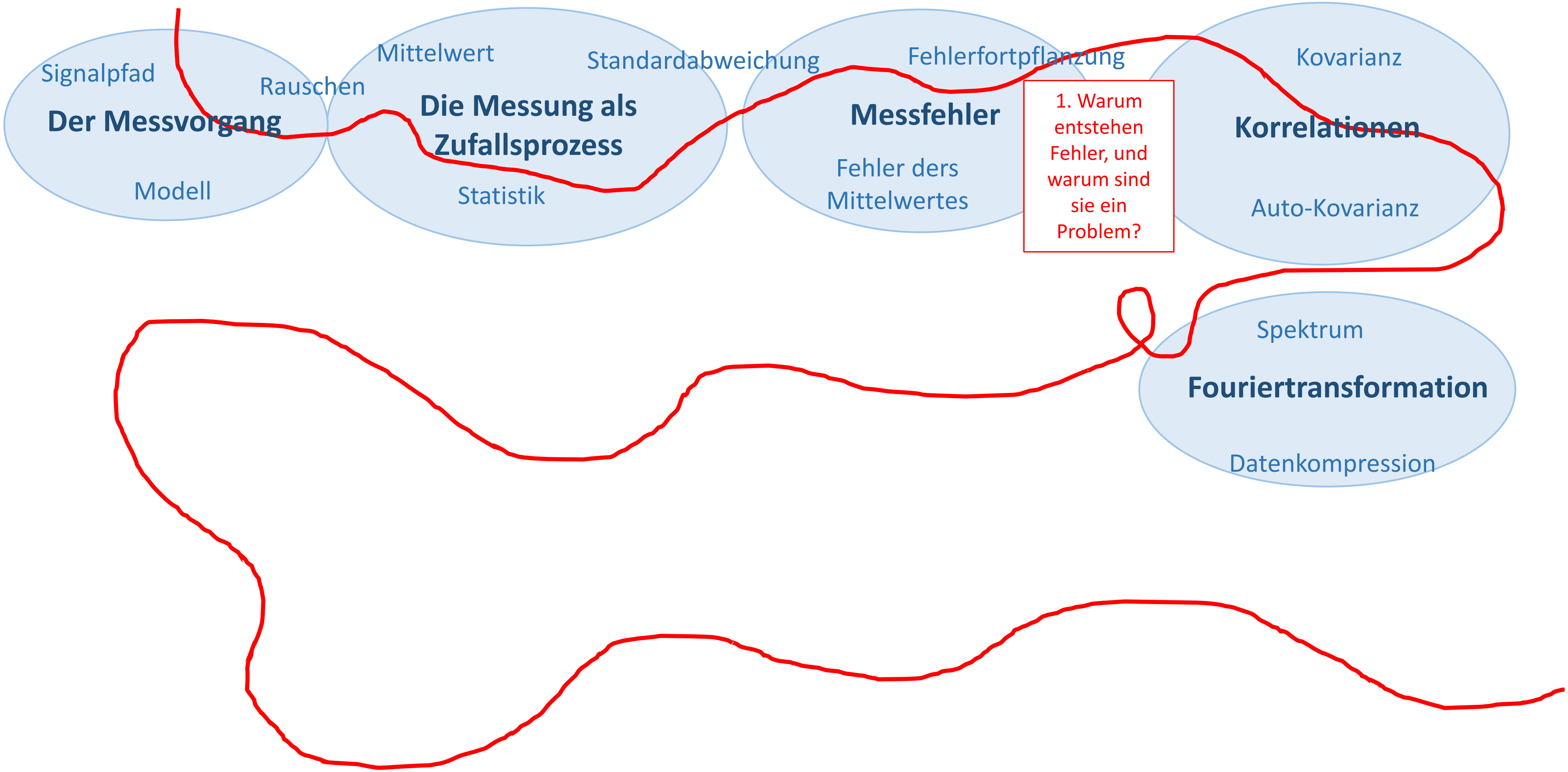
Die spektrale Leistungsdichte

Der rote Faden: wie erhalte ich aussagekräftige Zahlen aus komplexen Daten?



Themen dieser Vorlesung:

- Fouriertransformation
- Die Spektrale Leistungsdichte
- (Phyphox App)

Notenbonusaufgabe (29. März – 7. April)

