۱

الف) با محاسبه‌ی جدول برای حالت تفاضلات پیش‌رو نیوتون، همه‌ی روابط را محاسبه می‌کنیم.

i	0	1	2	3	4
x_i	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
$f(x_i)$	1.7247	2.0038	2.2784	2.5491	2.8166

x_i	$f(x_i)$	1st order	2nd order	3rd order	4th order
0.5	1.7247				
0.7	2.0038	0.2791			
0.9	2.2784	0.2746	-0.0045		
1.1	2.5491	0.2707	-0.0039	0.0006	
1.3	2.8166	0.2675	-0.0032	0.0007	0.0001

- **تفاضلات پیش‌رو نیوتون:**

$$P_4(x) = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{4!}\Delta^4 f_0$$
$$= 1.7247 + 0.2791r - 0.0045\frac{r(r-1)}{2!} + 0.0006\frac{r(r-1)(r-2)}{3!} + 0.0001\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{4!}$$
$$x = 0.6 \Rightarrow r = \frac{0.6-0.5}{0.2} = 0.5 \Rightarrow P_4(0.5) = 1.8648$$
$$x = 1.05 \Rightarrow r = \frac{1.05-0.5}{0.2} = 2.75 \Rightarrow P_4(2.75) = 2.4818$$

- **تفاضلات پس‌رو نیوتون:**

$$P_4(x) = f_4 + r\nabla f_4 + \frac{r(r+1)}{2!}\nabla^2 f_4 + \frac{r(r+1)(r+2)}{3!}\nabla^3 f_4 + \frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{4!}\nabla^4 f_4$$
$$= 2.8166 + 0.2675r - 0.0032\frac{r(r+1)}{2!} + 0.0007\frac{r(r+1)(r+2)}{3!} + 0.0001\frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{4!}$$
$$x = 0.6 \Rightarrow r = \frac{0.6-1.3}{0.2} = -3.5 \Rightarrow P_4(-3.5) = 1.8648$$
$$x = 1.05 \Rightarrow r = \frac{1.05-1.3}{0.2} = -1.25 \Rightarrow P_4(-1.25) = 2.4818$$

- **تفاضلات مرکزی پیش‌رو نیوتون:**

$$P_4(x) = f_2 + r\delta f_{5/2} + \frac{r(r-1)}{2!}\delta^2 f_2 + \frac{r(r-1)(r+1)}{3!}\delta^3 f_{5/2} + \frac{r(r-1)(r+1)(r-2)}{4!}\delta^4 f_2$$
$$= 2.2784 + 0.2707r - 0.0039\frac{r(r-1)}{2!} + 0.0007\frac{r(r-1)(r+1)}{3!} + 0.0001\frac{r(r-1)(r+1)(r-2)}{4!}$$
$$x = 0.6 \Rightarrow r = \frac{0.6-0.9}{0.2} = -1.5 \Rightarrow P_4(-1.5) = 1.8648$$
$$x = 1.05 \Rightarrow r = \frac{1.05-0.9}{0.2} = 0.75 \Rightarrow P_4(0.75) = 2.4817$$

همانطور که مشاهده می‌شود، پیش‌بینی این روش‌ها برای این دو نقطه برابر یا با اختلاف بسیار کم است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت به طور کلی با استفاده از هر یک از این روش‌ها می‌توان به دقت خوبی دست یافت و تنها اختلاف بین آن‌ها به دلیل خطای محاسبه است.

ب)

$$\epsilon \leq \frac{h^5}{5!}r(r-1)(r-2)(r-2)(r-4)f^{(5)}(t)$$
$$f^{(1)}(t) = 1 + \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f^{(2)}(t) = -\frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{2}}$$
$$\Rightarrow f^{(3)}(t) = \frac{3}{8}(x+1)^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f^{(4)}(t) = -\frac{15}{16}(x+1)^{-\frac{7}{2}}$$
$$\Rightarrow f^{(5)}(t) = \frac{105}{32}(x+1)^{-\frac{9}{2}} \Rightarrow t = 0.5$$
$$\Rightarrow f^{(5)}(t) = 0.5292$$
$$r = 1.5 \Rightarrow \epsilon \leq 1.9845 \times 10^{-6}$$

سوال ۲

$$\varepsilon_2 \leqslant (x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})\frac{f'''(t)}{3!} \qquad t \longrightarrow \max(f'''(t))$$

$$f(x)=\sqrt{x} \Longrightarrow f'(x)=\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}} \Longrightarrow f''(x)=\frac{-1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Longrightarrow f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

