محاسبات عددی

مریم واعظ ترشیزی

بهار ۱۴۰۰

دانشکده مهندسی کامپیوتر

تمرین سری چهارم

سوال اول

الف)

xi	۰/۴	۰/۸	۱/۲	۱/۶
$f(xi)$	۲	۱	۰/۷۵	۰/۲۵

$$f'(x_i = 1) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} = \frac{f(1.2) - f(0.8)+}{2 \times 0.2} = \frac{0.75 - 1}{0.4} = -0.0652$$

با خطای $O(0.04)$

$$f''(x_i = 1.2) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} = \frac{f(1.6) - 2f(x_{1.2}) + f(0.8)}{h^2} = \frac{0.25 - 2 \times 0.75 + 1}{0.4^2}$$
$$= -1.562$$

با خطای $O(0.16)$

سوال دوم

الف)

$$\int_0^6 x \,.\, ln(x)dx \simeq h(2) = 2\big(f(0+1) + f(2+1) + f(4+1)\big) = 2\big(f(1) + f(3) + f(5)\big) = 2\big(0 + 3.295 + 8.047\big) = 22.684$$

ب)

$$f^{(1)}(x) = ln(x) + 1 \Rightarrow f^{(2)}(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f^{(3)}(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f^{(4)}(x) = \frac{2}{x^3}$$
$$m_4 = \max(\frac{2}{x^3}\Big|_{x\in[2,6]}) = \frac{2}{x^3}\Big|_{x=2} = \frac{1}{4}$$
$$h = \sqrt[4]{\frac{180\epsilon}{(b-a)m_4}} = \sqrt[4]{\frac{180 \times 0.004}{(6-2)\frac{1}{4}}} = 0.9211 \Rightarrow n = \frac{4}{0.9211} = 4.3426$$

پس با توجه به آن که در روش سیمپسون باید تعداد بر ۳ بخش‌پذیر باشد، n را ۶ در نظر می‌گیریم.

سوال سوم

الف)

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} = \frac{\frac{-1}{2}f(x_{i+2}) + \frac{4}{2}f(x_{i+1})\frac{-3}{2}f(x_i)}{h}$$
$$\Rightarrow \frac{\frac{-1}{2}f(x_{i+2}) + \frac{4}{2}f(x_{i+1})\frac{-3}{2}f(x_i)}{h} = \frac{a_3 f(a+2h) + a_2 f(a+h) + a_1 f(a)}{h}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_3 = \frac{-1}{2} \\ a_2 = \frac{4}{2} = 2 \\ a_1 = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

ب)

مقدار بدست آمده از رابطه قسمت الف:

$$f(x) = x^2 + 3x + 2 \Rightarrow f'(x_i) = \frac{-f(a+2h) + 4f(a+h) - 3f(a)}{2h}$$

$$f'(a=1) = \frac{-f(1.2) + 4f(1.1) - 3f(1)}{0.2} = \frac{-7.04 + 4 \times 6.51 - 3 \times 6}{0.2} = 5$$

مقدار دقیق:

$$f(x) = x^2 + 3x + 2 \Rightarrow f'(x) = 2x + 3\Big|_{x=1} = 5$$

بر اساس مقادیر بالا، خطا صفر است.

سوال چهارم

$$T(h) = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n]$$

$$S_{\frac{1}{3}}(h) = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n]$$

$$\begin{aligned}
\frac{4T(\frac{h}{2}) - T(h)}{3} &= \frac{4\left(\frac{h}{4}[f_0 + 2f_{0.5} + 2f_1 + \ldots + 2f_{n-0.5} + f_n]\right) - \left(\frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n]\right)}{3} \\
&= \frac{\left(h[f_0 + 2f_{0.5} + 2f_1 + \ldots + 2f_{n-0.5} + f_n]\right) - \left(\frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n]\right)}{3} \\
&= \frac{\left(hf_0 + 2hf_{0.5} + 2hf_1 + \ldots + 2hf_{n-1} + 2hf_{n-0.5} + hf_n\right) - \left(\frac{h}{2}f_0 + hf_1 + \ldots + hf_{n-1} + \frac{h}{2}f_n\right)}{3} \\
&= \frac{\frac{h}{2}f_0 + 2hf_{0.5} + hf_1 + \ldots + hf_{n-1} + 2hf_{n-0.5} + \frac{h}{2}f_n}{3} \\
&= \frac{hf_0 + 4hf_{0.5} + 2hf_1 + \ldots + 2hf_{n-1} + 4hf_{n-0.5} + hf_n}{3 \times 2} \\
&= \frac{h\left(f_0 + 4f_{0.5} + 2f_1 + \ldots + 2f_{n-1} + 4f_{n-0.5} + f_n\right)}{3 \times 2} \\
&= \frac{h}{6}[f_0 + 4f_{0.5} + 2f_1 + \ldots + 2f_{n-1} + 4f_{n-0.5} + f_n] \\
&= S_{\frac{1}{3}}(h/2)
\end{aligned}$$

