محاسبات عددی **سری شمارهٔ ۴**

نیم‌سال اول ۱۴۰۱-۱۴۰۲ **انتشار پاسخنامه: بهمن ۱۶**

سوال ۱.

$$f(x) = a_۰ + a_۱(x-x_۰) + a_۲(x-x_۰)(x-x_۱) + a_۳(x-x_۰)(x-x_۱)(x-x_۲)$$

$$a_۰ = f(x_۰) = f(۰) = ۰$$

$$a_۱ = \frac{f(x_۱)-a_۰}{x_۱-x_۰} = \frac{y-۰}{۰/۵-۰} = ۲y$$

$$a_۲ = \frac{f(x_۲)-a_۰-(x_۲-x_۰)a_۱}{(x_۲-x_۰)(x_۲-x_۱)} = \frac{۳-۰-۲y(۱-۰)}{(۱-۰)(۱-۰/۵)} = ۶-۴y$$

$$a_۳ = \frac{f(x_۳)-a_۰-(x_۳-x_۰)a_۱-(x_۳-x_۰)(x_۳-x_۱)a_۲}{(x_۳-x_۰)(x_۳-x_۱)(x_۳-x_۲)} = \frac{۲-۰-۲y(۲-۰)-(۶-۴y)(۲-۰)(۲-۰/۵)}{(۲-۰)(۲-۰/۵)(۲-۱)} = ۳$$

$$= \frac{۲-۴y-۱۸+۱۲y}{۳} = \frac{۸y-۱۶}{۳} \rightarrow y = ۴/۲۵$$

سوال ۲.

$$p_{۰,۱,۲,۳}(x) = \frac{(x-x_۳)p_{۰,۱,۲}(x)-(x-x_۰)p_{۱,۲,۳}(x)}{x_۰-x_۳}$$

$$p_{۰,۱,۲}(x) = \frac{(x-x_۲)p_{۰,۱}(x)-(x-x_۱)p_{۰,۲}(x)}{x_۱-x_۲}$$

$$x_۰ = ۰, x_۱ = ۱, x_۲ = ۲, x_۳ = ۳$$
$$p_{۰,۱}(x) = ۲x+۱ \rightarrow p_{۰,۱}(۲/۵) = ۲*۲/۵+۱ = ۶$$
$$p_{۰,۲}(x) = x+۱ \rightarrow p_{۰,۲}(۲/۵) = ۲/۵+۱ = ۳/۵$$

$$\rightarrow p_{۰,۱,۲}(۲/۵) = \frac{(۲/۵-۲)۶-(۲/۵-۱)۳/۵}{۱-۲} = \frac{۳-۵/۲۵}{-۱} = ۲/۲۵$$

$$\rightarrow p_{۰,۱,۲,۳}(۲/۵) = \frac{(۲/۵-۳)*۲/۲۵-(۲/۵-۰)۳}{۰-۳} = \frac{-۸/۶۲۵}{-۳} = ۲/۸۷۵$$

سوال ۳. با استفاده از استقرا ثابت می کنیم:

پایه استقرا:

$$f[x_۰] = \frac{۱}{x_۰}$$

فرض می کنیم:

$$k : f[x_۰, ..., x_k] = \frac{(-۱)^k}{x_۰...x_k} \to f[x_۱, ..., x_{k+۱}] = \frac{(-۱)^k}{x_۱...x_{k+۱}}$$

$$f[x_۰, ..., x_{k+۱}] = \frac{f[x_۱,...,x_{k+۱}] - f[x_۰,...,x_k]}{x_{k+۱} - x_۰} = \frac{\frac{(-۱)^k x_۰}{x_۰,...,x_{k+۱}} - \frac{(-۱)^k x_{k+۱}}{x_۰...x_{k+۱}}}{x_{k+۱} - x_۰} = \frac{-۱(-۱)^k}{x_۰,...,x_{k+۱}} = \frac{(-۱)^{k+۱}}{x_۰...x_{k+۱}}$$

$$\to f[x_۰, ..., x_{k+۱}] = \frac{(-۱)^{k+۱}}{x_۰...x_{k+۱}}$$

سوال ۴.

$$p_n(x) = f[x_۰] + (x - x_۰)f[x_۰ + x_۱] + (x - x_۰)(x - x_۱)f[x_۰, x_۱, x_۲]$$

$$f[x_۰] = f(x_۰) = ۱, f[x_۰, x_۱] = \frac{f(x_۱) - f(x_۰)}{x_۱ - x_۰} = \frac{۲۷ - ۱}{-۳ - (۱)} = -۶/۵$$

$$f[x_۱, x_۲] = \frac{f(x_۲) - f(x_۱)}{x_۲ - x_۱} = \frac{۶۴ - ۲۷}{۴ - (-۳)} = \frac{۳۷}{۷}$$

$$f[x_۰, x_۱, x_۲] = \frac{f[x_۱, x_۲] - f[x_۰, x_۱]}{x_۲ - x_۱} = \frac{\frac{۳۷}{۷} - (-۶/۵)}{۴ - ۱} = \frac{۵۵}{۱۴}$$

$$\to p_n(x) = f[x_۰] + (x - x_۱)f[x_۰, x_۱] + (x - x_۰)(x - x_۱)f[x_۰, x_۱, x_۲]$$
$$= ۱ + (x - ۱)(-۶/۵) + (x - ۱)(x - ۳)\frac{۵۵}{۱۴}$$

$$\to f(۱/۵) \simeq ۱ + (۱/۵ - ۱)(-۶/۵) + (۱/۵ - ۱)(۱/۵ - ۳)\frac{۵۵}{۱۴} \simeq ۶/۵۸۹۳$$

سوال ۵.

