



محاسبات عددی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۰

مدرس: دکتر فاطمه بهاری‌فرد

تمرین سری دوم

فصل دوم

تاریخ تحویل: ۱۴۰۱/۱/۲۳

لطفا توجه فرمایید که:

* مهلت ارسال تمرین ساعت ۱۱:۵۹ روز ۲۳ فروردین ماه است.

* لطفا تمرین‌های تئوری و عملی را در یک فایل فشرده قرار داده و با نام $HW2_StudentID$ آپلود کنید.

* لطفا تمرین‌ها را از یکدیگر کپی نکنید. در صورت وقوع چنین مواردی مطابق با سیاست درس رفتار می‌شود.

۱. تقریب ۴D ریشه معادله‌ی زیر در بازه $(2, 3)$ را یک بار با استفاده از روش نابه‌جایی و یک بار با استفاده از روش دوبخشی به دست آورید، به نحوی که $|f(x_n)| < 0.01$. کدام روش سریع‌تر همگرا می‌شود؟ (۲۰ نمره)

$$x^3 - 13x^2 + 76 = 0$$

۲. با استفاده از روش نیوتون-رافسون، تقریب ۴D ریشه‌ی تابع f را با سه تکرار بیابید. مقدار اولیه را برابر صفر در نظر بگیرید. (۱۵ نمره)

$$\begin{cases} f'(x) = e^x + 3 \\ f(0) = 5 \end{cases}$$

۳. الف) نقطه کمینه تابع زیر را محاسبه کنید. (۵ نمره)

$$y = 0.5(x_1^2 - x_2^2)^2 + 0.5(1 - x_1)^2$$

ب) با استفاده از روش نیوتن و با نقطه‌ی شروع $x_0 = [2, 2]$ نقطه‌ی کمینه را مشخص کنید. (انجام محاسبات برای یک گام کافی است). (۱۰ نمره)

ج) گام طی شده از چه نظر مناسب و از چه نظر مناسب نیست؟ (۵ نمره)

۴. الف) نشان دهید برای معادله $x = a^{p-1}$ رابطه‌ی روش وترى برابر با معادله‌ی زیر است. (۱۰ نمره)

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1} (x_n^{p-1} - x_{n-1}^{p-1}) + a(x_n - x_{n-1})}{x_n^p - x_{n-1}^p}$$

ب) مقدار x_3 را در تقریب جذر عدد ۹، با مقادیر اولیه $x_0 = 2, x_1 = 2.5$ به دست آورید و خطای مطلق را برای این مقدار محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

۵. فرض کنید تابع f در $[0, 1]$ مشتق پذیر بوده و $f(0) < 0 < f(1)$ باشد. همچنین به ازای هر $x \in [0, 1]$ داشته باشیم $0 \leq a < f' \leq b$ که در آن a و b اعداد ثابتی هستند. نشان دهید عدد ثابتی مانند M وجود دارد به طوری که روش تکراری زیر به جواب معادله $f(x) = 0$ همگرا شود. (۲۰ نمره)

$$\begin{aligned} x_0 &\in [0, 1] \\ x_n &= x_{n-1} + Mf(x_{n-1}) \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

۶. (برنامه نویسی) روش نابه جایی را شبیه سازی کنید. برنامه شما باید تابع، دو نقطه اولیه و دقت مورد نظر را ورودی بگیرد. در خروجی نیز باید مقادیر تقریبی ریشه در هر مرحله و ریشه تقریبی نهایی چاپ شوند. (۱۵ نمره)

راهنمایی: برای ورودی گرفتن توابع می توانید از تابع eval در پایتون استفاده کنید. همچنین از کتابخانه math، تمامی توابع موجود را import کنید.