- Moodle-Quiz, Einstellungen
- Anzahl signifikanter Stellen und Toleranz

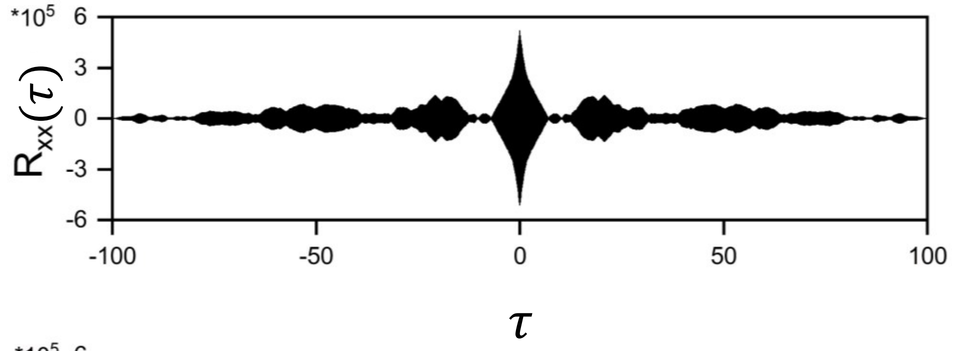
Repetition zu Auto-Kovarianz

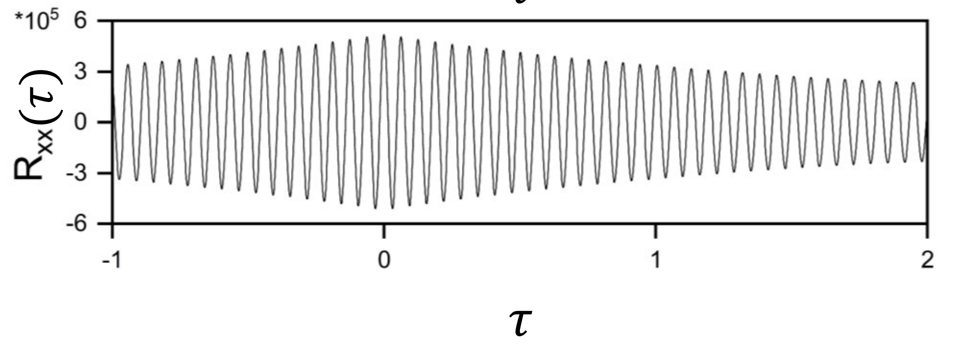
- Wie sieht die Auto-Kovarianz von Gauss-verteiltem weissem Rauschen als Funktion von $\boldsymbol{\tau}$ aus? Was ist der Wert bei $\boldsymbol{\tau=0}$?

  Weisses Rauschen ist per Definition vollkommen unkorreliert von Punkt zu Punkt. Die Auto-Kovarianz muss also gegen Null streben für alle $\tau \neq 0$ und für $t_{tot} \to \infty$. Für $\tau = 0$ wird die Auto-Kovarianz zur Varianz. Die Verteilung hat dort den einzigen wohldefinierten Peak.

- Wie sieht die Auto-Kovarianz einer perfekten Sinuswelle mit Periode τ_0 als Funktion von $\boldsymbol{\tau}$ aus?

  Eine Sinuswelle ist perfekt periodisch und Messwerte wiederholen sich mit ganzzahligem Vielfachen der Oszillationsperiode. Die Auto-Kovarianz Ist deshalb periodisch und hat Maxima für $\tau = n\tau_0$ mit $n \in \mathbb{N}$.

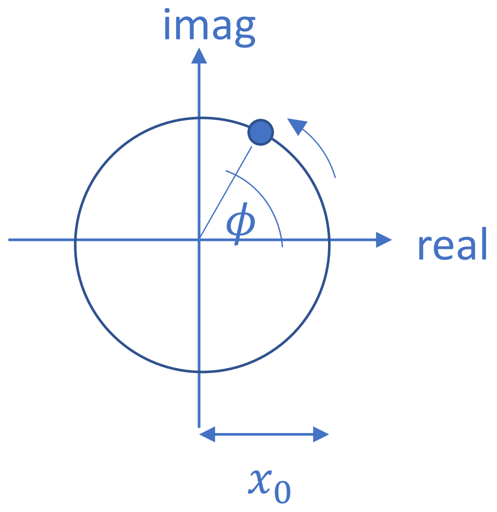




Modell: Periodische Funktionen und komplexe Zahlen

Wir können periodische Funktionen (wie z.B. die Auslenkung eines Pendels) als den Realteil einer komplexen Exponentialfunktion mit zeitabhängiger Phase ϕ beschreiben:

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$$

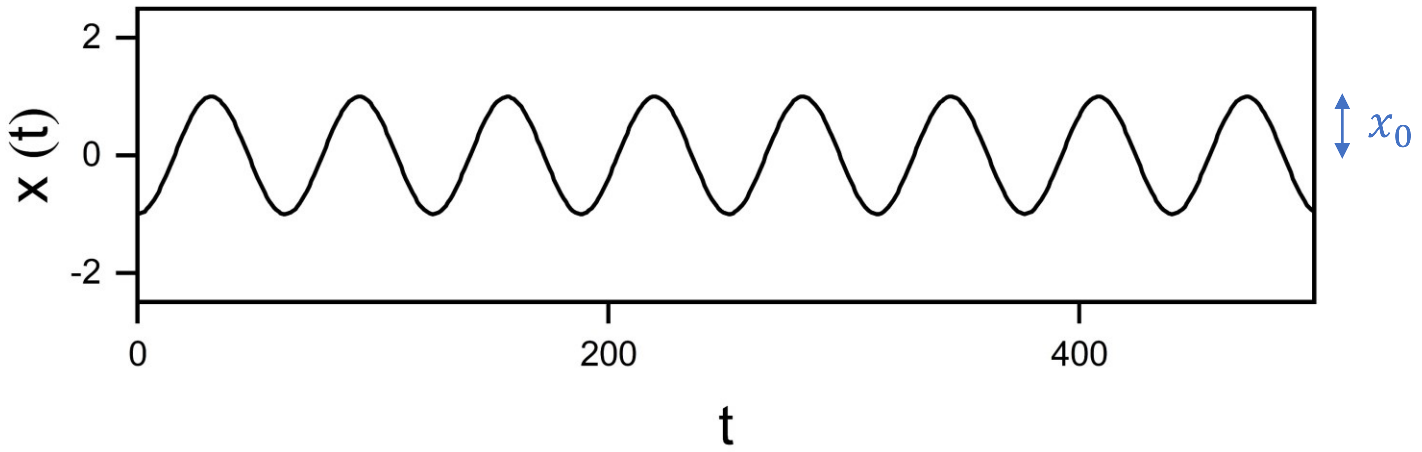


Die Phase $\phi(t)$ ist der Winkel zwischen den Imaginär- und Realteilen der komplexen Zahl $e^{i\phi}$:

$$\tan(\phi) = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}$$

Für eine linear zeitabhängige Phase $\phi(t) = 2\pi f_0 t + \phi_0$ erhalten wir somit eine Oszillation mit einer Amplitude x_0 und einer Frequenz f_0:

$$x(t) = x_0 \mathrm{real}\left[e^{i\phi(t)}\right]$$



Fouriertransformation

Fouriers Theorem: *Wir können jedes $x(t)$ als Summe von trigonometrischen Funktionen darstellen.*

$$x(t_k) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} X(f_n) e^{i2\pi f_n t_k}$$

Diskrete inverse Fouriertransformation

$$x(t) = \int_{f=-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi f t}\, df$$

Kont. inverse Fouriertransformation

wobei $\Delta_f = \frac{1}{t_{\text{tot}}}$ die kleinste Frequenz(differenz) ist, die in der Messzeit t_{tot} aufgelöst werden kann, und $f_n = n\Delta_f$ ist die n -te diskrete Frequenz, die wir als Funktion der diskreten Zeit $t_k = k\Delta_t$ betrachten.

Die komplexen Koeffizienten $X(f)$ können mit einer Rücktransformation bestimmt werden:

$$X(f_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(t_k) e^{-i2\pi f_n t_k}$$

Diskrete Transformation

$$X(f) = \frac{1}{t_{\text{tot}}} \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t}\, dt$$

Kontinuierliche Transformation

Fouriertransformation – optionaler Exkurs (kein Prüfungsmaterial)

Wir können die Einträge unserer Funktion als Koeffizienten eines Informationsraumes (sog. **Hilbertraumes**) in der Zeit verstehen:

$$\begin{bmatrix} x(t_1) \\ x(t_2) \\ \vdots \\ t(t_N) \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} X(f_1) \\ X(f_2) \\ \vdots \\ X(f_N) \end{bmatrix}$$

Dieselbe Information $x(t)$ kann auch auf andere Weise, d.h. in einem anderen Hilbertraum, dargestellt werden, beispielsweise im Frequenzraum. Um von einem Raum in einen anderen zu wecheln, vollführen wir eine Fouriertransformation, analog zu einem **Basiswechsel** in linearer Algebra:

$$x(t_k) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} X(f_n) e^{i2\pi f_n t_k} \longleftrightarrow X(f_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(t_k) e^{-i2\pi f_n t_k}$$

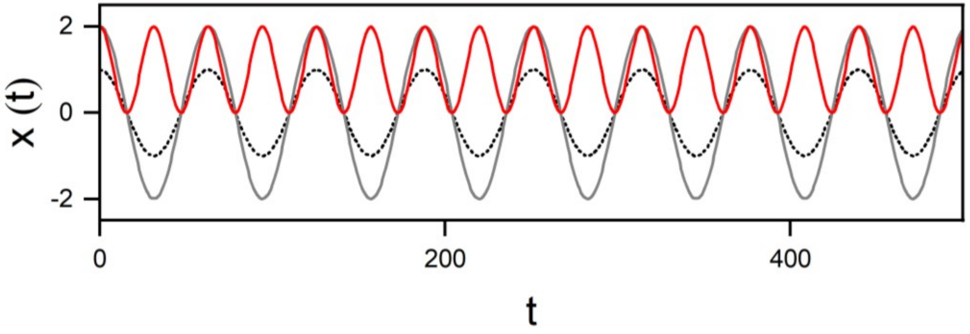
Die Fouriertransformation entspricht einer **Projektion** unserer Funktion auf die Vektoren des neuen Hilbertraums, hier z.B. auf die Frequenzkomponenten.

Q **An was erinnert uns die mathematische Form der Projektion?**

Eigenschaften der Fouriertransformation

Wie funktioniert die Fourieranalyse für eine einzelne Frequenz?

