# Espacios Vectoriales: El Concepto

**L. A. Núñez**
*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,*
*Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*

18 de agosto de 2020

# Agenda de espacios Vectoriales: El Concepto

Grupos

Cuerpo

Espacio Vectorial

Algunos espacios vectoriales

Autoevaluación

Problemas para discusión

# Grupos 1/2

Considere el siguiente conjunto $\mathbf{G} = \{g_1, g_2, g_3, \cdots, g_n, \cdots\}$ y la operación interna $\square$ (la ley del grupo). Entonces los elementos del conjunto forman un *grupo abeliano*.

- Cerrada respecto a la operación $\square$:
  $\{g_i \in \mathbf{G}, g_j \in \mathbf{G}\} \;\Rightarrow\; \exists\; g_k = g_i \,\square\, g_j \in \mathbf{G}$
- Asociativa respecto a la operación $\square$:
  $g_k \,\square\, (g_i \,\square\, g_j) = (g_k \,\square\, g_i) \,\square\, g_j$
- Existencia de un elemento neutro:
  $\exists\;\; \hat{g} \in \mathbf{G} \;\Rightarrow\; g_i \,\square\, \hat{g} = g_i = \hat{g} \,\square\, g_i$
- Existencia de un elemento inverso:
  $g_i \in \mathbf{G} \;\Rightarrow\; \exists\; g_i^{-1} \in \mathbf{G} \;\Rightarrow\; g_i \,\square\, g_i^{-1} = g_i^{-1} \,\square\, g_i = \hat{g}$
- Conmutativa respecto a la operación $\square$: $g_i \,\square\, g_j \equiv g_j \,\square\, g_i$ .

Ejemplos de Grupos

- Enteros $\mathbb{Z}$ respecto a la suma;
- Racionales $\mathbb{Q}$ respecto a la suma y a la multiplicación;
- Rotaciones 2D y 3D (grupo no-abeliano);
- Matrices $n \times m$ respecto a la suma, (grupo abeliano).

# Cuerpo

Definiremos como un cuerpo (o campo) el conjunto $\mathbf{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n, \cdots\}$ sobre el cual están definidas dos operaciones: suma $(+)$ y multiplicación $(\cdot)$ y que satisfacen las siguientes propiedades:

1. Forman un grupo abeliano respecto a la suma $(+)$ con el elemento neutro representado por el cero $0$.
2. Forman un grupo abeliano respecto a la multiplicación $(\cdot)$. Se excluye el cero $0$ y se denota el elemento neutro de la multiplicación como $1$.
3. Es distributiva respecto a la suma $(+)$ : Dados $\alpha_i, \alpha_j$ y $\alpha_k$ se tiene que $\alpha_i \cdot (\alpha_j + \alpha_k) = \alpha_i \cdot \alpha_j + \alpha_i \cdot \alpha_k$.

Ejemplos típicos de campos lo constituyen los racionales $\mathcal{Q}$, los números reales $\mathbb{R}$ y los números complejos $\mathbb{C}$. Normalmente se refiere estos campos como *Campos Escalares*.

# Espacio Vectorial 1/2

Sea $\mathbf{V} = \{|v_1\rangle\,,\ |v_2\rangle\,,\ |v_3\rangle \cdots |v_i\rangle \cdots\}$, será un espacio vectorial lineal y sus elementos $|v_i\rangle$ vectores, si $|v_i\rangle \in \mathbf{V}$ forman un grupo abeliano respecto a $\boxplus$ y una operación multiplicación por un elemento de un campo, $\mathbf{K} = \{\alpha,\ \beta,\ \gamma \cdots\}$:

- $\mathbf{V}$ es cerrado bajo la operación suma $\boxplus$:
  $\forall\ |v_i\rangle\,, |v_j\rangle \in \mathbf{V} \ \Rightarrow\ |v_k\rangle = |v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle \in \mathbf{V}$
- La operación suma $\boxplus$ es conmutativa:
  $\forall\ |v_i\rangle\,, |v_j\rangle \in \mathbf{V} \ \Rightarrow\ |v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle = |v_j\rangle \boxplus |v_i\rangle$
- La operación suma $\boxplus$ es asociativa: $\forall\ |v_i\rangle\,, |v_j\rangle\,, |v_k\rangle \in \mathbf{V} \ \Rightarrow$
  $(|v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle) \boxplus |v_k\rangle = |v_i\rangle \boxplus (|v_j\rangle \boxplus |v_k\rangle)$
- Existe un único elemento neutro
  $|0\rangle :\ |0\rangle \boxplus |v_i\rangle = |v_i\rangle \boxplus |0\rangle = |v_i\rangle \ \forall\ |v_i\rangle \in \mathbf{V}$
- Existe un elemento simétrico para cada elemento de $\mathbf{V}$:
  $\forall\ |v_i\rangle \in \mathbf{V}\ \exists\ |-v_i\rangle\ /\ |v_i\rangle \boxplus |-v_i\rangle = |0\rangle$

# Espacio Vectorial 1/2

Pero además $\mathbf{V}$ es cerrado bajo el producto por un escalar:
$\forall\ \alpha \in \mathbf{K}$ y cualquier $|v_i\rangle \in \mathbf{V} \;\Rightarrow\; \alpha\,|v_i\rangle \in \mathbf{V}$ y

