۱

الف)

- h = 0.1

$$\int_0^1 f(x)dx = 0.1[f(0) + f(0.1) + f(0.2) + f(0.3) + f(0.4) + f(0.5) + f(0.6) + f(0.7) + f(0.8) + f(0.9)]$$

$$= 0.1(0 - 0.02303 - 0.06438 - 0.10836 - 0.14661 - 0.17329 - 0.1839 - 0.17477 - 0.14281 - 0.08534) = -0.11025$$

- h = 0.25

$$\int_0^1 f(x)dx = 0.25[f(0) + f(0.25) + f(0.5) + f(0.75)]$$
$$= 0.25(0 - 0.08664 - 0.17329 - 0.16182) = -0.10544$$

- h = 0.5

$$\int_0^1 f(x)dx = 0.5[f(0) + f(0.5)]$$
$$= 0.5(0 - 0.17329) = -0.08665$$

ب)

$$\int_0^1 x^2 ln(x)dx = -\frac{1}{9} = -0.111111$$

- i = 1

$$\int_0^1 x^2 ln(x)dx = \frac{1}{3}[f(0) + f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3})] = -0.10075 \Rightarrow E > 0.01$$

- i = 2

$$\int_0^1 x^2 ln(x)dx = \frac{1}{9}[f(0) + f(\frac{1}{9}) + \cdots + f(\frac{8}{9})] = -0.11004 \Rightarrow E = 0.0011 < 0.01$$

بنابراین به ازای $i = 2 \Rightarrow h = \frac{1}{9}$، خطا کمتر از 0.01 می‌شود.

مسئله‌ی ۲.

$$
\begin{aligned}
T(h) &= \frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)+2\left(f(a+h)+f(a+2h)+\cdots f(b-h)\right)\right)\\
&\Rightarrow f(a+h)+f(a+2h)+\cdots f(b-h) = \frac{1}{h}T(h)-\frac{1}{2}(f(a)+f(b))\\
T(\frac{h}{2}) &= \frac{h}{4}\left(f(a)+f(b)+2\left(f(a+\frac{h}{2})+f(a+h)+\cdots f(b-\frac{h}{2})\right)\right)\\
&\Rightarrow f(a+\frac{h}{2})+f(a+h)+\cdots f(b-\frac{h}{2}) = \frac{2}{h}T(\frac{h}{2})-\frac{1}{2}(f(a)+f(b))\\
S_{\frac{1}{3}}(\frac{h}{2}) &= \frac{h}{6}\left(f(a)+f(b)+4\left(f(a+\frac{h}{2})+f(a+h)+\cdots f(b-\frac{h}{2})\right)-2\left(f(a+h)+f(a+2h)+\cdots f(b-h)\right)\right)\\
&= \frac{h}{6}\left(f(a)+f(b)+4\left(\frac{2}{h}T(\frac{h}{2})-\frac{1}{2}(f(a)+f(b))\right)-2\left(\frac{1}{h}T(h)-\frac{1}{2}(f(a)+f(b))\right)\right)\\
&= \frac{h}{6}\left(\frac{8}{h}T(\frac{h}{2})-\frac{2}{h}T(h)\right)\\
&= \frac{4}{3}T(\frac{h}{2})-\frac{1}{3}T(h)
\end{aligned}
$$

سوال ۳

اگر دنباله متساوی الفاصله x_i را با فاصله h در نظر بگیریم:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}f''''(x_i) + \mathcal{O}(h^5)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h^2}f(x_{i+1}) = \frac{1}{h^2}f(x_i) + \frac{1}{h}f'(x_i) + \frac{1}{2!}f''(x_i) + \frac{h}{3!}f'''(x_i) + \frac{h^2}{4!}f''''(x_i) + \mathcal{O}(h^3)$$

همچنین:

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) - \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}f''''(x_i) + \mathcal{O}(h^5)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h^2}f(x_{i-1}) = \frac{1}{h^2}f(x_i) - \frac{1}{h}f'(x_i) + \frac{1}{2!}f''(x_i) - \frac{h}{3!}f'''(x_i) + \frac{h^2}{4!}f''''(x_i) + \mathcal{O}(h^3)$$