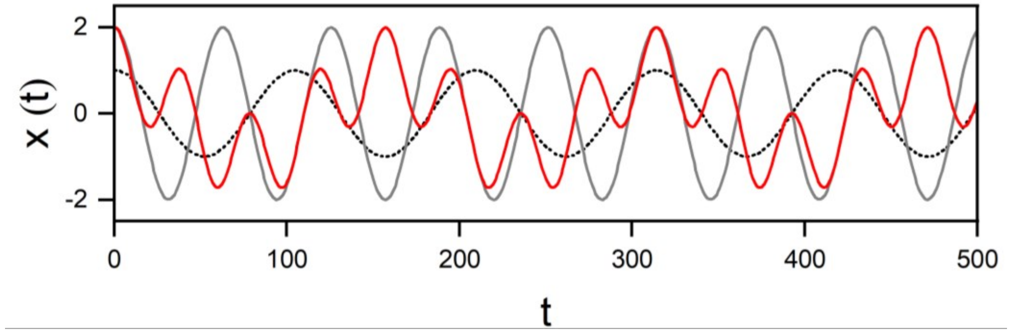
$$X(f_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(t_k) e^{-i2\pi f_n t_k}$$



$x(t)$

$\cos(2\pi f_n t_k)$ -- Realteil der Exponentialfunktion

Produkt der Funktionen
Die Frequenzen passen, Maximum im Realteil von $X(f)$



$x(t)$

$\cos(2\pi f_n t_k)$ -- Realteil der Exponentialfunktion

Produkt der Funktionen
Die Frequenzen passen nicht, Realteil von $X(f)$ bleibt klein

Eigenschaften der Fouriertransformation

Wie funktioniert die Fourieranalyse für eine einzelne Frequenz?

$$X(f_n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(t_k)e^{-i2\pi f_n t_k}$$

Q **Was geschieht mit den Imaginärteilen?**

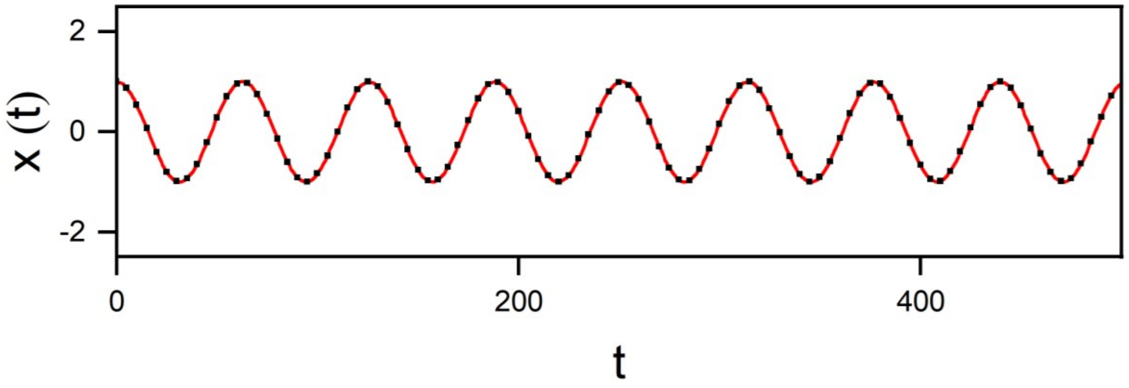
$$X(f_n) = \frac{1}{N}\sum \underbrace{(\mathrm{A}\cdot\cos(2\pi f_0 t_k) + \mathrm{B}\cdot\sin(2\pi f_0 t_k))}_{\text{Beispiel eines Signal}} \times \underbrace{(\cos(2\pi f_n t_k) + i\sin(2\pi f_n t_k))}_{\text{Projektion}}$$

$f_0 \approx f_n$

$$= \frac{1}{N}\sum [\underbrace{\mathrm{A}\cdot\cos(2\pi f_0 t_k)\cos(2\pi f_n t_k)}_{\text{Realteil von } X(f_n)\text{, Beispiel von vorher}} + \underbrace{B\cdot\sin(2\pi f_0 t_k)\cos(2\pi f_n t_k)}_{\text{Summe geht gegen Null}} + \underbrace{iA\cdot\cos(2\pi f_0 t_k)\sin(2\pi f_n t_k)}_{\text{Summe geht gegen Null}} + \underbrace{iB\cdot\sin(2\pi f_0 t_k)\sin(2\pi f_n t_k)}_{\text{Imaginärteil von } X(f_n)}]$$

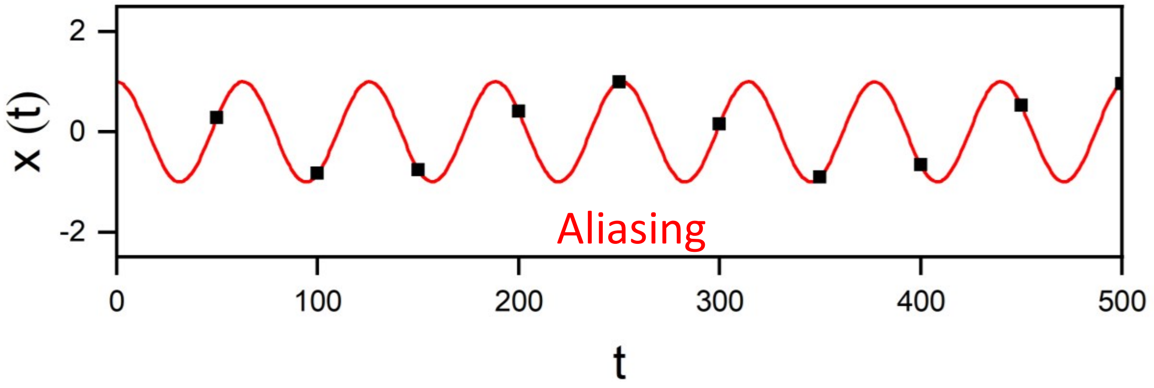
Eigenschaften der Fouriertransformation

Durch was ist der Frequenzbereich der Fouriertransformation nach oben limitiert?



