

El método de la parametrización para variedades invariantes de puntos de equilibrio de ecuaciones diferenciales ordinarias (Versión corregida)

^aJaime Burgos-García, ^bSimón Rodríguez Rodríguez.

^{a,b}Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Coahuila. Unidad Campo redondo, Edificio A. Saltillo, Coahuila, 25020. México.

^ajburos@uadec.edu.mx, ^bsimonrodriguez@uadec.edu.mx.

Esta es una versión corregida del artículo

El metodo de parametrizacion para variedades invariantes de puntos de equilibrio de ecuaciones diferenciales ordinarias. Abstraction & Application, 30. pp 64-81, (2020),

en donde se encontró un error en los cálculos numéricos presentados en la sección (5) para la ecuación de Duffing. Agradecemos al Licenciado en Matemáticas Aplicadas Rey Alexis Salas Vega por sus observaciones.

Abstract

Many models developed to describe natural phenomena frequently fall into the field of ordinary differential equations, partial differential equations, etc.; in many cases the closer to reality is this description the more complex the model will be and consequently it will be more difficult to study, often the only way to obtain information from such a model is to make some kind of approximation which can be, for instance, numerical. In a chaotic system, where small variations in the initial conditions lead to very different results, it is necessary to have reliable methods of approximation. In this work we introduce the parametrization method to approximate invariant manifolds of equilibrium points of ordinary differential equations. We show its use for one-dimensional manifolds to the case of the Duffing system and the Lorenz system for the two-dimensional case. We provide some details about the strategies to follow in systems whose vector fields are not polynomial such as that of the physical pendulum.

Resumen

Muchos modelos que buscan describir fenómenos naturales caen con frecuencia en el ámbito de las ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones diferenciales parciales, etc.; en muchos casos, entre más apegada a la realidad sea esta descripción, más complejo será el modelo y en consecuencia será más difícil de estudiar, a menudo la única vía para obtener información de dicho modelo es realizar algún tipo de aproximación, que puede ser numérica, por ejemplo. En un sistema, donde pequeñas variaciones en las condiciones iniciales conducen a resultados muy diferentes, es necesario contar con métodos confiables de aproximación. En este trabajo mostramos de manera introductoria el método de parametrización para aproximar variedades invariantes de puntos de equilibrio de ecuaciones diferenciales ordinarias. Ejemplificamos su uso para variedades en una dimensión aplicándolo al caso del sistema de Duffing y al sistema de Lorenz para el caso de variedades de dos dimensiones. Porporcionamos algunos detalles sobre las estrategias a seguir en sistemas cuyos campos vectoriales no son polinomiales como el caso del péndulo físico.

Keywords and phrases : Numerical Methods, Parametrization Method, Invariant Manifolds.

2010 *Mathematics Subject Classification* 34A34 , 34A12, 65L05.

1. Introducción

Los sistemas que buscan modelar la naturaleza caen con frecuencia en la categoría de sistemas no lineales; desde el movimiento de cuerpos celestes como asteroides, cometas, planetas, galaxias, hasta el comportamiento de objetos microscópicos como moléculas y células. Dichos sistemas no lineales se pueden presentar en la forma de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), ecuaciones diferenciales parciales (EDP), ecuaciones con retardo, ecuaciones diferenciales estocásticas, entre otras. Es bien sabido que los modelos que buscan apegarse más a la realidad suelen ser complejos y en general difíciles de estudiar. En la actualidad dicho estudio se auxilia del uso de simulaciones numéricas que utilizan métodos de aproximación, *software* especializado y por supuesto computadoras; estas herramientas resultan valiosas a la hora de estudiar un sistema para adquirir información cuando el lápiz y el papel no son suficientes.

No obstante, no se debe olvidar que el uso de métodos numéricos solo nos lleva a aproximaciones de los objetos bajo estudio, entonces surgen preguntas como: ¿Qué tan “confiables” son nuestras aproximaciones a los objetos verdaderos? y si no se conoce *a priori* la existencia de dichos objetos ¿Cómo saber si dichas aproximaciones realmente proveen la información requerida? Estas preguntas son fundamentales cuando se estudia numéricamente un sistema, sin embargo, lo son aún más si el sistema considerado resulta ser caótico. Esta afirmación proviene del hecho que si se consideran pequeñas desviaciones en las condiciones iniciales (como las producidas por errores de redondeo) en un sistema caótico, estas pueden resultar en serias divergencias o resultados espurios. Cuestiones como las arriba mencionadas han motivado el desarrollo del campo de conocimiento conocido como *aproximaciones numéricas rigurosas en dinámica*, la cual no solo trata de análisis numérico sino que también engloba ideas de la teoría de la aproximación, cómputo científico, análisis funcional entre otras áreas.

Dado el carácter introductorio de este trabajo debemos mencionar que no pretendemos hacer una revisión exhaustiva, ya sea teórica o histórica, de los distintos métodos actuales para cálculo numérico riguroso; más bien, el objetivo principal es introducir al lector a los métodos numéricos de alto orden, como el denominado *método de la parametrización* de variedades invariantes de puntos de equilibrio de ecuaciones diferenciales ordinarias. Respecto a los integradores numéricos de alta precisión el lector puede consultar el trabajo [Bu2019b] y sus referencias para un primer acercamiento al método de Taylor con diferenciación automática donde además podrá encontrar rutinas fáciles de entender que se encuentran disponibles para *Matlab* y *C++*. Para una discusión más completa acerca de cálculo numérico de alto orden el lector puede consultar los trabajos [Pro2016], [Sim1990], [Ha2016] y sus referencias.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 el lector podrá encontrar una introducción a dos sistemas clásicos que son de suma importancia en el estudio de sistemas no lineales; el primer sistema está determinado por la llamada *ecuación de Duffing*, que será tomada como modelo para aplicar los métodos discutidos en este trabajo para variedades en una dimensión; el segundo sistema es un conjunto de tres ecuaciones diferenciales ordinarias llamadas ecuaciones de Lorenz, que utilizaremos para explorar de manera breve una implementación para una variedad de dos dimensiones. En la sección 3 se realiza una discusión introductoria del *método de la parametrización* para variedades invariantes de puntos de equilibrio. En la sección 4 se proporcionan detalles de las implementaciones del método discutido para los sistemas mencionados. En la sección 5 se presentan consideraciones y resultados de la implementación numérica del método de la parametrización desarrollado en la sección 4. Finalmente en la sección 6 se presentan algunas conclusiones y comentarios para invitar al lector interesado a una revisión más profunda de este método y sus alcances.

2. Dos ecuaciones diferenciales importantes

2.1. La ecuación de Duffing

Uno de los problemas básicos que se estudian en cursos introductorios de sistemas dinámicos es la llamada *ecuación de Duffing*, que es una ecuación diferencial de segundo orden no lineal como se muestra a continuación

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \beta x + \alpha x^3 = \gamma \cos(\omega t).$$

Este sistema se puede interpretar físicamente como un sistema compuesto de una masa y un resorte que tiene una fuerza de restauración $F = -\beta x - \alpha x^3$ donde α y β son parámetros. Dicho sistema se encuentra amortiguado por una fuerza proporcional a la velocidad instantánea $\delta\dot{x}$, con δ el coeficiente de proporcionalidad, y sujeto a una fuerza externa $\gamma \cos(\omega t)$. A pesar de su sencillez, este sistema resulta muy útil para comenzar a estudiar el tema de oscilaciones no lineales y resonancias, lo que lo convierte en un prototipo para comenzar a estudiar las cuestiones de una dinámica no lineal. El lector que no esté familiarizado con este sistema puede consultar el capítulo 5 del libro [Sm2004] para un tratamiento introductorio del problema y el capítulo 4 del libro [Per2000] para una discusión más detallada.

