

# Tensores Abstractos

**L. A. Núñez**

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,  
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*

9 de septiembre de 2020

# Agenda de Tensores

Definición de Tensores

Producto Tensorial

- Definición

- Propiedades

- Espacio Vectorial

Ejemplo

Tensores, componentes y contracciones

Simetrización de tensores

¿ Qué vimos ?

# Tensores: Funcionales Bilineales 1/2

Definiremos como un tensor a un funcional lineal (bilineal en este caso) que asocia un elemento del Campo  $\mathbf{K}$ , complejo o real, a un vector  $|v\rangle \in V$ , a una forma  $\langle u| \in \mathbf{V}^*$ , o ambas, y cumple con la linealidad. Esto es:

- ▶  $\forall \quad |v\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle u| \in \mathbf{V}^* \rightarrow \quad \mathcal{T}[\langle u|; |v\rangle] \in \mathbb{C}$
- ▶  $\mathcal{T}[\langle u|; \alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] \equiv$   
 $\alpha \mathcal{T}[\langle u|; |v_1\rangle] + \beta \mathcal{T}[\langle u|; |v_2\rangle] \quad \forall |v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle u| \in \mathbf{V}^*$
- ▶  $\mathcal{T}[\zeta \langle u_1| + \xi \langle u_2|; |v\rangle] \equiv \zeta \mathcal{T}[\langle u_1|; |v\rangle] +$   
 $\xi \mathcal{T}[\langle u_2|; |v\rangle] \quad \forall |v\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle u_1|, \langle u_2| \in \mathbf{V}^*$

# Tensores: Funcionales Bilineales 1/2

Definiremos como un tensor a un funcional lineal (bilineal en este caso) que asocia un elemento del Campo  $\mathbf{K}$ , complejo o real, a un vector  $|v\rangle \in V$ , a una forma  $\langle u| \in \mathbf{V}^*$ , o ambas, y cumple con la linealidad. Esto es:

- ▶  $\forall \quad |v\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle u| \in \mathbf{V}^* \rightarrow \quad \mathcal{T}[\langle u|; |v\rangle] \in \mathbb{C}$
- ▶  $\mathcal{T}[\langle u|; \alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] \equiv$   
 $\alpha \mathcal{T}[\langle u|; |v_1\rangle] + \beta \mathcal{T}[\langle u|; |v_2\rangle] \quad \forall |v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle u| \in \mathbf{V}^*$
- ▶  $\mathcal{T}[\zeta \langle u_1| + \xi \langle u_2|; |v\rangle] \equiv \zeta \mathcal{T}[\langle u_1|; |v\rangle] +$   
 $\xi \mathcal{T}[\langle u_2|; |v\rangle] \quad \forall |v\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle u_1|, \langle u_2| \in \mathbf{V}^*$
- ▶ Un tensor es un funcional generalizado cuyos argumentos son vectores y/o formas

# Tensores: Funcionales Bilineales 1/2

Definiremos como un tensor a un funcional lineal (bilineal en este caso) que asocia un elemento del Campo  $\mathbf{K}$ , complejo o real, a un vector  $|v\rangle \in V$ , a una forma  $\langle u| \in \mathbf{V}^*$ , o ambas, y cumple con la linealidad. Esto es:

- ▶  $\forall \quad |v\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle u| \in \mathbf{V}^* \rightarrow \quad \mathcal{T}[\langle u|; |v\rangle] \in \mathbb{C}$
- ▶  $\mathcal{T}[\langle u|; \alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] \equiv$   
 $\alpha \mathcal{T}[\langle u|; |v_1\rangle] + \beta \mathcal{T}[\langle u|; |v_2\rangle] \quad \forall |v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle u| \in \mathbf{V}^*$
- ▶  $\mathcal{T}[\zeta \langle u_1| + \xi \langle u_2|; |v\rangle] \equiv \zeta \mathcal{T}[\langle u_1|; |v\rangle] +$   
 $\xi \mathcal{T}[\langle u_2|; |v\rangle] \quad \forall |v\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle u_1|, \langle u_2| \in \mathbf{V}^*$
- ▶ Un tensor es un funcional generalizado cuyos argumentos son vectores y/o formas
- ▶  $\mathcal{T}[\circ; \bullet]$  es una cantidad con dos “puestos” y una vez “cubiertos” se convierte en un escalar (complejo o real).