Zeitintervall zwischen Messpunkten $\Delta_t \ll 1/f_{\mathrm{signal}}$

Signalfrequenz wird korrekt gemessen



Zeitintervall zwischen Messpunkten $\Delta_t > 1/f_{\mathrm{signal}}$

Signalfrequenz kann nicht korrekt gemessen werden

Es werden mindestens 2 Messpunkte pro Periode benötigt, um eine bestimmte Frequenzkomponente korrekt zu messen

Eigenschaften der Fouriertransformation

Durch was ist der Frequenzbereich der Fouriertransformation limitiert?

Maximale Frequenz

Die **maximale Frequenz**, die ohne Aliasing gesampled werden kann, ist die sogenannte Nyquist-Frequenz:

$$\boxed{f_{\max} = \frac{1}{2\Delta_t}}$$

Nyquist-Frequenz
= Bandbreite

Fouriertransformation

Q **Ich möchte eine Lichtwelle mit 1550 nm Wellenlänge direkt als oszillierende elektrische Welle beobachten. Welche Zeitauflösung muss mein ADC mindestens haben?**

Im Vakuum entspricht eine Wellenlänge von $\lambda = 1550$ nm einer Frequenz von

$$f_{\mathrm{el}} = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\times 10^{8}\ \mathrm{m/s}}{1.55\times 10^{-6}\ \mathrm{m}} = 1.9 \times 10^{14}\ \mathrm{Hz}.$$

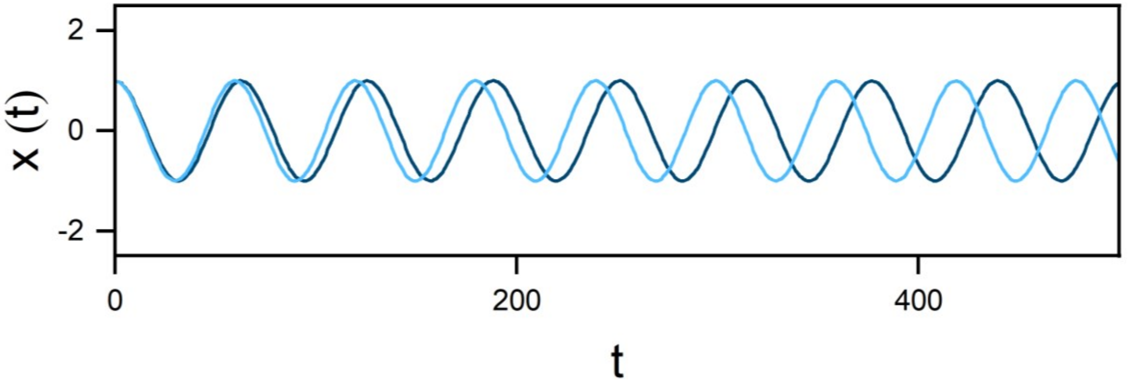
Mein ADC benötigt also eine zeitliche Auflösung von

$$\Delta_t = \frac{1}{2 f_{\mathrm{el}}} = 2.6\ \mathrm{fs}.$$

(Das ist natürlich ganz und gar unmöglich.)

Eigenschaften der Fouriertransformation

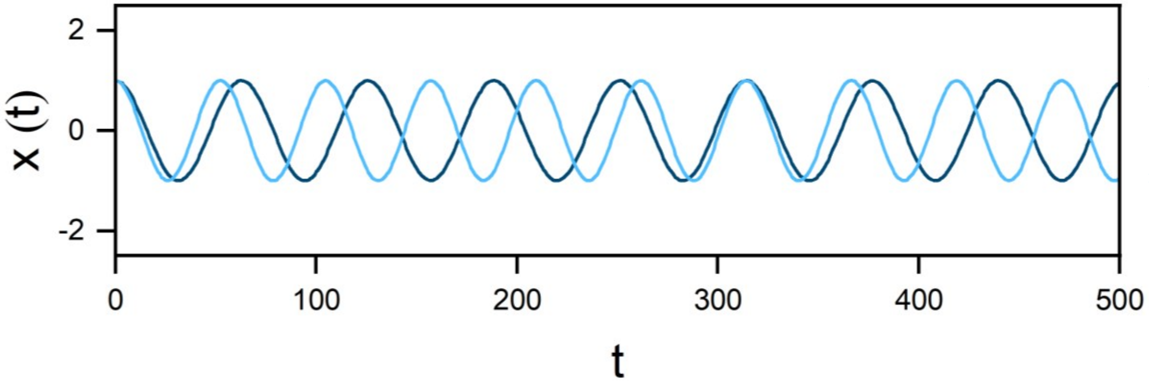
Durch was ist der Frequenzbereich der Fouriertransformation nach unten limitiert?



≈ 8 Oszillationsperioden

≈ 8.5 Oszillationsperioden

Frequenzen können nicht unterschieden werden innerhalb von t_{tot}



≈ 8 Oszillationsperioden

≈ 9.5 Oszillationsperioden

Frequenzen können unterschieden werden innerhalb von t_{tot}

Eigenschaften der Fouriertransformation

Durch was ist der Frequenzbereich der Fouriertransformation limitiert?

