱٫۵۶۳۰	−۱٫۴۶۹۲	−۱٫۳۸۶۹
۱٫۰	−۱٫۷۹۵۳	−۱٫۶۶۶۸	−۱٫۵۵۵۵	−۱٫۴۵۸۱	−۱٫۳۷۲۲

۳ـ با استفاده از روش گذر جواب‌های معادلات زیر را در بازه $[0, 1]$ با فاصله $h = 0.1$ برای شرایط مرزی $y(0) = y(1) = 0$ بدست آورید.

الف) $y'' + (a + x^3)y' + (1 - x^2)y = e^{1-bx^2}$

ب) $y'' + x^2y' + (a - x)y = \frac{x}{x^2+b},$

پ) $y'' + y' \sin ax + y = \frac{l}{b+\sin^{۲} ax}$,
ت) $y'' + \frac{y'}{\sqrt{x^{۲}+b}} + ay = x$.
پارامترهای a و b دارای مقادیر زیرند:

$$a = ۱ + ۰/۴k,\ k = ۰, ۱, ۲, ۳,\ b = ۲/۵ + ۰/۵n,\ n = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$$

۹ـ۴ـ روش تفاضلات محدود برای معادلات دیفرانسیل غیر خطی رتبه دوم

معادله دیفرانسیل غیر خطی

$$y'' = f(x, y, y') \tag{۹-۲۶}$$

را با شرایط مرزی خطی

$$\begin{aligned} \alpha_۰ y(a) - \alpha_۱ y'(b) &= A \\ \beta_۰ y(b) + \beta_۱ y'(b) &= B \end{aligned} \tag{۹-۲۷}$$

در نظر بگیرید.

اجازه دهید که در بازه $[a, b]$ یک دستگاه از نقاط متساوی‌الفاصله $x_k = x_۰ + k_h (k =$ ،$x_۰ = a$ ($۱, ۲, \ldots, n-۱$ با فاصله $h = \frac{b-a}{n}$ تشکیل دهیم. معادله (۹-۲۶) و شرایط مرزی (۹-۲۷) را بطور تقریبی با دستگاه زیر جایگزین می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{y_{k+۱} - ۲y_k + y_{k-۱}}{h^{۲}} = f(x_k, y_k, \frac{y_{k+۱} - y_{k-۱}}{۲h})(k = ۱, ۲, \ldots, n-۱), \\ \alpha_۰ y_۰ - \alpha_۱ \frac{y_۱ - y_۰}{h} = A,\ \beta_۰ y_n + \beta_۱ \frac{y_n - y_{n-۱}}{h} = B. \end{array}\right\} \tag{۹-۲۸}$$

بدین ترتیب یک دستگاه با $n + ۱$ معادله و $n + ۱$ مجهول $y_k (k = ۰, ۱, \ldots, n)$ بدست می‌آوریم. با توجه به اینکه

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma_۰(y) = \alpha_۰ y_۰ - \alpha_۱ \frac{y_۱ - y_۰}{h}, \\ \Gamma_n(y) = \beta_۰ y_n + \beta_۱ \frac{y_n - y_{n-۱}}{h} \end{array}\right\} \tag{۹-۲۹}$$

حل دستگاه (۹ـ۲۸) با روش تکرار توسط فرمول‌های زیر بدست می‌آید:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{y_{k+۱}^{(r+۱)} - ۲yk^{(r+۱)} + y_{k-۱}^{(r+۱)}}{h^{۲}} = f(x_k, y_k^{(r)}, \frac{y_{k+۱}^{(r)} - y_{k-۱}^{(r)}}{۲h}) \\ (k = ۱, ۲, \ldots, n-۱), \\ \Gamma_۰[y^{(r+۱)}] = A,\ \Gamma_n[y^{(r+۱)}] = B. \end{array}\right\} \tag{۹-۳۰}$$

که در اینجا r نشان‌دهنده شماره تقریب (تکرار) است. ما حل کردن یک دستگاه از معادلات جبری خطی را برای هر بازه (فاصله) تکرار می‌دانیم. با استفاده از شکل خاصی از این دستگاه می‌توانیم جواب آنرا به صورت صریح بیان کنیم ([۲] را ببینید):

$$y_k^{(r+1)} = \frac{h}{\Delta}[A\beta_0(b-a) + A\beta_1 + \alpha_1 B] + \frac{k}{\Delta}(\alpha_0 B - A\beta_0) + h^2 \sum_{i=1}^{n-1} g_{ik} f_i^{(r)} \quad (۳۱\text{-}۹)$$

که در آن اعداد a، b، A B، α_0، α_1، β_0 و β_1 معلوم و Δ و g_{ik} با فرمول‌های

$$\Delta = \tfrac{1}{h}[\alpha_0\beta_0(b-a) + \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0],$$
$$g_{ik} = \begin{cases} \frac{l}{\Delta}(i\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{h})(k\beta_0 - \beta_0 n - \frac{\beta_1}{h}) & (i \le k), \\ \frac{l}{\Delta}(k\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{h})(i\beta_0 - \beta_0 n - \frac{\beta_1}{h}) & (i > k). \end{cases} \quad (۳۲\text{-}۹)$$

محاسبه می‌شوند. توجه کنید که در سمت راست فرمول (۹-۳۱) تنها مقدار $f_i^{(r)}$ به تعداد تکرار بستگی دارد.
بنابراین پیدا کردن جواب دستگاه (۹-۲۸) به یک فرآیند تکرار بسیار ساده تبدیل می‌شود. شرایط تقارب این روش در [۲] آمده است.

مثال ۹-۵- با استفاده از روش تفاضلات محدود و با دقت 0.5×10^{-3} جواب مسئله مقدار مرزی

$$\left.\begin{aligned} y'' &= 2 + y^2 \\ y(0) &= y(1) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (۳۳\text{-}۹)$$

را بدست آورید.

حل- اجازه بدهید که در نظر بگیریم $n = 10$ و $h = 0.1$. برای مسئله مفروض داریم:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad \alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_0 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad A = B = 0$$
$$f(x,y) = 2 + y^2$$

برای این مقادیر از فرمول‌های (۹-۳۱) تا (۹-۳۳) بدست می‌آوریم:

$$y_k^{(r+1)} = h^2 \sum_{i=1}^{n=1} g_{ik} f_i^{(r)} \quad (۳۴\text{-}۹)$$

$$g_{ik} = \begin{cases} 0.1\, i(k-n), & i \le k \\ 0.1\, k(i-n), & i > k \end{cases} \quad (۳۵\text{-}۹)$$

۱ـ محاسبه ضرایب g_{ik}. از فرمول (۹-۳۵) برای $i = ۱$ بدست می‌آوریم:

$$g_{ik} = ۰/۱(k - ۱۰)$$

بنابراین

$$g_{۱۱} = -۰/۹, \quad g_{۱۲} = -۰/۸, \quad \ldots, \quad g_{۱۹} = -۰/۱$$

سپس از فرمول (۹-۳۵) برای $i = ۲$ داریم:

$$g_{۲k} = \begin{cases} ۰/۲(k - ۱۰), & ۲ \leq k \\ ۰/۱(-۸), & k = ۱ \end{cases} \qquad (۹\text{-}۳۶)$$

بنابراین بدست می‌آید:

$$g_{۲۱} = -۰/۸, \quad g_{۲۲} = -۱/۶, \quad g_{۲۳} = -۱/۴, \quad \ldots, \quad g_{۲۹} = -۰/۲$$

برای $i \geq ۳$ محاسبات بطور مشابه انجام می‌گیرد. تمام نتایج را در جدولی بطور مجزا وارد می‌کنیم (جدول ۹-۷).

۲ـ انتخاب تقریب‌های اولیه. اجازه بدهید تابع $y^{(۰)} = x(x - ۱)$ را که جواب معادله $y'' = ۲$ با شرایط مرزی $y(۰) = y(۱) = ۰$ است را در نظر بگیریم. در جدول ۹-۸ مقادیر $x_k = ۰/۱k$ و مقادیر متناظر $y_k^{(۰)} = x_k(x_k - ۱)$ $(k = ۱, ۲, \ldots, ۹)$ را وارد کرده و مقادیر $f_k^{(۰)} = ۲ + [y_k^{(۰)}]^۲$ را محاسبه می‌کنیم.

۳ـ محاسبه تقریب اول. مقادیر $y_k^{(۱)}$ توسط فرمول (۹-۳۴) برای $r = ۰$ بدست می‌آیند:

$$y_k^{(r)} = ۰/۰۱ \sum_{i=۱}^{۹} g_{ik} f_i^{(۰)}$$

برای $k = ۱$ بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} y_۱^{(۱)} = ۰/۰۱ \textstyle\sum_{i=۱}^{۹} g_{i۱} f_i^{(۰)} &= -۰/۰۱(۰/۹ \times ۲/۰۰۸۱ + ۰/۸ \times ۲/۰۲۵۶ + \\ &+ ۰/۷ \times ۲/۰۴۴۱ + ۰/۶ \times ۲/۰۵۷۶ + ۰/۵ \times ۲/۰۶۲۵ + ۰/۴ \times ۲/۰۵۷۶ + \\ &+ ۰/۳ \times ۲/۰۴۴۱ + ۰/۲ \times ۲/۰۲۵۶ + ۰/۱ \times ۲/۰۰۸۱) = -۰/۰۹۱۷. \end{aligned}$$

جدول ۹-۷) ضرایب g_{ki}

$i\backslash k$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱	$-۰٫۹$	$-۰٫۸$	$-۰٫۷$	$-۰٫۶$	$-۰٫۵$	$-۰٫۴$	$-۰٫۳$	$-۰٫۲$	$-۰٫۱$
۲	$-۰٫۸$	$-۱٫۶$	$-۱٫۴$	$-۱٫۲$	$-۱٫۰$	$-۰٫۸$	$-۰٫۶$	$-۰٫۴$	$-۰٫۲$
۳	$-۰٫۷$	$-۱٫۴$	$-۲٫۱$	$-۱٫۸$	$-۱٫۵$	$-۱٫۲$	$-۰٫۹$	$-۰٫۶$	$-۰٫۳$
۴	$-۰٫۶$	$-۱٫۲$	$-۱٫۸$	$-۲٫۴$	$-۲٫۰$	$-۱٫۶$	$-۱٫۲$	$-۰٫۸$	$-۰٫۴$
۵	$-۰٫۵$	$-۱٫۰$	$-۱٫۵$	$-۲٫۰$	$-۲٫۵$	$-۲٫۰$	$-۱٫۵$	$-۱٫۰$	$-۰٫۵$
۶	$-۰٫۴$	$-۰٫۸$	$-۱٫۲$	$-۱٫۶$	$-۲٫۰$	$-۲٫۴$	$-۱٫۸$	$-۱٫۲$	$-۰٫۶$
۷	$-۰٫۳$	$-۰٫۶$	$-۰٫۹$	$-۱٫۲$	$-۱٫۵$	$-۱٫۸$	$-۲٫۱$	$-۱٫۴$	$-۰٫۷$
۸	$-۰٫۲$	$-۰٫۴$	$-۰٫۶$	$-۰٫۸$	$-۱٫۰$	$-۱٫۲$	$-۱٫۴$	$-۱٫۶$	$-۰٫۸$
۹	$-۰٫۱$	$-۰٫۲$	$-۰٫۳$	$-۰٫۴$	$-۰٫۵$	$-۰٫۶$	$-۰٫۷$	$-۰٫۸$	$-۰٫۹$

محاسبات برای $k = ۲, ۳, \dots, ۹$ بطور مشابه انجام می‌گیرد. نتایج را در سطر $y_k^{(۱)}$ جدول ۹ـ۷ نوشته و بدست می‌آوریم: $f_k^{(۱)} = ۲ + (y_k^{(۱)})^۲$.

۴ـ محاسبه تقریب دوم. مقادیر $y_k^{(۲)}$ را توسط فرمول (۹-۳۴) برای $r = ۱$ پیدا می‌کنیم:

$$y_k^{(۲)} = ۰٫۰۱ \sum_{i=۱}^{۹} g_{ik} f_i^{(۱)}$$

در حالت خاص برای $k = ۱$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} y_۱^{(۲)} = ۰٫۰۱ \textstyle\sum_{i=۱}^{۹} g_{i۲} f_i^{(۲)} &= -۰٫۰۱(۰٫۸ \times ۲٫۰۰۸۵ + ۱٫۶ \times ۲٫۰۲۶۶ + \\ &+ ۱٫۴ \times ۲٫۰۴۶۲ + ۱٫۲ \times ۲٫۰۶۰۲ + ۱٫۰ \times ۲٫۰۶۵۵ + ۰٫۸ \times ۲٫۰۶۰۲ + \\ &+ ۰٫۶ \times ۲٫۰۴۶۲ + ۰٫۴ \times ۲٫۰۲۶۶ + ۰٫۲ \times ۲٫۰۰۸۵) = -۰٫۰۹۱۶. \end{aligned}$$

بطور مشابه مقادیر $y_k^{(۲)}$ را برای $k = ۲, ۳, \dots, ۹$ بدست آورده و نتایج را در سطر $y_k^{(۲)}$ وارد می‌کنیم. با مقایسه مقادیر $y_k^{(۱)}$ و $y_k^{(۲)}$ متوجه می‌شویم که آنها تنها در رقم آخر متفاوتند. بنابراین بطور تقریبی می‌توان نوشت $y_k \approx y_k^{(۲)}$.

جدول ۹-۸) حل معادله (۹-۳۳)

r	k	۱	۲	۳	۴	۵
	x_k	۰٫۱	۰٫۲	۰٫۳	۰٫۴	۰٫۵
۰	$x_k(x_k-1)$	−۰٫۰۹	−۰٫۱۶	−۰٫۲۱	−۰٫۲۴	−۰٫۲۵
	$f_k^{(0)}$	۲٫۰۰۸۱	۲٫۰۲۵۶	۲٫۰۴۴۱	۲٫۰۵۷۶	۲٫۰۶۲۵
۱	$y_k^{(1)}$	−۰٫۰۹۱۷	−۰٫۱۶۳۲	−۰٫۲۱۴۶	−۰٫۲۴۵۵	−۰٫۲۵۵۸
	$f_k^{(1)}$	۲٫۰۰۸۵	۲٫۰۲۶۶	۲٫۰۴۶۲	۲٫۰۶۰۲	۲٫۰۶۵۵
۲	$y_k^{(2)}$	−۰٫۰۹۱۶	−۰٫۱۶۳۲	−۰٫۲۱۴۵	−۰٫۲۴۵۲	−۰٫۲۵۵۵

r	k	۶	۷	۸	۹
	x_k	۰٫۶	۰٫۷	۰٫۸	۰٫۹
۰	$x_k(x_k-1)$	−۰٫۲۴	−۰٫۲۱	−۰٫۱۶	−۰٫۰۹
	$f_k^{(0)}$	۲٫۰۵۷۶	۲٫۰۴۴۱	۲٫۰۲۵۶	۲٫۰۰۸۱
۱	$y_k^{(1)}$	−۰٫۲۴۵۵	−۰٫۲۱۴۶	−۰٫۱۶۳۲	−۰٫۰۹۱۷
	$f_k^{(1)}$	۲٫۰۶۰۲	۲٫۰۴۶۲	۲٫۰۲۶۶	۲٫۰۰۸۵
۲	$y_k^{(2)}$	−۰٫۲۴۵۲	−۰٫۲۱۴۵	−۰٫۱۶۳۲	−۰٫۰۹۱۶

۹ـ۵ـ روش گالرکین[1]

روش تشریح شده در بالا ما را قادر می‌کند تا حل یک مسئله مقدار مرزی را به صورت جدولی تقریب بزنیم. حال اجازه بدهید که دو روش تحلیلی که موجب حل تقریبی یک مسئله مقدار مرزی خطی به صورت عبارتی تحلیلی می‌شوند را با نام‌های روش گالرکین و روش ردیف کردن[2] معرفی کنیم.
فرض کنید مسئله‌ای مقدار مرزی مثل (۹-۳) و (۹-۴) را داریم. اجازه بدهید رهنوشت زیر را معرفی کنیم:

$$\left.\begin{aligned} L[y] &= y'' + p(x)y' + q(x)y, \\ \Gamma_a[y] &= \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a), \\ \Gamma_b[y] &= \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b). \end{aligned}\right\} \tag{۳۷-۹}$$

فرض کنید در بازه $[a, b]$ یک دستگاه از توابع پایه داده شده‌اند

$$u_0(x), u_1(x), \ldots, u_n(x), \ldots \tag{۳۸-۹}$$

که شرایط زیر را برقرار می‌سازند:

1) Galerkin 2) Collocation

(۱) دستگاه (۹-۳۸) متعامد است، یعنی

$$\begin{array}{l} \int_a^b u_i(x)u_j(x)dx = 0 \quad \text{for} \quad i \neq j, \\ \int_a^b u_i^2(x)dx \neq 0. \end{array} \qquad (۹\text{-}۳۹)$$

(۲) دستگاه (۹-۳۸) یک دستگاه کامل است یعنی هیچ تابعی غیر صفر وجود ندارد که بر تمامی توابع $u_i(x)(i = 0, 1, 2, \dots)$ متعامد باشد.

(۳) دستگاه محدود از توابع پایه $\{u_i(x)\}(i = 0, 1, \dots, n)$ طوری انتخاب می‌شود که تابع $u_0(x)$ در شرایط مرزی ناهمگون زیر صدق کند

$$\Gamma_a[u_0] = A, \Gamma_b[u_0] = B \qquad (۹\text{-}۴۰)$$

و توابع $u_i(x)(i = 0, 1, 2, \dots, n)$ شرایط مرزی همگون

$$\Gamma_a[u_i] = \Gamma_b[u_i] = 0 \ \ (i = 1, 2, \dots, n) \qquad (۹\text{-}۴۱)$$

را برقرار سازند.

ما پاسخ مسئله مرزی (۹-۳) و (۹-۴) را به صورت زیر حدس می‌زنیم:

$$y(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x) \qquad (۹\text{-}۴۲)$$

از شرایط (۹-۴۰) و (۹-۴۱) نتیجه می‌شود که این تابع شرایط مرزی (۹-۴) را برقرار می‌کند. عبارت زیر که «مانده[1]» نامیده می‌شود را در نظر بگیرید:

$$R(x, c_1, c_2, \dots, c_n) = L[u_0] + \sum_{i=1}^{n} c_i L[u_i] - f(x) \qquad (۹\text{-}۴۳)$$

ضرایب c_i را طوری انتخاب می‌کنیم که کوچکترین مقدار انتگرال

$$\int_a^b R^2(x, c_1, c_2, \dots, c_n)dx \qquad (۹\text{-}۴۴)$$

بدست آید.

اثبات شده است ([۲]، [۱۳]، [۱۸] را ببینید) که این مهم تنها موقعی ممکن است که تفاضل $R(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ بر تمامی توابع u_i متعامد باشد.

اجازه بدهید شرط متعامد بودن را بنویسیم:

$$\int_a^b u_k(x)R(x, c_1, c_2, \dots, c_n)dx = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

1) Residual

و یا بطور کامل

$$\sum_{i=۱}^{n} c_i \int_a^b u_k(x)L[u_i]dx = \int_a^b u_k(x)\{f(x) - L[u_\circ]\}dx. \qquad (۴۵\text{-}۹)$$

بنابراین ما یک دستگاه از معادلات جبری خطی بر حسب c_i را بدست آورده‌ایم.
توجه کنید که در انتخاب توابع پایه شرط متعامد بودن (۹-۳۹) الزامی نیست (اگر ضرایب با فرض مینیمم بودن انتگرال (۹-۴۴) انتخاب شده باشند). برای مثال با در نظر گرفتن یک دستگاه کامل از توابع متعامد در بازه $[a,b]$ به عنوان توابع پایه ما می‌توانیم ترکیبی خطی از توابع این دستگاه را نیز به عنوان توابع پایه انتخاب کنیم. تنها شرط لازم و کافی این است که توابع منتخب در بازه $[a,b]$ بطور خطی غیر وابسته باشند.

مثال ۹ـ۶ـ با استفاده از روش گالرکین حل معادله

$$y'' - y'\cos x + y\sin x = \sin x \qquad (۴۶\text{-}۹)$$

را که در شرایط مرزی

$$y(-\pi) = y(\pi) = ۲ \qquad (۴۷\text{-}۹)$$

صدق می‌کند را تقریب بزنید.

حل ـ به عنوان دستگاهی از توابع پایه $u_i(x)(i = ۰,۱,۲,۳,۴)$ توابع مثلثاتی زیر را انتخاب می‌کنیم:

$$u_\circ = ۲, u_۱ = \sin x, u_۲ = \cos x + ۱, u_۳ = \sin ۲x, u_۴ = \cos ۲x - ۱ \qquad (۴۸\text{-}۹)$$

این توابع در بازه $[-\pi,\pi]$ مستقل خطی هستند و تابع $u_\circ$ شرط مرزی (۹-۴۷) و شرایط مرزی صفر را برقرار می‌سازد. اجازه بدهید برای پاسخ شکل زیر را در نظر بگیریم:

$$y = u_\circ(x) + \sum_{i=۱}^{۴} c_i u_i(x)$$

توابع $L[u_i](i = ۰,۱,۲,۳,۴)$را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
L[u_\circ] &= ۲\sin x,\\
L[u_۱] &= -\sin x - \cos ۲x,\\
L[u_۲] &= \sin x - \cos x + \sin ۲x,\\
L[u_۳] &= -\tfrac{۱}{۲}\cos x - ۴\sin ۲x - \tfrac{۳}{۲}\cos ۳x,\\
L[u_۴] &= -\tfrac{۱}{۲}\sin x - ۴\cos ۲x + \tfrac{۳}{۲}\cos ۳x,\\
f(x) - L[u_\circ] &= -\sin x.
\end{aligned}$$

با استفاده از رهنوشت

$$a_{ik} = \int_a^{\circ} u_k(x)L[u_i]dx, \quad b_k = \int_a^b u_k(x)\{f(x) - L[u_\circ]\}dx,$$

و با در نظر گرفتن متعامد بودن دستگاه توابع مثلثاتی $(1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots)$، ضرایب دستگاه (۹-۴۵) را محاسبه می‌کنیم:

$b_1 = -\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = -\pi, \quad b_2 = b_3 = b_4 = 0,$
$a_{11} = -\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = -\pi,\ a_{12} = \pi,\ a_{13} = 0,\ a_{14} = -\frac{\pi}{2}$
$a_{21} = 0,\ a_{22} = -\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = -\pi,\ a_{23} = -\frac{\pi}{2},\ a_{24} = 0,$
$a_{31} = 0,\ a_{32} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 2x dx = \pi,\ a_{33} = -4\pi,\ a_{34} = 0,$
$a_{41} = -\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 2x dx = -\pi,\ a_{42} = 0,\ a_{43} = 0,\ a_{44} = -4\pi.$

پس از حذف به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 \qquad\quad + 0/5c_4 &= 1, \\ c_2 + 0/5c_3 \qquad\quad &= 0, \\ c_2 - 4c_3 \qquad\quad &= 0, \\ c_1 \qquad\quad + 4c_4 \quad &= 0, \end{aligned}$$

که از آنجا بدست می‌آوریم: $c_1 = \frac{8}{7},\ c_2 = c_3 = 0,\ c_4 = -\frac{2}{7}$. بنابراین داریم:

$$y \approx 2 + \frac{8}{7}\sin x + \frac{4}{7}\sin^2 x$$

به منظور مقایسه در جدول ۹-۹ مقادیر حل تقریبی بدست آمده و حل دقیق $y = e^{\sin x} + 1$ را آورده‌ایم.

