Funcionales lineales:

L. A. Núñez
Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

18 de agosto de 2020

Agenda de funcionales lineales

Funcionales lineales

- Funcional lineal asocia un número complejo (o real) $\in$ **K** a un vector $|v\rangle \in$ **V** y cumple con:
  - $\forall \quad |v\rangle \in \mathbf{V} \quad \rightarrow \quad \mathcal{F}\left[|v\rangle\right] \in \mathbb{C}$,
  - $\mathcal{F}\left[\alpha \ |v_1\rangle + \beta \ |v_2\rangle\right] \equiv \alpha \ \mathcal{F}\left[|v_1\rangle\right] + \beta \ \mathcal{F}\left[|v_2\rangle\right]$, $\forall \ |v_1\rangle, |v_2\rangle \in$ **V** y $\forall \ \alpha, \beta \in$ **K**.

Funcionales lineales

- Funcional lineal asocia un número complejo (o real) $\in$ **K** a un vector $|v\rangle \in \mathbf{V}$ y cumple con:
  - $\forall \quad |v\rangle \in \mathbf{V} \quad \rightarrow \quad \mathcal{F}[|v\rangle] \in \mathbb{C}$,
  - $\mathcal{F}[\alpha \ |v_1\rangle + \beta \ |v_2\rangle] \equiv \alpha \ \mathcal{F}[|v_1\rangle] + \beta \ \mathcal{F}[|v_2\rangle]$, $\forall \ |v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbf{V}$ y $\forall \ \alpha, \beta \in \mathbf{K}$.
- El $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots, \mathcal{F}_n, \cdots\}$ forman un espacio vectorial dual $\mathbf{V}^*$. Si **V** es de dimensión finita n, entonces $\dim\mathbf{V} = \dim\mathbf{V}^* = n$.

Funcionales lineales

- Funcional lineal asocia un número complejo (o real) $\in \mathbf{K}$ a un vector $|v\rangle \in \mathbf{V}$ y cumple con:
  - $\forall \quad |v\rangle \in \mathbf{V} \quad \rightarrow \quad \mathcal{F}\left[|v\rangle\right] \in \mathbb{C}$,
  - $\mathcal{F}\left[\alpha \ |v_1\rangle + \beta \ |v_2\rangle\right] \equiv \alpha \ \mathcal{F}\left[|v_1\rangle\right] + \beta \ \mathcal{F}\left[|v_2\rangle\right]$, $\forall \ |v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbf{V}$ y $\forall \ \alpha, \beta \in \mathbf{K}$.
- El $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots, \mathcal{F}_n, \cdots\}$ forman un espacio vectorial dual $\mathbf{V}^*$. Si $\mathbf{V}$ es de dimensión finita n, entonces $\dim\mathbf{V} = \dim\mathbf{V}^* = n$.
- Un funcional lineal es la integral de Riemann $\mathcal{I}\left[|f\rangle\right] = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
- El producto interno constituye la expresión natural del funcional $\mathcal{F}_a\left[|v\rangle\right] \equiv \langle a | v\rangle \ \forall \ |v\rangle \in \mathbf{V} \ \wedge \ \forall \ \langle a| \in \mathbf{V}^*$.
- Dada una base $\{|e_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, \cdots |\mathrm{e}_n\rangle\}$ para $\mathbf{V}$ siempre es posible asociar una base para $\mathbf{V}^*$ de tal manera que: $|v\rangle = \lambda^i |\mathrm{e}_i\rangle \ \rightleftarrows \ \langle v| = \lambda_i^* \left\langle e^i \right|$, con
  $\lambda^i = \left\langle e^i | v\right\rangle \ \wedge \ \lambda_i^* = \langle v | \mathrm{e}_i\rangle$ para $i = 1, 2, \cdots, n$.

Espacio vectorial dual

- El conjunto de funcionales lineales $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \cdots, \mathcal{F}_n, \cdots\}$ constituyen a su vez un espacio vectorial, el cual se denomina espacio vectorial dual de **V** –que es el espacio directo– y se denotará como $\mathbf{V}^*$ (aquí * no es complejo conjugado).

