

Tensores y autovalores

En general los momentos de una función $f(x)$ de variable, x , real continua –con x , definida alrededor de un valor promedio de la variable \bar{x} – se define como:

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) (x - \bar{x})^n \Rightarrow \mu_n = \sum_{i=1}^N \mathcal{F}(|x_i\rangle) (|x\rangle_i - |\bar{x}\rangle)^n \Rightarrow \sum_{i=1}^N \mathcal{F}(|x_i\rangle) (|x\rangle_i - |\bar{x}\rangle) \underbrace{\otimes \cdots \otimes}_{n-1} (|x\rangle_i - |\bar{x}\rangle)$$

Nótese que en la segunda relación hemos particularizado para el caso discreto, pero $|x\rangle_i$ es un vector que puede tener m componentes, y los momentos μ_n de una variable, $v_i = \mathcal{F}(|x_i\rangle)$, representan promedios pesados por potencias de las desviaciones de las componentes aleatorias de un vector $|x\rangle_i$ respecto a su media $|\bar{x}\rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x\rangle_i$ como:

- $\mu_0(v) = \sum_{i=1}^N v_i$ momento de orden cero representa el “valor total” de la variable del sistema;
- $\mu_1(v) = \sum_{i=1}^N v_i (|x\rangle_i - |\bar{x}\rangle)$ momento de orden uno corresponde al promedio pesado de la variable;
- $\mu_2(v) = \sum_{i=1}^N v_i (|x\rangle_i - |\bar{x}\rangle)^2$ momento de orden dos es la matriz de covariancia de la variable que generaliza la noción de varianza a dimensiones múltiples. En general la base en la cual están expresados los vectores $|x\rangle_i$ y $|\bar{x}\rangle$ no son ortogonales y la norma está asociada a una matriz densa:

$$\sum_{i=1}^N v_i (|x\rangle_i - |\bar{x}\rangle)^2 = \sum_{i=1}^N v_i (x_1 - \bar{x}_1, \dots, x_k - \bar{x}_k, \dots, x_m - \bar{x}_m)_i \begin{pmatrix} x^1 - \bar{x}^1 \\ \vdots \\ x^l - \bar{x}^l \\ \vdots \\ x^m - \bar{x}^m \end{pmatrix}_i$$

El segundo momento quedará definido como $\mu_2(v) =$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N v_i (x^1 - \bar{x}^1)_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^N v_i (x^1 - \bar{x}^1)_i (x_k - \bar{x}_k)_i & \cdots & \sum_{i=1}^N v_i (x^1 - \bar{x}^1)_i (x_m - \bar{x}_m)_i \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^N v_i (x^k - \bar{x}^k)_i (x_1 - \bar{x}_1)_i & \cdots & \sum_{i=1}^N v_i (x^k - \bar{x}^k)_i^2 & & \sum_{i=1}^N v_i (x^k - \bar{x}^k)_i (x_m - \bar{x}_m)_i \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^N v_i (x^m - \bar{x}^m)_i (x_1 - \bar{x}_1)_i & \cdots & \sum_{i=1}^N v_i (x^m - \bar{x}^m)_i (x_k - \bar{x}_k)_i & \cdots & \sum_{i=1}^N v_i (x^m - \bar{x}^m)_i^2 \end{pmatrix}$$

que no es otra cosa que la matriz de covariancia para un vector de m componentes con un peso en cada variable, cada de las componentes representa una variable aleatoria. Supongamos que organizamos un vector con m componetes, cada una de las cuales representa una variable aleatoria a la que le hacemos n mediciones. Entonces, la matriz de covariancia –también llamada matriz de dispersión o de variancia generalizada– para eventos igualmente probables (peso =1) puede ser representada como

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^1 - \bar{x}^1)^2 & \cdots & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^1 - \bar{x}^1) (x_{ki} - \bar{x}_k) & \cdots & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^1 - \bar{x}^1) (x_{mi} - \bar{x}_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^k - \bar{x}^k) (x_{1i} - \bar{x}_1) & \cdots & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^k - \bar{x}^k)^2 & & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^k - \bar{x}^k) (x_{mi} - \bar{x}_m) \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^m - \bar{x}^m) (x_{1i} - \bar{x}_1) & \cdots & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^m - \bar{x}^m) (x_{ki} - \bar{x}_k) & \cdots & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^m - \bar{x}^m)^2 \end{pmatrix}$$

Donde

- $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^j - \bar{x}^j)^2$ representa la variancia de la j -ésima componente del vector de variables aleatorias
 - $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^j - \bar{x}^j) (x_{ki} - \bar{x}_k)$ representa la covariancia entre la variable j -ésima y la variable k -ésima componentes del vector de variables aleatorias. Es decir, como los cambios en una dimensión están (linealmente) asociados a cambios en otra dimensión del vector de variables aleatorias.
 - en ambos casos $\bar{x}^j \equiv \bar{x}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^j \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ij}$ representa la media de la variable j -ésima
1. Consideremos un sistema conformado por n partículas de masas distintas masas dispersas en un volumen, tal y como muestra el archivo se datos https://mailuis-my.sharepoint.com/:x:/g/personal/lnunez_uis_edu_co/EZx8azKGMJdBtbBmalMr3iwB7HH3uXzpe612e4P
 - a) Primero, consideremos el caso 2D –la distribución se realiza en el plano xy – y encuentre los tres primeros momentos para esta distribución de masas.
 - 1) Momento de orden cero, la masa total del sistema
 - 2) Momento de orden uno el centro de masa del sistema
 - 3) Momento de orden dos, el tensor momento de inercia del sistema
 - ¿Los vectores base del sistema cartesiano constituyen una base propia para esta distribución de masa? Esto es: ¿Los vectores cartesianos son autovectores del tensor momento de inercia?
 - Encuentre los ejes principales de inercia para esta distribución de masas. Esto es aquellos vectores propios del tensor de inercia, que forma una base ortogonal respecto a la cual la distribución de las masas se organiza de forma mas simple.
 - Encuentre la matriz de transformación de la base cartesiana a la base de autovectores conformada por los ejes principales.
 - b) Suponga el caso 3D y repita la operación
 2. El Banco Mundial <https://data.worldbank.org> mantiene una estadística de los datos económicos de casi todos los países. En particular estamos interesados en calcular la matriz de covariancia del % del producto interno bruto (GDP) que se ha empleado en el país en los últimos 10 años en
 - Defensa
 - Salud
 - Educación
 - Ciencia y Tecnología¹
 - a) Calcule la matriz de covariancia y la matriz de correlación entre estos parámetros
 - b) Para la matriz de covariancia, en este espacio de parámetros, queremos encontrar sus autovalores y autovectores. Discuta el significado de los autovalores y autovectores de esta matriz
 - c) Encuentre la matriz de transformación que nos lleva de la matriz en la base original a la representación de la matriz en la base de autovalores y autovectores.

¹ Por ejemplo <https://data.worldbank.org/topic/science-and-technology?locations=CO>