COORDENADAS PARA OS CENTROS DO TRIÂNGULO

Augusto C. Morgado
Rio de Janeiro, RJ

Introdução

Escolhido um sistema de coordenadas e dados os pontos não alinhados,

$$A = (x_1, y_1), \quad B = (x_2, y_2), \quad C = (x_3, y_3),$$

é bastante conhecido que o *baricentro* G (ponto de encontro das medianas) do triângulo ABC pode ser determinado por

$$G = \frac{A+B+C}{3}, \quad \text{notação que significa:}$$

$$G = (x, y) \ \text{ com } \ x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \ \text{ e } \ y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Na **RPM** 03, pág. 33, já se mostrou que o *incentro* I (ponto de encontro das bissetrizes internas) do triângulo ABC pode ser determinado por $I = \dfrac{aA + bB + cC}{a+b+c}$, sendo a, b e c as medidas dos lados opostos aos vértices A, B e C, respectivamente. A notação utilizada tem o mesmo significado estabelecido anteriormente, isto é,

$$I = (x, y) \ \text{ com } \ x = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c} \ \text{ e } \ y = \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c}.$$

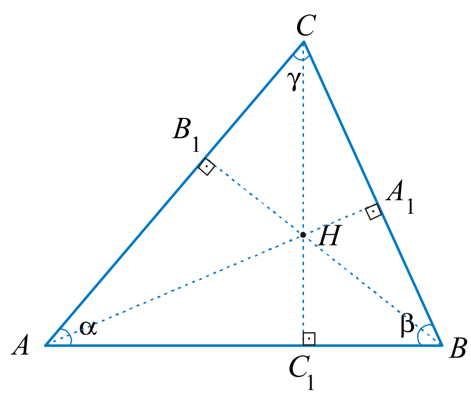
O leitor, provavelmente, já notou que há algo comum a essas fórmulas: em ambas, o centro é uma média ponderada dos vértices − com pesos iguais a 1, no caso do baricentro, e iguais aos lados, no caso do incentro.

Vamos determinar expressões análogas para o *ortocentro* (ponto de encontro das alturas) e para o *circuncentro* (ponto de encontro das mediatrizes dos lados) do triângulo ABC.

Ortocentro

Vamos considerar um triângulo não retângulo, pois não há nenhuma dificuldade na determinação do ortocentro de um triângulo retângulo – é o vértice do ângulo reto.

No triângulo ABC representamos os pés das alturas relativas aos vértices A, B e C por A_1, B_1 e C_1 respectivamente.



Como $BB_1 = AB_1 \; tg\,\alpha = B_1C \; tg\,\gamma$, temos $\dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{tg\,\gamma}{tg\,\alpha}$. Logo, o ponto B_1 divide o lado AC em segmentos proporcionais a $\tan\gamma$ e $\tan\alpha$.

Portanto, o vetor $\overrightarrow{AB_1} = \dfrac{\text{tg}\,\gamma}{tg\,\alpha + tg\,\gamma}\overrightarrow{AC}$, ou, em coordenadas:

$B_1 = (x, y)$ com $(x - x_1, y - y_1) = \dfrac{tg\,\gamma}{tg\,\alpha + tg\,\gamma}(x_3 - x_1, y_3 - y_1)$.

Daí, $B_1 = \dfrac{A\,tg\,\alpha + C\,tg\,\gamma}{tg\,\alpha + tg\,\gamma}$, com a notação definida anteriormente.

De modo análogo, $C_1 = \dfrac{Atg\,\alpha + Btg\,\beta}{tg\,\alpha + tg\,\beta}$.

Como o vetor $\overrightarrow{BH}$ é um múltiplo do vetor $\overrightarrow{BB_1}$ e o vetor $\overrightarrow{CH}$ é um múltiplo do vetor $\overrightarrow{CC_1}$, temos: $\overrightarrow{BH} = \lambda\ \overrightarrow{BB_1}$ e $\overrightarrow{CH} = \mu\ \overrightarrow{CC_1}$.

Como $\overrightarrow{CH} - \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{CB}$, temos $\mu\overrightarrow{CC_1} - \lambda\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CB}$, isto é, $\mu(C_1 - C) - \lambda(B_1 - B) = B - C$.

Vamos determinar o valor de λ. Essas fórmulas acima valem qualquer que seja a origem do sistema, *O*, adotada. Podemos simplificar os cálculos adotando a origem no ponto *C*, isto é, $C = (x_3, y_3) = (0, 0)$.

Substituindo os valores anteriormente encontrados para B_1 e C_1, obtemos:

$$\mu\frac{A\,tg\,\alpha + B\,tg\,\beta}{tg\,\alpha + tg\,\beta} - \lambda\frac{A\,tg\,\alpha}{tg\,\alpha + tg\,\gamma} + \lambda B = B$$

$$\left(\frac{\mu\,tg\,\alpha}{tg\,\alpha + tg\,\beta} - \frac{\lambda\,tg\,\alpha}{tg\,\alpha + tg\,\gamma}\right)A + \left(\frac{\mu\,tg\,\beta}{tg\,\alpha + tg\,\beta} + \lambda - 1\right)B = 0.$$

Como $A - C = A = \overrightarrow{CA}$ $B - C = B = \overrightarrow{CB}$ não são paralelos, devemos ter

$$\left(\frac{\mu\,tg\,\alpha}{tg\,\alpha + tg\,\beta} - \frac{\lambda\,tg\,\alpha}{tg\,\alpha + tg\,\gamma}\right) = 0 \text{ e } \left(\frac{\mu\,tg\,\beta}{tg\,\alpha + tg\,\beta} + \lambda - 1\right) = 0.$$

Resolvendo o sistema, encontramos $\lambda = \dfrac{tg\,\alpha + tg\,\gamma}{tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma}$.