En este trabajo estamos interesados en analizar el caso donde los parámetros son $\delta = \beta = \alpha = 1$ y $\gamma = 0$. En este caso el sistema resulta ser un sistema Hamiltoniano con función Hamiltoniana [Per2000]

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2}. \quad (2.1)$$

Si graficamos las curvas de nivel de (2.1) nos proporcionan la geometría de las trayectorias del sistema en el *espacio fase* cuya estructura se muestra en la figura (1).

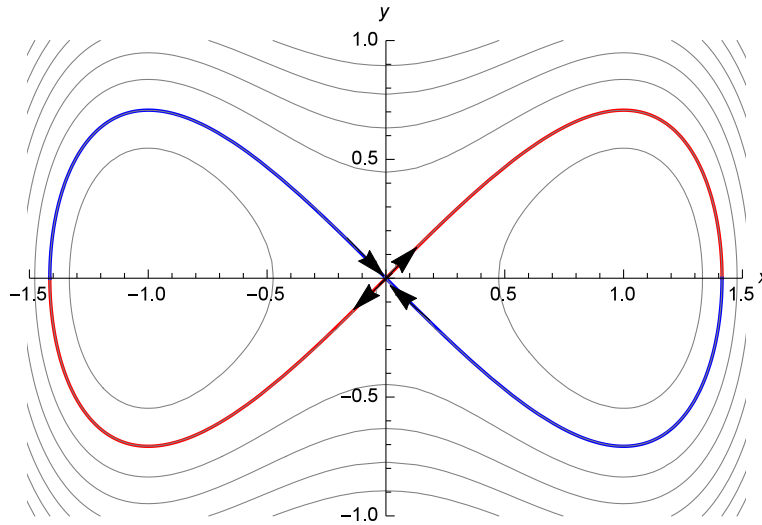


Figura 1: El retrato fase para la ecuación de Duffing.

Las ecuaciones de movimiento para este sistema se obtienen por medio de las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{aligned}$$

o de manera explícita

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - x^3.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Es fácil ver que este sistema tiene tres puntos de equilibrio en los puntos $(-1, 0)$, $(1, 0)$ que son centros y en $(0, 0)$ que es una silla. Los valores propios de cada punto están dados por: $\Lambda_1 = 1$ y $\Lambda_2 = -1$ con vectores propios asociados $v_1 = (1, 1)$ y $v_2 = (-1, 1)$ para el punto $(0, 0)$ y $\Lambda_1 = \sqrt{2}i$ y $\Lambda_2 = -\sqrt{2}i$ con vectores propios asociados $v_1 = (-i/\sqrt{2}, 1)$ y $v_2 = (i/\sqrt{2}, 1)$ para los puntos $(\pm 1, 0)$.

De la figura (1) podemos ver cualitativamente que este sistema tiene un par de trayectorias especiales llamadas órbitas homoclínicas que *nacen* y *terminan* en el punto de equilibrio $(0, 0)$. Estas dos órbitas homoclinicas son:

$$\begin{aligned}\Gamma_0^+(t) &= (\sqrt{2}\operatorname{sech}(t), -\sqrt{2}\operatorname{sech}(t)\tanh(t)), \\ \Gamma_0^-(t) &= -(\sqrt{2}\operatorname{sech}(t), -\sqrt{2}\operatorname{sech}(t)\tanh(t)),\end{aligned}\tag{2.3}$$

donde $\Gamma_0^+(t)$ es la órbita del lado derecho y $\Gamma_0^-(t)$ es la órbita del lado izquierdo. Cada una de las curvas $\Gamma_0^+(t)$ y $\Gamma_0^-(t)$ está compuesta por una variedad estable de dimensión uno (en azul) y una variedad inestable de la misma dimensión (en rojo) correspondientes al punto de equilibrio $(0, 0)$. En ambos casos, las variedades coinciden para formar las órbitas homoclínicas que también reciben el nombre de *separatrices*.

Cabe mencionar que vale la pena distinguir las variedades estable e inestable presentes en cada órbita ya que nos serán de utilidad en los cálculos presentados en la sección (4), no obstante, el lector debe tener en cuenta que en este caso ambas variedades coinciden para formar una sola curva. Una de las virtudes del sistema (2.2) es que es uno de los pocos sistemas no lineales donde es posible calcular de manera explícita una expresión para cada órbita homoclínica donde ambas variedades coinciden. Sin embargo, cuando el sistema es perturbado con un término de forzamiento esta coincidencia de las variedades globales puede verse reemplazado por una intersección transversal de ambas variedades dando como resultado una aparición de *herraduras de Smale* que sirven para definir y estudiar el *caos* en un sistema determinista. Vea por ejemplo [Per2000] para más información.

2.2. El sistema de Lorenz

Este sistema proporciona una de las *bellas* rutas para adentrarse en el estudio de la dinámica de un sistema caótico, a pesar de la simplicidad de sus ecuaciones diferenciales su dinámica resulta tan vasta que dicho sistema sigue siendo objeto de investigación científica en dinámica no lineal. Este sistema resulta de tal importancia en matemáticas, y otras áreas, que existe una gran cantidad de literatura dedicada a su estudio. Una vez más, el lector no familiarizado con este sistema puede consultar, por ejemplo, los libros [Per2000], [Sm2004] para una discusión más detallada de este sistema.

El campo vectorial del sistema de Lorenz está dado por la siguiente expresión

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sigma(y - x) \\ \rho x - xz - y \\ xy - \beta z \end{pmatrix},\tag{2.4}$$

donde σ , ρ y β son parámetros. Se sabe que para $\rho > 1$ el sistema posee tres puntos de equilibrio dados por las coordenadas:

$$(0, 0, 0)^T, \quad (\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)^T \quad \text{y} \quad (-\sqrt{\beta(\rho - 1)}, -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)^T.$$

En el caso del origen tenemos que los valores propios asociados a este punto son:

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= -\beta, \\ \Lambda_2 &= (1/2)(-1 - \sigma + \sqrt{1 - 2\sigma + 4\rho\sigma + \sigma^2}), \\ \Lambda_3 &= (1/2)(-1 - \sigma - \sqrt{1 - 2\sigma + 4\rho\sigma + \sigma^2}).\end{aligned}$$

Dentro de los posibles valores que pueden adquirir los parámetros del sistemas existen tres valores destacados dados por $\sigma = 10$, $\rho = 28$ y $\beta = 8/3$. Con estos valores obtenemos:

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= -8/3, \\ \Lambda_2 &= (1/2)(-11 + \sqrt{1201}), \\ \Lambda_3 &= (1/2)(-11 - \sqrt{1201}).\end{aligned}$$

En este caso tenemos dos valores propios negativos y uno positivo. En consecuencia, por el teorema de la variedad estable que trataremos en la siguiente sección, existen dos variedades, una estable de dimensión 2 asociada a los valores propios Λ_1 y Λ_3 y otra inestable de dimensión 1 asociada al valor propio Λ_2 . En los cálculos posteriores estaremos interesados en calcular la variedad estable de dimensión 2.

