

FURB - UNIVERSIDADE REGIONAL DE BLUMENAU
ENGENHARIA ELÉTRICA

ESTUDO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS EM
DUAS DIMENSÕES E COM ELEMENTOS SUB-
PARAMÉTRICOS DE SEGUNDA ORDEM

ANDERSON SANTOS NUNES

Blumenau, SC
2011

ANDERSON SANTOS NUNES

ESTUDO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS EM
DUAS DIMENSÕES E COM ELEMENTOS SUB-
PARAMÉTRICOS DE SEGUNDA ORDEM

Monografia apresentada ao
Programa de Pós- Graduação em
Engenharia Elétrica da Universidade
Regional de Blumenau, como requisito para
a obtenção do grau de Especialista em
Engenharia Elétrica.

ORIENTADOR: Prof. Dr. MARCELO GRAFULHA VANTI

Blumenau, SC

2011

ANDERSON SANTOS NUNES

ESTUDO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS M
DUAS DIMENSÕES E COM ELEMENTOS SUB-
PARAMÉTRICOS DE SEGUNDA ORDEM

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Grafulha Vanti

Prof. Dr. Hugo Armando Doringuez Alrnaguer

Prof. Dr. Luiz Henrique Meyer

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Rosane e Airton, por me darem a vida, amor, apoio e educação.

À minha irmã Alexandra, por estar sempre ao meu lado, no papel de conselheira e melhor amiga.

À minha namorada, Silvia, pelo amor, incansável compreensão e apoio durante a elaboração deste trabalho.

Agradeço à WEG Indústrias S.A. – T&D– por proporcionar minha participação neste curso de Pós Graduação.

Agradeço ao meu Orientador, Prof. Dr. Marcelo Grafulha Vanti, por me orientar pelos pedregosos caminhos do Eletromagnetismo.

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é apresentar o estudo de modelagem eletromagnética de correntes induzidas em materiais condutores. Desta forma, elabora-se uma análise teórica das equações de Maxwell, de formulações estáticas e transitórias em duas dimensões (2D) e o Método de Elementos Finitos (MEF), o qual é utilizado para a resolução, de forma numérica, das equações apresentadas. São elaboradas rotinas em Matlab que permitem a simulação dos conceitos citados.

Palavras-chave:

Elementos Finitos - subparamétricos - correntes induzidas - transformadores

ABSTRACT

The aim main of this work is to present the electromagnetic model of the eddy currents in conductor materials. For this purpose, the theoretical analysis of the following subjects is made: Maxwell's equations, 2D static and transient formulations and the Finite Element Method (FEM), which is used to solve numerically the presented equations. Some MATLAB scripts are elaborated in order to apply the concepts adressed.

Key words:

Finite Elements Method - subparametric - eddy currents - transformers

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Divisão do eletromagnetismo.	14
Figura 2 – Comportamento de campos em 2D – simetria planar	23
Figura 3 – Domínio de cálculo	28
Figura 4- Exemplo da aplicação das condições de contorno	30
Figura 5 – Comportamento de campos em 2D – simetria axissimétrica	31
Figura 6 - Elemento real e de referência	37
Figura 7 - Função de interpolação N1	43
Figura 8 - Função de interpolação N2	43
Figura 9 - Função de interpolação N6	44
Figura 10 – Estrutura do arquivo .msh	53
Figura 11 – Nós sob condições de contorno	54
Figura 12 – Nós que formam os elementos	55
Figura 13 – Geometria para análise em magnetostática	56
Figura 14- a) Malha e b) linhas de campo magnético - FEMM	57
Figura 15- a) Malha (Gmsh) e b) linhas de campo magnético (Matlab)	58
Figura 16- Potencial vetor magnético	58
Figura 17- Indução magnética	59
Figura 18- a) Malha e b) linhas de campo magnético - FEMM	59
Figura 19- a) Malha (Gmsh) e b) linhas de campo magnético (Matlab)	60
Figura 20- Indução magnética	60
Figura 21- Geometria e malha	61
Figura 22- Distribuição de tensão ao longo do domínio	62
Figura 23- Distribuição de tensão com zoom no isolador	62
Figura 24- Geometria	63
Figura 25- a) Geometria e malha e b) linhas de campo magnético (Maxwell)	64

Figura 26- a) Malha (Gmsh) e b) linhas de campo magnético (Matlab)	65
Figura 27- Indução magnética	65
Figura 28- Potencial vetor magnético	66

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Funções de interpolação/mapeamento geométrico de primeira ordem	38
Tabela 2 - Funções de interpolação/mapeamento geométrico de segunda ordem	44
Tabela 3 - Coordenadas e pesos para pontos da integração numérica	51
Tabela 4 - Propriedades magnéticas dos materiais	57
Tabela 5 - Propriedades elétricas e magnéticas dos materiais	63

LISTA DE SÍMBOLOS

Sigla	Descrição	Unidade
B	Densidade de fluxo magnético ou indução magnética	T
H	Campo magnético	A/m
Br	Indução magnética remanente	T
D	Densidade de fluxo elétrico ou indução elétrica	C/m^2
E	Campo elétrico	V/m
$ \mu $	Tensor permeabilidade magnética	H/m
$ \varepsilon $	Tensor permissividade elétrica	F/m
$ \sigma $	Tensor condutividade elétrica	S/m
μ	Permeabilidade magnética	H/m
ε	Permissividade elétrica	F/m
σ	Condutividade elétrica	S/m
J	Densidade de corrente de condução	A/m^2
Ds	Indução magnética remanente	C/m^2
Js	Densidade de corrente fornecida pela fonte	A/m^2
A	Potencial vetor magnético	Wb/m
Ψ	Fluxo magnético	Wb
ρ	Densidade volumétrica de carga elétrica	C/m^3
q	Carga elétrica	C/m^2
V	Potencial elétrico	V
Jind	Densidade de corrente induzida	A/m^2
Boy	Indução magnética gerada por ímã, no sentido de y positivo	T
Box	Indução magnética gerada por ímã, no sentido de x positivo	T
W	Função peso	
R	Resíduo	
Ω	Domínio de resolução do problema	
U	Função escalar	
G	Função vetor	

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES PARA BAIXAS FREQUÊNCIAS	14
2.1	Equações de Maxwell	15
2.2	Equações de Maxwell para Magnetostática	16
2.2.1	Lei de Ampère	16
2.2.2	Lei de Gauss para magnetostática	17
2.2.3	Formulação na forma forte para magnetostática - potencial vetor magnético \mathbf{A}	17
2.3	Equações de Maxwell para Eletrostática	18
2.3.1	Lei de Faraday	18
2.3.2	Lei de Gauss para eletrostática	18
2.3.3	Formulação na forma forte para eletrostática - potencial escalar elétrico V	19
2.4	Equações de Maxwell para Magnetodinâmica	19
2.4.1	Formulação na forma forte para magnetodinâmica - Formulação \mathbf{A} - V	20
2.5	Uma interpretação do Potencial Vetor Magnético	22
3	FORMULAÇÃO MAGNETOSTÁTICA EM 2D – POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO	23
3.1	Simplificação para 2D, com simetria planar	23
3.1.1	Obtenção da forma fraca	25
3.1.2	Condições de contorno	27
3.2	Simplificação para 2D, simetria axissimétrica	30
3.2.1	Obtenção da forma fraca	32
3.2.2	Condições de contorno	33
4	FORMULAÇÃO MAGNETODINÂMICA EM 2D - POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO E POTENCIAL ESCALAR ELÉTRICO (\mathbf{A} - V)	34
4.1	Simplificação para 2D, com simetria planar	34
4.1.1	Obtenção da forma fraca	35
4.1.2	Condições de contorno	35
5	ELEMENTOS FINITOS SUBPARAMÉTRICOS DE SEGUNDA ORDEM	36

5.1.	Introdução ao Método de Elementos Finitos	36
5.2.	Funções de mapeamento geométrico ou funções de forma	37
5.3	Conversão das coordenadas de um ponto específico	39
5.4	Transformação do gradiente e obtenção da matriz Jacobiana	39
5.5	Transformação do elemento diferencial de área	41
5.6	Funções de interpolação	42
5.7	Resolução da formulação magnetostática com simetria planar	45
5.7.1	Aplicação do método de Galerkin	45
5.7.2	Aplicação do método de Elementos Finitos	45
5.8	Resolução da formulação magnetostática com simetria axissimétrica	47
5.8.1	Aplicação do método de Galerkin	47
5.8.2	Aplicação do método de Elementos Finitos	47
5.9	Resolução da Formulação Magnetodinâmica	48
5.9.1	Aplicação do método de Galerkin	48
5.9.2	Aplicação do método de Elementos Finito	49
6	INTEGRAÇÃO NUMÉRICA	50
6.1	Integração numérica em duas dimensões - Método de Gauss	50
7	ELABORAÇÃO DE UM PROGRAMA EM MATLAB	52
7.1	Matlab “MATrix LABoratory”	52
7.2	Elaboração da malha	52
7.2.1	O programa Gmsh	52
7.2.2	Leitura do arquivo .msh	53
8	VERIFICAÇÃO DE RESULTADOS PARA MAGNETOSTÁTICA	56
8.1	Simetria planar	57
8.2	Simetria axissimétrica	59
9	VERIFICAÇÃO DE RESULTADOS PARA ELETROSTÁTICA	61
10	VERIFICAÇÃO DE RESULTADOS PARA MAGNETODINÂMICA	63
11	CONCLUSÃO	67
	BIBLIOGRAFIA	68
	APÊNDICE A	69
	APÊNDICE B	71
	APÊNDICE C	75
	APÊNDICE D	83
	APÊNDICE E	87
	APÊNDICE F	95
	APÊNDICE G	99
	APÊNDICE H	102

1 INTRODUÇÃO

Tendo em vista que o mercado de equipamentos eletromecânicos encontra-se em fase de ascensão econômica, as ferramentas disponíveis para os engenheiros responsáveis pelo desenvolvimento dos projetos destes equipamentos tornam-se importantes, devido ao fato de estas permitirem estes engenheiros visualizar e avaliar fenômenos complexos. Este fato, muitas vezes, torna a modelagem analítica destes inviável.

Atualmente, tais ferramentas possuem a vantagem de possibilitar a otimização destes equipamentos, fazendo com que as empresas possam disponibilizar equipamentos que, ao mesmo tempo possuam qualidade técnica e altos índices de otimização.

O Método de Elementos Finitos vem, ao longo dos anos, se mostrando uma ferramenta robusta para a análise de fenômenos, tanto mecânicos quanto eletromagnéticos, em equipamentos eletromecânicos.

O objetivo deste trabalho é apresentar o estudo e a implementação do referido método, para a modelagem de campos eletromagnéticos em um tipo especial de equipamentos eletromecânicos, os transformadores elétricos. Em especial, modelar o efeito de correntes induzidas em materiais condutores.

Para a indústria de transformadores, este estudo se torna relevante devido ao fato de a estrutura mecânica, fabricada através da utilização de materiais magnéticos e condutores do transformador, estar imersa em campo magnético variante no tempo, o que gera correntes induzidas internas a estas estruturas. Fato tal pode ocasionar valores de perdas suficientemente altos para gerar pontos de sobreaquecimento internos ao equipamento.

Para chegar a este ponto, outras formulações estáticas são apresentadas, como uma forma de seguir em um estudo gradual dos conceitos abordados.

2 INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES PARA BAIXAS FREQUÊNCIAS

O eletromagnetismo é um fenômeno físico que pode ser descrito pelas equações de Maxwell e as relações constitutivas dos materiais. Para tal, apresenta-se uma introdução a tais equações, estando estas organizadas por tipo de aplicação.

Abaixo, apresentam-se as equações de Maxwell, nas formas local e integral, bem como as formulações na forma forte.

Como citado anteriormente, o objetivo final deste trabalho, é modelar correntes induzidas em materiais condutores, o que pode ser elaborado através de análises em baixa frequência, comumente chamada de frequência industrial.

O equacionamento para o eletromagnetismo é, para baixas frequências, dividido em formulações: Eletrostática, Magnetostática e Magenetodinâmica [1]. As quais são apresentadas e implementadas computacionalmente neste trabalho.

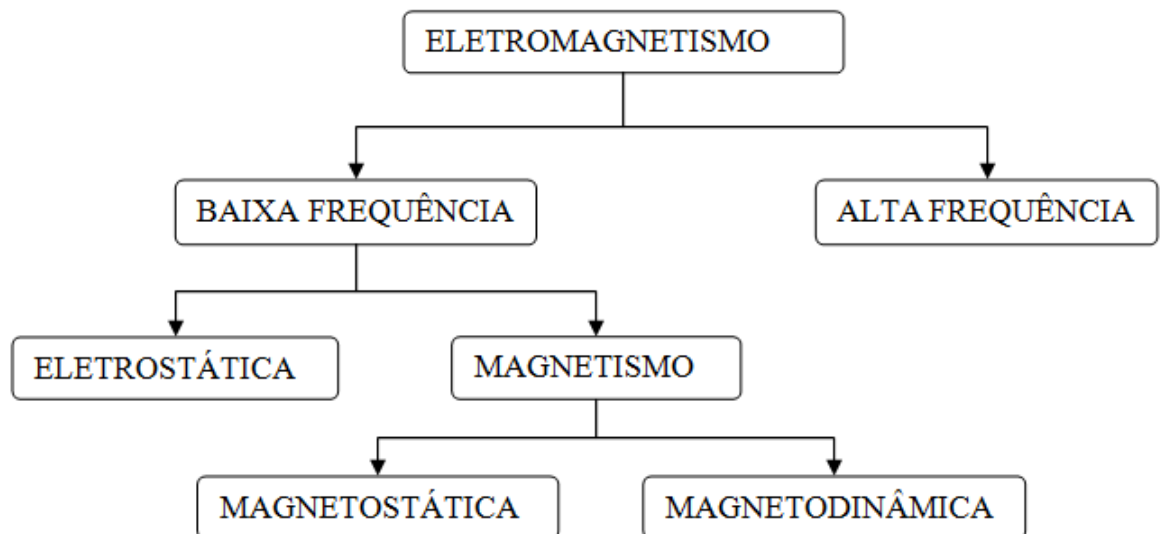


Figura 1 - Divisão do eletromagnetismo.

2.1 Equações de Maxwell

As quatro equações de Maxwell que descrevem os fenômenos eletromagnéticos, são apresentadas abaixo:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.1)$$

Considerando-se que o foco deste trabalho é modelagem em baixas frequências, o que permite desconsiderar o vetor indução elétrica \mathbf{D} , a equação (2.1) pode ser reescrita como segue:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2.2)$$

Este fato permite que as equações de Maxwell sejam desacopladas.

As demais equações de Maxwell são apresentadas abaixo:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (2.4)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (2.5)$$

Sendo que a relação constitutiva para materiais magnéticos é:

$$\mathbf{B} = |\mu| \mathbf{H} + \mathbf{B}_r \quad (2.6)$$

Para materiais elétricos, utiliza-se a relação (2.7), onde \mathbf{D}_s é a indução elétrica, a qual tem seu efeito desconsiderado neste trabalho.

$$\mathbf{D} = |\varepsilon| \mathbf{E} + \mathbf{D}_s \quad (2.7)$$

E, para materiais condutores, utiliza-se a Lei de Ohm, a qual é expressa abaixo.

$$\mathbf{J} = |\sigma| \mathbf{E} + \mathbf{J}_s \quad (2.8)$$

Neste trabalho, considera-se que os meios são isotrópicos, ou seja, os tensores $|\mu|$, $|\varepsilon|$ e $|\sigma|$ são apresentados como escalares. Desta forma, as equações (2.6), (2.7) e (2.8), tornam-se na seguinte forma:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mathbf{B}_r \quad (2.9)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{D}_s \quad (2.10)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_s \quad (2.11)$$

Na sequência, apresentam-se as equações de Maxwell utilizadas para cada tipo de formulação, conforme apresentado no início deste capítulo.

2.2 Equações de Maxwell para Magnetostática

Nesta seção, estuda-se fenômenos magnéticos estáticos, ou seja, invariantes no tempo.

O cálculo de indutâncias em enrolamentos, barramentos e energia de dispersão são exemplos de aplicações deste tipo de problema na indústria de transformadores.

2.2.1 Lei de Ampère

O vetor densidade de corrente coexiste com um campo magnético, comportando-se de forma rotacional.

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2.12)$$

Integrando-se a equação (2.12) em uma superfície, tem-se a seguinte equação.

$$\int_S \text{rot } \mathbf{H} \, ds = \int_S \mathbf{J} \, ds \quad (2.13)$$

Aplicando-se o teorema de Stokes em (2.13), esta pode ser dada pela equação (2.14).

$$\int_L \mathbf{H} \, dl = \mathbf{I} \quad (2.14)$$

2.2.2 Lei de Gauss para magnetostática

A equação (2.15), abaixo, denota o comportamento não divergente do campo magnético, ou seja, não existe um ponto gerador ou sumidouro de campo magnético.

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.15)$$

Integrando-se a equação (2.15) em um dado volume, obtém-se a equação (2.16).

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{B} \, dv = 0 \quad (2.16)$$

Aplicando-se o teorema da divergência, tem-se a equação (2.17). Tal equação denota claramente que o fluxo em uma determinada área fechada é igual a zero, ou seja, este é conservativo.

$$\oint_S \mathbf{B} \, ds = 0 \quad (2.17)$$

2.2.3 Formulação na forma forte para magnetostática - potencial vetor magnético \mathbf{A}

Como a aplicação na modelagem eletromagnética de transformadores necessita a aplicação de correntes elétricas no domínio de estudo, surge a necessidade da utilização do potencial vetor magnético \mathbf{A} [2].

Descrevendo-se a indução magnética (\mathbf{B}) em função do rotacional do potencial vetor magnético, tem-se a seguinte relação:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (2.18)$$

A equação acima é válida devido ao fato de a equação (2.19) ser satisfeita.

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = 0 \quad (2.19)$$

Aplicando a equação (2.18) na equação (2.12) e considerando a relação constitutiva, dada na equação (2.9), tem-se a formulação forte em potencial vetor magnético.

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} \right) = \mathbf{J} + \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{B}_r \right) \quad (2.20)$$

2.3 Equações de Maxwell para Eletrostática

Na indústria de transformadores, a formulação eletrostática é utilizada para a elaboração de mapeamentos de campo elétrico nos meios responsáveis pela isolação dos pontos sob alguma solicitação elétrica.

2.3.1 Lei de Faraday

Mostra que a variação da indução magnética no tempo e campo elétrico na forma rotacional existem mutuamente. Ou seja, existe uma interação entre campo magnético e campo elétrico.

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.21)$$

Sabe-se de antemão que, para problemas de eletrostática, não há variação de campos no tempo, assim equação (2.21) se torna:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (2.22)$$

2.3.2 Lei de Gauss para eletrostática

Esta equação denota o caráter não conservativo do vetor indução elétrica \mathbf{D}

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (2.23)$$

De posse da equação (2.23), integram-se ambos os lados em um dado volume, obtendo-se a seguinte equação:

$$\int_V \text{div } \mathbf{D} \, dv = \int_V \rho \, dv \quad (2.24)$$

Aplicando-se o teorema da divergência, chega-se na equação (2.25):

$$\int_S \mathbf{D} \, ds = q \quad (2.25)$$

Esta equação exprime que o fluxo elétrico que atravessa a superfície externa de um dado volume é igual a carga elétrica contida neste volume.

2.3.3 Formulação na forma forte para eletrostática - potencial escalar elétrico V

Através da definição de força e trabalho elétricos, é possível verificar que o campo elétrico pode ser obtido através do gradiente do potencial escalar V e o sinal negativo, da equação (2.26), representa que o sentido do campo elétrico é definido do maior para o menor potencial [3].

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V \quad (2.26)$$

Aplicando-se a equação (2.26) na equação (2.23) e levando em consideração a relação constitutiva apresentada na equação (2.10), chega-se na equação (2.27). Neste caso, é desconsiderado o efeito da indução elétrica, \mathbf{D} .

$$\text{div}(\varepsilon \text{ grad } V) = -\rho \quad (2.27)$$

Desta forma, é apresentada a formulação eletrostática forte em potencial escalar elétrico.

