Operadores y Matrices

L. A. Núñez
Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

24 de septiembre de 2020

Agenda Operadores y Matrices

Representación matricial de operadores

Álgebra elemental de matrices

Bases y la representación matricial de operadores

Matrices y transformaciones de operadores

Traza de operadores

Determinante de un operador

Autoevaluación de matrices y operadores

Representación matricial de operadores

- Definimos como el elemento de matriz del operador $\mathbb{A}$ al producto interno $\langle v_2 | \left(\mathbb{A} \left| v_1 \right\rangle \right) \equiv A_{(|v_1\rangle, |v_2\rangle)}$,

Representación matricial de operadores

- Definimos como el elemento de matriz del operador $\mathbb{A}$ al producto interno $\langle v_2 | (\mathbb{A} \, | v_1 \rangle) \equiv A_{(|v_1\rangle, |v_2\rangle)}$,
- Sea $\mathbb{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ donde $\dim(\mathbf{V}) = n$ y $\dim(\mathbf{W}) = m$, y $\{|\mathrm{e}_1\rangle , |\mathrm{e}_2\rangle , \cdots , |\mathrm{e}_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathrm{e}}_1\rangle , |\tilde{\mathrm{e}}_2\rangle , \cdots , |\tilde{\mathrm{e}}_m\rangle\}$ bases ortonormales para $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$, respectivamente. Entonces $\left\langle \tilde{\mathrm{e}}^{\beta} \right| \mathbb{A} \, |\mathrm{e}_i\rangle = A_i^{\beta}$ con $i = 1, 2, .., n$ y $\alpha \, , \beta = 1, 2, .., m$.

Representación matricial de operadores

- Definimos como el elemento de matriz del operador $\mathbb{A}$ al producto interno $\langle v_2 | \left(\mathbb{A} \, | v_1 \rangle \right) \equiv A_{(|v_1\rangle, |v_2\rangle)}$,
- Sea $\mathbb{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ donde $\dim(\mathbf{V}) = n$ y $\dim(\mathbf{W}) = m$, y $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, \cdots, |\mathrm{e}_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathrm{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathrm{e}}_2\rangle, \cdots, |\tilde{\mathrm{e}}_m\rangle\}$ bases ortonormales para $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$, respectivamente.
  Entonces $\left\langle \tilde{\mathrm{e}}^\beta \right| \mathbb{A} \, |\mathrm{e}_i\rangle = A_i^\beta$ con $i = 1, 2, .., n$ y $\alpha\,, \beta = 1, 2, .., m$.
- Las cantidades A_j^β son la representación del operador $\mathbb{A}$ respecto a las bases $\{|\mathrm{e}_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathrm{e}}_m\rangle\}$ de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ respectivamente.

Representación matricial de operadores

- Definimos como el elemento de matriz del operador $\mathbb{A}$ al producto interno $\langle v_2| (\mathbb{A}\, |v_1\rangle) \equiv A_{(|v_1\rangle,|v_2\rangle)}$,
- Sea $\mathbb{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ donde $\dim(\mathbf{V}) = n$ y $\dim(\mathbf{W}) = m$, y $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, \cdots, |\mathrm{e}_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathrm{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathrm{e}}_2\rangle, \cdots, |\tilde{\mathrm{e}}_m\rangle\}$ bases ortonormales para $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$, respectivamente. Entonces $\left\langle \tilde{\mathrm{e}}^{\beta}\right| \mathbb{A}\, |\mathrm{e}_i\rangle = A_i^{\beta}$ con $i = 1, 2, .., n$ y $\alpha\, , \beta = 1, 2, .., m$.
- Las cantidades A_j^{β} son la representación del operador $\mathbb{A}$ respecto a las bases $\{|\mathrm{e}_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathrm{e}}_m\rangle\}$ de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ respectivamente.
- Es importante señalar que cambiando el orden de los vectores dentro de la base cambia la representación matricial del operador. Esto significa que la organización de los número A_j^{β} dependerá del orden que le demos a los vectores en las bases $\{|\mathrm{e}_i\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathrm{e}}_i\rangle\}$.

Y las matrices son y se suman...