3. El método de parametrización para el cálculo de variedades invariantes de puntos de equilibrio

En esta sección discutiremos de manera introductoria el método de parametrización para variedades invariantes de puntos de equilibrio de campos vectoriales asociados a una EDO. Sin embargo, debemos mencionar que este método no solo se limita a variedades de puntos de equilibrio, sino que también puede aplicarse a variedades invariantes de órbitas periódicas y mapeos asociados a sistemas dinámicos de tiempo discreto. Esta técnica ha sido desarrollada en una larga serie de trabajos entre los cuales resaltan los trabajos pioneros de autores como de la Llave, Fontich, Cabré y Haro cuyos principales resultados pueden ser encontrados en el libro [Ha2016]. Además de una amplia recopilación sobre el desarrollo teórico como histórico de la técnica mencionada, el lector también podrá encontrar una serie de desarrollos actuales e implementaciones en problemas diversos que sobresalen por su grado de dificultad. Una segunda lectura muy recomendada es el libro [Pro2016], donde se puede encontrar una recopilación de notas usadas en cursos y simposios relacionados no solo al uso del método de la parametrización, sino también a cálculo numérico riguroso y pruebas asistidas por computadora en sistemas dinámicos.

De manera general podemos decir que el método de parametrización se basa fundamentalmente en dos nociones importantes en sistemas dinámicos. La primera, es la noción de conjugación o equivalencia topológica que nos dice como un sistema dinámico puede deformarse o encajarse en otro. La segunda, es que dicha transformación por lo general satisface cierta ecuación funcional que puede ser estudiada por medio de análisis y herramientas numéricas. Para formalizar esta idea en el ámbito de campos vectoriales y sus puntos de equilibrio considere un difeomorfismo (una transformación diferenciable con inversa diferenciable) $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ y suponga que existe un $p \in \mathbb{R}^N$ tal que $f(p) = 0$. Supongamos que $Df(p)$, su derivada evaluada en p , no tiene valores propios con parte real igual a cero, es decir, que el punto p es hiperbólico. Entonces el teorema de Hartman-Grobman asegura que existe una vecindad $B_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x - p\| < r\}$ y un homeomorfismo (una transformación continua con inversa continua) $P : B_r(p) \rightarrow \mathbb{R}^N$ tal que $P(0) = p$ y

$$f(P(y)) = P(Df(p)y),$$

para cada y tal que $Df(p)y \in B_r(p)$. Es decir, existe una vecindad del punto de equilibrio hiperbólico donde la dinámica determinada por el campo vectorial f es modelada por la dinámica de la transformación lineal $D(p)$. El lector que no esté familiarizado con estas nociones y en particular con el teorema de Hartman-Grobman puede consultar por ejemplo el libro [Per2000] para una discusión más detallada.

Por supuesto, la mayoría de los teoremas que garantizan la existencia de la transformación deseada no la proporcionan de manera explícita por lo que es necesario construirla estudiando ecuaciones del tipo $f(P(y)) = P(Df(p)y)$, lo que será abordado a continuación. Cabe mencionar que adoptaremos la notación usada en unas notas contenidas en [Pro2016] para presentar el método.

Dado un campo vectorial analítico $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ y un punto de equilibrio $p \in \mathbb{R}^N$ para el cual, por simplicidad de la discusión, haremos la suposición que la matriz $Df(p)$ es diagonalizable. Por lo tanto existe una matriz diagonal Σ y una matriz invertible Q tales que

$$Df(p) = Q\Sigma Q^{-1},$$

donde la matriz Σ contiene a los valores propios en su diagonal en la forma

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_s & 0 \\ 0 & \Sigma_u \end{pmatrix},$$

donde

$$\Sigma_s = \begin{pmatrix} \lambda_1^s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n_s}^s \end{pmatrix}$$

es la matriz de valores propios con parte real menor que cero y

$$\Sigma_u = \begin{pmatrix} \lambda_1^u & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^u & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n_u}^u \end{pmatrix}$$

es la matriz de valores propios con parte real mayor que cero. En dichas matrices hemos acomodado los valores propios de tal forma que $\operatorname{Re}(\lambda_{n_s}^s) \leq \cdots \leq \operatorname{Re}(\lambda_1^s) < 0 < \operatorname{Re}(\lambda_1^u) \leq \cdots \leq \operatorname{Re}(\lambda_{n_u}^u)$. La matriz Q contiene los vectores propios en sus columnas y es de la forma

$$Q = [\xi_{n_s}^s, \dots, \xi_1^s, \xi_1^u, \dots, \xi_{n_u}^u].$$

Aquí debemos mencionar que las respectivas variedades estables e inestables consisten de dos partes, la primera son las llamadas variedades locales estable e inestable y la segunda son las respectivas variedades globales. La variedad estable local se define como

$$W_{loc}^s(p, U) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x \in U \text{ y } \phi(t, x) \in U \text{ para } t \geq 0\},$$

y la variedad inestable local se define como

$$W_{loc}^u(p, U) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x \in U \text{ y } \phi(t, x) \in U \text{ para } t < 0\},$$

donde U es una vecindad de p y $\phi(t, x)$ es el flujo asociado al campo vectorial en cuestión. El célebre teorema de la variedad estable establece que existe un número real $r > 0$ y una bola $B_r(p)$ tal que:

- La variedad local $W_{loc}^s(p, B_r(p))$ es una variedad diferenciable de dimensión n_s .
- $W_{loc}^s(p, B_r(p))$ es tangente al eigenespacio estable de $D(p)$ en p .
- Si $x \in W_{loc}^s(p, B_r(p))$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) = p$.

Propiedades similares se cumplen para la variedad inestable si se considera $t \rightarrow -\infty$.

La segunda parte son las variedades globales que se obtienen a través de aplicar el flujo $\phi(t, x)$ a cada una de las variedades locales. En otras palabras

$$W^s(p) = \bigcup_{t \leq 0} \phi(t, W_{loc}^s(p, B_r(p))),$$

y

$$W^u(p) = \bigcup_{t > 0} \phi(t, W_{loc}^u(p, B_r(p))).$$

Centraremos la discusión en la construcción de la variedad estable ya que la respectiva discusión para la variedad inestable será similar. Buscamos un $r > 0$ y un mapeo suave suprayectivo $P : B_r(0) \subset \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{R}^N$ tal que

$$P[B_r(0)] = W_{loc}^s(p),$$

que se puede interpretar como una parametrización de la variedad local estable. Dicha parametrización se busca de la forma de una serie de potencias

$$P(\theta) = p + \sum_{n=1}^{\infty} P^n(\theta) := p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \theta^n, \quad (3.1)$$

donde p_n y θ^n son vectores de dimensión n_s . Los términos p_n son los vectores de coeficientes de la serie y θ^n son los vectores de las potencias de las coordenadas locales. Por ejemplo, el término de primer orden está dado por la expresión

$$P^1(\theta) = (\xi_1^s, \dots, \xi_{n_s}^s) \cdot (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n_s})$$

que no es más que el espacio generado por la parte estable. Por supuesto, la cuestión interesante radica en calcular los términos de orden superior. Siguiendo la idea detrás del teorema de Hartman-Grobman vamos a pedir que P sea un difeomorfismo que conjugue el flujo generado por el campo vectorial f con el flujo generado por el campo vectorial lineal

$$\dot{\theta} = \Lambda_s \theta.$$

En símbolos, pediremos que se cumpla la igualdad

$$\phi(t, P(\theta)) = P(e^{\Lambda_s t} \theta), \quad (3.2)$$

donde hemos usado el hecho conocido que nos dice que el flujo del campo vectorial lineal puede expresarse en términos de una matriz exponencial. Si deseamos calcular una expresión para P de la ecuación anterior esto nos lleva a tener una expresión para el flujo ϕ del sistema original lo cual no es práctico. Para buscar una expresión más manejable que nos permita calcular a P usamos primero el hecho de que ϕ es generado por la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ y entonces satisface

$$\frac{d}{dt} \phi(t, P(\theta)) = f(\phi(t, P(\theta))),$$

ahora usando la regla de la cadena

$$\frac{d}{dt} P(e^{\Lambda_s t} \theta) = DP(e^{\Lambda_s t} \theta) \Lambda_s e^{\Lambda_s t} \theta.$$

