Fauna de Operadores Lineales:

Operadores Nulos, Biyectivos, Adjunto y Hermíticos

L. A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,

Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

14 de septiembre de 2020

Agenda de Fauna de Operadores Lineales

Espacio nulo e imagen de un operador

Ejemplos de Transformaciones Nulas

Operadores biyectivos, inversos y adjuntos

El detalle de los adjuntos

Hermíticos y Unitarios

Ejercicio

Espacio nulo e imagen de un operador

- $|v\rangle \in \mathbf{V}_1 \,/\, \mathbb{A}\,|v\rangle = |0\rangle$, se denomina espacio nulo, núcleo o *kernel* (núcleo en alemán) de la transformación $\mathbb{A}$ y lo denotaremos como $\aleph\,(\mathbb{A})$, es decir
$\aleph\,(\mathbb{A}) = \{|v\rangle \in \mathbf{V}_1 \ \wedge \ \mathbb{A}\,|v\rangle = |0\rangle\}$.

Espacio nulo e imagen de un operador

- $|v\rangle \in \mathbf{V}_1 \, / \, \mathbb{A}\,|v\rangle = |0\rangle$, se denomina espacio nulo, núcleo o *kernel* (núcleo en alemán) de la transformación $\mathbb{A}$ y lo denotaremos como $\aleph\,(\mathbb{A})$, es decir $\aleph\,(\mathbb{A}) = \{|v\rangle \in \mathbf{V}_1 \ \wedge \ \mathbb{A}\,|v\rangle = |0\rangle\}$.
- Definiremos la imagen (rango o recorrido) de $\mathbb{A}$, a $\mathbb{A}\,\{\mathbf{V}\} = \{|v'\rangle \in \mathbf{V}_2 \quad \wedge \quad \mathbb{A}\,|v\rangle = |v'\rangle\}$,

Espacio nulo e imagen de un operador

- $|v\rangle \in \mathbf{V}_1 \,/\, \mathbb{A}\,|v\rangle = |0\rangle$, se denomina espacio nulo, núcleo o *kernel* (núcleo en alemán) de la transformación $\mathbb{A}$ y lo denotaremos como $\aleph\left(\mathbb{A}\right)$, es decir $\aleph\left(\mathbb{A}\right) = \left\{|v\rangle \in \mathbf{V}_1 \;\wedge\; \mathbb{A}\,|v\rangle = |0\rangle\right\}$.
- Definiremos la imagen (rango o recorrido) de $\mathbb{A}$, a $\mathbb{A}\left\{\mathbf{V}\right\} = \left\{|v'\rangle \in \mathbf{V}_2 \quad \wedge \quad \mathbb{A}\,|v\rangle = |v'\rangle\right\}$,
- Si $\mathbf{V}$ es de dimensión n: $\dim\left[\aleph\left(\mathbb{A}\right)\right] + \dim\left[\mathbb{A}\left\{\mathbf{V}\right\}\right] = \dim\left[\mathbf{V}\right]$,

Operador indentidad y nulo

- **Transformación identidad**: Sea $\mathbb{I} : \mathbf{V}_1 \to \mathbf{V}_2$, la transformación identidad, entonces

$$\forall \; |v\rangle \in \mathbf{V}_1 \; / \; \mathbb{I} \, |v\rangle = |v\rangle \; \Rightarrow \; \aleph \, (\mathbb{I}) = \{|0\rangle\} \subset \mathbf{V}_1 \, \wedge \, \mathbb{A} \, \{\mathbf{V}\} \equiv \mathbf{V}_1 \, .$$

Operador indentidad y nulo

- **Transformación identidad**: Sea $\mathbb{I} : \mathbf{V}_1 \to \mathbf{V}_2$, la transformación identidad, entonces

$$\forall \, |v\rangle \in \mathbf{V}_1 \; / \; \mathbb{I} \, |v\rangle = |v\rangle \;\Rightarrow\; \aleph \, (\mathbb{I}) = \{|0\rangle\} \subset \mathbf{V}_1 \, \wedge \, \mathbb{A} \, \{\mathbf{V}\} \equiv \mathbf{V}_1 \, .$$