## Tensores: Funcionales Multilineales 2/2

- En general

$$\mathcal{T} \left[ \begin{array}{c} |v_1\rangle \quad |v_2\rangle \quad \quad \quad |v_n\rangle \quad \langle u_1| \quad \langle u_2| \quad \quad \quad \langle u_m| \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ \circ \quad \circ \quad \quad \quad \circ \quad \bullet \quad \bullet \quad \quad \quad \bullet \end{array} \right] \in \mathbb{C} \quad \text{tensor de tipo } \left( \begin{array}{c} m \\ n \end{array} \right).$$

# Tensores: Funcionales Multilineales 2/2

- En general

$$\mathcal{T} \left[ \begin{array}{c} |v_1\rangle \quad |v_2\rangle \quad \dots \quad |v_n\rangle \quad \langle u_1| \quad \langle u_2| \quad \dots \quad \langle u_m| \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \dots \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \dots \quad \downarrow \\ \circ \quad \circ \quad \dots \quad \circ \quad \bullet \quad \bullet \quad \dots \quad \bullet \end{array} \right] \in \mathbb{C} \quad \text{tensor de tipo } \left( \begin{array}{c} m \\ n \end{array} \right).$$

$$\text{► } \mathcal{T} : \underbrace{\mathbf{V}^* \times \mathbf{V}^* \dots \mathbf{V}^* \times \mathbf{V}^*}_{\mathbf{V}^{*m}} \times \underbrace{\mathbf{V} \times \mathbf{V} \dots \mathbf{V} \times \mathbf{V}}_{\mathbf{V}^n} \rightarrow \mathbb{C}$$

## Tensores: Funcionales Multilineales 2/2

- En general

$$\mathcal{T} \left[ \begin{array}{c} |v_1\rangle \quad |v_2\rangle \quad \dots \quad |v_n\rangle \quad \langle u_1| \quad \langle u_2| \quad \dots \quad \langle u_m| \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \dots \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \dots \quad \downarrow \\ \circ \quad \circ \quad \dots \quad \circ \quad \bullet \quad \bullet \quad \dots \quad \bullet \end{array} \right] \in \mathbb{C} \quad \text{tensor de tipo } \left( \begin{array}{c} m \\ n \end{array} \right).$$

$$\mathcal{T} : \underbrace{\mathbf{V}^* \times \mathbf{V}^* \dots \mathbf{V}^* \times \mathbf{V}^*}_{\mathbf{V}^{*m}} \times \underbrace{\mathbf{V} \times \mathbf{V} \dots \mathbf{V} \times \mathbf{V}}_{\mathbf{V}^n} \rightarrow \mathbb{C}$$

- **Un vector** es un tensor del tipo  $\left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) \Rightarrow \mathcal{T} \left[ \begin{array}{c} \langle u| \\ \downarrow \\ \bullet \end{array} \right] \in \mathbb{C}.$

- **Una forma** es un tensor del tipo  $\left( \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) \Rightarrow \mathcal{T} \left[ \begin{array}{c} |v\rangle \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \right] \in \mathbb{C}.$

- **Un escalar** es un tensor del tipo  $\left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) \in \mathbb{C}.$



# Producto Tensorial: Definición

Dados  $\mathbf{E}_1$  y  $\mathbf{E}_2$  dos espacios vectoriales con dimensiones  $n_1$  y  $n_2$ , respectivamente y vectores genéricos,  $|\varphi(1)\rangle \in \mathbf{E}_1$  y  $|\chi(2)\rangle \in \mathbf{E}_2$ .

