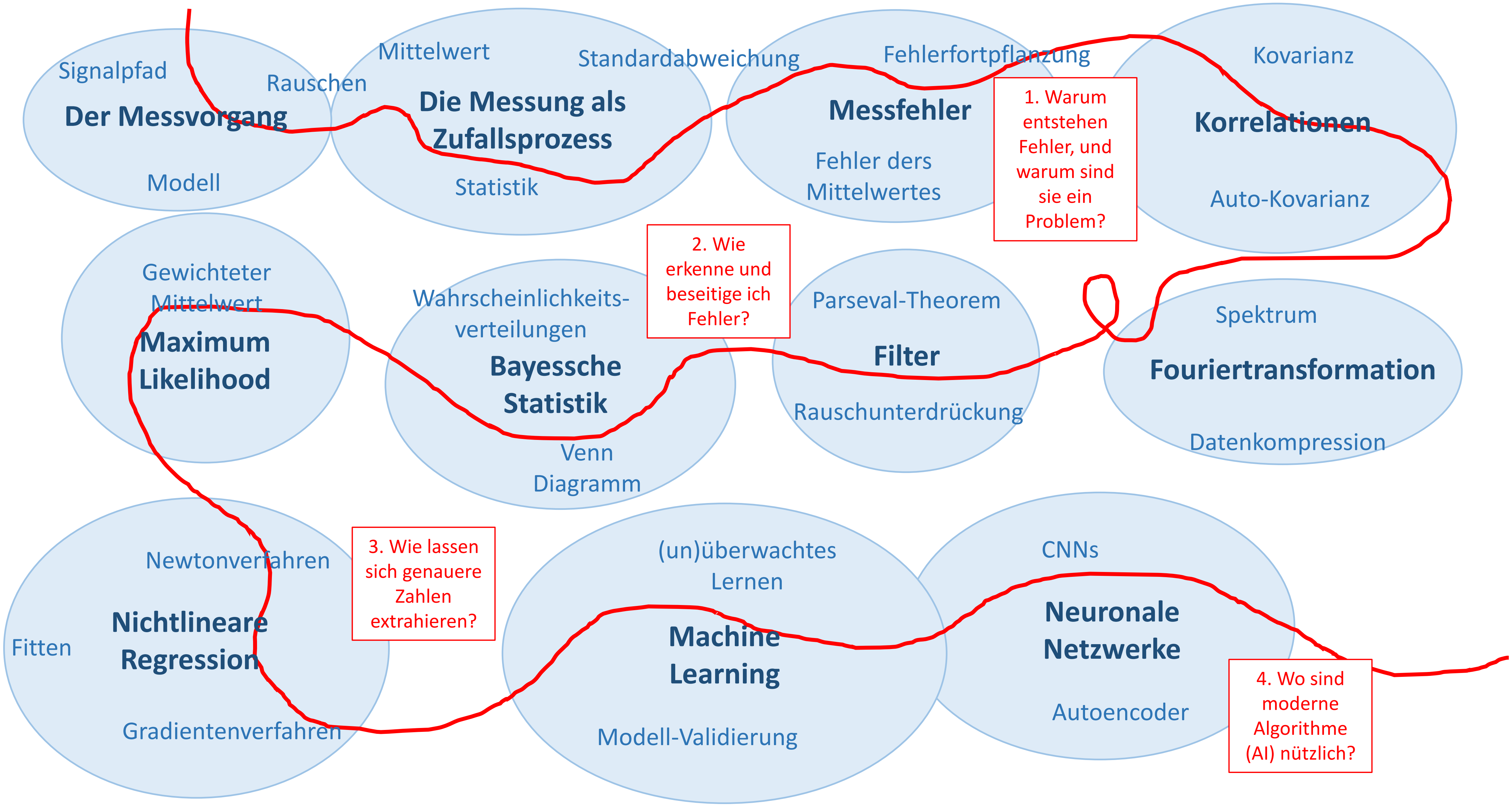
Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Der rote Faden: wie erhalte ich aussagekräftige Zahlen aus komplexen Daten?



Themen dieser Vorlesung:

- Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Binomialverteilung
- Poisson Verteilung
- Zentraler Grenzwertsatz
- Gauss Verteilung

Repetition zu Wahrscheinlichkeiten

Was ist eine Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung (PDF)?

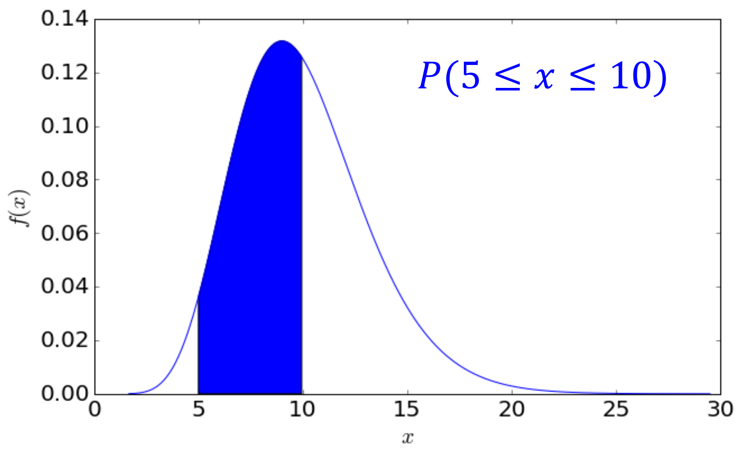
Was ist eine Wahrscheinlichkeitsmasseverteilung (PMF)?

Repetition zu Wahrscheinlichkeiten

Was ist eine Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung (PDF)?

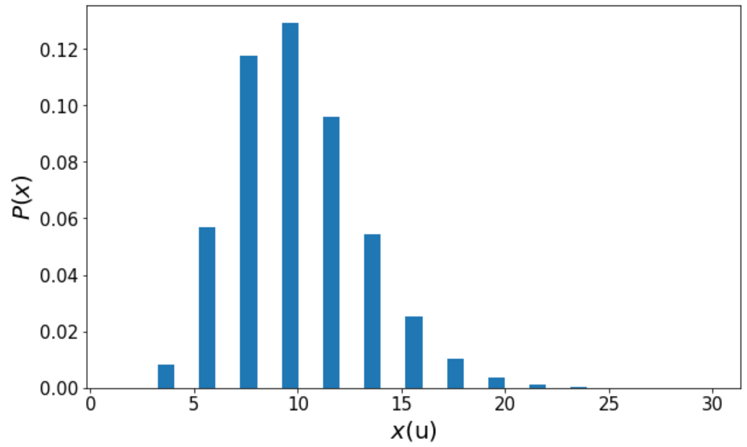
Eine PDF ist eine Funktion $f(x)$ einer kontinuierlichen Zufallsvariable x.
Eine PDF ist
- Normiert: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- Postiv $f(x) \geq 0$

Die Wahrscheinlichkeit ein Messergebnis in einem Intervall $[a, b]$ zu messen ist gegeben durch :$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$



Was ist eine Wahrscheinlichkeitsmasseverteilung (PMF)?

Eine PMF ist eine diskrete Funktion $P(x)$ einer Zufallsvariable x, die die Wahrscheinlichkeit angibt den diskreten Wert x zu messen.



Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wir haben gesehen, dass das Ergebnis einer Messung zufallsverteilt ist:

Wir messen eine Variable x, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis der Messung in einem Bereich $a \leq x \leq b$ gegeben durch:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Dabei beschreibt die Funktion $f(x)$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Messergebnisse.

Die Funktion f ist uns unbekannt.

Das Ziel des Experiments und der Datenanalyse ist es f so genau wie möglich zu bestimmen um Aussagen über das Messergebnis zu machen wie z.B.:

- Mittelwert
- Unsicherheit (Standardabweichung)
- …

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wir haben gesehen, dass das Ergebnis einer Messung zufallsverteilt ist:

Wir messen eine Variable x, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis der Messung in einem Bereich $a \leq x \leq b$ gegeben durch:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Dabei beschreibt die Funktion $f(x)$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Messergebnisse.

Die Funktion f ist uns unbekannt.

Kenntnisse über das Experiment und die Messapparatur erlaubt es uns Annahmen über die Funktion f zu machen.

So haben wie bereits die Normalverteilung kennengelernt:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Die Normalverteilung:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ

Was ist die Bedeutung der Normalverteilung?

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Die Normalverteilung:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ

Was ist die Bedeutung der Normalverteilung?

- Zufällige, unabhängige Ereignisse sind oft Normalverteilt.

- **Zentraler Grenzwertsatz:** Die Summe vieler unabhängiger Zufallseffekte (beliebiger, auch unterschiedlicher Verteilung) geht über in eine Normalverteilung.

Im folgenden werden wir ein paar weitere gebräuchliche Verteilungen kennenlernen.

Binomialverteilung

Wir nehmen an, wir messen eine Variable x, die genau zwei Werte u und d annehmen kann (Beispiel Münzwurf: Kopf oder Zahl, oder ein Spin: $+{}^{1}/_{2}\,\hbar = u$, $-{}^{1}/_{2}\,\hbar = d$).

Jede Durchführung des Experiments ist unabhängig von den vorherigen Ergebnissen. Dann ist

$$P(u) = p$$
$$P(d) = q = 1 - p$$

Wir messen ein System aus N Spins. **Was ist die Anzahl aller möglichen Zustände?**

Binomialverteilung

Wir nehmen an, wir messen eine Variable x, die genau zwei Werte u und d annehmen kann (Beispiel Münzwurf: Kopf oder Zahl, oder ein Spin: $+{}^{1}/_{2}\,\hbar = u$, $-{}^{1}/_{2}\,\hbar = d$).

Jede Durchführung des Experiments ist unabhängig von den vorherigen Ergebnissen. Dann ist

$$P(u) = p$$
$$P(d) = q = 1 - p$$

Wir messen ein System aus N Spins, damit ist die Gesamtzahl der möglichen Zustände 2^N, und die Wahrscheinlichkeit für einen einzelnen Zustand ψ_i mit k Spins im Zustand u gegeben durch:

$$P(\psi_i) = p^k q^{N-k}$$

Binomialverteilung

Wir nehmen an, wir messen eine Variable x, die genau zwei Werte u und d annehmen kann (Beispiel Münzwurf: Kopf oder Zahl, oder ein Spin: $+\, ^1/_2\, \hbar = u$, $-\, ^1/_2\, \hbar = d$).

