Espacios Euclideanos:

L. A. Núñez
Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

18 de agosto de 2020

Espacios Euclideanos (Producto Interno)

Espacios Euclideanos
- Producto interno
- La desigualdad de Cauchy-Schwarz
- Teoremas del coseno y de Pitágoras

Ejemplos de espacios vectoriales con producto interno
- $\mathbb{R}^n$
- Funciones continuas $\mathcal{C}^{\infty}_{[a,b]}$

Autoevaluación

Actividades de Desarrollo

Espacios Euclideanos

El siguiente paso en la construcción de espacios vectoriales más ricos es equiparlo con la definición de producto interno y a partir de esta definición construir el concepto de norma y con éste el de distancia. La idea de producto interno generaliza el concepto de producto escalar de vectores en $\mathbb{R}^3$ e incorpora a los espacios vectoriales abstractos el concepto de ortogonalidad y descomposición ortogonal.

Producto interno

En un espacio vectorial $\mathbf{V} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \cdots, |v_n\rangle\}$, la definición del producto interno de dos vectores la denotaremos como $\langle v_i | v_j\rangle$ y es una aplicación:

$$\mathcal{I}(|v_i\rangle, |v_j\rangle) : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{K}, \ \forall \ |v_i\rangle, |v_j\rangle \in \mathbf{V}.$$

Las propiedades que definen el producto interno son:

1. $\langle v_i | v_i\rangle \equiv \| |v_i\rangle \|^2 \in \mathbf{K} \ \wedge \ \langle v_i | v_i\rangle \geq 0 \quad \forall \ |v_i\rangle \in \mathbf{V}, \quad \text{si} \quad \langle v_i | v_i\rangle = 0 \ \Rightarrow \ |v_i\rangle \equiv |0\rangle$.
2. $\langle v_i | v_j\rangle = \langle v_j | v_i\rangle^* \quad \forall \ |v_i\rangle, |v_j\rangle \in \mathbf{V}$.
3. $\langle v_i | \alpha v_j + \beta v_k\rangle = \alpha \langle v_i | v_j\rangle + \beta \langle v_i | v_k\rangle \ \forall \ |v_i\rangle, |v_j\rangle, |v_k\rangle \in \mathbf{V} \ \wedge \ \alpha, \beta \in \mathbf{K}$.
4. $\langle \alpha v_i + \beta v_j | v_k\rangle = \alpha^* \langle v_i | v_k\rangle + \beta^* \langle v_j | v_k\rangle \ \forall \ |v_i\rangle, |v_j\rangle, |v_k\rangle \in \mathbf{V} \ \wedge \ \alpha, \beta \in \mathbf{K}$.
5. $\langle v_i | 0\rangle = \langle 0 | v_i\rangle = 0$.

Los ángulos entre vectores

Todo producto interno $\langle v_i | \, v_j \rangle$ definido en un espacio vectorial normado $\mathbf{V} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \cdots, |v_n\rangle\}$ cumple con la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle v_i | \, v_j \rangle|^2 \leq \langle v_i | \, v_i \rangle \langle v_j | \, v_j \rangle \quad \Longleftrightarrow \quad |\langle v_i | \, v_j \rangle| \leq \| |v_i\rangle \| \;\; \| |v_j\rangle \| \, .$$

Es claro que si $|v_i\rangle = |0\rangle \;\wedge\; |v_j\rangle = |0\rangle$ se cumple la igualdad y es trivial la afirmación.

De la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la definición de norma se desprende que:

$$\frac{|\langle v_i | \, v_j \rangle|^2}{\| |v_i\rangle \|^2 \, \| |v_j\rangle \|^2} \leq 1 \;\Rightarrow\; -1 \leq \frac{|\langle v_i | \, v_j \rangle|}{\| |v_i\rangle \| \, \| |v_j\rangle \|} \leq 1 \, ,$$

por lo tanto podemos definir el "ángulo" entre los vectores abstractos $|v_i\rangle \;\wedge\; |v_j\rangle$ como:

$$\cos(\Theta_{\mathbb{G}}) = \frac{|\langle v_i | \, v_j \rangle|}{\| |v_i\rangle \| \, \| |v_j\rangle \|} \, ,$$

donde hemos denotado como $\Theta_{\mathbb{G}}$ el ángulo genérico que forman los vectores reales o complejos.

Teoremas del coseno y de Pitágoras

A partir de la definición de norma se obtiene:

$$\begin{aligned} \left\| |v_i\rangle - |v_j\rangle \right\|^2 = & \ \langle v_i - v_j | \ v_i - v_j \rangle \\ = & \ \langle v_i | \ v_i \rangle + \langle v_i | \ v_j \rangle - \langle v_i | \ v_j \rangle^* - \langle v_j | \ v_j \rangle \\ = & \ \langle v_i | \ v_i \rangle + \langle v_j | \ v_j \rangle - 2 \,\mathrm{Re} \left(\langle v_i | \ v_j \rangle \right) \ , \end{aligned}$$

con lo cual hemos generalizado el teorema del coseno para un espacio vectorial abstracto:

$$\left\| |v_i\rangle - |v_j\rangle \right\|^2 = \left\| |v_i\rangle \right\|^2 + \left\| |v_j\rangle \right\|^2 - 2 \left\| |v_i\rangle \right\| \left\| |v_j\rangle \right\| \cos(\Theta_{\mathbb{G}}) \, .$$

