Tensores:

L. A. Núñez
Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

18 de agosto de 2020

Agenda de Tensores

Tensores: Funcionales Bilineales 1/2

Definiremos como un tensor a un funcional lineal (bilineal en este caso) que asocia un elemento del Campo **K**, complejo o real, a un vector $|v\rangle \in V$, a una forma $\langle u| \in \mathbf{V}^*$, o ambas, y cumple con la linealidad. Esto es:

- $\forall \quad |v\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle u| \in \mathbf{V}^* \rightarrow \quad \mathcal{T}\left[\langle u|\,;|v\rangle\right] \in \mathbb{C}$
- $\mathcal{T}\left[\langle u|\,;\alpha\,|v_1\rangle + \beta\,|v_2\rangle\right] \equiv \alpha\mathcal{T}\left[\langle u|\,;|v_1\rangle\right] + \beta\,\mathcal{T}\left[\langle u|\,;|v_2\rangle\right] \quad \forall\,|v_1\rangle\,,|v_2\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle u| \in \mathbf{V}^*$
- $\mathcal{T}\left[\zeta\ \langle u_1| + \xi\,\langle u_2|\,;|v\rangle\right] \equiv \zeta\mathcal{T}\left[\langle u_1|\,;|v\rangle\right] + \xi\ \mathcal{T}\left[\langle u_2|\,;|v\rangle\right] \quad \forall\ |v\rangle\,, \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle u_1|\,,\langle u_2| \in \mathbf{V}^*$

Tensores: Funcionales Bilineales 1/2

Definiremos como un tensor a un funcional lineal (bilineal en este caso) que asocia un elemento del Campo **K**, complejo o real, a un vector $|v\rangle \in V$, a una forma $\langle u| \in \mathbf{V}^*$, o ambas, y cumple con la linealidad. Esto es:

- $\forall \quad |v\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle u| \in \mathbf{V}^* \rightarrow \quad \mathcal{T}[\langle u|\,;|v\rangle] \in \mathbb{C}$
- $\mathcal{T}[\langle u|\,;\alpha\,|v_1\rangle + \beta\,|v_2\rangle] \equiv$
  $\alpha\mathcal{T}[\langle u|\,;|v_1\rangle]+\beta\,\mathcal{T}[\langle u|\,;|v_2\rangle] \quad \forall\,|v_1\rangle\,,|v_2\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle u| \in \mathbf{V}^*$
- $\mathcal{T}[\zeta\ \langle u_1| + \xi\,\langle u_2|\,;|v\rangle] \equiv \zeta\mathcal{T}[\langle u_1|\,;|v\rangle] +$
  $\xi\ \mathcal{T}[\langle u_2|\,;|v\rangle] \quad \forall\ |v\rangle\,, \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle u_1|\,,\langle u_2| \in \mathbf{V}^*$
- Un tensor es un funcional generalizado cuyos argumentos son vectores y/o formas

Tensores: Funcionales Bilineales 1/2

Definiremos como un tensor a un funcional lineal (bilineal en este caso) que asocia un elemento del Campo $\mathbf{K}$, complejo o real, a un vector $|v\rangle \in V$, a una forma $\langle u| \in \mathbf{V}^*$, o ambas, y cumple con la linealidad. Esto es:

- $\forall \quad |v\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle u| \in \mathbf{V}^* \rightarrow \quad \mathcal{T}\left[\langle u| \, ; |v\rangle\right] \in \mathbb{C}$
- $\mathcal{T}\left[\langle u| \, ; \alpha\, |v_1\rangle + \beta\, |v_2\rangle\right] \equiv \alpha\mathcal{T}\left[\langle u| \, ; |v_1\rangle\right] + \beta\,\mathcal{T}\left[\langle u| \, ; |v_2\rangle\right] \quad \forall\, |v_1\rangle\,, |v_2\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle u| \in \mathbf{V}^*$
- $\mathcal{T}\left[\zeta\ \langle u_1| + \xi\, \langle u_2| \, ; |v\rangle\right] \equiv \zeta\mathcal{T}\left[\langle u_1| \, ; |v\rangle\right] + \xi\ \mathcal{T}\left[\langle u_2| \, ; |v\rangle\right] \quad \forall\ |v\rangle\,, \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle u_1|\,, \langle u_2| \in \mathbf{V}^*$

- Un tensor es un funcional generalizado cuyos argumentos son vectores y/o formas
- $\mathcal{T}\left[\circ; \bullet\right]$ es una cantidad con dos “puestos” y una vez “cubiertos” se convierte en un escalar (complejo o real).

