Aproximación de Funciones:

L. A. Núñez
Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

18 de agosto de 2020

Agenda de Aproximación de Funciones

Complementos Ortogonales

Aproximación de funciones

Mínimos Cuadrados

Interpolación polinomial

¿ Qué presentamos ?

Para la discusión

Complementos Ortogonales

- Si $|\bar{v}_i\rangle \in \mathbf{V}$ es ortogonal a $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$, si $\langle s_k |\bar{v}_i\rangle = 0 \quad \forall \; |s_k\rangle \in \mathbf{S}$,

Complementos Ortogonales

- Si $|\bar{v}_i\rangle \in \mathbf{V}$ es ortogonal a $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$, si $\langle s_k \,|\bar{v}_i\rangle = 0 \quad \forall \; |s_k\rangle \in \mathbf{S}$,
- Dado $\mathbf{V} : \{|v_1\rangle\,, \; |v_2\rangle\,, \cdots, |v_n\rangle\,, \cdots\}$ y $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ con $\dim \mathbf{S} = m$. Entonces, $\forall \; |v_k\rangle \in \mathbf{V}$ puede expresarse como la suma de dos vectores $|s_k\rangle \in \mathbf{S} \;\; \wedge \;\; |s_k\rangle^{\perp} \in \mathbf{S}^{\perp}$ y esta descomposición es única $|v_k\rangle = |s_k\rangle + |s_k\rangle^{\perp}\,, \quad |s_k\rangle \in \mathbf{S} \quad \wedge \quad |s_k\rangle^{\perp} \in \mathbf{S}^{\perp}$, y adicionalmente, $\left\| |v_k\rangle \right\|^2 = \left\| |s_k\rangle \right\|^2 + \left\| |s_k\rangle^{\perp} \right\|^2$.

Complementos Ortogonales

- Si $|\bar{v}_i\rangle \in \mathbf{V}$ es ortogonal a $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$, si $\langle s_k |\bar{v}_i\rangle = 0 \quad \forall \ |s_k\rangle \in \mathbf{S}$,
- Dado $\mathbf{V} : \{|v_1\rangle, \ |v_2\rangle, \cdots, |v_n\rangle, \cdots\}$ y $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ con $\dim \mathbf{S} = m$. Entonces, $\forall \ |v_k\rangle \in \mathbf{V}$ puede expresarse como la suma de dos vectores $|s_k\rangle \in \mathbf{S} \ \wedge \ |s_k\rangle^{\perp} \in \mathbf{S}^{\perp}$ y esta descomposición es única $|v_k\rangle = |s_k\rangle + |s_k\rangle^{\perp}, \quad |s_k\rangle \in \mathbf{S} \quad \wedge \quad |s_k\rangle^{\perp} \in \mathbf{S}^{\perp}$, y adicionalmente, $\| |v_k\rangle \|^2 = \| |s_k\rangle \|^2 + \left\| |s_k\rangle^{\perp} \right\|^2$.
- Si $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ de dimensión finita y $|v_k\rangle \in \mathbf{V}$ y $|s_k\rangle \in \mathbf{S} \ \Rightarrow$ $|s_k\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle v_k |\mathrm{e}_i\rangle |\mathrm{e}_i\rangle$, será la proyección de $|v_k\rangle$ en $\mathbf{S}$.