Jede Durchführung des Experiments ist unabhängig von den vorherigen Ergebnissen. Dann ist

$$P(u) = p$$
$$P(d) = q = 1 - p$$

Wir messen ein System aus N Spins, damit ist die Gesamtzahl der möglichen Zustände 2^N, und die Wahrscheinlichkeit für einen einzelnen Zustand ψ_i mit k Spins im Zustand u gegeben durch:

$$P(\psi_i) = p^k q^{N-k}$$

Es gibt viele verschiedene Zustände ψ_i mit k Spins im Zustand u. Die Anzahl der Zustände mit gleicher Spin Konfiguration ist durch den Binomialkoeffizienten gegeben: $i = 1 \ldots m$, mit $m = \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$. Damit ist die Wahrscheinlichkeit für irgendeinen Zustand ψ_k mit k Spins u gegeben durch:

$$P(\psi_k) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k}$$

Als Wahrscheinlichkeitsverteilung muss dies natürlich normiert sein:

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = 1$$

Binomialverteilung

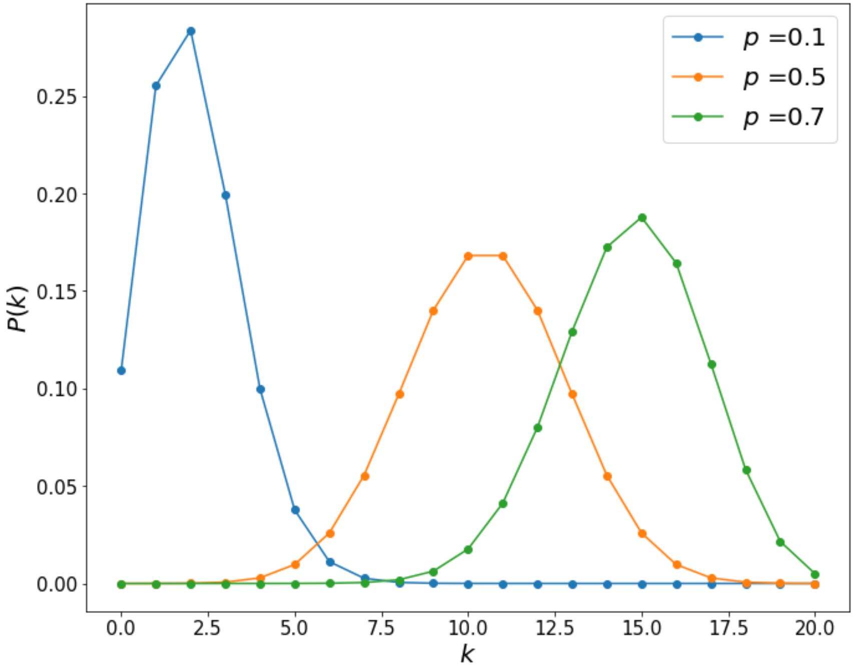
Wir nehmen an, wir messen eine Variable x, die genau zwei Werte u und d annehmen kann (Spin: $+{}^{1}/_{2}\,\hbar, -{}^{1}/_{2}\,\hbar$).

Die Wahrscheinlichkeiten der beiden Möglichkeiten sind:

$$P(u) = p$$
$$P(d) = q = 1 - p$$

Für ein System aus N Spins, ist die Wahrscheinlichkeit für irgendeinen Zustand ψ_k mit n Spins u gegeben durch:

$$P(\psi_k) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k}$$



Als Wahrscheinlichkeitsverteilung muss dies natürlich normiert sein:

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = 1$$

Das ist auch das 0-te Moment der Verteilung.

Binomialverteilung

Wir nehmen an, wir messen eine Variable x, die genau zwei Werte u und d annehmen kann (Spin: $+\,{}^{1}/_{2}\,\hbar, -\,{}^{1}/_{2}\,\hbar$).

Die Wahrscheinlichkeiten der beiden Möglichkeiten sind:

$$P(u) = p$$
$$P(d) = q = 1 - p$$

Für ein System aus N Spins, ist die Wahrscheinlichkeit für irgendeinen Zustand ψ_k mit n Spins u gegeben durch:

$$P(\psi_k) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k}$$

Als Wahrscheinlichkeitsverteilung muss dies natürlich normiert sein:

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = 1$$

Das ist auch das 0-te Moment der Verteilung.

Nehmen wir an wir messen eine Variable y die uns die Zahl der Spins
im Zustand u liefert, also $y = k$

Der Erwartungswert dieser Variable $\langle y \rangle = \mu$ ist dann gegeben durch das 1-ste Moment.

Binomialverteilung

Um den Erwartungswert (Mittelwert) zu berechnen erinnern wir uns an den Ausdruck zur Berechnung des m-ten Moments:

$$M_m = \sum_{k=0}^{N} k^m \binom{N}{k} p^k q^{N-k}$$

Die einfachste Methode die Momente zu berechnen ist ähnlich zu der Methode der Momenterzeugenden Funktion:

Für eine normierte Wahrscheinlichkeitsverteilung gilt: $M_0 = 1$ und höhere Momente $m \geq 1$ können iterativ aus der Ableitung der Momenterzeugenden Funktion berechnet werden:

$$M_m = \left. \frac{\partial^m M(\zeta)}{\partial \zeta^m} \right|_{\zeta=0}$$

Binomialverteilung

Um den Erwartungswert (Mittelwert) zu berechnen erinnern wir uns an den Ausdruck zur Berechnung des m-ten Moments:

$$M_m = \sum_{k=0}^{N} k^m \binom{N}{k} p^k q^{N-k}$$

Die einfachste Methode die Momente zu berechnen ist ähnlich zu der Methode der Momenterzeugenden Funktion. Wir berechnen die Ableitung:

$$\frac{\partial M_m}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\sum_{k=0}^{N} k^m \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} k^{m+1} \binom{N}{k} p^{k-1}(1-p)^{N-k} - \sum_{k=0}^{N} k^m (N-k) \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k-1}$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{N} k^{m+1} \binom{N}{k} p^k q^{N-k} - \frac{N}{q}\sum_{k=0}^{N} k^m \binom{N}{k} p^k q^{N-k} + \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{N} k^{m+1} \binom{N}{k} p^k q^{N-k} =$$

$$= \frac{1}{p} M_{m+1} - \frac{N}{q} M_m + \frac{1}{q} M_{m+1}$$

Daraus folgt ein allgemeiner Ausdruck für das $m+1$ te Moment:

$$\boxed{M_{m+1} = NpM_m + pq\frac{\partial M_m}{\partial p}}$$

Binomialverteilung

Wir berechnen die höheren Momente:

$$M_{m+1} = NpM_m + pq\frac{\partial M_m}{\partial p}$$

Mit $M_0 = 1$ folgt:

$$M_1 = NpM_0 + pq\frac{\partial M_0}{\partial p} = Np$$

$\boxed{\text{Der Mittelwert: } \langle y \rangle = M_1 = Np.}$

Binomialverteilung

Wir berechnen die höheren Momente aus:

$$M_{m+1} = NpM_m + pq\frac{\partial M_m}{\partial p}$$

Mit $M_0 = 1$ folgt:

$$M_1 = NpM_0 + pq\frac{\partial M_0}{\partial p} = Np$$

Der Mittelwert: $\langle y \rangle = M_1 = Np$.
Und aus

$$M_2 = NpM_1 + pq\frac{\partial M_1}{\partial p} = Np(Np) + pq\frac{\partial}{\partial p}(Np) = N^2p^2 + Npq$$

Die Standardabweichung:

$$\sigma^2 = M_2 - M_1^2 = Npq$$

Also:

$$\sigma \sim \sqrt{N}$$

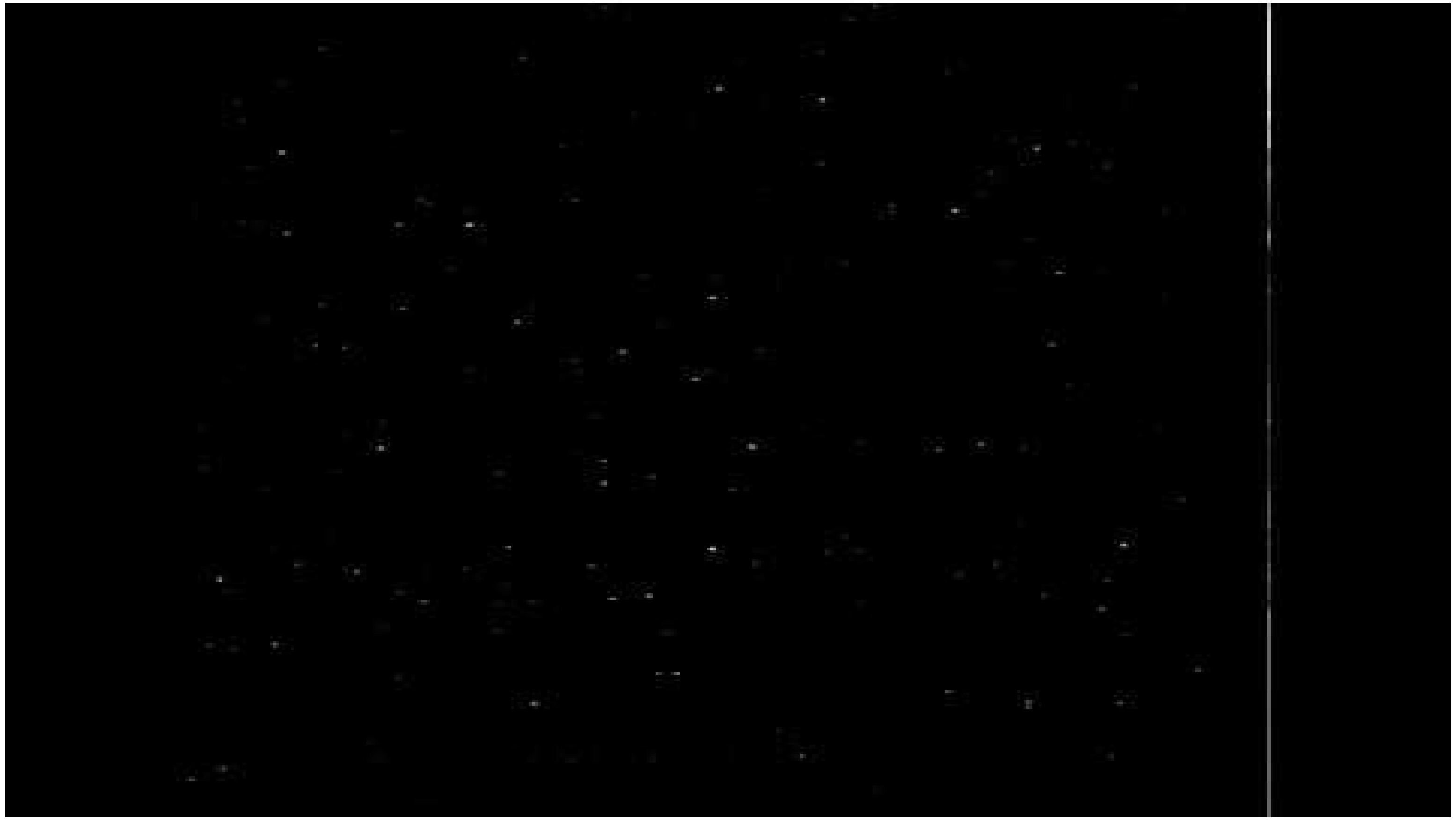
Und somit: $\boxed{\mathrm{var}(y) = Npq}$

Aus wiederholten Messungen der Variable y und den daraus ermittelten Mittelwert $\langle y \rangle$ und Varianz $\mathrm{var}(y)$ können wir also zum Beispiel die Anzahl der Spins im System sowie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spin im Zustand u ist berechnen.
Für makroskopische Systeme ist jedoch N sehr gross und somit werden Präzisionsexperimente notwendig um $\sqrt{N}$ messen zu können.