Tensores: Funcionales Bilineales 2/2

- En general

$$\mathcal{T}\left[\begin{array}{c}|v_1\rangle\\ \downarrow\\ \circ\end{array},\begin{array}{c}|v_2\rangle\\ \downarrow\\ \circ\end{array},\cdots,\begin{array}{c}|v_n\rangle\\ \downarrow\\ \circ\end{array};\begin{array}{c}\langle u_1|\\ \downarrow\\ \bullet\end{array},\begin{array}{c}\langle u_2|\\ \downarrow\\ \bullet\end{array}\cdots,\begin{array}{c}\langle u_m|\\ \downarrow\\ \bullet\end{array}\right]\in\mathbb{C}\quad \text{tensor de tipo } \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}.$$

Tensores: Funcionales Bilineales 2/2

- En general

$$\mathcal{T}\left[\begin{array}{c}|v_1\rangle \\ \downarrow \\ \circ\end{array}, \begin{array}{c}|v_2\rangle \\ \downarrow \\ \circ\end{array}, \cdots, \begin{array}{c}|v_n\rangle \\ \downarrow \\ \circ\end{array}; \begin{array}{c}\langle u_1| \\ \downarrow \\ \bullet\end{array}, \begin{array}{c}\langle u_2| \\ \downarrow \\ \bullet\end{array} \cdots, \begin{array}{c}\langle u_m| \\ \downarrow \\ \bullet\end{array}\right] \in \mathbb{C} \quad \text{tensor de tipo } \left(\begin{array}{c} m \\ n \end{array}\right).$$

- $\mathcal{T} : \underbrace{\mathbf{V}^* \times \mathbf{V}^* \cdots \mathbf{V}^* \times \mathbf{V}^*}_{\mathbf{V}^{*m}} \times \underbrace{\mathbf{V} \times \mathbf{V} \cdots \mathbf{V} \times \mathbf{V}}_{\mathbf{V}^n} \rightarrow \mathbb{C}$

Tensores: Funcionales Bilineales 2/2

- En general

$$\mathcal{T}\left[\begin{array}{cccccccccc} |v_1\rangle & |v_2\rangle & & |v_n\rangle & \langle u_1| & \langle u_2| & & \langle u_m| \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \circ, & \circ, & \cdots, & \circ; & \bullet, & \bullet & \cdots, & \bullet \end{array}\right] \in \mathbb{C} \quad \text{tensor de tipo} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}.$$

- $\mathcal{T} : \underbrace{\mathbf{V}^* \times \mathbf{V}^* \cdots \mathbf{V}^* \times \mathbf{V}^*}_{\mathbf{V}^{*m}} \times \underbrace{\mathbf{V} \times \mathbf{V} \cdots \mathbf{V} \times \mathbf{V}}_{\mathbf{V}^n} \rightarrow \mathbb{C}$
- **Un vector** es un tensor del tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{T}\left[\begin{array}{c} \langle u| \\ \downarrow \\ \bullet \end{array}\right] \in \mathbb{C}.$
- **Una forma** es un tensor del tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{T}\left[\begin{array}{c} |v\rangle \\ \downarrow \\ \circ \end{array}\right] \in \mathbb{C}.$
- **Un escalar** es un tensor del tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}.$

Producto Tensorial: Definición

Dados $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ dos espacios vectoriales con dimensiones n_1 y n_2, respectivamente y vectores genéricos, $|\varphi(1)\rangle \in \mathbf{E}_1$ y $|\chi(2)\rangle \in \mathbf{E}_2$.

- Definiremos el *producto tensorial* (*exterior o directo*) de espacios vectoriales, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2$, si a cada par de vectores $|\varphi(1)\rangle$ y $|\chi(2)\rangle$ le asociamos un tensor tipo $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Producto Tensorial: Definición

Dados $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ dos espacios vectoriales con dimensiones n_1 y n_2, respectivamente y vectores genéricos, $|\varphi(1)\rangle \in \mathbf{E}_1$ y $|\chi(2)\rangle \in \mathbf{E}_2$.