- **Sistemas de ecuaciones lineales**: En $\mathbf{V}^n$ las soluciones a los sistemas de ecuaciones lineales representan el espacio nulo, $\aleph \, (\mathbb{A})$, para vectores de $\mathbf{V}^n$ $\mathbb{A} \, |x\rangle = |0\rangle \;\leftrightarrows$
$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \\ A_{n1} & A_{n2} & & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrows A^i_j x_i = 0 \, ,$$
con j ecuaciones ($j = 1, 2, \cdots, n$). Recordemos que estamos utilizando la convención de Einstein para suma de índices.

Operadores biyectivos, inversos y adjuntos

- **Operadores biyectivos:** Se dice que $\mathbb{A} : \mathbf{V}_1 \to \mathbf{V}_2$ es biyectiva (uno a uno o biunívoco) si dados $|v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbf{V}_1, \ \wedge \ |v'\rangle \in \mathbf{V}_2$, se tiene que: $\mathbb{A}|v_1\rangle = |v'\rangle \ \wedge \ \mathbb{A}|v_2\rangle = |v'\rangle \ \Rightarrow \ |v_1\rangle = |v_2\rangle$, es decir, será biyectiva si $\mathbb{A}$ transforma vectores distintos de $\mathbf{V}_1$ en vectores distintos de $\mathbf{V}_2$.

Operadores biyectivos, inversos y adjuntos

- **Operadores biyectivos:** Se dice que $\mathbb{A} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ es biyectiva (uno a uno o biunívoco) si dados $|v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbf{V}_1, \ \wedge \ |v'\rangle \in \mathbf{V}_2$, se tiene que: $\mathbb{A}|v_1\rangle = |v'\rangle \ \wedge \ \mathbb{A}|v_2\rangle = |v'\rangle \ \Rightarrow \ |v_1\rangle = |v_2\rangle$, es decir, será biyectiva si $\mathbb{A}$ transforma vectores distintos de $\mathbf{V}_1$ en vectores distintos de $\mathbf{V}_2$.
- **Operadores Inversos:** Las transformaciones lineales biyectivas posibilitan definir inversa. Diremos que $\mathbb{A}^{-1}$: $\mathbf{V}_2 \rightarrow \mathbf{V}_1$ es el inverso de $\mathbb{A}$, si $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I} = \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}$.
- **Operadores adjuntos:** Si $\mathbb{A} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ de tal forma que $\mathbb{A}|v\rangle = |v'\rangle$, Definiremos $\mathbb{A}^\dagger : \mathbf{V}^* \rightarrow \mathbf{W}^*$, de tal forma que $\langle v'| = \langle v|\mathbb{A}^\dagger$, donde $\mathbf{V}^*$ y $\mathbf{W}^*$ son los duales de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$, respectivamente. Entonces $\mathbb{A}^\dagger$ es el adjunto de $\mathbb{A}$. Es decir: $|v\rangle \iff \langle v| \quad \Rightarrow \quad |v'\rangle = \mathbb{A}|v\rangle \iff \langle v'| = \langle v|\mathbb{A}^\dagger$.
- Entonces, a partir de la definición de producto interno tendremos: $\langle \tilde{x}|\, y\rangle = \langle y|\, \tilde{x}\rangle^* \quad \forall \quad |\tilde{x}\rangle = \mathbb{A}|x\rangle, |y\rangle \in \mathbf{V} \ \Rightarrow$ $\langle x|\mathbb{A}^\dagger|y\rangle = \langle y|\mathbb{A}|x\rangle^* \ \forall \ |x\rangle, |y\rangle \in \mathbf{V}$.