جدول ۹-۹) حل‌های دقیق و تقریبی مثال ۹-۶

x_i	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
y_i	۱/۴۲۹	۲	۳/۷۱۴
y	۱/۳۶۸	۲	۳/۷۱۸

مثال ۹ـ۷ـ با استفاده از روش گالرکین جواب معادله

$$y'' + y + x = 0 \tag{۹-۴۹}$$

را که در شرایط مرزی

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{۹-۵۰}$$

صدق می‌کند را تقریب بزنید.

حل- توابع زیر را به عنوان دستگاهی از توابع پایه u_i انتخاب می‌کنیم:

$$u_0(x) = 0,\ u_1(x) = x(1-x),\ u_2(x) = x^2(1-x)$$

این توابع مستقل خطی‌اند و شرایط مرزی صفر را برقرار می‌کنند. ما به عنوان یک جواب تقریبی شکل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$y = c_1x(1-x)4c_2x^2(1-x) = x(1-x)(c_1 + c_2x)$$

با جایگذاری y در سمت چپ معادله (۹-۴۰)، تفاضل زیر را بدست می‌آوریم:

$$R(x, c_1, c_2) = -2c_1 + c_2(2 - 6x) + x(1-x)(c_1 + c_2x) + x$$

با احتساب تعامد تابع R نسبت به توابع $u_1(x)$، $u_2(x)$ دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x - x^2)R(x, c_1, c_2)dx = 0\\ \int_0^1 (x^2 - x^3)R(x, c_1, c_2)dx = 0\end{aligned}$$

با جایگذاری مقدار R در این دستگاه و محاسبه انتگرال‌ها، یک دستگاه از معادلات جبری خطی برای بدست آوردن c_1 و c_2 خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\tfrac{3}{10}c_1 + \tfrac{3}{20}c_2 = \tfrac{1}{12}\\ \tfrac{3}{20}c_1 + \tfrac{13}{105}c_2 = \tfrac{1}{20}\end{aligned}$$

با حل این دستگاه بدست می‌آوریم: $c_1 = \frac{71}{369}$ و $c_2 = \frac{7}{14}$. بنابراین

$$y(x) = x(1-x)\left(\frac{71}{369} + \frac{7}{41}x\right)$$

به منظور مقایسه در جدول ۹-۱۰ مقادیر حل تقریبی بدست آمده و حل دقیق $y = \frac{\sin x}{\sin 1} - x$ را آورده‌ایم.

توجه- مثال بالا نشان می‌دهد که انتخاب مناسب توابع پایه، تقریب زدن جواب یک مسئله مقدار مرزی به صورت تحلیلی را ممکن می‌سازد.
اگر توابع $p(x)$، $q(x)$ و $f(x)$ در معادله (۹-۳) خیلی پیچیده باشند، محاسبه ضرایب دستگاه (۹-۴۵) بسیار مشکل می‌شود. در چنین مواردی استفاده از روش تفاضل یا روش ردیف‌سازی (collocation) که در بخش بعدی تشریح می‌شود مناسب است.

جدول ۹-۱۰) جواب‌های دقیق و تقریبی مثال ۹-۷

x_i	۰٫۲۵	۰٫۵۰	۰٫۷۵
y_i	۰٫۰۴۴	۰٫۰۶۹	۰٫۰۶۰
y	۰٫۰۴۴	۰٫۰۷۰	۰٫۰۶۰

مسائل

با بکارگیری روش گالرکین جواب‌های مسائل مقدار مرزی را تقریب بزنید.

۱ـ $y'' - y'\cos x + y\sin x = f(x),\ y(-\pi) = y(\pi) = ۲$

الف) $f(x) = \cos x$ ب) $f(x) = \sin x$ پ) $f(x) = \cos ۲x$

۲ـ $y'' - ۲xy' + ۲y = f(x),\ y(۰) = ۰,\ y'(۱) = ۱$

الف) $f(x) = x$ ب) $f(x) = ۳x^۲ + x - ۱$

پ) $f(x) = ۵x^۳ - ۳x + x$ ت) $f(x) = \frac{۱}{۲}(۵x^۳ - ۳x^۲ - \frac{۱}{۲}x + ۱)$

۹ـ۶ـ روش ردیف‌سازی[1]

ما برای جواب مسئله مقدار مرزی (۹-۳) و (۹-۴) شکل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$y(x) = u_۰(x) + \sum_{i=۱}^{n} c_i u_i(x) \qquad (۹\text{-}۵۱)$$

که در آن $u_i(x)$ $(i = ۰, ۱, \ldots, n)$ توابع مستقل خطی‌اند که شرایط (۹-۴۰) و (۹-۴۱) را برقرار می‌سازند. اجازه بدهید شرط کنیم که تفاضل

$$R(x, c_۱, c_۲, \ldots, c_n) = L[y] - f(x) = L[u_۰] - f(x) + \sum_{i=۱}^{n} c_i L[u_i] \qquad (۹\text{-}۵۲)$$

برای مجموعه نقاط $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ در بازه $[a, b]$ که نقاط ترتیب خوانده می‌شوند، صفر باشد (تعداد این نقاط می‌بایستی با تعداد ضرایب $c_۱$ در عبارت (۹-۵۱) برابر باشد). آنگاه برای بدست آوردن $c_۱, c_۲, \ldots, c_n$ دستگاه معادلات زیر را خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} R(x_۱, c_۱, c_۲, \ldots, c_n) = ۰, \\ R(x_۲, c_۱, c_۲, \ldots, c_n) = ۰, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R(x_n, c_۱, c_۲, \ldots, c_n) = ۰. \end{array}\right\} \qquad (۹\text{-}۵۳)$$

1) collocation

روش ردیف‌سازی همچنین می‌تواند برای حل معادلات دیفرانسیل غیر خطی به شکل

$$y'' = f(x, y, y') \tag{۹-۵۴}$$

با شرایط مرزی خطی (۹-۴) بکارگرفته شود. در این مورد تفاضل به صورت

$$R(x) = y'' - f(x, y, y') \tag{۹-۵۵}$$

است و دستگاه (۶ـ۳) تبدیل به یک دستگاه از معادلات جبری غیر خطی بر حسب مجهولات $c_1, c_2, \ldots, c_n$ می‌شود (مثال ۲ را ببینید).

مثال ۹ـ۸ـ با استفاده از روش ردیف‌سازی پاسخ معادله

$$y'' + (1 + x^2)y + 1 = 0 \tag{۹-۵۶}$$

را با شرایط مرزی

$$y(-1) = y(1) = 0 \tag{۹-۵۷}$$

تقریب بزنید.

حل ـ با در نظر گرفتن شکل معادله (۹-۵۶) و شرایط مرزی (۹-۵۷) می‌توانیم قضاوت کنیم که توابع زوج و یا فردند. بنابراین اجازه بدهید که چندجمله‌ای‌های $u_0(x) = 0$، $u_1(x) = 1 - x^2$ و $u_2(x) = x^2(1 - x^2)$ را در نظر بگیریم. به راحتی می‌توان دید که شرایط (۹-۵۷) در مورد آنها صادق است.
ما یک جواب مسئله (۹-۵۶) و (۹-۵۷) را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$y = c_1(1 - x^2) + c_2 x^2(1 - x^2)$$

با در نظر گرفتن نقاط ردیف‌سازی $x_0 = 0$ و $x_1 = \frac{1}{2}$ تفاضل $R(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned} R(x) &= -2c_1 + c_2(2 - 12x^2) + (1 + x^2)[c_1(1 - x^2) + c_2(x^2 - x^4)] + 1 = \\ &= 1 - c_1(1 + x^4) + c_2(2 - 11x^2 - x^6) \end{aligned}$$

با جایگذاری مقدارهای $x_0 = 0$ و $x_1 = \frac{1}{2}$ دستگاه

$$1 - c_1 + 2c_2 = 0, \ 1 - \frac{17}{16}c_1 - \frac{49}{64}c_2 = 0$$

را بدست می‌آوریم که از آنجا بدست می‌آوریم $c_1 = 0{,}957$ و $c_2 = -0{,}022$. بنابراین یک جواب تقریبی به صورت $y \approx 0{,}957(1 - x^2) - 0{,}022x^2(1 - x^2)$ داریم.

مثال ۹ـ۹ـ با استفاده از روش ردیف‌سازی جواب معادله

$$y'' = 2x + y^2 \tag{۹-۵۸}$$

با شرایط مرزی $y(0) = y(1) = 0$ را تقریب بزنید.

حل‌ـ توابع زیر را به عنوان توابع پایه در نظر می‌گیریم:

$$u_0 = 0,\ u_1 = x(1-x),\ u_2 = x^2(1-x)$$

و پاسخی به شکل $y = c_1u_1(x) + c_2u_2(x)$ را در نظر می‌گیریم. تفاضل $R(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$R(x) = c_1u_1'' + c_2u_2'' - (c_1^2u_1^2 + 2c_1c_2u_1u_2 + c_2^2u_2^2) - 2x$$

که در آن $u_1'' = -2$ و $u_2'' = 2 - 6x$.

نقاط مرتب‌سازی را $x_1 = 0{,}25$ و $x_2 = 0{,}75$ می‌گیریم. با محاسبه $R(x)$ در نقاط مرتب‌سازی دستگاهی از معادلات غیر خطی را بدست می‌آوریم:

$$\left.\begin{aligned} -2c_1 + 0{,}5c_2 &= 0{,}5 + (0{,}0352c_1^2 + 0{,}0176c_1c_2 + 0{,}0022c_2^2), \\ -2c_1 + 2{,}5c_2 &= 1{,}5 + (0{,}0352c_1^2 + 0{,}0528c_1c_2 + 0{,}0198c_2^2). \end{aligned}\right\} \tag{۹-۵۹}$$

این دستگاه را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= -\tfrac{1}{3} - \tfrac{5}{6}(0{,}0211c_1^2 + 0{,}0141c_1c_2 + 0{,}0031c_2^2), \\ c_2 &= -\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}(0{,}0352c_1c_2 + 0{,}0176c_2^2) \end{aligned}\right\} \tag{۹-۶۰}$$

و آنرا به روش تکرار با استفاده از فرمول‌های

$$\begin{aligned} c_{1,k+1} &= -\tfrac{1}{3} - \tfrac{5}{6}(0{,}0211c_{1,k}^2 + 0{,}0141c_{1,k}c_{2,k} + 0{,}0031c_{2,k}^2), \\ c_{2,k+1} &= -\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}(0{,}0352c_{1,k}c_{2,k} + 0{,}0176c_{2,k}^2) \end{aligned}$$

حل می‌کنیم. در اینجا اندیس k مشخص کننده شماره تقریب است.

تقریب اول‌ـ

$$\begin{aligned} &c_{1,1} = -\tfrac{1}{3},\ \ c_{2,1} = -\tfrac{1}{3}, \\ &c_{1,1}^2 = c_{2,1}^2 = c_{1,1}c_{2,1} = \tfrac{1}{9}. \end{aligned}$$

تقریب دوم‌ـ

$$\begin{aligned} c_{1,2} &= -\tfrac{1}{3} - \tfrac{5}{6} \times \tfrac{1}{9}(0{,}0211 + 0{,}0141 + 0{,}0031) = -0{,}3369, \\ c_{2,2} &= -\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{9}(0{,}0352 + 0{,}0176) = -0{,}3353, \\ c_{1,2}^2 &= 0{,}1135,\ c_{2,2}^2 = 0{,}1124,\ c_{1,2}c_{2,2} = 0{,}1130. \end{aligned}$$

تقریب سوم-

$$c_{۱,۳} = -\frac{۱}{۳} - \frac{۵}{۶}(۰٫۲۱۱ \times ۰٫۱۱۳۵ + ۰٫۰۱۴۱ \times ۰٫۱۱۳۰ + ۰٫۰۰۳۱ \times ۰٫۱۱۲۴) =$$
$$= -۰٫۳۳۶۹,$$
$$c_{۲,۳} = -\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۳}(۰٫۰۳۵۲ \times ۰٫۱۱۳۰ + ۰٫۰۱۷۶ \times ۰٫۱۱۲۴) = -۰٫۳۳۵۳.$$

چون مقادیر $c_۱$ و $c_۲$ در تقریب‌های دوم و سوم مطابقت دارند، می‌توانیم با دقت $۱۰^{-۴}$ بنویسیم:

$$c_۱ = -۰٫۳۳۶۹, \quad c_۲ = -۰٫۳۳۵۳$$

از اینرو ما یک جواب تقریبی از معادله (۹-۵۸) را به صورت زیر داریم:

$$y = -x(۱-x)(۰٫۳۳۶۹ + ۰٫۳۳۵۳x)$$

توجه- همانطور که در مثال تشریح شده در بالا واضح است، روش ردیف‌سازی به محاسبات ساده‌تری نسبت به روش گالرکین می‌انجامد.

مسائل

با بکارگیری روش ردیف‌سازی جواب‌های مسائل مقدار مرزی زیر را تقریب بزنید:

۱- $y'' + x^۲y' - xy = f(x), \quad y(۰) = y(۱) = ۰$

الف) $f(x) = e^x$ ب) $f(x) = e^{x^۲}$ پ) $f(x) = \sin x$

ت) $f(x) = \cos x$ ث) $f(x) = \tan x$

۲- $y'' + y' - \frac{y}{x} = f(x), \quad y(۰) = ۰, \quad y'(۱) = ۱$

الف) $f(x) = x^۲ - \frac{۳}{۴}x + \frac{۱}{۸}$

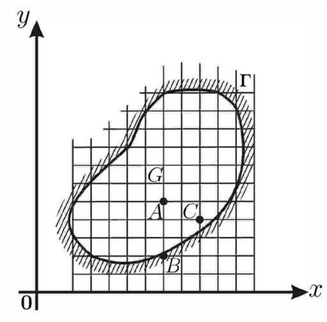
ب) $f(x) = ۸x^۲ - ۸x + \frac{۳}{۲}$

پ) $f(x) = ۴x^۲ - x + \frac{۳}{۲}$

۱۰ـ حل معادلات عددی با مشتقات جزئی و معادلات عددی

۱۰ـ۱ـ روش شبکه[1]

روش شبکه یا روش تفاضلات محدود یکی از روش‌های بسیار معمول در روش‌های موجود برای حل عددی معادلات با مشتقات جزئی است. این روش بر مبنای ایده جایگذاری مشتقات با روابط تفاضل محدود استوار است. ما خود را به موردی از دو متغیر غیر وابسته محدود می‌کنیم. یک دامنه مشخص G با مرز Γ قرار گرفته در صفحه xoy را در نظر بگیرید (شکل ۱۰-۱).



شکل ۱۰-۱

1) Net method

در این صفحه دو دسته خطوط موازی را در نظر بگیرید:

$$x = x_\circ + ih \quad (i = \circ, \pm ۱, \pm ۲, \dots),$$
$$y = y_\circ + k\iota \quad (k = \circ, \pm ۱, \pm ۲, \dots).$$

نقاط تقاطع این دسته خطوط را نقاط چشمه می‌گوییم. این نقاط چشمه را همسایه می‌خوانیم اگر فاصله آنها در جهت ox و یا oy به ترتیب با فاصله شبکه h و یا L برابر باشند.اجازه دهید نقاط چشمه‌ای را در نظر بگیریم که داخل دامنه $G + \Gamma$ قرار دارند و همچنین چند نقطه‌ای دیگر را در نظر بگیریم که داخل این دامنه نبوده امّا در فاصله‌ای کمتر از مرز Γ قرار دارند. نقاطی که چهار نقطه همسایه آنها در مجموعه نقاط چشمه انتخاب شده قرار دارند را نقاط داخلی می‌نامند (مثل نقطه A در شکل ۱۰-۱). دیگر نقاط انتخاب شده را نقاط مرزی می‌نامند (مثل نقاط B و C در شکل ۱۰-۱).

اجازه بدهید که مقادیر تابع مورد نظر $u = u(x, y)$ را در نقاط چشمه با $u_{ik} = u(x_\circ + ih, y_\circ + kl)$ نشان دهیم. در هر نقطه داخلی $(x_\circ + ih, y_i + kl)$ مشتقات جزئی را با روابط تفاضلی جایگزین می‌کنیم:

$$(\frac{\partial u}{\partial x})_{ik} \approx \frac{u_{i+۱,k} - u_{i-۱,k}}{۲h}, \qquad (\frac{\partial u}{\partial y})_{ik} \approx \frac{u_{i,k+۱} - u_{i,k-۱}}{۲l}, \qquad (۱\text{-}۱\circ)$$

برای نقاط مرزی ما از فرمول‌های دقیق‌تری به شکل زیر استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} (\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲})_{ik} \approx \frac{u_{i+۱,k} - u_{ik}}{h^۲}, \\ (\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲})_{ik} \approx \frac{u_{i,k+۱} - u_{ik}}{l^۲}, \end{array}\right\} \qquad (۲\text{-}۱\circ)$$

مشتقات جزئی رتبه دوم را بطور مشابه جایگزین می‌کنیم، برای مثال:

$$\left.\begin{array}{l} (\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲})_{ik} \approx \frac{u_{i+۱,k} - ۲u_{ik} + u_{i-۱,k}}{h^۲} \\ (\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲})_{ik} \approx \frac{u_{i,k+۱} - ۲u_{ik} + u_{i,k-۱}}{l^۲} \end{array}\right\} \qquad (۳\text{-}۱\circ)$$

جایگزین‌های مشخص شده برای مشتقات در هر نقطه چشمه ما را قادر می‌سازد که حل معادلات با مشتقات جزئی را به حل یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل تبدیل کنیم.

۱۰ـ۲ـ روش شبکه برای مسئله دریخله[1]

اولین مسئله مقدار مرزی یا مسئله دریخله برای معادله پواسن

$$\Delta_u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y) \qquad (۴\text{-}۱۰)$$

به صورت زیر بیان می‌شود: پیدا کنید تابع $u = u(x,y)$ را که در دامنه مشخص G معادله (۱۰ـ۱) را برقرار ساخته و در مرز Γ در شرط

$$u/\Gamma = \varphi(x,y) \qquad (۵\text{-}۱۰)$$

صدق کند (که در آن $\varphi(x,y)$ یک تابع پیوسته و مشخص است).
با انتخاب فواصل h و L برای محورهای x و y یک شبکه تشکیل می‌دهیم:

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$
$$y_k = y_0 + kL \quad (k = 0, \pm 1, \pm, \dots)$$

و در هر نقطه چشمه داخلی (x_i, y_k) مشتقات $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ را با استفاده از روابط تفاضل محدود (۱۰-۳) و همچنین معادله (۱۰-۴) را با معادلات تفاضل محدود

$$\frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2} + \frac{u_{i,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,k-1}}{l^2} = f_{ik} \qquad (۶\text{-}۱۰)$$

جایگزین می‌کنیم که در آن $f_{ik} = f_k(x_i, y_k)$.
معادلات (۱۰-۶) به همراه مقادیر u_{ik} در نقاط مرزی تشکیل یک دستگاه معادلات خطی بر حسب مقادیر تابع $f(x,y)$ در نقاط (x_i, y_k) را می‌دهند. برای یک دامنه مربع مستطیل و برای $l = h$ این دستگاه ساده‌ترین شکل را دارد. در این مورد معادله (۱۰-۶) به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$(u_{i+1,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k+1} + u_{i,k-1} - 4u_{ik}) = h^2 f_{ik} \qquad (۷\text{-}۱۰)$$

و مقادیر در نقاط مرزی دقیقاً با مقادیر توابع مرزی برابرند: برای $f(x,y) = 0$ معادله (۱۰-۴) را معادله لاپلاس می‌گویند و معادلات تفاضل محدود مربوطه به صورت زیر هستند:

$$u_{ik} = \frac{1}{4}(u_{i+1,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k+1} + u_{i,k-1}) \qquad (۸\text{-}۱۰)$$

برای محاسبه فرمول‌های (۱۰-۷) و (۱۰-۸) از نقاط چشمه مشخص شده در شکل ۱۰-۲ استفاده می‌شود. این نقاط و دیگر نقاط مشخص شده در شکل‌های دیگر تنها بخشی از نقاط چشمه‌اند. برای مثال نقطه (x_i, y_k) به صورت (i,k) نشان داده شده است. گاهی اوقات بکارگیری روشی که در شکل ۱۰-۳ نشان

1) Dirichlet

داده شده است بهتر می‌باشد. در این مورد برای معادله لاپلاس معادلات تفاضل محدود زیر در نظرگرفته می‌شود:

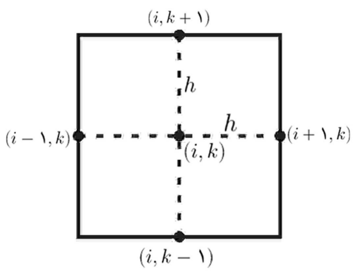
$$u_{ik} = \frac{1}{4}(u_{i-1,k-1} + u_{i+1,k-1} + u_{i-1,k+1} + u_{i+1,k+1}) \qquad (۹-۱۰)$$

و برای معادله پوآسن داریم:

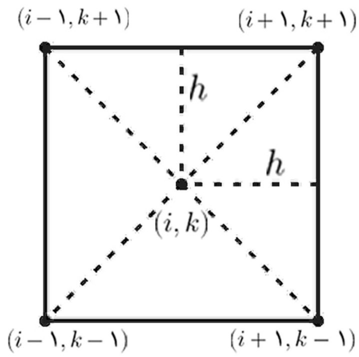
$$u_{ik} = \frac{1}{4}(u_{i-1,k-1} + u_{i+1,k-1} + u_{i-1,k+1} + u_{i+1,k+1}) + \frac{h^2}{2} f_{ik}$$

خطای ناشی از جایگزینی معادله دیفرانسیل با یک معادله تفاضلی یعنی جمله باقیمانده R_{ik} برای معادله لاپلاس توسط نامساوی $|R_{ik}| \leq \frac{h^2}{6} M_4$ برآورد می‌شود که در آن

$$M_4 = \max_G \{ |\frac{\partial^4_u}{\partial x^4}|, |\frac{\partial^4_u}{\partial y^4}| \}$$



شکل ۱۰-۲



شکل ۱۰-۳

خطای پاسخ بدست آمده توسط روش تفاضل از سه خطای زیر تشکیل می‌شود:

۱) خطای ناشی از جایگزینی معادله دیفرانسیل با معادله تفاضل

۲) خطای تقریب شرایط مرزی

۳) خطای ناشی از این حقیقت که یک دستگاه از معادلات تفاضلی به روش تقریبی حل شده است.

مثال ۱۰ـ۱ـ مسئله توزیع یکنواخت گرما در یک صفحه مربع که مساحت هر طرف آن برابر ۱ است را در نظر بگیرید بطوری که کناره‌های آن در یک دمای ثابت نگهداشته شده‌اند. همانطورکه می‌دانیم ([52] را ببینید) تابع $u(x, y)$ (توزیع نفوذ دما) حل معادله لاپلاس $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ برای شرایط مرزی مشخص شده است. برای مسئله مورد نظر شرایط مرزی در شکل ۱۰-۴ داده شده است.