Complementos Ortogonales

- Si $|\bar{v}_i\rangle \in \mathbf{V}$ es ortogonal a $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$, si $\langle s_k | \bar{v}_i\rangle = 0 \quad \forall \ |s_k\rangle \in \mathbf{S}$,
- Dado $\mathbf{V} : \{|v_1\rangle, \ |v_2\rangle, \cdots, |v_n\rangle, \cdots\}$ y $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ con $\dim \mathbf{S} = m$. Entonces, $\forall \ |v_k\rangle \in \mathbf{V}$ puede expresarse como la suma de dos vectores $|s_k\rangle \in \mathbf{S} \ \wedge \ |s_k\rangle^{\perp} \in \mathbf{S}^{\perp}$ y esta descomposición es única $|v_k\rangle = |s_k\rangle + |s_k\rangle^{\perp}$, $\quad |s_k\rangle \in \mathbf{S} \quad \wedge \quad |s_k\rangle^{\perp} \in \mathbf{S}^{\perp}$, y adicionalmente, $\| |v_k\rangle \|^2 = \| |s_k\rangle \|^2 + \left\| |s_k\rangle^{\perp} \right\|^2$.
- Si $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ de dimensión finita y $|v_k\rangle \in \mathbf{V}$ y $|s_k\rangle \in \mathbf{S} \ \Rightarrow$ $|s_k\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle v_k |\mathrm{e}_i\rangle |\mathrm{e}_i\rangle$, será la proyección de $|v_k\rangle$ en $\mathbf{S}$.
- Dado un vector $|x\rangle \in \mathbf{V}$ y un subespacio de $\mathbf{V}$ con dimensión finita, $\mathbf{S}^m \subset \mathbf{V}$, entonces la distancia de $|x\rangle$ a $\mathbf{S}^m$ es la norma de la componente de $|x\rangle$, perpendicular a $\mathbf{S}^m$.

Complementos Ortogonales

- Si $|\bar{v}_i\rangle \in \mathbf{V}$ es ortogonal a $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$, si $\langle s_k |\bar{v}_i\rangle = 0 \quad \forall \ |s_k\rangle \in \mathbf{S}$,
- Dado $\mathbf{V} : \{|v_1\rangle, \ |v_2\rangle, \cdots, |v_n\rangle, \cdots\}$ y $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ con $\dim \mathbf{S} = m$. Entonces, $\forall \ |v_k\rangle \in \mathbf{V}$ puede expresarse como la suma de dos vectores $|s_k\rangle \in \mathbf{S} \ \wedge \ |s_k\rangle^\perp \in \mathbf{S}^\perp$ y esta descomposición es única $|v_k\rangle = |s_k\rangle + |s_k\rangle^\perp , \quad |s_k\rangle \in \mathbf{S} \quad \wedge \quad |s_k\rangle^\perp \in \mathbf{S}^\perp$, y adicionalmente, $\||v_k\rangle\|^2 = \||s_k\rangle\|^2 + \left\||s_k\rangle^\perp\right\|^2$.
- Si $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ de dimensión finita y $|v_k\rangle \in \mathbf{V}$ y $|s_k\rangle \in \mathbf{S} \ \Rightarrow$ $|s_k\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle v_k |\mathrm{e}_i\rangle |\mathrm{e}_i\rangle$, será la proyección de $|v_k\rangle$ en $\mathbf{S}$.
- Dado un vector $|x\rangle \in \mathbf{V}$ y un subespacio de $\mathbf{V}$ con dimensión finita, $\mathbf{S}^m \subset \mathbf{V}$, entonces la distancia de $|x\rangle$ a $\mathbf{S}^m$ es la norma de la componente de $|x\rangle$, perpendicular a $\mathbf{S}^m$.
- Más aún esa distancia será mínima y $|x\rangle_{\mathbf{S}^m}$ la proyección de $|x\rangle$, en $\mathbf{S}^m$ será el elemento de $\mathbf{S}^m$ más próximo a $|x\rangle$ y, por la mejor aproximación.

Aproximación de funciones

- Sea $\{|v_1\rangle\,,\ |v_2\rangle\,,\ |v_3\rangle\,,\cdots,|v_n\rangle\,,\cdots\}$ un espacio euclidiano de dimensión infinita, $\mathbf{V}$, y un subespacio $\mathbf{S}^m \subset \mathbf{V}$, con dimensión finita $\dim \mathbf{S} = m$, y sea un elemento $|v_i\rangle \in \mathbf{V}$. La proyección de $|v_i\rangle$ en $\mathbf{S}^m, |s_i\rangle$, será el elemento de $\mathbf{S}^m$ más próximo a $|v_k\rangle$. En otras palabras $\||v_i\rangle - |s_i\rangle\| \leq \||v_i\rangle - |t_i\rangle\| \ \forall\ |t_i\rangle \in \mathbf{S}$.