می توان با استفاده از دو سری تیلور سه جمله ای رابطه را بازنویسی کرد:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - ۲f(x)}{h^۲} + E$$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^۲}{۲!}f''x + \frac{h^۳}{۳!}f^{(۳)}x + R_۳^+$$
$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^۲}{۲!}f''x - \frac{h^۳}{۳!}f^{(۳)}x + R_۳^-$$

$$\to f(x+h) + f(x-h) = ۲f(x) + ۲\frac{h^۲}{۲}f''(X) + R_۳^+ + R_۳^-$$

$$\to f''(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - ۲f(x)}{h^۲} + \frac{R_۳^+ + R_۳^-}{h^۲} \to E = \frac{R_۳^+ + R_۳^-}{h^۲}$$

$$R_۳^+ < \frac{h^۴}{۴!}f^{(۴)}(z), z \in (x, x+h), R_۳^- < \frac{h^۴}{۴!}f^{(۴)}(z)), z \in (x-h, x)$$

$$\to E < \frac{۱}{h^۲}(\frac{h^۴}{۲۴}f^{(۴)}(z_۱) + \frac{h^۴}{۲۴}f^{(۴)}(z_۲)) = \frac{h^۲}{۲۴}(f^{(۴)}(z_۱) + f^{(۴)}(z_۲)), z_۱ \in (x, x+h), z_۲ \in (x-h, x)$$

سوال ۶.

می توان با استفاده از درونیابی لاگرانژ مقادیر خواسته شده را به دست آورد:

$$p_n(x) = \sum_{i=۰}^{n} L_i(x) f_i(x)$$

$$L_i(x) = \frac{(x-x_۰)...(x-x_n)}{(x_i-x_۰)...(x_i-x_n)}$$

$$\rightarrow p_۲(x) = -۰/۵۰۰۳x^۲ + ۰/۷۱۸۵x + ۰/۶۲۳۲ \simeq f(x)$$

$$\rightarrow f'(x) \simeq -۱/۰۰۶x + ۰/۷۱۸۵ \rightarrow f'(۱) \simeq -۰/۲۸۴۵$$
$$\rightarrow f''(x) \simeq -۱/۰۰۶ \rightarrow f''(۱) \simeq -۱/۰۰۶$$

سوال ۷.

طبق قاعده ذوذنقه داریم:

$$\int_a^b f(x)dx = h(\frac{f(x_۰) + f(x_n)}{۲} + f(x_۱) + f(x_۲) + ... + f(x_{n-۱}))$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$E(f) = \frac{-nh^۳}{۱۲} f''(\epsilon); \qquad \epsilon \in (a,b)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_{۰/۷۵}^{۱/۳} (\sin^۲ x - ۲x \sin x + ۱)dx, \qquad n = ۱۱ \Longrightarrow h = ۰/۰۵$$

$$f(x) = (۰/۰۵ \times \frac{f(۰/۷۵) + f(۱/۳)}{۲} + \sum_{i=۱}^{n-۱} f(۰/۷۵ + i \times ۰/۰۵) = ۰/۰۲۰۵$$

$$E(f) = \frac{-۱۱ \times ۰/۰۵^۳}{۱۲} \times f''(\epsilon)$$

$$f''(x) = \sin^۲ x - ۲\sin x - ۲x \cos x$$

$$\Longrightarrow f''(x) = ۲\cos^۲ x - ۴\cos x + ۲x \sin x$$

$$\Longrightarrow f''(x) < ۰, \quad x \in (۰/۷۵, ۱/۳)$$

$$\Longrightarrow E(f) \leq \frac{-۱۱ \times ۰/۰۵^۳}{۱۲} \times f''(۰/۷۵) = ۰/۰۰۰۲$$

سوال ۸.