با جمع دو عبارت بدست آمده خواهیم داشت:

$$\frac{1}{h^2}f(x_{i+1}) + \frac{1}{h^2}f(x_{i-1}) = \frac{2}{h^2}f(x_i) + f''(x_i) + \frac{h^2}{12}f''''(x_i) + \mathcal{O}(h^3)$$

کافیست که $f''''(x_i)$ را با تقریب $\mathcal{O}(h)$ داشته باشیم. که این هم از داخل اسلایدها قبلا حساب شده است:

$$f''''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^4} + \mathcal{O}(h^2)$$

پس با ترکیب این معادلات خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f''(x_i) = &\frac{f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) - 2f(x_i)}{h^2} \\ &- \frac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12h^2} \\ &+ \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f''(x_i) = \boxed{\frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{12h^2}}$$

سوال ۴

برای سیمپسون ($\frac{1}{3}$) داریم:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_{\frac{1}{3}}(h) = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + ... + 4f_{n-1} + f_n)$$

پس جواب میشود:

$S_{\frac{1}{3}}(h) =$

$\frac{\pi}{36}((0) + 4(0.25882) + 2(0.5) + 4(0.70771) + 2(0.86603) + 4(0.96593) + (1))$

$= \boxed{1.0002}$

برای سیمپسون ($\frac{3}{8}$) داریم:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_{\frac{3}{8}}(h) = \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + ... + 3f_{n-1} + f_n)$$

پس جواب میشود:

$$S_{\frac{3}{8}}(h) =$$

$$\frac{\pi}{32}((0) + 3(0.25882) + 3(0.5) + 2(0.70771) + 3(0.86603) + 3(0.96593) + (1))$$

$$= \boxed{1.0001}$$

برای روش ذوزنقه‌ای داریم:

$$\int_a^b f(x)dx \approx T(h) = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + ... + f_n)$$

پس جواب میشود:

$$T(h) =$$

$$\frac{\pi}{24}((0) + 2(0.25882) + 2(0.5) + 2(0.70771) + 2(0.86603) + 2(0.96593) + (1))$$

$$= \boxed{0.9944}$$

سوال ۵

اول انتگرال را به بازه‌ی $(-1, 1)$ میبریم. قراردهید $u = 2x - 3$ پس داریم $\frac{du}{dx} = 2$

$$\int_1^2 \frac{sin^2(x)}{x} dx = \int_{-1}^1 \frac{sin^2(\frac{u+3}{2})}{u+3} du$$

حال برای گاوس ۳ نقطه‌ای ضرایب و وزن‌ها را بدست میاوریم:

$$\int_{-1}^1 1dx = w_1 + w_2 + w_3$$

$$\int_{-1}^1 xdx = w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3$$

$$\int_{-1}^1 x^2dx = w_1x_1^2 + w_2x_2^2 + w_3x_3^2$$

$$\int_{-1}^1 x^3dx = w_1x_1^3 + w_2x_2^3 + w_3x_3^3$$

$$\int_{-1}^1 x^4dx = w_1x_1^4 + w_2x_2^4 + w_3x_3^4$$

$$\int_{-1}^1 x^5dx = w_1x_1^5 + w_2x_2^5 + w_3x_3^5$$

با حل دستگاه فوق ضرایب و وزن‌ها میشوند:

$$\begin{cases} w_1 = \frac{5}{9} \\ w_2 = \frac{8}{9} \\ w_3 = \frac{5}{9} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}} \end{cases}$$

پس با جایگذاری خواهیم داشت:

$$\int_{-1}^{1} \frac{sin^2(\frac{u+3}{2})}{u+3} du$$

$$= \boxed{0.6285}$$

همچنین برای گاوس ۲ نقطه‌ای داریم:

$$\begin{cases} w_1 = 1 \\ w_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

پس با جایگذاری خواهیم داشت:

$$\int_{-1}^{1} \frac{sin^2(\frac{u+3}{2})}{u+3} du$$

$$= \boxed{0.6281}$$

مقدار حقیقی برابر 0.6285 میباشد که میبینیم روش سه نقطه‌ای دقیقتر عمل کرده است.