- ▶ Definiremos el *producto tensorial* (*exterior o directo*) de espacios vectoriales,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2$ , si a cada par de vectores  $|\varphi(1)\rangle$  y  $|\chi(2)\rangle$  le asociamos un tensor tipo  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

# Producto Tensorial: Definición

Dados  $\mathbf{E}_1$  y  $\mathbf{E}_2$  dos espacios vectoriales con dimensiones  $n_1$  y  $n_2$ , respectivamente y vectores genéricos,  $|\varphi(1)\rangle \in \mathbf{E}_1$  y  $|\chi(2)\rangle \in \mathbf{E}_2$ .

- ▶ Definiremos el *producto tensorial (exterior o directo)* de espacios vectoriales,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2$ , si a cada par de vectores  $|\varphi(1)\rangle$  y  $|\chi(2)\rangle$  le asociamos un tensor tipo  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- ▶ Si se cumple que  $|\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle \Leftrightarrow$

$$\mathcal{T} \left[ \begin{array}{c|c} \langle \zeta(1) | & \langle \xi(2) | \\ \downarrow & \downarrow \\ \bullet & \bullet \end{array} \right] = \langle \zeta(1) | \varphi(1) \rangle \langle \xi(2) | \chi(2) \rangle \in \mathbb{C}$$

# Producto Tensorial: Propiedades

- La suma entre tensores de **E** viene definida como:

$$\begin{aligned} |\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle &= |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2)\rangle \\ &= |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + \xi(2)\rangle ; \end{aligned}$$

# Producto Tensorial: Propiedades

- ▶ La suma entre tensores de **E** viene definida como:

$$\begin{aligned} |\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle &= |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2)\rangle \\ &= |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + \xi(2)\rangle ; \end{aligned}$$

- ▶ El producto tensorial es lineal respecto a la multiplicación con números reales  $\lambda$  y  $\mu$

$$\begin{aligned} [|\lambda\varphi(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle &= [\lambda |\varphi(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle = \lambda [|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle] \\ |\varphi(1)\rangle \otimes [|\mu\chi(2)\rangle] &= |\varphi(1)\rangle \otimes [\mu |\chi(2)\rangle] = \mu [|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle] \end{aligned}$$

# Producto Tensorial: Propiedades

- ▶ La suma entre tensores de **E** viene definida como:

$$\begin{aligned} |\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle &= |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2)\rangle \\ &= |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + \xi(2)\rangle ; \end{aligned}$$

- ▶ El producto tensorial es lineal respecto a la multiplicación con números reales  $\lambda$  y  $\mu$

$$\begin{aligned} [|\lambda\varphi(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle &= [\lambda |\varphi(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle = \lambda [|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle] \\ |\varphi(1)\rangle \otimes [|\mu\chi(2)\rangle] &= |\varphi(1)\rangle \otimes [\mu |\chi(2)\rangle] = \mu [|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle] \end{aligned}$$

- ▶ El producto tensorial es distributivo respecto a la suma:

$$\begin{aligned} |\varphi(1)\rangle \otimes [|\chi_1(2)\rangle + |\chi_2(2)\rangle] &= |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi_1(2)\rangle + |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi_2(2)\rangle \\ [|\varphi_1(1)\rangle + |\varphi_2(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle &= |\varphi_1(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + |\varphi_2(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle \end{aligned}$$

# Producto Tensorial: Espacio Tensorial

- ▶ Dados  $|\varphi(1)\chi(2)\rangle, |\phi(1)\xi(2)\rangle, |\omega(1)\theta(2)\rangle, \in \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2$   
entonces la operación suma  $\boxplus$

# Producto Tensorial: Espacio Tensorial

- ▶ Dados  $|\varphi(1)\chi(2)\rangle, |\phi(1)\xi(2)\rangle, |\omega(1)\theta(2)\rangle, \in \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2$  entonces la operación suma  $\boxplus$ 
  - ▶ es cerrada
  - ▶ es conmutativa y asociativa
  - ▶ Existe un único elemento neutro:  $|0(1)0(2)\rangle$
  - ▶ Existe un elemento simétrico para cada elemento:  
 $|\varphi(1)\chi(2)\rangle \Leftrightarrow -|\varphi(1)\chi(2)\rangle$
  - ▶ Cumple con las propiedades de multiplicación por números

