

Modelos de Computação (CC1004) - Folha de trabalho n. 1

Linguagens

Exercícios

1.1 Seja Σ o alfabeto $\{0, 1\}$. Sendo $A = \{10, 11\}$ e $B = \{00, 1\}$, determina:

- (a) $A \cup B$
- (b) AB
- (c) BA
- (d) A^3
- (e) A^*

1.2 Mostra que é verdade, ou encontra um contra-exemplo para

- (a) $A \cap C = B \cap C \Rightarrow A = B$.
- (b) $A \cup C = B \cup C \Rightarrow A = B$.
- (c) $((A \cap C = B \cap C) \wedge (A \cup C = B \cup C)) \Rightarrow A = B$.

1.3 Considera $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 14, 17, 18\}$.

- (a) Quantos subconjuntos de A têm 6 elementos?
- (b) Quantos subconjuntos de A com seis elementos contêm quatro inteiros pares e dois inteiros ímpares?
- (c) Quantos subconjuntos de A contêm somente inteiros ímpares?

★ 1.4 Sejam L e M linguagens de alfabeto $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ dadas por

$$\begin{aligned} L &= \{01, 10, 1\} \\ M &= \{x \mid x \in \Sigma^*, |x| \leq 4 \text{ e o número de } 0\text{'s em } x \text{ é menor ou igual a dois}\}. \end{aligned}$$

- (a) Determina $\{xyz \mid x \in L, y \in L, z \in L\}$, ou seja a linguagem L^3 .
- (b) Determina as linguagens ML e LM e verifica se:
 - i) Existe $x \in \Sigma^*$ tal que $x \in (LM) \cap (ML)$?
 - ii) $L \subseteq LM$? $M \subseteq LM$? $L \subseteq ML$? $M \subseteq ML$?
- (c) Seja L^* o conjunto das sequências finitas (incluindo ϵ) de palavras de L . Descreve informalmente L^* .

1.5 Considera a palavra **aaaba** de alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$. Indica, justificando, se tal palavra pertence ou não a cada uma das linguagens seguintes:

- (a) $\{a, b\}^*$
- (b) $\{aaa, bab\}\{ba, bb\}$
- (c) $\{aaa\}^*\{b\}^*\{a\}$
- (d) $\{a\}^*\{b\}^*\{a\}^*$
- (e) $\{aa\}^*\{a\}^*\{a, ba, bb, \epsilon\}$

1.6 Descreve informalmente a linguagem $L \subseteq \{A, B\}^*$ definida indutivamente por:

- i) $A \in L$
- ii) $y \in L \Rightarrow By \in L$
- iii) $y \in L \Rightarrow yB \in L$
- iv) $y \in L \Rightarrow AyA \in L$

Modelos de Computação (CC1004) - Folha de trabalho n. 1

1.7 Seja o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ e considera as seguintes linguagens:

$$\begin{aligned}A_1 &= \{0^n \mid n \geq 0\} \\A_2 &= \{1^n \mid n \geq 0\} \\A_3 &= \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}\end{aligned}$$

- (a) Determina e descreve informalmente $A_1 A_2$, $A_1 \cup A_2$, $(A_1 \cup A_2)^*$ e $A_1^* \cup A_2^*$
- (b) Para cada uma das linguagens que calculaste em (a):
 - 1. Determina a sua intersecção com $A_4 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \leq 3\}$
 - 2. Indica, justificando, se é igual a A_3 .

1.8 Seja o alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ e considera as seguintes linguagens:

$$\begin{aligned}B_1 &= \{a^n c b^n \mid n \geq 0\} \\B_2 &= \{a\}^* \{c\}^* \{b\}^* \\B_3 &= \{wcw \mid w \in \{a, b\}^*\}\end{aligned}$$

- (a) Determina e descreve informalmente $B_1 \cap B_2$, $B_2 \cap B_3$, $B_3 \setminus B_1$ e B_1^*
- (b) Para cada uma das linguagens que calculaste em (a):
 - 1. Determina a sua intersecção com $B_4 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \leq 5\}$
 - 2. Indica, justificando, se alguma é igual a B_1 .

