



محاسبات عددی

نیم‌سال اول ۹۹

مدرس: دکتر فاطمه بهاری‌فرد

تمرین سری چهارم

فصل چهارم

تاریخ تحویل: ۱۴۰۰/۰۲/۲۸

لطفا توجه فرمایید که:

* مهلت ارسال تمرین ساعت ۲۳:۵۹ روز ۲۸ اردیبهشت ماه است.

* لطفا تمرین‌های تئوری و عملی را در یک فایل فشرده قرار داده و با نام $HW4_StudentID$ آپلود کنید.

* لطفا تمرین‌ها را از یکدیگر کپی نکنید. در صورت وقوع چنین مواردی مطابق با سیاست درس رفتار می‌شود.

۱. تابع جدولی زیر مفروض است. با استفاده از روش تفاضل مرکزی $f'(1)$ و $f''(1/2)$ بیابید (۱۰ نمره)

xi	۰/۴	۰/۸	۱/۲	۱/۶
$f(xi)$	۲	۱	۰/۷۵	۰/۲۵

۲. الف) با روش نقطه میانی و $h = 2$ مقدار تابع زیر را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

$$\int_1^6 x \ln(x) dx$$

ب) برای محاسبه انتگرال فوق به روش سیمپسون، مقدار n را چقدر بگیریم تا خطا از ۰.۰۰۴ کمتر شود؟ (۱۰ نمره)۳. الف) ضرایب a_1 و a_2 و a_3 را در رابطه زیر بیابید بطوریکه خطای مرتبه h^2 برای تخمین مشتق زیر حاصل شود (۱۰ نمره)

$$f'(a) = \frac{a_1 f(a) + a_2 f(a+h) + a_3 f(a+2h)}{h}$$

ب) با استفاده از تقریب حاصل در قسمت (الف)، مقدار مشتق تابع $f(x) = x^2 + 3x + 2$ را در نقطه $a = 1$ و با طول گام $h = 0.1$ تقریب بزنید و خطای این تقریب را بیابید. (۱۰ نمره)۴. فرض کنید $T(h)$ و $S(h)$ به ترتیب تقریب‌های دوزنقه‌ای و سیمپسون برای $\int_a^b f(x) dx$ باشد، نشان دهید: (۲۰ نمره)

$$S(h/2) = \frac{4T(h/2) - T(h)}{3}$$

۵. فرض کنید $I(h) = \int_a^{a+h} x \ln(x) dx$ فرمول تقریبی انتگرال گیری $I(h) = hf(a+h) - 0.5h^2 f'(a)$ در دست است. جمله خطای آن را بدست آورید. (راهنمایی: فرض کنید $F(h) = \int_a^t f(x) dx$ و از بسط تیلور استفاده کنید.) (۲۰ نمره)

۶. انتگرال $\int_{\pi/5}^{\pi/2} \frac{x}{\sin x} dx$ را با استفاده از روش رامبرگ (بر اساس سیمپسون) تا گام $h = \frac{1}{16}$ حل کنید. (۱۰ نمره)

۷. (برنامه نویسی)

الف) برنامه ای بنویسید که با گرفتن تعداد مراحل (n) ، ابتدا و انتهای بازه (به صورت $[a, b]$)، به روش دوزنقه ای و سیمپسون $\frac{3}{8}$ و $\frac{1}{3}$ طول تابع $x \ln(x)$ را محاسبه نماید. (۱۰ نمره)

ب) به ازای n از ۱ تا ۱۰۰ نمودار طول تابع فوق بر حسب n برای هر ۳ روش رسم کنید. (۱۰ نمره)

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2} dx \text{ منظور از طول تابع است.}$$