Derivadas

Noções gerais sobre funções vectoriais

Voltamos ao estudo em geral das funções do tipo

$$\begin{array}{rcl} f : A & \to & \mathbb{R}^m \\ X = (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & \underbrace{f(x_1, \ldots, x_n)}_{\in \mathbb{R}^m} \ , \end{array}$$

em que A é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

- Em geral, representaremos pontos de $\mathbb{R}^n$ por letras como $X, Y, Z, \ldots$ e vectores de $\mathbb{R}^n$ por $u, v, \ldots$.
- Recorde-se que, no caso $m = 1$, uma função $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ chama-se uma função escalar.

Entre funções deste tipo, podem-se considerar em geral as seguintes operações:

- **Soma e produto por um escalar:** Se $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : B \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $c \in \mathbb{R}$, definem-se as funções

$$\begin{array}{rcl} f+g : A \cap B & \to & \mathbb{R}^m \\ X & \mapsto & f(X)+g(X) \end{array},$$

$$\begin{array}{rcl} c \cdot f : A & \to & \mathbb{R}^m \\ X & \mapsto & c \cdot f(X) \end{array}.$$

- **Composição:** Se $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ e $f(A) \subseteq B$, pode-se considerar a função composta

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : A & \to & \mathbb{R}^p \\ X & \mapsto & g(f(X)) \end{array}.$$

O gráfico de uma função $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é

$$\operatorname{gr} f = \{(X, f(X)) : \; X \in A\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

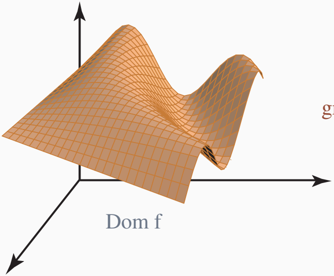


gráfico de uma função f:A $\subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Em geral identifica-se o produto cartesiano $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ com $\mathbb{R}^{n+m}$, através do isomorfismo

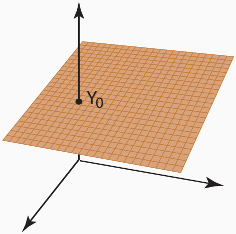
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R}^{n+m} \\ ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_m)) & \mapsto & (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \end{array}$$

pelo que se pode considerar que $\operatorname{gr} f \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$.

Funções constantes

Se
$Y_0 \in \mathbb{R}^m$ pode-se definir a função constante

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ X & \mapsto & Y_0 \end{array}.$$



Por exemplo, o gráfico da função constante $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & 2 \end{array}$ é

$$\operatorname{gr} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\} = \{(x, y, 2) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

ou seja, é o plano paralelo ao plano xy que passa no ponto $(0, 0, 2)$.

Funções lineares

Já é conhecido da disciplina de Álgebra Linear que as funções lineares $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ são as funções do tipo

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n),$$

com $a_{11}, \ldots, a_{mn} \in \mathbb{R}$. Em particular, a função nula $f : X \mapsto 0_{\mathbb{R}^n}$ e a função identidade $id_{\mathbb{R}^n} : X \mapsto X$, são funções lineares.

Os gráficos das funções lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^{n+m}$.

Por exemplo, $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & 2x + y \end{array}$ é uma função linear e

$$\text{gr}\, f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x + y\},$$

é o plano de $\mathbb{R}^3$ de equação $2x + y - z = 0$.

Funções afins

Uma função afim $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma função dada por uma expressão do tipo $f(X) = Y_0 + g(X)$, em que $Y_0 \in \mathbb{R}^m$ e g é uma função linear; ou seja, é a soma de uma função constante com uma função linear.

Os gráficos das funções afins de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ são subespaços afins de $\mathbb{R}^{n+m}$ (translacções de subespaços vectoriais).

Por exemplo, a função $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & 2x + y - 3 \end{array}$ é uma função afim (soma da função constante igual a -3 com a função linear $g(x, y) = 2x + y$). O gráfico de f,

$$\operatorname{gr} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x + y - 3\},$$

é o plano de $\mathbb{R}^3$ de equação $2x + y - z = 3$. É paralelo ao gráfico de g.

Projecções nas coordenadas

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, a função escalar

$$\begin{array}{rcl} p_i : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & x_i \end{array}$$

chama-se a projecção de $\mathbb{R}^n$ na i-ésima coordenada.

As projecções são funções lineares.

