



## محاسبات عددی

نیم‌سال اول ۹۹

مدرس: دکتر فاطمه بهاری‌فرد

تمرین سری پنجم

فصل پنجم

تاریخ تحویل: ۱۴۰۰/۳/۱۸

لطفا توجه فرمایید که:

\* مهلت ارسال تمرین ساعت ۲۳:۵۹ روز ۱۸ خرداد ماه است.

\* لطفا تمرین‌های تئوری و عملی را در یک فایل فشرده قرار داده و با نام  $HW5\_StudentID$  آپلود کنید.

\* لطفا تمرین‌ها را از یکدیگر کپی نکنید. در صورت وقوع چنین مواردی مطابق با سیاست درس رفتار می‌شود.

۱. رابطه  $y' = 4e^{y/5} - 0.5y$  و مقادیر واقعی آن در جدول زیر را در نظر بگیرید. با استفاده از روش Modified Euler و با شرط  $h = 1$ ، از نقطه  $t = 0$  شروع کرده و مقادیر تقریبی تابع را تا  $t = 4$  بدست آورید. مقدار خطای تقریبی در کدام نقاط از ۰.۰۰۵ کمتر است؟ (استفاده از روش اویلر با سه جمله کافی است). (۲۰ نمره)

$t$	$y_{true}$
0	2.00000
1	6.19463
2	14.84392
3	33.67717
4	75.33896

۲. می‌دانیم نیاز به عملیات کمتر، از مزایای روش‌های چندمرحله‌ای است. حل معادله  $y' = f(x, y)$  با شرط اولیه  $y(x_0) = y_0$  را به دو روش رانگه-کوتای مرتبه چهارم و آدامز-بشفورث در نظر بگیرید (فرض کنید تابع شروع روش آدامز-بشفورث نیز رانگه-کوتای مرتبه چهارم باشد). تعداد عملیات انجام شده در این دو روش را بعد از  $n$  مرحله با هم مقایسه کنید. (۱۰ نمره)

۳. با استفاده از روش اویلر، معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را حل کرده و با فرض  $h = 0.1$  مقدار تقریبی  $y$  را در نقطه ۱.۲ بدست آورید. (۲۰ نمره)

$$\begin{cases} x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \\ y(1) = 4 \\ y'(1) = 9 \end{cases}$$

\* توصیه می‌شود معادله تابع  $y$  را نیز برای تمرین بیشتر بدست آورید.

۴. رشد جمعیت یک کشور از سال‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ از رابطه  $\frac{dp}{dt} = 0.017p$  پیروی کرده است. با استفاده از روش رانگه-کوتای مرتبه چهارم و با در نظر گرفتن  $h = 5$ ، مقادیر تقریبی جمعیت را برای سال‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ بدست آورده و خطای نسبی این تقریب را با کمک مقادیر واقعی در جدول زیر بدست آورید. (۲۰ نمره)

$t$	۱۹۵۰	۱۹۵۵	۱۹۶۰
$p$	۲۵۵۵	۲۷۸۰	۳۰۴۰

۵. با استفاده از روش Predictor-Corrector آدامز-بشفورث مرتبه چهارم و مقادیر داده شده، مقدار  $y$  را در نقطه  $x = 2$  بدست آورید. (۲۰ نمره)

$$y' = \frac{x+y}{3}$$

$x_i$	$y_i$
۰	۲
۰/۵	۲/۶۳۶
۱	۳/۵۹۵
۱/۵	۴/۹۶۸

۶. (برنامه نویسی) برای بخش برنامه‌نویسی این تمرین، کدی بنویسید که معادله  $y' = 2xy$  را با شرط اولیه  $y(1) = 1$  در نظر گرفته و مقادیر تقریبی  $y$  را به دست آورد. ورودی کد باید شامل متغیرهای  $h$  و نقاط ابتدایی و انتهایی بازه باشد و در خروجی نهایی، مقادیر تقریبی به دو روش اویلر و اویلر تغییر یافته نمایش داده شود. پس از آماده شدن کد، مقادیر تولید شده را با ورودی‌های  $h = 0.05$ ، نقطه شروع ۱ و نقطه پایان ۱.۵ وارد جدول data.xlsx کنید. سپس کد Comparison.ipynb اجرا کرده و دلیل عملکرد متفاوت روش‌ها را توضیح دهید. (۳۰ نمره)

\* می‌توانید با استفاده از ورودی‌های جدول زیر و مقایسه نتایج از درستی کارکرد کد خود مطمئن شوید.

Comparison of numerical methods with $h = 0.1$				
$x_n$	Euler	Improved Euler	RK4	Actual value
1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.10	1.2000	1.2320	1.2337	1.2337
1.20	1.4640	1.5479	1.5527	1.5527
1.30	1.8154	1.9832	1.9937	1.9937
1.40	2.2874	2.5908	2.6116	2.6117
1.50	2.9278	3.4509	3.4902	3.4904