- Definiremos el *producto tensorial* (*exterior o directo*) de espacios vectoriales, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2$, si a cada par de vectores $|\varphi(1)\rangle$ y $|\chi(2)\rangle$ le asociamos un tensor tipo $\left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array}\right)$
- Si se cumple que $|\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle \Leftrightarrow$

$$\mathcal{T}\left[\begin{array}{ccc} \langle\zeta(1)| & & \langle\xi(2)| \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & , & \bullet \\ & & \end{array}\right] = \langle\zeta(1)\,|\varphi(1)\rangle\,\langle\xi(2)\,|\chi(2)\rangle \in \mathbb{C}$$

Producto Tensorial: Propiedades

- La suma entre tensores de **E** viene definida como:

$$\begin{aligned} |\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle &= |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2)\rangle \\ &= |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + \xi(2)\rangle \ ; \end{aligned}$$

Producto Tensorial: Propiedades

- La suma entre tensores de **E** viene definida como:

$$
\begin{aligned}
|\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle &= |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2)\rangle \\
&= |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + \xi(2)\rangle \ ;
\end{aligned}
$$

- El producto tensorial es lineal respecto a la multiplicación con números reales λ y μ

$$
\begin{aligned}
[|\lambda\varphi(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle = [\lambda\, |\varphi(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle = \lambda\, [|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle] \\
|\varphi(1)\rangle \otimes [|\mu\chi(2)\rangle] = |\varphi(1)\rangle \otimes [\mu\, |\chi(2)\rangle] = \mu\, [|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle]
\end{aligned}
$$

Producto Tensorial: Propiedades

- La suma entre tensores de **E** viene definida como:

$$\begin{aligned} |\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle &= |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2)\rangle \\ &= |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + \xi(2)\rangle \ ; \end{aligned}$$

- El producto tensorial es lineal respecto a la multiplicación con números reales λ y μ

$$[|\lambda\varphi(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle = [\lambda\, |\varphi(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle = \lambda\, [|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle]$$
$$|\varphi(1)\rangle \otimes [|\mu\chi(2)\rangle] = |\varphi(1)\rangle \otimes [\mu\, |\chi(2)\rangle] = \mu\, [|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle]$$

- El producto tensorial es distributivo respecto a la suma:

$$|\varphi(1)\rangle \otimes [|\chi_1(2)\rangle + |\chi_2(2)\rangle] = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi_1(2)\rangle + |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi_2(2)\rangle$$
$$[|\varphi_1(1)\rangle + |\varphi_2(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle = |\varphi_1(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + |\varphi_2(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle$$

Producto Tensorial: Espacio Vectorial

- Dados $|\varphi(1)\chi(2)\rangle, |\phi(1)\xi(2)\rangle, |\omega(1)\theta(2)\rangle, \in \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2$ entonces la operación suma $\boxplus$

Producto Tensorial: Espacio Vectorial

- Dados $|\varphi(1)\chi(2)\rangle, |\phi(1)\xi(2)\rangle, |\omega(1)\theta(2)\rangle, \in \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2$ entonces la operación suma $\boxplus$
  - es cerrada
  - es conmutativa y asociativa
  - Existe un único elemento neutro: $|0(1)0(2)\rangle$
  - Existe un elemento simétrico para cada elemento: $|\varphi(1)\chi(2)\rangle \Leftrightarrow -|\varphi(1)\chi(2)\rangle$
  - Cumple con las propiedades de multiplicación por números

Producto Tensorial: Espacio Vectorial

- Dados $|\varphi(1)\chi(2)\rangle, |\phi(1)\xi(2)\rangle, |\omega(1)\theta(2)\rangle, \in \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2$ entonces la operación suma $\boxplus$
  - es cerrada
  - es conmutativa y asociativa
  - Existe un único elemento neutro: $|0(1)0(2)\rangle$
  - Existe un elemento simétrico para cada elemento: $|\varphi(1)\chi(2)\rangle \Leftrightarrow -|\varphi(1)\chi(2)\rangle$
  - Cumple con las propiedades de multiplicación por números
- $\langle\tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2)\,|\varphi(1)\chi(2)\rangle = \langle\tilde{\varphi}(1)\,|\varphi(1)\rangle \cdot \langle\tilde{\chi}(2)\,|\chi(2)\rangle$ NO es producto interno

