



## محاسبات عددی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۰

مدرس: دکتر فاطمه بهاری‌فرد

تمرین سری سوم

فصل سوم

تاریخ تحویل: ۱۴۰۱/۰۲/۱۱

لطفا توجه فرمایید که:

\* مهلت ارسال تمرین ساعت ۱۱:۵۹ روز ۱۱ اردیبهشت ماه است.

\* لطفا تمرین‌های تئوری و عملی را در یک فایل فشرده قرار داده و با نام  $HW3\_StudentID$  آپلود کنید.

\* لطفا تمرین‌ها را از یکدیگر کپی نکنید. در صورت وقوع چنین مواردی مطابق با سیاست درس رفتار می‌شود.

۱. برای تابع  $\frac{1}{2}x^2 e^{-\frac{x}{2}}$  در نقاط  $x_0 = 1, x_1 = 1.8, x_2 = 2.6, x_3 = 3.4, x_4 = 4.2$ 

(آ) چند جمله‌ای درونیاب را با استفاده از روش تفاضلات پیشرو و پسرو نیوتون محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

(ب) خطای مطلق را در نقطه 1.65 محاسبه کنید. (۵ نمره)

(ج) کران بالای خطا را محاسبه کنید. (۵ نمره)

۲. (آ) برای محاسبه جدول کسرهای تفاضلی وابسته به درونیابی  $(x_i, f_i)$  برای  $i = 1, 2, \dots, n$  توسط یک چندجمله‌ای با درجه کمتر مساوی  $n$ ، چه تعداد کسر تفاضلی محاسبه شده نیاز است. (۸ نمره)(ب) یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر  $n$ ، تابع  $f(x) = e^x$  را در  $n+1$  نقطه در بازه  $[-1, 1]$  درونیابی می‌کند. اگر یکی از نقاط  $x = 0$  باشد، کران بالای خطا را بیابید (۱۰ نمره)۳. با استفاده از روش خطی‌سازی، بهترین تابع نمایی  $y = a2^{bx}$  را برای نقاط زیر محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

$x$	1	2	4	8
$y$	1.81	1.43	5.75	10

۴. خط  $y = \alpha x + P$  را که به ازای آن  $\int_0^\pi [\cos x - (\alpha x + P)]^2$  کمترین مقدار را دارد، بیابید. (۱۲ نمره)۵. فرض کنید که  $x_0, x_1, \dots, x_n$  نقاطی در بازه  $[a, b]$  هستند. فرض کنید  $f \in C^{n+1}[a, b]$ . همچنین می‌دانیم  $p$  تابع  $f$  را در این نقاط درونیابی می‌کند. ثابت کنید برای هر  $x \in [a, b]$  یک عدد  $\epsilon(x) \in (a, b)$  وجود دارد به طوری که  $f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\epsilon(x))}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$  (۱۵ نمره)

۶. برنامه‌نویسی

(آ) داده‌های زیر، رشد جمعیت کشوری را در سال‌های مختلف نشان می‌دهد می‌خواهیم نرخ رشد جمعیت را در سال‌های ۱۹۷۲ و ۱۹۹۹ تخمین بزنیم. برای این کار برنامه‌ای بنویسید که ضرایب لاگرانژ را محاسبه کند. سپس چندجمله‌ای درونیاب نرخ رشد برحسب سال را بدست آورید و نمودار آن را رسم کنید. سپس نرخ رشد در سال‌های خواسته‌شده را تخمین بزنید. (۱۵ نمره)

سال	۱۹۶۰	۱۹۶۵	۱۹۷۰	۱۹۷۵	۱۹۸۰	۱۹۸۵	۱۹۹۰	۱۹۹۵	۲۰۰۰	۲۰۰۵
نرخ رشد جمعیت	۳.۲	۳.۱	۳.۳	۲.۴	۲.۷	۱.۴۴	۱.۵۲	۱.۴۲	۱.۲	۰.۸۷

(ب) برنامه‌ای بنویسید که ابتدا عدد  $n$  را ورودی بگیرد و سپس  $n$  داده را از ورودی بخواند و در نهایت یک مقدار  $x$  از ورودی بخواند و با بهره‌گیری از روش تفاضلات متناهی نیوتون، مقدار را در آن نقطه خواسته شده توسط چندجمله‌ای درونیاب برگرداند.

(۱۰ نمره)