پاسخنامه‌ی تمرین پنجم

سوال ۱:

الف:

طبق روش Euler داریم:

$$y^*_{i+1} = y_i + hy_i^{'}$$

$$y^*(0.5) = y(0) + 0.5y_0^{'} = 0 + 0 = 0 \Rightarrow y(0.5) = 0 + 0.25(0 + 2.24) = 0.56$$

$$y^*(1) = 0.56 + 0.5(1.12) = 1.12 \Rightarrow y(1) = 0.56 + 0.25(1.12 + 17.84) = 5.3$$

ب:

طبق روش میانی داریم:

$$k_1 = hy_i^{'}$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$

$$y_{i+1} = y_i + k_2$$

$$\begin{cases} k_1 = 0.5 \times y_0^{'} = 0.5 \times 2 = 1 \\ k_2 = 0.5 \times (1 + (2.25 - 1.5)^2) = 0.78125 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(2.5) = 1 + 0.78125 = 1.78125$$

$$\begin{cases} k_1 = 0.5 \times y_1^{'} = 0.75 \\ k_2 = 0.5 \times (1 + (2.75 - 1.45386)^2) = 0.67 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(3) = 1.78125 + 0.67 = 2.45$$

ج:

طبق روش هیون داریم:

$$k_1 = hy_i^{'}$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}k_1)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_2)$$

$$\begin{cases} k_1 = 0.5 \times y_0^{'} = 0.5 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ k_2 = 0.5 \times f(1.333, 2.222) = 0.5 \times 0.724 = 0.362 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(1.5) = 2 + \frac{1}{4}(\frac{1}{3} + 3 \times 0.362) = 2.355$$

$$\begin{cases} k_1 = 0.5 \times 0.745 = 0.3725 \\ k_2 = 0.5 \times f(1.83, 2.60) = 0.5 \times 0.83 = 0.405 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2.355 + \frac{1}{4}(0.3725 + 3 \times 0.405) = 2.75$$

سوال ۲:

دقت کنید طبق روش Euler داریم:

$$y_{i+1} = y_i + hy_i^{'}$$

حال با استفاده از استقرا اثبات می‌کنیم:

$$y_n = (1 + h\lambda)^n$$

حالت پایه:

$$n = 0 \Rightarrow y_0 = 1$$

$$n = 1 \Rightarrow y_1 = 1 + \lambda h$$

گام استقرا:

$$y_{n+1} = y_n + hy_n^{'} = (1+\lambda h)^n + \lambda h(1+\lambda h)^n = (1+\lambda h)^n(1+\lambda h) = (1+\lambda h)^{n+1}$$

حال دقت کنید طبق صورت سوال می‌توانیم بنویسیم:

$$-2 < \lambda h < 0 \Rightarrow -1 < 1+\lambda h < 1 \Rightarrow -1 < (1+\lambda h)^n < 1$$

در نهایت با حد دادن داریم:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\lambda h)^n = 0$$

سوال ۳:

ابتدا لازم است معادله دیفرانسیل داده شده را به یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل تبدیل کنیم:

$$u_1(x) = y(x), \quad u_2(x) = y^{'}(x) \Rightarrow \begin{cases} u_1^{'}(x) = u_2(x) \\ u_2^{'}(x) = 2u_2(x) - 2u_1(x) + e^{2x}sinx \\ u_1(0) = -0.4 \\ u_2(0) = -0.6 \end{cases}$$

حال طبق روش رانگ-کوتای مرتبه چهارم داریم:

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(k_{f_1} + 2k_{f_2} + 2k_{f_3} + k_{f_4}) \\ z_{k+1} = z_k + \frac{h}{6}(k_{g_1} + 2k_{g_2} + 2k_{g_3} + k_{g_4}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_{f_1} = f(x_k, y_k, z_k) \\ k_{f_2} = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_{f_1}, z_k + \frac{h}{2}k_{g_1}) \\ k_{f_3} = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_{f_2}, z_k + \frac{h}{2}k_{g_2}) \\ k_{f_4} = f(x_k + h, y_k + hk_{f_3}, z_k + hk_{g_3}) \end{cases} \qquad \begin{cases} k_{g_1} = g(x_k, y_k, z_k) \\ k_{g_2} = g(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_{f_1}, z_k + \frac{h}{2}k_{g_1}) \\ k_{g_3} = g(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_{f_2}, z_k + \frac{h}{2}k_{g_2}) \\ k_{g_4} = g(x_k + h, y_k + hk_{f_3}, z_k + hk_{g_3}) \end{cases}$$

گام اول:

$$\begin{cases} k_{f_1} = f(0, -0.4, -0.6) = -0.6 \\ k_{f_2} = f(0.05, -0.43, -0.62) = -0.62 \\ k_{f_3} = f(0.05, -0.46, -0.61) = -0.61 \\ k_{f_4} = f(0.1, -0.46, -0.62) = -0.62 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_{g_1} = g(0, -0.4, -0.6) = -0.4 \\ k_{g_2} = g(0.05, -0.43, -0.62) = -0.32 \\ k_{g_3} = g(0.05, -0.46, -0.61) = -0.24 \\ k_{g_4} = g(0.1, -0.46, -0.62) = -0.2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(0.1) = -0.4 + \frac{0.1}{6}(-0.6 - 1.24 - 1.22 - 0.62) = -0.46 \\ y^{'}(0.1) = -0.6 + \frac{0.1}{6}(-0.4 - 0.64 - 0.48 - 0.2) = -0.63 \end{cases}$$

گام دوم:

$$\begin{cases} k_{f_1} = f(0.1, -0.46, -0.63) = -0.63 \\ k_{f_2} = f(0.15, -0.49, -0.64) = -0.64 \\ k_{f_3} = f(0.15, -0.49, -0.63) = -0.63 \\ k_{f_4} = f(0.2, -0.52, -0.67) = -0.67 \end{cases} \quad \begin{cases} k_{g_1} = g(0.1, -0.46, -0.63) = -0.22 \\ k_{g_2} = g(0.15, -0.49, -0.64) = -0.01 \\ k_{g_3} = g(0.15, -0.49, -0.63) = -0.08 \\ k_{g_4} = g(0.2, -0.52, -0.67) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(0.2) = -0.46 + \frac{0.1}{6}(-0.63 - 1.28 - 1.26 - 0.67) = -0.524 \\ y^{'}(0.2) = -0.63 + \frac{0.1}{6}(-0.22 - 0.02 - 0.16) = -0.637 \end{cases}$$

سوال ۴:

ابتدا معادله‌ی داده شده را به صورت مقابل بازنویسی می‌کنیم:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + ahy^{'}(x_i) + bhy^{'}(x_{i-1}) + chy^{'}(x_{i-2})$$

حال بسط تیلور 2 را حول نقطه‌ی x_i طرف معادله را می‌نویسیم و ضرایب را باهم برابر قرار می‌دهیم:

$$lhs = y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy^{'}(x_i) + \frac{1}{2}h^2y^{''}(x_i) + \frac{1}{6}h^3y^{'''}(x_i) + \mathcal{O}(h^4)$$

$$rhs = y(x_i) + ahy^{'}(x_i) + bh(y^{'}(x_i) - hy^{''}(x_i) + \frac{1}{2}h^2y^{'''}(x_i) + \mathcal{O}(h^3))$$

$$+ch(y^{'}(x_i) - 2hy^{''}(x_i) + 2h^2y^{'''}(x_i) + \mathcal{O}(h^3))$$

$$\Rightarrow rhs = y(x_i) + (a+b+c)hy^{'}(x_i) + (-b-2c)h^2y^{''}(x_i) + (\frac{1}{2}b + 2c)h^3y^{'''}(x_i) + \mathcal{O}(h^4)$$

