Máximos e mínimos de funções escalares

Máximos e mínimos de funções escalares

Definições

Seja $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função escalar. Diz-se que:

- f tem um máximo (global ou absoluto) em $X_0 \in A$ sse

$$\forall X \in A,\ f(X) \leq f(X_0);$$

- f tem um máximo local (ou relativo) em $X_0 \in A$ sse existe um aberto U contendo X_0 tal que

$$\forall X \in A \cap U,\ f(X) \leq f(X_0);$$

- f tem um mínimo (global ou absoluto) em $X_0 \in A$ sse

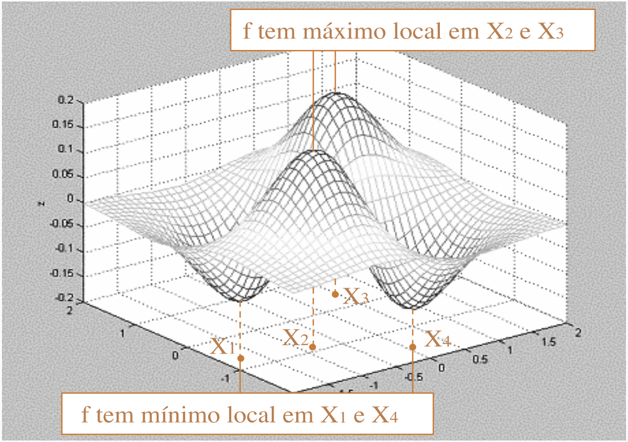
$$\forall X \in A,\ f(X) \geq f(X_0).$$

- f tem um mínimo local (ou relativo) em $X_0 \in A$ sse existe um aberto U contendo X_0 tal que

$$\forall X \in A \cap U,\ f(X) \geq f(X_0).$$

Máximos e mínimos de funções escalares

Máximos e mínimos

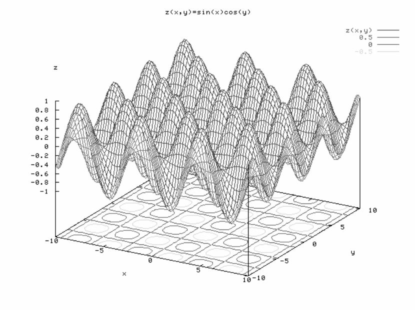


- Se f atinge um máximo [local] em X_0, diz-se também que $f(X_0)$ é valor máximo [local] de f e que X_0 é um ponto de valor máximo [local] de f.
  Usa-se terminologia análoga para mínimos [locais].
- Genericamente, chamam-se extremos [locais] aos valores máximos ou mínimos [locais] de uma função.
- É claro que se f tem um máximo (global) em X_0, então também tem um máximo local em X_0; uma observação análoga vale para mínimos.
- Uma função pode ter vários extremos locais, e cada um destes valores pode ser atingido em vários pontos. Mas tem quando muito um valor máximo e um valor mínimo, que também podem ser atingidos em vários pontos.

Máximos e mínimos de funções escalares

Terminologia e observações

Por exemplo, $f(x,y) = \operatorname{sen} x \cos y$ tem valor máximo 1, atingido em todos os pontos da forma $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2l\pi)$ e $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2l\pi)$, com $k, l \in \mathbb{Z}$; e tem valor mínimo -1 atingido em todos os pontos da forma $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2l\pi)$ e $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2l\pi)$, com $k, l \in \mathbb{Z}$.



- Para funções reais de variável real, são conhecidos resultados que permitem usar a primeira e a segunda derivada para a determinação dos extremos locais (recordar ...!).

O objectivo agora é apresentar generalizações destes resultados para funções escalares de várias variáveis.

Máximos e mínimos de funções deriváveis em abertos

Pontos críticos

Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função derivável.

- Um ponto $X_0 \in U$ tal que $\mathrm{D}\, f_{X_0}$ é a função nula, ou equivalentemente, tal que $\nabla f(X_0) = 0_{\mathbb{R}^n}$, chama-se um ponto crítico de f.

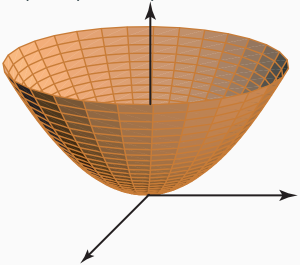
Prova-se que:

Se f tem um extremo local em X_0, então X_0 é ponto crítico de f.

No entanto, nem todos os pontos críticos são necessariamente pontos de valor máximo ou mínimo local.

- Um ponto crítico no qual f não atinge um extremo local diz-se um ponto sela.

1. Seja $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+y^2 \end{array}$. Então, $\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$.



$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) = (0,0) &\iff (2x,2y) = (0,0) \\ &\iff (x,y) = (0,0). \end{aligned}$$

Logo, o único ponto crítico de f é $(0,0)$.

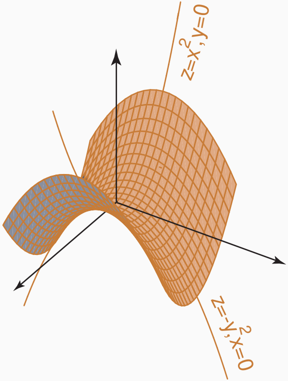
É claro que $(0,0)$ é um ponto de valor mínimo local (e global) de f, pois

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^2+y^2 \geq 0 = f(0,0).$$

2. Analogamente, a função $\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & -x^2-y^2 \end{array}$ tem um máximo local no ponto $(0,0)$.