Maximale Frequenz

Die **maximale Frequenz**, die ohne Aliasing gesampled werden kann, ist die sogenannte Nyquist-Frequenz:

$$\boxed{f_{\text{max}} = \frac{1}{2\Delta_t}}$$

Nyquist-Frequenz
= Bandbreite

Frequenzauflösung

Frequenzen können unterschieden werden, wenn

$$\Delta_f \geq \frac{1}{t_{\text{tot}}}$$

(mindestens eine volle Oszillation Unterschied).
Damit erhalten wir die **Auflösung**

$$\boxed{\Delta_f = \frac{2f_{\text{max}}}{N} = \frac{1}{N \times \Delta_t}}$$

Die Frequenzwerte, an denen die DFT ausgewertet wird, entsprechen einer ganzen Zahl mal der Auflösung:

$$\boxed{f_n = n \times \Delta_f}$$

N Punkte von $-\mathrm{f}_{\text{max}}$ bis f_{max}

Fouriertransformation

Q **Wie lange muss ich mindestens messen, um die Frequenz der Erdrotation um die Sonne aus der Fouriertransformation der Erdbewegung (relative zum Zentrum der Michstrasse) zu messen?**

$\approx 3 \times 10^7$ s

Ein Jahr

Q **Was wäre die Ungenauigkeit dieser Messung, und weshalb?**

Nach einem Jahr kann die Frequenz der Erdrotation in der Fouriertransformation angezeigt werden. Allerdings wäre der zweite Punkt (mit einem tieferen Fourierkoeffizienten) bei zwei Jahren, was uns eine geschätzte Ungenauigkeit von einem halben Jahr ergäbe.

Eigenschaften der Fouriertransformation

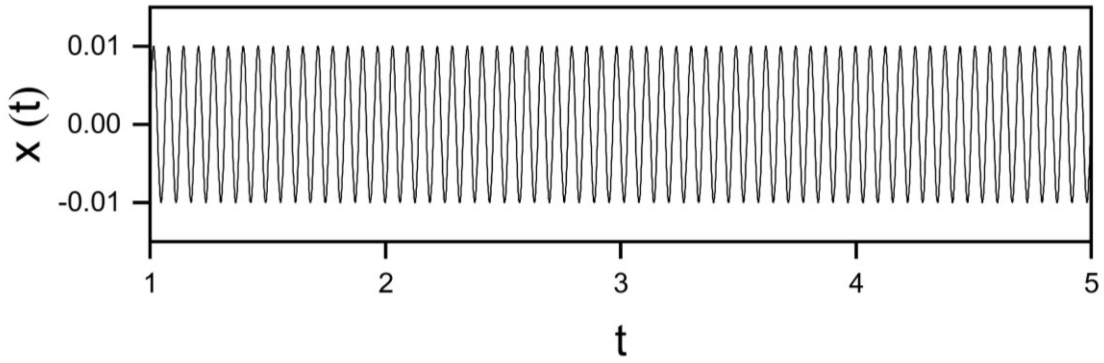
- Die Fouriertransformation kann entweder nur für positive («single-sided») oder für positive und negative Frequenzen definiert werden («double-sided»). Die Unterschiedlichen Konventionen können die Normierung ändern, wie wir am Beispiel der Leistungsdichte später sehen werden.

- Negative Frequenzen haben keine zusätzliche Bedeutung, die Fouriertransformation ist symmetrisch im Realteil bzw. antisymmetrisch im Imaginärteil (gemäss der Symmetrie der Cosuinus- und Sinusfunktionen)

- Das Verhältnis zwischen Real- und Imaginärteil eines Spektralkoeffizienten $X(f)$ entspricht einer Phase, also einer zeitlichen Verschiebung des periodischen Signals bei dieser Frequenz (Cosinus zu Sinus).

- Oft ist die Phase unwichtig und man betrachtet den Absolutbetrag $|X(f)|$.

Fouriertransformation



Q **Wie sieht die Fouriertransformation einer perfekten, zeitlich unbegrenzten Sinuswelle aus?**

(1) Flach

(2) Perfekt periodisch

(3) Überall Null, mit einem Peak bei der Signalfrequenz

Power Spectral Density (PSD) – die spektrale Leistungsdichte

In vielen Anwendungen wird das normierte Quadrat der Fouriertransformation verwendet – die sogenannte Leistungsdichte oder power spectral density (PSD):

$$\boxed{S_{xx}(f_n) = \frac{\Delta_t}{N}\left|\sum_{k=0}^{N-1} x(t)e^{-i2\pi f_n t_k}\right|^2}$$

- Das Betragsquadrat lässt die Phase und das Vorzeichen des Realteils verschwinden und zeigt uns nur an, wie viel «Oszillaltionsenergie» in einem bestimmten Teil des Spektrums vorhanden ist – das ist oft die entscheidende Information.

- Durch die Normierung hängt der gemessene Wert der PSD nicht von der Frequenzauflösung (der inversen Messzeit) ab. Eine lange und eine kurze Messung sollen dasselbe Resultat produzieren, so wie auch die Messung einer Massedichte nicht von der Grösse eines gemessenen Objektes abhängt.

