**محاسبات عددی** **پاسخ میان‌ترم**

**نیم‌سال اول ۱۴۰۱-۱۴۰۲**

---

**سوال ۱.** حجم کره‌ای به شعاع $\frac{۵}{۳}$ را محاسبه کنید و حداکثر خطای مطبق و نسبی این محاسبه را به دست آورید.
(حجم کره به شعاع $r$ برابر است با: $V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$ و اعداد را تا چهار رقم اعشار گرد کنید.)

**پاسخ**

$$V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = xyz^۳$$

$$x = \frac{۴}{۳} = ۱/۳۳۳۳ + e_x \quad , \quad e_x \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$$

$$y = \pi = ۳/۱۴۱۶ + e_y \quad , \quad e_y \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$$

$$z = \frac{۵}{۳} = ۱/۶۶۶۷ + e_z \quad , \quad e_z \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$$

$$\Rightarrow V = (۱/۳۳۳۳)(۳/۱۴۱۶)(۱/۶۶۶۷) + e_V = ۱۹/۳۹۳۳ + e'_V$$

$$e'_V \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴} + e_V$$

$$e_V \leq e_x \frac{\partial V}{\partial x} + e_y \frac{\partial V}{\partial y} + e_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$e_V = \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}(yz^۳ + xz^۳ + ۳xyz^۲)$$

$$x = ۱/۳۳۳۳ \quad y = ۳/۱۴۱۶ \quad z = ۱/۶۶۶۷$$

$$e_V \leq ۵ \times ۱۰^{-۵}(۱۴/۵۴۵۳ + ۶/۱۷۳۱ + ۳۴/۹۰۷۲)$$

$$e_V \leq ۰/۰۰۲۸$$

$$e'_V \leq ۵ \times ۱۰^{-۵} + ۰/۰۰۲۸$$

$$e'_V \leq ۰/۰۰۲۸۵ \rightarrow V = ۱۹/۳۹۳۳ \pm ۰l۰۰۲۸۵$$

$$\partial y = \sum \left| \frac{\partial |x|}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

$$\partial V = e_x \frac{\ln V}{\partial x} + e_y \frac{\ln V}{\partial y} + e_z \frac{\partial \ln V}{\partial z}$$

$$= e_x \frac{۱}{x} + e_y \frac{۱}{y} + e_z \frac{۱}{z}$$

$$\leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}(\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} + \frac{۱}{z})$$

$$\frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}(۰/۷۵۰۰ + ۰/۳۱۸۳ + ۰/۵۹۹۹)$$

$$\leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}(۱/۶۶۸۲) = ۱۰^{-۴} \times ۰/۸۳۴۱$$

---

**سوال ۲.** به روش هرنر مقدار چندجمله‌ای $P(x) = x^۴ + ۳x^۳ + ۵x^۲ + ۷x + ۹$ را در $x = ۲$ محاسبه کنید.

**پاسخ**

$$P(x) = a_۰x^n + a_۱x^{n-۱} + ... + a_{n-۱}x + a_n \quad at \;\; x = \eta$$

$$b_۰ = a_۰ = ۱$$

$$b_۱ = b_۰\eta + a_۱ == ۲ + ۳ = ۵$$

$$b_۲ = b_۱\eta + a_۲ = ۵ \times ۲ + ۵ = ۱۵$$

$$b_۳ = b_۲\eta + a_۳ = ۱۵ \times ۲ + ۷ = ۳۵$$

$$b_۴ = b_۳\eta + a_۴ = ۳۷ \times ۲ + ۹ = ۸۳$$

---

**سوال ۳.** جواب معادله $cosx = x$ را در فاصله $[۰, ۱]$ به روش نیوتون به شروع از $x_۰ = ۰/۵$ با خطای حداکثر $۱۰^{-۴}$ محاسبه کنید.

**پاسخ**

قراردهید $f(x) = x - cosx$، $f'(x) = ۱ + sinx$ با استفاده از:

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{x_n - cosx_n}{۱ + sinx_n}$$

با قرار دادن $x_۰ = ۰/۵$ داریم:

$$x_۱ = ۰/۷۵۵۲۲$$

$$x_۲ = ۰/۷۳۹۱۴$$

$$x_۳ = ۰/۷۳۹۰۹$$

چون $|x_۳ - x_۲| = ۵ * ۱۰^{-۵} < ۱۰^{-۴}$ پس $x_۲$ تقریب ریشه موردنظر است.

---

**سوال ۴.**

الف) چندجمله‌ای تیلور مرتبه دوم، $P_۲(x)$، تابع $f(x) = xe^x + x$ را حول $a = ۰$

ب) در صورتیکه تابع $f(x)$ در بازه $[0,1]$ با تابع $P_2(x)$ تقریب زده شود، کران بالایی برای خطای تقریب، $|f(x) - P_2(x)|$، بیابید.