3. Agora, considere-se $\begin{array}{rcl} h:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2-y^2 \end{array}$.

O único ponto crítico de h é também $(0,0)$ e, neste caso, é um ponto sela.



De facto, qualquer vizinhança de $(0,0)$ contém pontos da forma $(x,0)$, com $x \neq 0$, onde

$$f(x,0) = x^2 > 0 = f(0,0)$$

e contém pontos da forma $(0,y)$, com $y \neq 0$, onde

$$f(0,y) = -y^2 < 0 = f(0,0)$$

e portanto f não tem em $(0,0)$ um máximo ou um mínimo local.

Máximos e mínimos de funções deriváveis em abertos

Assim, os pontos de valor máximo ou mínimo local de uma função escalar, derivável e definida num aberto de $\mathbb{R}^n$, encontram-se entre os pontos críticos.

Mas, uma vez determinados os pontos críticos de uma tal função, nem sempre é tão simples como nos exemplos anteriores analisar directamente os valores da função para decidir se são máximos locais, mínimos locais ou pontos sela.

Ora, tal como no caso das funções reais de variável real, as derivadas de segunda ordem (a definir a seguir) contêm informação sobre a concavidade do gráfico da função e permitem, em certos casos, fazer a classificação dos pontos críticos.

Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe c^1.

Então, para todo o $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}$ e é contínua.

- Quando existem, as derivadas parciais $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ de cada uma destas funções $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ dizem-se as derivadas parciais de segunda ordem de f e usa-se a notação

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

- No caso particular de $j = i$ escreve-se ainda

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}.$$

Se $f(x,y,z) = x \operatorname{sen} z + e^{xyz}$, então as derivadas parciais (de primeira ordem) de f num ponto genérico $X = (x,y,z)$ são

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_X = \operatorname{sen} z + yze^{xyz}, \ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_X = xze^{xyz}, \ \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_X = x\cos z + xye^{xyz}$$

e algumas derivadas de segunda ordem de f são

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_X = y^2z^2e^{xyz} \qquad \text{(derivando } \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_X \text{ em ordem a } x\text{);}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right|_X = xe^{xyz} + x^2yze^{xyz} \qquad \text{(derivando } \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_X \text{ em ordem a } y\text{);}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right|_X = xe^{xyz} + x^2yze^{xyz} \qquad \text{(derivando } \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_X \text{ em ordem a } z\text{).}$$

Note-se que, embora $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right|_X$ e $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right|_X$ sejam calculadas de forma diferente, o resultado obtido foi o mesmo.

Máximos e mínimos de funções deriváveis em abertos

Matriz Hessiana

Repare-se que as derivadas parciais de segunda ordem de uma função $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são as derivadas parciais da função

$$\begin{array}{rcl} \nabla f : U & \to & \mathbb{R}^n \\ X & \mapsto & \nabla f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_X, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_X \right) \end{array}.$$

- Assim, a matriz jacobiana de ∇f num ponto $X_0 \in U$ é a matriz

$$\mathcal{J}(\nabla f)(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\Big|_{X_0} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}\Big|_{X_0} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}\Big|_{X_0} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\Big|_{X_0} \end{pmatrix}$$

que se chama a matriz hessiana de f em X_0 e se representa por $\text{Hess}\, f(X_0)$.

Nota: A designação "matriz hessiana" refere-se ao matemático alemão Ludwig Otto Hesse (22 April 1811 - 4 August 1874).

Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f : U \to \mathbb{R}$.

- Diz-se que f é de classe c^2 sse existem todas as derivadas parciais de segunda ordem de f, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, e são funções contínuas.

- Note-se que uma função de classe c^2 é necessariamente de classe c^1.

Prova-se que:

Se f é de classe c^2, então $\forall i, j = 1, \ldots, n$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

- Tendo em conta o resultado anterior, pode-se afirmar que se $f : U \to \mathbb{R}$ é de classe c^2, então a matriz hessiana de f em qualquer ponto $X_0 \in U$,

$$\operatorname{Hess} f(X_0) = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right|_{X_0} & \cdots & \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}\right|_{X_0} \\ \vdots & & \vdots \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}\right|_{X_0} & \cdots & \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\right|_{X_0} \end{pmatrix}$$

é uma matriz simétrica.

- Assim, resulta do Teorema Espectral, já conhecido de Álgebra Linear, que $\operatorname{Hess} f(X_0)$ é diagonalizável.

- Vamos ver como é que os sinais dos valores próprios de $\operatorname{Hess} f(X_0)$ podem ser usados para classificar um ponto crítico X_0 de f.

