Variedades Lineales:

L. A. Núñez
Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

18 de agosto de 2020

Agenda de Variedades Lineales

Independencia lineal

- Generalizamos el concepto de dependencia e independencia lineal de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Así:
  $|0\rangle = C_1 \ |v_1\rangle + C_2 \ |v_2\rangle + C_3 \ |v_3\rangle \cdots + C_n \ |v_n\rangle = \sum_{i=1}^{n} C_i \ |v_i\rangle$.
  Si $\forall \ C_i = 0$ entonces $\{|v_i\rangle\}$ son linealmente independientes

Independencia lineal

- Generalizamos el concepto de dependencia e independencia lineal de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Así:
$|0\rangle = C_1 \ |v_1\rangle + C_2 \ |v_2\rangle + C_3 \ |v_3\rangle \cdots + C_n \ |v_n\rangle = \sum_{i=1}^{n} C_i \ |v_i\rangle$.
Si $\forall \ C_i = 0$ entonces $\{|v_i\rangle\}$ son linealmente independientes
- Un conjunto $\mathcal{B} = \{|v_1\rangle \, , \ |v_2\rangle \, , \cdots \, , |v_n\rangle\} \in \mathbf{V}$, serán base de $\mathbf{V}$ si los $|v_1\rangle \, , \ |v_2\rangle \, , \cdots \, , |v_n\rangle$ si son linealmente independientes

Independencia lineal

- Generalizamos el concepto de dependencia e independencia lineal de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Así:
  $|0\rangle = C_1 \ |v_1\rangle + C_2 \ |v_2\rangle + C_3 \ |v_3\rangle \cdots + C_n \ |v_n\rangle = \sum_{i=1}^{n} C_i \ |v_i\rangle$.
  Si $\forall \ C_i = 0$ entonces $\{|v_i\rangle\}$ son linealmente independientes
- Un conjunto $\mathcal{B} = \{|v_1\rangle , \ |v_2\rangle , \cdots , |v_n\rangle\} \in \mathbf{V}$, serán base de $\mathbf{V}$ si los $|v_1\rangle , \ |v_2\rangle , \cdots , |v_n\rangle$ si son linealmente independientes
- Dentro de un espacio vectorial $\mathbf{V}$ se puedan encontrar subespacios y sub-bases, si $\forall \ |x\rangle \in \mathbf{V}$:
  $$|x\rangle = \underbrace{C_1 \ |v_1\rangle \cdots + C_{n-j} \ |v_{n-j}\rangle}_{\mathbf{S}_1} + \underbrace{C_{n-j+1} \ |v_{n-j+1}\rangle \cdots C_{n-k} \ |v_{n-k}\rangle}_{\mathbf{S}_2} + \underbrace{C_{n-k+1} \ |v_{n-k+1}\rangle \cdots C_n \ |v_n\rangle}_{\mathbf{S}_3}$$
  $$|x\rangle = |x_1\rangle + |x_2\rangle + |x_3\rangle \quad \text{y} \quad |x_1\rangle \in \mathbf{S}_1; \quad |x_2\rangle \in \mathbf{S}_2; \quad |x_3\rangle \in \mathbf{S}_3 \,,$$
  entonces $\mathbf{V} = \mathbf{S}_1 \oplus \mathbf{S}_2 \oplus \mathbf{S}_3$.

Determinante de Gram

Si $\{|v_1\rangle\,,\ |v_2\rangle\,,\cdots,|v_n\rangle\} \in \mathbf{V}\,.$

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} C_i\ |v_i\rangle\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} C_1\ \langle v_1\,|v_1\rangle + \cdots + C_n\ \langle v_1\,|v_n\rangle & = \langle v_1\,|x\rangle \\ C_1\ \langle v_2\,|v_1\rangle + \cdots + C_n\ \langle v_2\,|v_n\rangle & = \langle v_2\,|x\rangle \\ \vdots & \vdots \\ C_1\ \langle v_n\,|v_1\rangle + \cdots + C_n\ \langle v_n\,|v_n\rangle & = \langle v_n\,|x\rangle \end{array} \right.$$