Binomialverteilung

Beispiel: Blinkende Lichtquellen (hier Gold Nanopartikel)

Video: https://www.youtube.com/watch?v=9hzmhwHb3kE



Jedes Nanopartikel kann in einem von zwei Zuständen sein:
"an" – Emittiert Licht
"aus" – Emittiert kein Licht

Die Punkte sind aber nicht entweder an oder aus, es scheint auch Zustände dazwischen zu geben.

Annahme: Jeder Lichtpunkt entsteht aus dem Zusammenspiel von vielen Nanopartikeln

Frage:
1) Wie viele Partikel tragen zu einem Punkt bei?
2) Was ist die Wahrscheinlichkeit dass ein Partikel an oder aus ist?

Siehe Beispiel Python Notebook:
„Binomial Verteilung - Vorlesung"

Poisson Verteilung

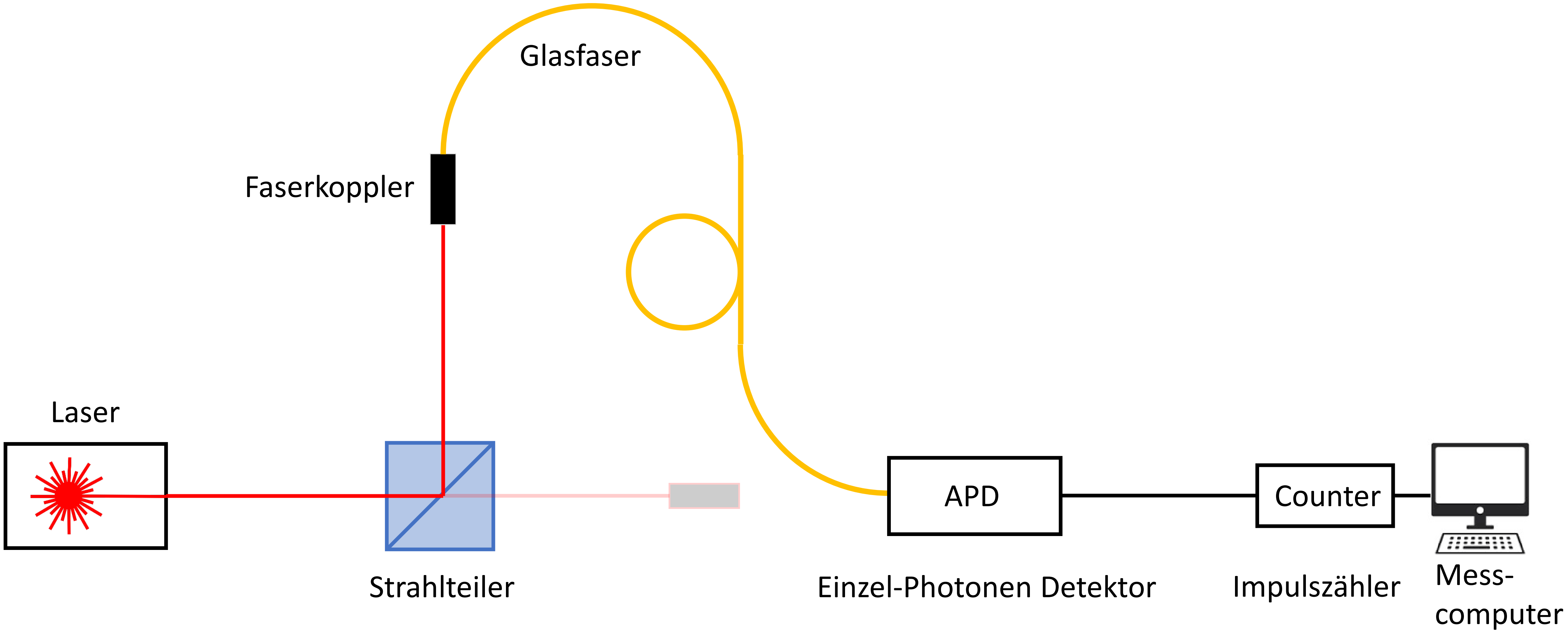
Die Poisson Verteilung ist ein Grenzfall der Binomial Verteilung für sehr seltene Ereignisse.

Beispiel: Photonenstatistik in einem Laserstrahl

Poisson Verteilung

Beispiel: Photonenstatistik in einem Laserstrahl

Wir senden einen Laserstrahl auf einen Einzelphotonendetektor und zählen die Anzahl der Photonen die in einem Zeitintervall Δ_t.
Dies wiederholen wir für n aufeinander folgende Zeitintervalle Δ_t.

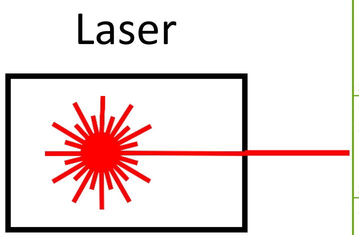


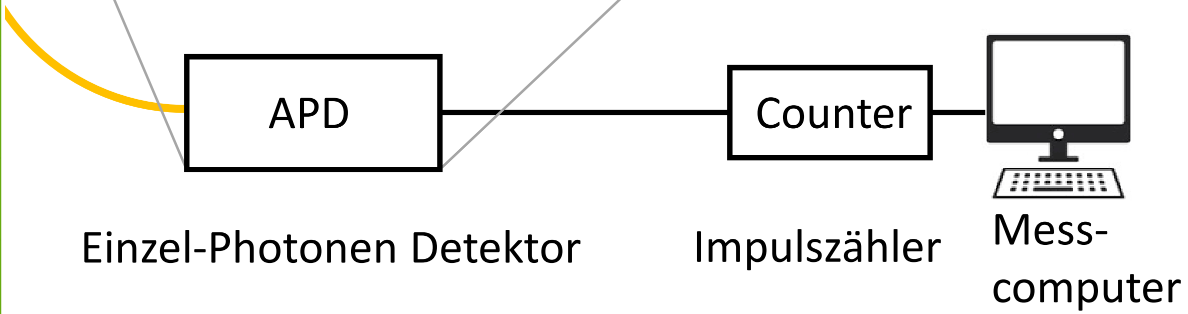
Poisson Verteilung

Beispiel: Photonenstatistik in einem Laserstrahl

Wir senden einen Laserstrahl auf einen Einzelphotonendetektor und zählen die Anzahl der Photonen die in einem Zeitintervall Δ_t.
Dies wiederholen wir für n aufeinander folgende Zeitintervalle Δ_t.

Parameter	Min	Typ	Max	Unit
Supply voltage [1]	4.75	5.0	5.25	V
Supply current		0.4	1.2	A
Power cable total resistance		0.1	0.2	Ω
Case operating temperature [1, 3]	5		70	°C
Active area (diameter) at minimum PDE	170	180		µm
Photon detection efficiency (PDE) (without FC adaptor)[9,10] at:				
400nm	2	5		%
650nm	50	65		%
830nm	35	45		%
1060nm	1	2		%
Refer to SPCM-NIR family for red – NIR optimized/selected modules, see Figure 4				
Dark Count [4, 5]				Counts / second
SPCM-AQRH-W0			1500	
SPCM-AQRH-W1			1000	
SPCM-AQRH-W2			500	
SPCM-AQRH-W3			250	
SPCM-AQRH-W4			100	
SPCM-AQRH-W5			50	
SPCM-AQRH-W6			25	
See table 3.				
Output pulse width [8]				
SPCM-AQRH-1X, SPCM-AQRH-4X		10		ns
SPCM-AQRH-2X, SPCM-AQRH-5X		18		ns
SPCM-AQRH-3X, SPCM-AQRH-6X		28		ns
See table 3.				
Dead time (count rate below 5M/c)				
SPCM-AQRH-1X, SPCM-AQRH-4X		22		ns
SPCM-AQRH-2X, SPCM-AQRH-5X		28		ns
SPCM-AQRH-3X, SPCM-AQRH-6X		40		ns
See table 3.				
Output pulse amplitude: SPCM-AQRH-1X, SPCM-AQRH-2X, SPCM-AQRH-3X				
TTL HIGH	1.5	2.2		V
TTL LOW	-0.1		0.8	V
See table 3.				
SPCM-AQRH-4X, SPCM-AQRH-5X, SPCM-AQRH-6X				
TTL HIGH	3.0	4.4		V
TTL LOW	-0.1		0.8	V
See table 3.				
Average dark count variation at constant case temperature (6 hrs. at 25 °C) [4, 5]				
SPCM-AQRH-W0, W1, W2, W3			± 10	%
SPCM-AQRH-W4, W5, W6			± 1	σ





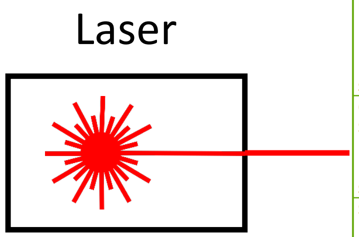
Poisson Verteilung

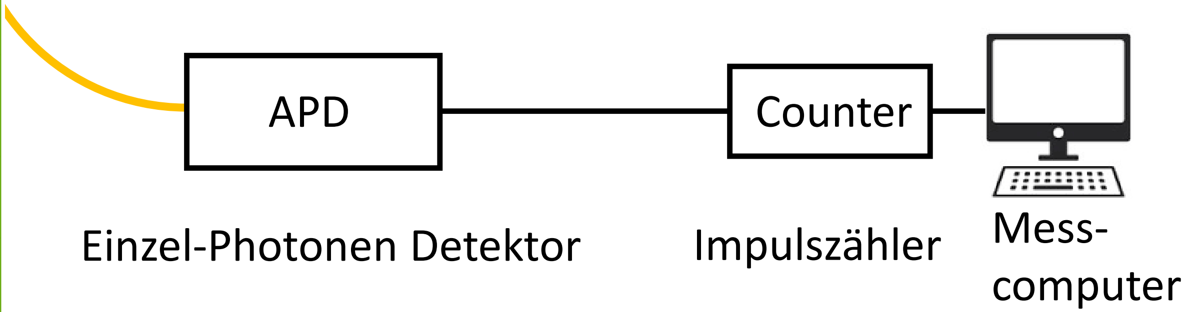
Beispiel: Photonenstatistik in einem Laserstrahl

Wir senden einen Laserstrahl auf einen Einzelphotonendetektor und zählen die Anzahl der Photonen die in einem Zeitintervall Δ_t.
Dies wiederholen wir für n aufeinander folgende Zeitintervalle Δ_t.