حل- یک شبکه با فاصله $h = \frac{1}{4}$ تشکیل می‌دهیم که شامل ۹ نقطه داخلی است (شکل ۱۰-۴). معادلات تفاضل محدود را برای این نقاط می‌نویسیم.
با فرض همگن بودن شرایط مرزی داریم:

$$u_{11} = u_{31}, \quad u_{12} = u_{32}, \quad u_{13} = u_{33} \qquad (10\text{-}10)$$

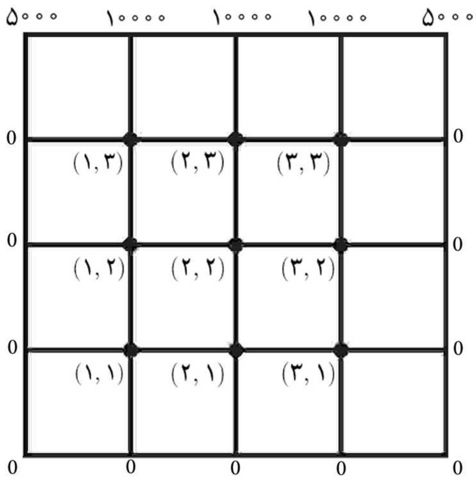
که این امر تعداد مجهولات تابع u را از تعداد نقاط داخلی به شش نقطه تقلیل می‌دهد. از اینرو و در آنجا نیازی به نوشتن معادلات تفاضل محدود برای نقاط چشمه (۱ و ۳)، (۲ و ۳) و (۳ و ۳) نیست. برای شش نقطه داخلی باقیمانده (۱ و ۱)، (۱ و ۲)، (۲ و ۱)، (۲ و ۲)، (۳ و ۱) و (۳ و ۲) به ترتیب شش معادله زیر را خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{ll} u_{01} + u_{21} + u_{10} + u_{12} - 4u_{11} = 0, & u_{11} + u_{31} + u_{20} + u_{22} - 4u_{21} = 0, \\ u_{02} + u_{22} + u_{11} + u_{13} - 4u_{12} = 0, & u_{12} + u_{32} + u_{21} + u_{23} - 4u_{22} = 0, \\ u_{03} + u_{23} + u_{12} + u_{14} - 4u_{13} = 0, & u_{13} + u_{33} + u_{22} + u_{24} - 4u_{23} = 0. \end{array}\right\} \qquad (11\text{-}10)$$

دوازده مقدار دیگر تابع در نقاط مرزی نیز با این معادلات پوشیده می‌شوند. ما این مقادیر را از شرایط مرزی می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l} u_{10} = 0\,(i = 1, 2, 3), u_{0j} = 0\,(j = 1, 2, 3) \\ u_{14} = u_{24} = u_{32} = 10000 \end{array}\right\} \qquad (12\text{-}10)$$

توجه داشته باشید که در هیچ نقطه‌ای در راستای نقاط چشمه شرایط مرزی مورد استفاده نیستند.



شکل ۱۰-۴

سرانجام با احتساب شرایط (۱۰-۱۰) و (۱۰-۱۲) دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} &u_{۲۱}+u_{۱۲}-۴u_{۱۱}=۰, && ۲u_{۱۱}+u_{۲۲}-۴u_{۲۱}=۰,\\ &u_{۲۲}+u_{۱۱}+u_{۱۳}-۴u_{۱۲}=۰, && ۲u_{۱۲}+u_{۲۱}+u_{۲۳}-۴u_{۲۲}=۰,\\ &u_{۲۳}+u_{۱۲}-۴u_{۱۳}=-۱۰۰۰. && ۲u_{۱۳}+u_{۲۲}-۴u_{۲۳}=-۱۰\ ۰۰۰ \end{aligned}$$

با حل این دستگاه به روش گوس خواهیم داشت:

$$\begin{gathered} u_{۱۱}=۷۱۴,\quad u_{۲۱}=۹۸۲,\quad u_{۱۲}=۱۸۷۵,\quad u_{۲۲}=۲۵۰۰,\\ u_{۱۳}=۴۲۸۶,\quad u_{۲۳}=۵۲۶۸. \end{gathered}$$

مثال ۱۰ـ۲ـ همانطورکه می‌دانیم ([۴۲] را ببینید) مسئله تغییر شکل الاستیک یک صفحه مربع تحت اثر یک نیروی ثابت منجر به حل معادله پوآسن

$$\Delta u=-۱$$

با مقادیر مرزی صفر می‌شود. جواب این مسئله را به وسیله روش چشمه برای مربعی با مساحت ۱ و فاصله $h=\frac{۱}{۴}$ بدست می‌آوریم.

حل ـ توجه داشته باشید که در این مورد یک همگنی کامل برای مقادیر داده شده تابع داریم، چون تمام شرایط مرزی صفرند و تابع $f(x,y)$ ثابت است. بنابراین کافی است که معادلات تفاضل محدود را برای $\frac{۱}{۴}$ مربع تشکیل دهیم یعنی برای نقاط (۱ و ۱)، (۱ و ۲)، (۲ و ۱) و (۲ و ۲) (شکل ۱۰-۴ را ببینید). با احتساب شرایط مرزی صفر معادلات زیر را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} &u_{۲۱}+u_{۱۲}-۴u_{۱۱}=-۰/۰۶۲۵ && ۲u_{۱۱}+u_{۲۲}-۴u_{۲۱}=-۰/۰۶۲۵\\ &u_{۲۲}+۲u_{۱۱}-۴u_{۱۲}=-۰/۰۶۲۵ && ۲u_{۱۲}+۲u_{۲۱}-۴u_{۲۲}=-۰/۰۶۲۵ \end{aligned}$$

با توجه به همگنی پاسخ $(u_{۲۱}=u_{۱۲})$، دستگاه بدست آمده به دستگاه سه معادله‌ای زیر منجر می‌شود:

$$\begin{aligned} -۴u_{۱۱}+۲u_{۱۲}&=-۰/۰۶۲۵\\ ۲u_{۱۱}-۴u_{۱۲}+u_{۲۲}&=-۰/۰۶۲۵\\ ۴u_{۱۲}-۴u_{۲۲}&=-۰/۰۶۲۵ \end{aligned}$$

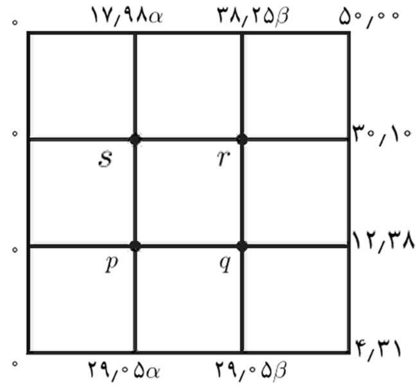
با حل این دستگاه بدست می‌آوریم:

$$u_{۱۱}=۰/۰۴۲۹\quad u_{۱۲}=u_{۲۱}=۰/۰۵۴۷\quad u_{۲۲}=۰/۰۷۰۳$$

مسائل

۱ـ با بکارگیری روش شبکه پاسخ معادلات لاپلاس را در نقاط p، q، r و S از مربع، با شرایط مرزی مشخص شده در شکل ۱۰-۵ را برای $\alpha = ۰٫۹ + ۰٫۱k(k = ۰, ۱, ۲)$ و $\beta = ۱٫۰۱ + ۰٫۰۱n,\ n = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴$ بدست آورید.

۲ـ با بکارگیری روش شبکه با فاصله $h = \frac{۱}{۴}$، پاسخ معادله لاپلاس را در یک مربع با رئوس $A(۰, ۰)$، $B(۰, ۱)$، $C(۱, ۱)$ و $D(۱, ۰)$ بدست آورید. شرایط مرزی در جدول ۱۰-۱ داده شده است.



شکل ۱۰-۵

جدول ۱۰-۱) شرایط مرزی

Variants	$u\|_{AB}$	$u\|_{BC}$	$u\|_{CD}$	$u\|_{AD}$
(a)	$۳۰y$	$۳۰(۱ - x^۲)$	۰	۰
(b)	$۳۰y$	$۳۰ \cos \frac{\pi x}{۲}$	$۳۰ \cos \frac{\pi y}{۲}$	۰
(c)	$۵۰y(۱ - y^۲)$	۰	۰	$۵۰ \sin \pi x$
(d)	$۲۰y$	۲۰	$۲۰y^۲$	$۵۰x(۱ - x)$
(e)	۰	$۵۰x(۱ - x)$	$۵۰y(۱ - y^۲)$	$۵۰x(۱ - x)$
(f)	$۳۰ \sin \pi y$	$۲۰x$	$۲۰y$	$۳۰x(۱ - x)$
(g)	$۳۰(۱ - y)$	$۲۰\sqrt{x}$	$۲۰y$	$۳۰(۱ - x)$
(h)	$۵۰ \sin \pi y$	$۳۰\sqrt{x}$	$۳۰y^۲$	$۵۰ \sin \pi x$
(i)	$۴۰y^۲$	۴۰	۴۰	$۴۰ \sin \frac{\pi x}{۲}$
(j)	۵۰	$۵۰(۱ - x)$	۰	$۶۰x, ۰ \le x < ۱/۲$ $۶۰(۱ - x), ۱/۲ \le x \le ۱$

۱۰ـ۳ـ روش تکرار برای حل یک دستگاه از معادلات تفاضل‌ـمحدود

حل مستقیم یک دستگاه معادلات تفاضل محدود به کمک روش‌های حذف متوالی برای تعداد زیاد نقاط چشمه بسیار طاقت فرساست. در اینجا بسیار مناسب است که از روش‌های تکراری که شکل خاص این چنین دستگاه‌هایی را در نظر می‌گیرند و برای اجرا توسط یک کامپیوتر بسیار مناسب هستند، استفاده کنیم ([۵] و[۶۰] را ببینید).

یکی از این روش‌های ساده، فرآیند لیبمن [1] است که برای حل دستگاه‌هایی به شکل (۱۰-۸) مناسب است ([۱۳]، [۳۵] و [۳۹] را ببینید).[2]

در روش لیبمن، محاسبات به طریقه زیر انجام می‌شود:

با انتخاب تقریب‌های اولیه $u_{ij}^{(\circ)}$، تقریب‌های بعدی را برای نقاط داخلی شبکه بدست می‌آوریم

$$u_{ij}^{(k+۱)} = \frac{۱}{۴}[u_{i+۱,j}^{(k)} + u_{i-۱,j}^{(k)} + u_{i,j+۱}^{(k)} + u_{i,j-۱}^{(k)}] \quad (k = \circ, ۱, ۲ \ldots). \qquad (۱۳\text{-}۱۰)$$

برای بدست آوردن تقریب‌های اولیه می‌توان از دو روش استفاده کرد:

۱ـ بدست آوردن مقادیر $u_{ij}^{(\circ)}$ در نقاط چشمه داخلی به وسیله درون‌یابی، با استفاده از مقادیر مرزی معلوم (مثال ۱۰ـ۳ را ببینید).

۲ـ یک دستگاه از معادلات تفاضل محدود برای شبکه‌ای با فاصله‌گذاری بزرگتر تشکیل داده و آن را به روش حذف حل می‌کنیم. سپس مقادیر بدست آمده را برای شبکه داده شده درون‌یابی می‌کنیم (مثال ۲ را ببینید).

ثابت شده است ([۱۸]، [۳۷] و [۵۲] را ببینید) که برای فاصله h فرآیند لیبمن به جواب دقیق متقارب می‌شود و این به مقادیر اولیه انتخاب شده بستگی ندارد. یعنی حد زیر موجود است:

$$\lim_{k\to\infty} u_{ij}^{(k)} = u_{ij}$$

فرآیند تکرار با سرعت خیلی بیشتری متقارب خواهد شد اگر در انجام عملیات حسابی از مقادیر پیدا شده قبلی و جدید استفاده شود (مثال دوم، روش سیدل). معمولاً تا زمانی که به تعداد لازم ارقام اعشاری دو تقریب متوالی مطابق شوند، فرآیند تکرار ادامه پیدا می‌کند.

خطای تقریب حل معادله لاپلاس را می‌توان با اصل رانگ ([۲] و [۳۵] را ببینید) برآورد کرد زیرا خطای εh حل تقریبی u_h بدست آمده برای فاصله h، با فرمول تقریبی زیر برآورد می‌شود:

$$\varepsilon h \approx \frac{u_h - u_{۲h}}{\varepsilon} \qquad (۱۴\text{-}۱۰)$$

که در آن $u_{۲h}$ حل تقریبی بدست آمده برای فاصله $2h$ است. توجه کنید که روش‌های تکراری تشریح شده بطور معمول در تمام نقاط داخلی به صورت یک عملیات استاندارد انجام می‌گیرند. بنابراین این روش‌ها

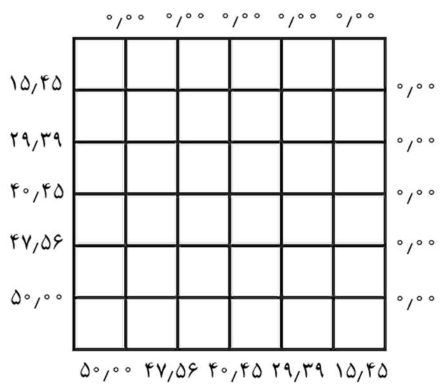
1) Liebmann

۲) برای دیگر روش‌های موثر و سابقه کامل در این مورد به[۴۳] رجوع کنید.

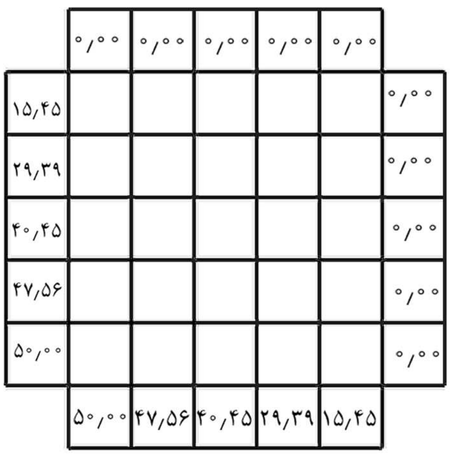
برای برنامه‌سازی روی یک کامپیوتر مناسب می‌باشند. وقتی محاسبات توسط کامپیوتر انجام می‌شود، آماده کردن یک تعداد کافی از الگوهای محاسباتی بسیار مفید است ([۱۳] و [۳۵] را ببینید).

مثال ۱۰ـ۳ـ حل معادله لاپلاس را برای یک مربع با شرایط مرزی مشخص شده در شکل ۱۰-۶ را بدست آورید.

حل‌ـ شکل ۱۰-۷ الگوی محاسباتی برای مسئله داده شده را نشان می‌دهد. این شکل به صورت زیر ساخته شده است. هر نقطه چشمه با یک مربع جایگزین شده است. محتویات داخل هر مربع همان مقادیر مرزی، متناظر با نقاط مرزی هستند. چون در فرآیند تکرار مقادیر مرزی دست نمی‌خورند، الگوهای بدست آمده به شکل یک مربع ۵ × ۵ هستند که ضمیمه الگوی اولیه شده‌اند (شکل ۱۰-۷).



شکل ۱۰-۶



شکل ۱۰-۷

پر کردن الگوها:

۱ـ محاسبه تقریب‌های اولیه

مقادیر مرزی را به نقاط داخلی به روش زیر درون‌یابی می‌کنیم. با سطر بالایی شروع می‌کنیم. فرض می‌کنیم که تابع $u(x,y)$ از ۱۵/۴۵ تا ۰ به صورت خطی کاهش می‌یابد. این بدین معنی است که برای مقدار اولیه $u_{i۵}^{(۰)}$ بدست می‌آید:

$$u_{i۵}^{(۰)} = \frac{۱۵/۴۵}{۶}(۶-i) \quad (i=۱,۲,۳,۴,۵)$$

یعنی $u_{۱۵}^{(۰)} = ۱۲/۸۸$، $u_{۲۵}^{(۰)} = ۱۰/۳۰$، $u_{۳۵}^{(۰)} = ۷/۷۲$، $u_{۴۵}^{(۰)} = ۵/۱۵$ و $u_{۵۵}^{(۰)} = ۲/۵۸$. بطور مشابه کار را با ستون سمت راست انجام می‌دهیم با قرار دادن $u_{۵j}^{(۰)} = u_{i۵}^{(۰)}$.

سپس سطر بعدی را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که تابع $u(x,y)$ بطور خطی از ۲۹/۳۹ تا ۵/۱۵ کاهش می‌یابد. با برهانی مشابه مورد قبلی، مقادیر $u_{i۴}^{(۰)}(i=۲,۳,۴,۵)$ را بدست می‌آوریم. فرآیند را آنقدر ادامه می‌دهیم تا جدول تقریب‌های اولیه پر شود (الگوی ۱).

الگوی ۱

۱۲/۸۸	۱۰/۳۰	۷/۷۲	۵/۱۵	۲/۵۸
۲۴/۵۴	۱۹/۶۹	۱۴/۸۵	۱۰/۰۰	۵/۱۵
۳۴/۰۵	۲۷/۶۵	۲۱/۲۵	۱۴/۸۵	۷/۷۲
۴۰/۹۲	۳۴/۲۹	۲۷/۶۵	۱۹/۶۹	۱۰/۳۰
۴۵/۴۶	۴۰/۹۲	۳۴/۰۵	۲۴/۵۴	۱۲/۸۸

الگوی ۲

۱۲/۵۷	۱۰/۰۷	۷/۵۸	۵/۰۸	۲/۵۸
۲۴/۰۰	۱۹/۳۴	۱۴/۶۶	۱۰/۰۰	
۳۳/۳۹	۲۷/۳۲	۲۱/۲۵		
۴۰/۳۴	۳۴/۲۸			
۴۵/۴۶				

الگوی ۳

۱۲/۳۸	۹/۸۷	۷/۴۵	۵/۰۴	۲/۵۴
۲۳/۶۷	۱۹/۰۱	۱۴/۵۴	۹/۸۷	
۳۳/۰۳	۲۷/۰۶	۲۰/۹۹		
۴۰/۱۷	۳۳/۸۳			
۴۵/۱۷				

الگوی ۴

۱۲/۲۵	۹/۷۱	۷/۳۶	۴/۹۶	۲/۵۲
۲۳/۴۵	۱۸/۷۸	۱۴/۳۳	۹/۷۹	
۳۲/۸۴	۲۶/۷۲	۲۹/۸۰		
۳۹/۹۰	۳۳/۶۲			
۴۵/۰۸				

الگوی ۵

۱۲/۱۵	۹/۶۰	۷/۲۵	۴/۹۲	۲/۴۸
۲۳/۳۲	۱۸/۵۵	۱۴/۱۸	۹/۶۴	
۳۲/۶۳	۲۶/۵۱	۲۰/۵۲		
۳۹/۷۸	۳۳/۳۱			
۴۴/۹۵				

الگوی ۶

۱۲/۰۹	۹/۴۹	۷/۱۸	۴/۸۴	۲/۴۶
۲۳/۱۸	۱۸/۴۰	۱۳/۹۹	۹/۵۵	
۳۲/۵۲	۲۶/۲۵	۲۰/۳۴		
۳۹/۶۱	۳۳/۱۴			
۴۴/۸۹				

الگوی ۷

۱۲/۰۳	۹/۴۲	۷/۰۸	۴/۸۰	۲/۴۲
۲۳/۱۰	۱۸/۲۳	۱۳/۸۷	۹/۴۲	
۳۲/۳۷	۲۶/۱۰	۲۰/۱۲		
۳۹/۵۳	۳۲/۹۳			
۴۴/۸۰				

الگوی ۸

۱۱/۹۹	۹/۳۴	۷/۰۲	۴/۷۳	۲/۴۰
۲۳/۰۰	۱۸/۱۲	۱۳/۷۱	۹/۳۴	
۳۲/۳۰	۲۵/۹۱	۱۹/۹۸		
۳۹/۴۲	۳۲/۸۲			
۴۴/۷۶				

الگوی ۹

۱۱٫۹۵	۹٫۲۸	۶٫۹۴	۴٫۶۹	۲٫۳۶
۲۲٫۹۵	۱۷٫۹۹	۱۳٫۶۲	۹٫۲۲	
۳۲٫۲۰	۲۵٫۸۰	۱۹٫۸۱		
۳۹٫۳۶	۳۲٫۶۶			
۴۴٫۷۱				

الگوی ۱۰

۱۱٫۹۲	۹٫۲۲	۶٫۹۰	۴٫۶۳	۲٫۳۴
۲۲٫۸۸	۱۷٫۹۱	۱۳٫۴۹	۹٫۱۶	
۳۲٫۱۴	۲۵٫۶۶	۱۹٫۷۱		
۳۹٫۲۸	۳۲٫۵۸			
۴۴٫۶۸				

الگوی ۱۱

۱۱٫۸۹	۹٫۱۸	۶٫۸۴	۴٫۶۰	۲٫۳۲
۲۲٫۸۴	۱۷٫۸۱	۱۳٫۴۲	۹٫۰۶	
۳۲٫۰۷	۲۵٫۵۸	۱۹٫۵۸		
۳۹٫۲۴	۳۲٫۴۷			
۴۴٫۶۴				

الگوی ۱۲

۱۱٫۸۷	۹٫۱۴	۶٫۸۰	۴٫۵۶	۲٫۳۰
۲۲٫۷۹	۱۷٫۷۶	۱۳٫۳۲	۹٫۰۱	
۳۲٫۰۳	۲۵٫۴۸	۱۹٫۵۰		
۳۹٫۱۸	۳۲٫۴۱			
۴۴٫۶۲				

الگوی ۱۳

۱۱٫۸۴	۹٫۱۱	۶٫۷۶	۴٫۵۳	۲٫۲۸
۲۲٫۷۶	۱۷٫۶۸	۱۳٫۲۷	۸٫۹۴	
۳۱٫۹۸	۲۵٫۴۲	۱۹٫۴۰		
۳۹٫۱۶	۳۲٫۳۳			
۴۴٫۵۹				

الگوی ۱۴

۱۱٫۸۳	۹٫۰۷	۶٫۷۳	۴٫۵۰	۲٫۲۶
۲۲٫۷۲	۱۷٫۶۴	۱۳٫۲۰	۸٫۹۰	
۳۱٫۹۵	۲۵٫۳۵	۱۹٫۳۴		
۳۹٫۱۲	۳۲٫۲۹			
۴۴٫۵۸				

الگوی ۱۵

۱۱٫۸۱	۹٫۰۵	۶٫۶۹	۴٫۴۷	۲٫۲۵
۲۲٫۷۰	۱۷٫۵۸	۱۳٫۱۵	۸٫۸۵	
۳۱٫۹۱	۲۵٫۳۰	۱۹٫۲۸		
۳۹٫۱۰	۳۲٫۲۴			
۴۴٫۵۶				

الگوی ۱۶

۱۱٫۸۰	۹٫۰۲	۶٫۶۷	۴٫۴۵	۲٫۲۴
۲۲٫۶۷	۱۷٫۵۵	۱۳٫۱۰	۸٫۸۱	
۳۱٫۸۹	۲۵٫۲۵	۱۹٫۲۲		
۳۹٫۰۷	۳۲٫۲۰			
۴۴٫۵۵				

الگوی ۱۷

۱۱٫۷۸	۹٫۰۰	۶٫۶۴	۴٫۴۳	۲٫۲۲
۲۲٫۶۶	۱۷٫۵۱	۱۳٫۰۶	۸٫۷۸	
۳۲٫۸۶	۲۵٫۲۲	۱۹٫۱۸		
۳۹٫۰۵	۳۲٫۱۶			
۴۴٫۵۴				

۲ـ محاسبه تقریب‌های بعدی با فرمول (۱۰-۱۳). الگوی ۱ را در نظر گرفته و آن‌را ضمیمه الگوی اولیه می‌کنیم و در ادامه با فرمول (۱۰-۱۳) بدست می‌آوریم، برای $k = 1$:

$$u_{15}^{(1)} = \tfrac{1}{4}(u_{25}^{(0)} + u_{05}^{(0)} + u_{16}^{(0)} + u_{14}^{(0)}) =$$
$$= \tfrac{1}{4}(10{,}30 + 15{,}45 + 0 + 24{,}54) = 12{,}57,$$
$$u_{14}^{(1)} = \tfrac{1}{4}(u_{24}^{(0)} + u_{04}^{(0)} + u_{15}^{(0)} + u_{13}^{(0)}) =$$
$$= \tfrac{1}{4}(19{,}69 + 29{,}39 + 34{,}05 + 12{,}88) = 24{,}00$$

و به همین ترتیب الی آخر.