1.9 Seja o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ e considera as seguintes linguagens:

$$\begin{aligned}C_1 &= \{aa\}^* \\C_2 &= \{bbb\}^* \\C_3 &= \{aa, bbb\}^*\end{aligned}$$

- (a) Determina e descreve informalmente $C_1 C_2$, $(C_1 C_2)^*$, $C_3 \setminus C_1$ e $C_1 \cup C_2$
- (b) Para cada uma das linguagens que calculaste em (a):
 - 1. Determina a sua intersecção com $C_4 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \leq 9\}$
 - 2. Indica, justificando, se alguma é igual a C_3 .

1.10 Seja o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ e considera as seguintes linguagens:

$$\begin{aligned}D_1 &= \{00, 11\}^* \\D_2 &= \{00\}^* \{11\}^* \\D_3 &= \{w \in \Sigma \mid \text{em } w \text{ o número de 0s é igual ao número de 1s}\}\end{aligned}$$

- (a) Determina e descreve informalmente $D_2 \cap D_3$, $D_3 \cap D_1$, $D_2 \setminus D_1$ e D_2^*
- (b) Para cada uma das linguagens que calculaste em (a):
 - 1. Determina a sua intersecção com $D_4 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \leq 6\}$
 - 2. Indica, justificando, se alguma é igual a D_1 .

Para cada uma das seguintes afirmações sobre linguagens A , B e C quaisquer diz se é verdadeira ou falsa, demonstrando se for verdadeira ou encontrando um contra-exemplo se for falsa.

- 1.11** (a) $(A \cap B)^* = A^* \cap B^*$
(b) $A(B \cup C) = AB \cup AC$

- 1.12** (a) $(A \cup B)^* = (A^* \cup B^*)^*$

Modelos de Computação (CC1004) - Folha de trabalho n. 1

(b) $(AB)^* = A^*B^*$

1.13 (a) $(AB)^*A = A(BA)^*$

(b) $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$

1.14 (a) $\{\epsilon\} \cup AA^* = A^*$

(b) $A(B \cap C) = AB \cap AC$

★ 1.15 Sejam L_1 , L_2 e L_3 as linguagens de alfabeto $\{a, b, c\}$ assim definidas:

$$L_1 = \{waw \mid w \in \{b, c\}^*\}$$

$$L_2 = \{cccc\}^*\{aaa\}^*$$

$$L_3 = \{wc^n \mid w \in \{a, b\}^*, n \in \mathbb{N}\}$$

(a) Para cada uma das linguagens L_i , determina em extensão

$$L'_i = \{x \mid 7 \leq |x| \leq 8, x \in L_i \text{ e } x \text{ tem pelo menos três } c\text{'s}\}.$$

(b) Descreve, informalmente, cada uma das linguagens L_i .

(c) Determina, $L_1 \cap L_3$, $L_1 \cap L_2$, $L_1 \cap L_3$ e L_2^* .

(d) Mostra que $L_2L_3 = \{cccc\}^*\{a, b\}^*\{c\}^*$ e descreve informalmente esta linguagem.

1.16 Para cada uma das seguintes afirmações sobre linguagens diz se é verdadeira ou falsa, demonstrando se for verdadeira ou encontrando um contra-exemplo se for falsa.

