



محاسبات عددی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۰

مدرس: دکتر فاطمه بهاری‌فرد

تمرین سری ششم

فصل ششم

تاریخ تحویل: ۱۴۰۱/۳/۳۱

لطفا توجه فرمایید که:

* مهلت ارسال تمرین ساعت ۲۳:۵۵ روز ۳۱ خرداد ماه است.

* لطفا تمرین‌های تئوری و عملی را در یک فایل فشرده قرار داده و با نام $HW6_StudentID$ آپلود کنید.

* لطفا تمرین‌ها را از یکدیگر کپی نکنید. در صورت وقوع چنین مواردی مطابق با سیاست درس رفتار می‌شود.

۱. درستی و نادرستی موارد زیر را بررسی کنید. در صورت صحت گزاره، آن را اثبات کنید.

الف) حاصل ضرب تعداد متناهی از ماتریس‌های بالامثلثی (پایین مثلثی)، یک ماتریس بالامثلثی (پایین مثلثی) است. (۵ نمره)

ب) فرض کنید

$$A^2 = A, B = I - \lambda A, \lambda \neq 1$$

در این صورت B وارون‌پذیر است. (۵ نمره)

۲. اگر روش حذف گاوسی برای حل دستگاه معادلات زیر به کار رود، نشان دهید به ازای چه مقادیری از α نیاز به محورگیری جزئی نخواهد بود. (۱۵ نمره)

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 5 \\ \alpha x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 5 \end{cases}$$

۳. یک تکرار روش گاوس-سایدل را برای حل دستگاه معادله زیر بنویسید. فرض کنید بردار اولیه به صورت

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ است. (۱۵ نمره)}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_2 + 2x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}$$

۴. با استفاده از روش ژاکوبی تا دو مرحله تکرار، به ازای $a = 2$ دستگاه معادلات زیر را حل کنید. (۱۵ نمره)

$$\begin{cases} 6ax_1 + 3ax_2 + 2ax_3 = 1 \\ x_1 - 3ax_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2ax_3 = 3 \end{cases}$$

۵. تجزیه چولسکی ماتریس مثبت معین A را بیابید. (۱۰ نمره)

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 15 & 5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

۶. دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 8 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix}$$

الف) با روش تجزیه کروت LU آن را محاسبه کنید. (۵ نمره)

ب) به کمک روش توانی، بزرگترین مقدار ویژه ماتریس ضرایب را با بردار $x = (1, 1, 1)^T$ و با سه تکرار تا سه رقم اعشار بیابید. (۱۰ نمره)

۷. (برنامه نویسی)

با دریافت n به عنوان ورودی، روش Doolittle را برای تجزیه LU یک ماتریس $n \times n$ پیاده سازی کنید.

(۲۰ نمره)

مثال:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 11 & 5 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix} \text{ ماتریس ورودی:}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ تجزیه L:}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 13 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ تجزیه U:}$$