Por lo tanto, si derivamos la ecuación (3.2) de ambos lados y usamos las propiedades anteriores obtenemos

$$f(\phi(t, P(\theta))) = DP(e^{\Lambda_s t} \theta) \Lambda_s e^{\Lambda_s t} \theta,$$

que se cumple en particular para $t = 0$. Evaluando en este valor obtenemos la llamada *ecuación de invarianza*

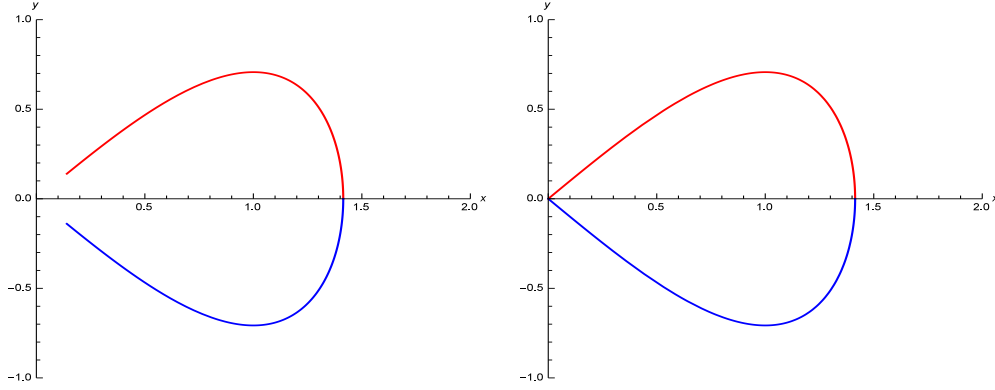


Figura 2: Izquierda. Trayectorias para $\Gamma_0^+(t) = (\sqrt{2}\text{sech}(t), -\sqrt{2}\text{sech}(t)\tanh(t))$ con $t \in [0, 3]$ (azul) y $t \in [-3, 0]$ (rojo). Derecha. Trayectorias con $t \in [0, 10]$ y $t \in [-10, 0]$

$$f(P(\theta)) = DP(\theta)\Lambda_s\theta. \quad (3.3)$$

En consecuencia, hemos mostrado que cualquier parametrización P que satisfaga la ecuación (3.2) también satisface (3.3). Más aún, la afirmación inversa también se cumple y es el contenido del siguiente lemma llamado *lema de parametrización* cuya demostración puede encontrarse en [Pro2016]

Lema 3.1 Sea $P : D^m \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suave con $P(0) = p$ y $DP(0) = Q_s$. Entonces $P(\theta)$ satisface la ecuación de conjugación (3.2) si y solo si P es una solución de la ecuación de invarianza (3.3) para todo $\theta \in D^m$.

El lema anterior nos dice que para calcular a P de tal forma que sea una conjugación con el flujo lineal solo debemos resolver la ecuación (3.3), que será una ecuación diferencial parcial. Esto evita el tener que calcular una expresión para el flujo ϕ . En la siguiente sección discutiremos como se trabaja con la ecuación (3.3) para una variedad de una dimensión de la ecuación de Duffing y también lo haremos de manera breve para una variedad de dimensión dos del sistema de Lorenz.

4. Ejemplos de implementación

4.1. Implementación en la ecuación de Duffing

En la sección (2) vimos que los valores propios y vectores propios de la ecuación de Duffing para el punto $p = (0, 0)$ están dados por: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $v_1 = (1, 1)$ y $v_2 = (-1, 1)$ por lo que el teorema de la variedad estable dice que existen variedades locales estable e inestable de dimensión 1. Por lo tanto, los valores n_s y n_u son iguales a uno para este caso y en consecuencia el origen posee una par de variedades de dimensión uno. Dado que el Hamiltoniano (2.1) es una función par entonces el sistema tiene una simetría respecto del eje y por lo que será suficiente enfocarnos en la órbita $\Gamma_0^+(t) = (\sqrt{2}\text{sech}(t), -\sqrt{2}\text{sech}(t)\tanh(t))$ mostrada en la figura (2) donde podemos apreciar las variedades estable e inestable globales que coinciden para formar la órbita $\Gamma_0^+(t) = (\sqrt{2}\text{sech}(t), -\sqrt{2}\text{sech}(t)\tanh(t))$.

Para la variedad inestable local buscamos calcular una expresión de la forma

$$P(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \theta^n := \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} p_n^1 \\ p_n^2 \end{pmatrix} \theta^n, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

donde se definen $p_0 = (0, 0)^T$ y $p_1 = (1, 1)^T$ para $n = 0$ y $n = 1$ respectivamente. Cabe señalar que p_1 es el respectivo vector propio asociado al valor propio $\lambda = 1$. Por supuesto, deseamos calcular la expresión (4.1)

a un orden determinado, digamos $N \in \mathbb{N}$, y recordando que debemos satisfacer la ecuación (3.3). Para esto sustituimos las expresiones para las coordenadas de (4.1) en el lado izquierdo de (3.3) con $x = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^1 \theta^n$ y $y = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^2 \theta^n$. Entonces $f(P(\theta))$ está dado por la expresión

$$f(P(\theta)) = \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} p_n^2 \theta^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n^1 \theta^n - (\sum_{n=0}^{\infty} p_n^1 \theta^n)^3} \right).$$

El lector puede notar que la parte delicada yace en el término no lineal que obliga a calcular los coeficientes de la serie

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n^1 \theta^n \right)^3$$

que puede ser calculada a través de las reglas básicas de aritmética de series de potencia. Dicha tarea resulta un buen ejercicio de manipulación de series que puede llegar a ser difícil para el lector no versado en este tema, por lo que daremos algunos detalles que nos ayudarán en la implementación operativa. Es claro que podemos escribir

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n^1 \theta^n \right)^3 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n^1 \theta^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n^1 \theta^n \right)^2 := \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n^1 \theta^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \theta^n \right),$$

donde en este caso los coeficientes a_n son los coeficientes de un producto de series. Por ejemplo, en [Bu2019b] podemos encontrar una expresión para el producto de dos series que adaptado al problema actual se convierte en

$$a_n := \sum_{k=0}^n p_{n-k}^1 p_k^1 = p_n^1 p_0^1 + \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}^1 p_k^1 + p_n^1 p_0^1 \quad (4.2)$$

lo que permite calcular dichos coeficientes. Una vez conocida una expresión para obtener cada a_n podemos proceder de manera análoga para calcular el producto de las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \theta^n := \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n^1 \theta^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \theta^n \right),$$

es decir, debemos calcular ahora los coeficientes b_n . En este caso

$$b_n := \sum_{j=0}^n p_{n-j}^1 a_j = p_n^1 a_0 + \sum_{j=1}^{n-1} p_{n-j}^1 a_j + p_0^1 a_n \quad (4.3)$$

sustituyendo los respectivos valores de a_n (dados por la expresión (4.2)) y agrupando términos comunes obtenemos

$$b_n = 3(p_0^1)^2 p_n^1 + p_0^1 \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}^1 p_k^1 + \sum_{j=1}^{n-1} p_{n-j}^1 a_j, \quad (4.4)$$

que nos proporciona una fórmula general que puede evaluarse para cada n y así obtener los coeficientes del término cúbico de $f(P(\theta))$. El cálculo del lado derecho de la ecuación de invarianza (3.3) es trivial en este caso

$$\frac{\partial}{\partial \theta} P(\theta) \lambda \theta = \lambda \theta \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{p_n^1}{p_n^2} \right) n \theta^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{p_n^1}{p_n^2} \right) n \lambda \theta^n.$$