- Definiremos una matriz A_j^β como un arreglo de números donde el superíndice, β, indica fila y el subíndice, j, columna: $A_j^\beta =$
$$\left(\begin{array}{cccc} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ A_1^m & A_2^m & & A_n^m \end{array}\right), \left(\begin{array}{c} A_1^1 \\ A_1^2 \\ \vdots \\ A_1^m \end{array}\right), \left(\begin{array}{cccc} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \end{array}\right).$$

Álgebra elemental de matrices

- y la suma $\left\langle \mathrm{e}^i \right| \mathbb{A} + \mathbb{B} \left| \mathrm{e}_j \right\rangle = \left\langle \mathrm{e}^i \right| \mathbb{A} \left| \mathrm{e}_j \right\rangle + \left\langle \mathrm{e}^i \right| \mathbb{B} \left| \mathrm{e}_j \right\rangle = A^i_j + B^i_j$

$$\begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & & A^2_n \\ \vdots & & \ddots & \\ A^n_1 & A^n_2 & & A^n_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B^1_1 & B^1_2 & \cdots & B^1_n \\ B^2_1 & B^2_2 & & B^2_n \\ \vdots & & \vdots & \\ B^n_1 & B^n_2 & & A^n_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} A^1_1 + B^1_1 & A^1_2 + B^1_2 & \cdots & A^1_n + B^1_n \\ A^2_1 + B^2_1 & A^2_2 + B^2_2 & & A^2_n + B^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A^n_1 + B^n_1 & & & A^n_n + B^n_n \end{pmatrix} .$$

Álgebra elemental de matrices

- y la suma $\left\langle \mathrm{e}^{i}\right| \mathbb{A}+\mathbb{B}\left|\mathrm{e}_{j}\right\rangle = \left\langle \mathrm{e}^{i}\right| \mathbb{A}\left|\mathrm{e}_{j}\right\rangle + \left\langle \mathrm{e}^{i}\right| \mathbb{B}\left|\mathrm{e}_{j}\right\rangle = A^{i}_{j}+B^{i}_{j}$

$$\begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & & A^2_n \\ \vdots & & \ddots & \\ A^n_1 & A^n_2 & & A^n_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B^1_1 & B^1_2 & \cdots & B^1_n \\ B^2_1 & B^2_2 & & B^2_n \\ \vdots & & \vdots & \\ B^n_1 & B^n_2 & & A^n_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} A^1_1+B^1_1 & A^1_2+B^1_2 & \cdots & A^1_n+B^1_n \\ A^2_1+B^2_1 & A^2_2+B^2_2 & & A^2_n+B^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A^n_1+B^n_1 & & & A^n_n+B^n_n \end{pmatrix} .$$

- De igual modo, para la representación de composición de operadores tendremos: $\left\langle \mathrm{e}^{i}\right| \mathbb{A}\mathbb{B}\left|\mathrm{e}_{j}\right\rangle = \left\langle \mathrm{e}^{i}\right| \mathbb{A}\ \mathbb{I}\ \mathbb{B}\left|\mathrm{e}_{j}\right\rangle =$ $\left\langle \mathrm{e}^{i}\right| \mathbb{A}\left(\left|\mathrm{e}_{k}\right\rangle\left\langle \mathrm{e}^{k}\right|\right)\mathbb{B}\left|\mathrm{e}_{j}\right\rangle = \left\langle \mathrm{e}^{i}\right| \mathbb{A}\left|\mathrm{e}_{k}\right\rangle\left\langle \mathrm{e}^{k}\right| \mathbb{B}\left|\mathrm{e}_{j}\right\rangle = A^{i}_{k}B^{k}_{j}$, que se traduce en la tradicional multiplicación de matrices:

Bases y la representación matricial de operadores

- **Representación diagonal:** Dado $\mathbb{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ y, adicionalmente $\mathbb{A} \left|\mathrm{e}_i\right\rangle = \lambda_i \left|\mathrm{e}_i\right\rangle$, entonces la representación será diagonal $\left\langle \mathrm{e}^j \right| \mathbb{A} \left|\mathrm{e}_i\right\rangle = A^j_i = \left\langle \mathrm{e}^j \right. \left|\mathrm{e}_i\right\rangle = \lambda_i \delta^j_i$.