Entonces

$$\left| \begin{array}{ccccc} \langle v_1\,|v_1\rangle & \langle v_1\,|v_2\rangle & \langle v_1\,|v_3\rangle & \cdots & \langle v_1\,|v_n\rangle \\ \langle v_2\,|v_1\rangle & \langle v_2\,|v_2\rangle & \langle v_2\,|v_3\rangle & \cdots & \langle v_2\,|v_n\rangle \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \langle v_n\,|v_1\rangle & \langle v_n\,|v_2\rangle & \langle v_n\,|v_3\rangle & \cdots & \langle v_n\,|v_n\rangle \end{array} \right| \neq 0$$

Bases Ortogonales

- Un conjunto $\{|e_1\rangle, \ |e_2\rangle, \ \cdots, |e_n\rangle\}$ será **ortogonal**, si

  $$\langle e_i | e_j\rangle = \delta_{ij} \, \| |e_j\rangle \|^2 \, , \; i, j = 1, 2, 3, \cdots, n \;\; \text{con} \; \left\{ \begin{array}{l} \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j \end{array} \right.$$

  y **ortonormal** si $\| |e_j\rangle \|^2 = 1$.

Bases Ortogonales

- Un conjunto $\{|\mathrm{e}_1\rangle\,,\ |\mathrm{e}_2\rangle\,,\ \cdots\,, |\mathrm{e}_n\rangle\}$ será **ortogonal**, si

  $$\langle \mathrm{e}_i\,|\mathrm{e}_j\rangle = \delta_{ij}\,\||\mathrm{e}_j\rangle\|^2\,,\ i,j = 1,2,3,\cdots,n \ \text{ con } \left\{ \begin{array}{l} \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j \end{array} \right.$$

  y **ortonormal** si $\||\mathrm{e}_j\rangle\|^2 = 1$.
- Un conjunto ortogonal $\{|\mathrm{e}_1\rangle\,,\ |\mathrm{e}_2\rangle\,,\cdots\,, |\mathrm{e}_n\rangle\} \in \mathbf{V}$ es linealmente independiente y por lo tanto **base** de $\mathbf{V}$.

Bases Ortogonales

- Un conjunto $\{|\mathrm{e}_1\rangle\,,\ |\mathrm{e}_2\rangle\,,\ \cdots\,, |\mathrm{e}_n\rangle\}$ será **ortogonal**, si

$$\langle \mathrm{e}_i\,|\mathrm{e}_j\rangle = \delta_{ij}\,\| |\mathrm{e}_j\rangle \|^2\,,\ i,j = 1,2,3,\cdots,n \ \text{ con } \left\{ \begin{array}{l} \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j \end{array} \right.$$

  y **ortonormal** si $\| |\mathrm{e}_j\rangle \|^2 = 1$.
- Un conjunto ortogonal $\{|\mathrm{e}_1\rangle\,,\ |\mathrm{e}_2\rangle\,,\cdots,|\mathrm{e}_n\rangle\} \in \mathbf{V}$ es linealmente independiente y por lo tanto **base** de **V**.
- Si $\{|\mathrm{e}_1\rangle\,,\ |\mathrm{e}_2\rangle\,,\cdots,|\mathrm{e}_n\rangle\}$ base ortogonal de **V**, entonces

$$\forall\,|x\rangle \in \mathbf{V} \ \Rightarrow\ |x\rangle = \sum_{i=1}^{n} C_i\ |\mathrm{e}_i\rangle \ \Rightarrow\ \langle \mathrm{e}_j\,|x\rangle = \langle \mathrm{e}_j|\left[\sum_{i=1}^{n} C_i\ |\mathrm{e}_i\rangle\right] \Rightarrow$$

$$C_j = \frac{\langle \mathrm{e}_j\,|x\rangle}{\langle \mathrm{e}_j\,|e_j\rangle} = \frac{\langle \mathrm{e}_j\,|x\rangle}{\| |\mathrm{e}_j\rangle \|^2}$$