Por lo tanto, la ecuación de invarianza (3.3) se escribe en términos de coordenadas como

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} p_n^1 n \lambda \theta^n &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n^2 \theta^n, \\ \sum_{n=0}^{\infty} p_n^2 n \lambda \theta^n &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n^1 \theta^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n \theta^n.\end{aligned}$$

Igualando potencias, agrupando y despejando los términos con subíndice n obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}p_n^2 - n \lambda p_n^1 &= 0, \\ p_n^1 - 3(p_0^1)^2 p_n^1 - n \lambda p_n^2 &= p_0^1 \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}^1 p_k^1 + \sum_{j=1}^{n-1} p_{n-j}^1 a_j.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Si definimos la cantidad s_{n-1} como $s_{n-1} = p_0^1 \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}^1 p_k^1 + \sum_{j=1}^{n-1} p_{n-j}^1 a_j$ y consideramos que la matriz jacobiana evaluada en p_0 está dada por

$$Df(p_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3(p_0^1)^2 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces podemos escribir la ecuación (4.5) en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} -n\lambda & 1 \\ 1 - 3(p_0^1)^2 & -n\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n^1 \\ p_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s_{n-1} \end{pmatrix}\tag{4.6}$$

o de forma más compacta

$$(Df(p_0) - n\lambda I_2)p_n = \begin{pmatrix} 0 \\ s_{n-1} \end{pmatrix},$$

donde I_2 es la matriz identidad de dimensión 2. El lector puede notar que las manipulaciones anteriores nos llevaron a establecer una ecuación recursiva que nos permite calcular los coeficientes de la parametrización $P(\theta)$ para cada $n \geq 2$. En nuestro caso la existencia de una solución única de (4.6) está garantizada ya que $n\lambda$ no es un valor propio de $Df(p_0)$ para $n \geq 2$ por lo que $(Df(p_0) - n\lambda I_2)$ es invertible en cada paso.

Es conveniente hacer notar que la fórmula está bien definida en el sentido que el término $(0, s_{n-1})^T$ está completamente determinado en cada paso. Por ejemplo, para $n = 2$ tenemos que $s_1 = p_0^1 \sum_{k=1}^1 p_{2-k}^1 p_k^1 + \sum_{j=1}^1 p_{2-j}^1 a_j = p_0^1 p_1^1 p_1^1 + p_1^1 a_1$ donde debemos conocer previamente el término a_1 que está dado por la expresión (4.2) y en el caso actual es $a_1 := \sum_{k=0}^1 p_{1-k}^1 p_k^1 = p_1^1 p_0^1 + p_0^1 p_1^1 = 2p_0^1 p_1^1$ que está a su vez completamente determinado por las condiciones impuestas a p_0 y p_1 . En otras palabras, para calcular a p_2 debemos:

1. Calcular el término a_1 dado por $a_1 := \sum_{k=0}^1 p_{1-k}^1 p_k^1 = p_1^1 p_0^1 + p_0^1 p_1^1 = 2p_0^1 p_1^1$.
2. Calcular el término s_1 dado por $s_1 = p_0^1 \sum_{k=1}^1 p_{2-k}^1 p_k^1 + \sum_{j=1}^1 p_{2-j}^1 a_j = p_0^1 p_1^1 p_1^1 + p_1^1 a_1$.
3. Resolver el sistema lineal $(Df(p_0) - 2\lambda I_2)p_2 = (0, s_1)^T$ para p_2 .

Ya conocido el término p_2 podemos volver a aplicar los pasos anteriores para calcular a p_3 y así sucesivamente.

4.2. Implementación en el sistema de Lorenz

Para ilustrar el método para dimensiones superiores proporcionamos algunos detalles para el sistema de Lorenz que fue tratado en la sección (2)

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sigma(y - x) \\ \rho x - xz - y \\ xy - \beta z \end{pmatrix},$$

donde σ , ρ y β son parámetros. Debemos mencionar que existe una vasta literatura que trata de la implementación del método de la parametrización y otros métodos numéricos en este sistema, así como pruebas asistidas por computadora. Los trabajos [Pro2016] y [Kra2005] proporcionan un buen punto de partida para el lector interesado en profundizar en el tema de métodos numéricos aplicados a éste u otros sistemas. Desde luego, se necesita un buen conocimiento en ecuaciones diferenciales, análisis numérico, análisis en varias variables y programación para poder profundizar en los detalles de los trabajos mencionados y sus referencias. En vista de esto nos limitaremos a proporcionar algunos detalles básicos para el cálculo de una variedad de dimensión dos en este sistema.

Si utilizamos los valores clásicos $\sigma = 10$, $\rho = 28$ y $\beta = 8/3$ obtenemos los valores propios $\Lambda_1 = -8/3$, $\Lambda_2 = (1/2)(-11 + \sqrt{1201})$ y $\Lambda_3 = (1/2)(-11 - \sqrt{1201})$. En consecuencia, por el teorema de la variedad estable existen dos variedades, una estable de dimensión 2 asociada a los valores propios Λ_1 y Λ_3 y otra inestable de dimensión 1 asociada al valor propio Λ_2 . Los respectivos vectores propios para estos valores son

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = -\frac{8}{3} &\rightarrow v_1 = (0, 0, 1), \\ \Lambda_2 = (1/2)(-11 + \sqrt{1201}) &\rightarrow v_2 = \left(\frac{1}{56}(-9 + \sqrt{1201}), 1, 0\right), \\ \Lambda_3 = (1/2)(-11 - \sqrt{1201}) &\rightarrow v_3 = \left(\frac{1}{56}(-9 - \sqrt{1201}), 1, 0\right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Para calcular una parametrización de una variedad de dimensión 2 tomamos los valores propios negativos y los definimos como $\lambda_1 = \Lambda_1$ y $\lambda_3 = \Lambda_3$ para estar acorde a la notación usada en la sección (3). En este caso debemos buscar una expresión de la forma

$$P(\theta_1, \theta_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} p_{nm}^1 \\ p_{nm}^2 \\ p_{nm}^3 \end{pmatrix} \theta_1^m \theta_2^n$$

que satisfaga la ecuación (3.3) que en este caso se ve como

$$\lambda_1 \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} P(\theta_1, \theta_2) + \lambda_3 \theta_3 \frac{\partial}{\partial \theta_3} P(\theta_1, \theta_2) = f(P(\theta_1, \theta_2)).$$

Para separar los términos de primer orden en la parametrización $P(\theta_1, \theta_2)$ la podemos escribir como

$$P(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} p_{00}^1 \\ p_{00}^2 \\ p_{00}^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{10}^1 \\ p_{10}^2 \\ p_{10}^3 \end{pmatrix} \theta_1 + \begin{pmatrix} p_{01}^1 \\ p_{01}^2 \\ p_{01}^3 \end{pmatrix} \theta_2 + \sum_{m+n \geq 2} \begin{pmatrix} p_{nm}^1 \\ p_{nm}^2 \\ p_{nm}^3 \end{pmatrix} \theta_1^m \theta_2^n.$$

El primer término es el punto de equilibrio, el origen en este caso, y los términos $(p_{10}^1, p_{10}^2, p_{10}^3)^T$ y $(p_{01}^1, p_{01}^2, p_{01}^3)^T$ son los vectores propios ξ_1^s y ξ_2^s asociados a los valores propios λ_1 y λ_2 respectivamente.