Producto Tensorial: Espacio Vectorial

- Dados $|\varphi(1)\chi(2)\rangle, |\phi(1)\xi(2)\rangle, |\omega(1)\theta(2)\rangle, \in \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2$ entonces la operación suma $\boxplus$
  - es cerrada
  - es conmutativa y asociativa
  - Existe un único elemento neutro: $|0(1)0(2)\rangle$
  - Existe un elemento simétrico para cada elemento: $|\varphi(1)\chi(2)\rangle \Leftrightarrow -|\varphi(1)\chi(2)\rangle$
  - Cumple con las propiedades de multiplicación por números
- $\langle\tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2)\,|\varphi(1)\chi(2)\rangle = \langle\tilde{\varphi}(1)\,|\varphi(1)\rangle \cdot \langle\tilde{\chi}(2)\,|\chi(2)\rangle$ NO es producto interno
- Si $\{|u_i(1)\rangle\}$ y $\{|v_i(2)\rangle\}$ bases discretas para $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ entonces $|u_i(1)v_j(2)\rangle = |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle$ será base para $\mathbf{E}$

Producto Tensorial: Espacio Vectorial

- Dados $|\varphi(1)\chi(2)\rangle, |\phi(1)\xi(2)\rangle, |\omega(1)\theta(2)\rangle, \in \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2$ entonces la operación suma $\boxplus$
  - es cerrada
  - es conmutativa y asociativa
  - Existe un único elemento neutro: $|0(1)0(2)\rangle$
  - Existe un elemento simétrico para cada elemento: $|\varphi(1)\chi(2)\rangle \Leftrightarrow -|\varphi(1)\chi(2)\rangle$
  - Cumple con las propiedades de multiplicación por números
- $\langle\tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2)\,|\varphi(1)\chi(2)\rangle = \langle\tilde{\varphi}(1)\,|\varphi(1)\rangle \cdot \langle\tilde{\chi}(2)\,|\chi(2)\rangle$ NO es producto interno
- Si $\{|u_i(1)\rangle\}$ y $\{|v_i(2)\rangle\}$ bases discretas para $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ entonces $|u_i(1)v_j(2)\rangle = |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle$ será base para $\mathbf{E}$
- Entonces un tensor genérico

$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle = \varphi^i\chi^j\,|u_i(1)v_j(2)\rangle = c^{ij}\,|u_i(1)v_j(2)\rangle$$

Ejemplo

- Definimos la siguiente operación: $\mathbf{M}_{31} \otimes \mathbf{M}_{13} = \mathbf{M}_{33}$

$$|\mathrm{v}\ \ \mathrm{u}\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \otimes (y_1\ \ y_2\ \ y_3) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{pmatrix}.$$

Es un funcional bilineal

Ejemplo

- Definimos la siguiente operación: $\mathbf{M}_{31} \otimes \mathbf{M}_{13} = \mathbf{M}_{33}$

$$|\mathrm{v}\ \ \mathrm{u}\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{pmatrix}.$$

  Es un funcional bilineal

- Si $|e_1(1)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|e_2(1)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|e_3(1)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
  base para $\mathbf{V}^1$ y
  $\langle e_1(2)| = (1\,0\,0)$, $\langle e_2(2)| = (0\,1\,0)$, $\langle e_3(2)| = (0\,0\,1)$
  base para $\mathbf{V}^{2*}$ entonces podemos construir:

$$|e_1(1)\rangle \otimes \langle e_1(2)| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, |e_1(1)\rangle \otimes \langle e_2(2)| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\ldots$

Tensores, componentes y contracciones

- Las componentes de un tensor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ serán

$$S_{ijk}^{mn} = \mathcal{S}\left[\begin{array}{ccccccccc} |u_i(1)\rangle & & |v_j(2)\rangle & & |w_k(3)\rangle & & \langle x^m(1)| & & \langle y^n(2)| \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \circ & , & \circ & , & \circ & ; & \bullet & , & \bullet \\ & & & & & & & & \end{array}\right].$$

Tensores, componentes y contracciones

- Las componentes de un tensor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ serán

$$S^{mn}_{ijk} = \mathcal{S}\left[\begin{array}{ccccccccc} |u_i(1)\rangle & & \left|v_j(2)\right\rangle & & |w_k(3)\rangle & & \langle x^m(1)| & & \langle y^n(2)| \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \circ & , & \circ & , & \circ & ; & \bullet & , & \bullet \\ & & & & & & & & \end{array}\right].$$

- Combinaciones lineales de tensores $R^{ij}_{kl} = \alpha Q^{ij}_{kl} + \beta P^{ij}_{kl}$.