Was ist die maximale messbare Anzahl von Photonen pro Sekunde?

Parameter	Min	Typ	Max	Unit
Supply voltage [1]	4.75	5.0	5.25	V
Supply current		0.4	1.2	A
Power cable total resistance		0.1	0.2	Ω
Case operating temperature [1, 3]	5		70	°C
Active area (diameter) at minimum PDE	170	180		µm
Photon detection efficiency (PDE) (without FC adaptor)[9,10] at: 400nm	2	5		%
650nm	50	65		%
830nm	35	45		%
1060nm	1	2		%
Refer to SPCM-NIR family for red – NIR optimized/selected modules, see Figure 4				
Dark Count [4, 5]				Counts / second
SPCM-AQRH-W0			1500	
SPCM-AQRH-W1			1000	
SPCM-AQRH-W2			500	
SPCM-AQRH-W3			250	
SPCM-AQRH-W4			100	
SPCM-AQRH-W5			50	
SPCM-AQRH-W6			25	
See table 3.				
Output pulse width [8]				
SPCM-AQRH-1X, SPCM-AQRH-4X		10		ns
SPCM-AQRH-2X, SPCM-AQRH-5X		18		ns
SPCM-AQRH-3X, SPCM-AQRH-6X		28		ns
See table 3.				
Dead time (count rate below 5M/c)				
SPCM-AQRH-1X, SPCM-AQRH-4X		22		ns
SPCM-AQRH-2X, SPCM-AQRH-5X		28		ns
SPCM-AQRH-3X, SPCM-AQRH-6X		40		ns
See table 3.				
Output pulse amplitude: SPCM-AQRH-1X, SPCM-AQRH-2X, SPCM-AQRH-3X				
TTL HIGH	1.5	2.2		V
TTL LOW	-0.1		0.8	V
See table 3.				
SPCM-AQRH-4X, SPCM-AQRH-5X, SPCM-AQRH-6X				
TTL HIGH	3.0	4.4		V
TTL LOW	-0.1		0.8	V
See table 3.				
Average dark count variation at constant case temperature (6 hrs. at 25 °C) [4, 5]				
SPCM-AQRH-W0, W1, W2, W3			± 10	%
SPCM-AQRH-W4, W5, W6			± 1	σ





Poisson Verteilung

Beispiel: Photonenstatistik in einem Laserstrahl

Wir senden einen Laserstrahl auf einen Einzelphotonendetektor und zählen die Anzahl der Photonen die in einem Zeitintervall Δ_t.
Dies wiederholen wir für n aufeinander folgende Zeitintervalle Δ_t.

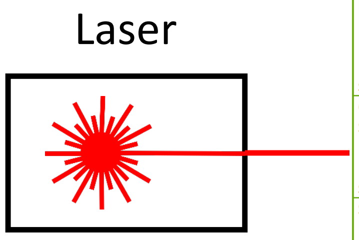
Parameter	Min	Typ	Max	Unit
Supply voltage [1]	4.75	5.0	5.25	V
Supply current		0.4	1.2	A
Power cable total resistance		0.1	0.2	Ω
Case operating temperature [1, 3]	5		70	°C
Active area (diameter) at minimum PDE	170	180		µm
Photon detection efficiency (PDE) (without FC adaptor)[9,10] at: 400nm 650nm 830nm 1060nm Refer to SPCM-NIR family for red – NIR optimized/selected modules, see Figure 4	 2 50 35 1	 5 65 45 2		 % % % %
Dark Count [4, 5] SPCM-AQRH-W0 SPCM-AQRH-W1 SPCM-AQRH-W2 SPCM-AQRH-W3 SPCM-AQRH-W4 SPCM-AQRH-W5 SPCM-AQRH-W6 See table 3.			 1500 1000 500 250 100 50 25	Counts / second
Output pulse width [8] SPCM-AQRH-1X, SPCM-AQRH-4X SPCM-AQRH-2X, SPCM-AQRH-5X SPCM-AQRH-3X, SPCM-AQRH-6X See table 3.		 10 18 28		 ns ns ns
Dead time (count rate below 5M/c) SPCM-AQRH-1X, SPCM-AQRH-4X SPCM-AQRH-2X, SPCM-AQRH-5X SPCM-AQRH-3X, SPCM-AQRH-6X See table 3.		 22 28 40		 ns ns ns
Output pulse amplitude: SPCM-AQRH-1X, SPCM-AQRH-2X, SPCM-AQRH-3X TTL HIGH TTL LOW See table 3.	 1.5 -0.1	 2.2	 0.8	 V V
SPCM-AQRH-4X, SPCM-AQRH-5X, SPCM-AQRH-6X TTL HIGH TTL LOW See table 3.	 3.0 -0.1	 4.4	 0.8	 V V
Average dark count variation at constant case temperature (6 hrs. at 25 °C) [4, 5] SPCM-AQRH-W0, W1, W2, W3 SPCM-AQRH-W4, W5, W6			 ± 10 ± 1	 % σ

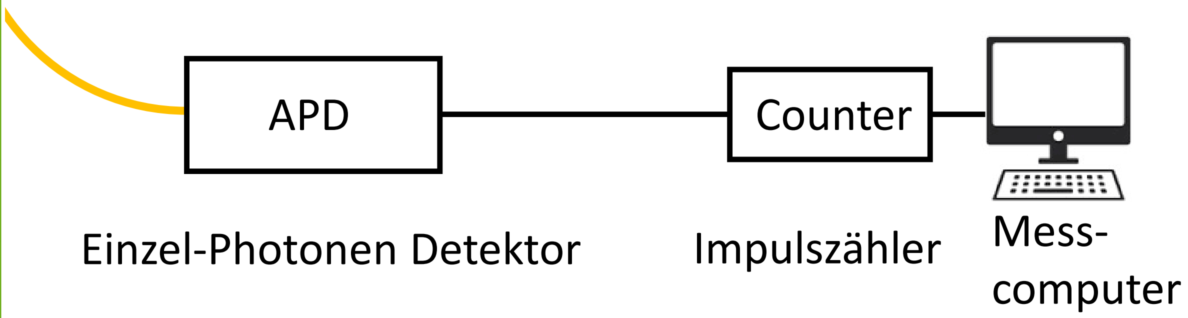
Was ist die maximale messbare Anzahl von Photonen pro Sekunde?

Totzeit nach Detektion eines Photons: $T_{\text{dead}} = 40\text{ns}$

$$f_{\max} = \frac{1}{T_{\text{dead}}} = 25\text{MHz}$$

Warum müssen wir deutlich unterhalb dieser maximal-Messrate bleiben?



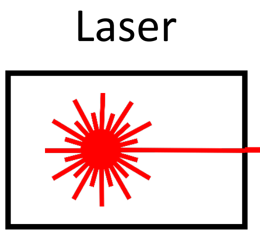


Poisson Verteilung

Beispiel: Photonenstatistik in einem Laserstrahl

Wir senden einen Laserstrahl auf einen Einzelphotonendetektor und zählen die Anzahl der Photonen die in einem Zeitintervall Δ_t.
Dies wiederholen wir für n aufeinander folgende Zeitintervalle Δ_t.

Parameter	Min	Typ	Max	Unit
Supply voltage [1]	4.75	5.0	5.25	V
Supply current		0.4	1.2	A
Power cable total resistance		0.1	0.2	Ω
Case operating temperature [1, 3]	5		70	°C
Active area (diameter) at minimum PDE	170	180		µm
Photon detection efficiency (PDE) (without FC adaptor)[9,10] at: 400nm 650nm 830nm 1060nm Refer to SPCM-NIR family for red – NIR optimized/selected modules, see Figure 4	2 50 35 1	5 65 45 2		% % % %
Dark Count [4, 5] SPCM-AQRH-W0 SPCM-AQRH-W1 SPCM-AQRH-W2 SPCM-AQRH-W3 SPCM-AQRH-W4 SPCM-AQRH-W5 SPCM-AQRH-W6 See table 3.			1500 1000 500 250 100 50 25	Counts / second
Output pulse width [8] SPCM-AQRH-1X, SPCM-AQRH-4X SPCM-AQRH-2X, SPCM-AQRH-5X SPCM-AQRH-3X, SPCM-AQRH-6X See table 3.		10 18 28		ns ns ns
Dead time (count rate below 5M/c) SPCM-AQRH-1X, SPCM-AQRH-4X SPCM-AQRH-2X, SPCM-AQRH-5X SPCM-AQRH-3X, SPCM-AQRH-6X See table 3.		22 28 40		ns ns ns
Output pulse amplitude: SPCM-AQRH-1X, SPCM-AQRH-2X, SPCM-AQRH-3X TTL HIGH TTL LOW See table 3.	1.5 -0.1	2.2	 0.8	V V
SPCM-AQRH-4X, SPCM-AQRH-5X, SPCM-AQRH-6X TTL HIGH TTL LOW See table 3.	3.0 -0.1	4.4	 0.8	V V
Average dark count variation at constant case temperature (6 hrs. at 25 °C) [4, 5] SPCM-AQRH-W0, W1, W2, W3 SPCM-AQRH-W4, W5, W6			± 10 ± 1	% σ



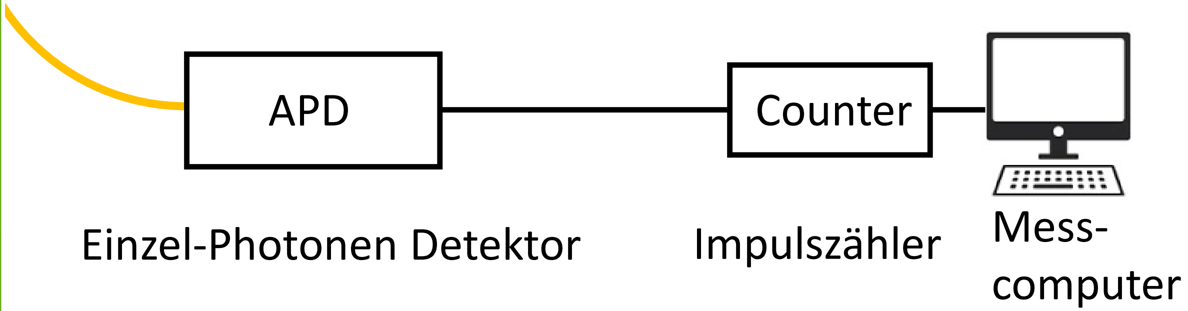
Was ist die maximale messbare Anzahl von Photonen pro Sekunde?