Por exemplo, a projecção de $\mathbb{R}^2$ na primeira coordenada é a função

$$\begin{array}{rcl} p_1 : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x \end{array}.$$

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}^m$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, a função componente de ordem i de f é a função escalar

$$f_i = p_i \circ f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

onde p_i é a projecção de $\mathbb{R}^m$ na i-ésima coordenada. Isto significa que, para cada $X \in A$, se tem $f(X) = (f_1(X), \ldots, f_m(X))$.

Por vezes iremos escrever $f = (f_1, \ldots, f_m)$, para representar uma função f cujas funções componentes são $f_1, \ldots, f_m$.

Por exemplo, as funções componentes de

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & \left(\frac{xyz}{x^2+1}, \operatorname{sen}(x+z)\right) \end{array}$$

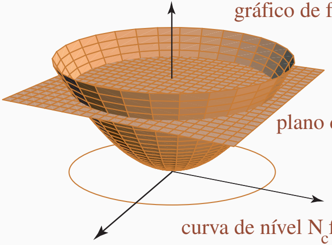
são

$$\begin{array}{rcl} f_1 : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & \frac{xyz}{x^2+1} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} f_2 : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & \operatorname{sen}(x+z) \end{array}.$$

Sejam $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $C \in \mathbb{R}^m$.

O conjunto de nível de f de valor C é o conjunto

$$N_C f = \{X \in A : \; f(X) = C\}.$$



No caso particular de $n - m = 1$, $N_C f$ diz-se uma curva de nível e no caso de $n - m = 2$, $N_C f$ diz-se uma superfície de nível. Estes serão os casos que vamos considerar em exemplos práticos.

1. Consideremos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $c \in \mathbb{R}$.

Se $c < 0$, $N_c f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = c\} = \emptyset$;
se $c = 0$, $N_0 f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = 0\} = \{(0,0)\}$;
e para $c > 0$, $N_c f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = c\}$ é a circunferência de centro $(0,0)$ e raio $\sqrt{c}$.

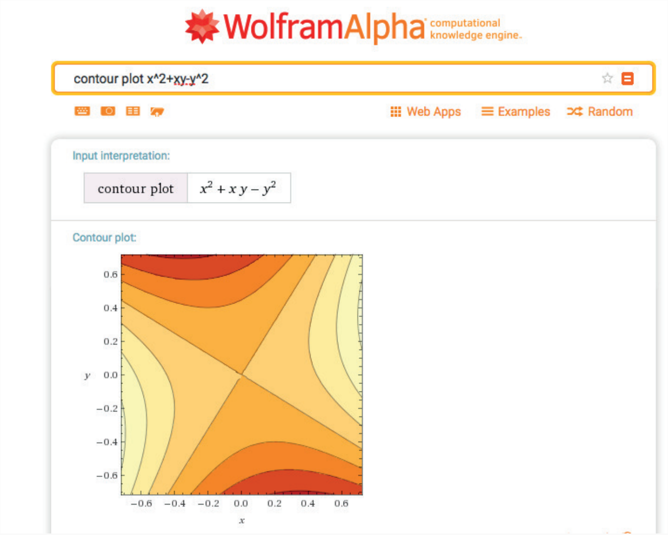
2. A superfície de nível de valor 1 da função

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \to & z - 2x + 3y \end{array}$$

é o plano $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - 2x + 3y = 1\}$. Esta superfície também é o gráfico da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = 2x - 3y + 1$.

Mais geralmente, o gráfico de uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é a superfície de nível $N_0 g$ da função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x,y,z) = z - f(x,y)$.

4.

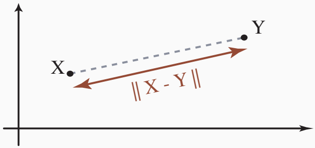

WolframAlpha computational knowledge engine.
contour plot x^2+xy-y^2
Web Apps
Examples
Random
Input interpretation:
contour plot
$x^2 + x\,y - y^2$
Contour plot:
0.6
0.4
0.2
y
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.6 −0.4 −0.2 0.0 0.2 0.4 0.6
x

Noções gerais sobre funções vectoriais e topologia

Antes de continuarmos o estudo de funções vectoriais de variável vectorial, vamos introduzir brevemente alguns conceitos, terminologia e notação sobre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que iremos usar ao longo dos restantes capítulos.

O objectivo, nestes assuntos em particular, será apenas que compreendam os conceitos de forma intuitiva e que os reconheçam nas situações concretas em que for necessário, ainda que de maneira informal e sem um desenvolvimento teórico que permita justificações rigorosas ou mais detalhadas.