Tensores, componentes y contracciones

- Las componentes de un tensor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ serán

$$S^{mn}_{ijk} = \mathcal{S}\left[\begin{array}{ccccc} |u_i(1)\rangle & |v_j(2)\rangle & |w_k(3)\rangle & \langle x^m(1)| & \langle y^n(2)| \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \circ\ , & \circ\ , & \circ\ ; & \bullet\ , & \bullet \\ & & & & \end{array}\right].$$

- Combinaciones lineales de tensores $R^{ij}_{kl} = \alpha Q^{ij}_{kl} + \beta P^{ij}_{kl}$.
- Producto tensorial de tensores $R^{ijlm}_{k} = T^{ij} P^{lm}_{k}$

Tensores, componentes y contracciones

- Las componentes de un tensor $\left(\begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array}\right)$ serán

$$S^{mn}_{ijk} = \mathcal{S} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} |u_i(1)\rangle & |v_j(2)\rangle & |w_k(3)\rangle & \langle x^m(1)| & \langle y^n(2)| \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} \circ \;, & \circ \;, & \circ \;; & \bullet \;, & \bullet \end{array} \right] \end{array} .$$

- Combinaciones lineales de tensores $R^{ij}_{kl} = \alpha Q^{ij}_{kl} + \beta P^{ij}_{kl}$.
- Producto tensorial de tensores $R^{ijlm}_{k} = T^{ij} P^{lm}_{k}$
- Contracción de un tensor. dos tensores, P^{lm} y Q^{ij}_{zk} generarán componentes de nuevos tensores $R^{lij}_{k} = P^{lm} Q^{ij}_{mk}$:

$$\left.\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array}\right) & \Rightarrow & P^{lm} \\ \left(\begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array}\right) & \Rightarrow & Q^{ij}_{zk} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array}\right) \Rightarrow R^{lij}_{k} = P^{lm} Q^{ij}_{mk} .$$

Simetrización de tensores

- Un tensor (las componentes) será simétrico respecto a dos de sus índices si su permutación no cambia su valor:

$$S_{ij} = S_{ji}\,,\; S^{ij} = S^{ji}\,,\; S_{ij\cdots kl\cdots mn} = S_{ij\cdots lk\cdots mn}\,,\; S^{ij\cdots kl\cdots mn} = S^{ij\cdots lk\cdots mn}$$

y será antisimétrico si:

$$A_{ij} = -A_{ji}\,,\; A^{ij} = -A^{ji}\,,\; A_{ij\cdots kl\cdots mn} = -A_{ij\cdots lk\cdots mn}\,,$$
$$A^{ij\cdots kl\cdots mn} = -A^{ij\cdots lk\cdots mn}\,.$$

Simetrización de tensores

- Un tensor (las componentes) será simétrico respecto a dos de sus índices si su permutación no cambia su valor:

  $$S_{ij} = S_{ji}\,,\ S^{ij} = S^{ji}\,,\ S_{ij\cdots kl\cdots mn} = S_{ij\cdots lk\cdots mn}\,,\ S^{ij\cdots kl\cdots mn} = S^{ij\cdots lk\cdots mn}$$

  y será antisimétrico si:

  $$A_{ij} = -A_{ji}\,,\ A^{ij} = -A^{ji}\,,\ A_{ij\cdots kl\cdots mn} = -A_{ij\cdots lk\cdots mn}\,,$$
  $$A^{ij\cdots kl\cdots mn} = -A^{ij\cdots lk\cdots mn}\,.$$

- Un tensor de rango 2, viene representado por una matriz que tendrá $3^2 = 9$ componentes. Si la matriz es simétrica tendrá como máximo 6 componentes distintas.

  $$S^i_j = S^j_i = \begin{pmatrix} S^1_1 & S^1_2 & S^1_3 \\ S^2_1 & S^2_2 & S^2_3 \\ S^3_1 & S^3_2 & S^3_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^1_1 & S^2_1 & S^3_1 \\ S^1_2 & S^2_2 & S^3_2 \\ S^1_3 & S^2_3 & S^3_3 \end{pmatrix}\,.$$

  ¿Cuantás componentes independientes tiene un tensor antisimétrico de rango 2?