Bases y la representación matricial de operadores

- **Representación diagonal:** Dado $\mathbb{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ y, adicionalmente $\mathbb{A}\,|\mathrm{e}_i\rangle = \lambda_i\,|\mathrm{e}_i\rangle$, entonces la representación será diagonal $\left\langle \mathrm{e}^j \right| \mathbb{A}\,|\mathrm{e}_i\rangle = A_i^j = \left\langle \mathrm{e}^j \,|\mathrm{e}_i\right\rangle = \lambda_i \delta_i^j$.
- **Representación de operadores adjuntos:** La representación de un operador adjunto, será $\left(A^\dagger\right)_j^i = \left\langle \mathrm{e}^i \right| \mathbb{A}^\dagger\,|\mathrm{e}_j\rangle = \left\langle \mathrm{e}^j \right| \mathbb{A}\,|\mathrm{e}_i\rangle^* = \left(A_i^j\right)^*$, la matriz que representa el operador adjunto $\mathbb{A}^\dagger$, es la traspuesta conjugada de la matriz de la del operador $\mathbb{A}$.

Bases y la representación matricial de operadores

- **Representación diagonal:** Dado $\mathbb{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ y, adicionalmente $\mathbb{A} |\mathrm{e}_i\rangle = \lambda_i |\mathrm{e}_i\rangle$, entonces la representación será diagonal $\langle \mathrm{e}^j | \mathbb{A} |\mathrm{e}_i\rangle = A^j_i = \langle \mathrm{e}^j |\mathrm{e}_i\rangle = \lambda_i \delta^j_i$.
- **Representación de operadores adjuntos:**
  La representación de un operador adjunto, será $\left(A^\dagger\right)^i_j = \langle \mathrm{e}^i | \mathbb{A}^\dagger |\mathrm{e}_j\rangle = \langle \mathrm{e}^j | \mathbb{A} |\mathrm{e}_i\rangle^* = \left(A^j_i\right)^*$, la matriz que representa el operador adjunto $\mathbb{A}^\dagger$, es la traspuesta conjugada de la matriz de la del operador $\mathbb{A}$.
- **Representación de operadores hermíticos:**
  $\mathbb{A}^\dagger = \mathbb{A} \;\Rightarrow\; \left(A^\dagger\right)^i_j = A^i_j$. Las matrices hermíticas son simétricas respecto a la diagonal y los elementos de la diagonal son números reales.

Matrices y Transformaciones de operadores

- Dado $\mathbb{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ y $\mathbf{V}$ con dos base discretas ortonormales $\{|\mathrm{e}_i\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathrm{e}}_i\rangle\}$. Entonces las representaciones de $\mathbb{A}$: $\tilde{A}^i_j = \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \right| \mathbb{A} \left|\tilde{\mathrm{e}}_j\right\rangle$ y $A^i_j = \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A} \left|\mathrm{e}_m\right\rangle$, están relacionadas por: $\left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \right| \mathbb{A} \left|\tilde{\mathrm{e}}_j\right\rangle = \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \right| \left(|\mathrm{e}_k\rangle \left\langle \mathrm{e}^k \right| \right) \mathbb{A} \left(|\mathrm{e}_m\rangle \langle \mathrm{e}^m| \right) |\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle =$ $\underbrace{\left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \,|\mathrm{e}_k\right\rangle}_{S^i_k} \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A} \left|\mathrm{e}_m\right\rangle \underbrace{\left\langle \mathrm{e}^m \,|\tilde{\mathrm{e}}_j\right\rangle}_{\tilde{S}^m_j} \Leftrightarrow \tilde{A}^i_j = S^i_k \; A^k_m \; \tilde{S}^m_j \,,$

