Un ejemplo:
Representación Matricial de Operadores

L. A. Núñez
Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

24 de septiembre de 2020

Agenda de Un ejemplo: Representación Matricial Operador

Los Operadores de Pauli

Bases y representaciones de operadores

Transformaciones de representaciones de operadores

Transforman operadores y vectores

Ejercicios

Los Operadores de Pauli

Expresión matricial para los operadores lineales de Pauli:
$\mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$, definidos como

$$\sigma_z \left|+\right\rangle = \left|+\right\rangle , \qquad \sigma_z \left|-\right\rangle = -\left|-\right\rangle$$
$$\sigma_x \left|+\right\rangle_x = \left|+\right\rangle_x , \qquad \sigma_x \left|-\right\rangle_x = -\left|-\right\rangle_x ,$$
$$\sigma_y \left|+\right\rangle_y = \left|+\right\rangle_y , \qquad \sigma_y \left|-\right\rangle_y = -\left|-\right\rangle_y$$

con la base canónica representada por: $\left|+\right\rangle \leftrightarrows \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \left|-\right\rangle \leftrightarrows \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Además, tenemos otros dos conjuntos de vectores base

$$\left|+\right\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|+\right\rangle + \left|-\right\rangle\right] , \quad \left|-\right\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|+\right\rangle - \left|-\right\rangle\right] ,$$
$$\left|+\right\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|+\right\rangle + i\left|-\right\rangle\right] , \quad \left|-\right\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|+\right\rangle - i\left|-\right\rangle\right] ,$$

y sus formas asociadas $\left\langle +\right| \leftrightarrows (1, 0) \quad \left\langle +\right| \leftrightarrows (0, 1)$

$${}_x\left\langle +\right| = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\left\langle +\right| + \left\langle -\right|\right] , \quad {}_x\left\langle -\right| = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\left\langle +\right| - \left\langle -\right|\right] ,$$
$${}_y\left\langle +\right| = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\left\langle +\right| - i\left\langle -\right|\right] , \quad {}_y\left\langle -\right| = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\left\langle +\right| + i\left\langle -\right|\right] ,$$

Bases y representaciones de operadores

- Es claro que las bases son ortonormales
$$\langle + \,|+\rangle = 1\,, \quad \langle + \,|-\rangle = \langle - \,|+\rangle = 0\,, \quad \langle - \,|-\rangle = 1\,;$$
$${}_x\langle + \,|+\rangle_x = 1\,,\ {}_x\langle + \,|-\rangle_x = {}_x\langle - \,|+\rangle_x = 0\,,\ {}_x\langle - \,|-\rangle_x = 1\,,$$
$${}_y\langle + \,|+\rangle_y = 1\,,\ {}_y\langle + \,|-\rangle_y = {}_y\langle - \,|+\rangle_y = 0\,,\ {}_y\langle - \,|-\rangle_y = 1,$$
- Los vectores $\{|+\rangle\,, |-\rangle\}$ en esas bases son:
$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle_x + |-\rangle_x\right]\,, \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle_x - |-\rangle_x\right]\,,$$
$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle_y + |-\rangle_y\right]\,, \quad |-\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle_y - |-\rangle_y\right].$$
- La representación matricial para $\left(\sigma_z^{(+)(-)}\right)^i_j =$ será:
$$\left(\sigma_z^{(+)(-)}\right)^i_j = \begin{pmatrix} \langle +|\,\sigma_z\,|+\rangle & \langle +|\,\sigma_z\,|-\rangle \\ \langle -|\,\sigma_z\,|+\rangle & \langle -|\,\sigma_z\,|-\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$(\sigma_x)^i_j$ en las bases $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ y $\{|+\rangle_x, |-\rangle_x\}$

La representación matricial de $(\sigma_x)^i_j$ en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ será:

- $\left(\sigma_x^{(+)(-)}\right)^i_j = \begin{pmatrix} \langle +|\,\sigma_x\,|+\rangle & \langle +|\,\sigma_x\,|-\rangle \\ \langle -|\,\sigma_x\,|+\rangle & \langle -|\,\sigma_x\,|-\rangle \end{pmatrix}$, es decir
- $$\left(\sigma_x^{(+)(-)}\right)^i_j = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} [{}_x\langle +| +{}_x\langle -|]\,\sigma_x\,[|+\rangle_x + |-\rangle_x] & [{}_x\langle +| +{}_x\langle -|]\,\sigma_x\,[|+\rangle_x - |-\rangle_x] \\ [{}_x\langle +| -{}_x\langle -|]\,\sigma_x\,[|+\rangle_x + |-\rangle_x] & [{}_x\langle +| -{}_x\langle -|]\,\sigma_x\,[|+\rangle_x - |-\rangle_x] \end{pmatrix},$$
- entonces $$\left(\sigma_x^{(+)(-)}\right)^i_j = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} [{}_x\langle +| +{}_x\langle -|]\,[|+\rangle_x - |-\rangle_x] & [{}_x\langle +| +{}_x\langle -|]\,[|+\rangle_x + |-\rangle_x] \\ [{}_x\langle +| -{}_x\langle -|]\,[|+\rangle_x - |-\rangle_x] & [{}_x\langle +| -{}_x\langle -|]\,[|+\rangle_x + |-\rangle_x] \end{pmatrix}$$
- Finalmente, $\left(\sigma_x^{(+)(-)}\right)^i_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- La representación matricial de $(\sigma_x)^i_j$ en la base $\{|+\rangle_x, |-\rangle_x\}$ será: $\left(\sigma_x^{(+x)(-x)}\right)^i_j = \begin{pmatrix} {}_x\langle +|\,\sigma_x\,|+\rangle_x & {}_x\langle +|\,\sigma_x\,|-\rangle_x \\ {}_x\langle -|\,\sigma_x\,|+\rangle_x & {}_x\langle -|\,\sigma_x\,|-\rangle_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Note que la traza es independiente de la representación $\mathrm{Tr}\left(\sigma_x^{(+)(-)}\right)^i_j \equiv \mathrm{Tr}\left(\sigma_x^{(+x)(-x)}\right)^i_j = 0$; igual el determinante, además es autoadjunta o hermítica.

