Autovectores: Ejemplos

L. A. Núñez
Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

24 de septiembre de 2020

Agenda de Ejemplos Autovectores/Autovalores

Reflexión respecto al plano

Rotaciones y proyecciones

¿ Qué presentamos ?

Para la discusión

Reflexión respecto al plano

Reflexión respecto al plano *xy*. Si $\mathbb{R} : \mathbf{V}^3 \rightarrow \mathbf{V}^3$ es tal que $\mathbb{R} |\psi\rangle = \left|\tilde{\psi}\right\rangle$, una reflexión en el plano *xy*. Esto es

$$\mathbb{R} |\mathrm{i}\rangle = |\mathrm{i}\rangle ; \quad \mathbb{R} |\mathrm{j}\rangle = |\mathrm{j}\rangle ; \quad \mathbb{R} |\mathrm{k}\rangle = - |\mathrm{k}\rangle \ ,$$

con $|\mathrm{i}\rangle , |\mathrm{j}\rangle , |\mathrm{k}\rangle$ vectores unitarios cartesianos. Cualquier vector en el plano *xy* será autovector de $\mathbb{R}$ con un autovalor $\lambda = 1$, mientras que cualquier otro vector $|\psi\rangle \in \mathbf{V}^3$, que no esté en el plano, cumple con $|\psi\rangle = c |\mathrm{k}\rangle$ y también será autovector de $\mathbb{R}$ pero esta vez con un autovalor $\lambda = -1$.

Rotaciones y proyecciones

1. La rotaciones de un vector en el plano pueden verse de dos maneras.

Rotaciones y proyecciones

1. La rotaciones de un vector en el plano pueden verse de dos maneras.
   1.1 Se considera el plano como un espacio vectorial *real* $\mathbf{V}^2$ con una base cartesiana: $|\mathrm{i}\rangle = (1,0)\,,\ \ |\mathrm{j}\rangle = (0,1)$, esto es: $\mathbb{R}\,|a\rangle = \lambda\,|a\rangle \ \Rightarrow$ el ángulo de rotación $= n\pi\,,$ con n entero.

Rotaciones y proyecciones

1. La rotaciones de un vector en el plano pueden verse de dos maneras.
   1.1 Se considera el plano como un espacio vectorial *real* $\mathbf{V}^2$ con una base cartesiana: $|\mathrm{i}\rangle = (1,0)\,, \ \ |\mathrm{j}\rangle = (0,1)$, esto es: $\mathbb{R}\,|a\rangle = \lambda\,|a\rangle \ \Rightarrow$ el ángulo de rotación $= n\pi\,,$ con n entero.
   1.2 Igualmente si consideramos el plano complejo unidimensional, expresemos cualquier vector en el plano en su forma polar $|z\rangle = r\mathrm{e}^{i\theta}$ por lo cual: $\mathbb{R}\,|z\rangle = r\mathrm{e}^{i(\theta+\alpha)} = \mathrm{e}^{i\alpha}\,|z\rangle$, si queremos $\lambda = \mathrm{e}^{i\alpha}$ reales, necesariamente $\alpha = n\pi$ con n entero.

Rotaciones y proyecciones

1. La rotaciones de un vector en el plano pueden verse de dos maneras.
   1.1 Se considera el plano como un espacio vectorial *real* $\mathbf{V}^2$ con una base cartesiana: $|\mathrm{i}\rangle = (1,0)$, $|\mathrm{j}\rangle = (0,1)$, esto es: $\mathbb{R}\,|a\rangle = \lambda\,|a\rangle \;\Rightarrow\;$ el ángulo de rotación $= n\pi$, con n entero.
   1.2 Igualmente si consideramos el plano complejo unidimensional, expresemos cualquier vector en el plano en su forma polar $|z\rangle = r\mathrm{e}^{i\theta}$ por lo cual: $\mathbb{R}\,|z\rangle = r\mathrm{e}^{i(\theta+\alpha)} = \mathrm{e}^{i\alpha}\,|z\rangle$, si queremos $\lambda = \mathrm{e}^{i\alpha}$ reales, necesariamente $\alpha = n\pi$ con n entero.
2. Dado $P_\psi = |\psi\rangle\,\langle\psi|$ y con una ecuación de autovalores para un $|\varphi\rangle$ arbitrario

Rotaciones y proyecciones

1. La rotaciones de un vector en el plano pueden verse de dos maneras.
    1.1 Se considera el plano como un espacio vectorial *real* $\mathbf{V}^2$ con una base cartesiana: $|\mathrm{i}\rangle = (1,0)\,, \;\; |\mathrm{j}\rangle = (0,1)$, esto es: $\mathbb{R}\,|a\rangle = \lambda\,|a\rangle \;\Rightarrow\;$ el ángulo de rotación $= n\pi\,,$ con n entero.
    1.2 Igualmente si consideramos el plano complejo unidimensional, expresemos cualquier vector en el plano en su forma polar $|z\rangle = r\mathrm{e}^{i\theta}$ por lo cual: $\mathbb{R}\,|z\rangle = r\mathrm{e}^{i(\theta+\alpha)} = \mathrm{e}^{i\alpha}\,|z\rangle$, si queremos $\lambda = \mathrm{e}^{i\alpha}$ reales, necesariamente $\alpha = n\pi$ con n entero.
2. Dado $P_\psi = |\psi\rangle\,\langle\psi|$ y con una ecuación de autovalores para un $|\varphi\rangle$ arbitrario
    2.1 Si $P_\psi\,|\varphi\rangle = \lambda\;|\varphi\rangle \;\Rightarrow\; P_\psi\,|\varphi\rangle = (|\psi\rangle\,\langle\psi|)\,|\varphi\rangle \;\Rightarrow\; |\varphi\rangle \propto |\psi\rangle$, entonces, $|\varphi\rangle$ es colineal con $|\psi\rangle$.