Espacio vectorial dual

- El conjunto de funcionales lineales $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \cdots, \mathcal{F}_n, \cdots\}$ constituyen a su vez un espacio vectorial, el cual se denomina espacio vectorial dual de $\mathbf{V}$ –que es el espacio directo– y se denotará como $\mathbf{V}^*$ (aquí * no es complejo conjugado).
- Aquellos espacios lineales con producto interno definido, el mismo producto interno constituye la expresión natural del funcional. Así tendremos que:

$$\mathcal{F}_a[|v\rangle] \equiv \langle a | v\rangle \quad \forall \quad |v\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \forall \quad \langle a| \in \mathbf{V}^* .$$

Espacio vectorial dual

- El conjunto de funcionales lineales $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \cdots, \mathcal{F}_n, \cdots\}$ constituyen a su vez un espacio vectorial, el cual se denomina espacio vectorial dual de $\mathbf{V}$ –que es el espacio directo– y se denotará como $\mathbf{V}^*$ (aquí * no es complejo conjugado).
- Aquellos espacios lineales con producto interno definido, el mismo producto interno constituye la expresión natural del funcional. Así tendremos que:

$$\mathcal{F}_a [|v\rangle] \equiv \langle a | v\rangle \quad \forall \quad |v\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \forall \quad \langle a| \in \mathbf{V}^* .$$

- Se establece entonces una correspondencia 1 a 1 entre *kets* y *bras*, entre vectores y funcionales lineales (o formas diferenciales): $\lambda_1 |v_1\rangle + \lambda_2 |v_2\rangle \quad \rightleftarrows \quad \lambda_1^* \langle v_1| + \lambda_2^* \langle v_2|$,

Espacio vectorial dual

- El conjunto de funcionales lineales $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \cdots, \mathcal{F}_n, \cdots\}$ constituyen a su vez un espacio vectorial, el cual se denomina espacio vectorial dual de $\mathbf{V}$ –que es el espacio directo– y se denotará como $\mathbf{V}^*$ (aquí * no es complejo conjugado).
- Aquellos espacios lineales con producto interno definido, el mismo producto interno constituye la expresión natural del funcional. Así tendremos que:

$$\mathcal{F}_a[|v\rangle] \equiv \langle a | v\rangle \quad \forall \quad |v\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \forall \quad \langle a| \in \mathbf{V}^* .$$

- Se establece entonces una correspondencia 1 a 1 entre *kets* y *bras*, entre vectores y funcionales lineales (o formas diferenciales): $\lambda_1 |v_1\rangle + \lambda_2 |v_2\rangle \quad \rightleftarrows \quad \lambda_1^* \langle v_1| + \lambda_2^* \langle v_2|$,
- y también

$$|v\rangle = \xi^i |\mathrm{e}_i\rangle \rightleftarrows \langle v| = \xi_i^* \left\langle e^i \right| , \text{ con } \xi^i = \left\langle e^i | v\right\rangle \wedge \xi_i^* = \langle v | \mathrm{e}_i\rangle .$$

Vectores y Covectores 1/2

- Sea $|a\rangle \in \mathbf{V}$ y existe una base ortonormal $\{|\mathrm{e}_j\rangle\}$ como: $a^j\,|\mathrm{e}_j\rangle$ donde las a^j son las componentes *contravariantes*;

Vectores y Covectores 1/2

- Sea $|a\rangle \in \mathbf{V}$ y existe una base ortonormal $\{|\mathrm{e}_j\rangle\}$ como: $a^j\,|\mathrm{e}_j\rangle$ donde las a^j son las componentes *contravariantes*;
- Sea una forma diferencial $\langle b| \in \mathbf{V}^*$ que puede expresarse en una base $\left\{\left\langle \mathrm{e}^i\right|\right\}$ del espacio dual $\mathbf{V}^*$ como $b_i \left\langle \mathrm{e}^i\right|$. Las b_j son las componentes *covariantes* o componentes de los covectores;

