



محاسبات عددی

نیم‌سال دوم ۹۹

مدرس: دکتر فاطمه بهاری‌فرد

تمرین سری دوم

فصل دوم

تاریخ تحویل: ۱۴۰۰/۱/۱۸

لطفا توجه فرمایید که:

* مهلت ارسال تمرین ساعت ۱۱:۵۹ روز ۱۸ فروردین ماه است.

* لطفا تمرین‌های تئوری و عملی را در یک فایل فشرده قرار داده و با نام $HW2_StudentID$ آپلود کنید.

* لطفا تمرین‌ها را از یکدیگر کپی نکنید. در صورت وقوع چنین مواردی مطابق با سیاست درس رفتار می‌شود.

۱. در این سوال می‌خواهیم تفاوت عملکرد روش‌های تصنیف و نابجایی در مورد توابع مختلف را بررسی کنیم.

توابع $f(x) = -12 - 21x + 18x^2 - 2/75x^3$, $g(x) = x^{10} - 1$ را در نظر بگیرید:(الف) با در نظر گرفتن حدس اولیه $x_1 = 0$, $x_0 = -1$ ، ریشه‌ی تابع f را به کمک روش‌های تصنیف و نابجایی طوری تقریب بزنید که داشته باشیم: $|f(x_n)| < 0/05$ (۱۰ نمره)(ب) با در نظر گرفتن حدس اولیه $x_1 = 1/3$, $x_0 = 0$ ، ریشه‌ی تابع g را که مقدار دقیق آن برابر ۱ می‌باشد، به کمک روش‌های تصنیف و نابجایی تقریب بزنید. در این بخش شرط توقف به‌گونه‌ای است که در حداقل یکی از روش‌ها، شرط $|x_n - 1| < 0/02$ ارضا شود و بدین ترتیب تعداد تکرار هر دو روش تصنیف و نابجایی برای تقریب ریشه‌ی تابع g با هم برابر است. (۱۰ نمره)(ج) باتوجه به نتایج به‌دست آمده از قسمت‌های الف و ب، برای هریک از توابع f و g مشخص کنید که کدامیک از روش‌ها عملکرد بهتری دارند. (۵ نمره)

۲. چند جمله‌ای زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = 1 - x - \sin(x)$$

(الف) ثابت کنید که این تابع در بازه‌ی $(0, 1)$ دقیقا یک ریشه دارد. (۷ نمره)(ب) به کمک روش وتر، ریشه‌ی موجود در بازه‌ی $(0, 1)$ این تابع را با ۵ بار تکرار بیابید. (جواب نهایی با ۴D) (۸ نمره)۳. نشان دهید اگر $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ باشد، مرتبه‌ی همگرایی روش نیوتن-رافسون برای تابع f برابر ۲ نیست. (۲۰ نمره)

راهنمایی: با توجه به اطلاعات موجود در مورد تابع، آن را به فرم کلی بازنویسی کنید.

۴. معادله‌ی $f(x) = \sin(\sqrt{x}) - x$ را در نظر بگیرید. به کمک روش نقطه ثابت و با شروع از نقطه $0/5$ ، ریشه‌ی این تابع را در بازه‌ی $(0/5, 1)$ بیابید؛ شرط توقف را $|x_n - x_{n-1}| < 0/002$ در نظر بگیرید. دقت کنید که برای تابع $g(x)$ انتخابی خود، شرایط همگرایی مربوط به روش نقطه ثابت را بررسی نمایید. (۱۵ نمره)

۵. مرتبه همگرایی دنباله‌ی تکراری زیر به عدد $\alpha = \sqrt{b}$, $(b > 0)$ را با ذکر دلیل بیابید. (۱۵ نمره)

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3b)}{3x_n^2 + b}$$

۶. (برنامه نویسی) هدف از این برنامه، پیاده‌سازی روش نیوتن رافسون با شرایطی که از شما خواسته شده، می‌باشد. در ابتدا یک عبارت ریاضی معتبر در زبان پایتون را بعنوان تابع $f(x)$ و یک عبارت ریاضی معتبر دیگر که باید مشتق همان عبارت قبلی باشد را ورودی بگیرید. دقت کنید که این عبارات می‌توانند شامل توابع مثلثاتی و لگاریتمی نیز باشند اما این عبارات تنها بر حسب x می‌باشند. سپس ۲ عدد n و x را از ورودی بخوانید که بترتیب تعداد دفعات تکرار روش نیوتن و نقطه‌ی شروع روش می‌باشند. حال کافی است که با شروع از x به تعداد n بار روش نیوتن-رافسون را بر روی تابع $f(x)$ اجرا کنید. اگر در حین یکی از این n بار اجرای روش نیوتن، با مشکل تقسیم بر صفر روبه‌رو شدید، کافی است پیام *zero division* را چاپ کنید و در غیر این صورت نتیجه‌ی نهایی n بار اجرای روش نیوتن-رافسون را با ۵ رقم اعشار در خروجی نمایش دهید. (۱۵ نمره)