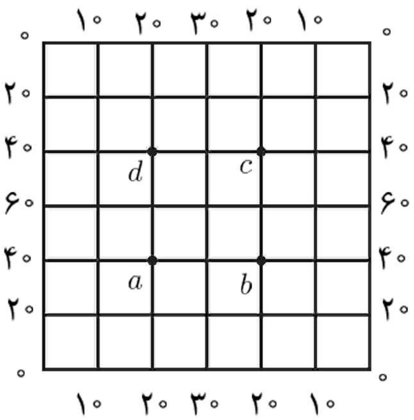
تمام نتایج را در الگوی ۲ وارد می‌کنیم و تقریب بعدی $u_{ij}^{(۲)}$ را به طریقه مشابه بدست می‌آوریم. محاسبات تا وقتی که مقادیر دو تکرار متوالی بیشتر از ۰٫۰۵ اختلاف نداشته باشند ادامه می‌یابد. نتایج تکرارهای ۱۶ام و ۱۷ام این شرط را برقرار می‌کنند. چون جدول همگن است الگوها به صورت نیمه پر شده‌اند.

مثال ۱۰ـ۴ـ پاسخ معادله لاپلاس را برای یک مربع تحت شرایط مرزی مشخص شده در شکل ۱۰-۸ را، با در نظر گرفتن $h = \frac{۱}{۶}$ بدست آورید.

حلـ محاسبه تقریب اولیه:

برای محاسبه تقریب اولیه ابتدا یک شبکه با فاصله $h = \frac{۱}{۳}$ تشکیل می‌دهیم (با در نظر گرفتن مقادیر a، b، c و d به عنوان مقادیر تابع در نقاط چشمه). توجه کنید همگن بودن شرایط مرزی نتیجه می‌دهد:

$$a = b = c = d \qquad (۱۵\text{-}۱۰)$$



شکل ۱۰-۸

بنابراین کافی است که تنها یک معادله را تشکیل دهیم:

$$۴۰ + b + ۲۰ + d - ۴a = ۰$$

با در نظر گرفتن رابطه (۱۰-۱۵) بدست می‌آید:

$$a = ۳۰$$

حال تقریب اولیه برای $h = \frac{۱}{۶}$ محاسبه می‌گردد. بدین منظور الگویی را ساخته (شکل ۱۰-۹ و شرایط مرزی و مقادیر بدست آمده زیر را برای چهار نقطه در آن وارد می‌کنیم:

$$u_{۲۲}^{(۰)} = u_{۴۲}^{(۰)} = u_{۲۴}^{(۰)} = u_{۴۴}^{(۰)} = ۳۰$$

با استفاده از این مقادیر، مقادیر $u_{ij}^{(۰)}$ را در نقاط دیگر شبکه پیدا می‌کنیم. به چگونگی محاسبه $u_{i۱}^{(۰)}(i = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵)$ توجه کنید.

۶	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۲۰	۱۰	۰
۵	۲۰	۲۲٫۵	۲۴٫۴	۲۵	۲۴٫۴	۲۲٫۵	۲۰
۴	۴۰	۳۵	۳۰	۳۰	۳۰	۳۵	۴۰
۳	۶۰	۴۰	۳۵	۳۰	۳۵	۴۰	۶۰
۲	۴۰	۳۵	۳۰	۳۰	۳۰	۳۵	۴۰
۱	۲۰	۲۲٫۵	۲۴٫۴	۲۵	۲۴٫۴	۲۲٫۵	۲۰
۰	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۲۰	۱۰	۰
j/i	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

شکل ۱۰-۹) الگوی مربوط به مثال ۱۰-۴

مقادیر $u_{۳۱}^{(۰)}$، $u_{۱۱}^{(۰)}$ با فرمول (۱۰-۹) محاسبه می‌شود:

$$u_{۱۱}^{(۰)} = \frac{۱}{۴}(u_{۰۰} + u_{۲۰} + u_{۰۲} + u_{۲۲}^{(۰)}) = frac۱۴(۰ + ۲۰ + ۴۰ + ۳۰) = ۲۲٫۵,$$
$$u_{۳۱}^{(۰)} = \frac{۱}{۴}(u_{۲۰} + u_{۴۰} + u_{۲۲}^{(۰)} + u_{۴۲}^{(۰)}) = frac۱۴(۲۰ + ۲۰ + ۳۰ + ۳۰) = ۲۵,$$

مقدار $u_{۲۱}^{(۰)}$ با فرمول (۱۰-۸) بدست می‌آید:

$$u_{۲۱}^{(۰)} = \frac{۱}{۴}(u_{۲۰} + u_{۲۲}^{(۰)} + u_{۱۱}^{(۰)} + u_{۳۱}^{(۰)}) = ۲۴٫۴$$

با در نظرگرفتن شرایط همگنی قرار می‌دهیم: $u_{۴۱}^{(۰)} = u_{۲۱}^{(۰)}$ و $u_{۵۱}^{(۰)} = u_{۱۱}^{(۰)}$.
مقادیر $u_{ij}^{(۰)}$ بطور مشابه برای $j = ۲, ۳, ۴, ۵$ محاسبه می‌شوند.

۲ـ محاسبه تقریب‌های بعدی:

توجه کنید که با استفاده از شرط همگنی، کافی است که محاسبات را تنها برای یک چهارم از مربع انجام دهیم. برای تسریع در تقارب تکرارها به طریقه زیر عمل می‌کنیم. ابتدا $u_{۱۱}^{(۱)}$ را با فرمول (۱۰-۱۳) برای $k = ۱$ پیدا می‌کنیم:

$$u_{۱۱}^{(۱)} = \frac{۱}{۴}(u_{۱۰} + u_{۱۲}^{(۰)} + u_{۰۱} + u_{۲۱}^{(۰)}) = ۲۲٫۳$$

مقدار بدست آمده برای محاسبه $u_{۲۱}^{(۱)}$ بکارگرفته می‌شود، یعنی:

$$u_{۲۱}^{(۱)} = \frac{۱}{۴}(u_{۱۱}^{(۱)} + u_{۳۱}^{(۰)} + u_{۲۰} + u_{۲۲}^{(۰)}) = frac۱۴(۲۲٫۳ + ۲۵ + ۲۰ + ۳۰) = ۲۴٫۳$$

در محاسبه $u_{۳۱}^{(۱)}$ از مقادیر $u_{۴۱}^{(۱)} = u_{۲۱}^{(۱)}$ استفاده می‌کنیم (و همینطور در مورد بقیه). فرآیند تکرار تا وقتی که دو نتیجه متوالی بیشتر از ۰٫۱ اختلاف نداشته باشند ادامه می‌یابند.

نتایج تقریب‌های متوالی برای ربع مربع در جدول ۱۰-۲ نشان داده شده‌اند.

جدول ۱۰-۲) مقادیر تقریب‌های متوالی (مثال ۲)

۴۰	۳۳٫۲	۳۰٫۲	۲۹٫۹	۳۰٫۲
۶۰	۳۹٫۸	۳۲٫۸	۳۱٫۳	۳۲٫۸
۴۰	۳۳٫۱	۳۰٫۲	۲۹٫۹	۳۰٫۲
۲۰	۲۲٫۰	۲۴٫۹	۲۷٫۴	۲۴٫۹
۰	۱۰	۲۰	۳۰	۲۰

۴۰	۳۳٫۲	۳۰٫۲	۲۹٫۹	۳۰٫۲
۶۰	۳۹٫۸	۳۲٫۸	۳۱٫۳	۳۲٫۸
۴۰	۳۳٫۲	۳۰٫۲	۲۹٫۹	۳۰٫۲
۲۰	۲۱٫۹	۲۴٫۹	۲۷٫۴	۲۴٫۹
۰	۱۰	۲۰	۳۰	۲۰

۴۰	۳۳٫۱	۳۰٫۶	۲۹٫۶	۳۰٫۶
۶۰	۴۰٫۳	۳۲٫۹	۳۱٫۲	۳۲٫۹
۴۰	۳۳٫۱	۳۰٫۶	۲۹٫۶	۳۰٫۶
۲۰	۲۲٫۳	۲۴٫۳	۲۷٫۲	۲۴٫۳
۰	۱۰	۲۰	۳۰	۲۰

مثال ۱۰ـ۵ـ جدول ۱۰-۳ حل تقریبی معادله لاپلاس را برای یک مربع واحد با مقادیر مرزی برای $h = ۰٫۱$ نشان می‌دهد. می‌خواهیم خطای این جواب را به وسیله روش رانگ برآورد کنیم.

حل ـ این مسئله را دوباره و با در نظرگرفتن فاصله $2h = ۰٫۲$ وگرفتن تقریب‌های اولیه از جدول ۱۰-۳ حل می‌کنیم. نتایج این محاسبات (با فاصله $2h = ۰٫۲$) در جدول ۱۰ـ۴ آورده شده است.
حال تفاضلات $u_۲ = u_{۲h}$ میان مقادیر بدست آمده با فواصل $h = ۰٫۱$ و $2h = ۰٫۲$ را پیدا کرده و خطای ε_h را با فرمول (۱۰-۱۴) محاسبه می‌کنیم (جدول ۱۰-۵ و ۱۰-۶ را ببینید).

جدول ۱۰-۳) حل تقریبی مسئله مقدار مرزی با $h = ۰٫۱$

	۰٫۰۰	۰٫۰۰	۰٫۰۰	۰٫۰۰	۰٫۰۰	۰٫۰۰	۰٫۰۰	۰٫۰۰	۰٫۰۰	
۶٫۷۵	۵٫۸۶	۵٫۰۶	۴٫۳۴	۳٫۶۸	۳٫۰۴	۲٫۴۲	۱٫۸۲	۱٫۲۱	۰٫۶۰	۰٫۰۰
۱۳٫۳۸	۱۱٫۶۰	۱۰٫۰۴	۸٫۶۳	۷٫۳۲	۶٫۰۶	۴٫۸۴	۳٫۶۳	۲٫۴۲		۰٫۰۰
۱۹٫۷۰	۱۷٫۱۲	۱۴٫۸۶	۱۲٫۸۱	۱۰٫۸۹	۹٫۰۴	۷٫۲۳	۵٫۴۳			۰٫۰۰
۲۵٫۶۰	۲۲٫۳۴	۱۹٫۴۷	۱۶٫۸۵	۱۴٫۳۸	۱۱٫۹۸	۹٫۶۰				۰٫۰۰
۳۰٫۹۵	۲۷٫۱۷	۲۳٫۸۲	۲۰٫۷۳	۱۷٫۷۸	۱۴٫۸۸					۰٫۰۰
۳۵٫۶۶	۳۱٫۵۶	۲۷٫۸۹	۲۴٫۴۶	۲۱٫۱۲						۰٫۰۰
۳۹٫۶۷	۳۵٫۵۰	۳۱٫۷۲	۲۸٫۰۹							۰٫۰۰
۴۲٫۹۸	۳۹٫۰۵	۳۵٫۳۸								۰٫۰۰
۴۵٫۶۳	۴۲٫۳۴									۰٫۰۰
	۴۵٫۶۳	۴۲٫۹۸	۳۹٫۶۷	۳۵٫۶۶	۳۰٫۹۵	۲۵٫۶۰	۱۹٫۷۰	۱۳٫۳۸	۶٫۷۵	

مسائل

۱ـ با بکارگیری روش لیبمن، پاسخ معادلات لاپلاس را برای یک مربع با رئوس $A(0,0)$، $B(0,1)$، $C(1,1)$ و $D(1,0)$ و با فاصله $h = \frac{1}{8}$ بدست آورید. شرایط مرزی در جدول ۱۰-۷ آمده است. تکرار را تا دقت 10^{-2} انجام دهید.

۲ـ حل معادله لاپلاس برای مربع ABCD با شرایط مرزی مشخص شده در جدول ۱۰-۸ با فاصله $h = \frac{1}{6}$ را برای مقادیر پارامترهای زیر تقریب بزنید.

$$\alpha = 0.9 + 0.1k, \quad k = 0, 1, 2; \quad \beta = 1.01 + 0.02n, \quad n = 0, 1, 2$$

۳ـ جواب‌های تقریبی معادله لاپلاس برای دامنه و شرایط مرزی داده شده در شکل ۱۰-۱۰ـالف تا ج را بدست آورید. تکرارها را آنقدر ادامه دهید تا اختلاف مقادیر متوالی تابع برای تمامی نقاط کمتر از ۰٫۰۰۵ بشود.

۴ـ حل معادله لاپلاس را برای یک مربع واحد با فاصله $h = \frac{1}{8}$ تقریب بزنید. شرایط مرزی سمت چپ مربع برابر است با ۲٫۵، ۵٫۰، ۷٫۵، ۱۰٫۰، ۷٫۵، ۵٫۰ و ۲٫۵ که مقادیر مرزی برابر صفرند. تکرارها را تا دقت 10^{-4} ادامه دهید. برای انتخاب تقریب اول از جواب مسئله ۳ـپ استفاده کنید.

جدول ۱۰-۴) حل تقریبی یک مسئله مقدار مرزی با فاصله $2h = 0.2$

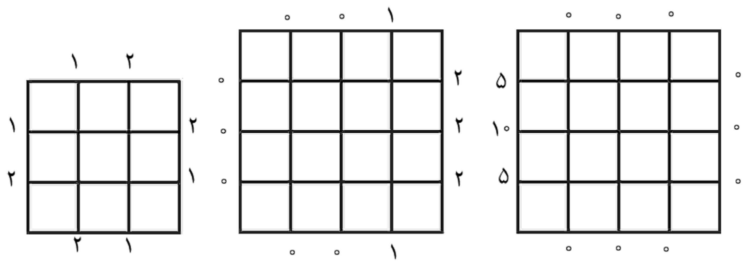
	۰٫۰۰	۰٫۰۰	۰٫۰۰	۰٫۰۰	
۱۳٫۳۸	۱۰٫۰۵	۷٫۳۲	۱۱٫۸۴	۲٫۴۲	۰٫۰۰
۲۵٫۶۰	۱۹٫۵۰	۱۴٫۴۰	۹٫۶۲		۰٫۰۰
۳۵٫۶۶	۲۷٫۹۵	۲۱٫۱۷			۰٫۰۰
۴۲٫۹۸	۳۵٫۴۶				۰٫۰۰
	۴۲٫۹۸	۳۵٫۶۶	۲۵٫۶۰	۱۳٫۳۸	

جدول ۱۰-۵) تفاضلات $u_n - u_{2h}$

۰٫۱۰	۰٫۰۰	۰٫۰۰	۰٫۰۰
۰٫۰۳	۰٫۰۲	۰٫۰۲	
۰٫۰۶	۰٫۰۵		
۰٫۰۸			

جدول ۱۰-۶) خطاهای ε_h

	۰٫۰۰۳		۰٫۰۰۰		۰٫۰۰۰		۰٫۰۰۰	
	۰٫۰۱۰	۰٫۰۰۷	۰٫۰۰۷					
	۰٫۰۲۰		۰٫۰۱۷					
	۰٫۰۲۷							



شکل ۱۰-۱۰

جدول ۱۰-۷) شرایط مرزی مسئله ۱

Variant No	$u\|_{AB}$	$u\|_{BC}$	$u\|_{CD}$	$u\|_{AD}$
۱	$30y$	$30(1-x^2)$	0	0
۲	$30y$	$30\cos\frac{\pi x}{2}$	$30\cos\frac{\pi y}{2}$	0
۳	$50y(1-y^2)$	0	0	$50\sin\pi x$
۴	$20y$	20	$20y^2$	$50x(1-x)$
۵	0	$50x(1-x)$	$50y(1-y^2)$	$50x(1-x)$
۶	$30\sin\pi y$	$20x$	$20y$	$30x(1-x)$
۷	$30(1-y)$	$20\sqrt{x}$	$20y$	$30x(1-x)$
۸	$50\sin\pi y$	$30\sqrt{x}$	$30y^2$	$50\sin\pi x$
۹	$40y^2$	40	40	$40\sin\frac{\pi x}{2}$
۱۰	$50y$	$50(1-x)$	0	$60x, 0\le x<1/2$ $60(1-x), 1/2\le x\le 1$

جدول ۱۰-۸) شرایط مرزی مسئله ۲

$u\|_{AD}$	۰	۱۷٫۲۸	۲۹٫۰۵α	۴۰٫۰۰	۲۹٫۰۵β	۱۷٫۲۸	۴٫۳۱
$u\|_{BC}$	۰	۹٫۸۱	۱۷٫۹۸α	۲۹٫۱۲	۳۸٫۲۵β	۴۲٫۳۱	۵۰٫۰۰
$u\|_{AB}$	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
$u\|_{DC}$	۴٫۳۱	۶٫۹۸	۱۲٫۳۸β	۱۹٫۱۴	۳۰٫۱۰α	۴۰٫۱۶	۵۰٫۰۰

۱۰ـ۴ـ حل مسئله مقدار مرزی برای دامنه‌های منحنی‌الخط

اگر مرز Γ دامنه G منحنی‌الخط باشد آنگاه مقادیر u_{ij} برای نقاط مرزی با انتقال مقادیر از نقاط مرزی Γ بدست می‌آید. خطای ناشی از چنین رویه‌ای را می‌توان با تشکیل معادله‌ای به شکل زیر برای هر نقطه مرزی بطور چشمگیری کاهش داد ([۲]، [۱۳] و [۳۵] را ببینید):

(۱) برای نقطه A_h (شکل ۱۰-۱۱) داریم:

$$u_{Ah} = \frac{\delta_1 u_B + h u_A}{\delta_1 + h} \qquad (۱۶\text{-}۱۰)$$

(۲) برای نقطه C_h (شکل ۱۰-۱۱) داریم:

$$u_{ch} = \frac{\delta_2 u_D - h u_C}{\delta_2 - h}$$

با داشتن چنین معادلاتی برای هر نقطه مرزی و اضافه‌کردن آنها به دستگاه (۱۰-۷) یا (۱۰-۸)، یک دستگاه از معادلات جبری بر حسب مقادیر u_{ij} در نقاط چشمه بدست می‌آید. اگر این دستگاه با روش لیب‌من حل شود، تقریب‌های بعدی مقادیر مرزی با فرمول‌های

$$u_{Ah}^{(k+1)} = u_A + \frac{u_B^{(k)} - u_A}{h + \delta_1}\delta_1 \qquad (۱۷\text{-}۱۰)$$

$$u_{Ch}^{(k+1)} = u_C + \frac{u^{(k)} - u_C}{\delta_2 - h}\delta_2 \qquad (۱۸\text{-}۱۰)$$

محاسبه‌می‌شود.

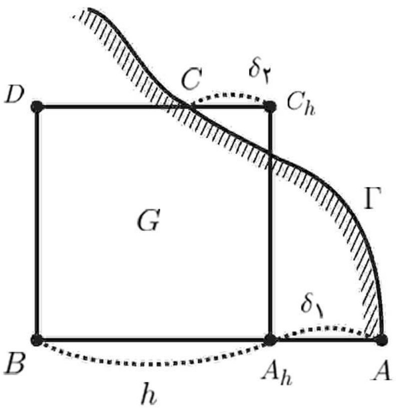
مثال ۱۰ـ۶ـ پاسخ معادله

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (۱۹-۱۰)$$

را طوری تقریب کنید که روی دایره $x^2+y^2=16$ شرط

$$u|_\Gamma = x^2y^2 \qquad (۲۰-۱۰)$$

را برقرار کند.



شکل ۱۰-۱۱

حلـ چون پاسخ همگن است اجازه دهید که فقط یک چهارم دایره را در نظر بگیریم.

پر کردن الگوها:

(۱) یک شبکه بزرگ با فاصله $h/2$ را در نظر بگیرید (شکل ۱۰-۱۲). نقطه $M(\sqrt{12},2)$ نقطه‌ای از مرز Γ نزدیک به نقطه چشمه $A(4,2)$ است. بنابراین قرار می‌دهیم:

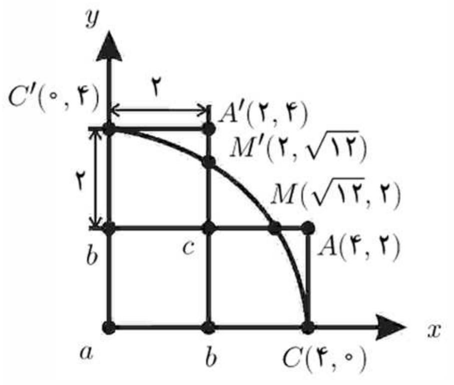
$$u(A)\approx u(M)=12\times 2^2=48$$

بطور مشابه $M'(2,\sqrt{12})$ نقطه مرزی نزدیک به نقطه چشمه $A'(2,4)$ است. بنابراین داریم $u(A')\approx u(M')=48$. در نقاط چشمه $c(4,0)$ و $c'(0,4)$ بطور آشکار داریم:

$$u(c)=u(c')=0$$

برای راحتی، مقادیر تابع $u(x,y)$ در نقاط چشمه داخلی را با a، b و c نشان می‌دهیم (شکل ۱۰-۱۲) و با در نظرگرفتن همگن بودن مسئله، یک دستگاه از معادلات تفاضل محدود تشکیل می‌دهیم:

$$a=\frac{1}{4}\times 4b,\quad b=\frac{1}{4}(2c+a+0),\quad c=\frac{1}{4}(48+48+2b)$$



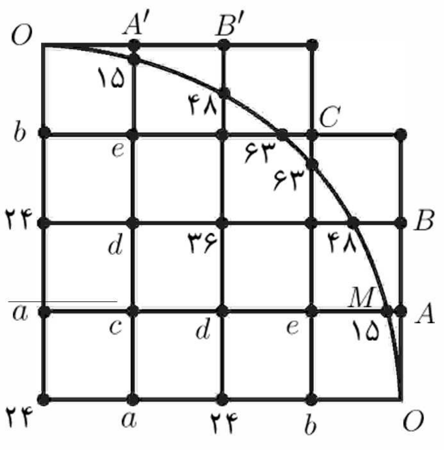
شکل ۱۰-۱۲

از این دستگاه بدست می‌آوریم: $a = ۲۴$، $b = ۲۴$ و $c = ۳۶$.

(۲) یک شبکه چشمه‌ای کوچک (شکل ۱۰-۱۳) با فاصله $h = ۱$ و مقادیر مرزی نامشخص را در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم:

$$u(A) = u(A')۱۵, \quad u(B) = u(B') = ۴۸, \quad u(c) = ۶۳$$

با استفاده از مقادیر تابع $u(x,y)$ در نقاط شبکه‌ای با فاصله $h = ۲$ و در نقاط مرزی و در نظر داشتن همگنی جواب، معادلات تفاضل محدود را برای مقادیر a، b، c، d ، e و f تشکیل می‌دهیم (شکل ۱۰-۱۳). برای مقادیر a، b، d و f معادلات (۱۰-۸) و برای c و e معادلات (۱۰-۹) را داریم (بخش ۱۰ـ۲ را ببینید).



