پاسخ نامه میان ترم - محاسبات عددی

۱_ الف)

$y = x \ln x$

$e_y \le e_x \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \Rightarrow e_y \le e_x |\ln x + 1| \xrightarrow{\div |y|} \frac{e_y}{|y|} \le \frac{e_x |\ln x + 1|}{|y|} \rightarrow \delta_y \le e_x \frac{|\ln x + 1|}{|x \ln x|}$

$\rightarrow \delta_y \le \frac{e_x}{|x|} \cdot \left| \frac{\ln x + 1}{\ln x} \right| \rightarrow \delta_y \le \delta_x \left| 1 + \frac{1}{\ln x} \right|$

۱_ ب) خطای نسبی دقیق و خطای نسبی حدی قابل قبول است:

حدی $\begin{cases} e_x \le \frac{1}{2} \times 10^{-3} \Rightarrow \delta_x \le \frac{e_x}{|x|} \simeq 0.0002 \\ \delta_y \le \delta_x \left|1 + \frac{1}{\ln \pi}\right| = 0.0002 \left|1 + \frac{1}{\ln(3.142)}\right| \simeq 0.0004 \end{cases}$

خطای نسبی $\begin{cases} e_x = |\pi - 3.142| = 0.0004 \Rightarrow \delta_x = \frac{e_x}{|x|} \simeq 0.0001 \\ \delta_y \le \delta_x \left|1 + \frac{1}{\ln x}\right| = 0.0001 \left|1 + \frac{1}{\ln x}\right| \simeq 0.0002 \end{cases}$

۲_ الف)

$f(x) = 3x - 2e^{-x} \qquad \begin{cases} f(0) = -2 \\ f(1) = 2.3 \end{cases} \rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0$

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$f(x_n)$	علامت $f(a).f(x_n)$
1	0	1	0.5	0.287	−
2	0	0.5	0.25	-0.808	+

$\Rightarrow x = 0.25$

۲_ ب)

$3x - 2e^{-x} = 0 \rightarrow 3x = 2e^{-x} \rightarrow x = \frac{2}{3} e^{-x} \Rightarrow g(x) = \frac{2}{3} e^{-x}$

بررسی شرایط همگرایی:

شرط اول: $0 \le x \le 1 \rightarrow -1 \le -x \le 0 \rightarrow e^{-1} \le e^{-x} \le 1 \rightarrow \frac{2}{3} e^{-1} \le \frac{2}{3} e^{-x} \le \frac{2}{3}$

$\rightarrow 0.25 \le g(x) \le 0.67 \Rightarrow 0 \le g(x) \le 1$ ✓

شرط دوم، $g'(x) = -\frac{2}{3} e^{-x} \rightarrow |g'(x)| = g(x) \rightarrow |g'(x)| < 1$ ✓

پس دنباله $x_{n+1} = g(x_n)$ همگرا است:

$x_{n+1} = \frac{2}{3} e^{-x_n}$

$n = 0 \rightarrow x_1 = \frac{2}{3} e^{-x_0} = \frac{2}{3} e^{-0.25} = 0.52$

$n = 1 \rightarrow x_2 = \frac{2}{3} e^{-x_1} = \frac{2}{3} e^{-0.52} = 0.40$

Scanned by CamScanner

۴- الف) به علت همگرا بودن دنباله می‌توان گفت،

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = L$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n^k + ka\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{k\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{k-1} + a} \Longrightarrow L = \frac{L^k + kaL}{kL^{k-1}+a}$$

$$\Longrightarrow kL^k + aL = L^k + kaL \Longrightarrow L^k(k-1) = L(ka-a) \Longrightarrow L^{k-1}(k-1) = a(k-1) \Longrightarrow$$

$$L^{k-1} = a \Longrightarrow L = \sqrt[k-1]{a}$$

۴ ب) با فرض داشتن دنباله $g(x) = \frac{x^k + kax}{kx^{k-1}+a}$ ، برای همگرایی رتبه ۲ به هر دلیل آمده، باید $g'(x)$ در نقطه $\sqrt[k-1]{a}$ صفر شود.

$$g'(x) = \frac{(kx^{k-1}+ka)(kx^{k-1}+a) - k(k-1)x^{k-2}(x^k+kax)}{(kx^{k-1}+a)^2}$$

$$g'(\sqrt[k-1]{a}) = \frac{(ka+ka)(ka+a) - k(k-1)(a^2+ka^2)}{(ka+a)^2} = \frac{2ka - k(k-1)a}{ka+a}$$

$$= \frac{a(2k-k^2+k)}{a(k+1)} = \frac{3k-k^2}{k+1} = 0 \longrightarrow \begin{cases} k=0 & \text{غ ق ق} \\ k=3 & \checkmark \end{cases}$$

۴- فرض کنید $P_n(x)$ چندجمله‌ای درونیاب تابع f در نقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ باشد. ضریب $P_n(x)$ را یکبار با استفاده از چندجمله‌ای لاگرانژ و بار دیگر با استفاده از تفاضلات تقسیم شده می‌نویسیم:

$$① \; P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, L_i(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

$$② \; P_n(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \cdots + f[x_0,\dots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

ضریب x^n در فرم لاگرانژ ① عبارت است از: $\quad \mathrm{I} \quad \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\quad}$

ضریب x^n در فرم تفاضلات تقسیم شده نیوتن عبارت است از: $\quad \mathrm{II} \quad f[x_0, x_1, \dots, x_n]$

پس از I و II حکم برقرار است.

* از طریق استقرا هم می‌توان این حکم را اثبات کرد (راه حل دوم)

Scanned by CamScanner

$$y = \left(\frac{x^4}{ax^2+b}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{y} = \frac{x^4}{ax^2+b} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{ax^2+b}{x^4}$$ —۵

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x^4} \Rightarrow E = \sum\left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x^4}\right)^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0 \rightarrow -2\sum \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x^4}\right) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 0 \rightarrow -2\sum \frac{1}{x^4}\left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x^4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum \frac{1}{x^2\sqrt{y}} - \sum\frac{a}{x^4} - \sum\frac{b}{x^6} = 0 \\ \sum \frac{1}{x^4\sqrt{y}} - \sum\frac{a}{x^6} - \sum\frac{b}{x^8} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\sum\frac{1}{x^4} + b\sum\frac{1}{x^6} = \sum\frac{1}{x^2\sqrt{y}} \\ a\sum\frac{1}{x^6} + b\sum\frac{1}{x^8} = \sum\frac{1}{x^4\sqrt{y}} \end{cases}$$

	x_i	y_i	$1/x_i^4$	$1/x_i^6$	$1/x_i^8$	$1/x_i^2\sqrt{y_i}$	$1/x_i^4\sqrt{y_i}$
	-1	1	1	1	1	1	1
	$1/\sqrt{2}$	$1/4$	4	8	16	4	8
	1	1	1	1	1	1	1
$\sum$	–	–	6	10	18	6	10

$$\Rightarrow \begin{cases} a(6) + b(10) = 6 \\ a(10) + b(18) = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 1, \quad b = 0$$

$$y = \left(\frac{x^4}{ax^2+b}\right)^2 \Rightarrow$$

$$y = \left(\frac{x^4}{x^2}\right)^2 \Rightarrow y = x^4$$

نقطه (۰,۰) هم در معادله صدق می‌کند

Scanned by CamScanner