- Si $\{|\hat{\mathrm{e}}_1\rangle\,,\ |\hat{\mathrm{e}}_2\rangle\,,\cdots,|\hat{\mathrm{e}}_n\rangle\} \in \mathbf{V}^n$, base ortonormal: $\| |\hat{\mathrm{e}}_j\rangle \|^2 = 1$, entonces $C_j = \langle \hat{\mathrm{e}}_j\,|x\rangle \ \Rightarrow\ |x\rangle = \sum_{i=1}^{n} C_i\ |\hat{\mathrm{e}}_i\rangle =$

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \hat{\mathrm{e}}_i\,|x\rangle\ |\hat{\mathrm{e}}_i\rangle \equiv \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |\hat{\mathrm{e}}_i\rangle \langle \hat{\mathrm{e}}_i|}\,|x\rangle\ .$$

Ortogonalización

A partir de un conjunto de vectores linealmente independientes, $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \cdots, |v_n\rangle\}$ siempre se podrá construir un conjunto ortogonal de vectores, $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \cdots, |e_n\rangle\}$, de la siguiente forma:

$$|e_1\rangle \equiv |v_1\rangle$$

$$|e_2\rangle \equiv |v_2\rangle - \frac{\langle v_2 | e_1\rangle}{\langle e_1 | e_1\rangle}|e_1\rangle \qquad \langle e_2 | e_1\rangle = 0$$

$$|e_3\rangle \equiv |v_3\rangle - \frac{\langle v_3 | e_2\rangle}{\langle e_2 | e_2\rangle}|e_2\rangle - \frac{\langle v_3 | e_1\rangle}{\langle e_1 | e_1\rangle}|e_1\rangle \qquad \left\{\begin{array}{l} \langle e_3 | e_1\rangle = 0 \\ \langle e_3 | e_2\rangle = 0 \end{array}\right.$$

$$|e_4\rangle \equiv |v_4\rangle - \frac{\langle v_4 | e_3\rangle}{\langle e_3 | e_3\rangle}|e_3\rangle - \frac{\langle v_4 | e_2\rangle}{\langle e_2 | e_2\rangle}|e_2\rangle - \frac{\langle v_4 | e_1\rangle}{\langle e_1 | e_1\rangle}|e_1\rangle \qquad \left\{\begin{array}{l} \langle e_4 | e_1\rangle = 0 \\ \langle e_4 | e_2\rangle = 0 \\ \langle e_4 | e_3\rangle = 0 \end{array}\right.$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$|e_n\rangle \equiv |v_n\rangle - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\langle v_n | e_i\rangle}{\langle e_i | e_i\rangle}|e_i\rangle \qquad \left\{\begin{array}{l} \langle e_4 | e_1\rangle = 0 \\ \langle e_4 | e_2\rangle = 0 \\ \langle e_4 | e_3\rangle = 0 \\ \vdots \end{array}\right.$$

¿ Qué presentamos ?

1. El concepto de dependencia e independencia lineal generalizado
2. Determinante de Gram para identificar independencia lineal
3. Bases, subespacio y sub-bases
4. Bases ortogonales
5. Métodos de Ortogonalización de Gram-Schmidt

Para la discusión

1. Encontrar la proyección perpendicular de los siguientes vectores en $\mathcal{C}_{[-1,1]}$ (espacio de funciones continuas en el intervalo [-1,1]) al subespacio generado por los polinomios: $\{1, x, x^2 - 1\}$. Calcular la distancia de cada una de estas funciones al subespacio mencionado.
   1.1 $f(x) = x^n$, n entero.
   1.2 $f(x) = \text{sen}(x)$.
   1.3 $f(x) = 3x^2$.
2. Utilizando **Maxima** suponga el espacio de polinomios, $\mathcal{P}^n$, de grado $g \leq n$ definidos en el intervalo $[-1, 1]$. Este espacio vectorial tendrá como una posible base a $\{|\pi_i\rangle\} = \left\{1, t, t^2, t^3, \cdots, t^n\right\}$, considere el producto interno definido por: $\langle f | g \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; f(x) \; g(x) \sqrt{1 - x^2}$. Encuentre la base ortogonal correspondiente. A esta nueva base se le conoce como polinomios de Chebyshev de segunda especie[1].

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev_polynomials