Matrices y Transformaciones de operadores

- Dado $\mathbb{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ y $\mathbf{V}$ con dos base discretas ortonormales $\{|\mathrm{e}_i\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathrm{e}}_i\rangle\}$. Entonces las representaciones de $\mathbb{A}$: $\tilde{A}^i_j = \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \right| \mathbb{A} \left|\tilde{\mathrm{e}}_j\right\rangle$ y $A^i_j = \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A} \left|\mathrm{e}_m\right\rangle$, están relacionadas por:
$$\left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \right| \mathbb{A} \left|\tilde{\mathrm{e}}_j\right\rangle = \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \right| \left(|\mathrm{e}_k\rangle \left\langle \mathrm{e}^k \right|\right) \mathbb{A} \left(|\mathrm{e}_m\rangle \langle \mathrm{e}^m|\right) |\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle = \underbrace{\left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \,|\mathrm{e}_k\right\rangle}_{S^i_k} \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A} \left|\mathrm{e}_m\right\rangle \underbrace{\left\langle \mathrm{e}^m \,|\tilde{\mathrm{e}}_j\right\rangle}_{\tilde{S}^m_j} \Leftrightarrow \tilde{A}^i_j = S^i_k \; A^k_m \; \tilde{S}^m_j \,,$$
- Siempre podremos expresar unos vectores base en términos de los otros: $|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle = \tilde{S}^m_j \,|\mathrm{e}_m\rangle = \tilde{S}^m_j \left(S^n_m \,|\tilde{\mathrm{e}}_n\rangle\right)$
$$\Rightarrow \langle \tilde{\mathrm{e}}^n \,|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle = \delta^n_j = \tilde{S}^m_j S^n_m \equiv S^n_m \tilde{S}^m_j \quad \Rightarrow \tilde{S}^i_j = \left(S^i_j\right)^{-1} \,,$$

Matrices y Transformaciones de operadores

- Dado $\mathbb{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ y $\mathbf{V}$ con dos base discretas ortonormales $\{|\mathrm{e}_i\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathrm{e}}_i\rangle\}$. Entonces las representaciones de $\mathbb{A}$: $\tilde{A}^i_j = \langle \tilde{\mathrm{e}}^i | \mathbb{A} | \tilde{\mathrm{e}}_j \rangle$ y $A^i_j = \langle \mathrm{e}^k | \mathbb{A} | \mathrm{e}_m \rangle$, están relacionadas por: $\langle \tilde{\mathrm{e}}^i | \mathbb{A} | \tilde{\mathrm{e}}_j \rangle = \langle \tilde{\mathrm{e}}^i | \left(|\mathrm{e}_k\rangle \langle \mathrm{e}^k | \right) \mathbb{A} \left(|\mathrm{e}_m\rangle \langle \mathrm{e}^m | \right) |\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle =$
$\underbrace{\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \, |\mathrm{e}_k\rangle}_{S^i_k} \langle \mathrm{e}^k | \mathbb{A} | \mathrm{e}_m \rangle \underbrace{\langle \mathrm{e}^m \, |\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle}_{\tilde{S}^m_j} \Leftrightarrow \tilde{A}^i_j = S^i_k \; A^k_m \; \tilde{S}^m_j \,,$
- Siempre podremos expresar unos vectores base en términos de los otros: $|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle = \tilde{S}^m_j \, |\mathrm{e}_m\rangle = \tilde{S}^m_j \left(S^n_m \, |\tilde{\mathrm{e}}_n\rangle \right)$
$\Rightarrow \langle \tilde{\mathrm{e}}^n \, |\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle = \delta^n_j = \tilde{S}^m_j S^n_m \equiv S^n_m \tilde{S}^m_j \quad \Rightarrow \tilde{S}^i_j = \left(S^i_j \right)^{-1} \,,$
- Entonces $\tilde{A}^i_j = S^i_k \; A^k_m \; \left(S^m_j \right)^{-1}$ con lo cual $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{S}\mathbb{A}\mathbb{S}^{-1} \quad \Rightarrow \mathbb{A} = \mathbb{S}^{-1}\tilde{\mathbb{A}}\mathbb{S}$. Dos representaciones A^i_j y $\tilde{A}^k_m$, de un mismo operador $\mathbb{A}$, son similares.

Traza de operadores

La traza, $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\right) = \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle = A^k_k$.

- Entonces $A^i_j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\right) = A^i_i = 15$.