Aproximación de funciones

- Sea $\{|v_1\rangle\ ,\ |v_2\rangle\ ,\ |v_3\rangle\ ,\cdots ,|v_n\rangle\ ,\cdots\}$ un espacio euclidiano de dimensión infinita, $\mathbf{V}$, y un subespacio $\mathbf{S}^m \subset \mathbf{V}$, con dimensión finita $\dim \mathbf{S} = m$, y sea un elemento $|v_i\rangle \in \mathbf{V}$. La proyección de $|v_i\rangle$ en $\mathbf{S}^m, |s_i\rangle$, será el elemento de $\mathbf{S}^m$ más próximo a $|v_k\rangle$. En otras palabras $\| |v_i\rangle - |s_i\rangle \| \leq \| |v_i\rangle - |t_i\rangle \|\ \ \forall\ \ |t_i\rangle \in \mathbf{S}$.
- Considemos funciones continuas, reales de variable real, en $[0, 2\pi]$, $\mathcal{C}^{\infty}_{[0,2\pi]}$, mediante funciones trigonométricas y con el producto interno definido por: $\langle f |\ g\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\ f(x)\ g(x)$.

Aproximación de funciones

- Sea $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \cdots, |v_n\rangle, \cdots\}$ un espacio euclidiano de dimensión infinita, $\mathbf{V}$, y un subespacio $\mathbf{S}^m \subset \mathbf{V}$, con dimensión finita $\dim \mathbf{S} = m$, y sea un elemento $|v_i\rangle \in \mathbf{V}$. La proyección de $|v_i\rangle$ en $\mathbf{S}^m, |s_i\rangle$, será el elemento de $\mathbf{S}^m$ más próximo a $|v_k\rangle$. En otras palabras $\||v_i\rangle - |s_i\rangle\| \leq \||v_i\rangle - |t_i\rangle\| \ \forall \ |t_i\rangle \in \mathbf{S}$.
- Considemos funciones continuas, reales de variable real, en $[0, 2\pi]$, $\mathcal{C}^{\infty}_{[0,2\pi]}$, mediante funciones trigonométricas y con el producto interno definido por: $\langle f | g\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ f(x) \ g(x)$.
- Para ese espacio vectorial tenemos una base ortogonal definida por $|\mathrm{e}_0\rangle = 1$, $|\mathrm{e}_{2n-1}\rangle = \cos(nx)$ y $|\mathrm{e}_{2n}\rangle = \operatorname{sen}(nx)$,

Aproximación de funciones

- Sea $\{|v_1\rangle\,, \ |v_2\rangle\,, \ |v_3\rangle\,, \cdots, |v_n\rangle\,, \cdots\}$ un espacio euclidiano de dimensión infinita, $\mathbf{V}$, y un subespacio $\mathbf{S}^m \subset \mathbf{V}$, con dimensión finita $\dim \mathbf{S} = m$, y sea un elemento $|v_i\rangle \in \mathbf{V}$. La proyección de $|v_i\rangle$ en $\mathbf{S}^m, |s_i\rangle$, será el elemento de $\mathbf{S}^m$ más próximo a $|v_k\rangle$. En otras palabras $\| |v_i\rangle - |s_i\rangle \| \leq \| |v_i\rangle - |t_i\rangle \| \ \forall \ |t_i\rangle \in \mathbf{S}$.
- Considemos funciones continuas, reales de variable real, en $[0, 2\pi]$, $\mathcal{C}^{\infty}_{[0,2\pi]}$, mediante funciones trigonométricas y con el producto interno definido por: $\langle f|\, g\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\ f(x)\ g(x)$.
- Para ese espacio vectorial tenemos una base ortogonal definida por $|\mathrm{e}_0\rangle = 1$, $|\mathrm{e}_{2n-1}\rangle = \cos(nx)$ y $|\mathrm{e}_{2n}\rangle = \mathrm{sen}\ (nx)$,
- Cualquier función definida en $[0, 2\pi]$ puede expresarse como

$$|f\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} C_i\, |\mathrm{e}_i\rangle\,, = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(kx) + b_k \mathrm{sen}\ (kx)\right]\,,$$

donde

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\ f(x)\cos(kx)\ \wedge\ b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\ f(x)\mathrm{sen}\ (kx)\,.$$

Mínimos Cuadrados

- La idea es determinar el valor más aproximado de una cantidad física, c, a partir de un conjunto de medidas experimentales: $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$.