Máximos e mínimos de funções deriváveis em abertos

Classificação dos pontos críticos

Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe c^2 e X_0 um ponto crítico de f. Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (não necessariamente distintos) os valores próprios de $\operatorname{Hess} f(X_0)$. Prova-se que:

- *Se* $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha_i > 0$, X_0 *é ponto de valor mínimo local;*
- *Se* $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha_i < 0$, X_0 *é ponto de valor máximo local;*
- *Se* $\exists i, j \in \{1, \ldots, n\}$ *tais que* $\alpha_i < 0$ *e* $\alpha_j > 0$, X_0 *é ponto sela;*
- *Se* $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha_i \geq 0$, *e* $\exists i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ *tal que* $\alpha_{i_0} > 0$, X_0 *não é ponto de valor máximo local (é mínimo local ou ponto sela);*
- *Se* $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha_i \leq 0$, *e* $\exists i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ *tal que* $\alpha_{i_0} < 0$, X_0 *não é ponto de valor mínimo local (é máximo local ou ponto sela).*

1. Seja $f(x,y,z) = x^4 + 2x^2 + y^2 + z^4 - 2z^2$. Então, $(0,0,1)$ é ponto crítico de f, pois anula $\nabla f(x,y,z) = (4x^3 + 4x, 2y, 4z^3 - 4z)$.

Para classificar este ponto crítico, avaliam-se os sinais dos valores próprios da matriz hessiana de f em X_0. Ora,

$$\operatorname{Hess} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 12x^2+4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12z^2-4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Hess} f(0,0,1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Os valores próprios desta matriz são 4, 2 e 8, todos positivos.

Logo, $X_0 = (0,0,1)$ é um ponto de valor mínimo local.

- Note-se que para classificar um ponto crítico X_0 de uma função f não é necessário conhecer explicitamente os valores próprios de $\operatorname{Hess} f(X_0)$ mas apenas os seus sinais. Em vários casos, isto é possível analisando apenas o traço da matriz (soma dos elementos da diagonal principal) e o determinante, que são (prova-se) iguais respectivamente ao traço e ao determinante de qualquer matriz diagonal conjugada com $\operatorname{Hess} f(X_0)$.

Por exemplo, se α_1, α_2 são os valores próprios de $\operatorname{Hess} f(X_0) = \begin{pmatrix} 35 & 5 \\ 5 & 58 \end{pmatrix}$, então $\operatorname{Hess} f(X_0)$ tem o mesmo traço e determinante que $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$; ou seja, $35 + 58 = \alpha_1 + \alpha_2$ e $35 \times 58 - 5 \times 5 = \alpha_1 \cdot \alpha_2$. Daqui pode-se concluir que α_1 e α_2 são ambos positivos, sem ter de os calcular.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \frac{x^2 y}{2} - xy - y^2$. Os pontos críticos de f são os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$
\begin{aligned}
\nabla f(x,y) = (0,0) &\iff \left(xy - y, \frac{x^2}{2} - x - 2y\right) = (0,0) \\
&\iff \begin{cases} y(x-1) = 0 \\ \frac{x^2}{2} - x - 2y = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = 0 \\ x(\frac{x}{2} - 1) = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ -\frac{1}{2} - 2y = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Logo, f tem três pontos críticos: $X_0 = (0,0)$, $X_1 = (2,0)$ e $X_2 = (1, -\frac{1}{4})$.

2. (continuação) Para classificar estes pontos críticos:

$$\nabla f(x,y) = (xy - y, \frac{x^2}{2} - x - 2y) \Rightarrow \operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} y & x-1 \\ x-1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Assim, $\operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ tem determinante $-1 < 0$, logo tem valores próprios de sinais opostos.

- Conclui-se que $X_0 = (0,0)$ é ponto sela.

O mesmo acontece com $\operatorname{Hess} f(2,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

- Conclui-se que $X_1 = (2,0)$ é ponto sela.

Quanto a $\operatorname{Hess} f((1,-\frac{1}{4})) = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, os valores próprios são $-\frac{1}{4}$ e -2, ambos negativos.

- Conclui-se que $X_2 = (1,-\frac{1}{4})$ é ponto de valor máximo local de f.

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2y^2$. Uma vez que $\nabla f(x, y) = (2xy^2, 2x^2y) = (0, 0) \iff x = 0 \vee y = 0$, os pontos críticos de f são todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ que têm pelo menos uma coordenada nula.

Determinando, por exemplo, $\operatorname{Hess} f(1, 0)$:

$$\operatorname{Hess} f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Hess} f(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

verifica-se que esta matriz tem valores próprios 0 e 1.

Neste caso, esta informação não permite classificar completamente o ponto crítico $(1, 0)$ (apenas, afirmar que não é máximo local).

No entanto, analisando directamente a função, facilmente se verifica que, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) \geq 0 = f(1, 0)$, e portanto $(1, 0)$ é ponto de valor mínimo local. O mesmo acontece para os restantes pontos críticos.

Máximos e mínimos condicionados

- Frequentemente, interessa determinar os extremos locais da restrição de uma função escalar f a um subconjunto do domínio que poderá não ser um subconjunto aberto. Nesses casos, não é verdade que um ponto de valor extremo local seja necessariamente um ponto crítico de f.

Por exemplo, poderá interessar determinar os extremos da função $f(x, y) = 2xy$ restrita à bola fechada de centro $(0, 0)$ e raio $\sqrt{2}$, ou seja, entre os pontos (x, y) que satisfazem a condição $x^2 + y^2 \leq 2$;

ou, pode-se querer determinar os extremos de $f(x, y, z) = z$ entre os pontos que satisfazem as condições $x + y + z = 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 24$.

- Um problema deste tipo chama-se um problema de máximos e mínimos condicionados (ou ligados).