Totzeit nach Detektion eines Photons: $T_{\text{dead}} = 40\text{ns}$

$$f_{\max} = \frac{1}{T_{\text{dead}}} = 25\text{MHz}$$

Warum müssen wir deutlich unterhalb dieser maximal-Messrate bleiben?

Die Ankunftzeit der Photonen ist zufällig und bei hohen Photonenzahlen verpassen wir viele Photonen die in der Totzeit des Detektors ankommen.



Poisson Verteilung

Beispiel: Photonenstatistik in einem Laserstrahl

Wir senden einen Laserstrahl auf einen Einzelphotonendetektor und zählen die Anzahl der Photonen die in einem Zeitintervall Δ_t.
Dies wiederholen wir für n aufeinander folgende Zeitintervalle Δ_t.

Parameter	Min	Typ	Max	Unit
Supply voltage [1]	4.75	5.0	5.25	V
Supply current		0.4	1.2	A
Power cable total resistance		0.1	0.2	Ω
Case operating temperature [1, 3]	5		70	°C
Active area (diameter) at minimum PDE	170	180		µm
Photon detection efficiency (PDE) (without FC adaptor)[9,10] at:				
400nm	2	5		%
650nm	50	65		%
830nm	35	45		%
1060nm	1	2		%
Refer to SPCM-NIR family for red – NIR optimized/selected modules, see Figure 4				
Dark Count [4, 5]				Counts / second
SPCM-AQRH-W0			1500	
SPCM-AQRH-W1			1000	
SPCM-AQRH-W2			500	
SPCM-AQRH-W3			250	
SPCM-AQRH-W4			100	
SPCM-AQRH-W5			50	
SPCM-AQRH-W6			25	
See table 3.				
Output pulse width [8]				
SPCM-AQRH-1X, SPCM-AQRH-4X		10		ns
SPCM-AQRH-2X, SPCM-AQRH-5X		18		ns
SPCM-AQRH-3X, SPCM-AQRH-6X		28		ns
See table 3.				
Dead time (count rate below 5M/c)				
SPCM-AQRH-1X, SPCM-AQRH-4X		22		ns
SPCM-AQRH-2X, SPCM-AQRH-5X		28		ns
SPCM-AQRH-3X, SPCM-AQRH-6X		40		ns
See table 3.				
Output pulse amplitude: SPCM-AQRH-1X, SPCM-AQRH-2X, SPCM-AQRH-3X				
TTL HIGH	1.5	2.2		V
TTL LOW	-0.1		0.8	V
See table 3.				
SPCM-AQRH-4X, SPCM-AQRH-5X, SPCM-AQRH-6X				
TTL HIGH	3.0	4.4		V
TTL LOW	-0.1		0.8	V
See table 3.				
Average dark count variation at constant case temperature (6 hrs. at 25 °C) [4, 5]				
SPCM-AQRH-W0, W1, W2, W3			± 10	%
SPCM-AQRH-W4, W5, W6			± 1	σ

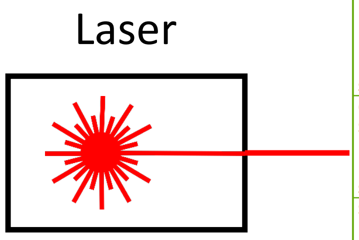
Was ist die maximale messbare Anzahl von Photonen pro Sekunde?

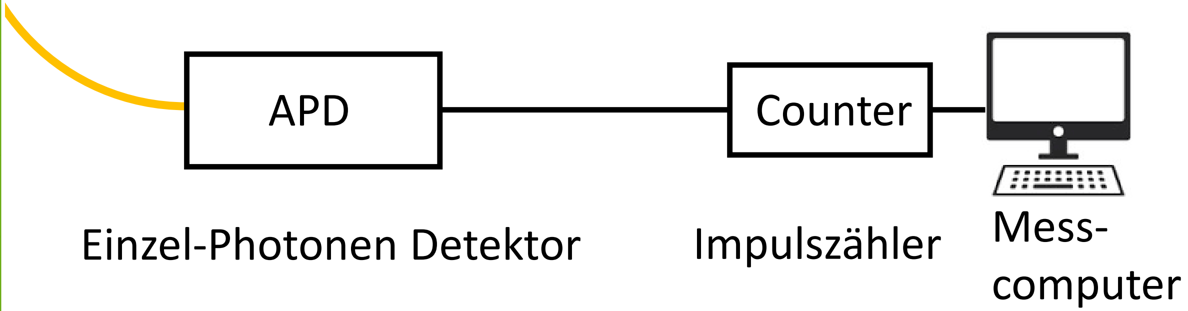
Totzeit nach Detektion eines Photons: $T_{\mathrm{dead}} = 40\mathrm{ns}$

$$f_{\max} = \frac{1}{T_{\mathrm{dead}}} = 25\mathrm{MHz}$$

Welcher Lichtleistung entspricht das?

$$P = f_{\max} h \frac{c}{\lambda} = 6.3 \times 10^{-12}\mathrm{W} = 6.3\mathrm{pW}$$

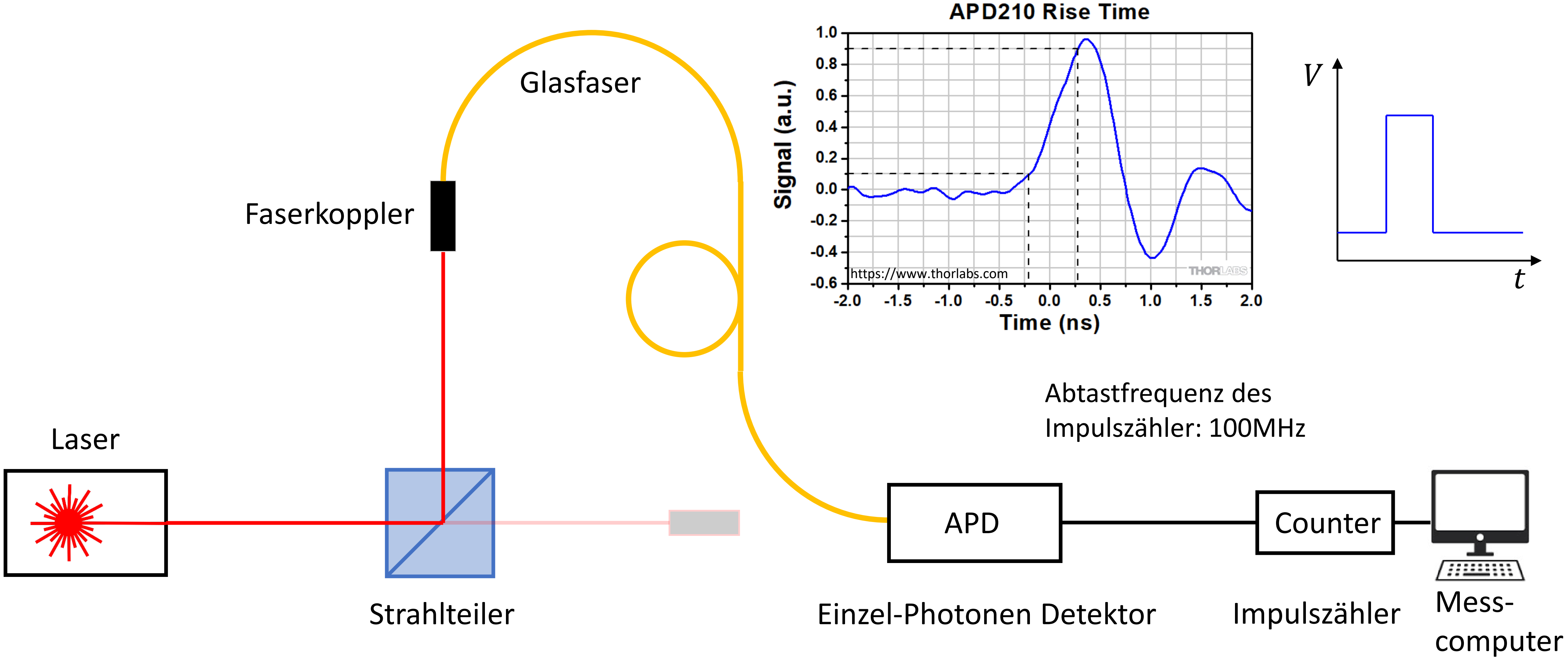




Poisson Verteilung

Beispiel: Photonenstatistik in einem Laserstrahl

Wir senden einen Laserstrahl auf einen Einzelphotonendetektor und zählen die Anzahl der Photonen die in einem Zeitintervall Δ_t.
Dies wiederholen wir für n aufeinander folgende Zeitintervalle Δ_t.



Poisson Verteilung

Beispiel: Photonenstatistik in einem Laserstrahl

Wir senden einen Laserstrahl auf einen Einzelphotonendetektor und zählen die Anzahl der Photonen die in einem Zeitintervall Δ_t. Dies wiederholen wir für n aufeinander folgende Zeitintervalle Δ_t.

Wenn $\Delta_t$sehr kurz ist, werden wir in den meisten Fällen kein Photon messen. Die Anzahl der gemessenen Photonen pro Zeitintervall Δ_t ist k.

Also das heisst:
- Die Anzahl der Messungen N ist sehr gross
- Die Anzahl der Ereignisse pro Messung k ist klein, insbesondere $N \gg k$
- Die Wahrscheinlichkeit für ein Event p ist sehr klein ($p \to 0$).