- Die Normierung mit Δ_t macht aus einem Power Spectrum (PS, mit derselben Einheit wie x^2) eine PSD mit der Einheit x^2/Hz (zum Beispiel m^2/Hz, V^2/Hz, …)

PSD und Varianz - das Parseval-Theorem

Fouriersynthese Part 3

Doppelseitig (double-sided)

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f)\, df$$ kontinuierlicher Fall

$$\sigma_x^2 = \Delta_f \sum_{f_n=-f_{\max}}^{f_{\max}} S_{xx}\,(f_n)$$ diskreter Fall

Faktor 2 Unterschied in der Definition von $S_{xx}(f_n)$

Einseitig (single-sided)

$$\sigma_x^2 = \int_{0}^{\infty} S_{xx}(f)\, df$$ kontinuierlicher Fall

$$\sigma_x^2 = \Delta_f \sum_{f_n=0}^{f_{\max}} S_{xx}(f_n)$$ diskreter Fall

$x(t) = a(t) + b\,(t)$ a, b unkorreliert

$var(x) = \sigma_x^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2$

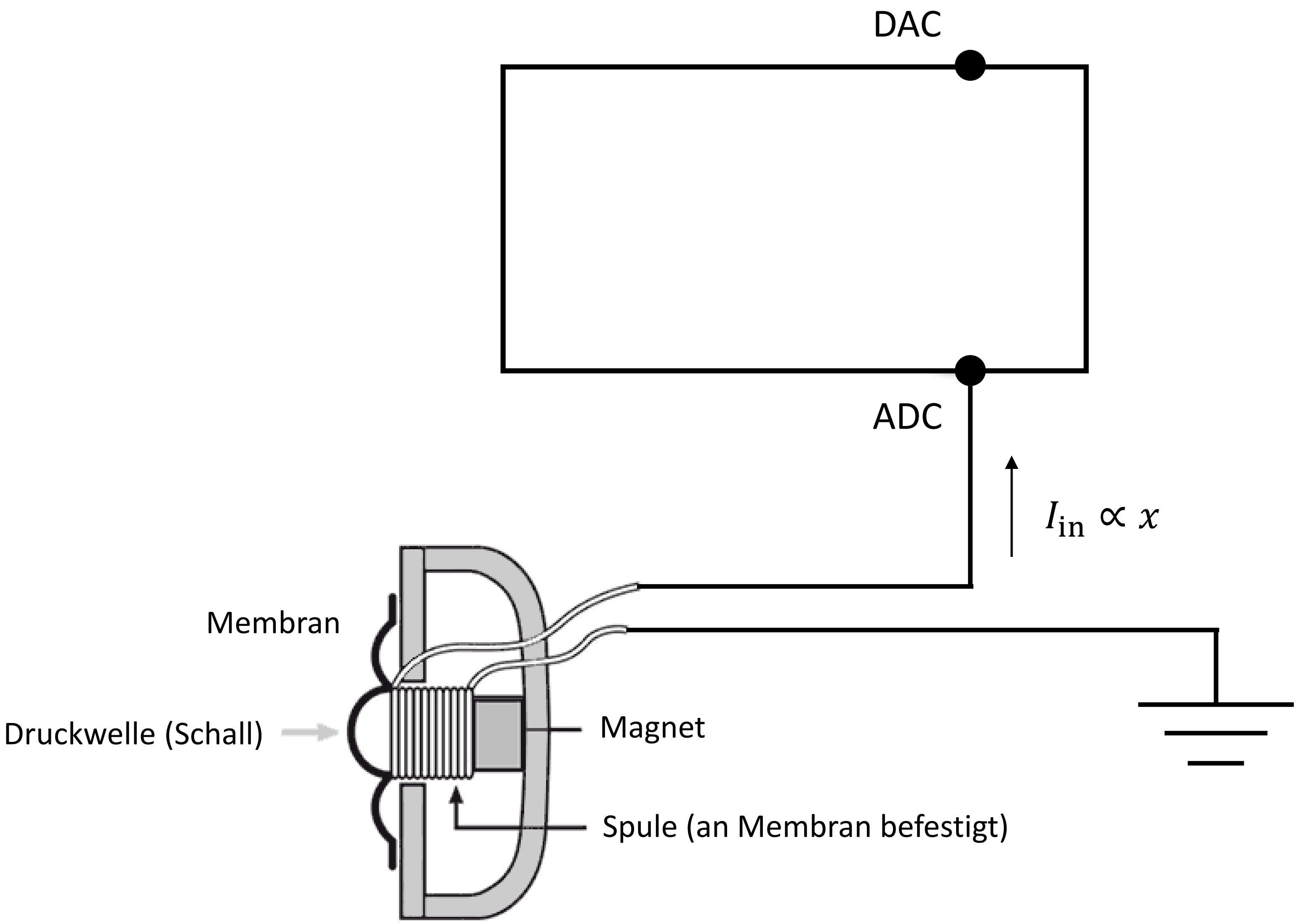
$$= \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f)\, df = \int_{-\infty}^{\infty} S_{aa}(f)\, df + \int_{-\infty}^{\infty} S_{bb}(f)\, df}$$

Die spektralen Leistungsdichten unkorrelierter Variablen sind additiv.