Neste trabalho, desconsidera-se o efeito de cargas elétricas. Ou seja, se utilizado o código computacional proposto, a equação a ser resolvida através do MEF é a equação abaixo.

$$\text{div}(\varepsilon \text{ grad } V) = 0 \quad (2.28)$$

2.4 Equações de Maxwell para Magnetodinâmica

Tratando-se de campos magnéticos variando no tempo, caso a condutividade do material não seja nula, correntes induzidas podem constituir um fenômeno significativo e devem ser objeto de análises próprias. É neste tipo de formulação que verificações de *eddy current*, por exemplo, podem ser solucionadas. As equações de Maxwell utilizadas para a modelagem deste tipo de problema estão expostas abaixo.

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_{\text{ind}} \quad (2.29)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (2.30)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.31)$$

Sendo um dos focos deste trabalho a aplicação de conceitos físicos e numéricos em transformadores elétricos, se torna importante mostrar o conceito de funcionamento destes equipamentos.

Integrando-se os dois lados da equação (2.31), tem-se a equação (2.32).

$$\int_s \text{rot } \mathbf{E} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \mathbf{ds} \quad (2.32)$$

Aplicando-se o teorema de Stokes na equação (2.32), obtém-se a seguinte equação:

$$\int_L \mathbf{E} \, dl = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \mathbf{ds} \quad (2.33)$$

Modificando-se o lado direito da equação (2.33), chega-se na equação para a força eletromotriz, a Lei de Faraday. Esta é a equação que fundamenta o princípio de funcionamento dos transformadores elétricos.

$$V_{\text{fem}} = - \frac{d}{dt} \left(\int_s \mathbf{B} \, \mathbf{ds} \right) = - \frac{d\psi}{dt} \quad (2.34)$$

2.4.1 Formulação na forma forte para magnetodinâmica - Formulação A-V

Definindo-se o vetor densidade de fluxo magnético em função do potencial vetor magnético \mathbf{A} , tem-se a equação abaixo.

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (2.35)$$

Aplicando a equação (2.35) na equação (2.30),

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{A}) = 0 \quad (2.36)$$

Sabendo-se que o divergente do rotacional de um campo vetorial tem como resultado zero, a igualdade contida na equação (2.36) é satisfeita.

Aplicando-se a equação (2.36) na equação (2.31), tem-se o equacionamento exposto a seguir.

A partir da equação (2.37), encontra-se uma equação que é aplicada na formulação **A-V**, como definição do vetor campo elétrico baseado no gradiente do potencial escalar elétrico V e da variação temporal do potencial vetor magnético \mathbf{A} , a equação (2.41.)

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial(\text{rot } \mathbf{A})}{\partial t} \quad (2.37)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial(\text{rot } \mathbf{A})}{\partial t} = 0 \quad (2.38)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} + \text{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.39)$$

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\text{grad } V \quad (2.40)$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.41)$$

Tendo-se em mãos a definição de campo elétrico para esta formulação, desenvolve-se a formulação forte para Magnetodinâmica.

Partindo-se da equação (2.29), com a aplicação da Lei de Ohm, apresentada na equação (2.11) e a equação (2.41), chega-se então em uma equação baseada no potencial escalar elétrico V e no potencial vetor magnético \mathbf{A} , a qual é denominada formulação **A-V**, em 3D. Conforme pode ser visualizado abaixo.

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_{\text{ind}} \quad (2.42)$$

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \right) = \mathbf{J}_s + \sigma \left(-\text{grad } V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (2.43)$$

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} \right) = \mathbf{J}_s - \sigma \text{grad } V - \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.44)$$

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} \right) + \sigma \text{grad } V + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{J}_s \quad (2.45)$$

2.5 Uma interpretação do Potencial Vetor Magnético

Tendo em perspectiva que tanto para o caso da formulação magnetostática quanto para o caso da magnetodinâmica, é utilizado o conceito de potencial vetor magnético, torna-se interessante apresentar uma interpretação física deste.

Para problemas 2D, a utilização do conceito do Potencial Vetor Magnético \mathbf{A} torna-se interessante devido a fato da redução da quantidade de variáveis desconhecidas, pois ao invés de calcular duas variáveis (B_x e B_y), calcula-se apenas uma (A_z) [4].

Sabendo-se que o fluxo que atravessa determinada superfície S é dado por:

$$\phi_s = \int_S \mathbf{B} \, d\mathbf{s} \quad (2.46)$$

Dada a equação (2.35), pode-se reescrever a equação (2.46) na seguinte forma.

$$\phi_s = \int_S \text{rot } \mathbf{A} \, d\mathbf{s} \quad (2.47)$$

Aplicando-se o teorema de Stokes, tem-se então.

$$\phi_s = \int_{L(S)} \mathbf{A} \, d\mathbf{l} \quad (2.48)$$

Desta forma, percebe-se que o Potencial Vetor Magnético pode ser compreendido como um vetor tal que sua circulação em um caminho fechado representa o fluxo através da superfície compreendida por tal caminho. Esta equação permite avaliar as linhas equipotenciais de A como linhas de fluxo magnético, para modelos em 2D.

3 FORMULAÇÃO MAGNETOSTÁTICA EM 2D – POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO

As modelagens eletromagnéticas a serem elaboradas através deste trabalho devem possuir simetria, para que estas possam ser elaboradas em 2D. Para isto, a equação (2.20), a qual é reescrita abaixo, deve ser simplificada de 3D para 2D.

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} \right) = \mathbf{J} + \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{Br} \right) \quad (3.1)$$

As duas simetrias utilizadas neste trabalho são: planar e axissimétrica.

Abaixo são apresentadas duas simplificações, sendo que a primeira delas considera simetria planar e a segunda, simetria axissimétrica.

3.1 Simplificação para 2D, com simetria planar

Para simplificar a equação (3.1) para 2D com simetria planar, considera-se que os vetores densidade de corrente (\mathbf{J}) e potencial vetor magnético (\mathbf{A}) estão alinhados com o eixo Z e que estes vetores geram campos que se propagam no plano XY, conforme ilustrado na Figura 2.

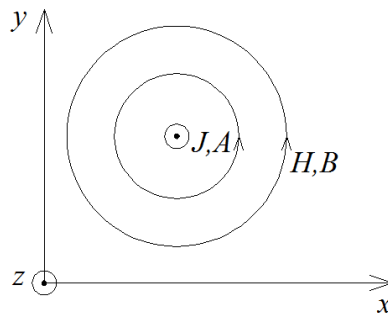


Figura 2 – Comportamento de campos em 2D – simetria planar

Para este tipo de simetria, as componentes do vetor indução magnética \mathbf{B} , dado pela equação (2.35), dá-se através do rotacional do potencial vetor magnético na direção do vetor unitário \mathbf{k} , conforme a equação (3.2) abaixo. Tal equação é a primeira parte da simplificação do lado esquerdo de (3.1).

$$rot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A} \end{bmatrix} = \frac{\partial A}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial A}{\partial x} \mathbf{j} = Bx \mathbf{i} + By \mathbf{j} \quad (3.2)$$

A segunda parte da simplificação do lado esquerdo de (3.1) é dada pela equação (3.3), abaixo.

$$rot \left(\frac{1}{\mu} rot \mathbf{A} \right) = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} & -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} = \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right] \mathbf{k} \quad (3.3)$$

Através da aplicação de algumas identidades vetoriais, que são apresentadas na seqüência, pode-se apresentar a equação (3.4).

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -div \left(grad \frac{1}{\mu} A \right) \quad (3.4)$$

No equacionamento que segue, são apresentadas as identidades vetoriais que permitem que (3.4) seja satisfeita.

Tendo-se em vista que o operador Nabla, para 2D, no plano XY, é dado conforme abaixo.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} \quad (3.5)$$

Pode-se verificar que o gradiente de um escalar, $\frac{1}{\mu} A$ neste caso, para 2D, como simetria planar é dado desta forma:

$$grad \frac{1}{\mu} A = \nabla \frac{1}{\mu} A = \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \mathbf{j} \quad (3.6)$$

Aplicando-se o divergente no vetor encontrado em (3.6), chega-se na equação (3.7).

$$\operatorname{div} \left(\operatorname{grad} \frac{1}{\mu} A \right) = \nabla \bullet \left(\nabla \frac{1}{\mu} A \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} \right) \bullet \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \mathbf{j} \right) \quad (3.7)$$

Que é:

$$\operatorname{div} \left(\operatorname{grad} \frac{1}{\mu} A \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) \quad (3.8)$$

Desta forma, simplifica-se o primeiro termo da equação (3.1), faltando ainda o terceiro termo, referente à modelagem de ímãs permanentes. Sabendo-se que as componentes do campo magnético gerado pelo ímã são, nas direções x e y, $\frac{1}{\mu} B_{0x}$ e $\frac{1}{\mu} B_{0y}$, simplifica-se o lado direito de (3.1) da seguinte forma.

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{Br} \right) = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{1}{\mu} B_{0x} & \frac{1}{\mu} B_{0y} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial B_{0y}}{\partial x} \mathbf{k} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial B_{0x}}{\partial y} \mathbf{k} \quad (3.9)$$

Tendo-se em vista que se trata de uma simplificação 2D, (3.9) pode ser reescrita da seguinte forma.

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{Br} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial B_{0y}}{\partial x} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial B_{0x}}{\partial y} \quad (3.10)$$

Finalmente, a equação (3.1), pode ser totalmente reescrita na forma de (3.11). Esta equação é conhecida como forma forte para magnetostática 2D, em potencial vetor magnético

$$\operatorname{div} \left(\operatorname{grad} \frac{1}{\mu} A \right) = -J_s - \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial B_{0y}}{\partial x} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial B_{0x}}{\partial y} \right) \quad (3.11)$$

3.1.1 Obtenção da forma fraca

A equação (3.11) pode ser apresentada da seguinte forma:

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{\mu}A\right)+J_s+\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial B_{0y}}{\partial x}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial B_{0x}}{\partial y}\right)=0 \quad (3.12)$$

O FEM é um método de aproximação numérica, no qual a solução que se obtém apresenta um resíduo (R). Assim, a equação (3.12) não é mais igualada a zero e sim a este resíduo.

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{\mu}A\right)+J_s+\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial B_{0y}}{\partial x}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial B_{0x}}{\partial y}\right)=R \quad (3.13)$$

A equação (3.13) pode ser enfraquecida igualando integral da média ponderada da função resíduo a zero. Este método é chamado de Método dos Resíduos ponderados, dado pela equação (3.14).

$$\int_{\Omega} W R d\Omega = 0 \quad (3.14)$$

Onde W é a função peso utilizada para a ponderação e Ω representa o domínio em estudo.

Aplicando-se (3.13) em (3.14), tem-se:

$$\int_{\Omega} W \operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{\mu}A\right)d\Omega = -\int_{\Omega} W J_s d\Omega - \int_{\Omega} W \left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial B_{0y}}{\partial x} - \frac{1}{\mu}\frac{\partial B_{0x}}{\partial y}\right)d\Omega \quad (3.15)$$

Para a resolução de (3.15), considera-se a aplicação de operadores a mais de uma função, o qual é apresentado pela equação (3.16).

$$U \operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{div}(U \mathbf{A}) + \operatorname{grad} U \mathbf{A} \quad (3.16)$$

Integram-se ambos os lados da equação acima, no domínio Ω .

$$\int_{\Omega} U \operatorname{div} \mathbf{A} d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{div}(U \mathbf{A})d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{grad} U \mathbf{A} d\Omega \quad (3.17)$$

Aplica-se o teorema da divergência no primeiro termo do lado direito da igualdade. Desta forma, chega-se em uma solução para a equação genérica dada em (3.16), a qual é da mesma forma do lado esquerdo da equação (3.15).

$$\int_{\Omega} U \operatorname{div} \mathbf{A} d\Omega = \int_{\Gamma} U \mathbf{A} d\Gamma + \int_{\Omega} \operatorname{grad} U \mathbf{A} d\Omega \quad (3.18)$$

Agora, aplica-se (3.18) no primeiro termo de (3.15), obtendo-se a equação (3.19).

$$\int_{\Omega} W \operatorname{div} \left(\operatorname{grad} \frac{1}{\mu} A \right) d\Omega = \int_{\Gamma} W \operatorname{grad} \frac{1}{\mu} A d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} W \operatorname{grad} A d\Omega \quad (3.19)$$

É na linha de contorno do espaço de cálculo, Γ , que a condição de contorno é aplicada e é constante, $A=0$, por exemplo. Desta forma, o gradiente do potencial ao longo desta linha é nulo, anulando-se o segundo termo da dada equação acima. Assim, (3.19) torna-se:

$$\int_{\Omega} W \operatorname{div} \left(\operatorname{grad} \frac{1}{\mu} A \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} W \operatorname{grad} A d\Omega \quad (3.20)$$

Agora, aplica-se a mesma identidade apresentada na equação (3.18) no terceiro termo de (3.15) e se obtém (3.21).

$$\int_{\Omega} W \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial B_{0y}}{\partial x} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial B_{0x}}{\partial y} \right) d\Omega = - \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \operatorname{grad} W \left(\frac{\partial B_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial B_{0x}}{\partial y} \right) d\Omega \quad (3.21)$$

Então, unindo-se as equações (3.21) e (3.20), torna-se possível escrever a forma fraca da formulação magnetostática em potencial vetor magnético,

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} W \operatorname{grad} A d\Omega = \int_{\Omega} W J_s d\Omega - \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \operatorname{grad} W \left(\frac{\partial B_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial B_{0x}}{\partial y} \right) d\Omega \quad (3.22)$$

A equação (3.12) apresenta derivadas de segunda ordem, diferente da equação (3.22), que, por sua vez, apresenta derivadas de primeira ordem.

3.1.2 Condições de contorno

Para resolução da equação (3.22), segundo o teorema da unicidade, faz-se necessária a aplicação de condições de contorno no equacionamento[6].

Para tanto, nesta seção são analisadas ambas condições de contorno, de Dirichlet e de Neumann.

As condições de contorno de Dirichlet são chamadas de essenciais ou principais, já as condições de contorno de Neumann, são chamadas de condições de contorno naturais. Ainda existem as condições de contorno de Cauchy, as quais são conhecidas por condições de contorno mistas[6].

Então, considera-se o domínio de cálculo Ω , apresentado na Figura 3.

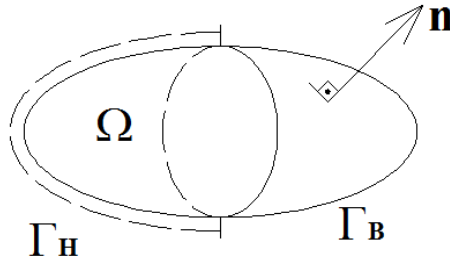


Figura 3 – Domínio de cálculo

Considerando-se a equação (2.18), o vetor \mathbf{H} , pode ser escrito na seguinte forma:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} \quad (3.23)$$

A aplicação da condição de contorno de Dirichlet, na qual o potencial vetor magnético é imposto em uma determinada linha do domínio 2D, é dada pela equação (3.24), abaixo[3].

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}|_{\Gamma_H} = 0 \quad (3.24)$$

A formulação apresentada para magnetostática está baseada no potencial vetor magnético. Assim, torna-se importante elaborar uma análise das condições de contorno baseadas nesse vetor. Para tal análise, aplica-se a equação (3.23) em (3.24) e, após a conversão dos vetores unitários em questão, chega-se na equação (3.29).

$$\mathbf{n} \times \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} \right) \Big|_{\Gamma_H} = 0 \quad (3.25)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}|_{\Gamma_H} = \mathbf{n} \times \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial A}{\partial x} \mathbf{j} \right) \Big|_{\Gamma_H} = 0 \quad (3.26)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}|_{\Gamma_h} = \mathbf{n} \times \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial A}{\partial n} \mathbf{t} - \frac{\partial A}{\partial t} \mathbf{n} \right) \Big|_{\Gamma_H} = 0 \quad (3.27)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}|_{\Gamma_h} = \mathbf{n} \times \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial n} \mathbf{t} \Big|_{\Gamma_H} = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial n} \Big|_{\Gamma_H} = 0 \quad (3.29)$$

Esta equação demonstra que o campo magnético, no sentido do vetor normal, \mathbf{Hn} , é nula, ou seja, o campo magnético é tangencial à linha em questão.

A condição de contorno de Neumann é dada através da equação (3.30), podendo ser apresentada na forma da equação (3.33). Esta, por sua vez, denota que o campo magnético tangente na superfície é nulo, ou seja, apenas possui componente normal.

$$\mathbf{n} \bullet \mathbf{B}|_{\Gamma_B} = 0 \quad (3.30)$$

$$\mathbf{n} \bullet \mathbf{B}|_{\Gamma_B} = \mathbf{n} \bullet \left(\frac{\partial A}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial A}{\partial x} \mathbf{j} \right) \Big|_{\Gamma_B} = 0 \quad (3.31)$$

$$\mathbf{n} \bullet \mathbf{B}|_{\Gamma_B} = \mathbf{n} \bullet \left(\frac{\partial A}{\partial n} \mathbf{t} - \frac{\partial A}{\partial t} \mathbf{n} \right) \Big|_{\Gamma_B} = 0 \quad (3.32)$$

$$-\frac{\partial A}{\partial t} \Big|_{\Gamma_B} = 0 \quad (3.33)$$

A Figura 4 exemplifica a aplicação das condições de contorno acima mencionadas.

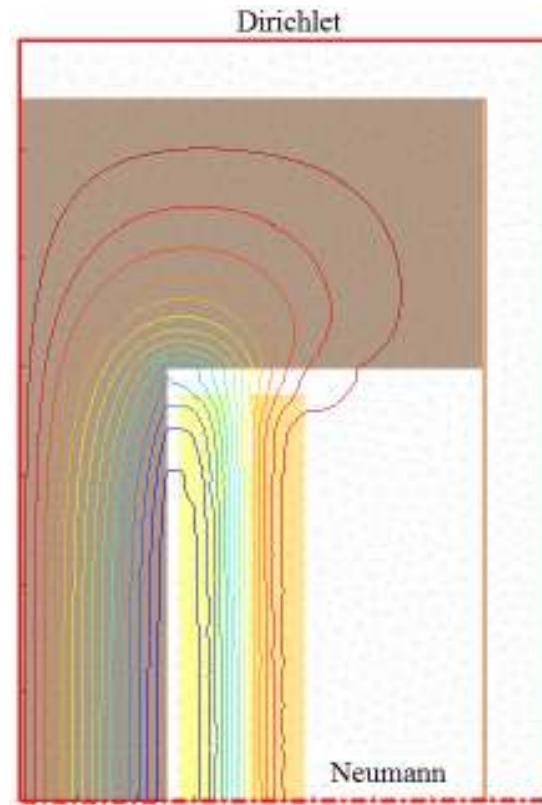


Figura 4- Exemplo da aplicação das condições de contorno

3.2 Simplificação para 2D, simetria axissimétrica

Em muitos casos, a simetria axissimétrica define uma representação de problemas reais com maior fidelidade, em termos geométricos e de equacionamento, como por exemplo, análise de fluxo de dispersão de transformadores.

Abaixo, é apresentada a formulação magnetostática em potencial vetor magnético, mas neste caso, com simetria axissimétrica. Para tal, considera-se que os vetores potencial vetor magnético (\mathbf{A}) e densidade de corrente (\mathbf{J}) são contínuos ao longo de θ , conforme a Figura 5.

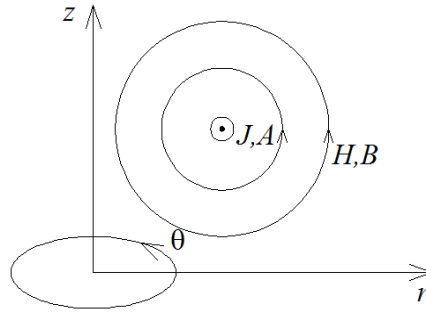


Figura 5 – Comportamento de campos em 2D – simetria axissimétrica

Como efetuado anteriormente, formulação se dá pela simplificação da equação (2.20) para 2D, em coordenadas polares.