# Producto Tensorial: Espacio Tensorial

- ▶ Dados  $|\varphi(1)\chi(2)\rangle, |\phi(1)\xi(2)\rangle, |\omega(1)\theta(2)\rangle, \in \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2$  entonces la operación suma  $\boxplus$ 
  - ▶ es cerrada
  - ▶ es conmutativa y asociativa
  - ▶ Existe un único elemento neutro:  $|0(1)0(2)\rangle$
  - ▶ Existe un elemento simétrico para cada elemento:  
 $|\varphi(1)\chi(2)\rangle \Leftrightarrow -|\varphi(1)\chi(2)\rangle$
  - ▶ Cumple con las propiedades de multiplicación por números
- ▶  $\langle \tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2) | \varphi(1)\chi(2) \rangle = \langle \tilde{\varphi}(1) | \varphi(1) \rangle \cdot \langle \tilde{\chi}(2) | \chi(2) \rangle$  NO es producto interno



# Producto Tensorial: Espacio Tensorial

- ▶ Dados  $|\varphi(1)\chi(2)\rangle, |\phi(1)\xi(2)\rangle, |\omega(1)\theta(2)\rangle, \in \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2$  entonces la operación suma  $\boxplus$ 
  - ▶ es cerrada
  - ▶ es conmutativa y asociativa
  - ▶ Existe un único elemento neutro:  $|0(1)0(2)\rangle$
  - ▶ Existe un elemento simétrico para cada elemento:  
 $|\varphi(1)\chi(2)\rangle \Leftrightarrow -|\varphi(1)\chi(2)\rangle$
  - ▶ Cumple con las propiedades de multiplicación por números
- ▶  $\langle \tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2) | \varphi(1)\chi(2) \rangle = \langle \tilde{\varphi}(1) | \varphi(1) \rangle \cdot \langle \tilde{\chi}(2) | \chi(2) \rangle$  NO es producto interno
- ▶ Si  $\{|u_i(1)\rangle\}$  y  $\{|v_j(2)\rangle\}$  bases discretas para  $\mathbf{E}_1$  y  $\mathbf{E}_2$  entonces  $|u_i(1)v_j(2)\rangle = |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle$  será base para  $\mathbf{E}$

# Producto Tensorial: Espacio Tensorial

- ▶ Dados  $|\varphi(1)\chi(2)\rangle, |\phi(1)\xi(2)\rangle, |\omega(1)\theta(2)\rangle, \in \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2$  entonces la operación suma  $\boxplus$ 
  - ▶ es cerrada
  - ▶ es conmutativa y asociativa
  - ▶ Existe un único elemento neutro:  $|0(1)0(2)\rangle$
  - ▶ Existe un elemento simétrico para cada elemento:  
 $|\varphi(1)\chi(2)\rangle \Leftrightarrow -|\varphi(1)\chi(2)\rangle$
  - ▶ Cumple con las propiedades de multiplicación por números
- ▶  $\langle \tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2) | \varphi(1)\chi(2) \rangle = \langle \tilde{\varphi}(1) | \varphi(1) \rangle \cdot \langle \tilde{\chi}(2) | \chi(2) \rangle$  NO es producto interno
- ▶ Si  $\{|u_i(1)\rangle\}$  y  $\{|v_j(2)\rangle\}$  bases discretas para  $\mathbf{E}_1$  y  $\mathbf{E}_2$  entonces  $|u_i(1)v_j(2)\rangle = |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle$  será base para  $\mathbf{E}$
- ▶ Entonces un tensor genérico

$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle = \varphi^i \chi^j |u_i(1)v_j(2)\rangle = c^{ij} |u_i(1)v_j(2)\rangle$$

## Ejemplo

- Definimos la siguiente operación:  $\mathbf{M}_{31} \otimes \mathbf{M}_{13} = \mathbf{M}_{33}$

$$|v \ u\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \otimes (y_1 \ y_2 \ y_3) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{pmatrix}.$$