Em particular, interessará o caso em que se procuram os extremos (globais) da restrição de uma função contínua a um subconjunto compacto (fechado e limitado) de $\mathbb{R}^n$.

Nesses casos, o seguinte teorema (já conhecido para funções reais de variável real definidas em intervalos fechados e limitados), assegura à partida a existência dos extremos absolutos:

(Teorema de Weierstrass)

Seja $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função escalar.

Se f é contínua e A é compacto então f tem máximo e mínimo.

Máximos e mínimos condicionados a conjuntos de nível

Relativamente ao segundo exemplo atrás referido, pretendia-se determinar os extremos da restrição de uma função ao conjunto (compacto) $S = \{(x, y, z) : \; x + y + z = 0 \wedge x^2 + y^2 + z^2 = 24\}$, que é a circunferência resultante da intersecção do plano de equação $x + y + z = 0$ com a esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 24$.

Por outras palavras, S é a curva de intersecção das superfícies de nível $N_0 g_1$ e $N_{24} g_2$, respectivamente, das funções

$$\begin{array}{rcl} g_1 : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x + y + z \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} g_2 : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x^2 + y^2 + z^2 \end{array} .$$

- Vamos ver um método para resolver situações como esta.

Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ uma função derivável e $g_1, \ldots, g_m : U \to \mathbb{R}$ funções de classe c^1.

Sejam $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ e considere-se a intersecção S das hipersuperfícies de nível $N_{c_1} g_1, \ldots, N_{c_m} g_m$:

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n : \ g_1(X) = c_1 \wedge \cdots \wedge g_m(X) = c_m\}.$$

- Diz-se que um ponto $X_0 \in S$ é um ponto regular de S sse os vectores $\nabla g_1(X), \ldots, \nabla g_m(X)$ são linearmente independentes.

Prova-se que:

- Se $f_{|S}$ tem um máximo ou mínimo local num ponto regular X_0 de S, então $\nabla f(X_0)$ pertence ao subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado por $\nabla g_1(X), \ldots, \nabla g_m(X)$, isto é, existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tais que

$$\nabla f(X_0) = \lambda_1 \nabla g_1(X) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(X).$$

Assim, nas condições anteriores, os pontos de valor máximo ou mínimo local de $f_{|S}$, caso existam, encontram-se entre os pontos não regulares de S ou entre os pontos X de $\mathbb{R}^n$ para os quais existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ que satisfazem o sistema

(Método dos mutiplicadores de Lagrange)

$$\begin{cases} g_1(X) = c_1 \\ \vdots \\ g_m(X) = c_m \\ \nabla f(X) = \lambda_1 \nabla g_1(X) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(X) \end{cases}$$

- As equações $g_1(X) = c_1, \cdots, g_m(X) = c_m$ chamam-se equações de ligação. Os escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ dizem-se os multiplicadores de Lagrange, e este método para a determinação dos extremos designa-se por método dos multiplicadores de Lagrange.

1. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = 2xy$ e $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 2\}$.

A função f é derivável e $\nabla f(x, y) = (2y, 2x)$. Então, f é contínua e, como S é compacto, pode-se já afirmar que f atinge máximo e mínimo absolutos em S.

A circunferência S é a curva de nível de valor 2 da função de classe c^1, $g(x, y) = x^2 + y^2$.

Note-se que $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$ não se anula em pontos de S e portanto, nesses pontos, é linearmente independente; logo, todos os pontos de S são regulares.

Consequentemente, os pontos de valor máximo ou mínimo (locais ou globais) de $f_{|S}$ procuram-se entre as soluções do seguinte sistema (nas incógnitas x, y e λ):

1. (continuação)

$$\begin{cases} g(x,y) = 2 \\ \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (2y, 2x) = \lambda(2x, 2y) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ 2y = 2\lambda x \\ 2x = 2\lambda y \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ 2(y - x) = 2\lambda(x - y) \\ \_\_\_ \end{cases}$$

(a 2ª equação implica $x - y = 0 \vee \lambda = -1$ e, considerando ambos os casos,)

$$\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ \boxed{x = y} \\ \lambda = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x = -y \\ \boxed{\lambda = -1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ x = y \\ \lambda = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ x = -y \\ \lambda = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = y \\ \lambda = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = -y \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

1. (continuação)

Obtêm-se as soluções: $(x, y) = (1, 1) \vee (x, y) = (-1, -1) \quad (\text{e } \lambda = 1)$, $(x, y) = (-1, 1) \vee (x, y) = (1, -1) \quad (\text{e } \lambda = -1)$.

Entre estes pontos, estão de certeza aqueles em que é atingido o máximo e em que é atingido o mínimo. Avaliando o valor de f em cada um e comparando:

$$f(-1, 1) = f(1, -1) = -2 < 2 = f(1, 1) = f(-1, -1).$$

Conclui-se que o valor mínimo de $f_{|S}$ é -2, atingido nos pontos $(-1, 1)$ e $(1, -1)$; e que o valor máximo de f é 2, atingido nos pontos $(-1, -1)$ e $(1, 1)$.

2. Considere-se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = z$ e $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \wedge x^2 + y^2 + z^2 = 24\}$.

Como f é contínua e S é compacto, existem máximo e mínimo de $f_{|S}$; correspondem aos pontos de altura máxima e de altura mínima da circunferência S.