Rotaciones y proyecciones

1. La rotaciones de un vector en el plano pueden verse de dos maneras.
   1.1 Se considera el plano como un espacio vectorial *real* $\mathbf{V}^2$ con una base cartesiana: $|\mathrm{i}\rangle = (1,0)\,,\ \ |\mathrm{j}\rangle = (0,1)$, esto es: $\mathbb{R}\,|a\rangle = \lambda\,|a\rangle \ \Rightarrow$ el ángulo de rotación $= n\pi\,,$ con n entero.
   1.2 Igualmente si consideramos el plano complejo unidimensional, expresemos cualquier vector en el plano en su forma polar $|z\rangle = r\mathrm{e}^{i\theta}$ por lo cual: $\mathbb{R}\,|z\rangle = r\mathrm{e}^{i(\theta+\alpha)} = \mathrm{e}^{i\alpha}\,|z\rangle$, si queremos $\lambda = \mathrm{e}^{i\alpha}$ reales, necesariamente $\alpha = n\pi$ con n entero.
2. Dado $P_\psi = |\psi\rangle\,\langle\psi|$ y con una ecuación de autovalores para un $|\varphi\rangle$ arbitrario
   2.1 Si $P_\psi\,|\varphi\rangle = \lambda\ |\varphi\rangle \ \Rightarrow\ P_\psi\,|\varphi\rangle = (|\psi\rangle\,\langle\psi|)\,|\varphi\rangle \ \Rightarrow\ |\varphi\rangle \propto |\psi\rangle$, entonces, $|\varphi\rangle$ es colineal con $|\psi\rangle$.
   2.2 Si ahora el $|\varphi\rangle$ es ortogonal a $|\psi\rangle\,, \langle\psi\,|\varphi\rangle = 0 \ \Rightarrow\ \lambda = 0$,

Rotaciones y proyecciones

1. La rotaciones de un vector en el plano pueden verse de dos maneras.
   1.1 Se considera el plano como un espacio vectorial *real* $\mathbf{V}^2$ con una base cartesiana: $|\mathrm{i}\rangle = (1, 0)\,, \quad |\mathrm{j}\rangle = (0, 1)$, esto es: $\mathbb{R}\,|a\rangle = \lambda\,|a\rangle \;\Rightarrow\;$ el ángulo de rotación $= n\pi\,,\quad$ con n entero.
   1.2 Igualmente si consideramos el plano complejo unidimensional, expresemos cualquier vector en el plano en su forma polar $|z\rangle = r\mathrm{e}^{i\theta}$ por lo cual: $\mathbb{R}\,|z\rangle = r\mathrm{e}^{i(\theta+\alpha)} = \mathrm{e}^{i\alpha}\,|z\rangle$, si queremos $\lambda = \mathrm{e}^{i\alpha}$ reales, necesariamente $\alpha = n\pi$ con n entero.
2. Dado $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ y con una ecuación de autovalores para un $|\varphi\rangle$ arbitrario
   2.1 Si $P_\psi\,|\varphi\rangle = \lambda\;|\varphi\rangle \;\Rightarrow\; P_\psi\,|\varphi\rangle = (|\psi\rangle\langle\psi|)\,|\varphi\rangle \;\Rightarrow\; |\varphi\rangle \propto |\psi\rangle$, entonces, $|\varphi\rangle$ es colineal con $|\psi\rangle$.
   2.2 Si ahora el $|\varphi\rangle$ es ortogonal a $|\psi\rangle\,, \langle\psi\,|\varphi\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 0$,
   2.3 Entonces el espectro del operador $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ es 0 y 1. El primero es degenerado y el segundo es simple.

¿ Qué presentamos ?

Que la ecuación de autovalores puede aplicarse a una variedad de situaciones

1. Reflexiones
2. Rotaciones
3. Proyectores

Para la discusión

Dada la siguiente representación matricial de un operador en la base canónica: $< u^i|\mathbb{M}|u_j >= M^i_j = \begin{pmatrix} 2 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$,

Con $|u_1 >= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |u_2 >= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Encuentre los autovectores $\{|\varphi_1 >, |\varphi_2 >\}$ para ese operador en la base canónica.
2. Encuentre las representaciones matriciales de los operadores proyección sobre los auto espacios, $\mathbb{P}_{|\varphi_i>} = |\varphi_i >< \varphi^i|$, en esa misma base canónica.
3. Encuentre las representaciones matriciales de los operadores proyección sobre los complementos ortogonales de los autoespacios $U^n_m = |\varphi_m >< \varphi^n|$ en esa misma base y con ella calcule $M = M^i_j U^j_i$.