Para simplificar a equação (2.20), considera-se que \mathbf{A} somente tem componente em θ . Tendo-se em vista a equação (2.18), torna-se possível obter as componentes do vetor indução magnética, dado na equação (3.34).

$$\text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \mathbf{r} & r\boldsymbol{\theta} & \mathbf{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & rA & 0 \end{bmatrix} = -\frac{\partial A}{\partial z} \mathbf{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rA)}{\partial r} \mathbf{z} = B_r \mathbf{r} + B_z \mathbf{z} \quad (3.34)$$

Dando-se continuidade à simplificação para 2D, tem-se:

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} \right) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \mathbf{r} & r\boldsymbol{\theta} & \mathbf{z} \\ \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial A}{\partial z} & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial (rA)}{\partial r} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right) - \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (rA)}{\partial r} \right) \quad (3.35)$$

Com a substituição de variáveis dado na equação (3.36),

$$A' = r A \quad (3.36)$$

O lado direito da igualdade se torna em uma forma previamente conhecida.

Se considerarmos um sistema axissimétrico, nas coordenadas RZ, este pode ser definido como um sistema planar XY. Assim, a equação (3.35) acima pode se reescrita como:

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} A \right) = -\frac{1}{r} \text{div} \left(\text{grad} \frac{1}{\mu} A' \right) \quad (3.37)$$

Agora, torna-se necessário simplificar o terceiro termo da equação (2.20). Para tal, considera-se que a indução do imã somente possui componentes nos sentidos dos vetores unitários \mathbf{r} e \mathbf{z} .

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \mathbf{r} \right) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \mathbf{r} & r\boldsymbol{\theta} & \mathbf{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{\mu} B_{0r} & 0 & \frac{1}{\mu} B_{0z} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} B_{0r} \right) r\boldsymbol{\theta} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu} B_{0z} \right) r\boldsymbol{\theta} \quad (3.38)$$

Assim, com as equações (3.38) e (3.37), chega-se na forma fraca para magnetostática, em 2D, para simetria axissimétrica.

$$\frac{1}{r} \text{div} \left(\text{grad} \frac{1}{\mu} A' \right) = -J_s - \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial B_{0r}}{\partial z} r - \frac{1}{\mu} \frac{\partial B_{0z}}{\partial r} r \right) \quad (3.39)$$

É importante mencionar a semelhança entre as equações (3.39) e (3.11). Isso permite o desenvolvimento de rotinas para resolução de ambas equações, sem que haja grandes modificações no código computacional. Este fato também permite apresentar os próximos passos de forma compacta, tendo em vista que os desenvolvimentos já foram apresentados para a simetria planar, como por exemplo, condições de contorno.

3.2.1 Obtenção da forma fraca

As matrizes locais que serão geradas pela equação abaixo serão repetidas para cada elemento, como seu baricentro valendo r_0 .

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \frac{1}{r_0} \text{grad} W \text{grad} A' d\Omega = \int_{\Omega} W J_s d\Omega - \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \text{grad} W \left(\frac{\partial B_{0y}}{\partial x} r_0 - \frac{\partial B_{0x}}{\partial y} r_0 \right) d\Omega \quad (3.40)$$

3.2.2 Condições de contorno

A similaridade entre as equações (3.40) e (3.22) permite a aplicação das condições de contorno, de Dirichlet e de Neumann, da mesma forma que são aplicadas para simetria planar.

Logo, a análise elaborada na seção 3.1.2 se aplica para este tipo de simetria.

4 FORMULAÇÃO MAGNETODINÂMICA EM 2D - POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO E POTENCIAL ESCALAR ELÉTRICO (A - V)

Os assuntos abordados até a seção anterior permitem compreender, de forma razoável, o conteúdo introdutório ao objetivo final deste trabalho, que é a modelagem magnetodinâmica em função do tempo, através da formulação A-V. Tal formulação é aplicada para a análise de correntes induzidas em regiões condutoras.

4.1 Simplificação para 2D, com simetria planar

Como elaborado para os casos em magnetostática, necessita-se simplificar uma equação diferencial, para 2D. No caso de magnetodinâmica, a equação é a (2.45), a qual está reescrita abaixo.

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } A \right) + \sigma \text{grad } V + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{J}_s \quad (4.1)$$

Para a simplificação desta equação, considera-se, da mesma forma que para a formulação planar para magnetostática, os vetores \mathbf{A} e \mathbf{J} alinhados com eixo Z e os vetores \mathbf{B} e \mathbf{H} no plano XY. Conforme mostrado na Figura 2.

A simplificação do primeiro termo de (4.1) é dada na equação (4.2), o que já foi demonstrado anteriormente.

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } A \right) = -\text{div} \left(\text{grad} \frac{1}{\mu} A \right) \quad (4.2)$$

O segundo termo é utilizado para acoplamento com circuito, o que não é implementado neste trabalho. Sendo assim desconsiderado.

Então, a equação (4.1) se torna na forma de (4.3).

$$-\text{div} \left(\text{grad} \frac{1}{\mu} A \right) + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} = J_s \quad (4.3)$$

4.1.1 Obtenção da forma fraca

Para a obtenção da forma fraca, aplica-se o método de Resíduos Ponderados na equação (4.3), resultando em:

$$-\int_{\Omega} W \operatorname{div} \left(\operatorname{grad} \frac{1}{\mu} A \right) d\Omega + \int_{\Omega} W \sigma \frac{\partial A}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} W J_s d\Omega \quad (4.4)$$

Através da equação (3.20), verifica-se que o primeiro termo pode ser reescrito na sua forma fraca, dado abaixo.

$$\int_{\Omega} W \operatorname{div} \left(\operatorname{grad} \frac{1}{\mu} A \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} W \operatorname{grad} A d\Omega \quad (4.5)$$

Desta forma, a equação (4.4) pode ser apresentada na forma da equação (4.6). Esta equação representa a formulação magnetodinâmica em potencial vetor magnético, na forma fraca.

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} W \operatorname{grad} A d\Omega + \int_{\Omega} W \sigma \frac{\partial A}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} W J_s d\Omega \quad (4.6)$$

4.1.2 Condições de contorno

As condições de contorno para os campos magnéticos de formulações em magnetodinâmica seguem o exposto na seção (3.1.2). Para o campo elétrico, a condição de contorno é:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} \Big|_{\Gamma_E} = 0 \quad (4.7)$$

5 ELEMENTOS FINITOS SUBPARAMÉTRICOS DE SEGUNDA ORDEM

5.1. Introdução ao Método de Elementos Finitos

A evolução deste método está intrinsecamente ligada à evolução do desenvolvimento nas áreas das engenharias e ciências da computação, devido a sua aplicabilidade em diversas áreas, e a capacidade computacional disponível para a tratativa computacional dos sistemas numéricos de grande porte.

O desenvolvimento e uso deste método requer conhecimentos em diversas áreas, tais como: engenharias (definições matemáticas dos fenômenos físicos a serem modelados), métodos numéricos (aplicação dos conceitos de elementos finitos e resolução de sistemas matriciais de grande porte) e ciências da computação (desenvolvimento e manutenção de programas e hardwares).

No ano de 1956, o conceito do MEF foi introduzido no "*Journal of Aeronautical Science*". Depois do ano de 1960 o MEF foi rapidamente desenvolvido para a área de mecânica. A primeira aplicação significativa para o eletromagnetismo foi em 1970[3].

Os resultados obtidos com o MEF, para elementos nodais, são obtidos para os nós dos elementos. Desta forma, o valor da variável em questão é interpolada dentro da superfície de cada elemento, através de funções de interpolação. Logo, a qualidade dos resultados obtidos está diretamente relacionada à qualidade da malha e às funções de interpolação das variáveis ao longo da superfície de cada elemento.

Conseqüentemente, surge a necessidade de aplicação de funções de interpolação que possibilitem a obtenção de resultados mais coerentes com a realidade. Neste trabalho, aplicam-se as funções de interpolação de segunda ordem, as quais exigem elementos de ordem superior, que nada mais é do que triângulos com pontos intermediários em suas arestas.

Tendo em vista a aplicação em elementos de ordem superior, surge a necessidade da introdução de um elemento de referência, sendo este de forma simples, com os lados alinhados com os eixos coordenados e baseado em um sistema de coordenadas locais (u,v).

Para a tratativa de elementos finitos de segunda ordem, através da utilização de elemento de referência, utilizam-se determinadas funções de mapeamento geométrico.

Como será visto posteriormente, estas funções são utilizadas tanto para o mapeamento geométrico dos elementos reais em função do elemento de referência, como para interpolação do potencial dentro do elemento. O fato de o mapeamento geométrico ser de

primeira ordem e as funções de interpolação do potencial serem de segunda ordem, caracteriza o Método de Elementos Finitos Subparamétricos.

5.2. Funções de mapeamento geométrico ou funções de forma

Na Figura 4 a), apresenta-se um esboço do elemento real. Este, com forma não padronizada, conforme pode ser encontrado em malhas reais. Na Figura 4 b), apresenta-se o elemento de referência. Verifica-se a simplicidade geométrica deste tipo de elemento, justificando assim sua vasta utilização em códigos de elementos finitos, pois esta característica permite simplificações matemáticas que, mais tarde, se transformarão em otimização de recursos computacionais.

A quantidade de nós destes elementos caracteriza elementos de segunda ordem, mas o fato de os elementos possuírem lados retos permite que o mapeamento geométrico seja elaborado somente utilizando os pontos dos vértices, nós 1, 3 e 5. Os nós intermediários, sempre na metade das arestas, também estarão localizados na metade da aresta do elemento de referência, por isso não há a necessidade de mapeá-los. Este método somente é válido no caso de elementos com lados retos, no caso de elementos com lados curvos, se faz necessário o mapeamento geométrico de segunda ordem, ou seja, isoparamétrico.

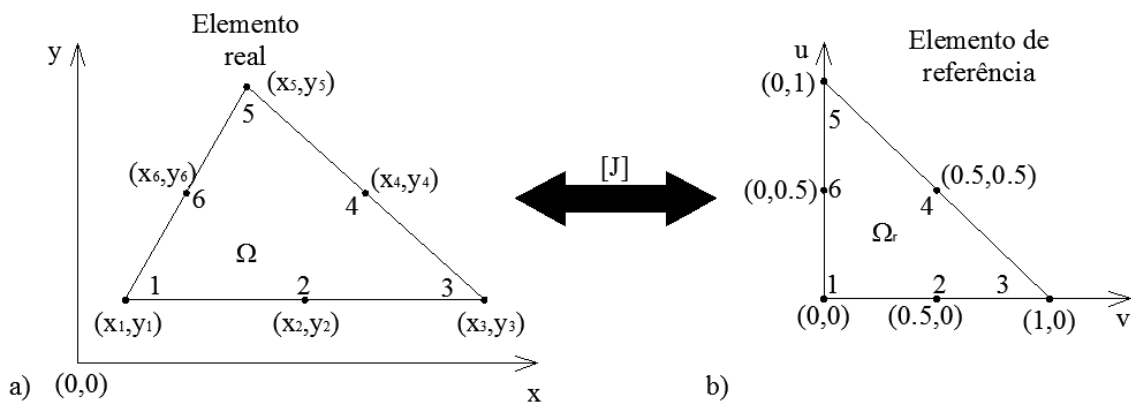


Figura 6 - Elemento real e de referência

As funções que permitem mapear um elemento real através de um elemento de referência são chamadas funções de mapeamento geométrico ou funções de forma (N) e são dadas na Tabela 1.

Tabela 1 - Funções de interpolação/mapeamento geométrico de primeira ordem

Nó	$N(u, v)$	$grad_u N$	$grad_v N$
1	$1 - u - v$	-1	-1
3	u	1	0
5	v	0	1

Um triângulo em um sistema de coordenadas (x,y) por ser aproximado por um outro triângulo em um outro sistema de coordenadas (u,v). Da seguinte forma:

$$x(u, v) = N_1(u, v)x_1 + N_3(u, v)x_3 + N_5(u, v)x_5 \quad (5.1)$$

$$x(u, v) = (1 - u - v)x_1 + u x_3 + v x_5 \quad (5.2)$$

Estas equações podem ser expressas apresentadas de forma matricial.

$$x(u, v) = \begin{bmatrix} N_1(u, v) & N_3(u, v) & N_5(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$x(u, v) = \begin{bmatrix} 1 - u - v & u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$y(u, v) = N_1(u, v)y_1 + N_3(u, v)y_3 + N_5(u, v)y_5 \quad (5.5)$$

$$y(u, v) = (1 - u - v)y_1 + u y_3 + v y_5 \quad (5.6)$$

Do mesmo método, obtém-se a coordenada y(u,v) uma forma matricial.

$$y(u, v) = \begin{bmatrix} N_1(u, v) & N_3(u, v) & N_5(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_3 \\ y_5 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$y(u, v) = \begin{bmatrix} 1 - u - v & u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_3 \\ y_5 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

5.3 Conversão das coordenadas de um ponto específico

A conversão entre o elemento real e de referência é feita através de funções de forma.

Considera-se dois pontos, um deles no elemento real (Pxy) e o seu correspondente no elemento de referência (Puv).

$$P_{uv} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$P_{xy} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Para elaborar a conversão entre o elemento real e o de referência, aplicam-se as funções de mapeamento geométrico (N) nas coordenadas reais.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-u-v \\ u \\ v \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Ou,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Desta forma é possível converter as coordenadas do sistema cartesiano para o sistema de referência e vice-versa.

5.4 Transformação do gradiente e obtenção da matriz Jacobiana

Para o início desta análise, tomemos uma dada uma função F.

Elaborando-se sua derivada total, chega-se nas equações (5.13) e (5.14).

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \quad (5.14)$$

As equações acima podem ser organizadas na forma de um sistema matricial, conforme a equação (5.15).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} \\ \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

O termo que transforma uma matriz de gradientes de um sistema de coordenadas para outro é denominado de matriz Jacobiana, o que pode ser verificado através das equações (5.17) e (5.18).

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$\text{grad } N(u, v) = J \text{ grad } N(x, y) \quad (5.17)$$

$$\text{grad } N(x, y) = J^{-1} \text{ grad } N(u, v) \quad (5.18)$$

Como o mapeamento geométrico é elaborado considerando elementos de primeira ordem, torna-se necessária a matriz Jacobiana para estes elementos.

A equação (5.16) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{bmatrix} [x(u, v) \quad y(u, v)] \quad (5.19)$$

Com as equações (5.3) e (5.7), pode-se reescrever matriz Jacobiana em função das coordenadas dos vértices do triângulo em questão:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{bmatrix} [N_1(u, v) \quad N_3(u, v) \quad N_5(u, v)] \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_2 & y_3 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

A equação (5.20) é a equação geral para a matriz Jacobiana. Efetuando-se a multiplicação matricial entre os dois primeiros termos do lado direito de (5.20), chega-se na equação (5.21). Tal equação contém os gradientes das funções de forma, os quais são dados na Tabela 1. Substituindo-se estes valores, obtém-se a matriz Jacobiana somente em função das coordenadas dos vértices do elemento em questão, dada na equação (5.22.)

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial N_3(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial N_3(u,v)}{\partial u} \\ \frac{\partial N_1(u,v)}{\partial v} & \frac{\partial N_2(u,v)}{\partial v} & \frac{\partial N_3(u,v)}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

O determinante de J é equivalente a duas vezes a área do triângulo e é dado por:

$$|J| = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \quad (5.23)$$

5.5 Transformação do elemento diferencial de área

Na próxima seção será apresentada uma equação do tipo de (5.24), contendo um elemento diferencial de área, $d\Omega$, que está em coordenadas reais (x,y). Como neste trabalho opta-se pelo estudo através de elemento de referência, surge a necessidade da conversão deste elemento diferencial de área para coordenadas de referência (u,v).

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad}[N]^T \text{grad}[N][A] d\Omega = \int_{\Omega} [N]^T J_s d\Omega \quad (5.24)$$

Tal elemento diferencial de área está em coordenadas reais, logo, pode ser expresso da seguinte forma.

$$d\Omega = dx dy \quad (5.25)$$

Sendo que $d\Omega$ é o módulo do vetor $d\Omega \mathbf{k} = dx \mathbf{i} \times dy \mathbf{j}$, sendo que derivadas das componentes deste vetor são dadas abaixo.

$$\mathbf{dx} = \frac{dx}{du} \mathbf{du} + \frac{dx}{dv} \mathbf{dv} \quad (5.26)$$

$$\mathbf{dy} = \frac{dy}{du} \mathbf{du} + \frac{dy}{dv} \mathbf{dv} \quad (5.27)$$

Elaborando-se o produto vetorial entre as derivadas das componentes do vetor $d\Omega \mathbf{k}$, chega-se na equação (5.33), a qual define o elemento diferencial de área em função da matriz Jacobiana e do elemento diferencial de área no elemento de referência.

$$\mathbf{dx} \times \mathbf{dy} = \left(\frac{dx}{du} \mathbf{du} + \frac{dx}{dv} \mathbf{dv} \right) \times \left(\frac{dy}{du} \mathbf{du} + \frac{dy}{dv} \mathbf{dv} \right) \quad (5.28)$$

$$\mathbf{dx} \times \mathbf{dy} = \frac{dx}{du} \frac{dy}{dv} (\mathbf{du} \times \mathbf{dv}) + \frac{dx}{dv} \frac{dy}{du} (\mathbf{dv} \times \mathbf{du}) \quad (5.29)$$

$$\mathbf{dx} \times \mathbf{dy} = (\mathbf{du} \times \mathbf{dv}) \left(\frac{dx}{du} \frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv} \frac{dy}{du} \right) \quad (5.30)$$

$$\mathbf{dx} \times \mathbf{dy} = (\mathbf{du} \times \mathbf{dv}) |\mathbf{J}| \quad (5.31)$$

$$dx dy = |\mathbf{J}| du dv \quad (5.32)$$

$$d\Omega = |\mathbf{J}| du dv \quad (5.33)$$

5.6 Funções de interpolação

O valor da variável encontrada nos nós de cada elemento é interpolado dentro do elemento através de funções de interpolação de segunda ordem.

O comportamento das funções de interpolação é definido pelas funções dadas na Tabela 2, sendo que no seu nó seu valor é 1 e nos outros, seu valor equivale a 0, conforme mostrado nas figuras abaixo.

No Apêndice A, é apresentado o código em Matlab usado para elaboração de tais figuras, as quais representam o comportamento das funções de interpolação de segunda ordem ao longo do elemento triangular.