شکل ۱۰-۱۳

بنابراین بدست می‌آوریم:

$$a = \tfrac{1}{4}(24 + 24 + c + c), \quad f = \tfrac{1}{4}(48 + e + 63 + 36),$$
$$b = \tfrac{1}{4}(e + e + 0 + 24), \quad c = \tfrac{1}{4}(24 + 24 + 24 + 36),$$
$$da = \tfrac{1}{4}(e + c + 24 + 36), \quad e = \tfrac{1}{4}(0 + 36 + 48 + 24),$$

که از آنجا بطور تقریبی پیدا می‌کنیم:

$$a = 26, \quad b = 20, \quad c = 27, \quad d = 28, \quad e = 27, \quad f = 44.$$

(۳) مقادیر $u(x,y)$ را در نقاط مرزی با استفاده از فرمول (۱۰-۱۹) مشخص می‌کنیم. برای نقطه A داریم

$$\delta_A = |MA| = 4 - \sqrt{15} \approx 0{,}13,$$

از اینرو

$$u_A^{(1)} = u_M + \frac{e - u_M}{\delta_A - h}\delta_A = 15 - \frac{1{,}56}{0{,}87} \approx 13.$$

محاسبه را به روش مشابه برای نقطه B انجام می‌دهیم:

$$\delta_B = |NB| = 4 - \sqrt{12} \approx 0{,}6$$
$$u_B^{(1)} = u_N + \tfrac{f - u_N}{\delta_B - h}\delta_B = 48 + \tfrac{0{,}4}{0{,}4} = 49$$

از اینرو برای نقاط مرزی بدست می‌آوریم:

$$u_A^{(1)} = u_{A'}^{(1)} = 13, \quad u_B^{(1)} = u_{B'}^{(1)} = 49, \quad u_c = 73$$

(۴) یک جدول از مقادیر اولیه تشکیل می‌دهیم (الگوی ۱) و مقادیر تابع مورد نظر $u(x,y)$ در نقاط داخلی را به وسیله فرمول (۱۰-۱۳) بخش ۱۰ـ۳ متوالیاً پیدا می‌کنیم تا وقتیکه اختلاف مقادیر بدست آمده در دو تقریب متوالی از یک واحد بیشتر نباشد. برای مقایسه الگوی ۳ـالف شامل مقادیر دقیق جواب مسئله $u(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{8}[256 - (x^2 + y^2)^2]$ در نقاط چشمه است.

مسائل

با استفاده از روش تفاضل با فاصله h جواب معادله لاپلاس در دامنه G برای شرایط مرزی داده شده را پیدا کنید. دستگاه تفاضل محدود را بروش لیب‌من حل کنید (با مشخص کردن مقادیر مرزی).

۱ـ با فاصله $h = 0{,}1$، دامنه G توسط منحنی‌های $2y = 1 - 4x^3$، $y = 0$ و $x = 0$ محدود شده است و شرایط مرزی به صورت زیرند:

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{y=0} = (1 - 4x^2)x, \quad u|_{2y=1-4x^2} = 12xy^2$$

جدول ۱۰-۹) مقادیر تقریب‌های متوالی برای مسئله (۵) و (۶)

الگوی ۳ـالف

۰	۱۲	۴۶		
۲۲	۲۸	۴۷	۷۳	
۳۰	۳۳	۴۰	۴۷	۴۶
۳۲	۳۲	۳۳	۲۸	۱۲
۳۲	۳۲	۳۰	۲۲	۰

الگوی ۳

۲۰	۲۷	۴۶	
۲۶	۳۰	۳۸	۴۶
۲۶	۲۸	۳۰	۲۷
۲۶	۲۶	۲۶	۲۰

الگوی ۲

۲۰	۲۷	۴۶	
۲۶	۲۹	۳۷	۴۶
۲۶	۲۷	۲۹	۲۷
۲۶	۲۶	۲۶	۲۰

الگوی ۱

۰	۱۳	۴۹		
۲۰	۲۷	۴۴	۷۳	
۲۴	۲۸	۳۶	۴۴	۴۹
۲۶	۲۷	۲۸	۲۷	۱۳
۲۴	۲۶	۲۴	۲۰	۰

۲ـ با فاصله $h = ۰/۲$ دامنه G با شرایط

$$x^{۲} + (y+۳)^{۲} \leq ۱۶, \quad y \geq ۰$$

مشخص می‌شود. شرایط مرزی به صورت زیرند:

الفـ $u|_{y=۰} = ۰$ و $u|_c = ۲y(۲x^{۲}+۳y)$ که در آن c دایره $x^{۲} + (y+۳)^{۲} = ۱۶$ است.

بـ $u|_{y=۰} = x(۷-x^{۲})$ و $u|_c = ۴xy^{۲}$ که در آن c دایره $x^{۲} + (y+۳)^{۲} = ۱۶$ است.

۱۰ـ۵ـ روش شبکه برای معادله سهمی گون

مسئله مقدار مرزی پیچیده برای معادلات هدایت گرما را در نظر بگیرید یا به عبارت دیگر پیدا کردن تابع $u(x,y)$ که در معادله

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^{۲}\frac{\partial u}{\partial x^{۲}} \qquad (۱۰\text{-}۲۱)$$

با شرایط اولیه

$$u(x,۰) = f(x) \quad (۰ < x < s) \qquad (۱۰\text{-}۲۲)$$

و شرایط مرزی

$$u(۰,t) = \varphi(t), \; u(s,t) = \varphi(t) \qquad (۱۰\text{-}۲۳)$$

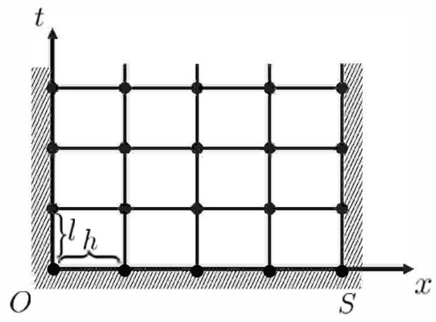
صدق کند.

در حالت خاص مسئله (۱۰-۲۲) تا (۱۰-۲۴) به مسئله انتشارگرما در یک میله یکنواخت به طول S تبدیل می‌شود ([۴۸] و[۵۲] را ببینید). با تعریف متغیر جدید $C = a^{۲}t$ معادله (۱۰-۲۲) به صورت $\frac{\partial u}{\partial C} = \frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}}$ تقلیل می‌یابد.

بنابراین قرار می‌دهیم: $a = ۱$.

در ناحیه نیم باز $\circ \leq x \leq s$ و $t \geq \circ$ (شکل ۱۰-۱۴) دو دسته از خطوط موازی را در نظر می‌گیریم:

$$x = ih \ (i = \circ, \text{۱}, \text{۲}, \ldots), \quad t = jl \ (j = \circ, \text{۱}, \text{۲}, \ldots)$$



شکل ۱۰-۱۴

رهنوشت $x_i = ih$ و $tj = jl$ و $u(x_{ij}t_j) = u_{ij}$ را معرفی کرده و در هر نقطه داخلی (x_i, t_j) مشتق $\frac{\partial^{\text{۲}} u}{\partial x^{\text{۲}}}$ را با رابطه تفاضلی جایگزین می‌کنیم:

$$(\frac{\partial^{\text{۲}} u}{\partial x^{\text{۲}}})_{ij} \approx \frac{u_{i+\text{۱},j} - \text{۲}u_{ij} + u_{i-\text{۱},j}}{h^{\text{۲}}} \qquad (\text{۱۰-۲۴})$$

و مشتق $\frac{\partial u}{\partial t}$ را با یکی از روابط تفاضلی زیر جایگزین می‌کنیم:

$$(\frac{\partial u}{\partial t})_{ij} \approx \frac{u_{i,j+\text{۱}} - u_{ij}}{L} \qquad (\text{۱۰-۲۵})$$

$$(\frac{\partial u}{\partial t})_{ij} \approx \frac{u_{ij} - u_{i,j-\text{۱}}}{L} \qquad (\text{۱۰-۲۶})$$

سپس برای معادله (۱۰-۲۲) برای $a = \text{۱}$ دو نوع معادله تفاضل محدود بدست می‌آوریم:

$$\frac{u_{i,j+\text{۱}} - u_{ij}}{L} = \frac{u_{i+\text{۱},j} - \text{۲}u_{ij} + u_{i-\text{۱},j}}{h^{\text{۲}}} \qquad (\text{۱۰-۲۷})$$

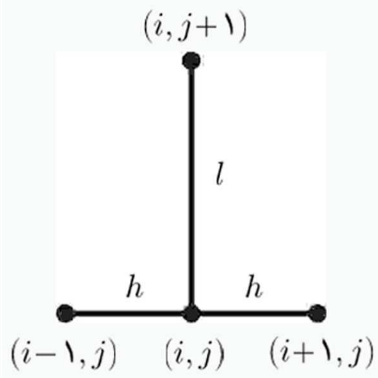
$$\frac{u_{ij} - u_{i,j-\text{۱}}}{L} = \frac{u_{i+\text{۱},j} - \text{۲}u_{ij} + u_{i-\text{۱},j}}{h^{\text{۲}}} \qquad (\text{۱۰-۲۸})$$

با در نظرگرفتن $\delta = L/h^{\text{۲}}$ این معادلات به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

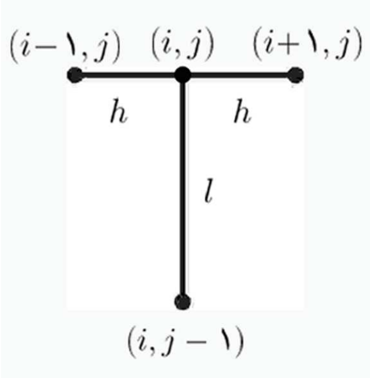
$$u_{i,j+\text{۱}} = (\text{۱} - \text{۲}\delta)u_{ij} + \delta(u_{i+\text{۱},j} + u_{i-\text{۱},j}) \qquad (\text{۱۰-۲۹})$$

$$(\text{۱} + \text{۲}\delta)u_{ij} - \delta(u_{i+\text{۱},j} + u_{i-\text{۱},j}) - u_{i,j-\text{۱}} = \circ \qquad (\text{۱۰-۳۰})$$

توجه داشته باشید که برای تشکیل معادله (۱۰-۲۸) و (۱۰-۲۹) از نمودارهای واضح نقاط چشمه نشان داده شده در شکل ۱۰-۱۵ و شکل ۱۰-۱۶ استفاده کرده‌ایم.



شکل ۱۰-۱۵



شکل ۱۰-۱۶

هنگامی‌که عدد δ را در معادلات (۱۰-۲۹) و (۱۰-۳۰) تعیین می‌کنیم دو موضوع زیر را می‌بایستی در نظر داشت:

(۱) خطای ناشی از جایگزینی یک معادله دیفرانسیل با یک معادله تفاضلی می‌بایستی به حداقل رسانده شود.

(۲) معادله تفاضلی می‌بایستی دارای ثبات باشد.

ثابت شده است ([۲] و[۱۳] را ببینید) که معادله (۱۰-۲۹) دارای ثبات خواهد بود اگر $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$ و معادله (۱۰-۳۰) برای هر δ ثبات دارد. معادله (۱۰-۲۹) شکل بسیار مناسبی برای $\delta = \frac{1}{2}$ و معادله (۱۰) برای هر δ ثبات دارد. معادله (۹) شکل بسیار مناسبی برای $\delta = \frac{1}{2}$ دارد:

$$u_{i,j+1} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{2} \qquad (۳۱\text{-}۱۰)$$

و برای $\delta = 1/6$:

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6}(u_{i-1,j} + 4u_{ij} + u_{i+1,j}) \qquad (۳۲\text{-}۱۰)$$

برآورد خطای جواب‌های تقریبی بدست آمده از معادلات (۱۰-۳۱)، (۱۰-۳۲) و (۱۰-۳۳) در ناحیه $0 \leq x \leq 5$ و $0 \leq t \leq T$ به ترتیب توسط فرمول‌های زیر انجام می‌شود ([۳۱] را ببینید):

$$|u - \hat{u}| \leq \frac{T}{4} M_1 h^2 \qquad (۳۳\text{-}۱۰)$$

$$|u - \hat{u}| \leq \frac{T}{135} M_2 h^4 \qquad (۳۴\text{-}۱۰)$$

$$|u - \hat{u}| \leq T\left(\frac{L}{2} + \frac{h^2}{12}\right) M_1 \qquad (۳۵\text{-}۱۰)$$

که در آن h جواب دقیق مسئله (۱) تا (۳) است و

$$M_1 = \max\{|f^{(4)}(x)|, |\varphi''(t)|, |\varphi''(t)|\} \quad \text{برای} \quad 0 \le t \le T, 0 \le x \le s,$$
$$M_2 = \max\{|f^{(6)}(x)|, |\varphi^{(4)}(t)|, |\varphi^{(4)}(t)|\} \quad \text{برای} \quad 0 \le t \le T, 0 \le x \le s,$$

همانطور که معادلات برآورد خطا در بالا نشان می‌دهند معادله (۱۰-۳۳) در مقایسه با معادله (۱۰-۳۲) منجر به دقت بیشتری برای جواب می‌گردد.
امّا آخرین معادله شکل ساده‌تری دارد. از این گذشته فاصله‌گذاری L بر حسب آرگومان t برای معادله (۱۰-۳۲) با اندازه قابل ملاحظه‌ای می‌بایستی کوچک‌تر باشد که منجر به محاسبات بیشتر می‌شود. معادله (۱۰-۳۰) دقت کمتری دارد امّا مقادیر l و h در این معادله به صورت مستقل از یکدیگر معین می‌شوند. معادلات (۱۰-۳۱) و (۱۰-۳۲) ما را قادر می‌سازند که تابع $u(x,y)$ را برای هر مرحله‌ای با فرمول‌های صریح بر حسب جملاتی از مقادیر مرحله قبلی ارزیابی کنیم، در صورتی که معادله (۱۰-۳۰) (نمودار ضمنی) دارای این خاصیت نیست.
روش شبکه می‌تواند برای حل یک مسئله مقدار مرزی پیچیده برای معادله سهمی نامتجانس بکارگرفته شود.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t)$$

بنابراین معادله تفاضلی متناظر که از نمودار صریح نقاط استفاده می‌کند به شکل زیر است:

$$u_{i,j+1} = (1-2\delta)u_{ij} + \delta(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + LF_{ij} \qquad (۱۰\text{-}۳۶)$$

که از آنجا برای $\delta = \frac{1}{2}$ بدست می‌آید:

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + LF_{ij} \qquad (۱۰\text{-}۳۷)$$

و برای $\delta = \frac{1}{6}$:

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6}(u_{i-1,j} + 4u_{ij} + u_{i+1,j}) + LF_{ij} \qquad (۱۰\text{-}۳۸)$$

در اینجا ما برآورد خطا را به صورت زیر انجام می‌دهیم ([۳۱] را ببینید): برای معادله (۱۰-۳۸)

$$|\bar{u} - u| \le \tfrac{T}{4}(M_2 + \tfrac{1}{3}M_4)h^2$$

و برای معادله (۱۰-۳۹)

$$|\bar{u} - u| \le \frac{T}{72}(\frac{1}{3}M_3 + \frac{1}{5}M_6)h^4$$

که در آن $M_6 = \max\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}$ و $M_4 = \max\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ و $M_3 = \max\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}$ و $M_2 = \max\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

مثال ۱۰ـ۷ـ با استفاده از معادله تفاضلی (۱۰-۳۲)، جواب معادله

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}} \tag{۱۰-۳۹}$$

را طوری تقریب بزنید که شرایط زیر برقرار باشد:

$$u(x,۰)=\sin \pi x \quad (۰\le x\le ۱) \quad \text{و} \quad u(۰,t)=u(۱,t)=۰ \quad (۰\le t\le ۰/۰۲۵) \tag{۱۰-۴۰}$$

حل- فاصله $h=۰/۱$ را برای آرگومان x انتخاب می‌کنیم. چون $\delta=\frac{۱}{۲}$ است لذا فاصله $l=\frac{h^{۲}}{۲}=۰/۰۰۵$ را برای آرگومان t بدست می‌آوریم. مقادیر مرزی اولیه را در جدول ۱۰-۱۰ وارد می‌کنیم. با احتساب همگن بودن مسئله، جدول را تنها برای مقادیر $x=۰;۰/۱;۰/۲;۰/۳;۰/۴;۰/۵$ پر می‌کنیم. مقادیر تابع $u(x,t)$ در مرحله اول با استفاده از مقادیر مرحله اولیه بدست می‌آیند و شرایط مرزی با فرمول (۱۰-۳۲) تعیین می‌شوند. برای $j=۰$ داریم:

$$u_{ij}=\frac{u_{i+۱,۰}+u_{i-۱,۰}}{۲}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} u_{۱۱}&=\tfrac{۱}{۲}(u_{۲۰}+u_{۰۰})=\tfrac{۱}{۲}(۰/۵۸۷۸+۰)=۰/۲۹۳۹\\ u_{۲۱}&=\tfrac{۱}{۲}(u_{۳۰}+u_{۱۰})=\tfrac{۱}{۲}(۰/۸۰۹۰+۰/۳۰۹۰)=۰/۵۵۹۰\end{aligned}$$

و به همین ترتیب الی آخر.

مقادیر بدست آمده $u_{i۱}(i=۱,۲,۳,۴,۵)$ را در سطر دوم جدول ۱۰-۱۰ وارد می‌کنیم. سپس به سراغ محاسبه مقادیر مرحله دوم می‌رویم. برای $j=۱$:

$$u_{i۲}=\frac{u_{i+۱,۱}+u_{i-۱,۱}}{۲}$$

مقادیر u_{ij} برای $y=۰/۰۰۵$ و $t=۰/۰۱۰$ و $t=۰/۰۱۵$ و $t=۰/۰۲۰$ و $t=۰/۰۲۵$ را متوالیاً به همین ترتیب محاسبه می‌کنیم. دو سطر آخر جدول نشاندهنده مقادیری جواب دقیق مسئله $\widetilde{u}(x,t)=e^{-\pi^{۲}t}\sin \pi x$ و مقدار اختلاف $|\widetilde{u}-u|$ در $t=۰/۰۲۵$ است.

برای مقایسه برآورد خطای بدست آمده توسط فرمول (۱۰-۳۳) را ارائه می‌کنیم. برای مسئله مفروض $\varphi(t)=\psi(t)=۰$، $f^{(۴)}(x)=\pi^{۴}\sin \pi x$ داریم $M_{۱}=\pi^{۴}$. در نتیجه بدست می‌آوریم:

$$|\widetilde{u}-u|\le \tfrac{۰/۰۲۵}{۳}\pi^{۴}h^{۴}=\tfrac{۰/۰۲۵}{۳}\times ۹۷/۲۲\times ۰/۰۱=۰/۰۰۸۱$$

مثال ۱۰ـ۸ـ با استفاده از معادله تفاضلی (۱۰-۳۲) جواب مسئله (۱۰-۳۹) و (۱۰-۴۰) را برای $۰ \leq t \leq ۰٫۰۱$ بدست آورید. خطای جواب را برآورد کنید.

جدول ۱۰-۱۰) حل مسئله (۱۰-۳۹) و (۱۰-۴۰) با فرمول (۱۰-۳۱)

j	$t\backslash x$	۰	۰٫۱	۰٫۲	۰٫۳	۰٫۴	۰٫۵
۰	۰	۰	۰٫۳۰۹۰	۰٫۵۸۷۸	۰٫۸۰۹۰	۰٫۹۵۱۱	۱٫۰۰۰۰
۱	۰٫۰۰۵	۰	۰٫۲۹۳۹	۰٫۵۵۹۰	۰٫۷۶۹۹	۰٫۹۰۴۵	۰٫۹۵۱۱
۲	۰٫۰۱۰	۰	۰٫۳۷۹۵	۰٫۵۳۱۶	۰٫۷۳۱۸	۰٫۸۶۰۲	۰٫۹۰۴۵
۳	۰٫۰۱۵	۰	۰٫۲۶۵۸	۰٫۵۰۵۶	۰٫۶۹۵۹	۰٫۸۱۸۲	۰٫۸۶۰۲
۴	۰٫۰۲۰	۰	۰٫۲۵۲۸	۰٫۴۸۰۸	۰٫۶۶۱۹	۰٫۷۷۸۰	۰٫۸۱۸۲
۵	۰٫۰۲۵	۰	۰٫۲۴۰۴	۰٫۴۵۷۴	۰٫۶۲۹۴	۰٫۷۴۰۰	۰٫۷۷۸۰
$\widetilde{u}(x,t)$	۰٫۰۲۵	۰	۰٫۲۴۱۴	۰٫۴۵۹۳	۰٫۶۳۲۱	۰٫۷۴۳۱	۰٫۷۸۱۳
$\lvert\widetilde{u}-u\rvert$	۰٫۰۲۵	۰	۰٫۰۰۱۰	۰٫۰۰۱۹	۰٫۰۰۲۷	۰٫۰۰۳۱	۰٫۰۰۳۳

حلـ فاصله $h = ۰٫۱$ را برای آرگومان x در نظر می‌گیریم. چون برای فرمول (۱۰-۳۲) داریم $\delta = \frac{۱}{۶}$ لذا برای آرگومان t فاصله $L = \frac{۰٫۰۱}{۶} \approx ۰٫۰۰۱۷$ را بدست می‌آوریم. مقادیر مرزی و اولیه را در جدول ۱۰-۱۱ وارد می‌کنیم.

با توجه به همگن بودن جواب کافیست که جدول را برای $۰ \leq x \leq ۰٫۵$ پر کنیم. حال محاسبه را با فرمول (۱۰-۳۳) ادامه می‌دهیم. برای مرحله اول با $j = ۱$ بدست می‌آوریم:

$$u_{i۱} = \frac{۱}{۶}(u_{۰۰} + ۴u_{۱۰} + u_{۲۰})$$

جدول ۱۰-۱۱) حل مسئله (۱۰-۴۰) و (۱۰-۴۱) با فرمول (۱۰-۳۳)

j	$t\backslash x$	۰	۰٫۱	۰٫۲	۰٫۳	۰٫۴	۰٫۵
۰	۰	۰	۰٫۳۰۹۰۱۷	۰٫۵۸۷۷۸۵	۰٫۸۰۹۰۱۷	۰٫۹۵۱۰۵۶	۰٫۰۰۰۰۰۰
۱	۰٫۰۰۱۷	۰	۰٫۳۰۳۹۷۶	۰٫۵۷۸۱۹۶	۰٫۷۹۵۸۱۸	۰٫۹۳۵۵۴۱	۰٫۹۸۳۶۸۶
۲	۰٫۰۰۳۳	۰	۹٫۲۹۹۰۱۷	۰٫۵۶۸۷۶۳	۰٫۷۸۲۸۳۵	۰٫۹۲۰۲۷۸	۰٫۹۶۷۶۳۸
۳	۰٫۰۰۵۰	۰	۰٫۲۹۴۱۳۸	۰٫۵۵۹۴۸۴	۰٫۷۷۰۰۶۳	۰٫۹۰۵۲۶۴	۰٫۹۵۱۸۵۲
۴	۰٫۰۰۶۷	۰	۰٫۲۸۹۳۳۹	۰٫۵۵۰۳۵۶	۰٫۷۵۷۵۰۰	۰٫۸۹۰۴۹۵	۰٫۹۳۶۳۲۲
۵	۰٫۰۰۸۳	۰	۰٫۲۸۴۶۱۹	۰٫۵۴۱۳۷۷	۰٫۷۴۵۱۴۲	۰٫۸۷۵۹۶۷	۰٫۹۲۱۰۴۶
۶	۰٫۰۱۰۰	۰	۰٫۲۷۹۹۷۶	۰٫۵۳۲۵۴۵	۰٫۷۳۲۹۸۲	۰٫۸۶۱۶۷۶	۰٫۹۰۶۰۱۸
$\widetilde{u}(x,t)$	۰٫۰۱	۰	۰٫۲۷۹۹۷۵	۰٫۵۳۲۵۴۴	۰٫۷۳۲۹۸۴	۰٫۸۶۱۶۷۵	۰٫۹۰۶۰۱۸

که از آنجا متوالیاً بدست می‌آوریم:

$$u_{11} = \frac{1}{6}(0 + 4 \times 0.309017 + 0.587785) = 0.303976,$$
$$u_{21} = \frac{1}{6}(0.309017 + 4 \times 0.587785 + 0.809017) = 0.578196,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_{31} = \frac{1}{6}(0.951057 = 4 \times 1 + 0.951057) = 0.983686.$$

محاسبه برای مراحل بعدی به روش مشابه انجام می‌گیرد. برای برآورد خطا با فرمول (۱۰-۳۴) در $t = 0.01$ داریم $\varphi(t) = \psi(t) = 0$، $f^{(6)}x = \pi^6 \sin \pi x$، $M_2 = \pi^6$. از اینرو

$$|u - \tilde{u}| \leq \frac{0.01}{135}\pi^6 h^4 \approx \frac{0.01}{135} 958.6 \times 10^{-4} \approx 7 \times 10^{-6}$$

مقادیر موجود در سطر آخر جدول ۱۰-۱۱ مقادیر جواب دقیق $\tilde{u} = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$ برای $t = 0.01$ است. مقایسه نشان می‌دهد که خطای جواب بدست آمده از 2×10^{-6} بیشتر نیست.