Vectores y Covectores 1/2

- Sea $|a\rangle \in \mathbf{V}$ y existe una base ortonormal $\{|\mathrm{e}_j\rangle\}$ como: $a^j\,|\mathrm{e}_j\rangle$ donde las a^j son las componentes *contravariantes*;
- Sea una forma diferencial $\langle b| \in \mathbf{V}^*$ que puede expresarse en una base $\left\{\left\langle \mathrm{e}^i\right|\right\}$ del espacio dual $\mathbf{V}^*$ como $b_i\left\langle \mathrm{e}^i\right|$. Las b_j son las componentes *covariantes* o componentes de los covectores;
- Supongamos que exite un producto interno $\langle a\,|b\rangle = \langle b\,|a\rangle = \left(b_i\left\langle \mathrm{e}^i\right|\right)\cdot\left(a^j\,|\mathrm{e}_j\rangle\right) = b_i a^j \delta^i_j = a^i b_i\,;$

Vectores y Covectores 1/2

- Sea $|a\rangle \in \mathbf{V}$ y existe una base ortonormal $\{|\mathrm{e}_j\rangle\}$ como: $a^j\,|\mathrm{e}_j\rangle$ donde las a^j son las componentes *contravariantes*;
- Sea una forma diferencial $\langle b| \in \mathbf{V}^*$ que puede expresarse en una base $\left\{\left\langle \mathrm{e}^i\right|\right\}$ del espacio dual $\mathbf{V}^*$ como $b_i\left\langle \mathrm{e}^i\right|$. Las b_j son las componentes *covariantes* o componentes de los covectores;
- Supongamos que exite un producto interno $\langle a\,|b\rangle = \langle b\,|a\rangle = \left(b_i\left\langle \mathrm{e}^i\right|\right)\cdot\left(a^j\,|\mathrm{e}_j\rangle\right) = b_i a^j \delta^i_j = a^i\,b_i\,;$
- Supongamos además que existen otras bases $\{|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle\}$ y $\left\{\left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i\right|\right\}$ en $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}^*$;

Vectores y Covectores 1/2

- Sea $|a\rangle \in \mathbf{V}$ y existe una base ortonormal $\{|\mathrm{e}_j\rangle\}$ como: $a^j\,|\mathrm{e}_j\rangle$ donde las a^j son las componentes *contravariantes*;
- Sea una forma diferencial $\langle b| \in \mathbf{V}^*$ que puede expresarse en una base $\{\langle \mathrm{e}^i|\}$ del espacio dual $\mathbf{V}^*$ como $b_i\,\langle \mathrm{e}^i|$. Las b_j son las componentes *covariantes* o componentes de los covectores;
- Supongamos que exite un producto interno $\langle a\,|b\rangle = \langle b\,|a\rangle = \left(b_i\,\langle \mathrm{e}^i|\right)\cdot\left(a^j\,|\mathrm{e}_j\rangle\right) = b_i a^j \delta^i_j = a^i b_i\,;$
- Supongamos además que existen otras bases $\{|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle\}$ y $\{\langle \tilde{\mathrm{e}}^i|\}$ en $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}^*$;
- Entonces las componentes de los vectores y formas, expresadas en esas bases, están relacionadas

$$\left.\begin{array}{l} \langle \mathrm{e}^i\,|a\rangle = a^j\,\langle \mathrm{e}^i\,|\mathrm{e}_j\rangle = a^j\delta^i_j = \tilde{a}^j\,\langle \mathrm{e}^i\,|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle \\ \\ \langle \tilde{\mathrm{e}}^i\,|a\rangle = \tilde{a}^j\,\langle \tilde{\mathrm{e}}^i\,|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle = \tilde{a}^j\delta^i_j = a^j\,\langle \tilde{\mathrm{e}}^i\,|\mathrm{e}_j\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a^i = A^i_j\tilde{a}^j \\ \\ \tilde{a}^i = \tilde{A}^i_j a^j\,, \end{array}\right.$$

donde

$$\langle \mathrm{e}^i\,|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle = A^i_j;\ \langle \tilde{\mathrm{e}}^i\,|\mathrm{e}_j\rangle = \tilde{A}^i_j \text{ y } A^i_k\tilde{A}^k_j = \delta^i_j \iff \tilde{A}^i_j = \left(A^i_j\right)^{-1}.$$