Simetrización de tensores

- Siempre es posible construir tensores simétricos y antisimétricos a partir de un tensor genérico. Esto es:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right) \equiv T_{(ij)} \quad \Longleftrightarrow$$

$$S_{ij\cdots kl\cdots mn} = \frac{1}{2}\left(T_{ij\cdots kl\cdots mn} + T_{ij\cdots lk\cdots mn}\right) = T_{ij\cdots(kl)\cdots mn}$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right) \equiv T_{[ij]} \quad \Longleftrightarrow$$

$$A_{ij\cdots kl\cdots mn} = \frac{1}{2}\left(T_{ij\cdots kl\cdots mn} - T_{ij\cdots lk\cdots mn}\right) = T_{ij\cdots[kl]\cdots mn}\,.$$

Simetrización de tensores

- Siempre es posible construir tensores simétricos y antisimétricos a partir de un tensor genérico. Esto es:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right) \equiv T_{(ij)} \quad \Longleftrightarrow$$

$$S_{ij\cdots kl\cdots mn} = \frac{1}{2}\left(T_{ij\cdots kl\cdots mn} + T_{ij\cdots lk\cdots mn}\right) = T_{ij\cdots(kl)\cdots mn}$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right) \equiv T_{[ij]} \quad \Longleftrightarrow$$

$$A_{ij\cdots kl\cdots mn} = \frac{1}{2}\left(T_{ij\cdots kl\cdots mn} - T_{ij\cdots lk\cdots mn}\right) = T_{ij\cdots[kl]\cdots mn} \, .$$

- Es evidente que las componentes de un tensor genérico, T_{ij}, pueden expresarse como una combinación de su parte simétrica y antisimétrica:

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij} \, .$$

Puntos y Coordenadas

Consideremos un determinado punto, P, expresado en un sistema de coordenadas particular: $\left(x^1, x^2, \cdots, x^n\right)$ y las coordenadas de ese mismo punto P, expresado en otro sistema de coordenadas $\left(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \cdots, \tilde{x}^n\right)$. Ambas representaciones coordenadas de P estarán relacionadas por:

$$\left.\begin{array}{c} \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1\left(x^1, x^2, \cdots, x^n\right) \\ \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2\left(x^1, x^2, \cdots, x^n\right) \\ \vdots \\ \tilde{x}^n = \tilde{x}^n\left(x^1, x^2, \cdots, x^n\right) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^1 = x^1\left(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \cdots, \tilde{x}^n\right) \\ x^2 = x^2\left(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \cdots, \tilde{x}^n\right) \\ \vdots \\ x^n = x^n\left(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \cdots, \tilde{x}^n\right) \end{array}\right.$$

En una notación más compacta lo que tenemos es:

$$\tilde{x}^i = \tilde{x}^i\left(x^j\right) \Longleftrightarrow x^i = x^i\left(\tilde{x}^j\right), \quad \text{con} \quad i, j = 1, 2, 3, \cdots, n. \tag{1}$$

¿Cuándo podemos transformar coordenadas?

- Las funciones $x^i = x^i\left(\tilde{x}^m\right)$ y $\tilde{x}^j = \tilde{x}^j\left(x^m\right)$ sean al menos $\mathcal{C}^2$ (función y derivada continua)

¿Cuándo podemos transformar coordenadas?

- Las funciones $x^i = x^i\left(\tilde{x}^m\right)$ y $\tilde{x}^j = \tilde{x}^j\left(x^m\right)$ sean al menos $\mathcal{C}^2$ (función y derivada continua)
- Que el determinante de la matriz jacobiana sean finito y distinto de cero, esto es

$$\det\left|\frac{\partial x^i\left(\tilde{x}^m\right)}{\partial \tilde{x}^j}\right| \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^n} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} & \cdots & \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^2} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^n} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

$$x^i = x^i\left(\tilde{x}^m\right) \Longleftrightarrow \tilde{x}^j = \tilde{x}^j\left(x^m\right) .$$

Ahora bien, una vez más, derivando y utilizando la regla de la cadena:

$$x^i = x^i\left(\tilde{x}^j\left(x^m\right)\right) \Rightarrow \frac{\partial x^i}{\partial x^m} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^m} = \delta^i_m \Rightarrow \mathrm{d}x^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\mathrm{d}\tilde{x}^j .$$

Las componentes contravariantes de un vector transforman....