Also ist die Wahrscheinlichkeit k Ereignisse in einer Messung zu finden:

$$P(k) = \lim_{N \gg k} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} = \lim_{N \gg k} \frac{N!}{k!\,(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} = \frac{N^k}{k!} p^k (1-p)^N$$

Poisson Verteilung

Also ist die Wahrscheinlichkeit k Ereignisse in einer Messung zu finden:

$$P(k) = \lim_{N \gg k} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} = \lim_{N \gg k} \frac{N!}{k!\,(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} = \frac{N^k}{k!} p^k (1-p)^N$$

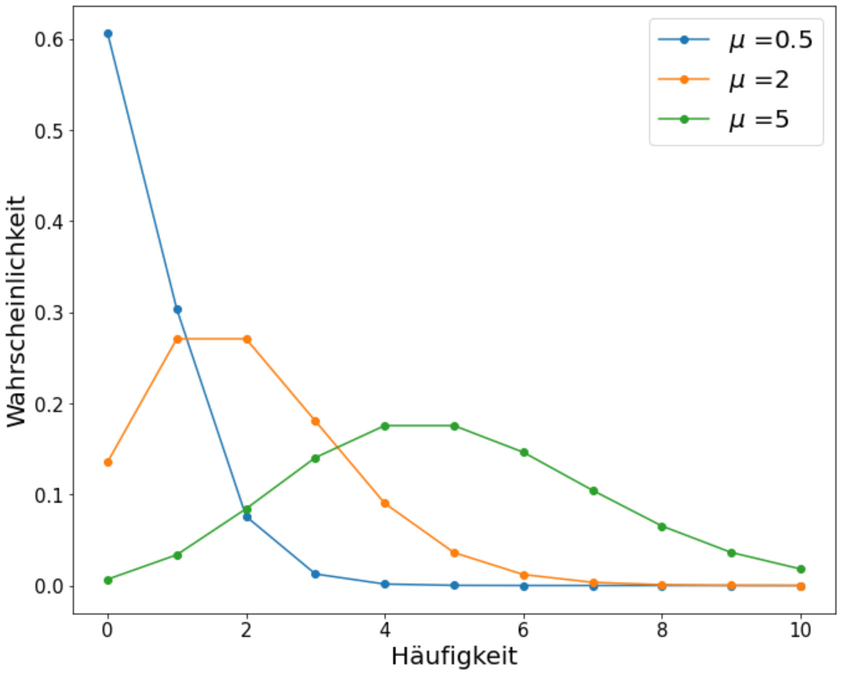
Wir setzen $\mu = Np$ (der Mittelwert der Binomial Verteilung) und finden:

$$P(k) = \frac{\mu^k}{k!} \left((1-p)^{1/p} \right)^{\mu}$$

Mit: $\lim_{p \to 0} (1-p)^{1/p} = e^{-1}$

erhalten wir für die Poisson Verteilung:

$$P(k) = \frac{\mu^k}{k!} \exp(-\mu)$$



Poisson Verteilung

Die Poisson Verteilung:

$$P(k) = \frac{\mu^k}{k!}\exp(-\mu)$$

Es ist leicht zu zeigen dass die Poisson Verteilung bereits normiert ist, also $M_0 = 1$

Also :

$$M_{m+1} = \mu M_m + \mu\frac{\partial M_m}{\partial \mu}$$

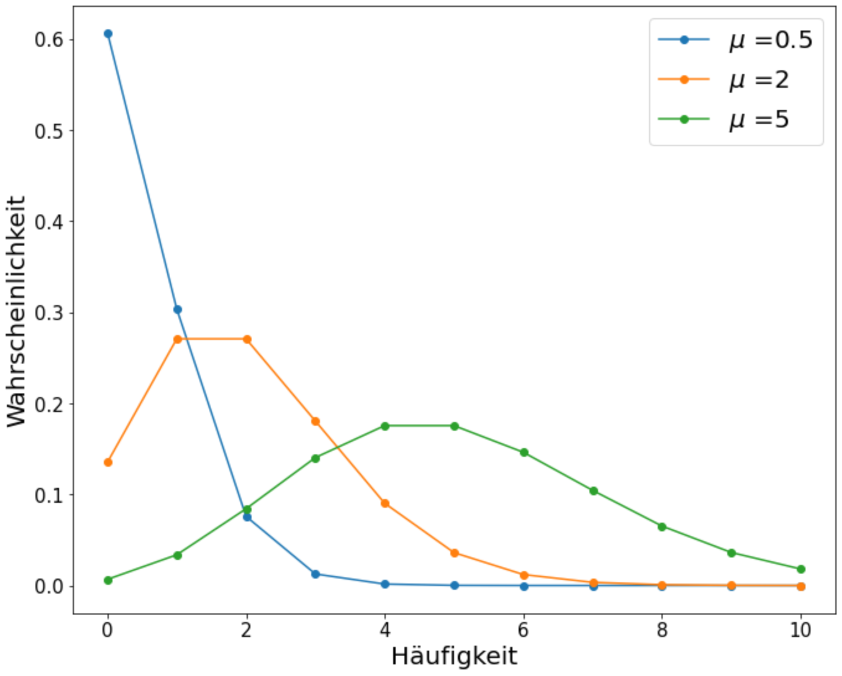
Und somit für den Mittelwert:

$$M_1 = \mu M_0 + \mu\frac{\partial M_0}{\partial \mu} = \mu$$

Und die Varianz:

$$M_2 = \mu M_1 + \mu\frac{\partial M_1}{\partial \mu} = \mu^2 + \mu$$

$$\sigma^2 = M_2 - M_1^2 = \mu$$



Poisson Verteilung

Wir vermuten, dass die Poisson Verteilung

$$P(k) = \frac{\mu^k}{k!}\exp(-\mu)$$

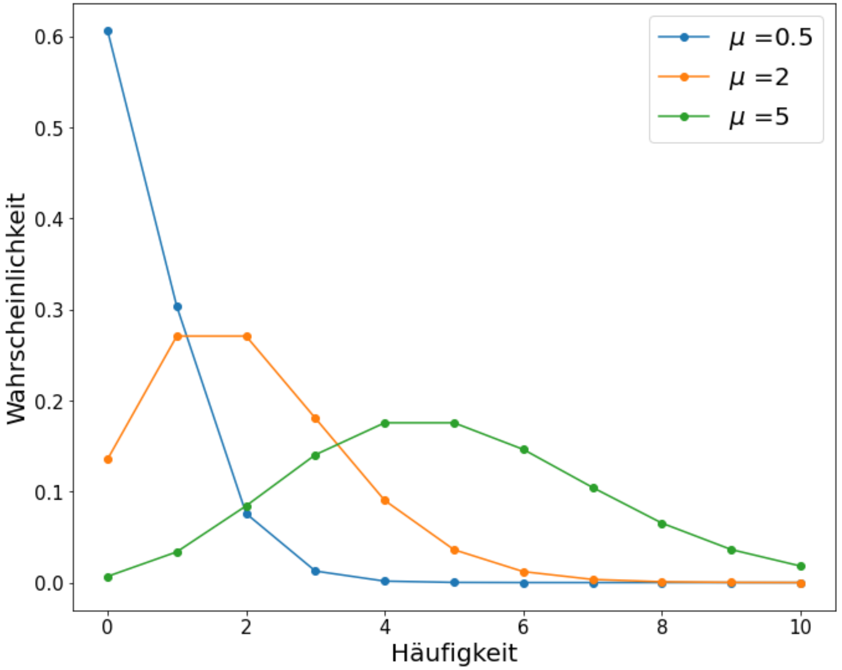
Für grosse μ in die Normalverteilung (Gauss Verteilung) übergeht. Um dies zu zeigen definieren wir: $\epsilon = k - \mu$

$$P(\epsilon) = \frac{\mu^{\mu+\epsilon}}{(\mu+\epsilon)!}\exp(-\mu) =$$
$$= \frac{\mu^\mu}{\mu!}\exp(-\mu)\left(\frac{\mu}{\mu+1}\frac{\mu}{\mu+2}\cdots\frac{\mu}{\mu+\epsilon}\right)$$

Für grosse μ: $\mu! = \sqrt{2\pi\mu}\mu^\mu\exp(-\mu)$ (Die Sterlingformel)

Also:

$$\lim_{\mu\gg 1}\frac{\mu^\mu}{\mu!}\exp(-\mu) = \frac{\mu^\mu\exp(-\mu)}{\sqrt{2\pi\mu}\mu^\mu\exp(-\mu)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}}$$



Siehe Beispiel Python Notebook:
„Poisson Verteilung - Vorlesung“

Poisson Verteilung

Wir vermuten, dass die Poisson Verteilung

$$P(k) = \frac{\mu^k}{k!}\exp(-\mu)$$

Für grosse μ in die Normalverteilung (Gauss Verteilung) übergeht. Um dies zu zeigen definieren wir: $\epsilon = k - \mu$

$$P(\epsilon) = \frac{\mu^{\mu+\epsilon}}{(\mu+\epsilon)!}\exp(-\mu) =$$

$$= \frac{\mu^\mu}{\mu!}\exp(-\mu)\left(\frac{\mu}{\mu+1}\frac{\mu}{\mu+2}\dots\frac{\mu}{\mu+\epsilon}\right)$$

Das Produkt:

$$\left(\frac{\mu}{\mu+1}\frac{\mu}{\mu+2}\dots\frac{\mu}{\mu+\epsilon}\right) = \exp\left(-\ln\left(\frac{\mu+1}{\mu}\frac{\mu+2}{\mu}\dots\frac{\mu+\epsilon}{\mu}\right)\right) =$$

Da: $\ln\left(\frac{\mu+x}{\mu}\right) = \ln\left(1+\frac{x}{\mu}\right) \approx \frac{x}{\mu}$

$$= \exp\left(-\frac{1}{\mu}(1+2+\cdots+\epsilon)\right) = \exp\left(-\frac{\epsilon(\epsilon+1)}{2\mu}\right) \approx \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2\mu}\right)$$

Poisson Verteilung

Wir vermuten, dass die Poisson Verteilung

$$P(k) = \frac{\mu^k}{k!}\exp(-\mu)$$

Für grosse μ in die Normalverteilung (Gauss Verteilung) übergeht. Um dies zu zeigen definieren wir: $\epsilon = k - \mu$

$$P(\epsilon) = \frac{\mu^{\mu+\epsilon}}{(\mu+\epsilon)!}\exp(-\mu) =$$
$$= \frac{\mu^\mu}{\mu!}\exp(-\mu)\left(\frac{\mu}{\mu+1}\frac{\mu}{\mu+2}\cdots\frac{\mu}{\mu+\epsilon}\right)$$

Damit erhalten wir die Gauss Verteilung:

$$P(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}}\exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2\mu}\right)$$

Mit $\mu = \sigma^2$:

$$P(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2\sigma^2}\right)$$

Poisson Verteilung

Wir vermuten, dass die Poisson Verteilung

$$P(k) = \frac{\mu^k}{k!}\exp(-\mu)$$

Für grosse μ in die Normalverteilung (Gauss Verteilung) übergeht:

$$P(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Im Allgemeinen geht jede Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine grosse Anzahl von Zufallsvariablen in eine Gauss Verteilung über.
Das ist die Aussage des Zentralen Grenzwertsatzes

Zentraler Grenzwertsatz

Sei x der Mittelwert einer Stichprobe $\{z_i, i = 1..N\}$, wobei die z_i gemäss einer arbiträren Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Mittelwert μ und Varianz σ_z^2 verteilt sind (fall diese existieren).

$$x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i$$

Dann wird für grosse N die Wahrscheinlichkeitsverteilung der x sich einer Gauss Verteilung annähern:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

Wobei $\sigma_x^2 = {}^{\sigma_z^2}/_{N}$.

