



محاسبات عددی

نیم‌سال دوم ۹۹

مدرس: دکتر فاطمه بهاری‌فرد

تمرین سری سوم

فصل سوم

تاریخ تحویل: ۱۴۰۰/۲/۷

لطفا توجه فرمایید که:

* مهلت ارسال تمرین ساعت ۲۳:۵۹ روز ۷ اردیبهشت ماه است.

* لطفا تمرین‌های تئوری و عملی را در یک فایل فشرده قرار داده و با نام $HW3_StudentID$ آپلود کنید.

* لطفا تمرین‌ها را از یکدیگر کپی نکنید. در صورت وقوع چنین مواردی مطابق با سیاست درس رفتار می‌شود.

۱. تابع $f(x) = \ln(x+1)$ ، $x_0 = 1$ و $x_1 = 1/1$ مفروض می‌باشند. با استفاده از درونیابی خطی مقدار مناسب $f(1/04)$ را محاسبه و حد بالای خطای آن را نیز بیان نمایید. (۱۰ نمره)

۲. یک منطقه کشاورزی را در نظر بگیرید. هدف محاسبه‌ی میزان عمق چاه مورد نیاز برای رسیدن به آب این منطقه است. ۵ چاه از قبل کنده شده و اطلاعات آن در جدول زیر آمده است. ستون اول اطلاعات مربوط به فاصله‌ی آنها از مبدا مشخص و ستون دوم عمق چاه در آن منطقه را نشان می‌دهد. با روش‌های زیر مسئله را برای یافتن عمق سایر چاه‌ها حل کنید. (۳۰ نمره)

(الف) روش لاگرانژ

(ب) روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن

(ج) روش پیشروی نیوتن

(د) روش پسروی نیوتن

(ه) روش مرکزی پیشروی نیوتن

(ز) روش مرکزی پسروی نیوتن

x	۱	$1/3$	$1/6$	$1/9$	$2/3$
y	۷۶	۶۲	۴۵	۲۸	۱۱

۳. در مسئله قبل می‌خواهیم چاه‌های دیگر در فاصله $x = 0/2$ و $x = 1/5$ از مبدا حفر کنیم: (۲۰ نمره)

(الف) برای هر یک از این فاصله‌ها استفاده از کدام یک روش‌های (الف) تا (و) مناسب‌تر است؟ دلیل خود را توضیح داده و مقدار تابع را در نقاط خواسته شده تخمین بزنید.

(ب) میزان خطای تابع تخمین زده شده به ازای $x = 0/2$ بیشتر است یا $x = 1/5$ ؟ چرا؟

(ج) فرض کنید نقطه $x = 3$ و $y = 20$ را به جدول اضافه کنیم. از بین روش‌های لاگرانژ و تفاضلات تقسیم شده نیوتن کدام برای تخمین تابع در $x = 1/5$ مناسب‌تر است؟ چرا؟ با روش انتخابی خود تابع را در $x = 1/5$ تخمین بزنید.

۴. حداکثر درجه چند جمله‌ای گذرانده از نقاط (۲۲ و ۴)، (۱۴ و ۳)، (۸ و ۲)، (۴ و ۱)، (۲ و ۰) چند می‌باشد؟ (۱۰ نمره)

۵. با استفاده از روش خطی سازی بهترین تابع نمایی $y = ae^{bx}$ را برای نقاط زیر پیدا کنید. (۱۰ نمره)

۸	۴	۲	۱	x
۵/۸۳۷	۲/۲۸۹	۱/۴۲۳	۱/۴۳۳۵	y

۶. (۱۰ نمره) هر گاه x_0, x_1, \dots, x_n نقاط درونیابی و f_0, f_1, \dots, f_n مقادیر تابع $f(x)$ در این نقاط باشند، نشان دهید یک و تنها یک چند جمله ای $P(x)$ از درجه n وجود دارد به طوری که :

$$P(x_i) = f_i \quad i = 0, 1, \dots, n$$

۷. برنامه ای به زبان پایتون بنویسید که دو بردار عمودی X و Y در دو خط اول (به فرم اعداد با فاصله جدا شده) را به عنوان ورودی دریافت و بهترین منحنی عبوری از آن ها را از بین موارد زیر پیدا کند. خروجی تابع باید یک عدد بین ۱ تا ۵ و در خط بعد مقدار جذر متوسط مربع (Root Mean Square) باشد.

۱. چند جمله ای درجه ۱

۲. چند جمله ای درجه ۲

۳. $f(x) = \frac{a}{x} + b$

۴. $f(x) = a \cdot \ln(x) + b$

۵. $f(x) = \frac{1}{ax+b}$