Un conjunto de cantidades $\left\{a^1, a^2, \cdots, a^n\right\}$ se denominarán componentes *contravariantes* de un vector $|a\rangle \in \mathbf{V}$ en un punto P de coordenadas $\left(x^1, x^2, \cdots, x^n\right)$, si:

1. dada dos bases ortonormales de vectores coordenados: $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, \cdots, |\mathrm{e}_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathrm{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathrm{e}}_2\rangle, \cdots, |\tilde{\mathrm{e}}_n\rangle\}$, se cumple que:

$$|a\rangle = a^i |\mathrm{e}_i\rangle = \tilde{a}^i |\tilde{\mathrm{e}}_i\rangle \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{c} \left\langle \mathrm{e}^i \middle| a \right\rangle = a^i \\ \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \middle| a \right\rangle = \tilde{a}^i \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; \tilde{a}^i = a^j \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \middle| \mathrm{e}_j \right\rangle .$$

Las componentes contravariantes de un vector transforman....

Un conjunto de cantidades $\left\{a^1, a^2, \cdots, a^n\right\}$ se denominarán componentes *contravariantes* de un vector $|a\rangle \in \mathbf{V}$ en un punto P de coordenadas $\left(x^1, x^2, \cdots, x^n\right)$, si:

1. dada dos bases ortonormales de vectores coordenados: $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, \cdots, |\mathrm{e}_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathrm{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathrm{e}}_2\rangle, \cdots, |\tilde{\mathrm{e}}_n\rangle\}$, se cumple que:

$$|a\rangle = a^i |\mathrm{e}_i\rangle = \tilde{a}^i |\tilde{\mathrm{e}}_i\rangle \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{c} \left\langle \mathrm{e}^i \right| a\rangle = a^i \\ \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \right| a\rangle = \tilde{a}^i \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; \tilde{a}^i = a^j \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \right. |\mathrm{e}_j\rangle .$$

2. o equivalentemente, bajo una transformación de coordenadas: $x^i = x^i\left(\tilde{x}^j\right)$, con $i, j = 1, 2, 3, \cdots, n$, estas cantidades transforman como:

$$\tilde{a}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}\, a^k \iff a^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}\, \tilde{a}^k , \quad \text{con: } \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^l} = \delta^i_l ,$$

y donde las cantidades $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}$ y $\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}$ deberán ser evaluadas en el punto P.

Las componentes covariantes de un vector transforman...

Un conjunto de cantidades $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ se denominarán componentes *covariantes* de un vector $\langle b| \in \mathbf{V}^*$ en un punto P de coordenadas $\left(x^1, x^2, \cdots, x^n\right)$, si:

1. dada dos bases de formas: $\left\{\left\langle \mathrm{e}^1\right|, \left\langle \mathrm{e}^2\right|, \cdots, \langle \mathrm{e}^n|\right\}$ y $\left\{\left\langle \tilde{\mathrm{e}}^1\right|, \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^2\right|, \cdots, \langle \tilde{\mathrm{e}}^n|\right\}$ se cumple que:

$$\langle b| = b_i \left\langle \mathrm{e}^i\right| = \tilde{b}_i \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i\right| \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{c} \langle b|\, \mathrm{e}^i\rangle = b^i \\ \langle b|\, \tilde{\mathrm{e}}^i\rangle = \tilde{b}^i \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; \tilde{b}^i = b^j \left\langle \mathrm{e}_j \,\middle|\, \tilde{\mathrm{e}}^i \right\rangle .$$

Las componentes covariantes de un vector transforman...

Un conjunto de cantidades $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ se denominarán componentes *covariantes* de un vector $\langle b| \in \mathbf{V}^*$ en un punto P de coordenadas $\left(x^1, x^2, \cdots, x^n\right)$, si:

1. dada dos bases de formas: $\left\{\left\langle \mathrm{e}^1\right|, \left\langle \mathrm{e}^2\right|, \cdots, \left\langle \mathrm{e}^n\right|\right\}$ y $\left\{\left\langle \tilde{\mathrm{e}}^1\right|, \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^2\right|, \cdots, \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^n\right|\right\}$ se cumple que:

$$\langle b| = b_i \left\langle \mathrm{e}^i\right| = \tilde{b}_i \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i\right| \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} \left\langle b \right| \left. \mathrm{e}^i \right\rangle = b^i \\ \left\langle b \right| \left. \tilde{\mathrm{e}}^i \right\rangle = \tilde{b}^i \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; \tilde{b}^i = b^j \left\langle \mathrm{e}_j \right| \left. \tilde{\mathrm{e}}^i \right\rangle .$$