Es un funcional bilineal

## Ejemplo

- Definimos la siguiente operación:  $\mathbf{M}_{31} \otimes \mathbf{M}_{13} = \mathbf{M}_{33}$

$$|v \ u\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \otimes (y_1 \ y_2 \ y_3) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{pmatrix}.$$

Es un funcional bilineal

- Si  $|e_1(1)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $|e_2(1)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $|e_3(1)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

base para  $\mathbf{V}^1$  y

$$\langle e_1(2)| = (1\ 0\ 0), \langle e_2(2)| = (0\ 1\ 0), \langle e_3(2)| = (0\ 0\ 1)$$

base para  $\mathbf{V}^{2*}$  entonces podemos construir:

$$|e_1(1)\rangle \otimes \langle e_1(2)| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, |e_1(1)\rangle \otimes \langle e_2(2)| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

...

# Tensores, componentes y contracciones

- Las componentes de un tensor  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  serán

$$S_{ijk}^{mn} = \mathcal{S} \left[ \begin{array}{c} |u_i(1)\rangle \quad |v_j(2)\rangle \quad |w_k(3)\rangle \quad \langle x^m(1)| \quad \langle y^n(2)| \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \circ \quad , \quad \circ \quad , \quad \circ \quad ; \quad \bullet \quad , \quad \bullet \end{array} \right] .$$

# Tensores, componentes y contracciones

- ▶ Las componentes de un tensor  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  serán

$$S_{ijk}^{mn} = \mathcal{S} \left[ \begin{array}{ccc|cc} |u_i(1)\rangle & |v_j(2)\rangle & |w_k(3)\rangle & \langle x^m(1)| & \langle y^n(2)| \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \circ & , & \circ & ; & \bullet & , & \bullet \end{array} \right] .$$

- ▶ Combinaciones lineales de tensores  $R_{kl}^{ij} = \alpha Q_{kl}^{ij} + \beta P_{kl}^{ij}$ .

# Tensores, componentes y contracciones

- ▶ Las componentes de un tensor  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  serán

$$S_{ijk}^{mn} = \mathcal{S} \left[ \begin{array}{ccc|cc} |u_i(1)\rangle & |v_j(2)\rangle & |w_k(3)\rangle & \langle x^m(1)| & \langle y^n(2)| \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \circ & , & \circ & ; & \bullet & , & \bullet \end{array} \right] .$$

- ▶ Combinaciones lineales de tensores  $R_{kl}^{ij} = \alpha Q_{kl}^{ij} + \beta P_{kl}^{ij}$ .
- ▶ Producto tensorial de tensores  $R_k^{ijlm} = T^{ij} P_k^{lm}$

# Tensores, componentes y contracciones

- ▶ Las componentes de un tensor  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  serán

$$S_{ijk}^{mn} = \mathcal{S} \left[ \begin{array}{ccc|cc} |u_i(1)\rangle & |v_j(2)\rangle & |w_k(3)\rangle & \langle x^m(1)| & \langle y^n(2)| \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \circ & , & \circ & ; & \bullet & , & \bullet \end{array} \right] .$$

- ▶ Combinaciones lineales de tensores  $R_{kl}^{ij} = \alpha Q_{kl}^{ij} + \beta P_{kl}^{ij}$ .
- ▶ Producto tensorial de tensores  $R_k^{ijlm} = T^{ij} P_k^{lm}$
- ▶ Contracción de un tensor. dos tensores,  $P^{lm}$  y  $Q_{zk}^{ij}$  generarán componentes de nuevos tensores  $R_k^{lij} = P^{lm} Q_{mk}^{ij}$ :

$$\left. \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{lm} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Q_{zk}^{ij} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R_k^{lij} = P^{lm} Q_{mk}^{ij} .$$