حال با برابر قرار دادن ضرایب داریم:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ b + 2c = -\frac{1}{2} \\ b + 4c = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{23}{12} \\ b = -\frac{16}{12} \\ c = \frac{5}{12} \end{cases}$$

با قرار دادن ضرایب بالا در رابطه‌ی اولیه داریم:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{12}[23y^{'}(x_i) - 16y^{'}(x_{i-1}) + 5y^{'}(x_{i-1})]$$

$$\Rightarrow y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{12}[23f(x_i, y(x_i)) - 16f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) + 5f(x_{i-2}, y(x_{i-2}))]$$

سوال ۵:

برای استفاده از روش preidct-corrector مرتبه‌ی سوم، لازم است مقادیر $y(0.2)$ و $y(0.4)$ را بدست آوریم.

$$\begin{cases} k_1 = 0.2 \\ k_2 = 0.2(0.1 + 1.1) = 0.24 \\ k_3 = 0.2(0.2 + 1 + 0.48 - 0.2) = 0.296 \\ y(0.2) = 1 + \frac{1}{6}(0.2 + 0.96 + 0.296) = 1.243 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = 0.2(0.2 + 1.243) = 0.2886 \\ k_2 = 0.2(0.3 + 1.243 + 0.1443) = 0.33746 \\ k_3 = 0.2(0.4 + 1.243 + 0.67492 - 0.2886) = 0.405864 \\ y(0.4) = 1.243 + \frac{1}{6}(0.2886 + 1.34984 + 0.405864) = 1.584 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^*(0.6) = 1.584 + \frac{0.2}{12}(23 * 1.984 - 16 * 1.443 + 5 * 1) = 2.043 \\ y(0.6) = 1.584 + \frac{0.2}{12}(5 * 2.643 + 8 * 1.984 - 1.443) = 2.045 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^*(0.8) = 2.045 + \frac{0.2}{12}(23 * 2.645 - 16 * 1.984 + 5 * 1.443) = 2.65 \\ y(0.8) = 2.045 + \frac{0.2}{12}(5 * 3.45 + 8 * 2.645 - 1.984) = 2.6521 \end{cases}$$

سوال ۶:

طبق روش رانگ-کوتا مرتبه‌ی چهارم داریم:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

که هرکدام از ضرایب بالا به صورت مقابل بدست می‌آیند:

$$k_1 = hf(x_i, y_i) = h\lambda y_i$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}) = h\lambda(y_i + \frac{h\lambda y_i}{2})$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}) = h\lambda(y_i + \frac{h\lambda y_i}{2} + \frac{h^2\lambda^2 y_i}{4})$$

$$k_4 = hf(x_i + h_i, y_i + k_3) = h\lambda(y_i + y_i h\lambda + \frac{h^2\lambda^2 y_i}{2} + \frac{h^3\lambda^3 y_i}{4})$$

حال تنها کافی است ضرایب بالا را در رابطه‌ی رانگ-کوتا قرار دهیم:

$$k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4 = h\lambda y_i + 2h\lambda y_i + h^2\lambda^2 y_i + 2h\lambda y_i + h^2\lambda^2 y_i + \frac{h^3\lambda^3 y_i}{2}$$

$$+h\lambda y_i + h^2\lambda^2 y_i + \frac{h^3\lambda^3 y_i}{2} + \frac{h^4\lambda^4 y_i}{4} = 6y_i\lambda h + 3y_i\lambda^2 h^2 + y_i\lambda^3 h^3 + \frac{h^4\lambda^4 y_i}{4}$$

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + y_i\lambda h + \frac{y_i\lambda^2 h^2}{2} + \frac{h^3\lambda^3 y_i}{6} + \frac{h^4\lambda^4 y_i}{24}$$

با فاکتور گرفتن از y_i داریم:

$$y_{i+1} = y_i(1 + \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2 + \frac{1}{6}(\lambda h)^3 + \frac{1}{24}(\lambda h)^4)$$