Aplicando un procedimiento similar al anterior obtenemos una ecuación recursiva para $m + n \geq 2$

$$(Df(p_0) - (m\lambda_1 + n\lambda_2)I_3)p_{mn} = s_{mn},$$

donde I_3 es la matriz identidad de dimensión 3 y

$$s_{mn} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n \delta_{kl}^{mn} p_{(m-k)(n-l)}^1 p_{kl}^3 \\ \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n \delta_{kl}^{mn} p_{(m-k)(n-l)}^1 p_{kl}^2 \end{pmatrix},$$

en este caso $\delta_{kl}^{mn} = 0$ cuando $k = 0$ y $l = 0$ o cuando $k = m$ y $l = n$ y $\delta_{kl}^{mn} = 1$ en otro caso. Los coeficientes se calculan de manera única siempre y cuando $(m\lambda_1 + n\lambda_2)$ no sea un valor propio de $Df(p_0)$. Vale la pena mencionar que en algunas implementaciones en otros sistemas pueden aparecer combinaciones lineales de valores propios en la diagonal de las matrices de los sistemas lineales a resolver para calcular los coeficientes. Es decir, aparecerán expresiones de la forma $n_1\lambda_1 + \dots + n_l\lambda_l$, donde n_i son enteros y λ_i son valores propios de $Df(p_0)$ para cada $i = 1, \dots, l$. En el caso de que dichas combinaciones lineales generen otro valor propio, lo que suele llamarse *resonancia*, entonces los sistemas no podrán resolverse de manera única. En estos casos de resonancia es necesario emplear una conjugación con otros sistemas locales distintos del sistema lineal, en otras palabras, será necesario extender el flujo lineal con términos de orden superior. En [Ha2016] se pueden consultar los detalles para casos resonantes.

Como se pudo notar en el caso de la ecuación de Duffing, determinar los términos del lado derecho de las ecuaciones lineales a resolver no es una tarea del todo sencilla por lo que daremos detalles acerca de la notación empleada en los términos s_{nm} ; para esto calcularemos los términos de segundo orden $s_{02} = (0, s_{02}^2, s_{02}^3)^T$, $s_{11} = (0, s_{11}^2, s_{11}^3)^T$ y $s_{20} = (0, s_{20}^2, s_{20}^3)^T$ explícitamente. Desarrollando las sumas involucradas para s_{02} encontramos

$$\begin{aligned} s_{02}^2 &= -(\delta_{00}^{02} p_{02}^1 p_{00}^3 + \delta_{01}^{02} p_{01}^1 p_{01}^3 + \delta_{02}^{02} p_{00}^1 p_{02}^3), \\ s_{02}^3 &= \delta_{00}^{02} p_{02}^1 p_{00}^2 + \delta_{01}^{02} p_{01}^1 p_{01}^2 + \delta_{02}^{02} p_{00}^1 p_{02}^2. \end{aligned}$$

En ambos casos $\delta_{00}^{02} = \delta_{02}^{02} = 0$ por lo que obtenemos

$$s_{02}^2 = -p_{01}^1 p_{01}^3, \quad s_{02}^3 = p_{01}^1 p_{01}^2.$$

Ahora para los términos s_{11} tenemos

$$s_{11}^2 = -(\delta_{00}^{11} p_{11}^1 p_{00}^3 + \delta_{01}^{11} p_{10}^1 p_{01}^3) - (\delta_{10}^{11} p_{01}^1 p_{10}^3 + \delta_{11}^{11} p_{00}^1 p_{11}^3).$$

En este caso $\delta_{00}^{11} = \delta_{11}^{11} = 0$ lo que nos da

$$s_{11}^2 = -p_{10}^1 p_{01}^3 - p_{01}^1 p_{10}^3,$$

y de manera análoga

$$s_{11}^3 = p_{10}^1 p_{01}^2 + p_{01}^1 p_{10}^2.$$

Por último

$$s_{20}^2 = -(\delta_{00}^{20} p_{20}^1 p_{00}^3 + \delta_{10}^{20} p_{10}^1 p_{10}^3 + \delta_{20}^{20} p_{00}^1 p_{20}^3),$$

en este caso $\delta_{00}^{20} = \delta_{20}^{20} = 0$ y llegamos a

$$s_{20}^2 = -p_{10}^1 p_{10}^3,$$

y también

$$s_{20}^3 = p_{10}^1 p_{10}^2.$$

En cualquier caso, los términos de segundo orden s_{02} , s_{11} y s_{20} dependen solo de los coeficientes de primer orden por lo que pueden ser calculados explícitamente y entonces podemos resolver la ecuación recursiva para calcular los coeficientes de segundo orden.

4.3. Implementación en un caso no polinomial

En este punto el lector puede notar que el cálculo de la ecuación de invarianza y sobre todo del término $f(P(\theta))$ resulta manejable si el campo vectorial es expresado en términos de polinomios como en los ejemplos anteriores. No obstante, surge la cuestión del cálculo de la parametrización $P(\theta)$ si en el campo vectorial hay funciones que no son polinomios, es decir, enfrentamos el problema de como calcular expresiones de la forma $e^{P(\theta)}$, $\sin(P(\theta))$, etc. Por ejemplo, considere el siguiente sistema que corresponde al péndulo simple

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\sin(x)\end{aligned}$$

que posee variedades invariantes de dimensión 1. En [Bu2019b] el lector puede encontrar una discusión de como calcular composiciones de series con este campo vectorial para el desarrollo de integradores numéricos de alta precisión. En este caso buscamos calcular una expresión de la forma

$$P(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} p_n^1 \\ p_n^2 \end{pmatrix} \theta^n, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad (4.8)$$

donde se definen por ejemplo $p_0 = (\pi, 0)^T$ y p_1 como el respectivo vector propio asociado al valor propio estable o inestable λ . Si consideramos a $P(\theta)$ en términos de coordenadas $x = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^1 \theta^n := P_1(\theta)$ y $y = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^2 \theta^n := P_2(\theta)$ entonces $f(P(\theta))$ está dado por la expresión

$$f(P(\theta)) = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} p_n^2 \theta^n \\ -\sin(\sum_{n=0}^{\infty} p_n^1 \theta^n) \end{pmatrix},$$

que nos lleva a calcular el término

$$-\sin\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n^1 \theta^n\right).$$

Para realizar esto introducimos un par de series auxiliares $Q(\theta) = \sin(P_1(\theta))$ y $R(\theta) = \cos(P_1(\theta))$ que puede ser calculadas en términos de series de potencias

$$Q(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \theta^n$$

y

$$R(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \theta^n.$$

Estas nuevas variables cumplen $Q'(\theta) = \cos(P_1(\theta))P_1'(\theta) = R(\theta)P_1'(\theta)$ y $R'(\theta) = -\sin(P_1(\theta))P_1'(\theta) = -Q(\theta)P_1'(\theta)$. Por otra parte, las derivadas pueden ser escritas en términos de series de potencias como

$$Q'(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q_{n+1}\theta^n$$

y

$$R'(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)r_{n+1}\theta^n.$$

Debemos notar que para $\theta = 0$ tenemos $q_0 = Q(0) = \sin(P_1(0)) = \sin(p_0^1)$, $r_0 = R(0) = \cos(P_1(0)) = \cos(p_0^1)$ y similarmente $q_1 = Q'(0) = \cos(p_0^1)p_1^1$ y $r_1 = R'(0) = -\sin(p_0^1)p_1^1$ y de esta forma los dos primeros términos de las series para Q y R son conocidos.