Der Zentrale Grenzwertsatz ist ein Grund warum die Gauss Verteilung von so fundamentaler Bedeutung ist. Insbesondere ist dies der Grund warum die Annahme von Gauss verteilten Unsicherheiten in der Physik so gut funktioniert. Dies gilt natürlich nur für zufällige Fehler.

Die χ² Verteilung

Wir haben zwei **unkorrelierte**, **normalverteilte** Zufallsvariablen ϵ_1 und ϵ_2 mit Erwartungswerten $\mu_1 = \mu_2 = 0$ und Varianzen σ_1 und σ_2 gemessen.

Dann ist die Wahrscheinlichkeit Werte in den Intervallen $[\epsilon_1, \epsilon_1 + d\epsilon_1]$ und $[\epsilon_2, \epsilon_2 + d\epsilon_2]$ zu finden gegeben durch:

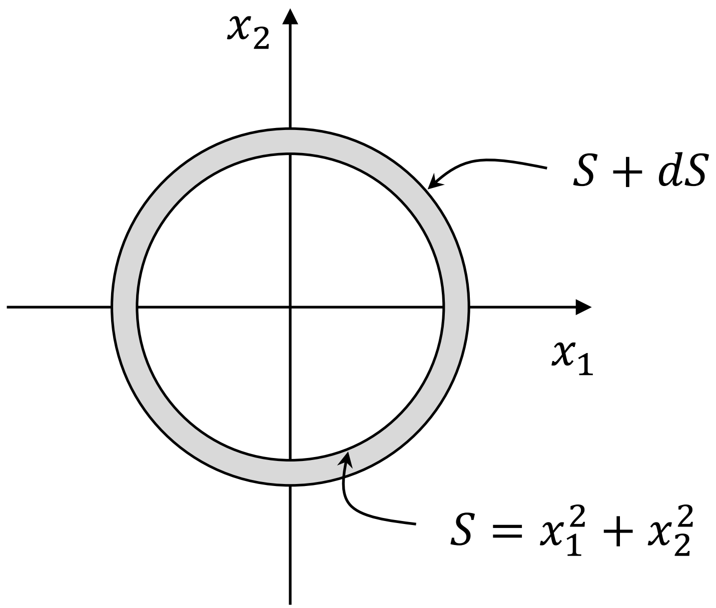
$$f(\epsilon_1, \epsilon_2) d\epsilon_1 d\epsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{\epsilon_1^2}{2\sigma_1^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{\epsilon_2^2}{2\sigma_2^2}\right) d\epsilon_1 d\epsilon_2$$

Wir definieren neue Variablen $x_1 = \frac{\epsilon_1}{\sigma_1}$ und $x_2 = \frac{\epsilon_2}{\sigma_2}$:

$$f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right) dx_1 dx_2$$

Weiterhin definieren wir die Summe der Quadrate: $S = x_1^2 + x_2^2$

Die Wahrscheinlichkeit, dass S in einem Intervall $[S, S + dS]$ liegt entspricht also der Fläche eines Rings um den Ursprung.



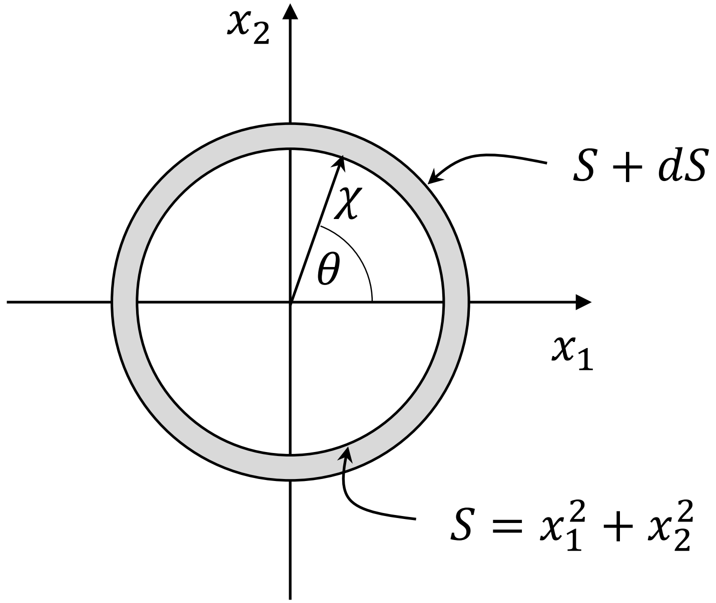
Die χ^2 Verteilung

Die Wahrscheinlichkeit, dass S in einem Intervall $[S, S+dS]$ liegt entspricht also der Fläche eines Rings um den Ursprung.

$$f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)\right)dx_1dx_2$$

Um die Wahrscheinlichkeit, dass S in einem Intervall $[S, S+dS]$ liegt zu berechnen wechseln wir in Polarkoordinaten:

$$x_1 = \chi\cos(\theta)$$
$$x_2 = \chi\sin(\theta)$$
$$\chi^2 = S = x_1^2 + x_2^2$$



Damit wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung zu:

$$f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = f(\chi,\theta)\chi d\chi d\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\chi^2\right)\chi d\chi d\theta$$

Nach Integration über θ:

$$f(\chi,\theta)\chi d\chi = \exp\left(-\frac{1}{2}\chi^2\right)\chi d\chi$$

Die χ² Verteilung

Nach Integration über θ:

$$f(\chi)\chi d\chi = \exp\left(-\frac{1}{2}\chi\right)\chi d\chi$$

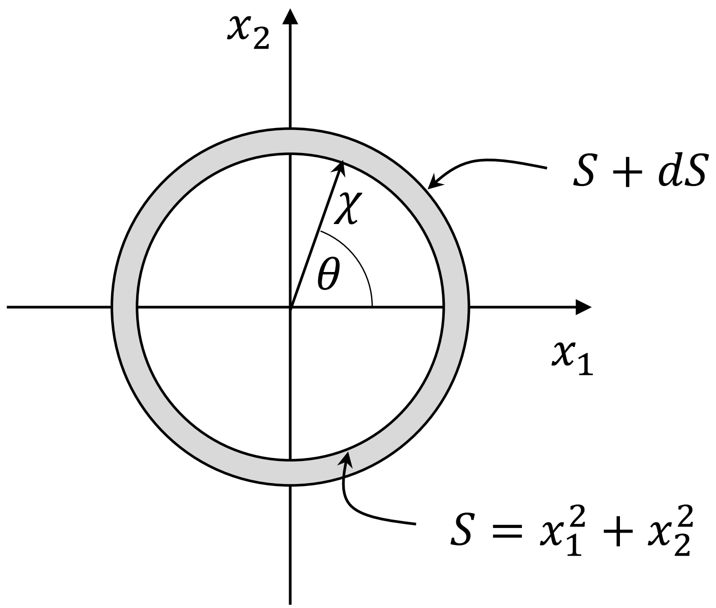
Dies können wir umschrieben für χ^2:

$$f(\chi^2)d\chi^2 = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{2}\chi^2\right)d\chi^2$$

Und ohne die Differentiale, also die PDF ist dann:

$$\boxed{f(\chi^2) = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{2}\chi^2\right)}$$

Die χ^2 Verteilung für zwei Variablen, bzw. für zwei Freiheitsgrade



Die χ^2 Verteilung

Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung (PDF) der χ^2 Verteilung für 2 Freiheitsgrade ist gegeben durch

$$f_2(\chi^2) = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{2}\chi^2\right)$$

Dies können wir einfach verallgemeinern finden für n Freiheitsgrade:

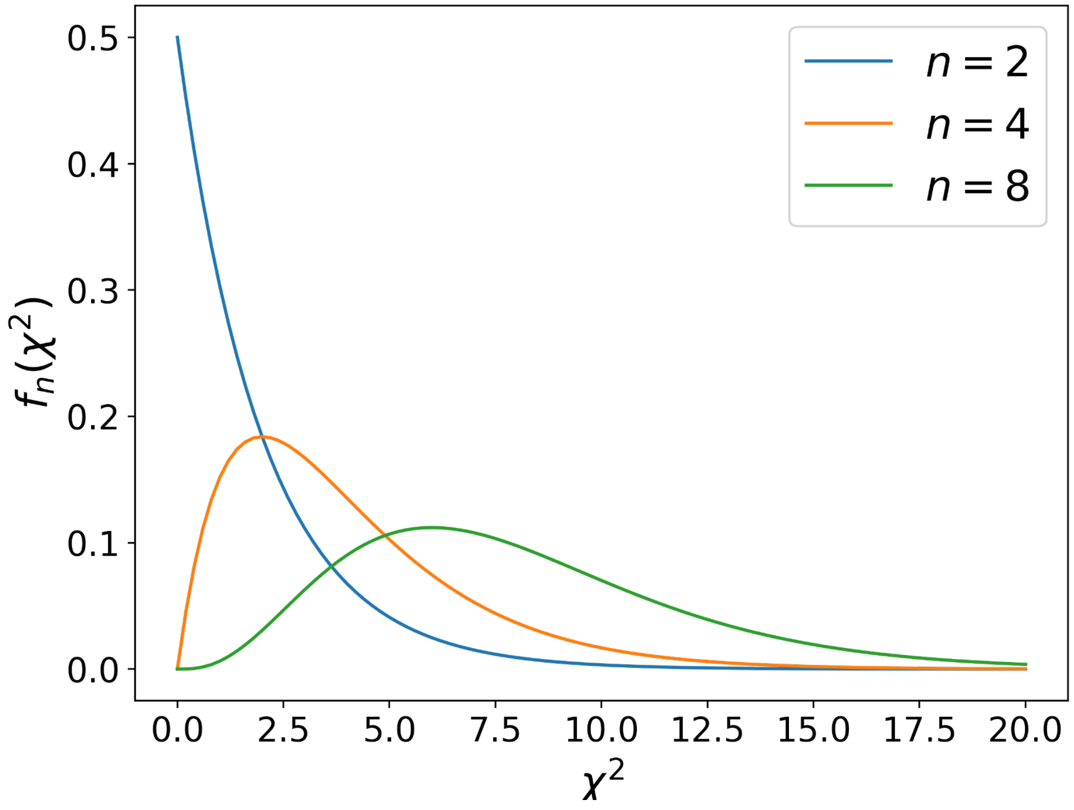
$$\boxed{f_n(\chi^2) = \frac{(\chi^2)^{(n-2)/2}}{2^{n/2}(n/2\ -1)!}\exp\left(-\frac{1}{2}\chi^2\right)}$$

