

مهلت تحویل این تمرین ۱۴۰۱/۰۹/۱۸ است. شما در مجموع ترم ۲۰ روز تاخیر مجاز دارید که مدیریت آن با خودتان است. در ضمن برای هر تمرین شما تا سه روز بعد از ددلاین مجاز به ارسال پاسخ هستید و پس از آن به هیچ عنوان پاسخی از شما پذیرفته نخواهد شد. پس از ساعات مجاز تاخیر، به ازای هر روز تاخیر، ۳۰ درصد از نمره شما کسر خواهد شد.

سوال ۱. دستگاه غیرخطی

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3 = 0 \\ 2x_1^2 + x_2^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

دارای جوابی نزدیک به نقطه $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ است. با استفاده از روش نیوتون، جواب را تا دو رقم اعشار محاسبه کنید.

سوال ۲. دستگاه غیرخطی

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = x_1x_4 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = x_2x_4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = x_3x_4 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \end{cases}$$

شش جواب دارد.

الف) نشان دهید اگر $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T$ جواب دستگاه باشد، آنگاه $\begin{bmatrix} -x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 \end{bmatrix}^T$ نیز جواب دستگاه است.

ب) با استفاده از روش نیوتون جوابهای دستگاه فوق را محاسبه کنید بطوریکه $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-5}$.
توجه کنید که برای راحتی نرم \mathbb{R}^4 را نرم $\|\cdot\|_\infty$ فرض کنید به عبارت دیگر به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq n \leq n} x_i$$

سوال ۳. جواب دستگاه زیر را تا دو رقم اعشار محاسبه کنید.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{y} \cos(y) \\ y = \frac{1}{x} \sin(x) \end{cases}$$

(امتیازی) نشان دهید دستگاه فوق یک جواب یکتا دارد.

سوال ۴. به روش نیوتون جواب دستگاه زیر را با استفاده از $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، با شرط $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq 10^{-6}$ بیابید.

$$\begin{cases} 3x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ 3x_1x_2^2 - x_1^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

سوال ۵. با روش نیوتون و با فرض $x^{(0)}, x^{(1)}$ را برای دستگاه زیر محاسبه کنید.

$$\begin{cases} \sin(4\pi x_1x_2) - 2x_2 - x_1 = 0 \\ \frac{4\pi-1}{4\pi}(e^{2x_1} - e) + 4ex_2^2 - 2ex_1 = 0 \end{cases}$$

سوال ۶. چه نتیجه‌ای به واسطه‌ی استفاده از روش نیوتون برای دستگاه خطی $Ax = b$ که در آن A ماتریس حقیقی $n \times n$ و ناتکین است، حاصل می‌شود؟

موفق باشید.