Para el caso que los vectores $|v_i\rangle \ \wedge \ |v_j\rangle$ sean ortogonales, esto es $\langle v_i | \ v_j \rangle = 0$, tendremos el teorema de Pitágoras generalizado:

$$\left\| |v_i\rangle - |v_j\rangle \right\|^2 \equiv \left\| |v_i\rangle + |v_j\rangle \right\|^2 = \left\| |v_i\rangle \right\|^2 + \left\| |v_j\rangle \right\|^2 \ .$$

Espacios vectoriales con producto interno

Los vectores en estos espacios euclidianos pueden ser representados por $|x\rangle = (x_1, x_2, \cdots x_n) \ \wedge \ |y\rangle = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ y **el producto interno** queda definido por:

$$\langle x| \, y\rangle = x_1^* y_1 + x_2^* y_2 + x_3^* y_3, \cdots x_n^* y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \, ,$$

es claro que esta definición de producto interno coincide, para $\mathbb{R}^2$ (y $\mathbb{R}^3$) con la idea de producto escalar convencional vale decir:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} \\ \\ \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} \end{array}\right\} \Rightarrow \ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y \, .$$

pero también se puede proveer una definición de producto interno:

$$\mathbf{a} \circledast \mathbf{b} = 2 a_x b_x + a_x b_y + a_y b_x + a_y b_y \, ,$$

igualmente válida.

Espacios vectoriales con producto interno

Por su parte, la **norma** es:

$$\| |x\rangle \| = \sqrt{\langle x | \, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \, .$$

La **distancia** es la idea intuitiva de distancia euclidiana:

$$d\left(|x\rangle \, , |y\rangle \right) \equiv \| |x\rangle - |y\rangle \| = \sqrt{\langle x - y | \, x - y \rangle}$$

El teorema del coseno queda como:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \, \cos(\Theta) \, ,$$

mientras que el teorema de Pitágoras es:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

es obvio que para $\mathbb{R}^2$ tanto el teorema del coseno como el teorema de Pitágoras retoman su forma tradicional.

Funciones continuas $\mathcal{C}^{\infty}_{[a,b]}$

Una posible definición de **producto interno** sería:

$$\langle f | \, g \rangle = \int_a^b \mathrm{d}x \; f^*(x) \;\; g(x) \;,$$

de la cual se deriva la expresión para la **norma**:

$$\| |f\rangle \|^2 = \langle f | \, f \rangle = \int_a^b \mathrm{d}x \;\; |f(x)|^2 \;.$$

La **distancia** entre funciones quedará definida como:

$$d\left(|f\rangle, |g\rangle\right) \equiv \| |f\rangle - |g\rangle \| \equiv \sqrt{\int_a^b \mathrm{d}x \;\; |f(x) - g(x)|^2} =$$

$$= \sqrt{\int_a^b \mathrm{d}x \;\; |f(x)|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(\int_a^b \mathrm{d}x \;\; f^*(x) \; g(x)\right) + \int_a^b \mathrm{d}x \;\; |g(x)|^2}\,.$$

Funciones continuas $\mathcal{C}^{\infty}_{[a,b]}$

El teorema del coseno puede ser escritos como:

$$\int_a^b \mathrm{d}x \ \left|f(x)+g(x)\right|^2 = \int_a^b \mathrm{d}x \ \left|f(x)\right|^2 + \int_a^b \mathrm{d}x \ \left|g(x)\right|^2 + 2\left(\int_a^b \mathrm{d}x \ \left|f(x)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b \mathrm{d}x \ \left|g(x)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cos(\Theta)$$

donde:

$$\cos(\Theta) = \frac{\int_a^b \mathrm{d}x \ f^*(x) \ g(x)}{\left(\int_a^b \mathrm{d}x \ \left|f(x)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b \mathrm{d}x \ \left|g(x)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}} .$$

Y como era de esperarse el teorema de Pitágoras queda:

$$\int_a^b \mathrm{d}x \ \left|f(x)+g(x)\right|^2 = \int_a^b \mathrm{d}x \ \left|f(x)\right|^2 + \int_a^b \mathrm{d}x \ \left|g(x)\right|^2 ,$$

Autoevaluación

- Muestre por qué los espacios con producto interno definido, contienen a los espacios normados y métricos
- ¿Cuál son la principales consecuencias de equipar un espacio vectorial con una definición de producto interno?
- ¿Qué consecuencias traería poder definir dos productos internos distintos en un mismo espacio vectorial?
- Compruebe que es capaz de seguir el razonamiento que le lleva desde la desigualdad de Cauchy-Schwarz hasta la definición de una función *coseno generalizado*

Para la discusión

- Para cada una de estas definiciones de producto interior en $\mathcal{P}_n$:

$$a)\ \langle q_n | p_n \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x\,, \quad b)\ \langle q_n | p_n \rangle = \int_{0}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x\,.$$

1. Encuentre los ángulos en el "triángulo" formado por los vectores: $|x_1\rangle = 1, |x_2\rangle = t, |x_3\rangle = 1 - t$.
2. Encuentre la distancia y el ángulo entre los siguientes pares de vectores en $\mathcal{P}_3$:
   2.1 $|x_1\rangle = 1; \quad |x_2\rangle = x.$
   2.2 $|x_1\rangle = 2x; \quad |x_2\rangle = x^2.$