Como $\overrightarrow{BH} = \lambda\overrightarrow{BB_1}$, temos $H = B + \lambda(B_1 - B)$. Substituindo o valor de B_1, obtemos

$$H = \frac{A\,tg\,\alpha + B\,tg\,\beta + C\,tg\,\gamma}{tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma}.$$

Logo, o ortocentro de um triângulo não retângulo é a média ponderada dos vértices tendo como pesos as tangentes dos ângulos do triângulo.

O leitor pode verificar que a expressão anterior é válida também quando um dos ângulos do triângulo for obtuso; nesse caso, a respectiva tangente entra com seu sinal negativo.

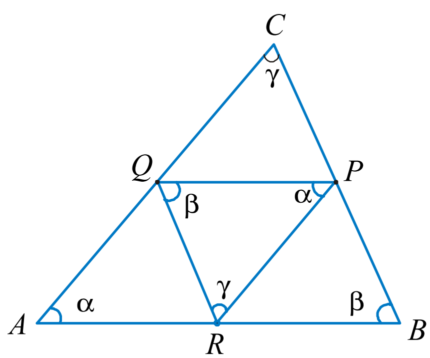
Circuncentro e reta de Euler

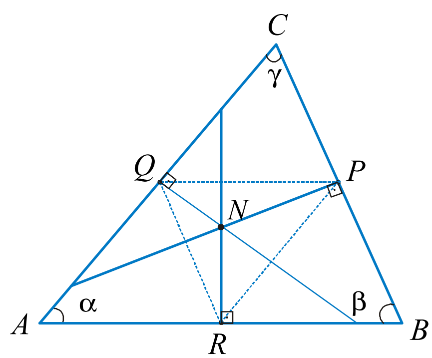
Considerando ainda um triângulo não retângulo ABC, se tomarmos os pontos P, Q e R, médios dos lados BC, AC e AB, respectivamente, verifica-se que:

$P = \dfrac{B+C}{2}$, $Q = \dfrac{A+C}{2}$, $R = \dfrac{A+B}{2}$, com a notação já definida;

os ângulos do triângulo PQR são iguais aos ângulos do triângulo ABC e também $PR \,//\, AC$, $QR \,//\, BC$ e $QP \,//\, AB$.

Logo, as mediatrizes dos lados do triângulo ABC contêm as alturas do triângulo PQR.





Portanto, o circuncentro N do triângulo ABC é o ortocentro do triângulo PQR.

Logo,

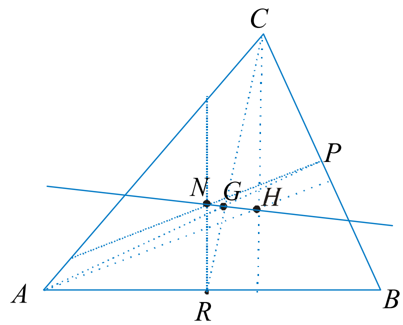
$$N = \frac{P\,tg\,\alpha + Q\,tg\,\beta + R\,tg\,\gamma}{tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma} = \frac{\dfrac{B+C}{2}tg\,\alpha + \dfrac{A+C}{2}tg\,\beta + \dfrac{A+B}{2}tg\,\gamma}{tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma}$$

$$= \frac{\mathrm{A}(tg\,\beta + tg\,\gamma) + B(tg\,\alpha + tg\,\gamma) + C(tg\,\alpha + tg\,\beta)}{2(tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma)} =$$

$$\frac{A+B+C}{2} - \frac{A\,tg\,\alpha + B\,tg\,\beta + C\,tg\,\gamma}{2(tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma)} = \frac{3}{2}G - \frac{1}{2}H,$$

sendo G o baricentro e H o ortocentro do triângulo ABC.

Esse resultado pode ser escrito como $2N = 3G - H$ ou, ainda, $2(N - G) = G - H$. Portanto, $2\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{HG}$.



É fácil ver que, se o triângulo for retângulo, o resultado $2\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{HG}$ continua válido (basta observar que N é o ponto médio da hipotenusa e que H é o vértice do ângulo reto; portanto, HN é a mediana relativa à hipotenusa).

Acabamos de provar um teorema atribuído a Euler. Em todo triângulo, o ortocentro, o baricentro e o circuncentro são colineares. Além disso, o baricentro é sempre interno ao segmento que une o ortocentro ao circuncentro, sendo, dos pontos que o dividem em três partes iguais, o situado mais próximo do circuncentro. A reta que contém esses três centros do triângulo (é claro que, se o triângulo for equilátero, esses centros coincidem e a reta não fica determinada) é conhecida como reta de Euler.

Finalmente, propomos ao leitor que use a fórmula $2\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{HG}$ para mostrar que, se o triângulo não é retângulo, então

$$N = \frac{A \operatorname{sen} 2\alpha + B \operatorname{sen} 2\beta + C \operatorname{sen} 2\gamma}{\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} 2\beta + \operatorname{sen} 2\gamma}.$$

VOCÊ SABIA?

Que 2000 é o Ano Internacional da Matemática? Segundo um dos membros do IMU – *International Mathematical Union*, um dos objetivos dessa campanha seria divulgar mundialmente que a Matemática é a pedra fundamental para o desenvolvimento econômico e cultural de uma nação.