La ecuación $Q'(\theta) = R(\theta)P'(\theta)$ se ve como

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q_{n+1}\theta^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (k+1)r_{n-k}p_{k+1}^1\theta^n,$$

y análogamente para $R'(\theta) = -Q(\theta)P'(\theta)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)r_{n+1}\theta^n = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (k+1)q_{n-k}p_{k+1}^1\theta^n.$$

Igualando coeficientes

$$q_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (k+1)r_{n-k}p_{k+1}^1$$

y

$$r_{n+1} = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (k+1)q_{n-k}p_{k+1}^1$$

que pueden ser escritas para $n \geq 2$ como

$$q_n = r_0 p_n^1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k r_{n-k} p_k^1 \quad (4.9)$$

y

$$r_n = -q_0 p_n^1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k q_{n-k} p_k^1. \quad (4.10)$$

Por lo tanto, la ecuación de invarianza se escribe en coordenadas como

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} p_n^1 n \lambda \theta^n &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n^2 \theta^n, \\ \sum_{n=0}^{\infty} p_n^2 n \lambda \theta^n &= - \sum_{n=0}^{\infty} q_n \theta^n. \end{aligned}$$

Igualando potencias

$$\begin{aligned} p_n^2 - n \lambda p_n^1 &= 0, \\ q_n + n \lambda p_n^2 &= 0. \end{aligned}$$

Considerando la ecuación (4.9) podemos escribir

$$\begin{aligned} p_n^2 - n \lambda p_n^1 &= 0, \\ r_0 p_n^1 + n \lambda p_n^2 &= -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k r_{n-k} p_k^1. \end{aligned}$$

Si denotamos s_{n-1} como $s_{n-1} = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k r_{n-k} p_k^1$ entonces podemos escribir la ecuación en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} n\lambda & -1 \\ 0 & n\lambda + r_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n^1 \\ p_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s_{n-1} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

la cual está bien definida en el sentido de que en cada paso se conoce el término s_{n-1} y la ecuación (4.11) tiene solución única ya que $(n\lambda)(n\lambda + r_0)$ es distinto de cero para $n \geq 2$.

5. Algunos resultados numéricos

Una vez que se ha calculado la expansión $P(\theta)$ de la parametrización de una variedad invariante de un punto de equilibrio debemos tener una forma de estimar la calidad de la aproximación. Sobre todo se debe determinar un *dominio* para θ donde la aproximación es suficientemente exacta y así podamos obtener condiciones iniciales confiables para globalizar por integración numérica a la respectiva variedad. Por supuesto, nos gustaría tomar este dominio tan largo como sea posible.

Sea $x_0 = P(\theta_0)$ una condición inicial en la variedad invariante aproximada, sean $x(t)$ y $\theta(t)$ las soluciones numéricas de los problemas de valor inicial

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0,$$

y

$$\dot{\theta} = \Lambda_s \theta, \quad \theta(0) = \theta_0,$$

respectivamente. Se define el *error en la órbita* como

$$e_O(t, \theta_0) := |P(\theta(t)) - x(t)|_\infty, \quad (5.1)$$

donde $|\cdot|_\infty$ denota la norma infinito de un vector. En palabras simples, dado un valor inicial $P(\theta_0)$ sobre la aproximación de la variedad que a su vez es determinado por un valor θ_0 , entonces e_O mide la distancia entre la trayectoria $P(\theta(t))$ sobre P y la trayectoria dada por el campo vectorial original en un instante de tiempo t . Es decir, e_O mide que tan rápido se alejan las soluciones sobre la variedad invariante de las soluciones que empiezan en una aproximación de ella. Por supuesto, se tiene el hecho de que si $P(\theta)$ coincidiera perfectamente con la variedad calculada entonces e_O sería idénticamente cero para toda t por definición de conjunto invariante. En el capítulo 2 de [Ha2016] podemos encontrar que para un periodo corto de tiempo y θ_0 suficientemente cercano a cero entonces

$$e_O(t, \theta_0) \sim |\theta_0|^2, \quad (5.2)$$

o en palabras tenemos que $e_O(t, \theta_0)$ es aproximadamente proporcional a $|\theta_0|^2$.

En la discusión del cálculo de $P(\theta)$ no se dieron detalles acerca de la elección de los vectores propios, solo se mencionó que se deben tener vectores propios linealmente independientes. En consecuencia, la elección de la escala de dichos vectores es libre, no obstante, hay un par de consideraciones que se deben tomar en cuenta. La primera es que se puede demostrar que la solución de la ecuación (3.3) es única salvo las elecciones de estos factores de escala. La segunda tiene que ver con los coeficientes de la expansión calculada para P y su razón de decaimiento. La libertad de escoger la escala de los vectores propios puede ser usada para estabilizar los cálculos numéricos como por ejemplo, uno puede escoger la escala de los vectores propios de tal forma que los últimos coeficientes de la aproximación tengan magnitud menor que una tolerancia dada.

A continuación mostramos algunas exploraciones numéricas para la ecuación de Duffing utilizando el método de la parametrización para calcular aproximaciones de distinto orden de la variedad local inestable y aritmética de precisión doble. En el arreglo (5.3) se muestran los coeficientes de la aproximación a orden 10 con los decimales dados por nuestra aritmética y usando el vector propio $(1, 1)$

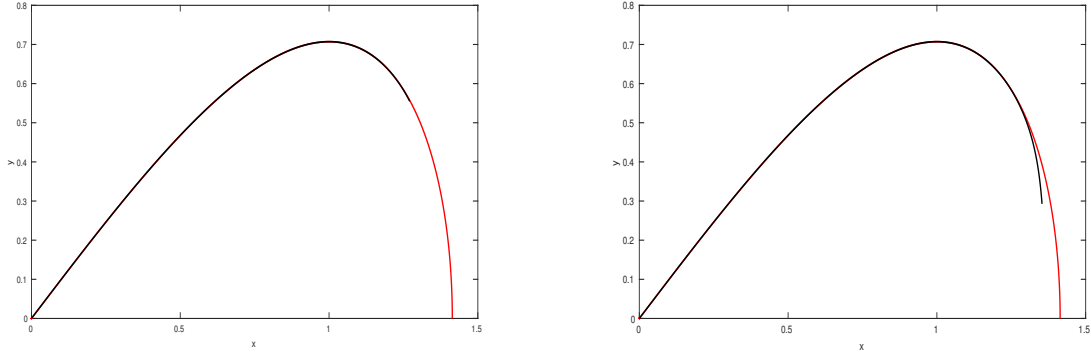


Figura 3: Izquierda. Variedad inestable (rojo) y aproximación a orden 20 con $\theta \in [0, 2.5]$. Derecha. Variedad inestable (rojo) y aproximación a orden 20 con $\theta \in [0, 3.0]$.

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 \\ -0.1250 & -0.375 \\ 0.0 & 0.0 \\ 0.015625 & 0.078125 \\ 0.0 & 0.0 \\ -0.001953125 & -0.013671875 \\ 0.0 & 0.0 \\ 0.000244140625 & 0.002197265625 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

En la figura (3) podemos observar una comparación gráfica entre la variedad inestable exacta y una aproximación a orden 20. Observamos que si se reduce el dominio de θ entonces se reduce la distancia entre $P(\theta)$ y W^u y en consecuencia se reduce el error $e_O(t, \theta_0)$ lo cual está acorde con el estimado (5.2).

En el arreglo (5.4) se muestran los coeficientes de la aproximación a orden 20.