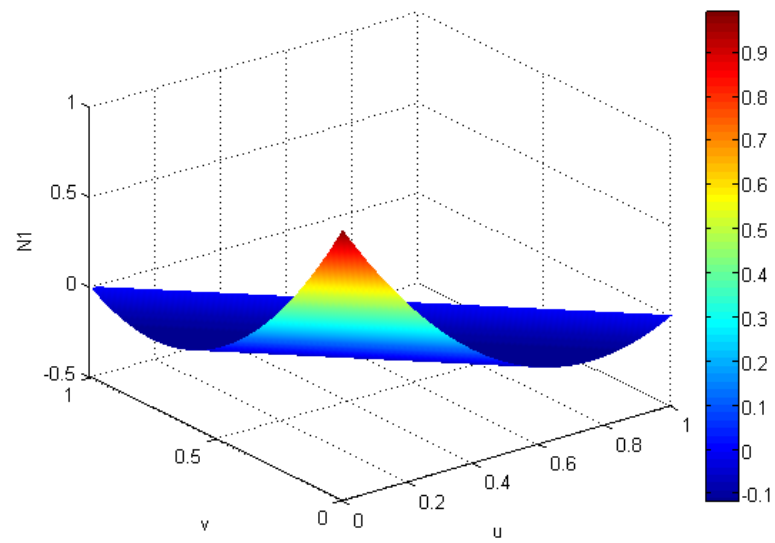


Figura 7 - Função de interpolação N1

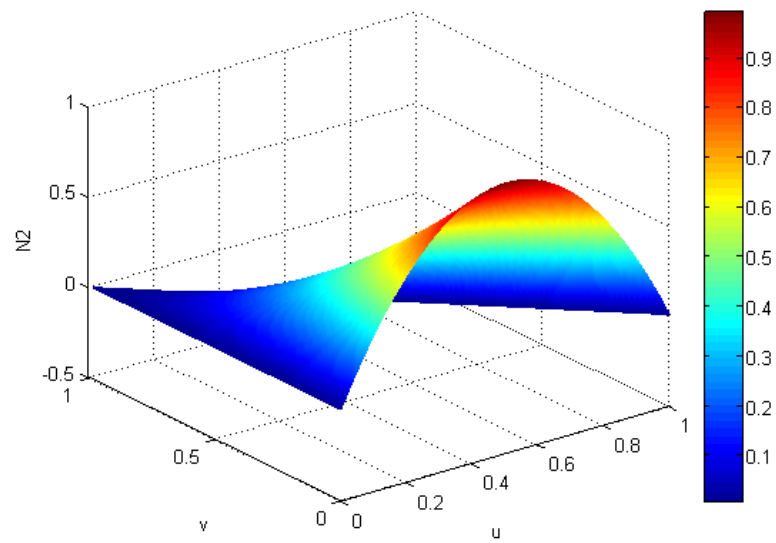


Figura 8 - Função de interpolação N2

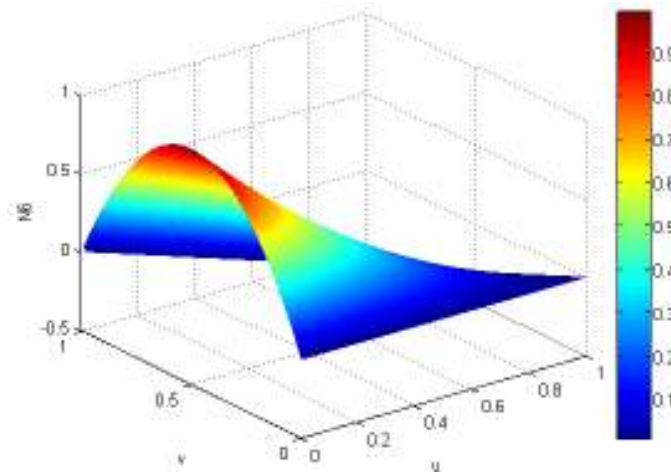


Figura 9 - Função de interpolação N6

As equações para todas as 6 funções de interpolação são dadas na tabela abaixo, bem como seus gradientes.

Tabela 2 - Funções de interpolação/mapeamento geométrico de segunda ordem

Nó	$N(u, v)$	$grad_u N$	$grad_v N$
1	$-t(1-2t)$	$1-4t$	$1-4t$
2	$4ut$	$4(t-u)$	$-4u$
3	$-u(1-2u)$	$-1+4u$	0
4	$4uv$	$4v$	$4u$
5	$-v(1-2v)$	0	$-1+4v$
6	$4vt$	$-4v$	$4(t-v)$

Sendo $t = 1 - u - v$

O valor do potencial magnético para um dado ponto é interpolado de acordo com a equação (5.24), dada abaixo.

$$A(u, v) = N_1(u, v)A_1 + N_2(u, v)A_2 + N_3(u, v)A_3 + N_4(u, v)A_4 + N_5(u, v)A_5 + N_6(u, v)A_6 \quad (5.34)$$

Assim, faz-se necessário converter o ponto em questão de coordenadas (x,y) para coordenadas (u,v), sendo necessário saber em qual elemento real este ponto se encontra.

Pode-se verificar em qual elemento o ponto se encontra de duas formas: funções de interpolação e geometricamente

Neste trabalho, utiliza-se o método através das funções de interpolação, que calcula o valor das funções de interpolação para cada ponto de cada elemento. O elemento que possuir

todos os resultados entre 0 e 1 contém o ponto especificado. Desta forma, torna-se possível converter as coordenadas do ponto de (x,y) para (u,v) e calcular o potencial no referido ponto.

5.7 Resolução da formulação magnetostática com simetria planar

5.7.1 Aplicação do método de Galerkin

O Método de Galerkin foi proposto em 1915 por E.G Galerkin com o intuito de se obter soluções aproximadas para problemas de valor de contorno [2].

Este método consiste na aplicação das funções de interpolação (N) nas funções peso obtidos do Método de Resíduos Ponderados. Neste caso, reescrevendo-se a equação (3.22) e também substituindo W por N, tem-se:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N \text{ grad } A d\Omega = \int_{\Omega} N J_s d\Omega - \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \text{grad } N \left(\frac{\partial B_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial B_{0x}}{\partial y} \right) d\Omega \quad (5.35)$$

Sendo N as funções de interpolação dadas anteriormente, nesta equação verifica-se a necessidade das funções referentes aos gradientes destas funções de interpolação.

5.7.2 Aplicação do método de Elementos Finitos

Interpolando-se o potencial vetor magnético A através das funções de interpolação, tem-se que:

$$A(x, y) = N_1(x, y)A_1 + N_2(x, y)A_2 \dots + N_6(u, v)A_6 = \sum_{j=1}^6 N_j A_j \quad (5.36)$$

Onde N_j são as funções de interpolação (de 1 até 6) e A_j as variáveis nodais em cada nó (j) do elemento em questão (também de 1 até 6).

Neste ponto, inicia-se a obtenção do sistema matricial que será resolvido para modelagem através do MEF. Para isso, tendo-se em vista que na modelagem eletromagnética de transformadores elétricos não se aplicam ímãs permanentes, o último termo da equação (5.35) é suprimido. Agora, elaborando-se uma integral que multiplique todas as funções de interpolação por todos os valores nodais, tem-se:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N_i \sum_{j=1}^6 A_j \text{ grad } N_j d\Omega = \int_{\Omega} N_i J_s d\Omega \quad (5.37)$$

Que pode ser apresentada na forma de (5.38.)

$$\sum_{j=1}^6 A_j \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N_i \text{ grad } N_j d\Omega = \int_{\Omega} N_i J_s d\Omega \quad (5.38)$$

Como a integral da soma é a soma das integrais, desenvolve-se a equação acima da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} A_1 \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N_1 \text{ grad } N_1 d\Omega & \dots & A_6 \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N_1 \text{ grad } N_6 d\Omega \\ A_1 \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N_2 \text{ grad } N_1 d\Omega & \dots & A_6 \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N_2 \text{ grad } N_6 d\Omega \\ A_1 \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N_3 \text{ grad } N_1 d\Omega & \dots & A_6 \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N_3 \text{ grad } N_6 d\Omega \\ A_1 \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N_4 \text{ grad } N_1 d\Omega & \dots & A_6 \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N_4 \text{ grad } N_6 d\Omega \\ A_1 \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N_5 \text{ grad } N_1 d\Omega & \dots & A_6 \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N_5 \text{ grad } N_6 d\Omega \\ A_1 \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N_6 \text{ grad } N_1 d\Omega & \dots & A_6 \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N_6 \text{ grad } N_6 d\Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} N_1 J_s d\Omega \\ \int_{\Omega} N_2 J_s d\Omega \\ \int_{\Omega} N_3 J_s d\Omega \\ \int_{\Omega} N_4 J_s d\Omega \\ \int_{\Omega} N_5 J_s d\Omega \\ \int_{\Omega} N_6 J_s d\Omega \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Que é o mesmo que:

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N_1 \text{ grad } N_1 d\Omega & \dots & \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N_1 \text{ grad } N_6 d\Omega \\ \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N_2 \text{ grad } N_1 d\Omega & \dots & \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N_2 \text{ grad } N_6 d\Omega \\ \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N_3 \text{ grad } N_1 d\Omega & \dots & \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N_3 \text{ grad } N_6 d\Omega \\ \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N_4 \text{ grad } N_1 d\Omega & \dots & \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N_4 \text{ grad } N_6 d\Omega \\ \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N_5 \text{ grad } N_1 d\Omega & \dots & \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N_5 \text{ grad } N_6 d\Omega \\ \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N_6 \text{ grad } N_1 d\Omega & \dots & \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N_6 \text{ grad } N_6 d\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} N_1 J_s d\Omega \\ \int_{\Omega} N_2 J_s d\Omega \\ \int_{\Omega} N_3 J_s d\Omega \\ \int_{\Omega} N_4 J_s d\Omega \\ \int_{\Omega} N_5 J_s d\Omega \\ \int_{\Omega} N_6 J_s d\Omega \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Resultando, de forma genérica, em (5.41).

$$\left[\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N_i \text{ grad } N_j d\Omega \right] [A] = \left[\int_{\Omega} N_i J_s d\Omega \right] \quad (5.41)$$

Assim, o sistema matricial (5.41) pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad}[N]^T \text{grad}[N][A] d\Omega = \int_{\Omega} [N]^T J_s d\Omega \quad (5.42)$$

Até então, trabalhou-se nos elementos reais, no meio Ω . Desta forma, pode-se escrever a equação (5.42) em função do elemento de referência, através das equações (5.18) e (5.33).

Deve-se observar que agora o domínio de cálculo não é mais o elemento real Ω e sim o elemento de referência, Ω_r .

$$\int_{\Omega_r} \frac{1}{\mu} \{[J]^{-1} \text{grad}[N]\}^T \{[J]^{-1} \text{grad}[N]\} \det[J][A] du dv = \int_{\Omega_r} [N]^T \det[J] J_s du dv \quad (5.43)$$

A equação (5.43), acima, é calculada para todos os elementos da malha. Então essas matrizes são condensadas em um sistema matricial global, o qual é resolvido através de técnicas para a resolução de sistemas lineares.

5.8 Resolução da formulação magnetostática com simetria axissimétrica

As deduções para simetria axissimétrica são análogas às deduções já apresentadas para simetria planar. Desta forma, somente as equações finais são apresentadas para este tipo de simetria.

5.8.1 Aplicação do método de Galerkin

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu r_0} \text{grad} N \text{grad} A d\Omega = \int_{\Omega} N J_s d\Omega - \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \text{grad} N \left(\frac{\partial B_{0y}}{\partial x} r_0 - \frac{\partial B_{0x}}{\partial y} r_0 \right) d\Omega \quad (5.44)$$

5.8.2 Aplicação do método de Elementos Finitos

$$\int_{\Omega_r} \frac{1}{\mu r_0} \{[J^{-1}] \text{grad}[N]\}^T \{[J^{-1}] \text{grad}[N]\} \det[J][A'] du dv = \int_{\Omega_r} [N]^T \det[J] J_s du dv \quad (5.45)$$

Torna-se importante salientar que os valores obtidos através da resolução do sistema linear obtido através de (5.45) são valores de A' e não de A . Como os valores a serem obtidos

através da simulação são de indução magnética e não de potencial, deve-se calcular as induções magnéticas de acordo com o exposto abaixo.

$$B_r = -\frac{1}{r_0} \frac{\partial A'}{\partial z} \quad (5.46)$$

$$B_z = \frac{1}{r_0} \frac{\partial A'}{\partial r} \quad (5.47)$$

5.9 Resolução da Formulação Magnetodinâmica

5.9.1 Aplicação do método de Galerkin

Conforme mencionado anteriormente, o Método de Galerkin consiste substituir as funções peso do método dos resíduos ponderados pelas funções de interpolação:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N \text{ grad } A d\Omega + \int_{\Omega} N \sigma \frac{\partial A}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} N J_s d\Omega \quad (5.48)$$

O conceito de derivada permite descrever a taxa de variação de A, dada no segundo termo da equação (5.48), no tempo. Conforme a equação (5.49).

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} \quad (5.49)$$

Onde Δt é o intervalo de tempo e $A(t + \Delta t) - A(t)$ é a variação de A para cada incremento no tempo de simulação.

Assim, a equação (6.7) pode ser reescrita da forma que segue, considerando-se que o instante atual de simulação é $(t + \Delta t)$.

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N \text{ grad } A(t + \Delta t) d\Omega + \int_{\Omega} N \sigma \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} d\Omega = \int_{\Omega} N J_s(t + \Delta t) d\Omega \quad (5.50)$$

Que pode ser apresentada da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad } N \text{ grad } A(t + \Delta t) d\Omega + \int_{\Omega} N \sigma \frac{A(t + \Delta t)}{\Delta t} d\Omega - \int_{\Omega} N \sigma \frac{A(t)}{\Delta t} d\Omega = \int_{\Omega} N J_s(t + \Delta t) d\Omega \quad (5.51)$$

5.9.2 Aplicação do método de Elementos Finito

O Método de Elementos Finitos permite resolver a equação obtida, (5.51), de forma matricial, que é dado pela equação (5.52).

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{\mu} \left([J]^{-1} \text{grad}[N] \right)^T \left([J]^{-1} \text{grad}[N] \right) [A](t + \Delta t) dudv + \frac{\sigma}{\Delta t} \int [N]^T [A](t + \Delta t) dudv - \\ & \frac{\sigma}{\Delta t} \int_{\Omega} [N]^T [A](t) dudv = \int_{\Omega} [N]^T \det[J] J_s(t + \Delta t) dudv \end{aligned} \quad (5.52)$$

Então, apresenta-se a equação acima com os termos organizados da forma que serão implementados computacionalmente, através de um sistema matricial.

$$\begin{aligned} & [A](t + \Delta t) \left\{ \int \frac{1}{\mu} \left([J]^{-1} \text{grad}[N] \right)^T \left([J]^{-1} \text{grad}[N] \right) dudv + \frac{\sigma}{\Delta t} \int [N]^T dudv \right\} \\ & = \int_{\Omega} [N]^T \det[J] J_s(t + \Delta t) dudv + \frac{\sigma}{\Delta t} \int_{\Omega} [N]^T [A](t) dudv \end{aligned} \quad (5.53)$$

6 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

O Método de Elementos Finitos é aplicado em equações que necessitam ser integradas ao longo do elemento, estas integrações podem ser resolvidas analiticamente, o que se torna inviável devido a natureza geométrica dos elementos. É mais prático e comum o uso de integrais numéricas, do tipo:

$$\int K(u) du = \sum_{i=1}^r W_i K(u_i) \quad (6.1)$$

Onde r é o número de pontos de integração, u_i são as coordenadas dos pontos de integração e W_i são os pesos associados a cada ponto de integração.

O método numérico mais utilizado para a resolução de problemas em eletromagnetismo é o método de Gauss [5].

6.1 Integração numérica em duas dimensões - Método de Gauss

O método de Gauss é um método de integração numérica que utiliza os coeficientes r e W_i , dadas as coordenadas u e v , para calcular de forma exata integrais de polinômios de ordem $m \leq 2r - 1$ [7].

Considerando-se agora uma integração em duas dimensões, a equação (6.1), torna-se como segue.

$$\iint K(u, v) du dv = \sum_{i=1}^r W_i K(u_i, v_i) \quad (6.2)$$

Tendo em vista que a integração é elaborada sobre o elemento de referência, sendo este fixo, utiliza-se o método direto, que consiste na aplicação dos valores contidos na Tabela 3 na equação que segue:

$$\int_0^1 \int_0^{1-u} K(u, v) du dv = \sum_{i=1}^r W_i K(u_i, v_i) \quad (6.3)$$

Tabela 3 - Coordenadas e pesos para pontos da integração numérica

Ordem	Pontos de integração	u_i	v_i	W_i
1	1	$1/3$	$1/3$	$1/2$
2	3	$1/6$	$1/6$	$1/6$
		$2/3$	$1/6$	$1/7$
		$1/6$	$2/3$	$1/8$
5	7	$1/3$	$1/3$	$9/80$
		a	a	0,066197076
		$1-2a$	a	0,066197077
		a	$1-2a$	0,066197078
		b	b	0,062969590
		$1-2b$	b	0,062969591
		b	$1-2b$	0,062969592

Onde $a=0,470142064105115$ e $b=0,101286507323456$

7 ELABORAÇÃO DE UM PROGRAMA EM MATLAB

7.1 Matlab “MATrix LABoratory”

Matlab é uma linguagem de alto desempenho para desenvolvimento de aplicativos técnicos.

Integra visualização e programação em um ambiente amigável, onde problemas e soluções são expressos em uma notação matemática bastante familiar.

Possui ferramentas de: matemática, computação, desenvolvimento de algoritmos, aquisição de dados, modelagem, simulação, desenvolvimento de protótipos, análise de dados, exploração de dados, visualização de dados e gráficos científicos. Sendo voltado para o desenvolvimento aplicado, incluindo a possibilidade de construção de GUI's (*Graphical User Interface*).

Matlab é um sistema interativo cujo elemento básico de dados é uma matriz que não requer dimensionamento. Sendo assim, é permitido resolver muitos problemas técnicos de computação, especialmente aqueles com formulações em matriz e vetor, em uma fração do tempo do que seria necessário para escrever um programa em linguagens como C ou Fortran.

O nome MATLAB é proveniente dos termos “*MATrix LABoratory*”, originalmente desenvolvido para facilitar o acesso ao programa matricial desenvolvido pelos projetos LINPACK e EISPACK [8].

7.2 Elaboração da malha

7.2.1 O programa Gmsh

O programa Gmsh é um gerador de malha, 1D, 2D e 3D, de código aberto e programado em linguagem computacional C++. Através deste programa é possível obter geometrias totalmente parametrizadas, através da sua linguagem de *script*. Além de geração de malhas, também é possível elaborar as geometrias e pós processar os resultados obtidos através de um *solver* externo. Seu código fonte não está otimizado para um desempenho ótimo, em critérios de esforço computacional, devido a necessidade de manter o código organizado de uma forma tal que os usuários possam entender os algoritmos implementados [9].

Neste trabalho, o objetivo do uso deste programa é elaborar a geometria e gerar a malha, sendo que o processamento e pós processamento se dão através de rotinas desenvolvidas com o programa Matlab.

A malha é obtida através da leitura do arquivo .msh, gerado pelo Gmsh. Para tal, foi elaborada uma rotina em Matlab.

7.2.2 Leitura do arquivo .msh

Em [10], é apresentado o formato do arquivo .msh para elementos de primeira ordem e é com base nesta referência que é elaborada a rotina em Matlab para leitura do arquivo de malhas com elementos de segunda ordem. Para isto, elabora-se uma nova apresentação dos dados do arquivo .msh.

Na Figura 10, apresenta-se a estrutura do arquivo .msh para malhas com elementos de segunda ordem. Maiores detalhes a respeito do programa em questão pode ser encontrado em [11].

```

$MeshFormat
2 0 8
$EndMeshFormat
$Nodes
421
1 -0.025 -0.05 0
2 0.025 -0.05 0
3 0.025 0.05 0
.
.
.
421 -0.01550004878918136 -0.06601483853576062 0
$EndNodes
$Elements
220
1 8 3 15 5 0 5 41 45
2 8 3 15 5 0 41 42 46
3 8 3 15 5 0 42 43 47
.
.
.
20 8 3 15 8 0 71 5 76
21 9 3 14 10 0 34 1 82 40 93 94
22 9 3 14 10 0 82 1 9 93 11 95
23 9 3 14 10 0 84 2 14 96 19 97
.
.
.
220 9 3 13 12 0 9 174 184 421 287 288
$EndElements

```

Diagrama de estrutura do arquivo .msh:

- a) \$MeshFormat
- b) \$EndMeshFormat
- c) \$Nodes
- d) \$Elements
- e) Elementos de primeira ordem (ex: 1 8 3 15 5 0 5 41 45)
- f) Elementos de segunda ordem (ex: 20 8 3 15 8 0 71 5 76)

Figura 10 – Estrutura do arquivo .msh

Abaixo são então apresentadas sucintas descrições de cada parte do arquivo com os dados da malha, apresentado acima.

a) Indica a versão do programa, o tipo de arquivo (ASCII neste caso) e a resolução de dado utilizado;

b) Quantidade de nós;

c) Identificação do nó e suas coordenadas (x,y,z). Esta identificação se torna útil para a visualização do nó na malha.

d) Quantidade de elementos. Faz-se necessário salientar que o programa também considera como elementos as arestas as quais contém os pontos com sob condição de contorno;

e) Identificação do elemento, tipo de elemento, quantidade de *tags*, as próprias *tags*, lista de nós no elemento. Neste caso, os nós aparecem em mais de um elemento, logo, deve ser elaborado um código que verifique se este nó está repetido. A Figura 11 mostra o elementos sob condições de contorno, com os nós referentes aos dois primeiros elementos do item e), apresentados na Figura 10. Os elementos identificados nesta parte do arquivo são as arestas que contém os nós sob condições de contorno.