مسائل

جواب معادله $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ را طوری تقریب بزنید که شرایط

$$u(x, 0) = f(x),\ u(0, t) = \varphi(t),\ u(1, t) = \psi(t)$$

را برای مقادیر $0 \leq t \leq T$ و فاصله $h = 0.1$ در جهت x برقرارکند. در مسائل ۱ تا ۳ از معادله تفاضلی (۱۰-۳۲) و برای مسائل ۴ تا ۶ از معادله تفاضلی (۱۰-۳۳) استفاده کنید.

(۱) $f(x) = (ax^2 + b)\sin \pi x,\ \varphi(t) = \psi(t) = 0,\ T = 0.02,\ a = 1.1; 1.3;$ $1.5,\ b = 1.1 + 0.1 \times n,\ n = 0, 1, 2, 3, 4.$

(۲) $f(x) = e^{-bx}\sin ax,\ \varphi(t) = 0,\ \psi(t) = e^{-b}\sin a,\ T = 0.02,$ $a = \pi/12, \pi/4, \pi/3,\ b = 0.1 \times k,\ k = 1, 2, \ldots, 5.$

(۳) $\varphi(t) = \psi(t) = 0$ و $f(x)$ داده شده در جدول زیر

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	0	0.0196	$0.0431 + a$	0.0742	0.1116	$0.1537 + 2a$
x		0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$f(x)$		0.1994	0.1256	$0.0614 - a$	0.0031	0

و $T = 0.02$، $a = 0.02n$ و $n = 0, 1, 2, \ldots, 5$.

(۴) $f(x) = (ax^۲ + b)e^{-x},\ \varphi(t) = b,\ \psi(t) = (a+b)e^{-۱},\ T = ۰/۰۱,$
$a = ۱/۱; ۱/۳; ۱/۵,\ b = ۲/۱ + ۰/۱ \times n,\ n = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴.$

(۵) $f(x) = x(۱-x)(ax^۴ + b),\ \varphi(t) = \psi(t) = ۰,\ T = ۰/۰۱,\ a = ۰/۵;$
$۰/۷; ۰/۹, b = ۰/۵ + ۰/۱ \times n, n = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴.$

(۶) $\varphi(t) = ۰$، $\psi(t) = f(۱)$ و $f(x)$ توسط جدول زیر داده شده است،

x	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴
$f(x)$	۰	۰/۰۲۲۱	$۰/۰۴۲۵ + a$	۰/۱۰۰۸	۰/۱۵۴۵

x	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱/۰
$f(x)$	$۰/۱۷۲۱ + ۲a$	۰/۲۰۳۲	۰/۲۸۹۵	$۰/۳۵۸۱ - a$	۰/۴۰۱۰	۰/۴۵۰۰

$T = ۰/۰۱$، $a = ۰/۰۲n$ و $n = ۰, ۱, \dots, ۵$.

۷ـ جواب معادله $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u^۲}{\partial x^۲} + ۲x + t$ را با فاصله $h = ۰/۱$ در جهت x طوری تقریب بزنید که شرایط مرزی و اولیه مسئله ۱ رابرقرارکند. از معادله تفاضلی (۱۰-۳۸) استفاده کنید.

۸ـ جواب معادله $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u^۲}{\partial x^۲} + ۳t\sin x$ را با فاصله $h = ۰/۱$ در جهت x طوری تقریب بزنید که شرایط مرزی و اولیه مسئله (۲) را برقرارکند. از معادله تفاضلی (۱۰-۳۹) استفاده کنید.

۱۰ـ۶ـ روش گذر برای معادله هدایت گرما

فرض کنید می‌خواهیم در ناحیه باز $۰ \le x \le a$ و $۰ \le t \le T$ جواب معادله

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} \qquad (۱۰\text{-}۴۱)$$

را پیدا کنیم بطوری که شرایط زیر برقرارگردد:

$$u(x,۰) = f(x),\ u(۰,t) = \varphi(t),\ u(a,t) = \psi(t) \qquad (۱۰\text{-}۴۲)$$

فاصله h و l برای x و t را انتخاب کرده، مشتقات را با روابط تفاضل محدود (۱۰-۲۵) و (۱۰-۲۷) در هر نقطه چشمه داخلی جایگزین کرده و مقادیر توابع $g(x)$، $\psi(t)$ و $f(x)$ را در نقاط مرزی محاسبه کرده و با در نظرگرفتن $s = \frac{h^۲}{l}$، دستگاه زیر را بدست می‌آوریم:

$$\begin{gathered} u_{i-۱,j+۱} - (۲+s)u_{i,j+۱} + u_{i+۱,j+۱} + su_{ij} = ۰ \\ (i = ۱, ۲, \dots, n;\ j = ۰, ۱, ۲, \dots). \end{gathered} \qquad (۱۰\text{-}۴۳)$$

$$u_{i\circ} = f(x_i), \qquad (۴۴\text{-}۱۰)$$

$$u_{\circ j} = \varphi(t_j), \qquad (۴۵\text{-}۱۰)$$

$$u_{nj} = \psi(t_j). \qquad (۴۶\text{-}۱۰)$$

روش گذر ([۲]، [۱۳] و[۳۱] را ببینید) در حل دستگاه (۱۰-۴۴) تا (۱۰-۴۷) شامل مرحله‌ای است که در آن معادله (۱۰-۴۴) به شکل

$$u_{i,j+1} = a_{i,j+1}(b_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}) \qquad (۴۷\text{-}۱۰)$$

تبدیل می‌شود که در آن اعداد $a_{i,j+1}$ و $b_{i,j+1}$ به ترتیب با فرمول‌های (۱۰-۴۸) و (۱۰-۴۹) محاسبه می‌شوند. سپس از شرایط مرزی (۱۰-۴۷) بدست می‌آوریم:

$$u_{n,j+1} = \psi(t_{j+1})$$

و به طور متوالی مقادیر $u_{i,j+1}$ را با فرمول (۱۰-۴۸) پیدا می‌کنیم:

$$a_{1,j+1} = \frac{1}{2+s}, \; b_{1,j+1} = \varphi(t_{j+1} + su_{1f}) \qquad (۴۸\text{-}۱۰)$$

$$\left.\begin{array}{c} a_{i,f+1} = \frac{1}{2+s-a_{i-1,j+1}}, \\ b_{i,j+1} = a_{i-1,j+1}b_{i-1,j+1} + su_{ij} \\ (i = 2, 3, \ldots, n). \end{array}\right\} \qquad (۴۹\text{-}۱۰)$$

از اینرو روش گذر ما را قادر می‌سازد که مقادیر تابع $u(x,t)$ را در مرحله $t = t_{j+1}$ بدست آوریم اگر مقادیر مرحله $t = t_j$ معلوم باشند.

حل مسئله :

رویه پیشروی:

با استفاده از شرایط مرزی (۱۰-۴۶) اعداد $a_{1,j+1}$ و $b_{1,j+1}$، $a_{i,j+1}$، $b_{i,j+1}$ (برای $i = 2, 3, 4, \ldots, n$) را با فرمول‌های (۱۰-۴۹) و (۱۰-۵۰) پیدا می‌کنیم.

رویه پسروی:

از شرط مرزی (۱۰-۴۷) بدست می‌آوریم $u_{n,j+1} = \psi(t_{j+1})$. سپس با فرمول (۱۰-۴۸) محاسبه می‌کنیم

$$\left.\begin{array}{c} u_{n-1,j+1} = (u_{n,j+1} + b_{n-1,j+1})a_{n-1,j+1}, \\ u_{n-2,j+1} = (u_{n-1,j+1} + b_{n-2,j+1})a_{n-2,j+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{1,j+1} = (u_{2,j+1} + b_{1,j+1})a_{1,j+1}. \end{array}\right\} \qquad (۵۰\text{-}۱۰)$$

مثال ۱۰ـ۸ـ با استفاده از روش گذر جواب معادله

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{۱۰-۵۱}$$

را طوری پیدا کنید که شرایط زیر را برقرار کند:

$$u(x,0) = 4x(1-x),\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \tag{۱۰-۵۲}$$

حلـ مقدار $h = 0/1$ و $l = 0/01$ را در نظر گرفته و در نتیجه $S = \frac{h^2}{l} = 1$. با استفاده از روش گذر مقادیر تابع $u(x,t)$ را در مرحله $t = 0/01$ بدست می‌آوریم.

جدول ۱۰-۱۲) حل مسئله (۱۰-۴۲) و (۱۰-۴۳) با روش گذر

i	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
u_{i0}	۰	۰/۳۶۰	۰/۶۴۰	۰/۸۴۰	۰/۹۶۰	۱/۰۰۰	۰/۹۶۰	۰/۸۴۰	۰/۶۴۰	۰/۳۶۰	۰
u_{i0}		۰/۳۳۳	۰/۳۷۵	۰/۳۸۱	۰/۳۸۲	۰/۳۸۲	۰/۳۸۲	۰/۳۸۲	۰/۳۸۲	۰/۳۸۲	
b_{i1}		۰/۳۶۰	۰/۷۶۰	۱/۱۲۵	۱/۳۸۹	۱/۵۳۰	۱/۵۴۴	۱/۴۳۰	۱/۱۸۶	۰/۸۱۳	
u_{i1}	۰	۰/۳۱۰	۰/۵۷۲	۰/۷۶۴	۰/۸۸۲	۰/۹۲۱	۰/۸۸۲	۰/۷۶۴	۰/۵۷۱	۰/۳۱۰	۰

رویه پیشروی:

در سطر u_{i0} جدول ۱۰-۱۲ مقادیر تابع اولیه $f(x)(i = 0,1,2,\ldots,10)$ را وارد می‌کنیم و توسط فرمول‌های (۱۰-۴۹) اعداد زیر را برای $j = 0$ بدست می‌آوریم:

$$a_{11} = \frac{1}{3},\ b_{11} = u_{10} = 0/36$$

سپس متوالیاً توسط فرمول‌های (۱۰-۵۰) برای $j = 0$ محاسبه می‌کنیم:

$$a_{21} = \frac{1}{3-a_{11}} = \frac{3}{8} = 0/375,\quad b_{21} = a_{11}b_{11} + u_{20} = 0/12 + 0/64 = 0/760,$$
$$a_{31} = \frac{1}{3-a_{21}} = \frac{1}{2/625} = 0/381,\quad b_{31} = a_{21}b_{21} + u_{30} =$$
$$= 0/375 \times 0/760 + 0/84 = 1/125$$

و به همین ترتیب الی آخر.

نتایج بدست آمده را در سطرهای a_{i1} و b_{i1} جدول ۱۰-۱۲ وارد می‌کنیم.

رویه پسروی:

از شرایط مرزی بدست می‌آوریم:

$$u_{10,1} = 0$$

مقادیر u_{i1} $(i = ۹, ۸, \ldots, ۱)$ را با فرمول‌های (۱۰-۵۱) محاسبه می‌کنیم. برای $j = ۰$ داریم:

$$u_{۹۱} = (u_{۱۰,۱} + b_{۹۱})a_{۹۱} = ۰/۸۱۳ \times ۰/۳۸۲ = ۰/۳۱۰,$$
$$u_{۸۱} = (u_{۹۱} + b_{۸۱})a_{۸۱} = (۰/۳۱۰ + ۱/۱۸۶) \times ۰/۳۸۲ = ۰/۵۷۱,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_{۱۱} = (u_{۲۱} + b_{۱۱})a_{۱۱} = (۰/۵۷۲ + ۰/۳۶۰) \times ۰/۳۳۳ = ۰/۳۱۰.$$

مسائل

مسائل ۱ تا ۳ بخش ۱۰ـ۵ را به وسیله روش گذر حل کرده و نتایج را مقایسه کنید.

۱۰ـ۷ـ روش شبکه برای معادله هذلولی گون

یک مسئله مقدار مرزی پیچیده را برای یک معادله تار مرتعش که حل آن شامل پیدا کردن تابعی است که معادله

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲} = a^۲ \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} \qquad (۱۰\text{-}۵۳)$$

را با شرایط اولیه

$$u(x, ۰) = f(x),\ u_t(x, ۰) = \phi(x)\ (۰ \leq x \leq s) \qquad (۱۰\text{-}۵۴)$$

و شرایط مرزی

$$u(۰, t) = \varphi(t),\ u(s, t) = \psi(t) \qquad (۱۰\text{-}۵۵)$$

را برقرار کند.

چون تعریف متغیر $\tau = t\alpha$ منجر به معادله (۱۰-۵۴) را به شکل

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲} = \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} \qquad (۱۰\text{-}۵۶)$$

در می‌آورد، لذا مقدار $a = ۱$ را در نظر می‌گیریم.

با تشکیل دو دسته خطوط موازی در ناحیه $۰ \leq x \leq s$ و $t \geq ۰$ (شکل ۱۰-۱۷)

$$x = ih(i = ۰, ۱, ۲, \ldots, n)$$
$$t = jl(j = ۰, ۱, ۲, \ldots)$$

در معادله (۱۰-۵۷)، مشتقات را با روابط تفاضلی جایگزین می‌کنیم. با توجه به فرمول‌های همگن مشتقات داریم:

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{L^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} \qquad (۵۷\text{-}۱۰)$$

با در نظرگرفتن $a = L/h$ معادله تفاضلی

$$u_{i,j+1} = 2u_{ij} - u_{i,j-1} + \alpha^2(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) \qquad (۵۸\text{-}۱۰)$$

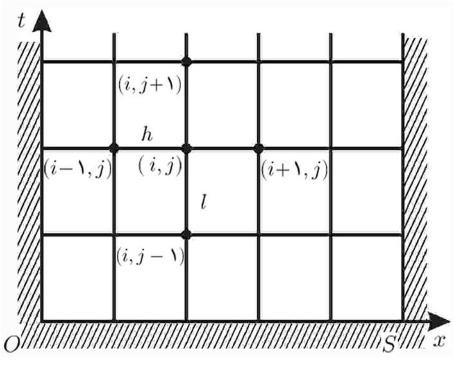
بدست می‌آید. ثابت شده است ([۲] را ببینید) که برای $\alpha \leq 1$ این معادله ثبات دارد.
در حالت خاص برای $\alpha = 1$ معادله (۱۰-۵۹) ساده‌ترین شکل را داراست:

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1} \qquad (۵۹\text{-}۱۰)$$

برآورد خطای ([۲] را ببینید) حل تقریبی بدست آمده از معادله (۱۰-۵۹) برای $0 < t \leq T$ و $0 \leq x \leq S$ شکل زیر را دارد:

$$|\tilde{u} - u| \leq \frac{h^2}{12}[(M_4 h + 2M_3)T + T^2 M_4] \qquad (۶۰\text{-}۱۰)$$

که در آن $\tilde{u}$ جواب دقیق و $M_k = \max\{|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}|, |\frac{\partial^k u}{\partial x^k}|\}(k = 3, 4)$ می‌باشند.
توجه کنید که برای معادله بدست آمده (۱۰-۵۹) ما از نقاط چشمه نشان داده شده در شکل ۱۰-۱۷ استفاده می‌کنیم. این یک نمودار صریح است واز اینرو معادله (۱۰-۵۹) امکان پیدا کردن مقادیر تابع $u(x,t)$ در مرحله t_{j+1} را فراهم می‌کند (اگر مقادیر در دو مرحله قبلی معلوم باشند).



شکل ۱۰-۱۷

برای تقریب جواب مسئله (۱۰-۵۴) تا (۱۰-۵۶)، ابتدا می‌بایستی مقادیر جواب در دو مرحله اولیه را بدانیم. این مقادیر می‌توانند از شرایط اولیه با یکی از روش‌های زیر پیدا شوند.

روش اول. در شرط اولیه (۱۰-۵۵) مشتق $u_t(x,0)$ را با رابطه تفاضلی

$$\frac{u_{i1}-u_{j0}}{L}=\phi(x_i)=\phi$$

جایگزین می‌کنیم. برای بدست آوردن مقادیر $u(x,t)$ در مراحل $j=0$ و $j=1$ بدست می‌آوریم:

$$u_{i0}=f_i,\ u_{i1}=f_i+L\phi_i \qquad (۱۰\text{-}۶۱)$$

در این مورد برآورد خطای مقادیر u_{i1} شکل زیر را دارد ([۲] را ببینید)

$$|\bar{u}_{i1}-u_{i1}|\leq\frac{\alpha h}{2}M_2 \qquad (۱۰\text{-}۶۲)$$

که در آن $M_2=\max\{|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}|,|\frac{\partial^2}{\partial x^2}|\}$.

روش دوم. مشتق $u_t(x,0)$ را با رابطه تفاضلی $\frac{u_{i1}-u_{i,-1}}{2L}$ جایگزین می‌کنیم که در آن $u_{i,-1}$ مقادیر تابع $u(x,t)$ در مرحله $j=-1$ هستند. بنابراین از شرایط اولیه (۱۰-۵۵) داریم:

$$u_{i0}=f_i,\ \frac{u_{i1}-u_{i,-1}}{2L}=\phi_i \qquad (۱۰\text{-}۶۳)$$

معادله تفاضلی (۱۰-۶۰) را برای مرحله $j=0$ می‌نویسیم:

$$u_{i1}=u_{i+1,0}+u_{i-1,0}-u_{i,-1} \qquad (۱۰\text{-}۶۴)$$

با حذف مقادیر $u_{i,-1}$ در معادلات (۱۰-۶۴) و (۱۰-۶۵) بدست می‌آوریم:

$$u_{i0}=f_i,\ u_{i1}=\frac{1}{2}(f_{i+1}+f_{i-1})+L\phi_i \qquad (۱۰\text{-}۶۵)$$

برآورد خطا برای مقادیر u_{i1} به صورت زیر انجام می‌شود ([۲] راببینید):

$$|\widetilde{u}_{i1}-u_{i1}|\leq\tfrac{h^4}{12}M_4+\tfrac{h^3}{6}M_3 \qquad (۱۰\text{-}۶۶)$$

که در آن $M_k=\max|\{|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}|,|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}|\}|(k=3,4)$.

این روشِ محاسبهِ مقادیرِ اولیه، در مثال ۱۰ـ۹ نشان داده شده است.

روش سوم. اگر یک تابع $f(x)$ مشتق دوم محدود داشته باشد آنگاه مقادیر u_{i1} را می‌توان به کمک فرمول تیلور بدست آورد:

$$u_{i1}\approx u_{i0}+L\frac{\partial u_{i0}}{\partial t}+\frac{L^2}{2}\frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial t^2} \qquad (۱۰\text{-}۶۷)$$

با استفاده از معادله (۱۰-۵۷) و شرایط اولیه (۱۰-۵۵) می‌توانیم بنویسیم:

$$u_{i0}=f_i,\frac{\partial u_{i0}}{\partial t}=\phi_i,\ \frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial x^2}=f_i''$$

بنابراین با استفاده از فرمول (۱۰-۶۸) خواهیم داشت:

$$u_{i1} \approx f_i + L\phi_i + \frac{L^2}{2} f_i'' \qquad (۱۰\text{-}۶۸)$$

خطای مقادیر u_{i1} بدست آمده توسط این فرمول ازمرتبه $O(L^3)$ است. این روش محاسبه مقادیر اولیه، در مثال ۱۰ـ۱۰ نشان داده شده است.

توجه ـ روش شبکه برای حل یک مسئله مقدار مرزی پیچیده برای معادله نامتجانس

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t)$$

مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این مورد معادله تفاضلی به صورت

$$u_{i,j+1} = 2u_{i1} - u_{i,j-1} + \alpha^2(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) + \alpha^2 h^2 F_{ij}$$

می‌باشد.

مثال ۱۰ـ۹ـ با استفاده از روش شبکه، پاسخ مسئله

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = 0/2x(1-x)\sin \pi x, \quad u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0. \end{array}\right\} \qquad (۱۰\text{-}۶۹)$$

را بدست آورید.

حل ـ یک شبکه مربع با فاصله‌های $h = l = 0/05$ را در نظر می‌گیریم. مقادیر $u(x,t)$ در دو مرحله اولیه را به وسیله روش دوم پیدا می‌کنیم. با در نظر داشتن اینکه $\phi(x) = 0$ و $F(x) = 0/2x(1-x)\sin \pi x$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} u_{i0} = f_i \\ u_{i1} = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_{i-1}) \\ (i = 0, 1, 2, \ldots, 10) \end{array}\right\} \qquad (۱۰\text{-}۷۰)$$

پر کردن جدول:

(۱) مقادیر $u_{i0} = f(x_i)$ برای $x_i = ih$ را محاسبه و در سطر اول جدول ۱۰-۱۳ وارد می‌کنیم (که متناظر با مقدار $t_0 = 0$ است). چون مسئله همگن است لذا جدول را برای مقادیر $0 \leq x \leq 0/5$ پر می‌کنیم. مقادیر مرزی را در ستون اول که متناظر با مقدار $x_0 = 0$ است، وارد می‌کنیم.

(۲) با فرمول (۱۰-۷۱) مقدار $u_{i۱}$ را با استفاده از مقادیر $u_{i۰}$ از سطر اول بدست آورده، نتایج را در سطر دوم جدول ۱۰-۱۳ وارد می‌کنیم.

(۳) مقادیر u_{ij} در مراحل بعدی را با فرمول (۱۰-۶۰) محاسبه می‌کنیم. برای $j = ۱$ متوالیاً بدست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
&u_{۱۲} = u_{۲۱} + u_{۰۱} - u_{۱۰} = ۰/۰۰۶۵ + ۰ - ۰/۰۰۱۵ = ۰/۰۰۵۰,\\
&u_{۲۲} = u_{۳۱} + u_{۱۱} - u_{۲۰} = ۰/۰۱۲۲ + ۰/۰۰۲۸ - ۰/۰۰۵۶ = ۰/۰۰۹۴,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&u_{۱۰,۲} = u_{۱۱,۱} + u_{۹۱} - u_{۱۰,۰} = ۰/۰۴۷۸ + ۰/۰۴۷۸ - ۰/۰۵۰۰ = ۰/۰۴۵۶.
\end{aligned}
$$

برای $j = ۲, ۳, ۴ \ldots, ۱۰$ محاسبات به روش مشابه انجام می‌گیرد. سطر آخر جدول شامل مقادیر جواب دقیق برای $t = ۰/۵$ است.