Traza de operadores

La traza, $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\right) = \left\langle \mathrm{e}^{k} \right| \mathbb{A} \left| \mathrm{e}_{k} \right\rangle = A^{k}_{k}\,.$

- Entonces $A^{i}_{j} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \right) \;\Rightarrow\; \mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\right) = A^{i}_{i} = 15\,.$
- La traza es lineal: $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}+\lambda\mathbb{B}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\right) + \lambda \mathrm{Tr}\left(\mathbb{B}\right)$,
  $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}+\lambda\mathbb{B}\right) = \left\langle \mathrm{e}^{k} \right| \mathbb{A}+\lambda\mathbb{B} \left| \mathrm{e}_{k} \right\rangle =$
  $\left\langle \mathrm{e}^{k} \right| \mathbb{A} \left| \mathrm{e}_{k} \right\rangle + \lambda \left\langle \mathrm{e}^{k} \right| \mathbb{B} \left| \mathrm{e}_{k} \right\rangle = \mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\right) + \lambda \mathrm{Tr}\left(\mathbb{B}\right)\,.$

Traza de operadores

La traza, $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\right) = \left\langle \mathrm{e}^{k}\right| \mathbb{A} \left|\mathrm{e}_{k}\right\rangle = A^{k}_{k}$.

- Entonces $A^{i}_{j} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\right) = A^{i}_{i} = 15$.
- La traza es lineal: $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}+\lambda\mathbb{B}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\right) + \lambda\mathrm{Tr}\left(\mathbb{B}\right)$,
  $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}+\lambda\mathbb{B}\right) = \left\langle \mathrm{e}^{k}\right| \mathbb{A}+\lambda\mathbb{B} \left|\mathrm{e}_{k}\right\rangle =$
  $\left\langle \mathrm{e}^{k}\right| \mathbb{A} \left|\mathrm{e}_{k}\right\rangle + \lambda \left\langle \mathrm{e}^{k}\right| \mathbb{B} \left|\mathrm{e}_{k}\right\rangle = \mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\right) + \lambda\mathrm{Tr}\left(\mathbb{B}\right)$.
- La traza conmuta, $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\mathbb{B}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbb{B}\mathbb{A}\right)$:
  $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\mathbb{B}\right) = \left\langle \mathrm{e}^{k}\right| \mathbb{A}\mathbb{B} \left|\mathrm{e}_{k}\right\rangle = \left\langle \mathrm{e}^{k}\right| \mathbb{A}\underbrace{\left|\mathrm{e}_{m}\right\rangle \left\langle \mathrm{e}^{m}\right|}_{\mathbb{I}}\mathbb{B} \left|\mathrm{e}_{k}\right\rangle =$
  $\left\langle \mathrm{e}^{k}\right| \mathbb{B}\underbrace{\left|\mathrm{e}_{m}\right\rangle \left\langle \mathrm{e}^{m}\right|}_{\mathbb{I}}\mathbb{A} \left|\mathrm{e}_{k}\right\rangle = \mathrm{Tr}\left(\mathbb{B}\mathbb{A}\right)$.

Traza de operadores

La traza, $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\right) = \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle = A^k_k$.

- Entonces $A^i_j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\right) = A^i_i = 15$.
- La traza es lineal: $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}+\lambda\mathbb{B}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\right) + \lambda\mathrm{Tr}\left(\mathbb{B}\right)$, $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}+\lambda\mathbb{B}\right) = \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A}+\lambda\mathbb{B} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle =$ $\left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle + \lambda \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{B} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle = \mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\right) + \lambda\mathrm{Tr}\left(\mathbb{B}\right)$.
- La traza conmuta, $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\mathbb{B}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbb{B}\mathbb{A}\right)$:
  $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\mathbb{B}\right) = \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A}\mathbb{B} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle = \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A} \underbrace{\left| \mathrm{e}_m \right\rangle \left\langle \mathrm{e}^m \right|}_{\mathbb{I}} \mathbb{B} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle =$
  $\left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{B} \underbrace{\left| \mathrm{e}_m \right\rangle \left\langle \mathrm{e}^m \right|}_{\mathbb{I}} \mathbb{A} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle = \mathrm{Tr}\left(\mathbb{B}\mathbb{A}\right)$.
- La traza de una matriz no depende de la base
  $A^k_k = \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle = \left\langle \mathrm{e}^k \underbrace{\left| \tilde{\mathrm{e}}_m \right\rangle \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^m \right|}_{\mathbb{I}} \mathbb{A} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle =$
  $\left\langle \tilde{\mathrm{e}}^m \right| \mathbb{A} \underbrace{\left| \mathrm{e}_k \right\rangle \left\langle \mathrm{e}^k \right|}_{\mathbb{I}} \left. \tilde{\mathrm{e}}_m \right\rangle = \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^m \right| \mathbb{A} \left| \tilde{\mathrm{e}}_m \right\rangle = \tilde{A}^m_m$.