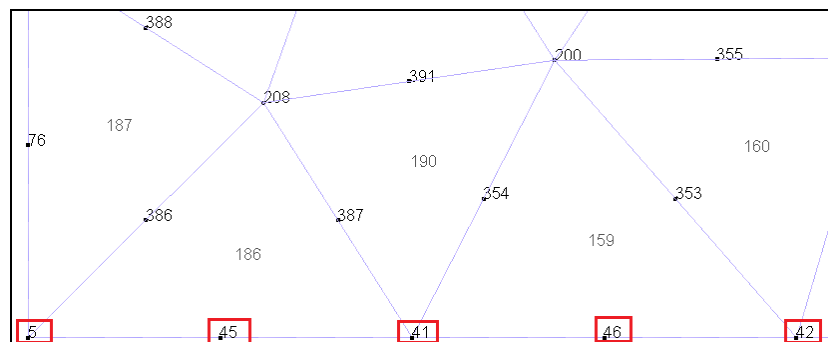


Figura 11 – Nós sob condições de contorno

f) Os dados contidos nesta parte do arquivo são similares aos apresentados no item e), salvo que estes elementos são os triângulos. Os últimos 6 dados indicam quais os nós formam o elemento em questão. A Figura 12 apresenta os elementos referentes aos elementos 21 e 22.

Em muitos casos, essa numeração pode não estar organizada em sentido horário ou anti-horário. Logo, faz-se necessário elaborar uma rotina capaz de organizar a ordem destes dados para que a numeração de conexão dos elementos se mantenha organizada.

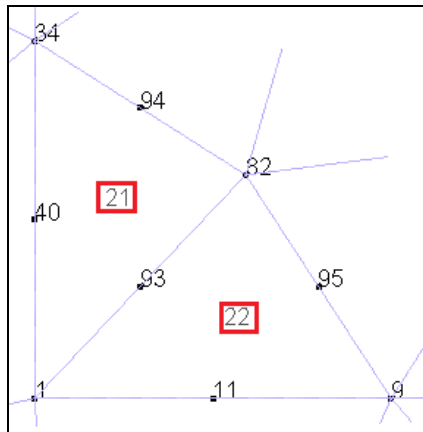


Figura 12 – Nós que formam os elementos

Informações mais completas a respeito deste arquivo podem ser obtidas através do Capítulo 10 de [11].

No Apêndice B, é apresentada a rotina em Matlab para a leitura deste arquivo .msh e no Apêndice C, é apresentada rotina que interpreta estes dados, solicita a entrada de dados (materiais, excitações e condições de contorno) ao usuário e organiza todos estes dados para a rotina que resolverá o problema através do Método de Elementos Finitos.

8 VERIFICAÇÃO DE RESULTADOS PARA MAGNETOSTÁTICA

Com o objetivo de verificar os resultados obtidos com a rotina para problemas estáticos, elabora-se uma análise de fluxo de dispersão em transformador, através de uma geometria simplificada, contendo: dois enrolamentos, núcleo magnético e tanque.

A geometria elaborada é apresentada na Figura 13, abaixo.

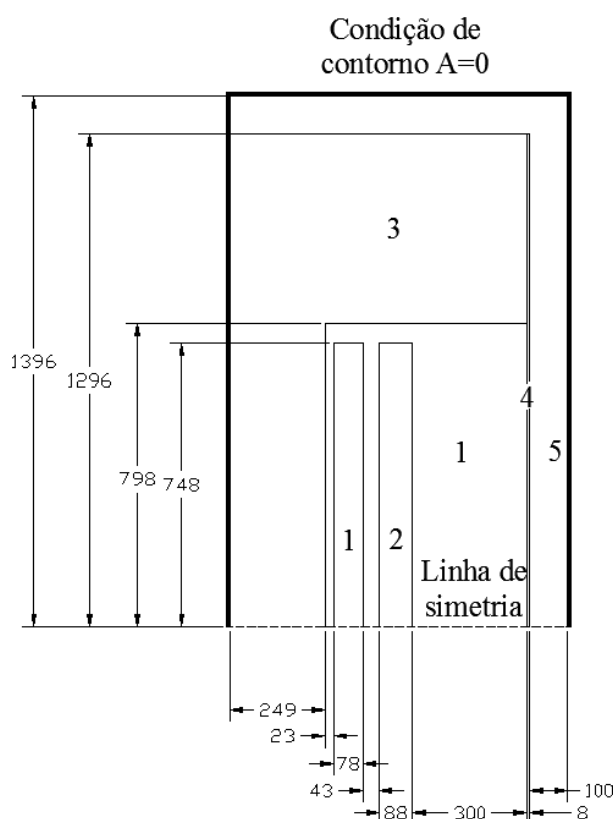


Figura 13 – Geometria para análise em magnetostática

A geometria e a malha são elaboradas através do programa Gmsh. Para isto, torna-se necessário elaborar um arquivo contendo os pontos da geometria, bem como as conexões entre pontos (que formam as linhas) e as superfícies. Tendo-se em vista que a geometria está definida, neste mesmo arquivo definem-se as "physical surfaces", que são as várias regiões do domínio de cálculo e as "physical lines", que são as linhas nas quais as condições de contorno serão aplicadas.

No Apêndice D, apresenta-se o arquivo com extensão .geo criado para elaboração do exemplo acima exposto.

O dados magnéticos dos materiais são definidos conforme abaixo:

Tabela 4 - Propriedades magnéticas dos materiais

Região	μ_r
Enrolamento 1	1
Enrolamento 2	1
Núcleo Magnético	5000
Tanque	300
Região externa	1

As excitações são definidas nos enrolamentos 1 e 2, sendo elas: 520 espiras / - 139,3A e 52espiras/1393 A, respectivamente.

Para elaborar a validação dos resultados obtidos através das rotinas em Matlab, para um caso magnetostático, resolve-se o problema acima exposto no programa FEMM [12], o qual é de livre acesso e disponível na internet, tanto para simetria planar como para simetria axissimétrica.

O código utilizado para a esta modelagem está disponível no Apêndice E.

8.1 Simetria planar

Na Figura 14, são apresentadas a malha e as linhas equipotenciais obtidas através do programa FEMM.

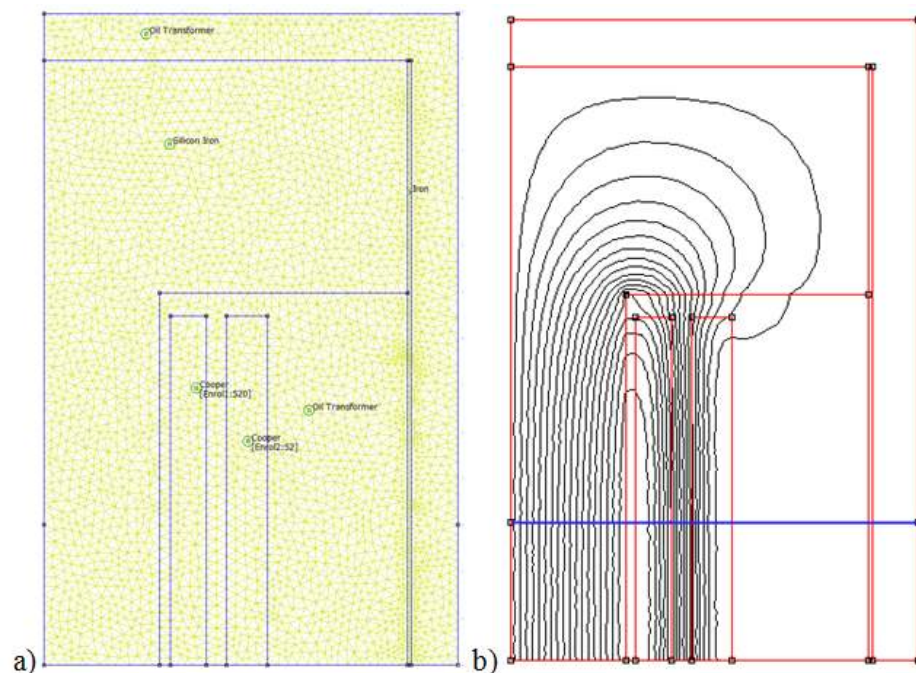


Figura 14- a) Malha e b) linhas de campo magnético - FEMM

Na Figura 15, são apresentados a malha, obtida com o programa Gmsh e esta mesma malha, com as linhas equipotenciais do potencial vetor magnético, obtidas através da simulação com a rotina Matlab desenvolvida.

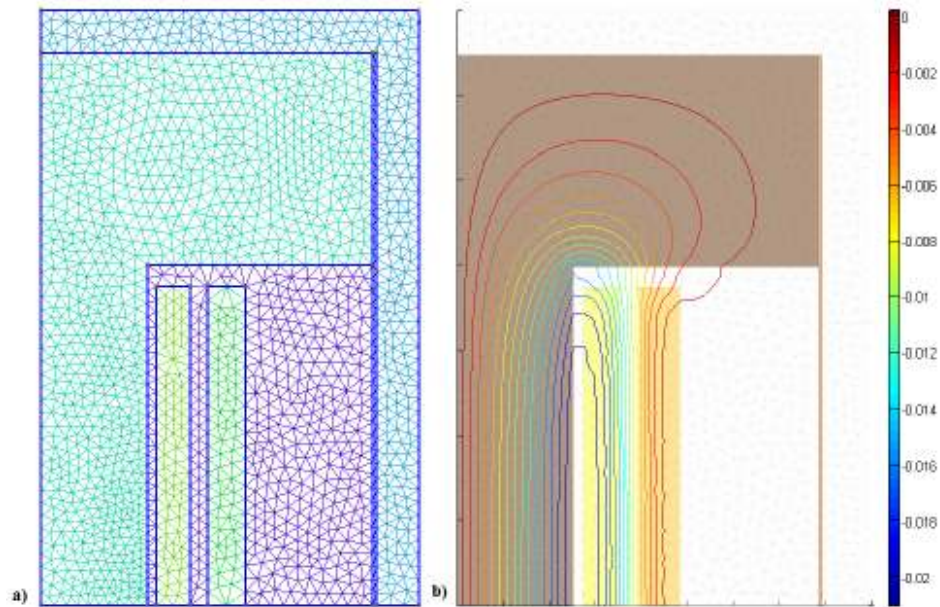


Figura 15- a) Malha (Gmsh) e b) linhas de campo magnético (Matlab)

As figuras abaixo apresentam a comparação entre os valores obtidos através do programa FEMM e da rotina em Matlab, para uma determinada quantidade de pontos sobre a linha de cor azul indicada na Figura 14. As variáveis analisadas são o potencial vetor magnético e para indução magnética.

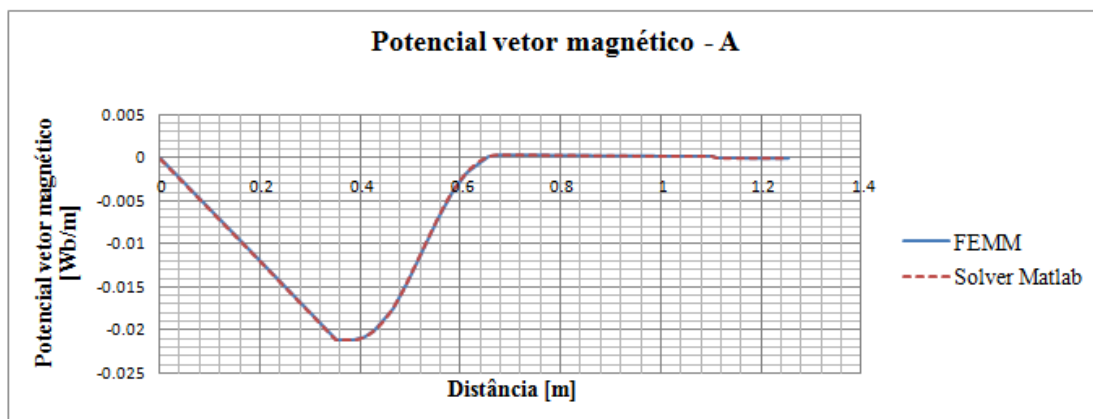


Figura 16- Potencial vetor magnético

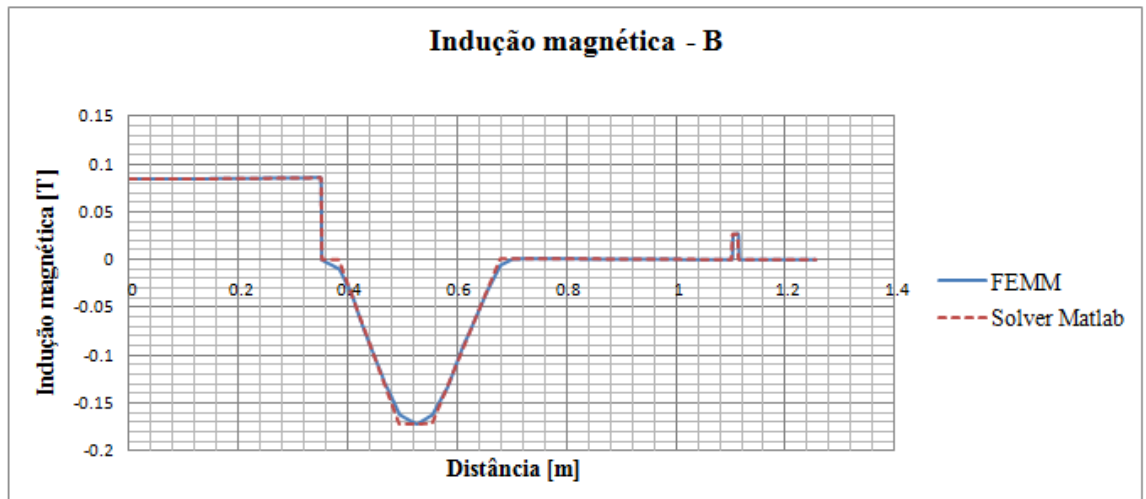


Figura 17- Indução magnética

8.2 Simetria axissimétrica

Tendo-se elaborado a análise dos resultados para simetria planar, agora, elabora-se a análise dos resultados para simetria axissimétrica. A Figura 18 mostra a malha e as linhas de campo obtidas com o programa FEMM, para este tipo de simetria.

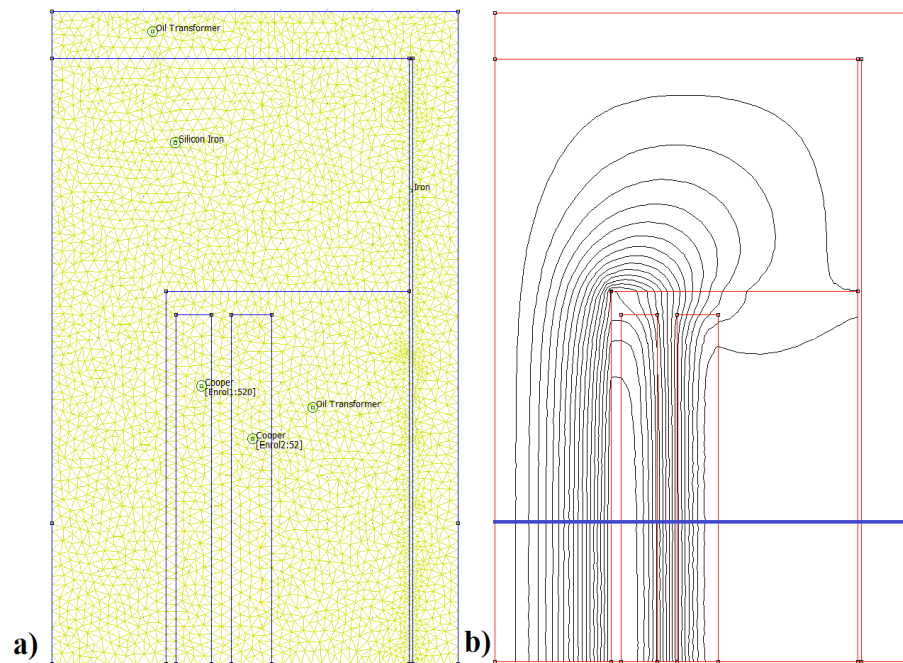


Figura 18- a) Malha e b) linhas de campo magnético - FEMM

A Figura 19 mostra a geometria, a malha e as linhas de fluxo, obtidas através dos programas Gmsh e Matlab.

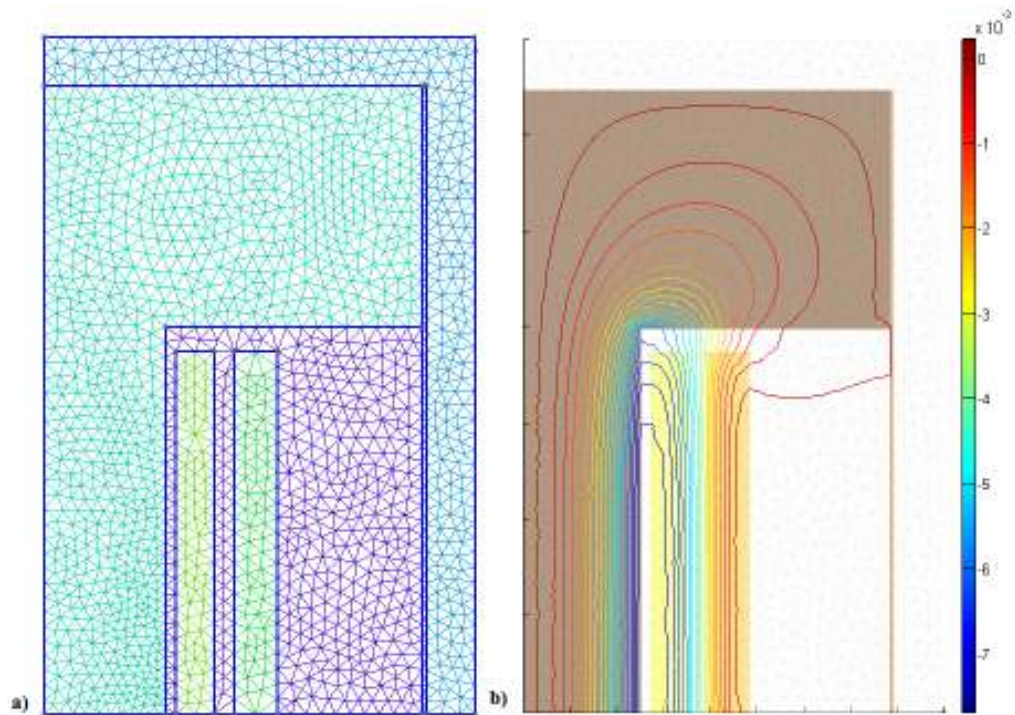


Figura 19- a) Malha (Gmsh) e b) linhas de campo magnético (Matlab)

A Figura 20 apresenta a comparação entre os resultados obtidos com o programa FEMM e os resultados obtidos com a rotina em Matlab, para os pontos sobre a linha azul apresentada na Figura 18.

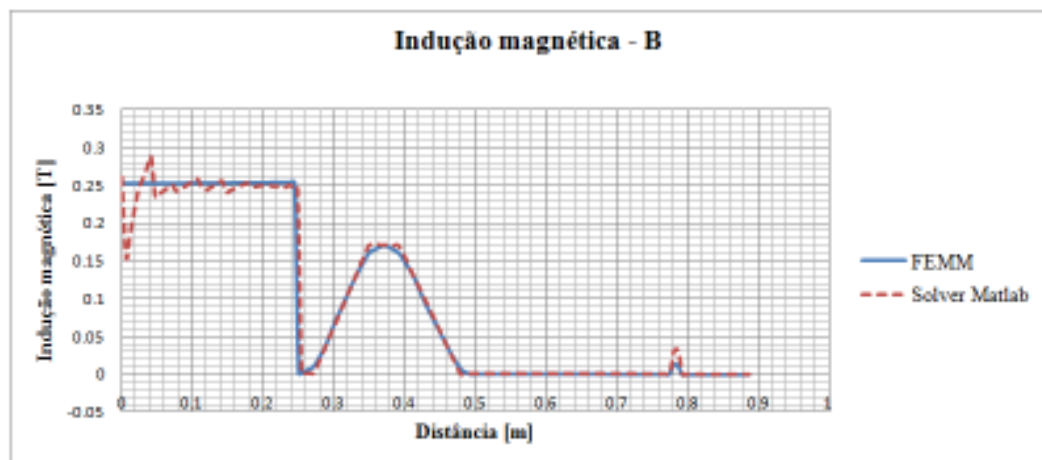


Figura 20- Indução magnética

9 VERIFICAÇÃO DE RESULTADOS PARA ELETROSTÁTICA

Esta análise tem o objetivo de avaliar a inserção das condições de contorno, já que em casos magnetostáticos, geralmente, somente uma condição de contorno é aplicada, $A=0$.