سوال پنجم

مقدار واقعی: $I(h) = F_{i+1} - F_i = \int_a^{a+h} f(x)dx = \int_a^{a+h} x\ln(x)dx$

مقدار تقریبی: $I(h) \simeq hf_{i+1} - \frac{h^2}{2} f_i'$

$$F_{i+1} - F_i = hF_i' + \frac{h^2}{2!}F_i'' + \frac{h^3}{3!}F_i''' + \frac{h^4}{4!}F_i^{(4)} + \frac{h^5}{5!}F_i^{(5)} + \dots$$

$$\begin{aligned} E &= (F_{i+1} - F_i) - hf_{i+1} + \frac{h^2}{2}f_i' \quad = hF_i' + \frac{h^2}{2!}F_i'' + \frac{h^3}{3!}F_i''' + \frac{h^4}{4!}F_i^{(4)} + \frac{h^5}{5!}F_i^{(5)} + \dots - hf_{i+1} + \frac{h^2}{2}f_i' \\ &= hf_i + \frac{h^2}{2!}f_i' + \frac{h^3}{3!}f_i'' + \frac{h^4}{4!}f_i^{(3)} + \frac{h^5}{5!}f_i^{(4)} + \dots - hf_{i+1} + \frac{h^2}{2}f_i' \\ &= hf(a) + \frac{h^2}{2!}f'(a) + \frac{h^3}{3!}f''(a) + \frac{h^4}{4!}f^{(3)}(a) + \frac{h^5}{5!}f^{(4)}(a) + \dots - hf(a+h) + \frac{h^2}{2}f'(a) \end{aligned}$$

سوال ششم

از روش سیمپسون 1/3 استفاده می‌کنیم. با درنظر گرفتن روابط زیر داریم:

$$f(x) = \frac{x}{\sin(x)}$$

$$h_i = \frac{(b-a)}{2^i}$$

$$h_0 = 0.5 \Rightarrow n_0 = \frac{0.5}{0.5} = 1 \Rightarrow S_{\frac{1}{3}}(h_0) = \frac{h_0}{3}[f(0) + f(0.5)] = \frac{0.5}{3}[1 + 1.0429] = 0.3403$$

$$h_1 = 0.25 \Rightarrow n_1 = \frac{0.5}{0.25} = 2 \Rightarrow S_{\frac{1}{3}}(h_1) = \frac{h_1}{3}[f(0) + 4f(0.25) + f(0.5)] = \frac{0.25}{3}[1 + 4 \times 1.0104 + 1.0429] = 0.5069$$

$$h_2 = 0.125 \Rightarrow n_2 = \frac{0.5}{0.125} = 4 \Rightarrow S_{\frac{1}{3}}(h_2) = \frac{h_2}{3}[f(0) + 4f(0.125) + 2f(0.25) + 4f(0.375) + f(0.5)] = \frac{0.125}{3}[1 + 4 \times 1.002 + 2 \times 1.0104 + 4 \times 1.0178 + 1.0429] = 0.5059$$

$$h_3 = 0.125 \Rightarrow n_3 = 8 \Rightarrow S_{\frac{1}{3}}(h_3) = \frac{h_3}{3}[f(0) + 4f(0.0625) + 2f(0.125) + 4f(0.1875) + 2f(0.25) + 4f(0.3125) + 2f(0.375) + 4f(0.4375) + f(0.5)] = 0.5071$$