مثال ۱۰ـ۱۱ـ با استفاده از روش شبکه، جواب مسئله زیر را بدست آورید.

$$
\left.
\begin{array}{l}
\frac{\partial^{۲} u}{\partial t^{۲}} = \frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}},\\
u(x,۰) = x(\pi - x),\ u_t(x,۰) = ۰,\\
u(۰,t) = u(\pi,t) = ۰.
\end{array}
\right\}
\qquad (۱۰\text{-}۷۱)
$$

جدول ۱۰-۱۳) حل مسئله (۱۰-۶۰)

$t_j \backslash x_i$	۰	۰/۰۵	۰/۱۰	۰/۱۵	۰/۲۰	۰/۲۵
۰	۰	۰/۰۰۱۵	۰/۰۰۵۶	۰/۰۱۱۶	۰/۰۱۸۸	۰/۰۲۵۶
۰/۰۵	۰	۰/۰۰۲۸	۰/۰۰۶۵	۰/۰۱۲۲	۰/۰۱۹۰	۰/۰۲۶۴
۰/۱۰	۰	۰/۰۰۵۰	۰/۰۰۹۴	۰/۰۱۳۹	۰/۰۱۹۸	۰/۰۲۶۰
۰/۱۵	۰	۰/۰۰۶۶	۰/۰۱۲۴	۰/۱۷۰	۰/۰۲۰۹	۰/۰۲۵۶
۰/۲۰	۰	۰/۰۰۷۴	۰/۰۱۴۲	۰/۰۱۹۴	۰/۰۲۲۸	۰/۰۲۵۱
۰/۲۵	۰	۰/۰۰۷۶	۰/۰۱۴۴	۰/۰۲۰۰	۰/۰۲۳۶	۰/۰۲۴۹
۰/۳۰	۰	۰/۰۰۷۰	۰/۰۱۳۴	۰/۰۰۱۸۶	۰/۰۲۲۱	۰/۰۲۳۶
۰/۳۵	۰	۰/۰۰۵۸	۰/۰۱۱۲	۰/۰۱۵۵	۰/۰۱۸۶	۰/۰۱۹۹
۰/۴۰	۰	۰/۰۰۴۲	۰/۰۰۷۹	۰/۰۱۱۲	۰/۰۱۳۳	۰/۰۱۴۴
۰/۴۵	۰	۰/۰۰۲۱	۰/۰۰۴۲	۰/۰۰۵۷	۰/۰۰۷۰	۰/۰۰۷۴
۰/۵۰	۰	−۰/۰۰۰۱	−۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰	−۰/۰۰۲	۰/۰۰۰۰
$\widetilde{u}(x_i, ۰/۵)$	۰	۰	۰	۰	۰	۰

$t_j \backslash x_i$	۰٫۳۰	۰٫۳۵	۰٫۴۰	۰٫۴۵	۰٫۵۰
۰	۰٫۰۳۴۰	۰٫۰۴۰۵	۰٫۰۴۵۷	۰٫۰۴۸۹	۰٫۰۵۰۰
۰٫۰۵	۰٫۰۳۳۵	۰٫۰۳۹۸	۰٫۰۴۴۷	۰٫۰۴۷۸	۰٫۰۴۸۹
۰٫۱۰	۰٫۰۳۲۲	۰٫۰۳۷۷	۰٫۰۴۱۹	۰٫۰۴۴۷	۰٫۰۴۵۶
۰٫۱۵	۰٫۰۳۰۲	۰٫۰۳۴۳	۰٫۰۳۷۷	۰٫۰۳۹۷	۰٫۰۴۰۵
۰٫۲۰	۰٫۰۲۷۷	۰٫۰۳۰۲	۰٫۰۳۲۱	۰٫۰۳۳۵	۰٫۰۳۳۸
۰٫۲۵	۰٫۰۲۵۱	۰٫۰۲۵۵	۰٫۰۲۶۰	۰٫۰۲۶۲	۰٫۰۲۶۵
۰٫۳۰	۰٫۰۲۲۷	۰٫۰۲۰۹	۰٫۰۱۹۶	۰٫۰۱۹۰	۰٫۰۱۸۶
۰٫۳۵	۰٫۰۱۹۴	۰٫۰۱۶۸	۰٫۰۱۳۹	۰٫۰۱۲۰	۰٫۰۱۱۵
۰٫۴۰	۰٫۰۱۴۰	۰٫۰۱۲۴	۰٫۰۰۹۲	۰٫۰۰۶۴	۰٫۰۰۵۴
۰٫۴۵	۰٫۰۰۷۴	۰٫۰۰۶۴	۰٫۰۰۴۲	۰٫۰۰۲۶	۰٫۰۰۱۳
۰٫۵۰	−۰٫۰۰۰۲	−۰٫۰۰۰۱	−۰٫۰۰۰۲	−۰٫۰۰۰۲	−۰٫۰۰۰۲
$\widetilde{u}(x_i, 0.5)$	۰	۰	۰	۰	۰

حل- فاصله گذاری را برابر $h = l = \frac{\pi}{18}$ می‌گیریم. مقادیر $u(x,t)$ برای دو مرحله اولیه را به وسیله روش سوم با استفاده از فرمول تیلور بدست می‌آوریم.

پر کردن جدول:

(۱) مقادیر $(i = 0, 1, \dots, 18) u_{i0} = f_i = x_i(\pi - x_i)$ را محاسبه و در سطر اول جدول ۱۰-۱۴ وارد می‌کنیم. چون مسئله همگن است جدول را برای مقادیر $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ پر می‌کنیم. مقادیر مرزی را در ستون اول جدول وارد می‌کنیم.

جدول ۱۰-۱۴) حل مسئله (۱۰-۷۲)

j	$t_j \backslash x_i$	۰	π/۱۸	π/۹	π/۶	۲π/۹	۵π/۱۸	π/۳	۷π/۱۸	۴π/۹	π/۲
۰	۰	۰	۰٫۵۱۸	۰٫۹۷۵	۱٫۳۷۱	۱٫۷۰۶	۱٫۹۸۰	۲٫۱۹۳	۲٫۳۴۶	۲٫۴۳۷	۲٫۴۶۷
۱	h	۰	۰٫۴۸۷	۰٫۹۴۴	۱٫۳۴۰	۱٫۶۷۵	۱٫۹۵۰	۲٫۱۶۳	۲٫۳۱۵	۲٫۴۰۶	۲٫۴۳۷
۲	$2h$	۰	۰٫۴۲۶	۰٫۸۵۳	۱٫۲۴۹	۱٫۵۸۴	۱٫۸۵۸	۲٫۰۷۱	۲٫۲۲۴	۲٫۳۱۵	۲٫۳۴۶
۳	$3h$	۰	۰٫۳۶۶	۰٫۷۳۱	۱٫۰۹۷	۱٫۴۳۲	۱٫۷۰۶	۱٫۹۱۹	۲٫۰۷۱	۲٫۱۶۳	۲٫۱۹۳
۴	$4h$	۰	۰٫۳۰۵	۰٫۶۰۹	۰٫۹۱۴	۱٫۲۱۸	۱٫۴۹۳	۱٫۷۰۶	۱٫۸۵۸	۱٫۹۵۰	۱٫۹۸۰
۵	$5h$	۰	۰٫۲۴۴	۰٫۴۸۷	۰٫۷۳۱	۰٫۹۷۵	۱٫۲۱۸	۱٫۴۳۲	۱٫۵۸۴	۱٫۶۷۵	۱٫۷۰۶

(۲) مقادیر u_{i1} را بدست می‌آوریم. در این مسئله $\phi_i = 0$ و $f_i'' = -2$ هستند. از اینرو به وسیله فرمول (۱۰-۶۹) داریم:

$$u_{i1} = u_{i0} - h^2 = u_{i0} - 0.0304۸$$

که از آنجا مقادیر u_{i1} را پیدا کرده و در سطر دوم جدول وارد می‌کنیم.

(۳) مقادیر $u_{i,j+1}$ را برای $j = 1, 2, 3, 4, 5$ توسط فرمول (۱۰-۶۰) محاسبه می‌کنیم برای $j = 2$ بدست می‌آوریم.

$$u_{۱۲} = u_{۲۱} + u_{۰۱} - u_{۱۰} = ۰/۹۴۴ + ۰ - ۰/۵۱۸ = ۰/۴۲۶,$$
$$u_{۲۲} = u_{۳۱} + u_{۱۱} - u_{۲۰} = ۱/۳۴۰ + ۰/۴۷۸ - ۰/۹۷۵ = ۰/۸۵۳,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$u_{۹,۲} = u_{۱۰,۱} + u_{۸۱} - u_{۹,۰} = ۲/۴۰۶ + ۲/۴۰۶ - ۲/۴۶۷ = ۲/۳۴۶.$$

محاسبه در مراحل بعدی به صورت مشابه انجام می‌شود.

مسائل

در مسائل ۱ تا ۳ جواب معادله $\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲} = \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}$ را طوری تقریب بزنید که شرایط

$$u_t(x,۰) = \phi(x), \quad u(x,۰) = f(x)$$
$$u(۱,t) = \psi(t), \quad u(۰,t) = \varphi(t)$$

را برای $۰ \leq t \leq ۰/۵$ و $۰ \leq x \leq ۱$ با فاصله $h = ۰/۱$ برای آرگومان x، برقرار سازد.

۱ـ $a = ۱/۱ + ۰/۱n$ و $\varphi(t) = \psi(t) = ۰$ و $\phi(x) = ۰$ و $f(x) = (ax^۲ + ۱/۱)\sin \pi x$ و $n = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴$ برای محاسبه مقادیر از روش سوم (صفحه ۳۱۳) استفاده کنید.

۲ـ $\varphi(t) = \psi(t) = ۰$، $\phi(x) = ۰$، تابع $f(x)$ با جدول زیر داده شده است.

x	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱/۰
$f(x)$	۰	۰/۰۱۴۵	۰/۰۵۱۱	۰/۰۹۲۱a	۰/۱۱۱۴	۰/۱۸۲۵/a	۰/۱۹۰۲	۰/۱۴۸۱a	۰/۱۰۲۸	۰/۰۵۰۲	۰

$a = ۰/۹۵ + ۰/۰۲۵n$ و $n = ۱, ۲, ۳, ۴$.

۳ـ $\psi(t) = f(۱)$ و $\varphi(t)$، توابع $\phi(x)$ و $f(x)$ با جداول زیر داده شده‌اند:

$a = ۱/۱, ۱/۲, ۱/۳, ۱/۴, ۱/۵;$

x	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵
$f(x)$	۰	۰/۱۱۰۱	۰/۱۳۴۵ $\times a$	۰/۱۴۹۸	۰/۱۵۳۱	۰/۱۹۹۸ $\times a$
$\phi(x)$	۰	۰/۰۴۲۰	۰/۰۵۰۰	۰/۰۵۱۰ $\times a$	۰/۰۴۴۰	۰/۰۳۸۰
x		۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱/۰
$f(x)$		۰/۱۴۰۲	۰/۱۷۲۲	۰/۱۴۳۸ $\times a$	۰/۱۲۴۱	۰/۱۲۰۰
$\phi(x)$		۰/۰۲۲۰	۰/۰۲۱۰ $\times a$	۰/۰۲۰۰	۰/۰۱۹۰	۰

۴ـ جواب معادله $\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲} - \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} = x + t$ را با فاصله $h = l = ۰/۱$ تقریب بزنید با این فرض که $f(x) = (۱/۵x^۲ + ۱/۲)\sin \pi x$، $\phi(x) = ۰/۱x$، $\varphi(t) = \psi(t) = ۰$. برای محاسبه مقادیر $u_{i۱}$ از روش اول (صفحه ۳۱۳) استفاده کنید.

۵ـ جواب معادله $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2 - t^2$ را با فاصله $h = l = 0/1$ تقریب بزنید با این فرض که $f(x) = (1/5x^2 + 0/9)e^{-x}$، $\phi(x) = 0$، $\varphi(t) = 0$ و $\psi(t) = 2/4e^{-1}$. برای محاسبه مقادیر u_{i1} از روش اول استفاده کنید.

۸ـ۱۰ـ حل معادلات فِردهُلم[1] به روش مجموع‌های محدود

اجازه بدهید معادلات انتگرال فردهلم از نوع اول

$$\int_a^b k(x,s)y(s)ds = f(x) \qquad (72\text{-}10)$$

و از نوع دوم

$$y(x) - \lambda \int_a^b k(x,s)y(s)ds = f(x) \qquad (73\text{-}10)$$

را در نظر بگیریم.

روش مجموع‌های محدود ([۲]، [۱۳] و [۱۷] را ببینید) شامل جایگزینی انتگرال محدود با مجموع محدود توسط یکی از فرمول‌های تربیع:

$$\int_a^b F(x)dx \approx \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j) \qquad (74\text{-}10)$$

می‌شود که در آن x_j طول‌های نقاط واقع در بازه $[a,b]$ هستند و $A_i(i = 1, 2, \ldots, n)$ ضرایب فرمول تربیع مستقل از $F(x)$ هستند. با جایگزینی تقریبی انتگرال در معادلات فردهلم (۱۰-۷۳) و (۱۰-۷۴) با فرمول (۱۰-۷۵) و قرار دادن $x = x_i$ به ترتیب داریم:

$$\sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} y_j = f_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (75\text{-}10)$$

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} y_i = f_i \quad (1, 2, \ldots, n) \qquad (76\text{-}10)$$

که در آن $y_i = y(x_i)$، $K_{ij} = k(x_i, x_j)$، $f_i = f(x_i)$.

از اینرو ما دستگاه‌هایی از معادلات جبری خطی بر حسب مقادیر y_i خواهیم داشت. با حل این دستگاه توسط یکی از روش‌های گفته شده (مثلاً روش گوس و یا روش‌های تکرار) ما یک جدول از مقادیر تقریبی

1) Fredholm

y_i در نقاط x_i بدست می‌آوریم. از اینرو قادر خواهیم بود که حل تقریبی معادله (۱۰-۷۳) را به صورت یک چند جمله‌ای درون‌یابی بنویسیم وحل معادله (۱۰-۷۴) را به صورت:

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K(x, x_i) y_j \tag{۱۰-۷۷}$$

تقریب بزنیم. بسته به انتخاب فرمول تربیع (۱۰-۷۵)، مقادیر ضرایب A_j و طول‌های x_j زیر را خواهیم داشت:

(۱) برای فرمول ذوزنقه:

$$h = \frac{b-a}{n},\ A_0 = A_n = \frac{h}{2},\ A_j = h \quad (j = 1, 2, \dots, n-1)$$
$$x_j = a + jh \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

(۲) برای فرمول سیمپسون:

$$n = 2m,\quad h = \frac{b-a}{2m},\quad A_0 = A_{2m} = \frac{h}{3},\quad A_1 = A_3 = \cdots = A_{2m-1} = \frac{4h}{3},$$
$$A_2 = A_4 = \cdots = A_{2m-2} = \frac{2h}{3},\quad x_j = a + jh \quad (j = 0, 1, \dots, 2m),$$

(۳) برای فرمول گوس:

$$A_j = (b-a)A_j^{(n)},\ x_j = a + (b-a)x_j^{(n)}$$

که در آن $x_j^{(n)}$ طولهای گوس هستند و $A_j^{(n)}$ ضرایب گوس برای بازه $(0, 1)$ هستند.
خطای جواب تقریبی به خطای فرمول تربیع انتخابی بستگی دارد. برای انتخاب فرمول‌های تربیع [۱۷] را ببینید. برآورد خطا برای این روش در [۲] و [۱۷] ارائه شده است.

مثال ۱۰-۱۱- با استفاده از فرمول تربیع سیمپسون برای $n = 2$ جواب معادله انتگرال

$$y(x) + \int_0^1 xe^{xs} y(s) ds = e^x \tag{۱۰-۷۸}$$

را تقریب بزنید.

حل- برای فرمول سیمپسون داریم:

$$h = \frac{1}{2m} = \frac{1}{2},\ A_0 = A_2 = \frac{1}{6},\ A_1 = \frac{2}{3},\ x_0 = 0,\ x_1 = 0/5,\ x_2 = 1$$

از اینرو برای معادله (۱۰-۷۹) می‌توانیم بنویسیم:

$$y(x) + \frac{1}{6}[xe^{0 \times x} y_0 + 4xe^{0/5x} y_1 + xe^{1 \times x} y_2] = e^x$$

با قرار دادن $x = x_i$ در آخرین معادله، یک دستگاه بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} &y_0 = l, \\ &y_1 + \tfrac{0.5}{6}(y_0 + 4e^{0.25}y_1 + e^{0.5}y_2) = e^{0.5}, \\ &y_2 + \tfrac{1}{6}(y_0 + 4e^{0.5}y_1 + e^{1}y_2) = e^{1}, \end{aligned}$$

که پس از ساده کردن به شکل زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1, \\ 1.4280\,y_1 + 0.1374\,y_2 &= 1.5654, \\ 1.0991\,y_1 + 1.4530\,y_2 &= 2.5516. \end{aligned}$$

با حل این دستگاه بدست می‌آوریم $y_0 = 1$، $y_1 = 1.0002$ و $y_2 = 0.995$. برای مقایسه یادآور می‌شویم که جواب دقیق معادله (۱۰-۷۹) تابع $y(x) = 1$ است.
با استفاده از فرمول (۱۰-۷۸)، جواب تقریبی معادله (۱۰-۷۹) را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$y(x) = e^x - \frac{x}{6}(1 + 4.001e^{x/2} + 1.000e^x)$$

مثال ۱۰-۱۲- با بکارگیری فرمول تربیع گوس برای $n = 2$ حل معادله انتگرال

$$y(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{xs}y(s)ds = 1 - \frac{1}{2x}(e^x - 1) \qquad (۱۰\text{-}۷۹)$$

را تقریب کنید.

حل- برای فرمول گوس داریم:

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{2},\ x_1 = 0.2113,\ x_2 = 0.7887,$$

$$y_1 - \frac{1}{4}(e^{x_1^2}y_1 + e^{x_1x_2}y_2) = 1 - \frac{1}{2x_1}(e^{x_1} - 1),$$

$$y_2 - \frac{1}{4}(e^{x_1x_2}y_1 + e^{x_2^2}y_2) = 1 - \frac{1}{2x_2}$$

با جایگزینی مقادیر x_1 و x_2 و انجام تبدیلات لازم دستگاه زیر حاصل می‌گردد:

$$0.7386y_1 - 0.2954y_2 = 0.4434, \quad -0.2954y_1 + 0.5343y_2 = 0.2384$$

با حل این دستگاه بدست می‌آوریم: $y_۱ = ۰/۹۹۹۷$ و $y_۲ = ۰/۹۹۹۰$. برای مقایسه توجه داشته باشید که جواب دقیق معادله داده شده تابع $y(x) = ۱$ است. بنابراین جواب تقریبی معادله (۱۰-۷۹) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$y(x) = ۰/۲۴۹۹e^{۰/۲۱۱۳x} + ۰/۲۴۹۷e^{۰/۷۸۸۷x} + ۱ - \frac{۱}{۲x}(e^x - ۱)$$

مثال ۱۰ـ۱۳ـ با بکارگیری فرمول مربع مستطیل برای $n = ۱۲$ جواب تقریبی معادله

$$y(x) + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{y(s)ds}{۶/۸ - ۳/۲\cos(x+s)} = ۲۵ - ۱۶\sin^۲ x \qquad (۱۰\text{-}۸۰)$$

را بدست آورید.

حل. برای فرمول مربع‌مستطیل با $n = ۱۲$ داریم $h = \frac{۲\pi}{۱۲} = \frac{\pi}{۶}$ و $A_j = \frac{\pi}{۶}$. از اینرو برای معادله (۱۰-۸۰) خواهیم داشت:

$$y_i + \frac{\pi}{۶}\sum_{j=۱}^{n} k_{ij}y_j = ۲۵ - ۱۶\sin^۲ x_i \qquad (۱۰\text{-}۸۱)$$

مقادیر k_{ij} در جدول ۱۰-۱۷ آمده‌اند.
تعداد مجهولات در دستگاه بدست آمده می‌تواند بطور چشمگیری با در نظرگرفتن اینکه پاسخ همگن است کاهش یابد. می‌توان نشان داد که اگر تابع $y(x)$ جواب معادله (۱۰-۸۰) باشد، آنگاه تابع $y(-x)$ نیز جواب این معادله است.
بنابراین با فرض اینکه جواب معادله انتگرال یکتاست داریم:

$$y(x) = y(-x)$$

یعنی جواب $y(x)$ یک تابع زوج است. با در نظرگرفتن اینکه

$$I(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{y(s)ds}{۶/۸ - ۳/۲\cos(x+s)}$$

و اینکه

$$I(x) = I(-x) = I(\pi - x) \qquad (۱۰\text{-}۸۲)$$

داریم:

$$I(-x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{y(s)ds}{۶/۸ - ۳/۲\cos(-x+s)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{y(s)ds}{۶/۸ - ۳/۲\cos(x-s)}$$

با تغییر متغیر $t = -S$ و احتساب اینکه تابع $y(x)$ زوج است داریم:

$$I(-x) = -\int_{\pi}^{-\pi} \frac{y(-t)dt}{۶/۸ - ۳/۲\cos(x+t)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{y(t)dt}{۶/۸ - ۳/۲\cos(x+t)} = I(x)$$

پس

$$I(\pi - x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{y(s)ds}{۶/۸ - ۳/۲\cos(\pi - x + s)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{y(s)ds}{۶/۸ - ۳/۲\cos(x - (\pi + s))}$$

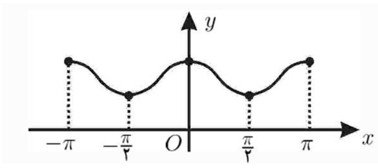
که از آنجا به کمک جایگزینی $t = s + \pi$ بدست می‌آوریم:

$$I(\pi - x) = -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{y(t)dt}{۶/۸ - ۳/۲\cos(x+t)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{y(t)dt}{۶/۸ - ۳/۲\cos(x+t)} = I(x).$$

از رابطه (۱۰-۸۲) نتیجه می‌شود:

$$y(x) = y(-x) = y(\pi - x)$$

یعنی نمودار پاسخ مورد نظر بر حسب دسته خطوط موازی $x = ۰$ و $x = \pm\frac{\pi}{۲}$ همگن است (شکل ۱۰-۱۸). با فرض همگن بودن می‌توانیم بنویسیم:



شکل ۱۰-۱۸

$$\left.\begin{array}{l} y(-\pi) = y(۰) = y(\pi),\ \ y(-\frac{\pi}{۲}) = y(\frac{\pi}{۲}), \\ y(-\frac{۵}{۶}\pi) = y(-\frac{\pi}{۶}) = y(\frac{\pi}{۶}) = y(\frac{۵}{۶}\pi), \\ y(-\frac{۲}{۳}\pi) = y(-\frac{\pi}{۳}) = y(\frac{\pi}{۳}) = y(\frac{۲}{۳}\pi). \end{array}\right\} \qquad (۸۳\text{-}۱۰)$$

با در نظر گرفتن اینکه $y_۱ = y(۰)$، $y_۲ = y(\pi/۶)$، $y_۳ = y(\pi/۳)$ و $y_۴ = y(\frac{\pi}{۲})$ و در نظر داشتن

شرایط (۱۰-۸۴)، دستگاه (۱۰-۸۲) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
&y_1 + \tfrac{\pi}{6}[y_1(K(0,-\pi) + K(0,0)) + y_2(K(0,-\tfrac{5}{6}\pi)+\\
&\quad +K(0,-\tfrac{\pi}{6}) + K(0,\tfrac{\pi}{6}) + K(0,\tfrac{5}{6}\pi)) + y_3(K(0,-\tfrac{2}{3}\pi)+\\
&\quad +K(0,-\tfrac{\pi}{3}) + K(0,\tfrac{\pi}{3}) + K(0,\tfrac{2}{3}\pi)) + y_4(K(0,-\tfrac{\pi}{2})+\\
&\qquad\qquad +K(0,\tfrac{\pi}{2}))] = 25,\\
&y_2 + \tfrac{\pi}{6}[y_1(K(\tfrac{\pi}{6},-\pi) + K(\tfrac{\pi}{6},0)) + y_2(K(\tfrac{\pi}{6},-\tfrac{5}{6}\pi)+\\
&\quad +K(\tfrac{\pi}{6},-\tfrac{\pi}{6}) + K(\tfrac{\pi}{6},\tfrac{\pi}{6}) + K(\tfrac{\pi}{6},\tfrac{5}{6}\pi))+\\
&\quad +y_3(K(\tfrac{\pi}{6},-\tfrac{2}{3}\pi) + K(\tfrac{\pi}{6},-\tfrac{\pi}{3}) + K(\tfrac{\pi}{6},\tfrac{\pi}{3})+\\
&\qquad +K(\tfrac{\pi}{6},\tfrac{2}{3}\pi)) + y_4(K(\tfrac{\pi}{6},-\tfrac{\pi}{2}) + K(\tfrac{\pi}{6},\tfrac{\pi}{2}))] = 21,\\
&y_3 + \tfrac{\pi}{6}[y_1(K(\tfrac{\pi}{3},-\pi) + K(\tfrac{\pi}{3},0)) + y_2(K(\tfrac{\pi}{3},-\tfrac{5}{6}\pi)+\\
&\quad +K(\tfrac{\pi}{3},-\tfrac{\pi}{6}) + K(\tfrac{\pi}{3},\tfrac{\pi}{6}) + K(\tfrac{\pi}{3},\tfrac{5}{6}\pi))+\\
&\quad +y_3(K(\tfrac{\pi}{3},-\tfrac{2}{3}\pi) + K(\tfrac{\pi}{3},-\tfrac{\pi}{3}) + K(\tfrac{\pi}{3},\tfrac{\pi}{3})+\\
&\qquad +K(\tfrac{\pi}{3},\tfrac{2}{3}\pi)) + y_4(K(\tfrac{\pi}{3},-\tfrac{\pi}{2}) + K(\tfrac{\pi}{3},\tfrac{\pi}{2}))] = 13,\\
&y_2 + \tfrac{\pi}{6}[y_1(K(\tfrac{\pi}{2},-\pi) + K(\tfrac{\pi}{2},0)) + y_2(K(\tfrac{\pi}{2},-\tfrac{5}{6}\pi)+\\
&\quad +K(\tfrac{\pi}{2},-\tfrac{\pi}{6}) + K(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{6}) + K(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{5}{6}\pi))+\\
&\quad +y_2(K(\tfrac{\pi}{2},-\tfrac{2}{3}\pi) + K(\tfrac{\pi}{2},-\tfrac{\pi}{3}) + K(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{3})+\\
&\qquad +K(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{2}{3}\pi)) + y_4(K(\tfrac{\pi}{2},-\tfrac{\pi}{2}) + K(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}))] = 9,
\end{aligned}$$

که در آن مقادیر $k_{ij} = k(x_i, x_j)$ در جدول ۱۰-۱۵ داده شده‌اند.