با توجه به روش سیمپسون داریم:

i	x_i	$\sin(2\cos x)\sin^2 x$
0	0	0
1	$\frac{\pi}{8}$	0.1408
2	$\frac{2\pi}{8}$	0.4938
3	$\frac{3\pi}{8}$	0.597
4	$\frac{4\pi}{8}$	0

$$\int_{۰}^{n/۲} f(x)dx = \frac{\pi}{۲۴}\Big(y_{۰}+y_{\frac{\pi}{۲}}+۴(y_{\frac{\pi}{۸}}+y_{\frac{۳\pi}{۸}})+۲y_{\frac{۲\pi}{۸}}\Big)=\frac{\pi}{۲۴}\Big(\epsilon(۰/۱۴۰۸+۰/۵۹۱)+۲\times۰/۴۹۳۸\Big)=۰/۵۱۲۶۸$$

سوال ۹.

$$m=\frac{n}{2} \qquad h=\frac{\pi}{n} \qquad 0<\epsilon<\pi$$

$$h_2=\frac{-mh^5}{90}f^{(4)}(\epsilon)=\frac{\frac{n}{2}\times\frac{\pi^5}{n^5}}{90}f^{(4)}(\epsilon)\leq 10^{-4}$$

f^(4)(x) =

$$\cos x \Longrightarrow f^{(4)}(\epsilon)\leq 1\frac{\pi^5}{180\times n^4}\leq 10^{-4}\Longrightarrow \frac{180\times n^4}{\pi^5}\geq 10^4\Longrightarrow n\geq 11.42\Longrightarrow n=12$$

سوال ۱۰.

$$f(x,y)=y'(x)=۱+y^{۳}(x)\Longrightarrow f(x_{۰},y_{۰})=f(۰,۰)=۱$$
$$y(x_{۱})=y(x_{۰}+h)=y_{۰}+\frac{h}{۲}\Big(f(x_{۰},y_{۰})+f(x_{۱},y_{۰}+hf(x_{۰},y_{۰})\Big)$$

$$\Longrightarrow y(۰/۱)=y_{۱}=۰+\frac{۰/۱}{۲}(۱+۱+(۰/۱)^{۳})=۰/۱۰۰۰۵$$
$$,y(۰/۲)=y_{۲}=۰/۱۰۰۰۵+\frac{۰/۱}{۲}(۱/۰۰۱۰۰۲+۱/۰۰۸۰۲)=۰/۲۰۰۵۰$$

سوال ۱۱.

طبق روش رانگه‐ کوتا داریم:

$$y_{i+۱} = y_i + \Delta y_i, \qquad \Delta y_i = \frac{۱}{۶}\Big(k_۱^{(i)} + ۲k_۲^{(i)} + ۲k_۳^{(i)} + k_۴^{(i)}\Big)$$

حال مقادیر $k_۱$ تا $k_۴$ را محاسبه میکنیم:

$$\begin{aligned}
k_۱^{(i)} &= hf(x_i, y_i)\\
k_۲^{(i)} &= hf(x_i + \tfrac{h}{۲}, \tfrac{k_۱^{(i)}}{۲})\\
k_۳^{(i)} &= hf(x_i + \tfrac{h}{۲}, \tfrac{k_۲^{(i)}}{۲})\\
k_۴^{(i)} &= hf(x_i + h, k_۳^{(i)})
\end{aligned}$$

$$f(x,y) = y'(x) = y + ۱$$
$$f(x_۰, y_۰) = (۰, ۱) = ۲ \Longrightarrow y(۰٫۱) = y_۱ = y_۰ + \Delta y_۰$$
$$k_۱^{(۰)} = ۰٫۲۰۰۰۰۰, \quad k_۲^{(۰)} = ۰٫۲۱۰۰۰۰, \quad k_۳^{(۰)} = ۰٫۲۱۰۵۰۰, \quad k_۴^{(۰)} = ۰٫۲۲۱۰۵$$
$$\Delta y_۰ = ۰٫۲۱۰۳۴ \Longrightarrow y_۱ = ۱٫۲۱۰۳۴$$
$$y(۰٫۲) = y_۲ = y_۱ + \Delta y_۱ = ۱٫۴۴۲۸۰$$

سوال ۱۲.

$$y''(x) - xy'(x) + x'y(x) - x = ۰$$
$$y_۱ = y, \quad y_۲ = y' \quad \Longrightarrow y_۱' = y' = y_۲, \quad y_۲' = xy' - x^۲y + x$$
$$y_{۱,۰}(۱) = ۱, \quad y_{۲,۰}(۱) = \tfrac{۱}{۲}k_۱ = hf(۱,۱,۱) = ۰٫۱ \times y_{۲,۰}(۱) = ۰٫۰۵$$
$$k_۱ = hf_۱(۱٫۱, ۱٫۰۵, ۱٫۰۵) = h \times ۱٫۰۵ = ۰٫۱۰۵$$

$$p_۱ = hf_۲(۱,۱,۱) = ۱ \times \tfrac{۱}{۲} - (۱ \times ۱) + ۱ = ۰٫۰۵$$
$$p_۲ = hf_۲(۱٫۱, ۱٫۰۵, ۱٫۰۵) = ۰٫۱(۱٫۱ \times ۱٫۰۵ - ۱٫۱^۲ \times ۱٫۰۵ + ۱٫۱) = ۰$$
$$y(۱٫۱) = y_۱ + \tfrac{۱}{۲}(k_۱ + k_۲) = ۱ + \tfrac{۱}{۲}(۰٫۰۵ + ۰٫۱۰۵) = ۱٫۰۷۷۵$$

موفق باشید.