$$S_{\frac{1}{3}}(h) = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n]$$

$$R[0][i] = S_{\frac{1}{3}}(h)$$

$$R[j][i] = \frac{4^i * R[j-1][i] - R[j-1][i-1]}{4^i - 1}$$

i	h_i	Trapezoidal Rule	1st level	2st level	3st level
0	0.5	0.3403			
1	0.25	0.5069	$\frac{4 \times 0.5069 - 0.3403}{4-1} = 0.5624$		
2	0.125	0.5059	$\frac{4 \times 0.5059 - 0.5069}{4-1} = 0.5055$	$\frac{4^2 \times 0.5055 - 0.5624}{4^2-1} = 0.5017$	
3	0.0625	0.5071	$\frac{4 \times 0.5071 - 0.5059}{4-1} = 0.5075$	$\frac{4^2 \times 0.5075 - 0.5055}{4^2-1} = 0.5076$	$\frac{4^3 \times 0.5076 - 0.5017}{4^3-1} = 0.5076$

سوال هفتم

کد روبه رو، برنامه خواسته‌شده را اجرا می نماید. مطابق روبه‌رو تابع f وظیفه تبدیل استرینگ داده‌شده به فرمت تابع را به‌عهده دارد. سه تابعی که در ادامه تعریف شده‌اند، هر یک اجرای یکی از ۳ روش خواسته‌شده را پیاده‌سازی می‌کنند. نحوه طراحی این سه تابع بر اساس فرمول‌های این روش هاست. در انتها برای بازه ۱ تا ۳ برای n های ۱ تا ۱۰۰ هر سه روش اعمال و نتیجه نمایش داده می‌شود

```python
from sympy import *
import matplotlib.pyplot as plt

def f(a, function):
    x = Symbol("x")
    x = a
    return eval(function)


def Trapezoidal(a, b, n, function):
    answer = 0
    h = (float(b - a) / n)
    for i in range(n):
        answer += 2 * float(f(a + i * h, function))
    answer -= float(f(a, function)) + float(f(b, function))
    answer *= (float(h) / 2)
    return answer


def Simpton1_3(a, b, n, function):
    answer = 0
    h = (float(b - a) / n)
    for i in range(n):
        if i == 0 or i == n:
            answer += float(f(a + i * h, function))
        elif i % 2 != 0:
            answer += 4 * float(f(a + i * h, function))
        else:
            answer += 2 * float(f(a + i * h, function))
    answer *= (float(h) / 3)
    return answer


def Simpton3_8(a, b, n, function):
    answer = float(f(a, function)) + float(f(b, function))
    h = (float(b - a) / n)
    for i in range(1, n):
        if i % 3 == 0:
            answer += 2 * float(f(a + i * h, function))
        else:
            answer += 3 * float(f(a + i * h, function))
    answer *= (float(3 * h) / 8)
    return answer

n = int(input("n = "))
a = int(input("a = "))
b = int(input("b = "))
print("Trapezoidal = " , Trapezoidal(a, b, n, "2 + ln(x)**2 + 2*ln(x)"))
print("Simpton 1/3 = " , Simpton1_3(a, b, n, "2 + ln(x)**2 + 2*ln(x)"))
print("Simpton 3/8 = " , Simpton3_8(a, b, n, "2 + ln(x)**2 + 2*ln(x)"))


a = int(input("a = "))
b = int(input("b = "))

Trapezoidal_Answers = []
Simpton1_3Answers = []
Simpton3_8Answers = []
All_N = []
for i in range(1, 101):
    if i % 6 == 0:
        All_N.append(i)
        Trapezoidal_Answers.append(Trapezoidal(a, b, i, "2 + ln(x)**2 + 2*ln(x)"))
        Simpton1_3Answers.append(Simpton1_3(a, b, i, "2 + ln(x)**2 + 2*ln(x)"))
        Simpton3_8Answers.append(Simpton3_8(a, b, i, "2 + ln(x)**2 + 2*ln(x)"))

plt.plot(All_N, Trapezoidal_Answers)
plt.plot(All_N, Simpton1_3Answers)
plt.plot(All_N, Simpton3_8Answers)
plt.show()
```

```
n = 10
a = 1
b = 8
Trapezoidal =  41.20378613290577
Simpton 1/3 =  46.14768050937414
Simpton 3/8 =  46.8062161299451
```

تصویر زیر نمایش سه روش در بازه ۱ تا ۱۰ را نشان می دهد: