به نام خدا

علی مهدوی فر 98106072 امتحان پایانترم محاسبات عددی ۱۴۰۰/۴/۱۳

(۱) فرض کنید $\bar{x}$ با خطای $e_{\bar{x}}$ و $\bar{y}$ با خطای $e_{\bar{y}}$ مقادیر نزدیک به هم داشته باشند.

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow \bar{x}-e_{\bar{x}} < x < \bar{x}+e_{\bar{x}} \\ -\bar{y}-e_{\bar{y}} < -y < -\bar{y}+e_{\bar{y}} \end{array}\right\} \longrightarrow \bar{x}-\bar{y}-(e_{\bar{x}}+e_{\bar{y}}) < x-y < \bar{x}-\bar{y}+(e_{\bar{x}}+e_{\bar{y}})$$

$$\longrightarrow e_{\bar{x}-\bar{y}} \leqslant e_{\bar{x}}+e_{\bar{y}}$$

اکنون خطای نسبی را محاسبه می‌کنیم:

$$\delta_{\bar{x}-\bar{y}} \leqslant \frac{e_{\bar{x}-\bar{y}}}{|\bar{x}-\bar{y}|} = \frac{e_{\bar{x}}+e_{\bar{y}}}{\bar{x}-\bar{y}} = \frac{\bar{x}}{\bar{x}-\bar{y}} \frac{e_{\bar{x}}}{\bar{x}} + \frac{\bar{y}}{\bar{x}-\bar{y}} \frac{e_{\bar{y}}}{\bar{y}}$$

$$\longrightarrow \delta_{\bar{x}-\bar{y}} \leqslant \frac{\bar{x}}{|\bar{x}-\bar{y}|} \delta_{\bar{x}} + \frac{\bar{y}}{|\bar{x}-\bar{y}|} \delta_{\bar{y}}$$

اگر $\bar{x}$ و $\bar{y}$ بسیار به هم نزدیک باشند <u>مخرج کسرها بسیار کوچک شده</u>، خطای نسبی رشد زیادی می‌کند.

---

در رابطهٔ داده شده:

$$y = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

برای $x$ های منفی بزرگ، دو عبارت داخل آرگومان $\ln$ بسیار به هم از نظر اندازه نزدیک اند و علامت قرینه دارند، یعنی دو عبارت $\sqrt{1+x^2}$ و $|x|$ از هم تفریق می‌شوند که بنا بر بخش اول سوال، انتشار خطای نسبی بسیار زیادی دارند. لذا در مزدوج این عبارت ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$y = \ln\left[(\sqrt{1+x^2}+x)\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}-x}\right] = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}\right)$$

عبارت آخر برای $x$ های بسیار بزرگ منفی مناسب‌تر است زیرا در مخرج دو عبارت مثبت جمع می‌شود

همچنین می‌توان عبارت را ساده‌تر کرد:

$$y = -\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$$

۲) دنباله $\{x_n\}$ داده شده، همان دنباله روش نقطه ثابت است برای تابع $g(x)=\frac{2x^2-1}{4(x-1)}$

ابتدا نقاط ثابت را بدست می‌آوریم:

$$g(x)=x \to x\times 4(x-1)=2x^2-1 \to 2x^2-4x+1=0 \to x=1\pm 1/\sqrt{2}$$

مشتق تابع $g$ را در این ریشه‌ها بدست می‌آوریم.

$$f'g-g'f$$

$$g'(x)=\frac{1}{4}\,\frac{(4x)(x-1)-(1)(2x^2-1)}{(x-1)^2}=\frac{1}{4}\,\frac{4x^2-4x-2x^2+1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x+1}{4(x-1)^2}$$

در صورت عبارت مشتق فوق، همان معادله $2x^2-4x+1$ ظاهر شد لذا نقاط ثابت $x_{1,2}=1\pm 1/\sqrt{2}$ مشتق $g$ را صفر می‌کنند:

$$g'(1+1/\sqrt{2})=\frac{0}{4(1/2)}=0$$

$$g'(1-1/\sqrt{2})=\frac{0}{4(-1/\sqrt{2})^2}=0$$

لذا بنابر قضیه‌ای که در کلاس طرح شد اگر مشتق تابع $g$ در نقطه ثابت برابر با صفر شود $(g'(\alpha)=0)$ مرتبه همگرایی به آن ریشه حداقل ۲ است. لذا حکم سوال ثابت شد.

(در این مسئله می‌توان بررسی کرد $g''(1\pm 1/\sqrt{2})\neq 0$ و لذا مرتبه همگرایی نقطه ثابت بنابر همان قضیه دقیقاً ۲ خواهد بود. امّا در حکم سوال به محاسبه آن نیازی نیست)

۳) چندجمله‌ای درون‌یاب پیش‌روی نیوتن را درنظر می‌گیریم (... $f_0=f(a)$ ، $f_1=f(a+h)$ ، $f_2=f(a+2h)$ )

$$P_2(x)=\sum_{s=0}^{2}\binom{r}{s}\Delta^s f_0 = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{r(r-1)(r-2)}{6}\Delta^3 f_0$$

که در آن $x=a+rh \rightarrow r=\frac{x-a}{h}$ است. لذا $\frac{dr}{dx}=\frac{1}{h}$ ، $\frac{d^2r}{dx^2}=-\frac{1}{h^2}$

اکنون مشتق دوم $f$ را با مشتق دوم چندجمله‌ای درون‌یاب تخمین می‌زنیم:

$$f''(x)=\frac{d^2}{dx^2}f \simeq \frac{d^2}{dx^2}P = \frac{1}{h^2}\frac{d^2}{dr^2}P = \frac{1}{h^2}\left[0+0+1\times\Delta^2 f_0 + (r-1)\Delta^3 f_0\right]$$

برای تقریب، از جملهٔ $(r-1)\Delta^3 f_0$ صرف‌نظر می‌کنیم چون $0<r<2 \rightarrow -1<r-1<1$

$$f''(x)\simeq \frac{1}{h^2}\Delta^2 f_0$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta f_0 = f_1 - f_0\\ \Delta f_1 = f_2 - f_1\end{array}\right\} \Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0 = f_2 - 2f_1 + f_0 = f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)$$

$$\Rightarrow \boxed{f''(x) \simeq \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{h^2}}$$

از آنجا که بازهٔ درون‌یابی $P_2$ بازهٔ $[a,a+2h]$ بود، بازهٔ تقریب فوق هم $[a,a+2h]$ است.

۴) الف) از روش خطی سازی استفاده می‌کنیم:

$$h(x)=\frac{1}{Ax+B} \longrightarrow \underbrace{\frac{1}{h(x)}}_{Y} = \underset{a_1}{A}\,\underset{X}{x} + \underset{a_0}{B}$$

| | | | | | جمع |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | -۱ | ۰ | ۱ | ۲ | ۲ |
| $Y_i$ | ۱ | ۲ | ٤ | ٤ | ۱۱ |
| $X_i^2$ | ۱ | ۰ | ۱ | ۴ | ۶ |
| $X_iY_i$ | -۱ | ۰ | ۴ | ۸ | ۱۱ |

$$\begin{cases} a_0(\overset{۳}{n}+1)+a_1\sum_{i=0}^{n} X_i = \sum Y_i \\ a_0\sum X_i + a_1 \sum X_i^2 = \sum X_i Y_i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴a_0+۲a_1=۱۱ \\ ۲a_0+۶a_1=۱۱ \end{cases} \rightarrow \boxed{a_0=۲/۲},\ \boxed{a_1=۱/۱}$$

لذا برازش کمترین مربعات تابع $f$ فوق با $\frac{1}{Ax+B}$ به صورت $\boxed{h(x)=\frac{1}{۱/۱x+۲/۲}}$ است.

ب) برای انتگرال گیری از $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ نقاط داده شده را می‌نویسیم:

| $x_i$ | -۱ | ۰ | ۱ | ۲ |
|---|---|---|---|---|
| $g_i$ | ۱ | ۲ | ۴ | ۴ |

$h=1$

$$I=\int_{-1}^{۲} \frac{1}{f(x)}dx \simeq \frac{h}{۲}\left[g_0+۲g_1+۲g_2+g_3\right] = \frac{1}{۲}\left[۱+۴+۸+۴\right]=\frac{۱۷}{۲}=\underline{۸/۵}$$

ج) اگر به جای $f(x)$ از $h(x)=\frac{1}{۱/۱x+۲/۲}$ استفاده کنیم:

$$I'=\int_{-1}^{۲}\frac{1}{f(x)}dx \simeq \int_{-1}^{۲} ۱/۱x+۲/۲\,dx = \left(\frac{۱/۱}{۲}x^2+۲/۲x\right)_{-1}^{۲} = ۶/۶-(-۱/۶۵)$$

$$=\underline{۸/۲۵}$$

اختلاف جواب‌های ب و ج:

$$|I'-I| = |۸/۵-۸/۲۵| = \underline{۰/۲۵}$$

۵) می‌خواهیم انتگرال عددی $f(x)=\sin x$ را در بازهٔ $[0,\pi]$ بگیریم.

در روش ذوزنقه‌ای خطا برابر است با:

$$E(T(h)) = \frac{b-a}{12} h^2 f''(z)$$

پس برای اینکه خطا کمتر از $\varepsilon = 2\times10^{-5}$ باشد:

$$\frac{b-a}{12} h^2 m_2 \leqslant \varepsilon \longrightarrow h \leqslant \sqrt{\frac{12\,\varepsilon}{(b-a)m_2}}$$

که $m_2 = \max|f''(x)|$ در بازهٔ $[a,b]$ است.

$$f(x) = \sin x \longrightarrow f' = \cos x \longrightarrow f'' = -\sin(x) \longrightarrow m_2 = \max_{[0,\pi]} f'' = 1$$

$$\longrightarrow h \leqslant \sqrt{\frac{12\times2\times10^{-5}}{\pi\times1}} = \underline{0.00874}$$

اما در روش سیمپسون ۱/۳ خطا برابر است با:

$$E(S_{1/3}(h)) = \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(z)$$

$$\frac{b-a}{180} h^4 m_4 \leqslant \varepsilon \longrightarrow h \leqslant \sqrt[4]{\frac{180\,\varepsilon}{(b-a)m_4}}$$

$$f'' = -\sin(x) \longrightarrow f^{(3)} = -\cos x \longrightarrow f^{(4)} = \sin(x) \longrightarrow m_4 = \max_{[0,\pi]} f^{(4)} = 1$$

$$\longrightarrow h \leqslant \sqrt[4]{\frac{180\times2\times10^{-5}}{\pi\times1}} = \underline{0.18394}$$

در روش سیمپسون ۱/۳، مقدار h بزرگ‌تر است لذا به تعداد نقاط کمتری $\left(n \simeq \frac{b-a}{h}\right)$ نیاز داریم

برای اینکه بتوانیم خطا را به کمتر از $2\times10^{-5}$ برسانیم. پس روش سیمپسون ۱/۳ مناسب‌تر است.

تعداد نقاط مورد نیاز (از ج. $\sin x$ در $S_{1/3}$) $\geqslant \frac{b-a}{0.18394} = 17.07 \longrightarrow \underline{n \geqslant 18}$

Scanned with CamScanner

(۶) حل تحلیلی این معادله دیفرانسیل به صورت $y = e^{\lambda x}$ است پس برای $\lambda < 0$ انتظار داریم داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y = 0$$

حال بررسی می‌کنیم که در روش اویلر برای این دستگاه $\begin{cases} y' = f(x,y) = \lambda y \\ f(0) = 1 \end{cases}$ جمله‌ای بعدی چگونه بدست می‌آیند:

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n = y_n + \lambda h y_n = (1+\lambda h) y_n \qquad y_{n+1} = (1+\lambda h) y_n$$

$$\longrightarrow y_n = (1+\lambda h) y_{n-1} = (1+\lambda h)^2 y_{n-2} = \cdots = (1+\lambda h)^n y_0 = (1+\lambda h)^n$$

اما از طرفی در فرض مسئله داریم:

$$-2 < \lambda h < 0 \longrightarrow -1 < 1+\lambda h < 1 \longrightarrow |q| = |1+\lambda h| < 1$$

پس دنباله $y_n = (1+\lambda h)^n$ یک دنباله هندسی با $y_0 = 1$ و قدرنسبت کوچکتر از ۱ است لذا در بی‌نهایت به صفر همگرا می‌شود.

$$|1+\lambda h| < 1 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} (1+\lambda h)^n = 0 \ \checkmark$$

پس روش اویلر برای معادله دیفرانسیل داده شده و با شرط $-2 < \lambda h < 0$ پایدار است.

(۷) از روش رانگه کوتای مرتبه ۲ با $a=b=\frac{1}{2}$ و $\alpha=\beta=1$ استفاده می کنیم که معادل اویلر اصلاح شده است.

معادله دیفرانسیل به صورت رو به رو است:

$$\begin{cases} y' = x^2+y^2+2xy = (x+y)^2 = f(x,y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

در گام رانگه کوتا برای بدست آوردن $y_{i+1}$ داریم:

$$\boxed{k_1 = hf(x_i, y_i) = 0.25\,(x_i+y_i)^2}$$

$$\boxed{k_2 = hf(x_{i+1}, y_i+k_1) = 0.25\,(x_i+h+y_i+k_1)^2}$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1+k_2)}$$

مطابق عبارات فوق در جدول گام های روش را پیش می بریم:

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $k_1$ | $k_2$ | $y_{i+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۱ | ۰٫۲۵ | ۰٫۵۶۲۵ | ۱٫۴۰۶۲۵ |
| ۱ | ۰٫۲۵ | ۱٫۴۰۶۲۵ | ۰٫۶۸۵۷۹۱ | ۱٫۶۷۹۶۶۹ | ۲٫۵۸۸۹۸۰ |

لذا مقدار $y(0.5)$ را با مقدار $\underline{y_2 = 2.588980}$ تخمین می زنیم.

(۸) ابتدا تجزیه $LU$ دولیتل را برای $A$ بدست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix}4 & -2 & -1\\ 1 & -1 & 4\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ l_{21} & 1 & 0\\ l_{31} & l_{32} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & u_{13}\\ 0 & u_{22} & u_{23}\\ 0 & 0 & u_{33}\end{bmatrix}$$

سطر اول ضرب: $u_{11}=4 \;/\; u_{12}=-2 \;/\; u_{13}=-1$

سطر دوم ضرب: $l_{21}\times 4=1 \rightarrow l_{21}=1/4 \;/\; 1/4\times(-2)+u_{22}=-1 \rightarrow u_{22}=-1/2 \;/\; u_{23}=\dfrac{4-\frac{1}{4}(-1)}{}=4.25$

سطر سوم ضرب: $l_{31}\times(4)=-1 \rightarrow l_{31}=-\frac{1}{4} \;/\; l_{32}=\dfrac{3-(-\frac{1}{4})(-2)}{-\frac{1}{2}}=-5 \;/\; u_{33}=1-(-\frac{1}{4})(-1)-(-5)(4.25)=22$

$$\rightarrow A=LU=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0.25 & 1 & 0\\ -0.25 & -5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -2 & -1\\ 0 & -0.5 & 4.25\\ 0 & 0 & 22\end{bmatrix}$$

اکنون برای حل معادله $AX=[b_1;b_2]$ باید در معادله $Ax_1=b_1$ و $Ax_2=b_2$ را حل کنیم.

برای حل $Ax_1=b_1=\begin{bmatrix}1\\-5\\4\end{bmatrix}$ ابتدا $Ly_1=b_1$ را حل می‌کنیم و سپس با $y_1$ بدست آمده، $Ux_1=y_1$ را حل می‌کنیم ( $Ax=L\underbrace{Ux}_{y}=b$ )

$$Ly_1=b_1 \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0.25 & 1 & 0\\ -0.25 & -5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{11}\\ y_{12}\\ y_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -5\\ 4\end{bmatrix} \begin{array}{l}\rightarrow y_{11}=1\\ \rightarrow y_{12}=-5.25\\ \rightarrow y_{13}=-22\end{array}$$

$$Ux_1=y_1 \rightarrow \begin{bmatrix}4 & -2 & -1\\ 0 & -0.5 & 4.25\\ 0 & 0 & 22\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}\\ x_{12}\\ x_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -5.25\\ -22\end{bmatrix} \begin{array}{l}\rightarrow x_{11}=1\\ \rightarrow x_{12}=2\\ \rightarrow x_{13}=-1\end{array}$$

$$Ly_2=b_2 \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0.25 & 1 & 0\\ -0.25 & -5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{21}\\ y_{22}\\ y_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 5\\ -4\end{bmatrix}=-b_1 \rightarrow y_2=-y_1=\begin{bmatrix}-1\\ 5.25\\ 22\end{bmatrix}$$

$$Ux_2=y_2=-y_1 \longrightarrow x_2=-x_1=\begin{bmatrix}-1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$$

لذا جواب دستگاه $AX=[b_1;-b_1]$ برابر است با:

$$X=[x_1;x_2]=[x_1;-x_1]=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$