O código utilizado para esta análise é o mesmo utilizado nas análises do capítulo anterior, a única diferença é que na entrada dos dados, o usuário informa que é uma análise eletrostática. Desta forma, a rotina seleciona a característica elétrica do material, em uma tabela pré condicionada.

Para tal análise, considera-se um isolador de alta tensão, sob o potencial de 9760V na linha em contato com o cabo de alta tensão e 0V no pino de fixação. A permissividade relativa do material do isolador é 7.

Abaixo, são apresentadas a geometria e a malha, ambas elaboradas no programa Gmsh. A simetria aplicada neste caso é axissimétrica.

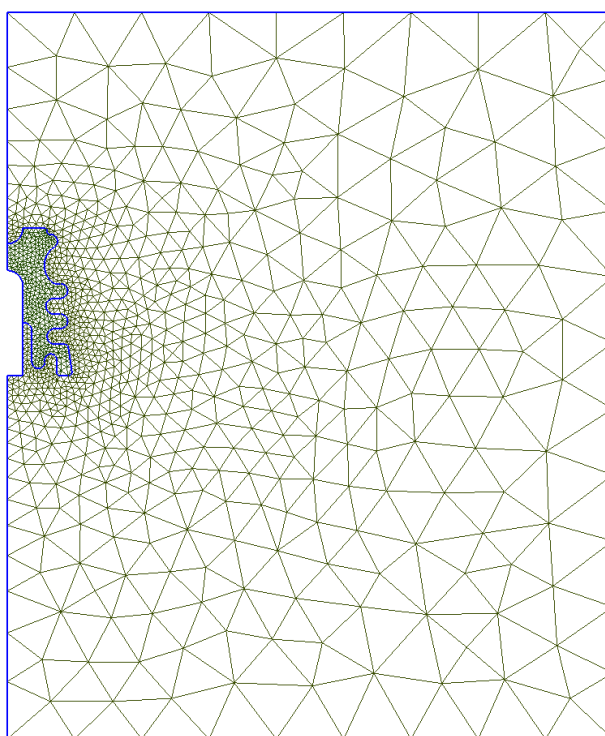


Figura 21- Geometria e malha

Então, apresenta-se a distribuição de tensão, através das linhas equipotenciais.

Na Figura 22 é apresentada a distribuição de tensão ao longo de todo domínio, ao passo que na Figura 23 é apresentado um zoom na região do isolador.

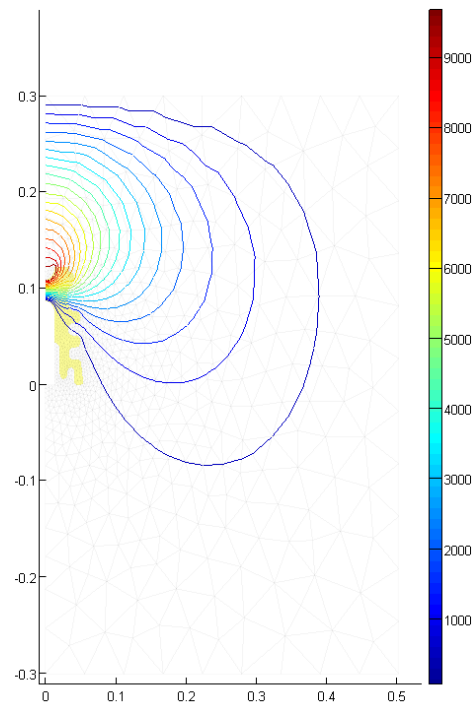


Figura 22- Distribuição de tensão ao longo do domínio

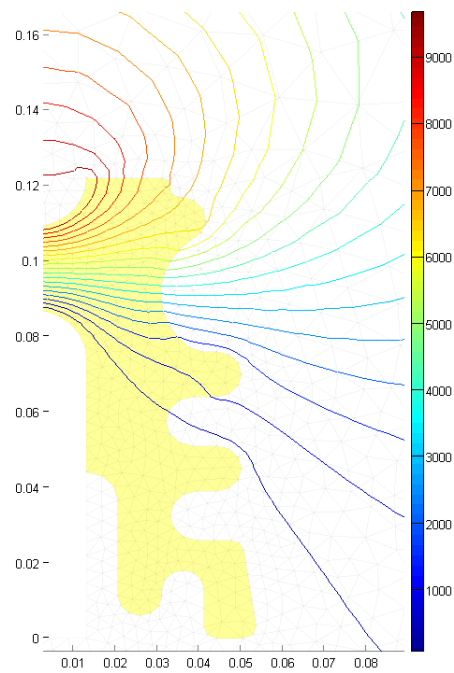


Figura 23- Distribuição de tensão com zoom no isolador

10 VERIFICAÇÃO DE RESULTADOS PARA MAGNETODINÂMICA

Para verificar os resultados obtidos com o código para modelagem magnetodinâmica, no domínio do tempo, trata-se de inserir dimensões no modelo proposto no Capítulo 10 de [5]. Como pode ser visualizado na Figura 24.

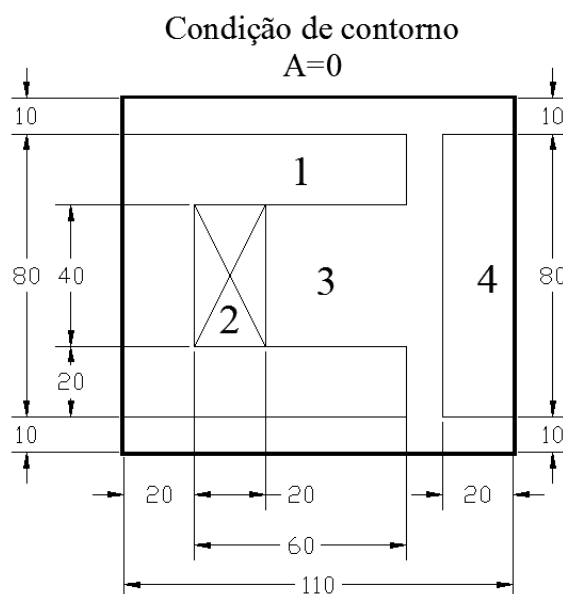


Figura 24- Geometria

As propriedades eletromagnéticas dos materiais utilizados nesta simulação são apresentados na Tabela 5, abaixo.

Tabela 5 - Propriedades elétricas e magnéticas dos materiais

Região	Descrição	μ_r	σ [MS/m]
1	Núcleo Magnético	1000	0
2	Enrolamento	1	0
3	Ar	1	0
4	Parte móvel (magnética e condutora)	50	1

Como excitação, considera-se 1 espira com densidade de corrente de 1A/mm^2 , em 60Hz, plicada no enrolamento, região 2.

Para uma melhor definição da malha na região 4, calcula-se a espessura de penetração de campo neste material, de acordo com (10.1), obtida de [1]. Este valor fornece a

informação de onde a malha deve ser mais refinada, para considerar corretamente o efeito pelicular.

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} = \sqrt{\frac{2}{2 \times \pi \times 60 \times 4 \times \pi \times 10^{-7} \times 50 \times 10^6}} = 0,00918m \quad (10.1)$$

O programa FEMM, utilizado para os casos estáticos, não possui modo magnetodinâmico no domínio do tempo, apenas no domínio da frequência. Assim, utiliza-se o programa Maxwell® [13] para elaborar a validação do código desenvolvido.

Abaixo, apresentam-se a geometria, a malha e a distribuição das linhas de campo magnético, obtidas com o programa Maxwell®.

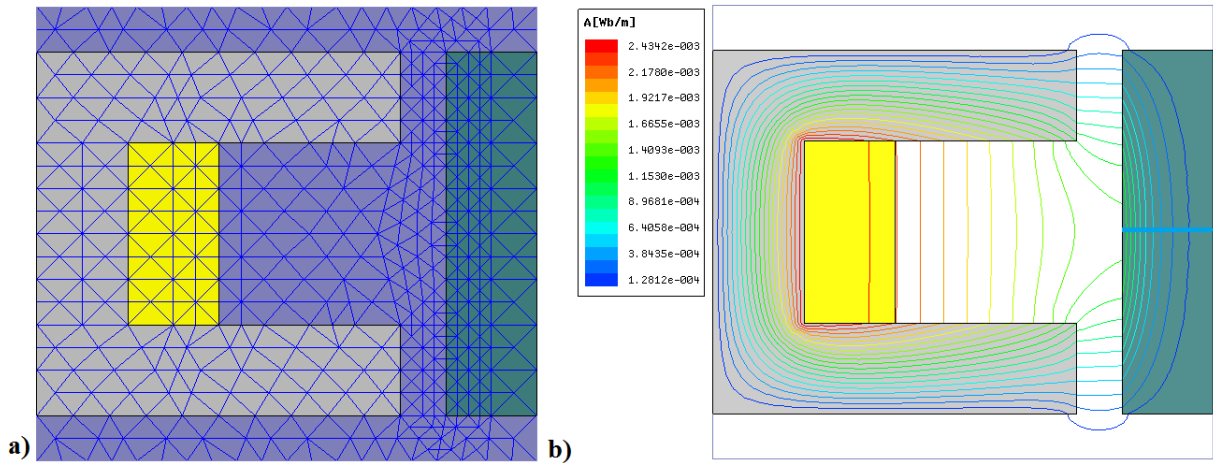


Figura 25- a) Geometria e malha e b) linhas de campo magnético (Maxwell)

Então, apresentam-se a geometria, a malha e as linhas de campo magnético obtidos com a rotina em Matlab.

O arquivo .geo utilizado para a criação da geometria e malha através do programa Gmsh é apresentado no Apêndice E e a rotina em Matlab utilizada para esta modelagem está disponível do Apêndice H.

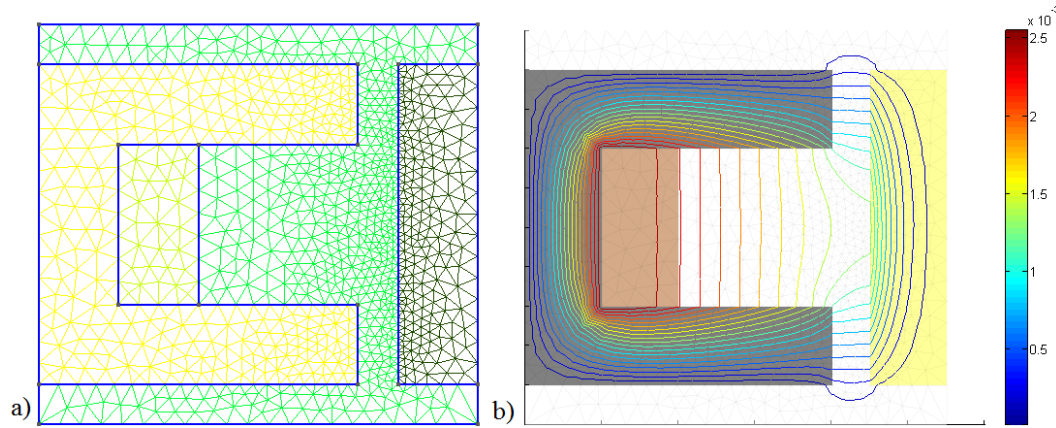


Figura 26- a) Malha (Gmsh) e b) linhas de campo magnético (Matlab)

Como uma comparação numérica com maior exatidão, elaboram-se as comparações através dos valores de potencial vetor magnético e indução magnética nos pontos sobre a linha azul, mostrada na Figura 25 b).

De acordo com [1], o valor obtido através da equação (8.1) representa o ponto onde o campo está atenuado para aproximadamente 37% do seu valor na superfície do material. A indução magnética na superfície da região condutora vale 0,16T, logo, de acordo com (8.1) e (8.2), na espessura de 0,00918 mm a indução magnética é de 0,0592T. O que pode ser visualmente verificado através da Figura 27.

$$B_{esp} = \frac{37}{100} \times 0,16 = 0,0592T \quad (10.2)$$

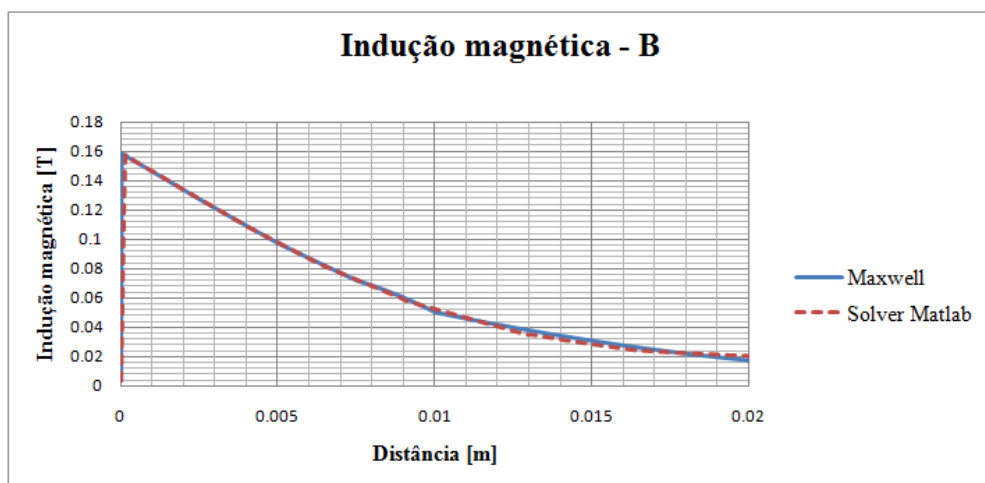


Figura 27- Indução magnética

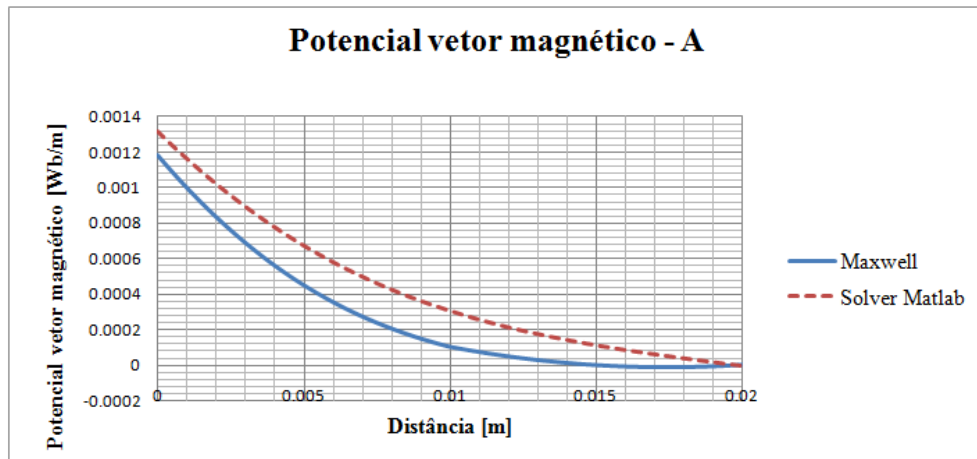


Figura 28- Potencial vetor magnético

11 CONCLUSÃO

O Método de Elementos Finitos é um dos métodos numéricos mais complexos para modelagens eletromagnéticas. Esta conclusão pode ser verificada através do extenso equacionamento apresentado nos primeiros capítulos deste trabalho. Esta complexidade confere generalidade e robustez ao método, através do qual é possível elaborar uma vasta gama de modelagens, obtendo-se resultados coerentes.

Após a implementação das rotinas em Matlab, torna-se razoavelmente simples elaborar a modelagem de geometrias complexas, sendo que a entrada de dados é feita através de interface simples, na qual o usuário insere os dados solicitados pelas rotinas.

Tendo-se em vista a complexidade das geometrias inerentes a modelagem eletromagnética de transformadores de grande porte, verifica-se quão árduo pode ser a modelagem analítica. Desta forma, o Método de Elementos Finitos mostra-se como uma solução robusta para este tipo de análise.

Para muitas análises em transformadores, faz-se necessária a utilização do Método de Elementos Finitos tridimensional, mas em uma grande maioria, com o conhecimento das corretas simetrias a serem aplicadas, pode-se obter resultados coerentes através de modelagens Bidimensionais.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BASTOS, João Pedro Assumpção. **Eletromagnetismo para engenharia - estática e quase estática**. Florianópolis: Editora da UFSC, 2004.
- [2] VANTI, Marcelo Grafulha. **Contribuição para a Adptatividade de Malhas de Elementos Finitos Bi E Tri Dimensionais com a Versão h-p**. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica),UFSC, 2006.
- [3] BASTOS, João Pedro A., SADOWSKI, Nelson. **Electromagnetic Modeling by Finite Element Methods**. New York: Marcel Decker, 2003
- [4] ADVANCED RESEARCH WORKSHOP ON TRANSFORMERS, 2010. . **Finite Element Method Applied to Design and Analysis in Power Transformers**.
- [5] IDA, Nathan; BASTOS, João Pedro Assumpção. **Electromagnetics and Calculation of Fields**. New York: Springer, 1997.
- [6] POLJAC, Dragan **Adadvanced Modeling in Computational Electromagnetic Compatibility**. New Jersey: WILEY, 2007.
- [7] Touzot G. Dhat G. **Une presentacion Matriciel de la Methode des Elements Finis**, Maloine Editeur,Paris 1981.
- [8] THE MATH WORKS. **Learning MATLAB 7**. Release 14. Jul 2004.
- [9] GEUZAIN, Christophe; REMACLE, Jean-François. **Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities**. INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING, 2009.
- [10] ARENDM, Emílio Rodolfo. **Estudo de Aterramento em Baixas Frequências usando a Formulação Eletrocinética Associada ao Método de Elementos Finitos**. (Dissertação) Mestrado em Engenharia Elétrica, UFSC, 2009.
- [11] GEUZAIN, Christophe; REMACLE, Jean-François **Gmsh - Gmsh Reference Manual**. 16 out. 2010. Disponível em: <<http://geuz.org/gmsh/doc/texinfo/gmsh.pdf>>. Acesso em: 12 dez. 2011.
- [12] MEEKER, David. **Finite Element Method Magnetics. Version 4.2. Version 4.2. User's Manual**. 16 out. 2010. Disponível em: <<http://www.femm.info/Archives/doc/manual42.pdf>>. Acesso em: 12 dez. 2011.
- [13] ANSYS INC. **Maxwell 3D - Electromagnetic and Electromechanical Analysis, v. 14**, Canonsburg PA, 2010.