El detalle de los adjuntos

- Esta última relación $\langle x| \mathbb{A}^{\dagger} |y\rangle = \langle y| \mathbb{A} |x\rangle^{*} \quad \forall \; |x\rangle , |y\rangle \in \mathbf{V}$, nos permite asociar $\mathbb{A}^{\dagger}$ con $\mathbb{A}$,

El detalle de los adjuntos

- Esta última relación $\langle x| \mathbb{A}^{\dagger} |y\rangle = \langle y| \mathbb{A} |x\rangle^{*} \quad \forall \ |x\rangle, |y\rangle \in \mathbf{V}$, nos permite asociar $\mathbb{A}^{\dagger}$ con $\mathbb{A}$,
- y además deducir las propiedades de los adjuntos: $\left(\mathbb{A}^{\dagger}\right)^{\dagger} = \mathbb{A}$, $(\lambda\mathbb{A})^{\dagger} = \lambda^{*}\mathbb{A}^{\dagger}$, $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^{\dagger} = \mathbb{A}^{\dagger} + \mathbb{B}^{\dagger}$, $(\mathbb{A}\mathbb{B})^{\dagger} = \mathbb{B}^{\dagger}\mathbb{A}^{\dagger}$ y consecuentemente, $[\mathbb{A}, \mathbb{B}]^{\dagger} = -\left[\mathbb{A}^{\dagger}, \mathbb{B}^{\dagger}\right] = \left[\mathbb{B}^{\dagger}, \mathbb{A}^{\dagger}\right]$.

El detalle de los adjuntos

- Esta última relación $\langle x|\, \mathbb{A}^{\dagger}\, |y\rangle = \langle y|\, \mathbb{A}\, |x\rangle^{*} \quad \forall\ |x\rangle\,, |y\rangle \in \mathbf{V}$, nos permite asociar $\mathbb{A}^{\dagger}$ con $\mathbb{A}$,
- y además deducir las propiedades de los adjuntos: $\left(\mathbb{A}^{\dagger}\right)^{\dagger} = \mathbb{A}$, $(\lambda\mathbb{A})^{\dagger} = \lambda^{*}\mathbb{A}^{\dagger}$, $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^{\dagger} = \mathbb{A}^{\dagger}+\mathbb{B}^{\dagger}$, $(\mathbb{A}\mathbb{B})^{\dagger} = \mathbb{B}^{\dagger}\mathbb{A}^{\dagger}$ y consecuentemente, $[\mathbb{A},\mathbb{B}]^{\dagger} = -\left[\mathbb{A}^{\dagger},\mathbb{B}^{\dagger}\right] = \left[\mathbb{B}^{\dagger},\mathbb{A}^{\dagger}\right]$.
- En conclusión, para obtener el adjunto de una expresión se debe proceder de la siguiente manera:
  - Cambiar constantes por sus complejas conjugadas $\lambda \leftrightarrows \lambda^{*}$.
  - Cambiar los *kets* por sus *bras* asociados y viceversa (*bras* por *kets*): $|v\rangle \leftrightarrows \langle v|$.
  - Cambiar operadores lineales por sus adjuntos $\mathbb{A}^{\dagger} \leftrightarrows \mathbb{A}$.
  - Invertir el orden de los factores: $(|v\rangle\,\langle w|)^{\dagger} = |w\rangle\,\langle v|$.

Operadores Hermíticos y Unitarios

- **Operadores Hermíticos:** Un operador será hermítico (o autoadjunto) si: $\mathbb{A}^\dagger = \mathbb{A}$, esto implica $\langle x| \mathbb{A}^\dagger |y\rangle \equiv \langle x| \mathbb{A} |y\rangle = \langle y| \mathbb{A} |x\rangle^*$.
  Estos operadores juegan el rol de los números reales en el sentido de que son "iguales a su propio complejo conjugado".

Operadores Hermíticos y Unitarios

- **Operadores Hermíticos:** Un operador será hermítico (o autoadjunto) si: $\mathbb{A}^\dagger = \mathbb{A}$, esto implica $\langle x | \mathbb{A}^\dagger | y \rangle \equiv \langle x | \mathbb{A} | y \rangle = \langle y | \mathbb{A} | x \rangle^*$.
  Estos operadores juegan el rol de los números reales en el sentido de que son "iguales a su propio complejo conjugado".
- **Operadores Unitarios:** Un operador será unitario si su inversa es igual a su adjunto: $\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^\dagger \Rightarrow \mathbb{U}^\dagger\mathbb{U} = \mathbb{U}\mathbb{U}^\dagger = \mathbb{I}$.
  Podemos decir varias cosas:
  - Las transformaciones unitarias dejan invariante al producto interno: $\langle \tilde{y} | \tilde{x} \rangle = \langle y | \mathbb{U}^\dagger\mathbb{U} | x \rangle = \langle y | x \rangle$
  - El producto de dos operadores unitarios también es unitario: $(\mathbb{U}\mathbb{V})^\dagger (\mathbb{U}\mathbb{V}) = \mathbb{V}^\dagger \underbrace{\mathbb{U}^\dagger\mathbb{U}}_{\mathbb{I}} \mathbb{V} = \mathbb{V}^\dagger\mathbb{V} = \mathbb{I}$