**پاسخ**

$$P_2(x) = 2x + \frac{2}{2!}x^2$$
$$|P_2(x) - f(x)| = \left|\frac{3e^\eta + \eta e^\eta}{3!}x^3\right| \leq \left|\frac{3e^\eta + \eta e^\eta}{6}\right|$$
$$\leq \frac{1}{6}|3e^\eta| + \frac{1}{6}|\eta x^\eta|$$
$$\leq \frac{1}{6}|3e| + \frac{1}{6}|(1)(e)| \qquad \eta \in (0,1)$$
$$= \frac{4e}{6}$$

---

**سوال ۵.**

الف) دستگاه خطی $Ax = b$ که در آن $A = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & \beta \\ -\alpha & 1 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 1 \end{bmatrix}$ تحت چه شرایطی روی $\alpha, \beta, \gamma$ دنباله ساخته شده بر اساس روش‌های ژاکوبی و گوس_ سایدل با انتخاب $x^{(0)}$ دلخواه، همگراست.

ب) با استفاده از روش ژاکوبی با شروع از $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ جمله دوم دنباله $\{x^{(r)}|_0^\infty\}$ ساخته شده به روش ژاکوبی برای دستگاه زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned}
10x_1 - x_2 + x_3 \quad &= 6 \\
-x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 \quad &= 25 \\
2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 \quad &= -11 \\
3x_2 - x_3 + 8x_4 \quad &= 15
\end{aligned}$$

**پاسخ**

$$x_1 = \frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{3}{5}$$
$$x_2 = \frac{1}{11}x_1 + \frac{1}{11}x_3 - \frac{3}{11}x_4 + \frac{25}{11}$$
$$x_3 = \frac{-1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{10}x_4 - \frac{11}{10}$$
$$x_4 = \frac{-3}{8}x_2 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{15}{8}$$
$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$
$$x_1^{(1)} = 0.0000$$

$$x_{۲}^{(۱)} = ۲/۲۷۲۷$$
$$x_{۳}^{(۱)} = -۱/۱۰۰۰$$
$$x_{۱}^{(۱)} = ۱/۸۷۵۰$$

---

**سوال ۶.** به روش نیوتون با شروع از نقطه $x^{(۰)} = \begin{bmatrix} ۳/۴ \\ ۲/۲ \end{bmatrix}$ جواب دستگاه $F(\vec{x}) = \vec{۰}$ که در آن $F(x) = \begin{bmatrix} x_{۱} + ۳\log_{۱۰}^{x_{۱}} - x_{۲}^{۲} \\ ۲x_{۱}^{۲} - x_{۱}x_{۲} - ۵x_{۱} + ۱ \end{bmatrix}$ با شرط خاتمه $\left\|F(x^{(n)})\right\| \le ۲ \times ۱۰^{-۴}$ به دست آورید.

**پاسخ**

$$J_f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{۱}}{\partial x_{۱}} & \frac{\partial F_{۱}}{\partial x_{۲}} \\ \frac{\partial F_{۲}}{\partial x_{۱}} & \frac{\partial F_{۲}}{\partial x_{۲}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ + \frac{۳}{\ln ۱۰ x_{۱}} & -۲x_{۲} \\ ۴x_{۱} - x_{۲} - ۵ & -x_{۱} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{x}^{(P+۱)} = \vec{x}^{(P)} - J_F^{-۱}(\vec{x}^{(P)})\vec{F}(\vec{x}^{(P)})$$

$$\vec{x}^{(۰)} = \begin{bmatrix} ۳/۴ \\ ۲/۲ \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^{(۱)} = \vec{x}^{(۰)} - \begin{bmatrix} -۰/۹۴۴۹۶ & ۰/۱۸۷۵۸ \\ -۰/۲۷۲۸۳ & ۰/۰۵۸۹۶۷ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰/۷۵۴۴۳۷ \\ -۰/۳۶ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{x}^{(۱)} = \begin{bmatrix} ۳/۴۸۹۹۱ \\ ۲/۲۶۳۳۶ \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^{(۲)} = \vec{x}^{(۱)} - \begin{bmatrix} -۰/۱۳۶۷۵ & ۰/۱۷۷۳۸۳ \\ -۰/۲۶۲۳۹۹ & ۰/۰۵۳۸۱۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۰/۰۰۴۴۶ \\ ۰/۰۱۰۴۷۱ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{x}^{(۲)} = \begin{bmatrix} ۳/۴۸۷۴۴۴ \\ ۲/۲۶۱۶۲۹ \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^{(۳)} = \vec{x}^{(۲)} - \begin{bmatrix} -۰/۱۳۶۷۵ & ۰/۱۷۷۳۸۳ \\ -۰/۲۶۲۳۹۹ & ۰/۰۵۳۸۱۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۳/۳۳ \times ۱۰^{-۶} \\ ۷/۸۹۸ \times ۱۰^{-۶} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{x}^{(۳)} = \begin{bmatrix} ۳/۴۹۷۴۴ \\ ۲/۲۶۱۶۲ \end{bmatrix}$$

$$F(\vec{x}^{(۲)}) = \begin{bmatrix} -۳/۳۳ \times ۱۰^{-۶} \\ ۷/۸۹۸ \times ۱۰^{-۶} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \left|F(\vec{x}^{(۲)})\right| < ۱۰^{-۴}$$

$$\rightarrow J_F^{-۱}(\vec{x}) = \frac{۱}{۲x_{۲}(۴x_{۱} - x_{۲} - ۵) - x_{۱}(۱ + \frac{۳}{\ln ۱۰ x_{۱}})} \begin{bmatrix} -x_{۱} & ۲x_{۲} \\ -۴x_{۱} + x_{۲} + ۵ & -۱ - \frac{۳}{\ln ۱۰ x_{۱}} \end{bmatrix}$$

**موفق باشید.**