.1

الف:

با تشکیل جدول مربوطه داریم:

Newton Forward Difference Method					
x_i	$f(x_i)$	1st order	2nd order	3rd order	4th order
1	0.303				
1.8	0.659	0.356			
2.6	0.921	0.262	-0.094		
3.4	1.056	0.135	-0.127	-0.033	
4.2	1.080	0.024	-0.111	0.016	0.049

با توجه به نتایج بالا می‌توانیم بنویسیم:

$$P_n(x) = 0.303 + (\frac{x-1}{0.8})0.356 - (\frac{x-1}{0.8})(\frac{x-1}{0.8} - 1)\frac{0.094}{2}$$

$$-(\frac{x-1}{0.8})(\frac{x-1}{0.8} - 1)(\frac{x-1}{0.8} - 2)\frac{0.033}{6} + (\frac{x-1}{0.8})(\frac{x-1}{0.8} - 1)(\frac{x-1}{0.8} - 2)(\frac{x-1}{0.8} - 3)\frac{0.049}{24}$$

Newton Backward Difference Method					
x_i	$f(x_i)$	1st order	2nd order	3rd order	4th order
1	0.303	0.356	-0.094	-0.033	0.049
1.8	0.659	0.262	-0.127	0.016	
2.6	0.921	0.135	-0.111		
3.4	1.056	0.024			
4.2	1.080				

$$P_n(x) = 1.08 + (\frac{x-4.2}{0.8})0.024 - (\frac{x-4.2}{0.8})(\frac{x-4.2}{0.8} + 1)\frac{0.111}{2}$$

$$+(\frac{x-4.2}{0.8})(\frac{x-4.2}{0.8} + 1)(\frac{x-4.2}{0.8} + 2)\frac{0.016}{6}$$

$$+(\frac{x-4.2}{0.8})(\frac{x-4.2}{0.8} + 1)(\frac{x-4.2}{0.8} + 2)(\frac{x-4.2}{0.8} + 3)\frac{0.02}{24}$$

با ساده کردن معادلات بالا، فرم نهایی چند جمله‌ای به صورت مقابل درخواهد آمد:

$$P_n(x) = 0.005x^4 - 0.0546x^3 + 0.1213x^2 + 0.3759x - 0.1446$$

ب:

با قرار دادن مقدار 1.65 در رابطه‌ی چند جمله‌ای داریم:

$$P_n(1.65) = 0.5977 \quad f(1.65) = 0.5965 \Rightarrow e_n = |0.5977 - 0.5965| = 0.0012$$

ج:

طبق رابطه‌ی درون اسلاید داریم:

$$e(x) \leq (x-1)(x-1.8)(x-2.6)(x-3.4)(x-4.2)\frac{f^{(5)}(t)}{5!}$$

ابتدا مشتق 5 تابع را بدست می‌آوریم:

$$f^{(5)}(x) = -\frac{(x^2 - 20x + 80)\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{64}$$

در بازه‌ی $[1, 4.2]$ عبارت $|f^{(5)}(x)|$ در نقطه‌ی 1 ماکسیمم است و مقدار 0.578 را دارد و در نهایت می‌توانیم بنویسیم:

$$e(x) \leq (1.65-1)(1.65-1.8)(1.65-2.6)(1.65-3.4)(1.65-4.2)\frac{0.578}{120}$$

$$= 0.00199091648437$$

همانطور که مشاهده می‌کنیم، خطای واقعی از کران بالای خطا کمتر است.

.2

n-1ام	...	دوم	اول	f_i

در ستون اول یعنی ستون f_i ، تعداد اعداد برابر n است. پس تعداد کسرهای تفاضلی مرتبه اول (یعنی ستون دوم) برابر با n-1 ، تعداد کسرهای تفاضلی مرتبه دوم برابر با n-2 و با همین روند تعداد کسرهای تفاضلی مرتبه n-1 (ستون آخر) برابر با ۱ است. در نتیجه تعداد کل کسرهای تفاضلی برابر است با :

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

می‌دانیم مشتق مرتبه‌ی n ام تابع $f(x) = e^x$ برابر خود تابع است. به عبارت دیگر $f^{(n)}(x) = e^x$

طبق فرمول خطای چند جمله‌ای درونیاب داریم:

$$|f(x) - P(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)| \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \quad (1)$$

از طرفی تابع e^x در بازه‌ی [-1,1] صعودی است و لذا بیشترین مقدار آن در $x = 1$ رخ می‌دهد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq e^1 \leq e$$

از طرفی هر کدام از $|(x - x_j)|$ ها با توجه به آن که $x.x_j \in [-1.1]$ کوچک‌تر یا مساوی ۲ خواهند بود. به عبارت دیگر:

$$\forall x.x_j \in [-1.1]: |x - x_j| \leq 2$$

حال برای کمتر کردن کران بالای خطا، از این فرض که یکی از x_j ها برابر صفر است استفاده می‌کنیم. همچنین می‌دانیم $x_0 = -1$ و $x_{n+1} = 1$. اگر فرض کنیم در اندیس z داشته باشیم $x_z = 0$ خواهیم داشت:

$$|(x - x_0)(x - x_z)(x - x_n)| = |(x - (-1))(x)(x - 1)| = |x^3 - x|$$

تابع فوق تابعی زوج است لذا بیشترین مقدار آن در بازه‌ی [-1,0] با بیشترین مقدار آن در بازه‌ی [0,1] برابر است. با مشتق گیری از این تابع و صفر قرار دادن آن، به مقدار $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ می‌رسیم و در نتیجه داریم:

$$|(x - x_0)(x - x_z)(x - x_n)| \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

در نتیجه طبق (1) :

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{2\sqrt{3}e \times 2^{n-2}}{9(n+1)!}$$

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{2^n e}{(n+1)!}$$

.3

دقت کنید می‌توانیم با استفاده از تکنیک خطی سازی، یک تابع خطی را به تابع fit کنیم:

$$y = a2^{bx} \Rightarrow log_2(y) = log_2(a) + bx$$

با تشکیل جدول و دستگاه خواهیم داشت:

x_i	y_i	$X_i = x_i$	$Y_i = log_2(y)$	X_i^2	X_iY_i
1	1.81	1	0.856	1	0.856
2	1.43	2	0.516	4	1.032
4	5.75	4	2.523	16	10.092
8	10	8	3.321	64	26.568
		$S_X = 15$	$S_Y = 7.216$	$S_{x^2} = 85$	$S_{XY} = 38.548$

حال دقت کنید دستگاه fit به صورت مقابل است:

$$Y = a_0 + a_1X \Rightarrow \begin{cases} a_0(n+1) + a_1(\sum_{i=0}^{n} X_i) = \sum_{i=0}^{n} Y_i \\ a_0(\sum_{i=0}^{n} X_i) + a_1(\sum_{i=0}^{n} X_i^2) = \sum_{i=0}^{n} X_iY_i \end{cases}$$

با قرار دادن مقادیر بدست آمده در دستگاه بالا و حال آن داریم:

$$\begin{cases} 4a_0 + 15a_1 = 7.216 \\ 15a_0 + 85a_1 = 38.548 \end{cases} \Rightarrow a_0 = 0.3056 \quad a_1 = 0.3996$$

حال با وارون تغییر ایجاد شده در بخش اول داریم:

$$Y = log_2(a) + bx = 0.3056 + 0.3996X \Rightarrow \begin{cases} a = 2^{0.3056} = 1.236 \\ b = 0.3996 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 1.236 \times 2^{0.3996x}$$

.4

تابع 2 متغیره $f(\alpha, P)$ را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم:

$$f(\alpha, P) = \int_0^{\pi} [cos(x) - (\alpha x + P)]^2 dx$$

حال برای پیدا کردن مینیمم تابع f نیاز داریم گرادیان آن را برابر با 0 قرار دهیم که به معنای تشکیل دستگاه مقابل است:

$$\nabla f = 0 \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

با مشتق گرفتن از تابع f داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{\pi} [cos(x) - (\alpha x + P)]^2 dx = \int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial \alpha} [cos(x) - (\alpha x + P)]^2 dx$$

$$= \int_0^{\pi} -2x[cos(x) - (\alpha x + P)] dx = \int_0^{\pi} -2(xcos(x) - \alpha x^2 - Px) dx$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{2\pi^3 \alpha + 3\pi^2 P + 12}{3} \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{2\pi} P - \frac{6}{\pi^3} \qquad (۱)$$

$$\frac{\partial f}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \int_0^{\pi} [cos(x) - (\alpha x + P)]^2 dx = \int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial P} [cos(x) - (\alpha x + P)]^2 dx$$

$$= \int_0^{\pi} 2[cos(x) - (\alpha x + P)] dx = \int_0^{\pi} 2(cos(x) - \alpha x - P) dx$$

$$\frac{\partial f}{\partial P} = \pi \cdot (\pi \alpha + 2P) \Rightarrow P = -\frac{\pi}{2} \alpha$$

حال با قرار دادن رابطه‌ی بالا در رابطه‌ی (۱) داریم:

$$\alpha = -\frac{3}{2\pi}(-\frac{\pi}{2}\alpha) - \frac{6}{\pi^3} \Rightarrow \frac{1}{4}\alpha = -\frac{6}{\pi^3} \Rightarrow \alpha = -\frac{24}{\pi^3}$$

در نهایت داریم:

$$\alpha = -\frac{24}{\pi^3}, \;\; P = -\frac{\pi}{2}\alpha = \frac{12}{\pi^2} \Rightarrow y = -\frac{24}{\pi^3} x + \frac{12}{\pi^2}$$

دقت کنید نقطه‌ی بالا به صورت تضمینی، نقطه‌ی مینیمم است، زیرا می‌توانیم با افزایش مقدار α مقدار انتگرال را تا حد دلخواه بزرگ کنیم.

.5

برای اثبات این سوال ابتدا نیاز به لم مقابل داریم:

لم:

اگر تابع پیوسته و مشتق‌پذیر $f(x)$ دارای 2 صفر در نقاط a و b باشد، حداقل یک نقطه همانند $c \in (a,b)$ وجود دارد که داریم:

$$f(a) = f(b) = 0 \Rightarrow \exists c \in (a,b) \quad f'(c) = 0$$

از لم بالا نتیجه می‌شود اگر تابع $f(x)$ دارای n ریشه در یک بازه باشد، تابع $f'(x)$ حداقل دارای $n-1$ ریشه در همان بازه خواهد بود.

اثبات:

دقت کنید فرض می‌کنیم تابع $f(x)$ برابر با 0 نیست زیرا در آن صورت لم به صورت بدیهی برقرار است. حال اگر تابع $f(x)$ برابر با 0 نباشد در بازه‌ی (a,b) حتما یک ماکسیمم یا مینیمم در نقطه‌ی c دارد و از طرفی می‌دانیم مشتق یک تابع پیوسته در نقاط ماکسیمم و مینیمم 0 است و می‌توانیم بگوییم $f'(c) = 0$ ■

دقت کنید تنها لازم است حکم را برای نقاطی اثبات کنیم که برابر با x_i نباشند، زیرا در این نقاط 2 طرف معادله 0 می‌شوند و حکم برقرار است.

برای $x \neq x_i$ تابع $h(t)$ را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم:

$$h(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)} \prod_{i=0}^{n}(t - x_i)$$

حال دقت کنید تابع $h(t)$ دارای $n+2$ ریشه در نقاط $(x_0, x_1, \dots, x_n, x)$ می‌باشد و طبق لم بالا مشتق آن حداقل دارای $n+1$ ریشه و مشتق 2 آن دارای حداقل n ریشه و با ادامه این روش تا مشتق $n+1$ مشخص می‌شود مشتق $n+1$ ام $h(t)$ حداقل دارای یک ریشه می‌باشد. این ریشه را r می‌نامیم و می‌توانیم بنویسیم:

$$h^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - p^{(n+1)}(t) - \left(\frac{f(x) - p(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}\right) \frac{d^{n+1}}{dt^{(n+1)}} \prod_{i=0}^{n}(t - x_i)$$

$$\Rightarrow h^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - p^{(n+1)}(t) - \left(\frac{f(x) - p(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}\right)(n+1)!$$

دقت کنید مشتق n ام یک چندجمله‌ای که ضریب توان n آن برابر با 1 است برابر با $n!$ فاکتوریل است.

$$\frac{d}{dx}(x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n) = (nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \dots + a_{n-1})$$

$$\frac{d}{dx}(nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \dots + a_{n-1}) =$$
$$((n)(n-1)x^{n-2} + a_1(n-1)(n-2) + \dots + 2a_{n-2})$$

با ادامه مشتق گرفتن به صورت بالا به $n!$ میرسیم.

از آن جا که r ریشه‌ی تابع $h^{(n+1)}(t)$ است، می‌توانیم بنویسیم:

$$f^{(n+1)}(r) - p^{(n+1)}(r) - \left(\frac{f(x) - p(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}\right)(n+1)! = 0$$

دقت کنید ما با استفاده از نقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ تابع f را درونیابی کردیم، که بیانگر این است که درجه‌ی چند جمله‌ای p حداکثر n است و داریم:

$$p^{(n+1)}(r) = \frac{d}{dt} n! = 0$$

پس می‌توانیم بنویسیم:

$$f^{(n+1)}(r) = \left(\frac{f(x) - p(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}\right)(n+1)!$$

$$\Rightarrow f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(r)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \quad \blacksquare$$

دقت کنید نقطه‌ی r طبق لم در بازه‌ی (a,b) قرار دارد، و در اثبات مکان آن وابسته به نقطه‌ی x بود، به همین دلیل می‌توانیم آن را به صورت تابعی از x نشان دهیم به این صورت:

$$r(x) : [a,b] \to (a,b)$$

پس تمام شروط صورت سوال برقرار می‌شوند و حکم اثبات می‌شود.