Além disso, f é derivável, com $\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 1)$ e $S = N_0 g_1 \cap N_{24} g_2$, onde $g_1(x, y, z) = x + y + z$ e $g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ são funções de classe c^1.

Os vectores $\nabla g_1(x, y, z) = (1, 1, 1)$ e $\nabla g_2(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ só são linearmente dependentes quando $x = y = z$ e não há pontos desta forma em S. Logo, todos os pontos de S são regulares.

2. (continuação)

Para procurar os extremos locais da restrição de f a S usando o método dos multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} g_1(x,y,z) = 0 \\ g_2(x,y,z) = 24 \\ \nabla f(x,y,z) = \lambda_1 \nabla g_1(x,y,z) + \lambda_2 g_2(x,y,z) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 24 \\ (0,0,1) = \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(2x,2y,2z) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 24 \\ 0 = \lambda_1 + 2\lambda_2 x \\ 0 = \lambda_1 + 2\lambda_2 y \\ 1 = \lambda_1 + 2\lambda_2 z \end{cases} \iff \begin{cases} \rule{2em}{0.4pt} \\ \rule{2em}{0.4pt} \\ 0 = 2\lambda_2(x-y) \\ \rule{2em}{0.4pt} \\ \rule{2em}{0.4pt} \end{cases}$$

2. (continuação)

$$\iff \begin{cases} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \lambda_1 = 0 \\ \boxed{\lambda_2 = 0} \\ 1 = 0 \quad \text{(Imp.)} \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} z = -2x \\ 6x^2 = 24 \\ \boxed{x = y} \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{cases}$$

As soluções (x, y, z) deste sistema (os valores das incógnitas λ_1 e λ_2 não são relevantes) são: $(2, 2, -4)$ e $(-2, -2, 4)$.

Entre estes dois pontos encontram-se os pontos de valor máximo e mínimo de $f_{|S}$.

É claro que $f(2, 2, -4) = -4$ é o valor mínimo e $f(-2, -2, 4) = 4$ é o valor máximo.

3. Admitindo que existe, determine-se, entre todas as caixas rectangulares de volume fixado v_0 (> 0), aquela cuja área de superfície é mínima.

Designando por x, y, z (> 0) os comprimentos dos lados de uma caixa nestas condições, tem-se $v_0 = xyz$ e a área de superfície é dada por $f(x, y, z) = 2(xy + xz + yz)$.

Pretende-se assim determinar o mínimo de $f_{|S}$, onde

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0,\ xyz = v_0\}.$$

Seja $g : (\mathbb{R}^+)^3 \to \mathbb{R}$ a função (de classe c^1) dada por $g(x, y, z) = xyz$. Tem-se $S = N_{v_0} g$.

Como todos os pontos de S são regulares, uma vez que $\nabla g(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ não se anula em S, então o mínimo de $f_{|S}$ é solução do sistema:

3. (continuação)

$$\begin{cases} g(x,y,z) = v_0 \\ \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \end{cases} \iff \begin{cases} xyz = v_0 \\ 2(y+z) = \lambda yz \\ 2(x+z) = \lambda xz \\ 2(x+y) = \lambda xy \end{cases}$$

Verifica-se que este sistema tem como única solução o caso em que $x = y = z$ donde resulta o ponto $X_0 = (\sqrt[3]{v_0}, \sqrt[3]{v_0}, \sqrt[3]{v_0})$.

Admitindo que existe o mínimo, é então atingido em X_0, sendo $f(X_0) = 3\sqrt[3]{v_0}^2$ o correspondente valor mínimo. Portanto, de todas as caixas rectângulares com o mesmo volume, a que tem menor área de superfície é a cúbica.

Nota: Como S não é compacto, não se pode usar esse argumento para garantir a existência do mínimo de f; de facto, mostra-se que f não tem máximo.

4. Voltemos à função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2xy$, do exemplo 1, considerando agora a sua restrição a toda a bola fechada $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 2\}$.

Como esta bola é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$ e f é contínua, então $f_{|A}$ tem máximo e mínimo.

Mas A não é um aberto nem é intersecção de hipersuperfícies de nível, de forma que não são aplicáveis directamente ao conjunto A nenhum dos dois métodos já conhecidos para a determinação dos extremos.

4. (continuação)

O que se pode fazer neste caso, é decompôr $A = \overset{\circ}{A} \cup \operatorname{fr} A$, em que:

- $\overset{\circ}{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 2\}$ é aberto; logo, os extremos de $f_{|\overset{\circ}{A}}$ encontram-se entre os pontos críticos - é só $(0, 0)$;
- $\operatorname{fr} A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 2\}$ é uma curva de nível e os extremos de $f_{|\operatorname{fr} A}$ podem ser localizados pelo método dos multiplicadores de Lagrange, o que já foi feito atrás - obtiveram-se os pontos $(\pm 1, \pm 1)$.

Comparando agora os valores de f na totalidade dos pontos obtidos pelos dois métodos em $\overset{\circ}{A}$ e $\operatorname{fr} A$:

$f(0, 0) = 0$, $f(-1, 1) = f(1, -1) = -2$ e $f(-1, -1) = f(1, 1) = 2$,

conclui-se que o valor máximo de $f_{|A}$ é 2 e o valor mínimo é -2 (neste caso, os extremos são atingidos na fronteira).

