



محاسبات عددی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۰

مدرس: دکتر فاطمه بهاری‌فرد

تمرین سری چهارم

فصل چهارم

تاریخ تحویل: ۱۴۰۱ / ۰۲ / ۳۱

لطفا توجه فرمایید که:

* مهلت ارسال تمرین ساعت ۲۳:۵۹ روز ۳۱ اردیبهشت ماه است.

* لطفا تمرین‌های تئوری و عملی را به صورت جداگانه و با نام $HW4_StudentID$ آپلود کنید.

* تمرین‌ها را از یکدیگر کپی نکنید. در صورت وقوع چنین مواردی مطابق با سیاست درس رفتار می‌شود.

۱. روابط زیر را در نظر بگیرید:

$$(1) : f'_i \simeq \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

$$(2) : f'_i \simeq \frac{2f_{i+1} - \frac{1}{2}f_{i+2} - \frac{3}{2}f_i}{h}$$

$$(3) : f'(x_i + \frac{h}{2}) \simeq \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

$$(4) : f''_{i+1} \simeq \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2}$$

الف) مقدار مشتق تابع $f(x) = e^x + \cos(x)$ را در نقطه $x = 2$ با استفاده از روابط (۱) و (۲) بیابید و با مقدار مشتق واقعی مقایسه کنید.

(نمره ۸)

ب) برای تابع $f(x) = x^3 \tan^{-1} x$ ، مقدار مشتق اول را با استفاده از رابطه (۳) و مقدار مشتق دوم را با استفاده از رابطه (۴)، به ازای $h = 0.5$ در نقطه $X = 5$ محاسبه کنید. (نمره ۸)

۲. با استفاده از بسط تیلور توابع $f(x+h)$ و $f(x-h)$ تقریبی با خطای $O(h^3)$ برای $f''(x)$ بیابید و سپس مقدار مشتق دوم تابع $\frac{x^2}{\cos(x)}$ را در $x = 0.5$ به ازای $h = 0.5$ کم‌تر از $\frac{1}{2}$ به دست آورید و نمودار آن را رسم نمایید. (نمره ۱۰)

۳. برای محاسبه تقریبی از انتگرال تابع f در فاصله $[0, 6h]$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^{6h} f(x) dx \simeq \omega_1 f(h) + \omega_2 f(3h) + \omega_3 f(5h)$$

الف) ضرایب ω_1 و ω_2 و ω_3 را چنان تعیین کنید که رابطه فوق برای چند جمله‌ای‌های تا درجه دو دقیق باشد.

(نمره ۹)

ب) نشان دهید رابطه فوق برای چند جمله‌ای‌های تا درجه ۳ نیز دقیق است.

(نمره ۹)

۴. مطلوب است محاسبه تقریبی:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

الف) با روش سیمپسون و با طول گام $h = 0.25$.
(نمره ۹)

ب) تعداد نقاط لازم را برای محاسبه مقدار تقریبی انتگرال فوق با روش دوزنقه ای طوری بیابید که خطای کل کم تر از 10^{-3} باشد.
(نمره ۹)

۵. الف) مقدار تابع زیر را با استفاده از روش دونقطه ای و سه نقطه ای گاوس به دست آورید و جواب به دست آمده را با مقدار واقعی انتگرال مقایسه کنید.

$$\int_0^2 x \tan^{-1}(x) dx$$

(نمره ۹)

ب) با استفاده از روش رامبرگ دو مرحله ای با $h = 0.4$ تقریبی از انتگرال زیر را به دست آورید. (محاسبات را با ۴d انجام دهید.)

$$\int_0^{0.4} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$$

(نمره ۹)

۶. (برنامه نویسی) با استفاده از روش های دوزنقه ای و سیمپسون $\frac{1}{3}$ و $\frac{3}{8}$ برنامه ای بنویسید که با ورودی n و h و a و b (ابتدا و انتهای بازه) و s ، مقدار تابع زیر را بدست آورید. و به ازای $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^i}$ تا 10 مقدار برای h محاسبه کنید و مقادیر انتگرال را گزارش دهید و با استفاده از کتابخانه های مناسب، نمودار مقدار به ازای h های مختلف در روش های مختلف را رسم کنید و روش های مختلف را با هم مقایسه کنید.

$$\int_1^2 x^s e^x dx$$

(نمره ۲۰)