# Simetrización de tensores

- Un tensor (las componentes) será simétrico respecto a dos de sus índices si su permutación no cambia su valor:

$$S_{ij} = S_{ji}, \quad S^{ij} = S^{ji}, \quad S_{ij\dots kl\dots mn} = S_{ij\dots lk\dots mn}, \quad S^{ij\dots kl\dots mn} = S^{ij\dots lk\dots mn}$$

y será antisimétrico si:

$$A_{ij} = -A_{ji}, \quad A^{ij} = -A^{ji}, \quad A_{ij\dots kl\dots mn} = -A_{ij\dots lk\dots mn}, \\ A^{ij\dots kl\dots mn} = -A^{ij\dots lk\dots mn}.$$

# Simetrización de tensores

- Un tensor (las componentes) será simétrico respecto a dos de sus índices si su permutación no cambia su valor:

$$S_{ij} = S_{ji}, \quad S^{ij} = S^{ji}, \quad S_{ij\dots kl\dots mn} = S_{ij\dots lk\dots mn}, \quad S^{ij\dots kl\dots mn} = S^{ij\dots lk\dots mn}$$

y será antisimétrico si:

$$A_{ij} = -A_{ji}, \quad A^{ij} = -A^{ji}, \quad A_{ij\dots kl\dots mn} = -A_{ij\dots lk\dots mn}, \\ A^{ij\dots kl\dots mn} = -A^{ij\dots lk\dots mn}.$$

- Un tensor de rango 2, viene representado por una matriz que tendrá  $3^2 = 9$  componentes. Si la matriz es simétrica tendrá como máximo 6 componentes distintas.

$$S_j^i = S_i^j = \begin{pmatrix} S_1^1 & S_2^1 & S_3^1 \\ S_1^2 & S_2^2 & S_3^2 \\ S_1^3 & S_2^3 & S_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1^1 & S_2^1 & S_3^1 \\ S_2^1 & S_2^2 & S_2^3 \\ S_3^1 & S_2^2 & S_3^3 \end{pmatrix}.$$

¿Cuántas componentes independientes tiene un tensor antisimétrico de rango 2?

# Simetrización de tensores

- Siempre es posible construir tensores simétricos y antisimétricos a partir de un tensor genérico. Esto es:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji}) \equiv T_{(ij)} \quad \Longleftrightarrow$$

$$S_{ij\dots kl\dots mn} = \frac{1}{2} (T_{ij\dots kl\dots mn} + T_{ij\dots lk\dots mn}) = T_{ij\dots (kl)\dots mn}$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji}) \equiv T_{[ij]} \quad \Longleftrightarrow$$

$$A_{ij\dots kl\dots mn} = \frac{1}{2} (T_{ij\dots kl\dots mn} - T_{ij\dots lk\dots mn}) = T_{ij\dots [kl]\dots mn}.$$

# Simetrización de tensores

- ▶ Siempre es posible construir tensores simétricos y antisimétricos a partir de un tensor genérico. Esto es:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji}) \equiv T_{(ij)} \quad \Longleftrightarrow$$

$$S_{ij\dots kl\dots mn} = \frac{1}{2} (T_{ij\dots kl\dots mn} + T_{ij\dots lk\dots mn}) = T_{ij\dots (kl)\dots mn}$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji}) \equiv T_{[ij]} \quad \Longleftrightarrow$$

$$A_{ij\dots kl\dots mn} = \frac{1}{2} (T_{ij\dots kl\dots mn} - T_{ij\dots lk\dots mn}) = T_{ij\dots [kl]\dots mn}.$$

- ▶ Es evidente que las componentes de un tensor genérico,  $T_{ij}$ , pueden expresarse como una combinación de su parte simétrica y antisimétrica:

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij}.$$

# ¿ Qué vimos ?

- ▶ Tensores como funcionales multilineales
- ▶ Producto tensorial: definición, propiedades
- ▶ Espacios tensoriales
- ▶ Bases y componentes de tensores
- ▶ Propiedades de las componentes de los tensores
  - ▶ Contracción y expansión de componente
  - ▶ Simetrización y antisimetrización de componentes