Máximos e mínimos condicionados

Método geral

Em geral, se U é um aberto de $\mathbb{R}^n$, f é uma função derivável e A é um subconjunto compacto contido em U, então:

- Como f é contínua e A é compacto, é garantido que $f_{|A}$ atinge máximo e mínimo;
- Decompondo $A = \overset{\circ}{A} \cup \operatorname{fr} A$,
  - os pontos de valor extremo de $f_{|A}$ que estão em $\overset{\circ}{A}$ encontram-se entre os pontos críticos;
  - para determinar os possíveis pontos de valor extremo de $f_{|A}$ que se encontrem em $\operatorname{fr} A$, pode-se decompôr $\operatorname{fr} A$ em hipersuperfícies de nível e, em cada uma delas, usar o método dos multiplicadores de Lagrange;
- Comparam-se os valores de f nos "candidatos" obtidos em $\overset{\circ}{A}$ e em $\operatorname{fr} A$ para decidir qual é o máximo e qual é o mínimo.

1. Determinem-se os máximo e mínimo de $f(x,y,z) = 2xz + y^2$ restrita ao disco D de centro $(0,2,0)$ e raio 3.

- Estes extremos existem, pois f é contínua e D é compacto.

- Os extremos de $f_{|D}$ encontram-se em
$\overset{\circ}{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + (y-2)^2 + z^2 < 9\}$ ou em
$\operatorname{fr} D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9\}$.

- Se estão no interior de D, são pontos críticos:

$$\nabla f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff (2z, 2y, 2x) = (0,0,0) \iff (x,y,z) = (0,0,0)$$

Obtém-se um único ponto crítico $(0,0,0)$.

- A fronteira de D é a curva de nível $N_9 g$ de
$g(x,y,z) = x^2 + (y-2)^2 + z^2$, que é uma função de classe c^1 tal que
$\nabla g(x,y,z) = (2x, 2(y-2), 2z)$ não se anula em $\operatorname{fr} D$.

1. (continuação)

Portanto, pelo método dos multiplicadores de Lagrange, os pontos de valor extremo estão entre as soluções do sistema

$$\begin{cases} g(x,y,z) = 9 \\ \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9 \\ 2z = 2\lambda x \\ 2y = 2\lambda(y-2) \\ 2x = 2\lambda z \end{cases}$$

As soluções são $(2,1,-2)$, $(-2,1,2)$ (para $\lambda = -1$), $(0,5,0)$ (para $\lambda = \frac{5}{3}$) e $(0,-1,0)$ (para $\lambda = \frac{1}{3}$).

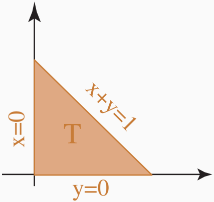
- Avaliando a função f em todos os "candidatos" encontrados:

$f(0,0,0) = 0$, $f(2,1,-2) = f(-2,1,2) = -7$ $f(0,5,0) = 25$ e $f(0,-1,0) = 1$

conclui-se que o valor máximo de f é 25, atingido no ponto $(0,5,0)$; e o valor mínimo de f é -7, atingido nos pontos $(2,1,-2)$ e $(-2,1,2)$.

2.

Seja $f(x, y) = x(2y - 1)$
e T o triângulo em $\mathbb{R}^2$ de vértices $(0, 0)$,
$(1, 0)$ e $(0, 1)$ representado na figura ao lado.



- Uma vez que f é contínua e T é compacto, $f_{|T}$ tem máximo e mínimo.

- Para determinar os candidatos a extremos em $\overset{\circ}{T} = \{(x, y) : \; x > 0, y > 0, x + y < 1\}$, note-se que

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff (2y - 1, 2x) = (0, 0) \iff x = 0 \wedge y = \frac{1}{2}$$

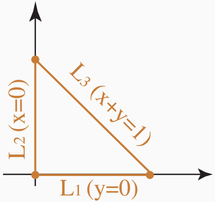
e portanto não há pontos críticos de f em $\overset{\circ}{T}$.

- Logo, os extremos de $f_{|T}$ são atingidos na fronteira de T, que é constituída pelos 3 lados do triângulo.

2. (continuação)

Para determinar os extremos de f em fr T usando o método dos multiplicadores de Lagrange, será necessário separar a fronteira em 3 curvas de nível:

$$L_1 = \{(x,0):\ 0 < x < 1\} = N_0 g_1, \text{ para}$$
$$g_1 : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\} \to \mathbb{R},\ g_1(x,y) = y$$
$$L_2 = \{(0,y):\ 0 < y < 1\} = N_0 g_2, \text{ para}$$
$$g_2 : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\} \to \mathbb{R},\ g_2(x,y) = x$$
$$L_3 = \{(x,y):\ x + y = 1, 0 < x < 1\} = N_1 g_3, \text{ para}$$
$$g_3 : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\} \to \mathbb{R},\ g_3(x,y) = x + y$$



e ainda considerar separadamente os vértices do triângulo $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

2. (continuação)

Mas neste caso é mais simples, em vez de aplicar o método dos multiplicadores de Lagrange, reduzir o problema ao cálculo de extremos de funções de uma variável real, da seguinte forma:

- Em L_1, $y = 0$ e considera-se $h_1(x) = f(x, 0) = -x$, definida para $x \in]0, 1[$; os extremos de h_1, se existirem, estão entre os zeros da derivada: $h_1'(x) = -1 \neq 0$, $\forall x \in]0, 1[$. Logo, não há extremos de $f_{|T}$ em L_1.