جدول ۱۰-۱۵) مقادیر k_{ij} برای معادله (۱۰-۸۱)

$x_i \backslash x_j$	$-\pi$	$-\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$
0	۰٫۱۰۰	۰٫۱۰۵	۰٫۱۱۹	۰٫۱۴۷	۰٫۱۹۲	۰٫۲۴۷	۰٫۲۷۸	۰٫۲۴۷	۰٫۱۹۲	۰٫۱۴۷	۰٫۱۱۹	۰٫۱۰۵
$\frac{\pi}{6}$	۰٫۱۰۵	۰٫۱۱۹	۰٫۱۴۷	۰٫۱۹۲	۰٫۲۴۷	۰٫۲۷۸	۰٫۲۴۷	۰٫۱۹۲	۰٫۱۴۷	۰٫۱۱۹	۰٫۱۰۵	۰٫۱۰۰
$\frac{\pi}{3}$	۰٫۱۱۹	۰٫۱۴۷	۰٫۱۹۲	۰٫۲۴۷	۰٫۲۷۸	۰٫۲۴۷	۰٫۱۹۲	۰٫۱۴۷	۰٫۱۱۹	۰٫۱۰۵	۰٫۱۰۰	۰٫۱۰۵
$\frac{\pi}{2}$	۰٫۱۴۷	۰٫۱۹۲	۰٫۲۴۷	۰٫۲۷۸	۰٫۲۴۷	۰٫۱۹۲	۰٫۱۴۷	۰٫۱۱۹	۰٫۱۰۵	۰٫۱۰۰	۰٫۱۰۵	۰٫۱۱۹

با جایگزینی مقادیر k_{ij} و محاسبه ضرایب $y_i (i = 1, 2, 3, 4)$ دستگاه زیر را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
1.19y_1 + 0.35y_2 + 0.31y_3 + 0.15y_4 &= 25,\\
0.18y_1 + 1.34y_2 + 0.32y_3 + 0.16y_4 &= 21,\\
0.16y_1 + 0.32y_2 + 1.34y_3 + 0.18y_4 &= 13,\\
0.15y_1 + 0.31y_2 + 0.35y_3 + 1.19y_4 &= 9,
\end{aligned}$$

که از آنجا پیدا می‌کنیم:

$$y_۱ = ۱۶/۰۴,\ y_۲ = ۱۲/۲۷,\ y_۳ = ۴/۷۳,\ y_۴ = ۰/۹۵۳$$

با استفاده از شرایط (۱۰-۸۴)، می‌توانیم مقادیر y در نقاط باقیمانده را نیز حساب کنیم و جواب تقریبی معادله (۱۰-۸۱) را به صورت زیر بنویسیم:

$$y(x) = \frac{\pi}{۶}\sum_{j=۱}^{۱۳}\frac{y_j}{۶/۸ - ۳/۲\cos(x+x_j)}$$

برای مقایسه مقادیر جواب دقیق $y(x) = ۸/۵۰ + ۷/۵۳\cos ۲x$ را در نقاط متناظر بدست می‌آوریم:

$$\bar{y}(۰) = ۱۶/۰۳۰,\ y(\tfrac{\pi}{۶}) = ۱۲/۲۶۵,\ \bar{y}(\tfrac{\pi}{۳}) = ۴/۷۳۵,\ \bar{y}(\tfrac{\pi}{۲}) = ۰/۹۷۰$$

مسائل

با استفاده از فرمول‌های تربیع گفته شده، جواب تقریبی معادله انتگرال زیر را بدست آورید.

۱ـ $y(x) + \int_۰^۱ \frac{y(s)}{۱+x^۲+s^۲}ds = ۱/۵ - x^۲$ (فرمول ذوزنقه برای $n = ۴$).

۲ـ $y(x) + \int_۰^{۰/۵} \frac{(۱+s)y(s)}{۲+\sin\pi(x+s)}ds = ۱ + \sin\pi x$ (فرمول ذوزنقه برای $n = ۵$).

۳ـ $y(x) - \int_۰^{۰/۹۶} \frac{(۱+x+s)t(s)}{۲+x^۲+s^۲}ds = e^{-x}$ (فرمول سیمپسون برای $n = ۴$).

۴ـ $y(x) - \int_۰^۱ \frac{۱+x+s}{۲+xs}y(s)ds = ۱ - x^۲$ (فرمول گوس برای $n = ۴$).

۱۰ـ۹ـ حل معادله ولترا[1] از نوع دوم با روش مجموع‌های محدود

معادله انتگرال ولترا از نوع دوم را در نظر بگیرید:

$$y(x) - \lambda\int_a^x k(x,s)y(s)ds = f(x) \qquad (۱۰\text{-}۸۴)$$

مشخص است که ([۳۰] و[۳۸] را ببینید) اگر هسته $k(x,s)$ یک تابع پیوسته در دامنه $R\{a \le s \le x \le b\}$ باشد و $f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه معادله انتگرال (۱۰-۸۵) یک جواب یکتا برای هر λ دارد.

یکی از فرمول‌های تربیع نیوتن-کوتس[2] را انتخاب می‌کنیم:

$$\int_a^b F(x)d(x) \approx \sum_{j=۰}^{n} A_jF(x_j) \qquad (۱۰\text{-}۸۵)$$

1) Volterra 2) Cotes

که در آن x_j طولهای نقاط در بازه $[a,b]$ و A_j ضرایب فرمول تربیع (برای $j=\circ,\text{۱},\text{۲},\dots,n$) هستند. با قرار دادن $x=x_i$ در معادله (۱۰-۸۵) و سپس جایگزینی تقریبی انتگرال‌های محدود با مجموع‌های محدود داریم:

$$y_i-\lambda\sum_{j=\circ}^{i}A_j^{(i)}K_{ij}y_j=f_i\ (i=\circ,\text{۱},\dots,n) \qquad (\text{۱۰-۸۶})$$

که در آن

$$y_i=y(x_i),\quad k_{ij}=k(x_i,x_j)$$
$$f_i=f(x_i).$$

بنابراین ما یک دستگاه خطی با ماتریس مثلثی بدست آورده‌ایم. مراحل بعدی بطور قابل ملاحظه‌ای جواب را بهبود می‌بخشد. مقادیر ضرایب A_j بستگی به فرمول تربیع انتخاب شده دارد (بخش ۱۰ـ۸ را ببینید).

مثال ۱۰ـ۱۴ـ با استفاده از فرمول ذوزنقه با فاصله $h=\circ/\text{۲}$ در بازه $[\circ,\text{۱}]$ جواب معادله

$$y(x)-\int_\circ^x e^{-x-s}y(s)ds=\circ/\text{۵}(e^{-x}+e^{-\text{۳}x}) \qquad (\text{۱۰-۸۷})$$

را تقریب بزنید.

حل ـ برای فرمول ذوزنقه با $n=\text{۵}$ داریم:

$$A_\circ=A_\text{۵}=h/\text{۲},\quad A_j=h\ \ (j=\text{۱},\text{۲},\text{۳},\text{۴})$$

با قرار دادن $x=x_i$ $(i=\circ,\text{۱},\dots,\text{۵})$ در معادله (۱۰-۸۸) بدست می‌آوریم:

$$y_\circ=f_\circ,\ y_\text{۱}-\int_\circ^{x_i}e^{-x_i-s}y(s)ds=\circ/\text{۵}(e^{-x_i}+e^{-\text{۳}x_i})\ \ (i=\text{۱},\text{۲},\dots,\text{۵})$$

با بکارگیری فرمول ذوزنقه با فاصله $h=\circ/\text{۲}$ برای انتگرال‌های محدود داریم:

$$\left.\begin{array}{l}
y_\circ=f_\circ,\\
y_\text{۱}-\frac{h}{\text{۲}}(K_{\text{۱}\circ}y_\circ+K_{\text{۱۱}}y_\text{۱})=f_\text{۱},\\
y_\text{۲}-\frac{h}{\text{۲}}(K_{\text{۲}\circ}y_\circ+\text{۲}K_{\text{۲۱}}y_\text{۱}+K_{\text{۲۲}}y_\text{۲})=f_\text{۲},\\
y_\text{۳}-\frac{h}{\text{۲}}[K_{\text{۳}\circ}y_\circ+\text{۲}(K_{\text{۳۱}}y_\text{۱}+k_{\text{۳۲}}y_\text{۲})+K_{\text{۳۳}}y_\text{۳}]=f_\text{۳},\\
y_\text{۴}-\frac{h}{\text{۲}}[K_{\text{۴}\circ}y_\circ+\text{۲}(K_{\text{۴۱}}y_\text{۱}+K_{\text{۴۲}}y_\text{۲}+K_{\text{۴۳}}y_\text{۳})+K_{\text{۴۴}}y_\text{۴}]=f_\text{۴},\\
y_\text{۵}-\frac{h}{\text{۲}}[K_{\text{۵}\circ}y_\circ+\text{۲}(K_{\text{۵۱}}y_\text{۱}+K_{\text{۵۲}}y_\text{۲}+K_{\text{۵۳}}y_\text{۳}+K_{\text{۵۴}}y_\text{۴})+k_{\text{۵۵}}y_\text{۵}]=f_\text{۵},
\end{array}\right\} \qquad (\text{۱۰-۸۸})$$

سپس ما یک جدول از مقادیر $K(x,s)=e^{-x-s}$ و $f(x)=۰٫۵(e^{-x}+e^{-۳x})$ تشکیل داده و از دستگاه (۱۰-۸۹) متوالیاً بدست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
&y_۰=f_۰=۱٫۰۰۰۰,\\
&y_۱=[f_۱+\tfrac{h}{۲}K_{۱۰}y_۰](۱-\tfrac{h}{۲}K_{۱۱})^{-۱}=۰٫۸۲۰۶,\\
&y_۲=[f_۲+\tfrac{h}{۲}K_{۲۰}y_۰+hK_{۲۱}y_۱](۱-\tfrac{h}{۲}K_{۲۲})^{-۱}=۰٫۶۷۳۱,\\
&y_۳=[f_۳+\tfrac{h}{۲}K_{۳۰}y_۰+h(K_{۳۱}y_۱+K_{۳۲}y_۲)](۱-\tfrac{h}{۲}K_{۳۳})^{-۱}=۰٫۵۵۱۸,\\
&y_۴=[f_۴+\tfrac{h}{۲}K_{۴۰}y_۰+h(K_{۴۱}y_۱+K_{۴۲}y_۲+K_{۴۳}y_۳)](۱-\tfrac{h}{۲}K_{۴۴})^{-۱}=۰٫۴۵۲۲,\\
&y_۵=[f_۵+\tfrac{h}{۲}K_{۵۰}y_۰+h(K_{۵۱}y_۱+K_{۵۲}y_۲+K_{۵۳}y_۳+K_{۵۴}y_۴)]\times\\
&(۱-\tfrac{h}{۲}K_{۵۵})^{-۱}=۰٫۳۷۰۵.
\end{aligned}
$$

جدول ۱۰-۱۶) مقادیر f_i, K_{ij}

i	$k_{۰i}$	$K_{۱i}$	$K_{۲i}$	$K_{۳i}$	$K_{۴i}$	$K_{۵i}$	f_i
۰	۱٫۰۰۰۰۰	۰٫۸۱۸۷۳	۰٫۶۷۰۳۲	۰٫۵۴۸۸۱	۰٫۴۴۹۳۳	۰٫۳۶۷۸۸	۱٫۰۰۰۰۰
۱	۰٫۸۱۸۷۳	۰٫۶۷۰۳۲	۰٫۵۴۸۸۱	۰٫۴۴۹۳۳	۰٫۳۶۷۸۸	۰٫۳۰۱۱۹	۰٫۶۷۳۷۷
۲	۰٫۶۷۰۳۲	۰٫۵۴۸۸۱	۰٫۴۴۹۳۳	۰٫۳۶۷۸۸	۰٫۳۰۱۱۹	۰٫۲۴۶۶۰	۰٫۴۸۵۷۶
۳	۰٫۵۴۸۸۱	۰٫۴۴۹۳۳	۰٫۳۶۷۸۸	۰٫۳۰۱۱۹	۰٫۲۴۶۶۰	۰٫۲۰۱۹۰	۰٫۳۵۷۰۶
۴	۰٫۴۴۹۳۳	۰٫۳۶۷۸۸	۰٫۳۰۱۱۹	۰٫۲۴۶۶۰	۰٫۲۰۱۹۰	۰٫۱۶۵۳۰	۰٫۲۷۰۰۲
۵	۰٫۳۶۷۸۸	۰٫۳۰۱۱۹	۰٫۲۴۶۶۰	۰٫۲۰۱۹۰	۰٫۱۶۵۳۰	۰٫۱۳۵۳۴	۰٫۲۰۸۸۳

مسائل

با بکارگیری فرمول ذوزنقه با $h=۰٫۲$ جواب‌های تقریبی معادلات انتگرال زیر را پیدا کنید.

۱ـ $y(x)-۰٫۵\int_۰^x \frac{y(s)ds}{۲+\sin\pi(s+x)}=۲-\sin\pi x$ در بازه $[۰\,,۱]$.

۲ـ $y(x)-\int_۰^x \frac{y(s)}{۱+x+y}ds=۱+x$ در بازه $[۰\,,۱]$.

۳ـ $y(x)-\int_۰^x \frac{y(s)}{۱+e^{-xs}}ds=\cos hx$ در بازه $[۰\,,۱٫۲]$.

۱۰ـ۱۰ـ روش جایگزینی هسته با یک هسته تجزیه شده[1]

معادله انتگرال فردهلم از نوع دوم را در نظر بگیرید:

$$y(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds=f(x) \qquad (۱۰-۸۹)$$

1) Degenerate

هسته $k(x,s)$ را تجزیه شدنی می‌خوانیم اگر بتوان آن را به صورت

$$K(x,s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(s) \qquad (۱۰\text{-}۹۰)$$

نشان داد که در آن توابع $\alpha_i(x)$ و $\beta_i(s)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ به صورت خطی در بازه $[a,b]$ مستقل هستند.

روش پیشنهاد شده ([۲]، [۱۳] و [۱۷] را ببینید) بر مبنای این است که معادله انتگرال (۱۰ـ۹۰) با یک هسته تجزیه شده با جواب دقیق برابری می‌کند. بطور تقریبی هسته $K(x,s)$ را با یک هسته تجزیه‌پذیر جایگزین می‌کنیم:

$$K(x,s) \approx \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(s) \qquad (۱۰\text{-}۹۱)$$

و برای معادله (۱۰-۹۰) جواب تقریبی را به صورت زیر حدس می‌زنیم:

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i(x) \qquad (۱۰\text{-}۹۲)$$

که در آن

$$c_i = \int_a^b \beta_i(s)y(s)ds. \qquad (۱۰\text{-}۹۳)$$

با جایگزینی عبارت (۱۰-۹۳) در (۱۰-۹۴) بدست می‌آوریم:

$$c_i = \int_a^b \beta_i(s) - f(s)ds + \lambda \int_a^b \beta_i(s) \sum_{i=1}^{n} c_j\alpha_j(s)ds \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

با معرفی رهنوشت

$$f_i = \int_a^b \beta_i(s)f(s)ds, \ A_{ij} = \int_a^b \alpha_j(s)\beta_i(s)ds \qquad (۱۰\text{-}۹۴)$$

داریم:

$$c_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} c_jA_{ij} = f_i \ \ (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (۱۰\text{-}۹۵)$$

ما یک دستگاه از معادلات جبری خطی بر حسب c_i بدست آوردیم. با حل این دستگاه جواب تقریبی معادله (۱۰-۹۰) را به صورت (۱۰-۹۳) می‌نویسیم. می‌توان یک قسمت از سری تیلور یا سری فوریه برای تابع $K(x,s)$ را به عنوان هسته تجزیه‌پذیر در نظر بگیریم. برای اطلاعات بیشتر به [۲] و[۱۷] رجوع کنید.

مثال ۱۰ـ۱۵ـ یک جواب تقریبی معادله

$$y(x) - \int_{0}^{1} \sin h(xs) y(s) ds = 1 - x^{2} \qquad (۱۰\text{-}۹۶)$$

را بیابید.

حل- هسته $K(x,s) = \sin h(xs)$ را با مجموع سه جمله اول سری تیلور جایگزین می‌کنیم:

$$\sin h(xs) \approx xs + \frac{(xs)^{3}}{3!} + \frac{(xs)^{5}}{5!}$$

پس ما یک جواب از معادله (۱۰-۹۷) را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$y(x) = 1 - x^{2} + c_{1}x + c_{2}x^{3} + c_{3}x^{5}$$

با قرار دادن $f(x) = 1 - x^{2}$، $\alpha_{1} = x$، $\alpha_{2} = x^{3}$، $\alpha_{3} = x^{5}$، $\beta_{1}(s) = s$، $\beta_{2}(s) = \frac{s^{3}}{3!}$ و $\beta_{3}(s) = \frac{s^{5}}{5!}$ ضرایب دستگاه (۱۰-۹۶) را با فرمول‌های (۱۰-۹۵) بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
&f_{1} = \int_{0}^{1} \beta_{1}(s) f(s) ds = \int_{0}^{1} (s - s^{3}) ds = \tfrac{1}{4},\\
&f_{2} = \int_{0}^{1} \beta_{2}(s) f(s) ds = \int_{0}^{1} \tfrac{1}{3!}(s^{3} - s^{5}) ds = \tfrac{1}{72},\\
&f_{3} = \int_{0}^{1} \beta_{3}(s) f(s) ds = \int_{0}^{1} \tfrac{1}{5!}(s^{5} - s^{7}) ds = \tfrac{1}{2880},\\
&A_{11} = \int_{0}^{1} s^{2} ds = \tfrac{1}{3},\quad A_{12} = \int_{0}^{1} s^{4} ds = \tfrac{1}{5},\quad A_{13} = \int_{0}^{1} s^{6} ds = \tfrac{1}{7},\\
&A_{21} = \int_{0}^{1} \tfrac{1}{3!} s^{4} ds = \tfrac{1}{30},\quad A_{22} = \int_{0}^{1} \tfrac{1}{3!} s^{6} ds = \tfrac{1}{42},\quad A_{23} = \int_{0}^{1} \tfrac{s^{8}}{3!} ds = \tfrac{1}{54},\\
&A_{31} = \int_{0}^{1} \tfrac{1}{5!} s^{6} ds = \tfrac{1}{840},\quad A_{32} = \int_{0}^{1} \tfrac{s^{8}}{5!} ds = \tfrac{1}{1080},\quad A_{33} = \int_{0}^{1} \tfrac{s^{10}}{5!} ds = \tfrac{1}{1320}.
\end{aligned}$$

در نتیجه دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
c_{1} &= \tfrac{1}{3}c_{1} + \tfrac{1}{5}c_{2} + \tfrac{1}{7}c_{3} + \tfrac{1}{4}\\
c_{2} &= \tfrac{1}{30}c_{1} + \tfrac{1}{42}c_{2} + \tfrac{1}{54}c_{3} + \tfrac{1}{72}\\
c_{3} &= \tfrac{1}{840}c_{1} + \tfrac{1}{1080}c_{2} + \tfrac{1}{1320}c_{3} + \tfrac{1}{2880}.
\end{aligned}$$

با حل این دستگاه توسط روش تکرار بدست می‌آوریم: $c_{1} = 0.3833$، $c_{2} = 0.0273$ و $c_{3} = 0.0008$.
از اینرو جواب تقریبی معادله (۱۰-۹۷) را می‌توان به صورت

$$y(x) = 1 - x^{2} + 0.3833x + 0.0273x^{3} + 0.0008x^{5}$$

نوشت.

مسائل

جواب‌های تقریبی معادلات انتگرال زیر را با جایگزینی هسته با مجموع سه جمله اول از سری تیلور بدست آورید.

۱. $y(x) - \int_{\circ}^{\text{۱}} \frac{sin(axz)}{s} y(s)ds = f(x), \qquad a = \text{۰/۶} + \text{۰/۲} \times k \qquad k = \text{۰}, \text{۱}, \text{۲}, \text{۳}.$

(الف) $f(x) = x$، (ب) $f(x) = \frac{\text{۱}}{\text{۲}\sqrt{x}}$.

۲. $y(x) - \int_{\circ}^{\text{۱}} (\text{۱} + s)(e^{axs} - \text{۱})y(s)ds = f(x), \qquad a_{\text{۱}} = \text{۰/۲} + \text{۰/۱}.k,$

$k = \text{۰}, \text{۱}, \text{۲}, \ d_{\text{۲}} = -\text{۰/۴} + \text{۰/۱}.n, \ n = \text{۰}, \text{۱}, \text{۲}.$

(الف) $f(x) = \frac{\text{۱}}{x}$، (ب) $f(x) = (\text{۱} - x)$، (ج) $f(x) = e^{-x}$

۳. $y(x) = \int_{\circ}^{\text{۱}} \frac{xs}{\sqrt{\text{۱} + axs}} y(s)ds = f(x), \qquad a_{\text{۱}} = \text{۰/۱},$

$a_{\text{۲}} = \text{۰/۲}, \quad a_{\text{۳}} = -\text{۰/۱}, \quad a_{\text{۴}} = -\text{۰/۲}.$

(الف) $f(x) = \text{۱} + x$، (ب) $f(x) = e^{-x}$، (پ) $f(x) = \sqrt{x}$.