A distância entre dois pontos X e Y de $\mathbb{R}^n$ é dada por $\|X - Y\|$.



Esta noção de distância em $\mathbb{R}^n$ permite definir os seguintes conceitos relacionados:

Sejam $X_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}^+$. A esfera de centro X_0 e raio r em $\mathbb{R}^n$ é o conjunto

$$\mathrm{S}\left(X_0; r\right) = \{X \in \mathbb{R}^n : \ \|X - X_0\| = r\}.$$

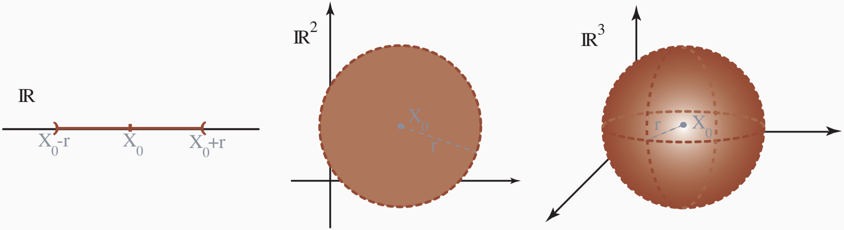
Exemplos: para $n = 1$, $\mathrm{S}\left(X_0; r\right) = \{X_0 - r, X_0 + r\}$;

e, para $n = 2$, $\mathrm{S}\left(X_0; r\right)$ é a circunferência de centro X_0 e raio r.

O conjunto

$$B\,(X_0; r) = \{X \in \mathbb{R}^n : \; \|X - X_0\| < r\}.$$

chama-se a bola aberta de centro X_0 e raio r.



A bola fechada ou disco de centro X_0 e raio r é o conjunto

$$D\,(X_0; r) = \{X \in \mathbb{R}^n : \; \|X - X_0\| \leq r\}.$$

Portanto, $D(X_0; r) = B\,(X_0; r) \cup S\,(X_0; r)$.

Exemplos:

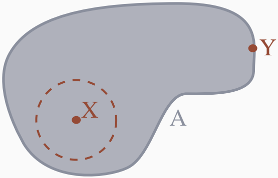
1. O intervalo $]-1,6[$ é a bola aberta de centro $\frac{5}{2}$ e raio $\frac{7}{2}$ em $\mathbb{R}$. A esfera com os mesmos centro e raio é $\{-1,6\}$.

2. O conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x+1)^2 + y^2 \leq 9\}$ é a bola fechada de centro $(-1,0)$ e raio 3 em $\mathbb{R}^2$.

3. A esfera em $\mathbb{R}^3$ de centro $(1,2,3)$ e raio $\sqrt{2}$ é definida pela equação $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$.

A intesecção desta esfera com um plano, quando não vazia, é uma circunferência em $\mathbb{R}^3$.

Sejam $X \in \mathbb{R}^n$ e $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se A contém uma bola aberta centrada em X, diz-se que X é um ponto interior de A ou que A é uma vizinhança de X.



X é ponto interior de A (A é vizinhança de X)

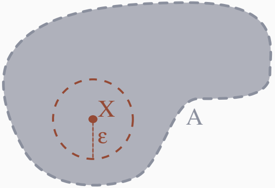
Y não é ponto interior de A (A não é vizinhança de Y)

O conjunto de todos os pontos interiores de A chama-se o interior de A e representa-se por $\overset{\circ}{A}$. É claro que $\overset{\circ}{A} \subseteq A$.

Exemplos: 1. O interior de uma bola fechada é a bola aberta com o mesmo centro e raio.

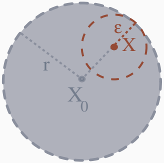
2. Uma recta em $\mathbb{R}^2$ não contém nenhuma bola; logo, não é vizinhança de nenhum dos seus pontos. O seu interior é vazio.

Um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ diz-se aberto se e só se $\mathring{A} = A$; ou seja, A é aberto se e só se para todo $X \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathrm{B}(X; \varepsilon) \subseteq A$.



Exemplos: 1. É imediato que $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, uma vez que contém qualquer bola aberta de $\mathbb{R}^n$.