- Em L_2, $x = 0$ e considera-se $h_2(x) = f(0, y) = 0$, definida para $y \in]0, 1[$; todos os pontos são extremos de h_2. Obtêm-se todos os pontos $(0, y)$ de L_2.

2. (continuação)

- Em L_3, $y = 1 - x$ e considera-se $h_3(x) = f(x, 1-x) = x(1-2x)$, definida para $x \in]0,1[$; os extremos de h_3, se existirem, estão entre os zeros da derivada: $h_3'(x) = 1 - 4x = 0 \iff x = \frac{1}{4} \in]0,1[$. Obtém-se o ponto $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \in L_3$.

- Considerando agora todos os pontos obtidos e ainda os vértices de T:
$f(0,0) = 0$, $f(0,y) = 0$, $(y \in]0,1[)$, $f(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) = \frac{1}{8}$, $f(1,0) = -1$,
$f(0,1) = 0$,

conclui-se que o valor máximo é $\frac{1}{8}$, atingido em $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ e o mínimo é -1, atingido em $(1,0)$.

Exercícios

Derivadas de segunda ordem; classificação de pontos críticos

1. Seja $f(x, y) = \cos(xy^2)$. Calcule as derivadas parciais de f de primeira e segunda ordem e verifique que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
2. Mostre que a função $U(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$, definida em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, satisfaz a equação diferencial parcial de Laplace

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_X + \left.\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right|_X + \left.\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right|_X = 0, \quad \forall X \in \mathbb{R}^3$$

3. Determine e classifique os pontos críticos das funções seguintes:

   a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^3 - 3x^2 + y^2$.

   (Solução: $(0, 0)$ - ponto sela, $(2, 0)$ - mínimo local)

   b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$.

   (Solução: $(-1, -2)$ - máximo local, $(1, 2)$ - mínimo local, $\pm(-1, 2)$ - pontos sela)

   c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = 3x^3 + z^3 - 3z(x + y) + 9y + 3z$.
   (Sugestão: avalie os sinais dos valores próprios da matriz hessiana nos pontos críticos sem os calcular)

   (Solução: $(1, 9, 3)$, $(-1, 11, 3)$ - pontos sela)

Exercícios

Derivadas de segunda ordem; classificação de pontos críticos

4. Verifique que $(0,0)$ e $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ são pontos críticos de $f(x,y) = x^3 + y^3 - 2(x^2 + y^2) + 3xy$ e classifique-os.

(Solução: $(0,0)$ - máximo local, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ - ponto sela)

5. Para cada $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ considere a função $f_{a,b} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f_{a,b}(x,y) = ay^2 e^{\cos x} + bx^2$.

   a) Em cada uma das alíneas seguintes dê um exemplo de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ de forma a que se verifique a condição enunciada.

   i) $(0,0)$ é máximo local de $f_{a,b}$.

   ii) $(0,0)$ é mínimo local de $f_{a,b}$.

   iii) $(0,0)$ é ponto sela de $f_{a,b}$.

   b) Para o valor de (a,b) indicado em (a) *ii*), verifique se $(0,0)$ é um mínimo absoluto de $f_{a,b}$.

6. Verifique se existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall (x, y, x) \in B((0,0,0); \epsilon)$, $x^2 - y^2 - xy^2 + yz^2 \leq 0$.

7. Determine os pontos de abcissa máxima e mínima da elipse $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 16$.

   (Solução: mínima em $(-\sqrt{6}, \frac{2}{\sqrt{6}})$; máxima em $(\sqrt{6}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$)

8. Admitindo que existe, determine o(s) ponto(s) da parábola de equação $y = x^2$ mais próximo(s) do ponto $(0, 1)$: (Solução: pontos $(\pm\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \frac{1}{2})$)

   i) reduzindo o problema à determinação do mínimo de uma função de uma variável;

   ii) usando o método dos multiplicadores de Lagrange.

9. Admitindo que existe, encontre o ponto do plano de $\mathbb{R}^3$ de equação $x + 2y + 2z = 3$ que está mais próximo da origem. (Solução: ponto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$)

10. Justifique que existem e determine os valores máximo e mínimo das funções seguintes, nos conjuntos indicados.

    a) $f(x, y) = x^2 + y$, na circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1.

    (Solução: mínimo -1 em $(0, -1)$; máximo $\frac{5}{4}$ em $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$)

b) $f(x,y)=xy$, na elipse de equação $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(Solução: mínimo $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ em $\pm(1,\,-\frac{1}{\sqrt{2}})$; máximo $\frac{1}{\sqrt{2}}$ em $\pm(1,\,\frac{1}{\sqrt{2}})$)

c) $f(x,y)=x$, na elipse $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+2y^2=3\}$.

(Solução: mínimo $-\sqrt{3}$ em $(-\sqrt{3},\,0)$; máximo $\sqrt{3}$ em $(\sqrt{3},\,0)$)

d) $f(x,y,z)=x-y+z$, na esfera de centro $(0,0,0)$ e raio $\sqrt{3}$.