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 \\ -0.125 & -0.375 \\ 0.0 & 0.0 \\ 0.015625 & 0.078125 \\ 0.0 & 0.0 \\ -0.001953125 & -0.013671875 \\ 0.0 & 0.0 \\ 0.000244140625 & 0.002197265625 \\ 0.0 & 0.0 \\ -0.00003051757812 & -0.00033569335937 \\ 0.0 & 0.0 \\ 0.00000381469727 & 0.00004959106445 \\ 0.0 & 0.0 \\ -0.00000047683716 & -0.00000715255737 \\ 0.0 & 0.0 \\ 0.00000005960464 & 0.00000101327896 \\ 0.0 & 0.0 \\ -0.00000000745058 & -0.00000014156103 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

En el arreglo (5.5) se muestran los coeficientes de la aproximación a orden 10 con 14 decimales pero usando un vector propio normalizado $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Podemos observar que el decaimiento de los coeficientes es más rápido en este caso, lo que ilustra la ventaja de poder escoger la escala inicial de los vectores propios para alcanzar una precisión dada con menos pasos.

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.70710678118655 & 0.707106781186545 \\ 0.0 & 0.0 \\ -0.04419417382416 & -0.13258252147248 \\ 0.0 & 0.0 \\ 0.00276213586401 & 0.01381067932005 \\ 0.0 & 0.0 \\ -0.00017263349150 & -0.00120843444050 \\ 0.0 & 0.0 \\ 0.000010789593212 & 0.00009710633897 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

En el caso de la ecuación de Lorenz debemos resolver tres sistemas lineales para encontrar los coeficientes de orden dos, dichos sistemas vienen dados por las ecuaciones

$$\begin{aligned} (Df(p_0) - 2\lambda_2 I_3) p_{02} &= s_{02}, \\ (Df(p_0) - (\lambda_1 + \lambda_2) I_3) p_{11} &= s_{11}, \\ (Df(p_0) - 2\lambda_1 I_3) p_{20} &= s_{20}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Si usamos los vectores y valores propios asociados a la variedad estable de dimensión 2 considerando a $\lambda_1 = -8/3$ y $\lambda_2 = (1/2)(-11 - \sqrt{1201})$, encontramos que los coeficientes a orden 2 son $p_{02} = (0.0, 0.0, 0.01813407004232)^T$, $p_{11} = (0.07832771351355, -0.12136401502165, 0.0)^T$ y $p_{20} = (0.0, 0.0, 0.0)^T$.

Cabe mencionar que los cálculos realizados se efectuaron en una computadora de escritorio estandar con un procesador *AMD A9-9430 RADEON R5, 3200Mhz*, donde el tiempo de ejecución no fue significativo para ser considerado. El lector puede encontrar códigos disponibles para *C++* y *Matlab* en <https://github.com/numericcfm/Numerics-for-ode>.

6. Conclusiones y comentarios

En este trabajo presentamos de manera introductoria el método de la parametrización para el caso de variedades invariantes asociadas a un punto de equilibrio hiperbólico en el caso de ausencia de resonancias. Cabe señalar que restringimos la discusión a este caso junto con la consideración de valores y vectores propios reales por simplicidad de la exposición. No obstante, como fue señalado en varias partes del trabajo, este método puede extenderse a casos resonantes y valores propios complejos; no solo para puntos de equilibrio sino también a variedades asociadas con órbitas periódicas y más aún, este método también encuentra aplicaciones en ecuaciones diferenciales parciales como puede ser consultado en algunos ejemplos tratados en [Pro2016]. La motivación para realizar cálculos de alta precisión es variada y va desde una necesidad puramente aplicada hasta la necesidad de realizar demostraciones matemáticas para la existencia de objetos invariantes. Una de las retribuciones que se pueden obtener al calcular un objeto con alta precisión es que los datos generados para su aproximación puede ser utilizados **a posteriori** para confirmar la existencia de tal objeto como el caso de órbitas periódicas [Bu2019]. Un ejemplo notable de la utilidad de este enfoque es la demostración dada por W. Tucker [Tuc2005] de la existencia de un *atractor extraño* en el sistema de Lorenz cuya existencia fue conjeturada por Edward Lorenz en 1963. Este problema fue listado por Steven Smale como uno de los problemas del siglo XXI.

Como comentario final debemos mencionar que estas técnicas están siendo utilizadas fuertemente en el área de sistemas dinámicos para probar la existencia de objetos que solían ser intratables con las técnicas clásicas como el caso del atractor de Lorenz. Estas técnicas constituyen una de las principales herramientas de las llamadas *pruebas asistidas por computadora* en dinámica no lineal, que resultan ser un nicho ideal para el trabajo conjunto entre matemáticos y profesionales de otras disciplinas, no solo de ciencias exactas, sino también de ciencias de la computación. Esto da fe, una vez más, que la matemática se alimenta de otras áreas para su crecimiento mismo como para sus potenciales aplicaciones.

Agradecimientos

El primer autor desea agradecer al Dr. Jason D. Mireles James por compartir sus notas preliminares del *AMS Short Course on Rigorous Numerics in Dynamics: (Un)Stable Manifolds and Connecting Orbits* así como su hospitalidad y valiosas discusiones durante la estancia en el Departamento de Ciencias Matemáticas en Florida Atlantic University.

Referencias

- [Pr2002] W.H. Press, *et al.* Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing *CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS*. Second Edition, 2002.
- [Pro2016] Proceedings of Symposia in Applied Mathematics. Rigorous Numerics in Dynamics. *American Mathematical Society*. Volume 74, 2016.
- [Ha2016] Á. Haro, et.al. The Parametrization Method for Invariant Manifolds. From Rigorous Results to Effective Computations. *Applied Mathematical Sciences*, Springer, 2016.
- [Per2000] L. Perko. Differential Equations and Dynamical Systems. *Third Edition*, Springer-Verlag, 2000.
- [Bu2002] R.L. Burden, J.D. Faire. Análisis numérico. *Séptima edición*, Thomson Learning 2002.
- [Bu2019] J. Burgos-García, J.D Mireles James, J.P Lessard. Spatial periodic orbits in the equilateral circular restricted four body problem. computer-assisted proofs of existence. *Celest. Mech. Dyn. Astr.*, 131(2), 2019.
- [Bu2019b] Burgos-García, J., Rodríguez R.S.: Un vistazo al método de Taylor con diferenciación automática para problemas de valor inicial. *Abstraction & Application*, **23** 35-45, (2019).

- [Sm2004] W. Hirsch, S. Smale, R.L. Devaney. Differential Equations, Dynamical Systems and An Introduction to Chaos. *segunda edición*, Elsevier, USA, 2004.
- [Al2016] A. Hungria, J.P Lessard, J.D Mireles James. Rigorous numerics for analytic solutions of differential equations: the radii polynomial approach. *Math. Comp.*, 85(299):1427-1459, 2016.
- [Jo2005] A. Jorba, M. Zou. A software package for the numerical integration of ODEs by means of high-order Taylor methods. *Experiment Math.*, 14(1):99–117, 2005.
- [Mo1966] R. E. Moore. Interval Analysis. *Englewood Cliffs*, N.J. Prentice-Hall, 1966.
- [Sh1997] L.F. Shampine, M.W. Reichelt. "The MATLAB ODE Suite". *SIAM J. Sci.Comput.*, 18(1)1-22, 1997 .
- [Sim1990] C. Simó. On the Analytical and Numerical Approximation of Invariant Manifolds. *Modern Methods in Celestial Mechanics, Comptes Rendus de la 13ieme Ecole Printemps d'Astrophysique de Goutelas (France), 24-29 Avril, 1989*. Editions Frontieres, 1990. page 285, 1990.
- [Kra2005] B. Krauskopf, et.al. A SURVEY OF METHODS FOR COMPUTING (UN)STABLE MANIFOLDS OF VECTOR FIELDS. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15(3):763-791, 2005.
- [Tuc2005] W. Tucker. The Lorenz attractor exists. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 328(12):1197-1202, 1999.