حال ما می خواهیم ماکسیمم $f'''(x)$ را در بازه‌ی $[5,6]$ به دست آوریم. چون $f'''(x)$ تابع نزولی است پس ماکسیمم آن در این بازه برابر نقطه شروع بازه می باشد.

$$\longrightarrow \max|f'''(t)| \ (6\geqslant t\geqslant 5) = f'''(5) = \frac{3}{8}\times 5^{-\frac{5}{2}} \sim 0.0067$$

$$\Longrightarrow \varepsilon_2 \leqslant (x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})\times\frac{67}{6\times 10^4}$$

حال کافی است ماکسیمم $(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})$ را به دست آوریم. با تغییر متغیر $y=x-x_{i-1}$ خواهیم داشت:

$$\max_{x\in[x_{i-1},x_{i+1}]}\left[(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})\right]=\max_{y\in[-h,h]}\left[(y-h)\,y\,(y+h)\right]$$

$$=\max_{y\in[-h,h]}\left[y(y^2-h^2)\right]=\max\left[y^3-yh^2\right]$$

$$\max(y^3-yh^2)\longrightarrow 3y^2-h^2=0 \Longrightarrow y_{max}=\pm\frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$\Longrightarrow \max\left|(y^3-yh^2)\right| = \max\left|\left(y\,(y^2-h^2)\right)\right| = \frac{h}{\sqrt{3}}\left(\frac{h^2}{3}-h^2\right)=\frac{h}{\sqrt{3}}\times\frac{2h^2}{3}$$

$$=\frac{2h^3}{3\sqrt{3}}$$

حال ما می خواهیم خطا کمتر از 5×10^{-8} شود پس:

$$\varepsilon_2 \leqslant \frac{2h^3}{3\sqrt{3}}\times\frac{67}{6\times10^4} \leqslant 5\times10^{-8} \Longrightarrow h^3\leqslant 0.000116 \Longrightarrow h\leqslant 0.048$$

$$h = \frac{1}{N} \Longrightarrow \frac{1}{N} \leqslant ۰/۰۴۷ \Longrightarrow N \geqslant ۲۱ \longrightarrow \boxed{\min(N) = ۲۱}$$

۳

الف) ابتدا فرض می‌کنیم $x_i = x_{i-1} + h$ سپس قضیه را برای $\lim_{h\to 0}$ اثبات می‌کنیم.

پایه استقرا:

$$n = 1 \Rightarrow f[x_1, x_2] = f^{(1)}(x_1)$$

اثبات:

$$\begin{aligned} f[x_1, x_2] &= \lim_{h\to 0} f[x_1, x_1 + h] = \lim_{h\to 0} \frac{f[x_1 + h] - f[x_1]}{(x_1 + h) - x_1} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = f'(x_1) = f^{(1)}(x_1) \end{aligned}$$

فرض استقرا:

$$n = k - 1 \Rightarrow f[x_1, \cdots, x_k] = \frac{f^{(k-1)}(x_1)}{(k-1)!}$$

حکم استقرا: به ازای $n = k$، فرض برقرار است.

اثبات:

$$f[x_1, \cdots, x_{k+1}] = \lim_{h\to 0} \frac{f[x_2, \cdots, x_{k+1}] - f[x_1, \cdots, x_k]}{(x_1 + kh) - x_1}$$

$$\begin{aligned} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f^{(k-1)}(x_1+h)}{(k-1)!} - \frac{f^{(k-1)}(x_1)}{(k-1)!}}{kh} &= \frac{1}{k!} \lim_{h\to 0} \frac{f^{(k-1)}(x_1 + h) - f^{(k-1)}(x_1)}{h} \\ &= \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_1) = \frac{f^{(k)}(x_1)}{k!} \end{aligned}$$

ب) اگر $P_n(x)$ چند جمله‌ای درون‌یاب نقاط $x_1, \cdots, x_n, \bar{x}$ باشد، با تابع f برابر است زیرا وقتی دو چند جمله‌ای از درجه‌ی $n + 1$، n ریشه‌ی مشترک داشته باشند، این دو چند جمله‌ای برابرند.

$$P_n(x) = P_{n-2}(x) + f[x_1, \cdots, x_n](x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) + f[x_1, \cdots, x_n, \bar{x}](x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

جون P_{n-2} چند جمله‌ای درون‌یاب برای نقاط $x_1, \cdots, x_{n-1}$ است، داریم:

$$f(x) = g(x) + \left(f[x_1, \cdots, x_n] - f[x_1, \cdots, x_n, \bar{x}](x_1 + \cdots + x_n)\right) x^{n-1} + f[x_1, \cdots, x_n, \bar{x}]x^n$$