Transformaciones de representaciones de operadores

- Tenemos un único espacio vectorial, **V**, con dos bases discretas ortonormales $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ y $\{|+\rangle_x, |-\rangle_x\}$ con dos representaciones matriciales para un mismo operador $\left(\sigma_z^{(+)(-)}\right)_j^i$ y $\left(\sigma_x^{(+x)(-x)}\right)_j^i$, respectivamente.
- En general las representaciones de un operador $\tilde{A}_j^i = \langle \tilde{\mathrm{e}}^i | \mathbb{A} | \tilde{\mathrm{e}}_j \rangle$ y $A_j^i = \langle \mathrm{e}^k | \mathbb{A} | \mathrm{e}_m \rangle$, están relacionadas por:
$$\langle \tilde{\mathrm{e}}^i | \mathbb{A} | \tilde{\mathrm{e}}_j \rangle = \underbrace{\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \, | \mathrm{e}_k \rangle}_{S_k^i} \langle \mathrm{e}^k | \mathbb{A} | \mathrm{e}_m \rangle \underbrace{\langle \mathrm{e}^m \, | \tilde{\mathrm{e}}_j \rangle}_{\tilde{S}_j^m} \Leftrightarrow \tilde{A}_j^i = S_k^i \, A_m^k \, \tilde{S}_j^m \, .$$
- Entonces, en nuestro caso, la matriz de transformación
$$\tilde{S}_j^m = \langle \mathrm{e}^m \, | \tilde{\mathrm{e}}_j \rangle = \begin{pmatrix} \langle +| \, +\rangle_x & \langle +| \, -\rangle_x \\ \langle -| \, +\rangle_x & \langle -| \, -\rangle_x \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ y}$$
$$S_j^m = \langle \tilde{\mathrm{e}}^m \, | \mathrm{e}_j \rangle = \begin{pmatrix} {}_x\langle +| \, +\rangle & {}_x\langle +| \, -\rangle \\ {}_x\langle -| \, +\rangle & {}_x\langle -| \, -\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$
- Con lo cual los operadores transformarán
$$\left(\sigma_z^{(+)(-)}\right)_m^l = S_i^l \left(\sigma_z^{(+x)(-x)}\right)_j^i \tilde{S}_m^j \, , \qquad \text{con } \tilde{S}_m^j = \left(S_m^j\right)^{-1}$$

Transformen operadores y vectores

- Como existen dos bases de vectores ortogonales $\{|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle\}$ y $\{|\mathrm{e}_j\rangle\}$, cualquier vector $|a\rangle$ se puede expresar en ambas bases como $|a\rangle = a^i\,|\mathrm{e}_i\rangle = \tilde{a}^j\,|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle$
- En particular los vectores base se pueden expresar en términos de la otra base $|\mathrm{e}_i\rangle = C_i^j\,|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle \Rightarrow \left\langle \mathrm{e}^k\,|\mathrm{e}_i\right\rangle = C_i^j\left\langle \mathrm{e}^k\,|\tilde{\mathrm{e}}_j\right\rangle$ con lo cual $\delta_i^k = C_i^j\underbrace{\left\langle \mathrm{e}^k\,|\tilde{\mathrm{e}}_j\right\rangle}_{\tilde{S}_j^k} \Rightarrow C_i^j \equiv \underbrace{\left\langle \tilde{\mathrm{e}}^j\,|\mathrm{e}_i\right\rangle}_{S_i^j}$. Es decir $\delta_i^k = S_i^j\,\tilde{S}_j^k$
- Un vector cualquiera $|a\rangle = a^j\,|\mathrm{e}_j\rangle \equiv \tilde{a}^j\,|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle$, entonces $|a\rangle = a^i\left(S_i^n\,|\tilde{\mathrm{e}}_n\rangle\right) \equiv \tilde{a}^j\,|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle$ Las componentes transforman como $S_i^j a^i = \tilde{a}^j$
- Entonces si $|a\rangle = 5\,|\mathrm{e}_1\rangle + 4\,|\mathrm{e}_2\rangle$, entonces $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$ por lo tanto

$$|a\rangle = 5\,|\mathrm{e}_1\rangle + 4\,|\mathrm{e}_2\rangle = \frac{9}{\sqrt{2}}\,|\tilde{\mathrm{e}}_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\tilde{\mathrm{e}}_2\rangle$$

Representación matricial para σ_z, σ_y y σ_x

- Encuentre la representación matricial $\left(\sigma_z^{(+x)(-x)}\right)^i_j$ y $\left(\sigma_z^{(+y)(-y)}\right)^i_j$. Es decir, la representación matricial σ_z en las bases $\{|\pm\rangle_x\}$ y $\{|\pm\rangle_y\}$, *respectivamente*
- Encuentre la representación matricial $(\sigma_y)^i_j$ en las bases $\{|\pm\rangle\}$ $\{|\pm\rangle_x\}$, y $\{|\pm\rangle_y\}$
- Encuentre la representación matricial $(\sigma_x)^i_j$ en las bases $\{|\pm\rangle\}$ $\{|\pm\rangle_x\}$, y $\{|\pm\rangle_y\}$
- Encuentre la expresión para el siguiente vector $|a\rangle = 5\,|+\rangle + 4\,|-\rangle$ en las bases $\{|\pm\rangle_x\}$, y $\{|\pm\rangle_y\}$, respectivamente