Mínimos Cuadrados

- La idea es determinar el valor más aproximado de una cantidad física, c, a partir de un conjunto de medidas experimentales: $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$.
- Asociamos las medidas con las componentes de un vector $|x\rangle \equiv (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$

Mínimos Cuadrados

- La idea es determinar el valor más aproximado de una cantidad física, c, a partir de un conjunto de medidas experimentales: $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$.
- Asociamos las medidas con las componentes de un vector $|x\rangle \equiv (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$
- Supondremos su mejor aproximación $\mathrm{c}\,|1\rangle \equiv (\mathrm{c}, \mathrm{c}, \mathrm{c}, \cdots, \mathrm{c})$, será la proyección perpendicular de $|x\rangle$ (las medidas) sobre el subespacio generado por $|1\rangle$:

$$|x\rangle = \mathrm{c}\,|1\rangle \;\Rightarrow\; \mathrm{c} = \frac{\langle x\,|1\rangle}{\langle 1\,|1\rangle} = \frac{x_1 + x_2 + x_3, \cdots + x_n}{n}\,.$$

Mínimos Cuadrados

- La idea es determinar el valor más aproximado de una cantidad física, c, a partir de un conjunto de medidas experimentales: $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$.
- Asociamos las medidas con las componentes de un vector $|x\rangle \equiv (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$
- Supondremos su mejor aproximación $\mathrm{c}\,|1\rangle \equiv (\mathrm{c}, \mathrm{c}, \mathrm{c}, \cdots, \mathrm{c})$, será la proyección perpendicular de $|x\rangle$ (las medidas) sobre el subespacio generado por $|1\rangle$:

$$|x\rangle = \mathrm{c}\,|1\rangle \;\Rightarrow\; \mathrm{c} = \frac{\langle x\,|1\rangle}{\langle 1\,|1\rangle} = \frac{x_1 + x_2 + x_3, \cdots + x_n}{n}\,.$$

- Es una manera sofisticada de construir el promedio aritmético de las medidas.

Mínimos Cuadrados

- La idea es determinar el valor más aproximado de una cantidad física, c, a partir de un conjunto de medidas experimentales: $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$.
- Asociamos las medidas con las componentes de un vector $|x\rangle \equiv (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$
- Supondremos su mejor aproximación $\mathrm{c}\,|1\rangle \equiv (\mathrm{c}, \mathrm{c}, \mathrm{c}, \cdots, \mathrm{c})$, será la proyección perpendicular de $|x\rangle$ (las medidas) sobre el subespacio generado por $|1\rangle$:

$$|x\rangle = \mathrm{c}\,|1\rangle \;\Rightarrow\; \mathrm{c} = \frac{\langle x\,|1\rangle}{\langle 1\,|1\rangle} = \frac{x_1 + x_2 + x_3, \cdots + x_n}{n}\,.$$

- Es una manera sofisticada de construir el promedio aritmético de las medidas.
- La proyección perpendicular de $|x\rangle$ sobre $|1\rangle$ hace mínima la distancia entre el subespacio generado por $|1\rangle$ y el vector $|x\rangle$, por tanto $[d\,(|x\rangle\,, \mathrm{c}\,|1\rangle)]^2$

Ajuste a una recta

- La consecuencia más conocida es el "ajuste" de un conjunto de datos $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \cdots, (x_n, y_n)\}$ a la ecuación de una recta $y = cx$.

Ajuste a una recta

- La consecuencia más conocida es el "ajuste" de un conjunto de datos $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \cdots, (x_n, y_n)\}$ a la ecuación de una recta $y = \mathrm{c}x$.
- Queremos que la distancia entre $|y\rangle$ y su valor más aproximado $|y\rangle_{\approx} = \mathrm{c}\,|x\rangle$ sea la menor posible. Por lo tanto, $\left\| |\mathrm{c}x - y\rangle \right\|^2$ será la menor posible y $|\mathrm{c}x - y\rangle$ será perpendicular a $\mathbf{S}(|x\rangle)$,

$$\langle x \,|\mathrm{c}x - y\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{c} = \frac{\langle x\,|y\rangle}{\langle x\,|x\rangle} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \cdots + x_n y_n}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2}\,.$$