(a) $AB = BA$

(b) $\emptyset L = L\emptyset = \emptyset$

(c) $(L^*)^* = L^*$

(d) $L^*L^* = L^*$

(e) $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$

(f) $(A \cap B)^* = A^* \cap B^*$

(g) $(AB)^* = A^*B^*$

(h) se $L_1 \subseteq L_2$ então $L_1^* \subseteq L_2^*$

1.17 Para cada uma das seguintes afirmações, diz se é verdadeira ou falsa, justificando:

i) uma linguagem é vazia se só contém a palavra vazia;

ii) uma linguagem infinita contém alguma palavra infinita;

iii) se L é uma linguagem finita, o seu complementar. $\Sigma^* \setminus L$ é infinito

Resolução de exercícios escolhidos

1.4 (a) $L^3 = \{010101, 01011, 010110, 011001, 01101, 011010, 0111, 01110, 100101, 10011, 100110, 101001, 10101, 101010, 1011, 10110, 11001, 1101, 11010, 111, 1110\}$

(b)

$$ML = \{x \mid x \in \Sigma^*, |x| \leq 6 \text{ termina em } 10 \text{ ou } 01 \text{ e o número de zeros é menor ou igual a } 3\} \\ \cup \{x \mid x \in \Sigma^*, |x| \leq 5 \text{ termina em } 1 \text{ e o número de zeros é menor ou igual a } 2\}$$

$$LM = \{x \mid x \in \Sigma^*, |x| \leq 6 \text{ começa com } 10 \text{ ou } 01 \text{ e o número de zeros é menor ou igual a } 3\} \\ \cup \{x \mid x \in \Sigma^*, |x| \leq 5 \text{ começa em } 1 \text{ e o número de zeros é menor ou igual a } 2\}$$

Modelos de Computação (CC1004) - Folha de trabalho n. 1

- i) Como $\epsilon \in M$ temos $L \subseteq (LM \cap ML)$.
- ii)
 - $L \subseteq LM$ pois $\epsilon \in M$;
 - $M \not\subseteq LM$ pois $2222 \in M \wedge 2222 \notin LM$, porque nenhuma palavra de L começa com o carácter 2 e $\epsilon \notin L$;
 - $L \subseteq ML$ pois $\epsilon \in M$;
 - $M \not\subseteq ML$ pois $2222 \in M \wedge 2222 \notin ML$, porque nenhuma palavra de L termina com o carácter 2 e $\epsilon \notin L$.
- iii) L^* é a linguagem formada pelas palavras de caracteres 0 e 1 em que os 0's ocorrem sempre na vizinhança imediata de um 1.

1.15 (a)

$$\begin{aligned}L'_1 &= \{cccaccc, ccbaccb, cbcacbc, bccabcc\} \\L'_2 &= \{ccccaaa, ccccccc\} \\L'_3 &= \{\text{"não tenho paciência!!!"}\}\end{aligned}$$

- (b) Para todas as linguagens vamos subentender que têm alfabeto $\{a, b, c\}$...
- L_1 é a linguagem formada por palavras com exactamente um a , e cujas subpalavras à esquerda e direita deste a , são iguais;
 - L_2 é a linguagem formada por um número (eventualmente nulo) de blocos de quatro c 's seguido por um número (eventualmente nulo) de blocos de três a 's;
 - L_3 é a linguagem formada pelas palavras formadas por um bloco (eventualmente vazio) de a 's e b 's seguido por um qualquer número de c 's.

(c)

$$\begin{aligned}L_1 \cap L_3 &= \{waw \mid w \in \{b\}^*\} \\L_1 \cap L_2 &= \emptyset \\L_2 \cap L_3 &= \{aaa\}^* \\L_2^* &= \{aaa, cccc\}^*\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}L_2 L_3 &= \{wv \mid w \in L_2 \wedge v \in L_3\} \\&= \{cccc\}^* \{aaa\}^* \{a, b\}^* \{c\}^* \text{ (mas como } \{aaa\}^* \{a, b\}^* = \{a, b\}^* \text{)} \\&= \{cccc\}^* \{a, b\}^* \{c\}^*\end{aligned}$$

$L_2 L_3$ é a linguagem de alfabeto $\{a, b, c\}$ formada por um conjunto de c 's com tamanho múltiplo de 4, seguida por uma qualquer bloco (eventualmente vazio) formado somente por a 's e b 's, seguido por um qualquer número de c 's.