Determinante de un operador

El determinante de un operador, $\mathbb{A}$, se define como

$$\det|\mathbb{A}| = \varepsilon^{ijk\cdots} A_i^1 A_j^2 A_k^3 \cdots \equiv \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ A_1^n & A_2^n & & A_n^n \end{vmatrix}, \text{ con}$$

$$\varepsilon^{ijk\cdots} = \varepsilon_{ijk\cdots} = \left\{ \begin{array}{rl} 0, & \text{si cualesquiera dos índices son iguales} \\ 1, & \text{si los índices } i,j,k\cdots \text{permutación cíclica de } 1,2,3\cdots n \\ -1, & \text{si los índices } i,j,k\cdots \text{permutación anticíclica de } 2,1,3\cdots n \end{array} \right.$$

Entonces se puede demostrar que

- $\det|\mathbb{A}| = \det|\mathbb{A}^T|$, donde $\mathbb{A}^T$ es el operador traspuesto de $\mathbb{A}$, que se traduce en que si se intercambian filas por columnas el determinante no se altera.

Determinante de un operador

El determinante de un operador, $\mathbb{A}$, se define como

$$\det|\mathbb{A}| = \varepsilon^{ijk\cdots} A_i^1 A_j^2 A_k^3 \cdots \equiv \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ A_1^n & A_2^n & & A_n^n \end{vmatrix}, \text{ con}$$

$$\varepsilon^{ijk\cdots} = \varepsilon_{ijk\cdots} = \left\{ \begin{array}{rl} 0, & \text{si cualesquiera dos índices son iguales} \\ 1, & \text{si los índices } i, j, k \cdots \text{permutación cíclica de } 1, 2, 3 \cdots n \\ -1, & \text{si los índices } i, j, k \cdots \text{permutación anticíclica de } 2, 1, 3 \cdots n \end{array} \right.$$

Entonces se puede demostrar que

- $\det|\mathbb{A}| = \det|\mathbb{A}^T|$, donde $\mathbb{A}^T$ es el operador traspuesto de $\mathbb{A}$, que se traduce en que si se intercambian filas por columnas el determinante no se altera.
- Si dos filas o dos columnas son idénticas el determinante se anula

Determinante de un operador

El determinante de un operador, $\mathbb{A}$, se define como

$$\det|\mathbb{A}| = \varepsilon^{ijk\cdots} A_i^1 A_j^2 A_k^3 \cdots \equiv \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ A_1^n & A_2^n & & A_n^n \end{vmatrix}, \text{ con}$$

$$\varepsilon^{ijk\cdots} = \varepsilon_{ijk\cdots} =$$
$$\begin{cases} 0, & \text{si cualesquiera dos índices son iguales} \\ 1, & \text{si los índices } i, j, k \cdots \text{permutación cíclica de } 1, 2, 3 \cdots n \\ -1, & \text{si los índices } i, j, k \cdots \text{permutación anticíclica de } 2, 1, 3 \cdots n \end{cases}$$

Entonces se puede demostrar que

- $\det|\mathbb{A}| = \det|\mathbb{A}^T|$, donde $\mathbb{A}^T$ es el operador traspuesto de $\mathbb{A}$, que se traduce en que si se intercambian filas por columnas el determinante no se altera.
- Si dos filas o dos columnas son idénticas el determinante se anula
- Si multiplicamos una fila o una columna por un número, el determinante queda multiplicado por el número

Continuamos con propiedades del determinante

- Si se intercambian dos filas o dos columnas cambia de signo el determinante.