Ajuste a una recta

- La consecuencia más conocida es el "ajuste" de un conjunto de datos $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \cdots, (x_n, y_n)\}$ a la ecuación de una recta $y = \mathrm{c}x$.
- Queremos que la distancia entre $|y\rangle$ y su valor más aproximado $|y\rangle_{\approx} = \mathrm{c}\,|x\rangle$ sea la menor posible. Por lo tanto, $\| |\mathrm{c}x - y\rangle \|^2$ será la menor posible y $|\mathrm{c}x - y\rangle$ será perpendicular a $\mathbf{S}(|x\rangle)$,

$$\langle x \,|\mathrm{c}x - y\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{c} = \frac{\langle x \,|y\rangle}{\langle x \,|x\rangle} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \cdots + x_ny_n}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2}\,.$$

- Si la recta a "ajustar" es $y = \mathrm{c}x + \mathrm{b}$, entondes $|\mathrm{b}\rangle = \mathrm{b}\,|1\rangle$, y tenemos:

$$|y\rangle = \mathrm{c}\,|x\rangle + |\mathrm{b}\rangle \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \langle x \,|y\rangle \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \mathrm{c}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \mathrm{b}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \\ \langle \mathrm{b} \,|y\rangle \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i = \mathrm{c}\sum_{i=1}^{n} x_i + \mathrm{b}n \end{array} \right.$$

Interpolación polinomial de puntos experimentales

- Supongamos que tenemos puntos experimentales $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)\}$ y para modelar ese experimento quisiéramos una función que ajuste estos puntos, de manera que: $\{(x_1, y_1 = f(x_1)), \cdots, (x_n, y_n = f(x_n))\}$. Para encontrar este polinomio lo expresaremos como una combinación lineal de polinomios de Legendre

Interpolación polinomial de puntos experimentales

- Supongamos que tenemos puntos experimentales $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)\}$ y para modelar ese experimento quisiéramos una función que ajuste estos puntos, de manera que: $\{(x_1, y_1 = f(x_1)), \cdots, (x_n, y_n = f(x_n))\}$. Para encontrar este polinomio lo expresaremos como una combinación lineal de polinomios de Legendre
- Esto es: $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k |P_k\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} C_k P_k(x) \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = f(x_1) = C_0 P_0(x_1) + C_1 P_1(x_1) + \cdots + C_{n-1} P_{n-1}(x_1) \\ y_2 = f(x_2) = C_0 P_0(x_2) + C_1 P_1(x_2) + \cdots + C_{n-1} P_{n-1}(x_2) \\ \vdots \\ y_n = f(x_n) = C_0 P_0(x_n) + C_1 P_1(x_n) + \cdots + C_{n-1} P_{n-1}(x_n) \end{array} \right.$$

n ecuaciones con n incógnitas $\{C_0, C_1, \cdots C_{n-1}\}$.

¿ Qué presentamos ?

1. Complementos ortogonales
2. Aproximación de funciones y complementos ortogonales
3. Aproximación mediante series de funciones trigonométricas
4. Métodos de Mínimos cuadrados
5. Aproximación de funciones mediante una base de polinomios ortogonales

Para la discusión

Considere el espacio vectorial, $\mathcal{C}^{\infty}_{[-1,1]}$, de funciones reales, continuas y continuamente diferenciables definidas en el intervalo $[-1,1]$ con una base de monomios $\left\{1, x, x^2, x^3, x^4, \cdots\right\}$ Suponga la función $h(x) = \operatorname{sen}(3x)(1-x^2)$:

1. Expanda la función $h(x)$ en términos de la base de monomios y de polinomios de Legendre, grafique, compare y encuentre el grado de los polinomios en los cuales difieren las expansiones.
2. Expanda la función $h(x)$ en términos de la base de monomios y de polinomios de Chebyshev, grafique, compare y encuentre el grado de los polinomios en los cuales difieren las expansiones.
3. Expanda la función $h(x)$ en términos de la base de polinomios de Legendre y de Chebyshev, grafique, compare y encuentre el grado de los polinomios en los cuales difieren las expansiones.
4. Estime en cada caso el error que se comete como función del grado del polinomio (o monomio) de la expansión.

¿Qué puede concluir respecto a la expansión en una u otra base?