Apêndice A

```
%=====
%VISUALIZADOR DAS FUNÇÕES DE FORMA/INTERPOLAÇÃO DE
SEGUNDA ORDEM
%=====
%Monografia para conclusão do curso de pós graduação
%Aluno: Anderson Santos Nunes
%Orientador: Prof. Dr. Marcelo Grafulha Vanti
%Data: 22/08/2011
%=====

%Inicialização do Matlab
clear all;
close all;
clc;

%=====
%Quantidade de divisões nas coordenadas u e v

n=100;

%=====
%Gera as coordenadas de cada ponto da malha e o valor da função no ponto

for i=1:n+1
    for j=1:n+1
        u(i,j)=(i-1)/n;
        v(i,j)=(j-1)/n;
        t=1-u(i,j)-v(i,j);

        if u(i,j)<=1.001*(1-v(i,j))
```

```

%Especificação da função de forma em questão
N(i,j)=4*t*v(i,j);

N_=N(i,j);
u_=u(i,j);
v_=v(i,j);
else
    N(i,j)=N_;
    u(i,j)=u_;
    v(i,j)=v_;
end
end
end

%=====
%Plota a função especificada acima

surf(u,v,N)
shading interp
colorbar('vert')
xlabel('u');
ylabel('v');
zlabel('N6');

```

Apêndice B

```

%=====
%ROTINA PARA LEITURA DOS DADOS DAS MALHAS GERADAS PELO
PROGRAMA GMSH
%=====
%Monografia para conclusão do curso de pós graduação
%Aluno: Anderson Santos Nunes
%Orientador: Prof. Dr. Marcelo Grafulha Vanti
%Data: 22/08/2011
%=====

clc;
clear all;
close all;

%=====

disp('=====')
disp('Arquivo Leitor_msh')

%=====

%Leitura do arquivo
%Entrada do nome do arquivo
arquivo = input('Nome do arquivo (com extensão):','s')

% Abre o arquivo
fid = fopen(arquivo, 'r');
qtd_=0; %Quantidade de $

linhas_coordenadas_nos=1;    %Controle de linha da leitura das coordenadas

```

```

        linha_cond_contorno=1;           %Controle de linha da leitura das condições de
contorno
        linha_num_global=1;             %Controle de linha da leitura da numeração global

%Loop que le cada linha do arquivo
while 1
tline = fgetl(fid);
linha=cellstr(char(tline));
linha=char(linha);

A = sscanf(linha,'%f');

% Controla a linha com $
if linha(1,1)=='$'

        qtd_=qtd_+1;

end

%Cria a tabela com as coordenadas
if qtd_==3 & length(A)>1

        coordenadas(linhas_coordenadas_nos,1)=A(2);
        coordenadas(linhas_coordenadas_nos,2)=A(3);
        linhas_coordenadas_nos=linhas_coordenadas_nos+1;

end

% Cria a tabela com os dados das condições de contorno
if qtd_==5 & length(A)>1 & A(2)==8

        col_cond_contorno=1;

        for j=1:9

```



```

        cond_contorno(linha_cond_contorno,col_cond_contorno)=A(j);
        col_cond_contorno=col_cond_contorno+1;

    end

    linha_cond_contorno=linha_cond_contorno+1;
end

% Cria a tabela com a numeração global
if qtd_==5 & length(A)>1 & A(2)==9

    col_num_global=1;

    for j=1:12

        num_global(linha_num_global,col_num_global)=A(j);
        col_num_global=col_num_global+1;

    end

    linha_num_global=linha_num_global+1;
end

%Controla o fim da leitura do arquivo

if tline==-1
    break;
end

end

fclose(fid);
disp('Leitura do arquivo .msh: ok');

```

```
%=====
%Limpeza de variáveis não utilizadas
clear ans;
clear A;
clear arquivo;
clear col_cond_contorno;
clear col_num_global;
clear fid;
clear j;
clear linha;
clear linha_cond_contorno;
clear linha_num_global;
clear linha_num_global;
clear qtd_;
clear tline;
clear linhas_coordenadas_nos;
disp('Limpeza de variáveis: ok');
```

Apêndice C

```
%=====
%ROTINA QUE GERA OS DADOS PARA O SOLVER
%=====
%Monografia para conclusão do curso de pós graduação
%Aluno: Anderson Santos Nunes
%Orientador: Prof. Dr. Marcelo Grafulha Vanti
%Data: 22/08/2011
%=====

Leitor_msh;

%=====

disp('=====')
disp('Arquivo pre_proc')

%=====
%Obtém a quantidade de elementos e e nós e
%gera as lista de coordenadas X e Y

n=length(num_global);
numElem=n(1,1);    % Quantidade de elementos
n=length(coordenadas);
numNos=n(1,1);     %Quantidade de nós

%=====
%Organiza a numeração global
%    x(5)
%    /  \
%    /  \
%    x(6)  x(4)
```

```
% / \
% / \
% x(1)---x(2)---x(3)
```

```
i=0;
```

```
%Verifica o sentido da numeração local
```

```
i=0;
```

```
for i=1:numElem
```

```
    % Calcula o baricentro do elemento
```

```
    xb=(coordenadas(num_global(i,7),1)+coordenadas(num_global(i,8),1)+coordenadas(num_global(i,9),1))/3;
```

```
    yb=(coordenadas(num_global(i,7),2)+coordenadas(num_global(i,8),2)+coordenadas(num_global(i,9),2))/3;
```

```
    for k=1:6
```

```
        xp(k,1)=coordenadas(num_global(i,k+6),1);
```

```
        yp(k,1)=coordenadas(num_global(i,k+6),2);
```

```
    end
```

```
    conta=0;
```

```
    for k=1:6
```

```
        if yp(k,1)==max(yp(:,1))
```

```
            conta=conta+1;
```

```
            xmax_(k,1)=xp(k,1);
```

```
        end
```

```
    end
```

```
    for k=1:6
```

```
        if yp(k,1)==max(yp(:,1))
```

```
            if conta==1
```

```

        ymax=yp(k,1);
        xmax=xp(k,1);
    else
        ymax=yp(k,1);
        xmax=max(xmax_(:,1));
    end
end

end

ang_in=atan2(ymax-yb,xmax-xb)*180/pi;
% Tendo o baricentro, calcula o ângulo entre o baricentro e o
% ponto em questão
for k=1:6
    ang(k,1)=atan2((yp(k,1)-yb),(xp(k,1)-xb))*180/pi-ang_in;
    if ang(k,1)<0
        ang(k,1)=ang(k,1)+360;
    end
end

% Organiza a tabela de angulos em forma crescente
ang_sort=sort(ang,'ascend');

% Cria a nova posição da numeração, de acordo com os angulos, em forma
% crescente

for l=1:6
    for m=1:6
        if ang(m,1)==ang_sort(l,1)
            num_Global(i,l)=num_global(i,m+6);
        end
    end
end

end

```

```
num_Global(i,7)=num_global(i,4);    %Insere o índice da physical surface
```

```
end
```

```
disp('Organização da numeração local: ok');
```

```
%=====
```

```
%Gera a tabela com com condições de contorno
```

```
%condContorno(i,1): se há cond. de contorno neste ponto
```

```
%condContorno(i,2): valor
```

```
n=length(cond_contorno);
```

```
linhasCondCont=n(1,1);%  Quantidade de linhas do arquivo com condições de  
contorno
```

```
%Verifica quais sao as condições de contorno
```

```
quaisCondCont(1,1)=cond_contorno(1,4);
```

```
cond_conta=1;
```

```
j=0;
```

```
for i=1:linhasCondCont
```

```
    nova=1;
```

```
    for j=1:cond_conta
```

```
        if cond_contorno(i,4)==quaisCondCont(1,j)
```

```
            nova=0;
```

```
        end
```

```
    end
```

```
    if nova==1
```

```
        cond_conta=cond_conta+1;;
```

```
        quaisCondCont(1,cond_conta)=cond_contorno(i,4);
```

```
    end
```

```
end
```

```

%Gera uma tabela como todos os nós com cond. de contorno e a sua
% physical line correspondente
%Primeira linha
contCondCont=0;
i=1;
for j=7:9
    pontos(i,1)=cond_contorno(1,j);
    pontos(i,2)=cond_contorno(1,4);
    i=i+1;
    contCondCont=contCondCont+1;
end

%Restante
for i=2:linhasCondCont

    for j=7:9
        nova=1;

        for k=1:contCondCont

            if cond_contorno(i,j)==pontos(k,1)
                nova=0;
            end
        end

        if nova==1
            contCondCont=contCondCont+1;
            pontos(contCondCont,1)=cond_contorno(i,j);
            pontos(contCondCont,2)=cond_contorno(i,4);
        end
    end
end

%Entrada dos valores de contorno

```

```
valCondCont = input(['Condições de contorno ' mat2str(quaisCondCont) ':']);
```

```
%Gera a matriz de condições de contorno
```

```
n=size(quaisCondCont);
```

```
condContorno=zeros(numNos,2);
```

```
for i=1:numNos
```

```
    for j=1:contCondCont
```

```
        if pontos(j,1)==i;
```

```
            condContorno(i,1)=1;
```

```
            for k=1:n(1,1)
```

```
                if pontos(j,2)== quaisCondCont(k)
```

```
                    condContorno(i,2)=valCondCont(k);
```

```
                end
```

```
            end
```

```
        end
```

```
    end
```

```
end
```

```
disp('Condições de contorno: ok');
```

```
%=====
```

```
%Propriedades
```

```
%propriedades(i,1):índice do material (linha na tabela de materiais)
```

```
%propriedades(i,2): valor de excitação (Densidade de corrente ou carga elétrica)
```

```
%Verifica quais sao as regiões
```

```
quaisReg(1,1)=num_Global(1,7);
```

```
contReg=1;
```

```
j=0;
```

```
for i=1:numElem
```

```
    nova=1;
```

```
    for j=1:contReg
```

```
        if num_Global(i,7)==quaisReg(1,j)
```

```
            nova=0;
```

```
        end
```



```

end

if nova==1
    contReg=contReg+1;;
    quaisReg(1,contReg)=num_Global(i,7);
end
end

%Entrada dos índices dos materiais de cada região
materiais
valMatReg = input(['Índice do material ' mat2str(quaisReg) ':']);

%Entrada dos valores de excitação
disp('Excitação: Se transiente J(t)=Jp*raiz(2)*sen(w*t)')
exctReg = input(['Excitação J[A/m2] ou Q [Q/m2] ' mat2str(quaisReg) ':']);

%Gera a matriz de condições de contorno
for i=1:numElem
    for j=1:contReg
        if quaisReg(1,j)==num_Global(i,7)
            propriedades(i,1)=valMatReg(j);
            propriedades(i,2)=exctReg(j);
            break;
        end
    end
end

disp('Propriedades: ok');

%=====
%Limpeza de variáveis não utilizadas
clear ang;
clear ang_in;
clear ang_sort;

```

```
clear conta;
clear xp;
clear yp;
clear xmax;
clear ymax;
clear xmax_;
clear xb;
clear yb;
clear cond_conta;
clear cond_contorno;
clear contCondCont;
clear contReg;
clear exctReg;
clear i;
clear j;
clear k;
clear linhasCondCont;
clear n;
clear nova;
clear num_global;
clear pontos;
clear quaisCondCont;
clear quaisReg;
clear valCondCont;
clear valMatReg;
disp('Limpeza de variáveis: ok');
```

Apêndice D

////////////////////////////////////

```
//Datos de entrada
```

```
//Fator de malha
```

```
cl = .03;
```

```
//Escala
```

$$mm=0.001;$$

```
//Região externa
```

$$dx_y = 100 \text{ mm};$$

```
//Contorno magnético (núcleo e tanque)
```

ch=498*mm;

$$j_n = 1595 \text{ mm};$$

```
dist_tq_enrol=300*mm;
```

esp_tq=8*mm;

```
//Primeiro enrolamento
```

$$\text{rad}_1 = 78 \text{ mm};$$

alt 1=1495*mm;

din_1=543*mm;

dis_jugo_1=50*mm;

```
//Segundo enrolamento
```

rad_2=88*mm;

```
alt_2=1495*mm;
```

din_2=784*mm;

```
dis_jugo_2=50*mm;
```

////////////////////////////////////

```
//Definição dos pontos
```

```

Point(1) = {(din_1/2), alt_1/2, 0, cl};
Point(2) = {(din_1/2)+rad_1, alt_1/2, 0, cl};
Point(3) = {(din_2/2), alt_2/2, 0, cl};
Point(4) = {(din_2/2)+rad_2, alt_2/2, 0, cl};
Point(5) = {ch/2, jn/2, 0, cl};
Point(6) = {(din_2/2)+(rad_2+dist_tq_enrol), jn/2, 0, cl};
Point(7) = {0, jn/2+ch, 0, cl};
Point(8) = {(din_2/2)+(rad_2+dist_tq_enrol), jn/2+ch, 0, cl};
Point(9) = {(din_2/2)+(rad_2+dist_tq_enrol+esp_tq), jn/2+ch, 0, cl};
Point(10) = {(din_2/2)+(rad_2+dist_tq_enrol+esp_tq+dxy), ch+jn/2+dxy, 0, cl};
Point(11) = {0, ch+jn/2+dxy, 0, cl};
Point(12) = {0, 0, 0, cl};
Point(13) = {(din_1/2), 0, 0, cl};
Point(14) = {(din_1/2)+rad_1, 0, 0, cl};
Point(15) = {(din_2/2), 0, 0, cl};
Point(16) = {(din_2/2)+rad_2, 0, 0, cl};
Point(17) = {(din_2/2)+(rad_2+dist_tq_enrol), 0, 0, cl};
Point(18) = {(din_2/2)+(rad_2+dist_tq_enrol+esp_tq), 0, 0, cl};
Point(19) = {(din_2/2)+(rad_2+dist_tq_enrol+esp_tq+dxy), 0, 0, cl};
Point(20) = {ch/2, 0, 0, cl/2};

```

```

////////////////////////////////////

```

```

//Definição das linhas

```

```

Line(1) = {12,7};
Line(2) = {7,11};
Line(3) = {11,10};
Line(4) = {10,19};
Line(5) = {13,1};
Line(6) = {1,2};
Line(7) = {2,14};
Line(8) = {14,13};
Line(9) = {3,4};
Line(10) = {4,16};
Line(11) = {16,15};

```

Line(12) = {15,3};
 Line(13) = {7,8};
 Line(14) = {9,8};
 Line(15) = {9,18};
 Line(16) = {8,6};
 Line(17) = {6,5};
 Line(18) = {6,17};
 Line(19) = {17,18};
 Line(20) = {18,19};
 Line(21) = {5,20};
 Line(22) = {12,20};
 Line(23) = {20,13};
 Line(24) = {14,15};
 Line(25) = {16,17};

////////////////////////////////////

//Definição das faces

Line Loop(26) = {6,7,8,5};
 Plane Surface(27) = {26};
 Line Loop(28) = {9,10,11,12};
 Plane Surface(29) = {28};
 Line Loop(30) = {13,16,17,21,-22,1};
 Plane Surface(31) = {30};
 Line Loop(32) = {2,3,4,-20,-15,14,-13};
 Plane Surface(33) = {32};
 Line Loop(34) = {15,-19,-18,-16,-14};
 Plane Surface(35) = {34};
 Line Loop(36) = {17,21,23,5,6,7,24,12,9,10,25,-18};
 Plane Surface(37) = {36};

////////////////////////////////////

//Definição das Physical Lines

Physical Line(38) = {2,1,3,4};

////////////////////////////////////

//Definição das Physical Surfaces

Physical Surface(39) = {33};//Região de ar

Physical Surface(40) = {31};//Núcleo

Physical Surface(41) = {35};//Tanque

Physical Surface(42) = {37};//Janela

Physical Surface(43) = {29};//Enrolamento externo

Physical Surface(44) = {27};//Enrolamento interno

Apêndice E

```
%=====
%SOLVER ESTÁTICO DE ELEMENTOS FINITOS SUBPARAMÉTRICOS
%=====
%Monografia para conclusão do curso de pós graduação
%Aluno: Anderson Santos Nunes
%Orientador: Prof. Dr. Marcelo Grafulha Vanti
%Data: 22/08/2011
%=====

clc;
clear all;
close all;

%=====

pre_proc

%=====

disp('=====')
disp('Arquivo FEMSolver_Static_2Ord')

%=====
%Definições para o solver
%Entrada do tipo natureza do problema

problema = input('Eletrostática (1) Eletrocinética (2) Magnetostática (3):');
simetria=input('Planar (0) Axissimétrico (1):');

%=====
```

```

% Carrega os arquivos de dados
% load -Ascii 'coordenadas.txt' %Coordenadas XY de cada nó (x,y)
% load -Ascii 'num_Global.txt' %Numeração global de cada elemento
% load -Ascii 'propriedades.txt' %Índice do material e excitação de cada elemento
(ind. material,densi. corr.)
% load -Ascii 'condContorno.txt' %Condições de contorno, em cada nós (tem? (0 ou
1),valor)
%
% n=length(coordenadas);
% numNos=n(1,1);
%
% n=length(num_Global);
% numElem=n(1,1);
% simetria=0;
% problema=3;
% materiais;
%=====
%Configurações iniciais

```



```

%Definição dos pontos de integração numérica / triangulo de referencia
% u
% |
% |\
% | \
% | \
% | \
% | \
% |(3) \
% || \ \
% || \ \
% || \ \
% |(1)---(2) \
% -----(3)-----v
qtdNumInted=3;          %Quantidade de pontos de integração

u=[1/6;2/3;1/6];
v=[1/6;1/6;2/3];
w=1/6;                  %Ponderação

Integdudv=.5;           %Área do elemento de referencia

%Inicialização com zeros das matriz principais
MatGlobal_esq=zeros(numNos,numNos); %Matriz global do lado esquerdo
MatGlobal_dir=zeros(numNos,1);      %Matriz global do lado direito

gradN_prim=[-1 1 0;      %gradN(u,v) de primeira ordem
            -1 0 1];

r0=1; %Caso seja planar

%Definição dos materiais
switch problema
case 1

```

```

    eps0=8.85*power(10,-12);
    prop=listaMat(:,1)*eps0;
case 2
    prop=listaMat(:,2);
case 3
    mu0=4*pi*power(10,-7);

    n=size(listaMat);
    for i=1:n(1,1)
        prop(i,1)=1/(mu0*listaMat(i,3));
    end
end
disp('Pré loop principal: ok');

%=====
%Loop principal

for k=1:numElem

    %Definição da matriz Jacobiana
    coordJ=[coordenadas(num_Global(k,1),1) coordenadas(num_Global(k,1),2);
            coordenadas(num_Global(k,3),1) coordenadas(num_Global(k,3),2);
            coordenadas(num_Global(k,5),1) coordenadas(num_Global(k,5),2)];

    %Cálculo do baricentro, no caso de axissimetria
    if simetria==1
        r0=(coordJ(1,1)+coordJ(2,1)+coordJ(3,1))/3;
    end

    Jac=gradN_prim*coordJ;    %Matriz Jacobiana
    invJac=inv(Jac);          %Matriz inversa da Jacobiana
    detJac=det(Jac);

```

```

%Definição da propriedade do material
matProp=prop(propriedades(k,1),1)/r0;

%Integral do lado esquerdo

%(Transosta(InvJacobiana*gradN)*(InvJacobiana*gradN)*det(Jacobiana)*Integdudv*prop.m
aterial)
matLocal_esq=zeros(6,6);

for pinteg=1:qtdNumInted

    uInteg=u(pinteg,1);
    vInteg=v(pinteg,1);
    tInteg=1-uInteg-vInteg;

    %gradN de secunda ordem
    gradN_sec=[(1-4*tInteg) (4*(tInteg-uInteg)) (4*uInteg-1) (4*vInteg) (0) (-
4*vInteg);
               (1-4*tInteg) (-4*uInteg) (0) (4*uInteg) (4*vInteg-1) (4*(tInteg-vInteg))];

    matLocal_esq=matLocal_esq+matProp*(invJac*gradN_sec)'*(invJac*gradN_sec)*detJac*Int
egdudv*w;
end

%Montagem da matriz global do lado esquerdo
for im=1:6
    for jm=1:6

        MatGlobal_esq(num_Global(k,im),num_Global(k,jm))=MatGlobal_esq(num_Global(k,im),n
um_Global(k,jm))+matLocal_esq(im,jm);
    end
end
%Integral do lado direito

```

```

%Integral Trans[N]*[Js]*Det[J]*dudv
Js=propriedades(k,2);
matLocal_dir=zeros(6,1);
for pinteg=1:qtdNumInted
    uInteg=u(pinteg);
    vInteg=v(pinteg);
    tInteg=1-uInteg-vInteg;
    N_sec=[-(tInteg*(1-2*tInteg))    (4*uInteg*tInteg)    (-uInteg*(1-2*uInteg))
(4*uInteg*vInteg) (-vInteg*(1-2*vInteg)) (4*vInteg*tInteg)];

    matLocal_dir=matLocal_dir+detJac*Integdudv*w*Js*N_sec';
end

%Montagem da matriz global do lado direito
for im=1:6

MatGlobal_dir(num_Global(k,im),1)=MatGlobal_dir(num_Global(k,im),1)+matLocal_dir(im
,1);

end

end

disp('Loop principal: ok');
%=====
%Aplicação das condições de contorno

for i=1:numNos

if condContorno(i,1)==1
    MatGlobal_esq(i,1:numNos)=0; %Zera a linha do nó na matriz global direita
    MatGlobal_esq(i,i)=1; %Aplica 1 na pos. do nó na matriz global direita
    MatGlobal_dir(i,1)= condContorno(i,2); %Aplica a cond. de contorno na pos.
do nó na matriz global esquerda
end