Continuamos con propiedades del determinante

- Si se intercambian dos filas o dos columnas cambia de signo el determinante.
- El determinante de la composición de operadores es el producto de los determinantes $\det|\mathbb{A}\mathbb{B}| = \det|\mathbb{A}|\det|\mathbb{B}|$.

Continuamos con propiedades del determinante

- Si se intercambian dos filas o dos columnas cambia de signo el determinante.
- El determinante de la composición de operadores es el producto de los determinantes $\det|\mathbb{A}\mathbb{B}| = \det|\mathbb{A}| \det|\mathbb{B}|$.
- El determinante del operador inverso es el inverso del determinante: $\det|\mathbb{A}^{-1}| = \frac{1}{\det|\mathbb{A}|} = \det|\mathbb{A}|^{-1}$.
  Esta afirmación es fácilmente demostrable
  $\mathbb{I} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} \;\Rightarrow\; \det|\mathbb{I}| = \det|\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}| =$
  $\det|\mathbb{A}| \det|\mathbb{A}^{-1}| = 1 \;\Rightarrow\; \det|\mathbb{A}^{-1}| = \frac{1}{\det|\mathbb{A}|}$.

Continuamos con propiedades del determinante

- Si se intercambian dos filas o dos columnas cambia de signo el determinante.
- El determinante de la composición de operadores es el producto de los determinantes $\det|\mathbb{A}\mathbb{B}| = \det|\mathbb{A}| \det|\mathbb{B}|$.
- El determinante del operador inverso es el inverso del determinante: $\det|\mathbb{A}^{-1}| = \frac{1}{\det|\mathbb{A}|} = \det|\mathbb{A}|^{-1}$.
  Esta afirmación es fácilmente demostrable
  $\mathbb{I} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} \;\Rightarrow\; \det|\mathbb{I}| = \det|\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}| =$
  $\det|\mathbb{A}| \det|\mathbb{A}^{-1}| = 1 \;\Rightarrow\; \det|\mathbb{A}^{-1}| = \frac{1}{\det|\mathbb{A}|}$.
- El determinante no depende de la representación matricial del operador
  $\det|\mathbb{A}| \equiv \det|\left\langle \mathrm{e}^i \right| \mathbb{A} \left|\mathrm{e}_j\right\rangle| = \det|\left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \right| \mathbb{A} \left|\tilde{\mathrm{e}}_j\right\rangle| \equiv \det|\tilde{\mathbb{A}}|$.
  $\det|\tilde{A}^i_j| = \det|S^i_k \; A^k_m \; \left(S^m_j\right)^{-1}| \equiv$
  $\det|S^i_k| \det|A^k_m| \; \det|\left(S^m_j\right)^{-1}| = \det|S^i_k| \det|A^k_m| \frac{1}{\det|S^m_j|} =$
  $\det|A^k_m|$.

Autoevaluación de matrices y operadores

1. Considere la siguiente transformación: $\mathbb{T}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$
   $\mathbb{T}\left[(x,y,z)\right] = (x+y, x-2z, x+2y+3z, y-2z)$, y los vectores base $|\mathrm{e}_i\rangle = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\} \in \mathbb{R}^3$, $|\tilde{\mathrm{e}}_i\rangle = \{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\} \in \mathbb{R}^4$.
   Encuentre la representación matricial del operador $\mathbb{T}$,
   $T^i_j = \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \right| \mathbb{T} \left| \mathrm{e}_j \right\rangle = \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \right| \left(C^k_j \left| \tilde{\mathrm{e}}_k \right\rangle \right) \equiv C^k_j \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \middle| \tilde{\mathrm{e}}_k \right\rangle$,
2. Considere el siguiente operador
   $\sigma_z \left|+\right\rangle = \left|+\right\rangle$, $\sigma_z \left|-\right\rangle = -\left|-\right\rangle$, con:
   $\left|+\right\rangle \leftrightarrows \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\left|-\right\rangle \leftrightarrows \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, Encuentre la representación matricial para σ_z en la base $\left|+\right\rangle, \left|-\right\rangle$