2. o equivalentemente, bajo una transformación de coordenadas $x^i = x^i\left(\tilde{x}^j\right)$ (con $i, j = 1, 2, 3, \cdots, n$) estas cantidades transforman como:

$$\tilde{b}_k = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}\, b_i \iff b_k = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}\, \tilde{b}_i\,, \text{ con: } \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^l} = \delta^i_l\,, \quad (2)$$

y donde las cantidades: $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}$ y $\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}$ deberán ser evaluadas en el punto P.

Las componentes de un tensor transforman ....

Generalizamos los conceptos anteriores de la siguiente manera. Dado un conjunto bases para las formas diferenciales $\{\langle x^m(1)|, \langle y^n(2)|\}$, hemos definido las componentes *contravariantes* de un tensor:

$$T^{ij} = \mathcal{T}\left[\begin{array}{ccc} \langle x^i(1)| & & \langle y^j(2)| \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & , & \bullet \\ & & \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left\{T^{ij}\right\} \equiv \left\{T^{11}, T^{12}, \cdots, T^{1n}; T^{21}, T^{22}, \cdots\right.$$

en esta visión, las componentes contravariantes en un punto P de coordenadas $\left(x^1, x^2, \cdots, x^n\right) \Leftrightarrow x^i = x^i\left(\tilde{x}^j\right)$ (con $i, j = 1, 2, 3, \cdots, n$) transforman como:

$$\tilde{T}^{ij} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^m}\, T^{km} \quad \Longleftrightarrow \quad T^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m}\, \tilde{T}^{km}\,, \text{ con: } \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^l} = \delta^i_l\,,$$

donde $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}$ y $\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}$ deberán ser evaluadas en el punto P.

Las componentes de un tensor transforman

Si $\{|t_i(1)\rangle, \cdots, |v_k(m)\rangle\}$ y $\{\langle x^e(1)|, \cdots, \langle z^g(n)|\}$ son bases para vectores y formas. Las componentes de un tensor:

$$T^{mn}_{ijk} = \mathcal{T}\left[\overset{|t_i(1)\rangle}{\overset{\downarrow}{\circ}}, \overset{|u_j(2)\rangle}{\overset{\downarrow}{\circ}}, ,\cdots, \overset{|v_k(m)\rangle}{\overset{\downarrow}{\circ}} ; \overset{\langle x^e(1)|}{\overset{\downarrow}{\bullet}}, \overset{\langle y^f(2)|}{\overset{\downarrow}{\bullet}}, \cdots, \overset{\langle z^g(n)|}{\overset{\downarrow}{\bullet}}\right],$$

serán un conjunto de cantidades:
$\left\{T^{1\cdots1}_{1\cdots1}, T^{2\cdots1}_{1\cdots1}, \cdots, T^{\cdots1}_{1\cdots1}, T^{\tilde{n}\cdots1}_{1\cdots1}, T^{\tilde{n}\cdots1}_{2\cdots1}, \cdots, T^{1\cdots1}_{\tilde{m}\cdots1}, \cdots, T^{\tilde{n}\cdots\tilde{n}}_{\tilde{m}\cdots\tilde{m}}\right\}$ que *contravariantes* y *covariantes* respectivamente, de un tensor mixto en un punto P de coordenadas $\left(x^1, \cdots, x^n\right)$.
Bajo una transformación de coordenadas $x^i = x^i\left(\tilde{x}^j\right)$ con $i, j = 1, \cdots, n$ estas cantidades transforman como:

$$\tilde{T}^{i\cdots k}_{e\cdots g} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^p} \cdots \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^q} \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^e} \cdots \frac{\partial x^d}{\partial \tilde{x}^g} \; T^{p\cdots q}_{a\cdots d}$$

$$T^{i\cdots k}_{e\cdots g} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^p} \cdots \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^q} \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^e} \cdots \frac{\partial \tilde{x}^d}{\partial x^g} \; T^{p\cdots q}_{a\cdots d},$$

con: $\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^l} = \delta^i_l$ y $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}$ y $\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}$ evaluadas en el punto P.