Weiter finden wir:

- Für die Mode: $\chi^2_{\text{mode}} = n - 2$
- Für den Erwartungswert: $\langle\chi^2\rangle = n$
- Für die Varianz: $\text{var}(\chi^2) = 2n$

Oft wird die reduzierte χ^2 Verteilung verwendet: $\chi^2_{\text{red}} = \frac{1}{n}\chi^2$

Dies hat den Vorteil, dass $\langle\chi^2_{\text{red}}\rangle = 1$, unabhängig von n, nicht aber $\text{var}(\chi^2_{\text{red}}) = \frac{2}{n}$



Siehe Beispiel Python Notebook: „Chi2 - Vorlesung“

Herschels Herleitung der Gauss Verteilung (nicht Prüfungsrelevant)

Wir wollen nun einen anderen Ansatz betrachten wie wir die Gauss Verteilung motivieren können:

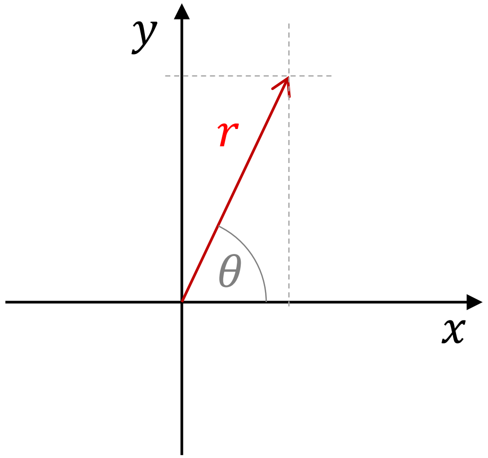
Herschel wollte die Positionen (x, y) von Himmelskörpern bestimmen.

Die Fehler in den beiden Koordinaten x und y sollten als unabhängig angenommen werden, so dass die Verteilung der Fehler in x und y gegeben ist durch:

$$f_1(x)f_2(y)dxdy$$

Wir nehmen weiter an, dass die Unsicherheit der Position vom Winkel θ unabhängig sein soll, also sollte die Verteilungsfunktion eine Funktion des Radius r sein:

$$g(r)dxdy = f_1(x)f_2(y)dxdy$$



Daraus folgt:

$$g(r) = f_1(x)f_2(y)$$

Und:

$$\frac{\partial g(r)}{\partial \theta} = f_1(x)\frac{\partial f_2(y)}{\partial \theta} + f_2(y)\frac{\partial f_1(x)}{\partial \theta}$$

Wir transformieren in Polarkoordinaten:

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$

Herschels Herleitung der Gauss Verteilung

Wir wollen nun einen anderen Ansatz betrachten wie wir die Gauss Verteilung motivieren können:

Herschel wollte die Positionen (x, y) von Himmelskörpern bestimmen.

Wir nehmen an, dass die Unsicherheit der Position vom Winkel θ unabhängig sein soll, also sollte die Verteilungsfunktion eine Funktion des Radius r sein:

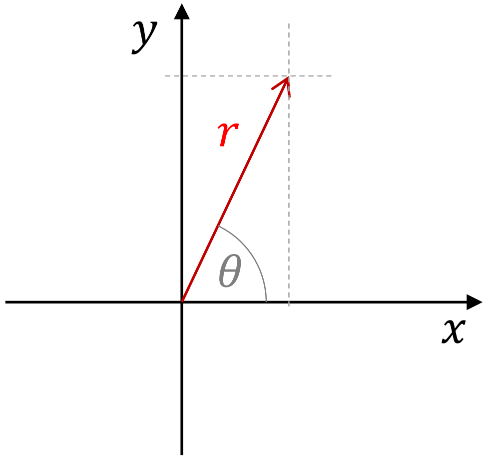
$$g(r) = f_1(x) f_2(y)$$

Und:

$$\frac{\partial g(r)}{\partial \theta} = f_1(x) \frac{\partial f_2(y)}{\partial \theta} + f_2(y) \frac{\partial f_1(x)}{\partial \theta}$$

Wir transformieren in Polarkoordinaten:

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$



$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial \theta} = \frac{\partial f_1(x)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} = -y\frac{\partial f_1(x)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f_2(y)}{\partial \theta} = \frac{\partial f_2(y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = x\frac{\partial f_2(y)}{\partial y}$$

Und so mit:

$$x f_1(x)\frac{\partial f_2(y)}{\partial y} - y f_2(y)\frac{\partial f_1(x)}{\partial x} = 0$$

Herschels Herleitung der Gauss Verteilung

Wir wollen nun einen anderen Ansatz betrachten wie wir die Gauss Verteilung motivieren können:

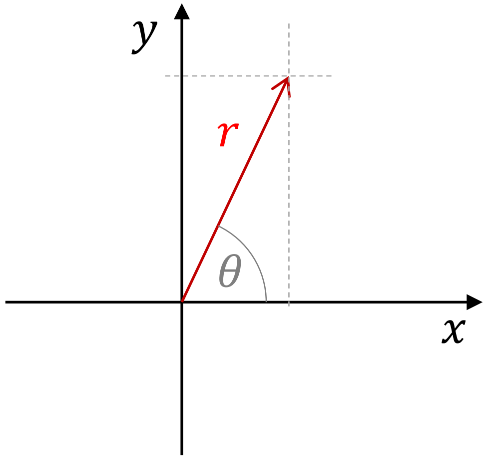
Herschel wollte die Positionen (x, y) von Himmelskörpern bestimmen.

Wir nehmen an, dass die Unsicherheit der Position vom Winkel θ unabhängig sein soll, also sollte die Verteilungsfunktion eine Funktion des Radius r sein:

$$g(r) = f_1(x)f_2(y)$$

Und:

$$\frac{\partial g(r)}{\partial \theta} = f_1(x)\frac{\partial f_2(y)}{\partial \theta} + f_2(y)\frac{\partial f_1(x)}{\partial \theta} = 0$$



Wir finden in Polarkoordinaten:

$$x f_1(x)\frac{\partial f_2(y)}{\partial y} - y f_2(y)\frac{\partial f_1(x)}{\partial x} = 0$$

Da x und y unabhängig sind gilt:

$$\frac{1}{x f_1(x)}\frac{\partial f_1(x)}{\partial x} = K = \frac{1}{y f_2(y)}\frac{\partial f_2(y)}{\partial y}$$

Wobei K eine Konstante ist.

Herschels Herleitung der Gauss Verteilung

Wir wollen nun einen anderen Ansatz betrachten wie wir die Gauss Verteilung motivieren können:

Herschel wollte die Positionen (x, y) von Himmelskörpern bestimmen.

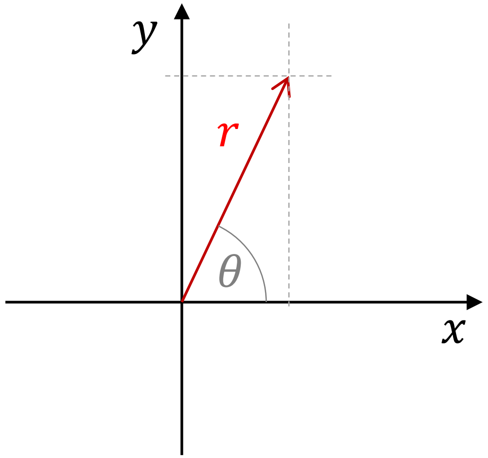
Wir nehmen an, dass die Unsicherheit der Position vom Winkel θ unabhängig sein soll, also sollte die Verteilungsfunktion eine Funktion des Radius r sein:

$$g(r) = f_1(x) f_2(y)$$

Und da x und y unabhängig sind gilt:

$$\frac{1}{x f_1(x)} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x} = K = \frac{1}{y f_2(y)} \frac{\partial f_2(y)}{\partial y}$$

Wobei K eine Konstante ist.



Wir können nun berechnen:

$$\frac{\partial f_1(x)}{f_1(x)} = Kx\partial x$$

$$\rightarrow \ln f_1(x) = \frac{1}{2} K x^2 + C$$

$$\rightarrow f_1(x) \sim \exp\left(\frac{1}{2} K x^2\right)$$

Da $f_1(x)$ normierbar sein muss, muss K negativ sein und wir definieren: $K = -{}^{1}/_{\sigma^2}$

Herschels Herleitung der Gauss Verteilung

Wir wollen nun einen anderen Ansatz betrachten wie wir die Gauss Verteilung motivieren können:

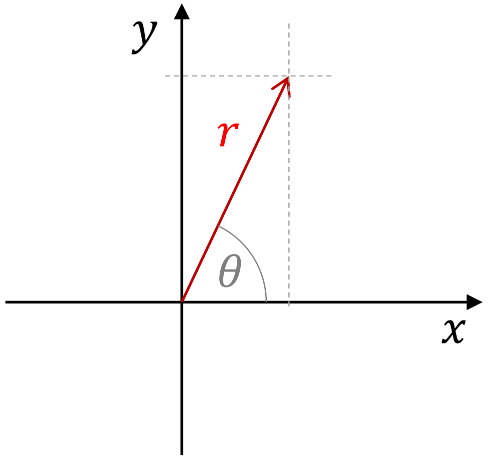
Herschel wollte die Positionen (x, y) von Himmelskörpern bestimmen.

Wir nehmen an, dass die Unsicherheit der Position vom Winkel θ unabhängig sein soll, also sollte die Verteilungsfunktion eine Funktion des Radius r sein:

$$g(r) = f_1(x) f_2(y)$$

Damit erhalten wir für die nicht normierte Verteilungsfunktionen $f_1(x)$ und $f_2(y)$:

$$\boxed{\begin{aligned} f_1(x) &\sim \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}\right) \\ f_2(y) &\sim \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{y^2}{\sigma^2}\right) \end{aligned}}$$



Die Gauss Verteilung.

Wobei wir aussschliesslich Unabhängigkeit und Zufälligkeit angenommen haben.

Zusammenfassung

- Wir haben einige Verteilungsfunktionen kennengelernt:
  - Binomialverteilung: Verteilung einer Variable die genau zwei verschiedene Werte annehmen kann.
  - Poisson Verteilung: Verteilung der Häufigkeit von seltenen Ereignissen.
  - Gauss Verteilung: Normalverteilung von unabhängigen und zufälligen Zufallsvariablen.
  - χ^2 Verteilung: Verteilung der normierten Abstandsquadrate von n normalverteilten Zufallsvariablen.

- Zentraler Grenzwertsatz: Die Verteilung der Mittelwerte von grossen Stichproben von Zufallsvariablen nähern sich der Gauss Verteilung an. Unabhängig davon welche Verteilungen der einzelnen Zufallsvariable zugrunde liegt.