چون $q(x)$ حداکثر از درجه‌ی $n-2$ است، پس از $n-1$ بار مشتق گیری حذف می‌شود. بنابراین داریم:

$$f^{(n-1)}(x) = (n-1)! \left(f[x_1, \cdots, x_n] - f[x_1, \cdots, x_n, \bar{x}](x_1 + \cdots + x_n)\right) + n! f[x_1, \cdots, x_n, \bar{x}]x$$

$$f^{(n-1)}(x) = (n-1)! f[x_1, \cdots, x_n] + n! f[x_1, \cdots, x_n, \bar{x}](x - \bar{x})$$

$$x = \bar{x} \Rightarrow f^{(n-1)}(x) = (n-1)! f[x_1, \cdots, x_n] \Rightarrow f[x_1, \cdots, x_n] = \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x)$$

سوال ۴

(الف)

از لاگرانژ استفاده میکنیم:

$$P_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}cos(x_2)$$
$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}cos(x_0)$$
$$+ \frac{(x-x_2)(x-x_0)}{(x_1-x_2)(x_1-x_0)}cos(x_1)$$

$$P_3(x) \approx \frac{(x)(x-0.5)}{0.5} \times 0.5403$$
$$+ \frac{(x-0.5)(x-1)}{0.5}$$
$$+ \frac{(x-1)(x)}{-0.25} \times 0.8776$$

در نهایت:

$$\boxed{P_3(x) \approx -0.43x^2 - 0.03x + 1}$$

(ب)

کافیست نشان دهیم خطا به صفر میرود:

$$\epsilon_n(x) = P_n(x) - f(x)$$
$$\leq \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \times \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!} \right|$$
$$\leq \left| (1)^{(n+1)} \times \frac{1}{(n+1)!} \right|$$
$$\leq \frac{1}{(n+1)!}$$

که در محاسبات بالا از این مشاهده استفاده شده که با هر تعداد مشتق گیری از sin, cos نتیجه $\pm sin, \pm cos$ میشود که در هر حال قدر مطلق حداکثر 1 دارد. پس با حد گیری نه تنها اختلاف به صفر میرود بلکه با سرعت بسیار بالا این اتفاق میفتد:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \epsilon_n(x) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!} = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_n(x) - f(x) = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)}$$

دقت کنید که در اثبات بالا نیاز نبود نقاط انتخابی متساوی الفاصله باشند. اما برای مثال خاص سوال هم کار میکند.

سوال ۵

میدانیم اگر:

$$y = \sum a_i f_i$$

$$A = [a_1 ... a_n]^T$$

در نتیجه:

$$MA = Y$$

$$M_{i,j} = \sum_m f_i f_j$$

$$Y_i = \sum_m f_i y$$

(الف)

داریم:

x_i	y_i	$sin(x_i)$	$\frac{1}{x_i}$	$\frac{sin(x_i)}{x_i}$	$\frac{1}{x_i}^2$	$sin(x_i)^2$	$sin(x_i)y_i$	$\frac{y_i}{x_i}$
1	3	0.8414	1	0.8414	1	0.7080	2.5242	3
2	4	0.9092	0.5	0.4546	0.25	0.8268	3.6368	2
3	7	0.1411	0.3333	0.0470	0.1111	0.0199	0.9877	2.3333
4	10	-0.7568	0.25	-0.1892	0.0625	0.5727	-7.568	2.5
5	9	-0.9589	0.2	-0.1917	0.04	0.9195	-8.6301	1.8
S	$-$	0.1761	2.2833	0.9621	1.4636	3.0470	-9.0489	11.6333

در نهایت:

$$\begin{bmatrix} 3.0470 & 0.9621 \\ 0.9621 & 1.4636 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.0489 \\ 11.6333 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -6.9147 \\ 12.4938 \end{bmatrix}}$$

(ب)

میتوان نوشت:

$$y = \frac{1}{(a_0 + a_1 x)^3}$$

$$\Rightarrow a_0 + a_1 x = \sqrt[3]{\frac{1}{y}}$$

پس داریم:

x_i	y_i	x_i^2	$(\frac{1}{y_i})^{\frac{1}{3}}$	$x_i(\frac{1}{y_i})^{\frac{1}{3}}$
0	1	0	1	0
1	0.064	1	2.5	2.5
2	0.008	4	5	10
4	0.001	16	10	40
7	1.073	21	18.5	52.5

در نهایت:

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.5 \\ 52.5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0.6 \\ 2.3 \end{bmatrix}}$$