(Solução: mínimo -3 em $(-1,\,1,\,-1)$; máximo 3 em $(1,\,-1,\,1)$)

e) $f(x,y,z)=x$, na curva de intersecção do plano de equação $z=x+y$ com o elipsóide $x^2+2y^2+2z^2=8$. (Solução: mínimo -2 em $(-2,\,1,\,-1)$; máximo 2 em $(2,\,-1,\,1)$)

f) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, na elipse de intersecção do cone de equação $z^2=x^2+y^2$ com o plano $x-2z=3$. (Solução: mínimo 2 em $(1,\,0,\,-1)$; máximo 18 em $(-3,\,0,\,-3)$)

g) $f(x,y,z)=4-z$, na elipse de intersecção do cilindro $x^2+y^2=8$ com o plano $x+y+z=1$. (Solução: mínimo -1 em $(-2,\,-2,\,5)$; máximo 7 em $(2,\,2,\,-3)$)

h) $f(x,y,z)=2x+y+z$, em $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x+z=1,\ x^2+y^2=1\}$.

(Solução: mínimo $1-\sqrt{2}$ em $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\,-\frac{1}{\sqrt{2}},\,1+\frac{1}{\sqrt{2}})$; máximo $1+\sqrt{2}$ em $(\frac{1}{\sqrt{2}},\,\frac{1}{\sqrt{2}},\,1-\frac{1}{\sqrt{2}})$)

11. Para cada uma das seguintes funções,

    i) Determine e classifique os pontos críticos;

    ii) Determine o máximo e o mínimo da restrição aos conjuntos indicados.

    a) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$, no conjunto definido por $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$;

    (Solução: i) Não há pontos críticos;
    ii) mínimo $\frac{1}{9}$ em $(3, 0)$; máximo 1 em $(1, 0)$)

    b) $f(x, y) = x^2 - y^2$, em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$;

    (Solução: i) $(0, 0)$ - ponto sela;
    ii) mínimo -1 em $(0, \pm 1)$; máximo 1 em $(\pm 1, 0)$)

    c) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$, em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$;

    (Solução: i) $(0, 0)$ - mínimo local;
    ii) mínimo 0 em $(0, 0)$; máximo $\frac{3}{2}$ em $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$)

    d) $f(x, y, z) = x + y + z$, no disco dado por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$;

    (Solução: i) Não há pontos críticos;
    ii) mínimo $-\sqrt{3}$ em $-\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$; máximo $\sqrt{3}$ em $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$)

e) $f(x,y,z) = x - 2y + z$, em $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 3\}$;

(Solução: i) Não há pontos críticos;

ii) mínimo $-\sqrt{10}$ em $-\frac{1}{\sqrt{10}}(3, -3, 1)$; máximo $\sqrt{10}$ em $\frac{1}{\sqrt{10}}(3, -3, 1)$)

f) $f(x,y,z) = x + 2y - 3z$, no elipsóide $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 108\}$;

(Solução: i) Não há pontos críticos;

ii) mínimo -18 em $(-6, -3, 2)$; máximo 18 em $(6, 3, -2)$)

g) $f(x,y,z) = xy + z^2$, no disco de centro $(0,0,0)$ e raio 1.

(Solução: i) $(0, 0, 0)$ - ponto sela;

ii) mínimo $-\frac{1}{2}$ em $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$; máximo 1 em $(0, 0, \pm 1)$)

12. Calcule o máximo e o mínimo da função $f(x,y) = xy - x - y$ na região T do plano limitada pelo triângulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$ e $(0,2)$.

(Solução: mínimo -2 em $(2, 0)$ e $(0, 2)$; máximo 0 em $(0, 0)$)

13. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \cos x \operatorname{sen} y$.
    a) Determine e classifique os pontos críticos de f.
    b) Determine o máximo e o mínimo de f em $A = \{(x,y) : \; -\pi \leq x \leq \pi, \; -\pi \leq y \leq \pi\}$.

(Solução: mínimo -1 em $(0, -\frac{\pi}{2})$ e $(\pm\pi, \frac{\pi}{2})$; máximo 1 em $(0, \frac{\pi}{2})$ e $(\pm\pi, -\frac{\pi}{2})$)

14. Seja $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \max(|x|,|y|) \leq 1\}$. Determine o máximo e o mínimo de $f\,|_S$, em que $f : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x,y) = 2x^3 - 2y^3 + 6x^2y - 3x^2$.

    (Solução: mínimo -9 em $(-1,\,-1)$; máximo 3 em $(1,\,1)$)

15. Considere a função $f : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 2x^3 - 2y^3 - 3x^2$ e o conjunto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 5, \ y \geq 0\}$. Determine o máximo e o mínimo de $f\,|_K$.

    (Solução: mínimo $-2\sqrt{5}^3 - 15$ em $(-\sqrt{5},0)$; máximo $2\sqrt{5}^3 - 15$ em $(\sqrt{5},0)$)

16. ($\star$)Seja $f(x,y,z) = e^x y^2 - x^2 e^z$ e seja $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + z^2 \leq 3\}$.

    a) Determine e classifique os pontos críticos de f.

    b) Mostre que f não tem máximo mas tem mínimo no conjunto A e que os pontos de valor mínimo pertencem a $A \cap \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x,z \in \mathbb{R}\}$. Determine-os.