- $\alpha\,(\beta\,|v_i\rangle) = (\alpha\beta)\,|v_i\rangle$
- $(\alpha + \beta)\,|v_i\rangle = \alpha\,|v_i\rangle \boxplus \beta\,|v_i\rangle$
- $\alpha\,(|v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle) = \alpha\,|v_i\rangle \boxplus \alpha\,|v_j\rangle$
- $\mathbf{1}\,|v_i\rangle = |v_i\rangle \;\; \forall \;\; |v_i\rangle \in \mathbf{V}$

- La condición necesaria y suficiente para que $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{V}$ sea un subespacio vectorial de $\mathbf{V}$ es que para cualesquier $|u_i\rangle$ y $|v_i\rangle$ de $\mathbf{S}$ y cualesquier $\alpha$ y $\beta$ de $\mathbf{K}$ se tiene que: $\alpha\,|u_i\rangle + \beta\,|v_i\rangle \;\in\; \mathbf{S}$.

# Algunos espacios vectoriales 1/2

- Los números reales $\mathbf{V} = \mathbb{R}$ y los números complejos $\mathbf{V} = \mathbb{C}$ con el campo $\mathbf{K}$ de reales o complejos y definidas las operaciones ordinarias de suma y multiplicación.
- El espacio $\mathbf{V} \equiv \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$: producto cartesiano de $\mathbb{R}$, con $n-$uplas de números, la operación suma ordinaria de vectores en $n$-dimensionales y lamultiplicación por escalares.

$$
\begin{aligned}
|x\rangle &= (x_1, x_2, x_3, \cdots x_n) \quad \wedge \quad |y\rangle = (y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n) \\
|x\rangle \boxplus |y\rangle &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \cdots x_n + y_n) \\
\alpha\,|x\rangle &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \cdots \alpha x_n) \; .
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{E}^\infty$ constituido por vectores $|x\rangle = (x_1, x_2, x_3, \cdots x_n, \cdots)$ con infinitas (contables) componentes.

$$
\begin{aligned}
|x\rangle &= (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots) \quad \wedge \quad |y\rangle = (y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n, \cdots \\
|x\rangle \boxplus |y\rangle &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \cdots, x_n + y_n, \cdots) \\
\alpha\,|x\rangle &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \cdots, \alpha x_n, \cdots) \; ,
\end{aligned}
$$

con la restricción que $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i = L \,,$ con $L$ finito .

# Algunos espacios vectoriales 2/2

- Las matrices $n \times n$ reales o complejas $\mathbf{K}$ real o complejo.

$$
\begin{gathered}
|x\rangle = M_{ab} \quad \wedge \quad |y\rangle = N_{ab} \\
|x\rangle \boxplus |y\rangle \equiv M_{ab} + N_{ab} = (M+N)_{ab} \\
\alpha\, |x\rangle = \alpha M_{ab} = (\alpha M)_{ab}
\end{gathered}
$$

- Los $\mathcal{P} = \left\{a_0, a_1 x, a_2 x^2, \cdots, a_n x^n, \cdots\right\}$, con $\boxplus$ la suma y multiplicación ordinaria de polinomios con números.
- Espacios Funcionales con la suma ordinaria entre funciones y la multiplicación por un número (por un elemento de un campo)

$$
\begin{gathered}
|f\rangle = f(x) \quad \wedge \quad |g\rangle = g(x) \\
|f\rangle \boxplus |g\rangle \equiv f(x) + g(x) \equiv (f+g)(x) \\
\alpha\, |f\rangle = (\alpha f)(x) \equiv \alpha f(x)\,.
\end{gathered}
$$

- Las funciones continuas e infinitamente diferenciables, definidas en $[a,b]$ : $\mathcal{C}^{\infty}_{[a,b]}$ .

# Autoevaluación

- Considere un conjunto **S** conformado únicamente por números reales positivos y las siguientes reglas sobre **S**:
    - Por "suma" de dos números entenderemos su producto en el sentido usual de números reales,
    - y el "producto" de un elemento $r \in \mathbf{S}$ y un número real $\lambda$ entenderemos $r$ elevado a la potencia de $\lambda$, en el sentido usual ¿**S** es un espacio vectorial?
- Considere el conjunto de vectores en el plano conformado por vectores localizados en el origen y cuyos puntos finales permanecen siempre en el primer cuadrante ¿Este conjunto es un espacio vectorial?

## Problemas para discusión

Sea $\mathcal{P}_n$ el conjunto de todos los polinomios de grado $n$, en $x$, con coeficientes reales:

$$|p_n\rangle \rightleftharpoons p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \, .$$

1. Demostrar que $\mathcal{P}_n$ es un espacio vectorial respecto a la suma de polinomios y a la multiplicación de polinomios por un número (número real).
2. Si los coeficientes $a_i$ son enteros ¿$\mathcal{P}_n$ será un espacio vectorial? ¿Por qué?
3. ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de $\mathcal{P}_n$ es un subespacio vectorial?
   - 3.1 El polinomio cero y todos los polinomios de grado $n-1$.
   - 3.2 El polinomio cero y todos los polinomios de grado par.
   - 3.3 Todos los polinomios que tienen a $x$ como un factor (grado $n > 1$).
   - 3.4 Todos los polinomios que tienen a $x-1$ como un factor.