Vectores y Covectores 2/2

- las componentes contravariantes de un vector, $\langle \mathrm{e}^i \,|a\rangle = a^i$, se representan como una columna

$$|a\rangle \;\Rightarrow\; a^i = \langle \mathrm{e}^i \,|a\rangle \qquad \text{con } i = 1, 2, 3, \cdots, n \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}.$$

Vectores y Covectores 2/2

- las componentes contravariantes de un vector, $\langle \mathrm{e}^i | a \rangle = a^j$, se representan como una columna

$$|a\rangle \;\Rightarrow\; a^i = \langle \mathrm{e}^i | a \rangle \qquad \text{con } i = 1, 2, 3, \cdots, n \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} .$$

- Las componentes covariantes transforman de un sistema de referencia a otro mediante la siguiente ley de transformación:

$$\left.\begin{array}{l} \langle b | \mathrm{e}_j \rangle = b_i \langle \mathrm{e}^i | \mathrm{e}_j \rangle = b_i \delta^i_j = \tilde{b}_i \langle \tilde{\mathrm{e}}^i | \mathrm{e}_j \rangle \\ \\ \langle b | \tilde{\mathrm{e}}_j \rangle = \tilde{b}_i \langle \tilde{\mathrm{e}}^i | \tilde{\mathrm{e}}_j \rangle = \tilde{b}_i \delta^i_j = b_i \langle \mathrm{e}^i | \tilde{\mathrm{e}}_j \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b_j = \tilde{b}_i A^i_j \\ \\ \tilde{b}_j = b_i \tilde{A}^i_j . \end{array}\right.$$

Vectores y Covectores 2/2

- las componentes contravariantes de un vector, $\left\langle \mathrm{e}^i \left| a \right. \right\rangle = a^i$, se representan como una columna

$$|a\rangle \;\Rightarrow\; a^i = \left\langle \mathrm{e}^i \left| a \right. \right\rangle \qquad \text{con } i = 1,2,3,\cdots,n \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}.$$

- Las componentes covariantes transforman de un sistema de referencia a otro mediante la siguiente ley de transformación:

$$\left.\begin{array}{c} \left\langle b \left| \mathrm{e}_j \right. \right\rangle = b_i \left\langle \mathrm{e}^i \left| \mathrm{e}_j \right. \right\rangle = b_i \delta^i_j = \tilde{b}_i \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \left| \mathrm{e}_j \right. \right\rangle \\ \\ \left\langle b \left| \tilde{\mathrm{e}}_j \right. \right\rangle = \tilde{b}_i \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \left| \tilde{\mathrm{e}}_j \right. \right\rangle = \tilde{b}_i \delta^i_j = b_i \left\langle \mathrm{e}^i \left| \tilde{\mathrm{e}}_j \right. \right\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} b_j = \tilde{b}_i A^i_j \\ \\ \tilde{b}_j = b_i \tilde{A}^i_j . \end{array}\right.$$

- Las componentes de *vectores covariantes* o *covectores* y serán representados matricialmente como un arreglo tipo fila

$$\langle b| \;\Rightarrow\; b_i = \left\langle b \left| \mathrm{e}_i \right. \right\rangle \text{ con } i = 1,2,3,\cdots,n \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

Cartensianas y Polares 1/2

- Consideremos dos sistemas de coordenadas en el plano: Cartesianas $\{|\mathrm{i}\rangle, |\mathrm{j}\rangle\}$ y polares $\{|u_r\rangle, |u_\theta\rangle\}$. Entonces

$$|a\rangle = a_x |\mathrm{i}\rangle + a_x |\mathrm{j}\rangle = a_r |u_r\rangle + a_\theta |u_\theta\rangle \ ;$$