Analog für diskreten Fall (kont. Notation ist schöner)

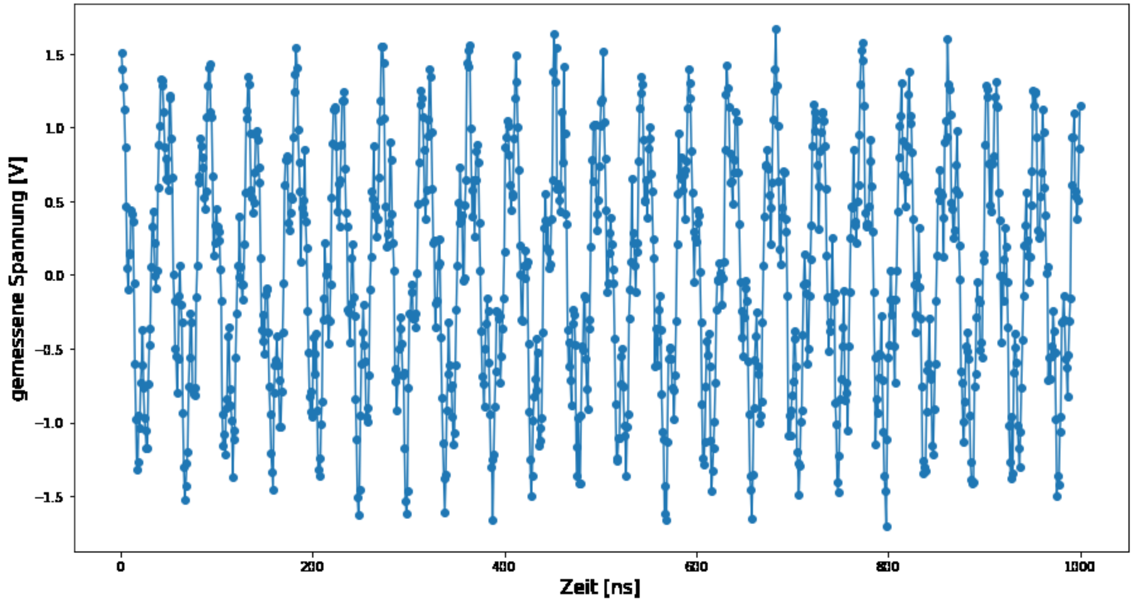
Messvorgang - ADC

Audioaufnahmen
(Sinus und Strauss)

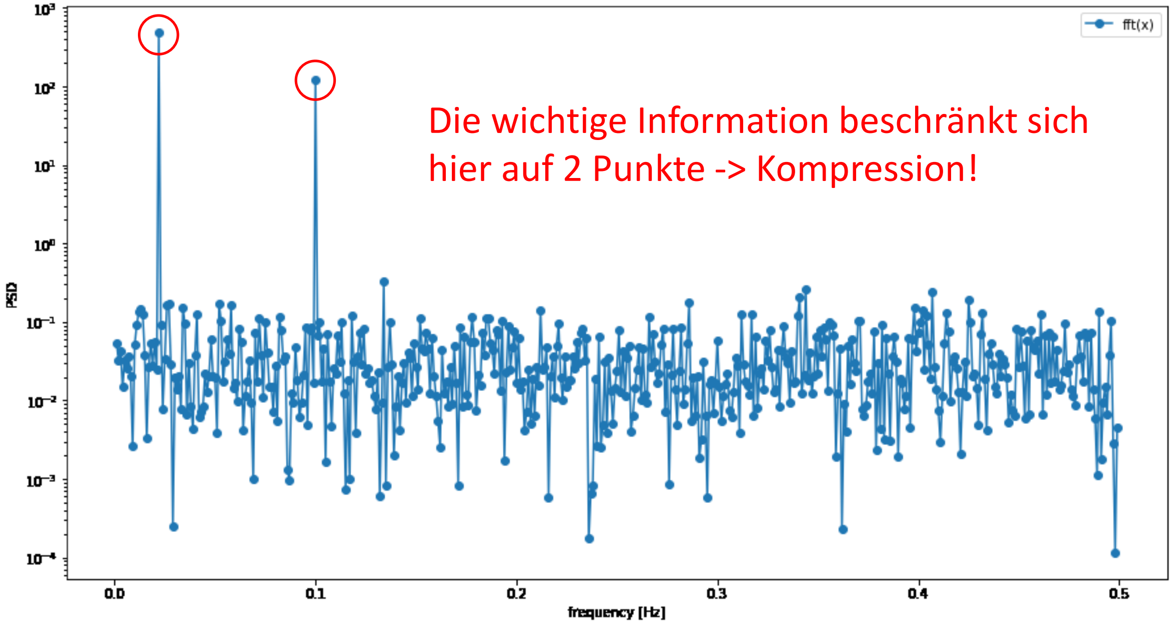


Anwendungsbeispiel: Audioaufnahmen

Audiosignal als Funktion der Zeit (WAV Format)



Audiosignal als Funktion der Frequenz (mp3 Format)



Anwendungsbeispiel: Audioaufnahmen

Q **Wie kann die spektrale Information eines veränderlichen Signals (Musikstück) dargestellt werden?**