```

```
end
```

```
disp('Aplicação das condições de contorno: ok');
```

```
%=====
```

```
%Resolução do sistema matricial
```

```
potenciais=zeros(numNos,1); %Vetor contendo os resultados
```

```
potenciais=MatGlobal_esq\MatGlobal_dir;
```

```
disp('Resolução do sistema matricial: ok');
```

```
%=====
```

```
%Limpeza de variáveis não utilizadas
```

```
clear Integdudv;
```

```
clear Jac;
```

```
clear Js;
```

```
clear MatGlobal_dir;
```

```
clear MatGlobal_esq;
```

```
clear N_sec;
```

```
clear coordJ;
```

```
clear detJac;
```

```
clear gradN_prim;
```

```
clear gradN_sec;
```

```
clear i;
```

```
clear im;
```

```
clear invJac;
```

```
clear jm;
```

```
clear k;
```

```
clear matLocal_dir;
```

```
clear matLocal_esq;
```

```
clear matProp;
```

```
clear n;
```

```
clear pinteg;
```

```
clear prop;
```

```
clear qtdNumInted;
```

```
clear r0;  
clear tInteg;  
clear u;  
clear uInteg;  
clear v;  
clear vInteg;  
clear w;  
disp('Limpeza de variáveis: ok');
```

Apêndice F

```

////////////////////////////////////
//Dados de entrada
u=1.e-3;
s2=0.01/3;
s3 =15*s2;

//Definição dos pontos
Point(1) = {(0)*u,(109)*u,(0)*u,s2};
Point(2) = {(0)*u,(122)*u,(0)*u,s2};
Point(3) = {(13)*u,(122)*u,(0)*u,s2};
Point(4) = {(31)*u,(122)*u,(0)*u,s2};
Point(5) = {(31)*u,(120)*u,(0)*u,s2};
Point(6) = {(33)*u,(120)*u,(0)*u,s2};
Point(7) = {(33)*u,(119)*u,(0)*u,s2};
Point(8) = {(35)*u,(119)*u,(0)*u,s2};
Point(9) = {(35)*u,(117)*u,(0)*u,s2};
Point(10) = {(35.5)*u,(111)*u,(0)*u,s2};
Point(11) = {(37.82)*u,(105.46)*u,(0)*u,s2};
Point(12) = {(48.75)*u,(91.16)*u,(0)*u,s2};
Point(13) = {(37.52)*u,(77.09)*u,(0)*u,s2};
Point(14) = {(40.64)*u,(81)*u,(0)*u,s2};
Point(15) = {(40.64)*u,(76)*u,(0)*u,s2};
Point(16) = {(44)*u,(76)*u,(0)*u,s2};
Point(17) = {(44)*u,(70)*u,(0)*u,s2};
Point(18) = {(44)*u,(64)*u,(0)*u,s2};
Point(19) = {(38.5)*u,(64)*u,(0)*u,s2};
Point(20) = {(38.5)*u,(57.5)*u,(0)*u,s2};
Point(21) = {(38.5)*u,(51)*u,(0)*u,s2};
Point(22) = {(44)*u,(51)*u,(0)*u,s2};
Point(23) = {(44)*u,(45)*u,(0)*u,s2};
Point(24) = {(44)*u,(39)*u,(0)*u,s2};

```

Point(25) = {(39.5)*u,(39)*u,(0)*u,s2};
 Point(26) = {(39.5)*u,(32.5)*u,(0)*u,s2};
 Point(27) = {(39.5)*u,(26)*u,(0)*u,s2};
 Point(28) = {(47.43)*u,(26)*u,(0)*u,s2};
 Point(29) = {(47.43)*u,(23)*u,(0)*u,s2};
 Point(30) = {(50.5)*u,(23.46)*u,(0)*u,s2};
 Point(31) = {(53.47)*u,(3.46)*u,(0)*u,s2};
 Point(32) = {(50.39)*u,(3)*u,(0)*u,s2};
 Point(33) = {(50.39)*u,(0)*u,(0)*u,s2};
 Point(34) = {(44)*u,(0)*u,(0)*u,s2};
 Point(35) = {(44)*u,(3)*u,(0)*u,s2};
 Point(36) = {(41)*u,(3)*u,(0)*u,s2};
 Point(37) = {(41)*u,(13)*u,(0)*u,s2};
 Point(38) = {(36)*u,(13)*u,(0)*u,s2};
 Point(39) = {(31)*u,(13)*u,(0)*u,s2};
 Point(40) = {(31)*u,(11.25)*u,(0)*u,s2};
 Point(41) = {(25.75)*u,(11.25)*u,(0)*u,s2};
 Point(42) = {(20.5)*u,(11.25)*u,(0)*u,s2};
 Point(43) = {(20.5)*u,(36.5)*u,(0)*u,s2};
 Point(44) = {(13)*u,(36.5)*u,(0)*u,s2};
 Point(45) = {(13)*u,(44)*u,(0)*u,s2};
 Point(46) = {(13)*u,(74)*u,(0)*u,s2};
 Point(47) = {(0)*u,(74)*u,(0)*u,s2};
 Point(48) = {(0)*u,(87)*u,(0)*u,s2};
 Point(49) = {(35.5)*u,(117)*u,(0)*u,s2};
 Point(50) = {(13)*u,(0)*u,(0)*u,s2};
 Point(51) = {(0)*u,(0)*u,(0)*u,s2};
 Point(52) = {(0)*u,(300)*u,(0)*u,s3};
 Point(53) = {(0)*u,(-300)*u,(0)*u,s3};
 Point(54) = {(500)*u,(300)*u,(0)*u,s3};
 Point(55) = {(500)*u,(-300)*u,(0)*u,s3};

////////////////////////////////////

//Definicao dos circulos elinhas

Line(1) = {3,4};
 Line(2) = {6,7};
 Line(3) = {9,49};
 Line(4) = {15,16};
 Line(5) = {18,19};
 Line(6) = {21,22};
 Line(7) = {24,25};
 Line(8) = {27,28};
 Line(9) = {30,31};
 Line(10) = {33,34};
 Line(11) = {36,37};
 Line(12) = {39,40};
 Line(13) = {42,43};
 Line(14) = {45,46};
 Line(15) = {48,1};
 Circle (16) = {1,2,3};
 Circle (17) = {4,5,6};
 Circle (18) = {7,8,9};
 Circle (19) = {49,10,11};
 Circle (20) = {11,12,13};
 Circle (21) = {18,17,16};
 Circle (22) = {19,20,21};
 Circle (23) = {24,23,22};
 Circle (24) = {25,26,27};
 Circle (25) = {28,29,30};
 Circle (26) = {31,32,33};
 Circle (27) = {34,35,36};
 Circle (28) = {37,38,39};
 Circle (29) = {42,41,40};
 Circle (30) = {43,44,45};
 Circle (31) = {46,47,48};
 Circle (32) = {13,14,15};
 Line(35) = {1,2};
 Line(36) = {44,45};

Line(37) = {44,50};

Line(38) = {51,50};

Line(39) = {2,52};

Line(40) = {52,54};

Line(41) = {54,55};

Line(42) = {55,53};

Line(43) = {53,51};

////////////////////////////////////

//Definição das faces

Line Loop(44) = {39,40,41,42,43,38,-37,36,-30,-13,29,-12,-28,-11,-27,-10,-26,-9,-25,-8,-24,-7,23,-6,-22,-5,21,-4,-32,-20,-19,-3,-18,-2,-17,-1,-16,35};

Plane Surface(45) = {44};

Line Loop(46) = {16,1,17,2,18,3,19,20,32,4,-21,5,22,6,-23,7,24,8,25,9,26,10,27,11,28,12,-29,13,30,14,31,15};

Plane Surface(47) = {46};

////////////////////////////////////

//Definição das Physical Surfaces

Physical Surface(50) = {45};

Physical Surface(51) = {47};

Physical Surface(52) = {49};

////////////////////////////////////

//Definição das Physical Lines

Physical Line(53) = {40,41,42};

Physical Line(54) = {31,14,38,37,36};

Physical Line(55) = {16};

Apêndice G

```
////////////////////////////////////
```

```
//Dados de entrada
```

```
//Fator de malha
```

```
cl = .005;
```

```
//Escala
```

```
mm=0.001;
```

```
////////////////////////////////////
```

```
//Definição dos pontos
```

```
Point(1) = {0,0, 0, cl};
```

```
Point(2) = {0.11,0, 0, cl};
```

```
Point(3) = {0,0.01, 0, cl};
```

```
Point(4) = {0.08,0.01, 0, cl/2};
```

```
Point(5) = {0.09,0.01, 0, cl/3};
```

```
Point(6) = {0.11,0.01, 0, cl};
```

```
Point(7) = {0.02,0.03, 0, cl};
```

```
Point(8) = {0.04,0.03, 0, cl};
```

```
Point(9) = {0.08,0.03, 0, cl/2};
```

```
Point(10) = {0.02,0.07, 0, cl};
```

```
Point(11) = {0.04,0.07, 0, cl};
```

```
Point(12) = {0.08,0.07, 0, cl/2};
```

```
Point(13) = {0.00,0.09, 0, cl};
```

```
Point(14) = {0.08,0.09, 0, cl/2};
```

```
Point(15) = {0.09,0.09, 0, cl/3};
```

```
Point(16) = {0.11,0.09, 0, cl};
```

```
Point(17) = {0,0.1, 0, cl};
```

```
Point(18) = {0.11,0.1, 0, cl};
```

```
////////////////////////////////////
```

```
//Definição das linhas
```

Line(1) = {1,2};

Line(2) = {2,6};

Line(3) = {6,5};

Line(4) = {5,15};

Line(5) = {15,16};

Line(6) = {16,18};

Line(7) = {18,17};

Line(8) = {17,13};

Line(9) = {13,3};

Line(10) = {3,1};

Line(11) = {7,8};

Line(12) = {8,11};

Line(13) = {11,10};

Line(14) = {10,7};

Line(15) = {3,4};

Line(16) = {4,9};

Line(17) = {9,8};

Line(18) = {11,12};

Line(19) = {12,14};

Line(20) = {14,13};

Line(21) = {16,6};

////////////////////////////////////

//Definição das faces

Line Loop(22) = {20,9,15,16,17,-11,-14,-13,18,19};

Plane Surface(23) = {22};

Line Loop(24) = {12,13,14,11};

Plane Surface(25) = {24};

Line Loop(26) = {5,21,3,4};

Plane Surface(27) = {26};

Line Loop(28) = {7,8,-20,-19,-18,-12,-17,-16,-15,10,1,2,3,4,5,6};

Plane Surface(29) = {28};

////////////////////////////////////

//Definição das Physical Lines

Physical Line(34) = {7,8,9,10,1,2,21,6};

////////////////////////////////////

//Definição das Physical Surfaces

Physical Surface(30) = {23};

Physical Surface(31) = {25};

Physical Surface(32) = {29};

Physical Surface(33) = {27};

Apêndice H

```

=====
%SOLVER TRANSIENTE DE ELEMENTOS FINITOS SUBPARAMÉTRICOS
%=====
%Monografia para conclusão do curso de pós graduação
%Aluno: Anderson Santos Nunes
%Orientador: Prof. Dr. Marcelo Grafulha Vanti
%Data: 22/08/2011
%=====

clc;
clear all;
close all;

%=====

pre_proc

%=====

disp('=====')
disp('Arquivo FEMSolver_Static_2Ord')

%=====
% Carrega os arquivos de dados
% load -Ascii 'coordenadas.txt' %Coordenadas XY de cada nó (x,y)
% load -Ascii 'num_Global.txt' %Numeração global de cada elemento
% load -Ascii 'propriedades.txt' %Índice do material e excitação de cada elemento
(ind. material,densi. corr.)
% load -Ascii 'condContorno.txt' %Condições de contorno, em cada nós (tem? (0 ou
1),valor)

```

```

tmax = input(['Tempo de simulacao [s]:']);
dt = input(['Intervalo de tempo [s]:']);
freq = input(['Frequencia [Hz]:']);
problema=4;
simetria=0;          %Configura a simetria planar

%=====
%Configurações iniciais
%Definição dos pontos de integração numérica / triangulo de referencia
% u
% |
% |\
% | \
% | \
% | \
% | \
% |(3) \
% || \ \
% || \ \
% || \ \
% |(1)---(2) \
% -----(3)-----v

%Integração numérica - 3 pontos
qtdNumInteg3=3;          %Quantidade de pontos de integração
u3=[2/3;1/6;1/6];
v3=[1/6;2/3;1/6];
w3=1/6;          %Ponderação

%Integração numérica - 6 pontos
qtdNumInteg6=6;
a=0.445948490915965;
b=0.091576213509771;
u6=[a;1-2*a;a;b;1-2*b;b];

```

```

v6=[a;a,1-2*a;b;b,1-2*b,];
w1=0.111690794839005;
w2=0.054975871827661;
w6=[w1;w1;w1;w2;w2;w2];

```

```

Integduv=1;          %Área do elemento de referencia

```

```

gradN_prim=[-1 1 0;          %gradN(u,v) de primeira ordem
             -1 0 1];

```

```

%Definição dos materiais

```

```

n=size(listaMat);
mu0=4*pi*1e-7;
for i=1:n(1,1)
    inv_perm(i,1)=1/(mu0*listaMat(i,3));
    cond(i,1)=listaMat(i,2);

```

```

end

```

```

disp('Pré loop principal: ok');

```

```

%=====

```

```

%Loop principal

```

```

contador_tempo=1;
potenciais_=zeros(numNos,1);  %Vetor contendo os resultados
%Inicia o loop no tempo
for tempo=0:dt:tmax
    disp(['Instante: ' num2str(tempo) 'seg' ])

```

```

%Inicialização com zeros das matriz principais

```

```

MatGlobal_esq=zeros(numNos,numNos); %Matriz global do lado esquerdo

```



```

MatGlobal_dir=zeros(numNos,1);    %Matriz global do lado direito

%Inicia o loop para obtenção da matriz global
for k=1:numElem

%Definição do valor de densidade de corrente para o elemento, em um dado
%instante de tempo
    Js=propriedades(k,2)*sin(2*pi*freq*tempo);

%Definição da propriedade do material
    Inv_perm=inv_perm(propriedades(k,1),1);
    Cond=cond(propriedades(k,1),1);

%Obtém os valores dos potenciais nos nós deste elemento do intervalo
%de tempo anterior ao que está sendo calculado
    pot_t=zeros(1,6);
    for i=1:6
        pot_t(1,i)=potenciais_(num_Global(k,i),1);
    end

%Definição da matriz Jacobiana
    coordJ=[coordenadas(num_Global(k,1),1) coordenadas(num_Global(k,1),2);
            coordenadas(num_Global(k,3),1) coordenadas(num_Global(k,3),2);
            coordenadas(num_Global(k,5),1) coordenadas(num_Global(k,5),2)];

    Jac=gradN_prim*coordJ;    %Matriz Jacobiana
    invJac=inv(Jac);          %Matriz inversa da Jacobiana
    detJac=det(Jac);

%Integral do lado esquerdo
matLocal_esq=zeros(6,6);

```

```

%Primeiro termo - Integral
(Transposta(InvJacobiana*gradN)*(InvJacobiana*gradN)*det(Jacobiana)*dudv}
%*prop.material)

for pinteg=1:qtdNumInteg3
    uInteg=u3(pinteg);
    vInteg=v3(pinteg);
    tInteg=1-uInteg-vInteg;

    %gradN de secunda ordem
    gradN_sec=[(1-4*tInteg) (4*(tInteg-uInteg)) (4*uInteg-1) (4*vInteg) (0) (-
4*vInteg);
                (1-4*tInteg) (-4*uInteg) (0) (4*uInteg) (4*vInteg-1) (4*(tInteg-
vInteg))];
    InvJacGradN=Jac\gradN_sec;

    matLocal_esq=matLocal_esq+Inv_perm*(InvJacGradN)'*(InvJacGradN)*detJac*Integdudv*
w3;
end

%Segundo termo - Sigma/dt*Integral {Transposta[N]*det(Jacobiana)*dudv}

for pinteg=1:qtdNumInteg6
    uInteg=u6(pinteg);
    vInteg=v6(pinteg);
    wInteg=w6(pinteg);

    tInteg=1-uInteg-vInteg;
    N_sec=[(-tInteg*(1-2*tInteg)) (4*uInteg*tInteg) (-uInteg*(1-2*uInteg))
(4*uInteg*vInteg) (-vInteg*(1-2*vInteg)) (4*vInteg*tInteg)];

    matLocal_esq=(Cond/dt)*(N_sec'*N_sec)*detJac*Integdudv*wInteg+matLocal_esq;
end

```

```

%Montagem da matriz global do lado esquerdo
    for im=1:6
        for jm=1:6

MatGlobal_esq(num_Global(k,im),num_Global(k,jm))=MatGlobal_esq(num_Global(k,im),n
um_Global(k,jm))+matLocal_esq(im,jm);
        end
    end

%Integral do lado direito
    matLocal_dir=zeros(6,1);
% Terceiro termo -Sigma/dt*Integral(Transposta[N]*[A](t)*det[J]*dudv
    N_sec=zeros(1,6);
    for pinteg=1:qtdNumInteg6
        uInteg=u6(pinteg);
        vInteg=v6(pinteg);
        wInteg=w6(pinteg);

        tInteg=1-uInteg-vInteg;
        N_sec=[(-tInteg*(1-2*tInteg))    (4*uInteg*tInteg)    (-uInteg*(1-2*uInteg))
(4*uInteg*vInteg) (-vInteg*(1-2*vInteg)) (4*vInteg*tInteg)];

matLocal_dir=matLocal_dir+(Cond/dt)*N_sec'*N_sec*pot_t'*detJac*Integdudv*wInteg;
    end

%Quarto termo - Integral {Transposta[N]*Js*Det[J]*dudv}

    for pinteg=1:qtdNumInteg3
        uInteg=u3(pinteg);
        vInteg=v3(pinteg);
        tInteg=1-uInteg-vInteg;

```

```

        N_sec=[(-tInteg*(1-2*tInteg))    (4*uInteg*tInteg)    (-uInteg*(1-2*uInteg))
(4*uInteg*vInteg) (-vInteg*(1-2*vInteg)) (4*vInteg*tInteg)];
        matLocal_dir=matLocal_dir+N_sec'*detJac*Integdudv*w3*Js;
    end

    %Montagem da matriz global do lado direito
    for im=1:6

MatGlobal_dir(num_Global(k,im),1)=MatGlobal_dir(num_Global(k,im),1)+matLocal_dir(im
,1);

        end
    end

    %=====
    %Aplicação das condições de contorno
    for i=1:numNos

        if condContorno(i,1)==1
            MatGlobal_esq(i,1:numNos)=0;    %Zera a linha do nó na matriz global
direita
            MatGlobal_esq(i,i)=1;    %Aplica 1 na pos. do nó na matriz global direita
            MatGlobal_dir(i,1)= condContorno(i,2); %Aplica a cond. de contorno na
pos. do nó na matriz global esquerda
        end
    end

    %=====
    %Resolução do sistema matricial através do método de Eleminação de Gauss
    potenciais_=zeros(numNos,1);    %Vetor contendo os resultados
    potenciais_=MatGlobal_esq\MatGlobal_dir;

    %=====
    %Salva os valores de A em "potenciais salvos" para os dados instantes

```

```

    potenciais(:,contador_tempo)=potenciais_;
    contador_tempo=contador_tempo+1;

end

disp('Loop no tempo: ok');

%=====

%Limpeza de variáveis não utilizadas
clear Integdudv;
clear Jac;
clear Js;
clear MatGlobal_dir;
clear MatGlobal_esq;
clear N_sec;
clear coordJ;
clear detJac;
clear gradN_prim;
clear gradN_sec;
clear i;
clear im;
clear invJac;
clear jm;
clear k;
clear matLocal_dir;
clear matLocal_esq;
clear matProp;
clear n;
clear pinteg;
%clear prop;
clear qtdNumInted;
clear r0;
clear tInteg;
clear u;
clear uInteg;
clear v;

```

```
clear vInteg;  
clear w;  
disp('Limpeza de variáveis: ok');
```