Cartensianas y Polares 1/2

- Consideremos dos sistemas de coordenadas en el plano: Cartesianas $\{|\mathrm{i}\rangle, |\mathrm{j}\rangle\}$ y polares $\{|u_r\rangle, |u_\theta\rangle\}$. Entonces

$$|a\rangle = a_x |\mathrm{i}\rangle + a_x |\mathrm{j}\rangle = a_r |u_r\rangle + a_\theta |u_\theta\rangle \ ;$$

- Expresamos una base en términos de la otra como

$$|u_r\rangle = \cos(\theta) |\mathrm{i}\rangle + \mathrm{sen}(\theta) |\mathrm{j}\rangle \ \text{ y } \ |u_\theta\rangle = -\mathrm{sen}(\theta) |\mathrm{i}\rangle + \cos(\theta) |\mathrm{j}\rangle \ ,$$

Cartensianas y Polares 1/2

- Consideremos dos sistemas de coordenadas en el plano: Cartesianas $\{|\mathrm{i}\rangle, |\mathrm{j}\rangle\}$ y polares $\{|u_r\rangle, |u_\theta\rangle\}$. Entonces

$$|a\rangle = a_x |\mathrm{i}\rangle + a_x |\mathrm{j}\rangle = a_r |u_r\rangle + a_\theta |u_\theta\rangle \ ;$$

- Expresamos una base en términos de la otra como

$$|u_r\rangle = \cos(\theta) |\mathrm{i}\rangle + \mathrm{sen}(\theta) |\mathrm{j}\rangle \ \text{ y } \ |u_\theta\rangle = -\mathrm{sen}(\theta) |\mathrm{i}\rangle + \cos(\theta) |\mathrm{j}\rangle \ ,$$

- Entonces $\left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \,|\mathrm{e}_j \right\rangle = \tilde{A}^i_j \Rightarrow$

$$\tilde{A}^i_j = \begin{pmatrix} \langle u_r |\mathrm{i}\rangle & \langle u_r |\mathrm{j}\rangle \\ \langle u_\theta |\mathrm{i}\rangle & \langle u_\theta |\mathrm{j}\rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

y

$$\left\langle e^i \,|\tilde{\mathrm{e}}_j \right\rangle = A^i_j = \begin{pmatrix} \langle \mathrm{i} |u_r\rangle & \langle \mathrm{i} |u_\theta\rangle \\ \langle \mathrm{j} |u_r\rangle & \langle \mathrm{j} |u_\theta\rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Cartensianas y Polares 2/2

Entonces, como

$$|a\rangle = a_r\,|u_r\rangle + a_\theta\,|u_\theta\rangle \equiv \tilde{a}^1\,|\tilde{e}_1\rangle + \tilde{a}^2\,|\tilde{\mathrm{e}}_2\rangle = a_x\,|\mathrm{i}\rangle + a_x\,|\mathrm{j}\rangle \equiv a^1\,|\mathrm{e}_1\rangle + a^2\,|\mathrm{e}_2\rangle$$

tendremos que $\tilde{a}^i = \tilde{A}^i_j a^j \iff$

$$\begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x\cos(\theta) + a_y\mathrm{sen}(\theta) \\ -a_x\mathrm{sen}(\theta) + a_y\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$a_r = a_x\cos(\theta) + a_y\mathrm{sen}(\theta) \quad \text{y} \quad a_\theta = -a_x\mathrm{sen}(\theta) + a_y\cos(\theta)\,.$$

Del mismo modo $a^i = A^i_j \tilde{a}^j \iff$

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_r\cos(\theta) - a_\theta\mathrm{sen}(\theta) \\ a_r\mathrm{sen}(\theta) + a_\theta\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

y

$$a_x = a_r\cos(\theta) - a_\theta\mathrm{sen}(\theta) \text{ y } a_y = a_r\mathrm{sen}(\theta) + a_\theta\cos(\theta)\,.$$