Operadores Hermíticos y Unitarios

- **Operadores Hermíticos:** Un operador será hermítico (o autoadjunto) si: $\mathbb{A}^\dagger = \mathbb{A}$, esto implica $\langle x| \mathbb{A}^\dagger |y\rangle \equiv \langle x| \mathbb{A} |y\rangle = \langle y| \mathbb{A} |x\rangle^*$.
  Estos operadores juegan el rol de los números reales en el sentido de que son "iguales a su propio complejo conjugado".
- **Operadores Unitarios:** Un operador será unitario si su inversa es igual a su adjunto: $\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^\dagger \Rightarrow \mathbb{U}^\dagger\mathbb{U} = \mathbb{U}\mathbb{U}^\dagger = \mathbb{I}$.
  Podemos decir varias cosas:
  - Las transformaciones unitarias dejan invariante al producto interno: $\langle \tilde{y} |\tilde{x}\rangle = \langle y| \mathbb{U}^\dagger\mathbb{U} |x\rangle = \langle y |x\rangle$
  - El producto de dos operadores unitarios también es unitario: $(\mathbb{U}\mathbb{V})^\dagger (\mathbb{U}\mathbb{V}) = \mathbb{V}^\dagger \underbrace{\mathbb{U}^\dagger\mathbb{U}}_{\mathbb{I}} \mathbb{V} = \mathbb{V}^\dagger\mathbb{V} = \mathbb{I}$
  - Los operadores unitarios aplican una base ortogonal en otra: $\left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \middle|\tilde{\mathrm{e}}_j\right\rangle = \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \middle| \mathbb{U} \middle|\mathrm{e}_j\right\rangle = \left\langle \mathrm{e}^i \middle| \mathbb{U}^\dagger\mathbb{U} \middle|\mathrm{e}_j\right\rangle = \left\langle \mathrm{e}^i \middle|\mathrm{e}_j\right\rangle = \delta^i_j$.

Ejercicio

Considere los siguientes operadores: $\mathbb{A} = \mathbb{A}^{\dagger}$ hermítico, $\mathbb{K} = -\mathbb{K}^{\dagger}$ antihermítico; $\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^{\dagger}$ unitario, $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ dos operadores genéricos. Pruebe las siguientes afirmaciones:

1. En general:
   1.1 $\left(\mathbb{P}^{\dagger}\right)^{-1} = \left(\mathbb{P}^{-1}\right)^{\dagger}$.
   1.2 $(\mathbb{P}\mathbb{Q})^{-1} = \mathbb{Q}^{-1}\mathbb{P}^{-1}$
   1.3 Si $[\mathbb{P}, \mathbb{Q}] = 0$, entonces $\mathbb{P}(\mathbb{Q})^{-1} = (\mathbb{Q})^{-1}\mathbb{P}$
2. Si $\mathbb{A}$ es hermítico entonces $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U}$ también será un operador hermítico.
3. Si $\mathbb{K}$ es antihermítico entonces $\tilde{\mathbb{K}} = \mathbb{U}^{-1}\mathbb{K}\mathbb{U}$ es también lo será. En particular eso se cumple para $\tilde{\mathbb{K}} = i\mathbb{A}$. Es decir, podemos construir un operador antihermítico a partir de uno hermítico.
4. Dados dos operadores $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, hermíticos, su composición $\mathbb{A}\mathbb{B}$, será hermítica *si y sólo si* $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ conmuntan.