2. Qualquer bola aberta em $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.



3. Se $X_0 \in \mathbb{R}^n$, o conjunto $\mathbb{R}^n \setminus \{X_0\}$ é aberto.

4. Para qualquer subconjunto A de $\mathbb{R}^n$, $\mathring{A}$ é aberto e é o maior aberto contido em A.

Noções básicas de topologia em $\mathbb{R}^n$

Fechados

Diz-se que um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ é fechado se e só se o seu complementar, $C(A)$, é aberto.

Exemplos: 1. O intervalo $I = [1, 2[$ não é aberto nem fechado em $\mathbb{R}$: $1 \in I$ não é um ponto interior de I e portanto I não é aberto; $2 \in C(I)$ não é um ponto interior de $C(I)$, e portanto $C(I)$ também não é aberto.

2. Qualquer bola fechada em $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$.

3. Uma esfera em $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$.

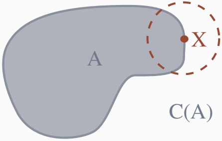
4. Prova-se que se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $c \in \mathbb{R}$, então $N_c f$, bem como $\{X \in \mathbb{R}^n : \ f(X) \leq c\}$, são subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$.

Assim, por exemplo, a parábola $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ é um fechado de $\mathbb{R}^2$ e o cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq 9\}$ é um fechado de $\mathbb{R}^3$.

(Admitindo-se que as funções $f(x, y) = y - x^2$ e $g(x, y, z) = x^2 + y^2$ são contínuas, de acordo com o que será visto à frente)

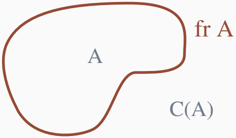
Sejam $X \in \mathbb{R}^n$ e $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Diz-se que X é um ponto fronteira de A se e só se qualquer bola aberta centrada em X intersecta A e o seu complementar.



O conjunto de todos os pontos fronteira de A chama-se a fronteira de A e representa-se por $\operatorname{fr} A$.

Exemplos:



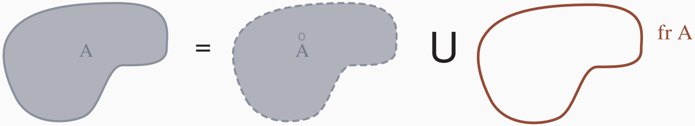
1. Em $\mathbb{R}$, $\operatorname{fr}[a,b] = \operatorname{fr}]a,b[= \operatorname{fr}]a,b] = \{a,b\}$ e $\operatorname{fr}]a,+\infty[= \{a\}$.

2. Se $X \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}^+$, então $\operatorname{fr} \mathrm{B}(X;r) = \operatorname{fr} \mathrm{D}(X;r) = \mathrm{S}(X;r)$.

3. A fronteira do conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; 2x^2 + (y-1)^2 + 3(z+1)^2 \leq 1\}$ em $\mathbb{R}^3$ é o elipsóide de equação $2x^2 + (y-1)^2 + 3(z+1)^2 = 1$.

- Um subconjunto fechado A de $\mathbb{R}^n$ pode-se decompor como união disjunta do seu interior com a sua fronteira:

$$A = \overset{\circ}{A} \cup \mathrm{fr}\, A.$$



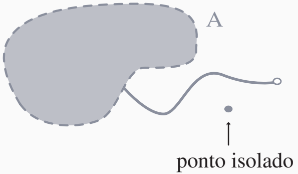
Exemplo: Para $X_0 \in \mathbb{R}_n$ e $r \in \mathbb{R}^+$, $A = \mathrm{D}\,(X_0; r)$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$, $\overset{\circ}{A} = \mathrm{B}\,(X_0; r)$ e $\mathrm{fr} A = \mathrm{S}\,(X_0; r)$. Tem-se $\mathrm{D}\,(X_0; r) = \mathrm{B}\,(X_0; r) \cup \mathrm{S}\,(X_0; r)$.

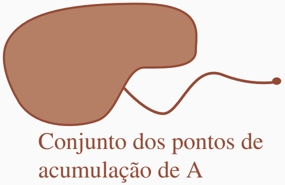
Noções básicas de topologia em $\mathbb{R}^n$

Pontos de acumulação e pontos isolados

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Um ponto X de $\mathbb{R}^n$ diz-se um ponto de acumulação de A sse qualquer bola aberta centrada em X contém pontos de A diferentes de X (i.e., existem pontos de $A \setminus \{X\}$ arbitrariamente próximos de X).

Um ponto de A que não é um ponto de acumulação de A chama-se um ponto isolado de A.

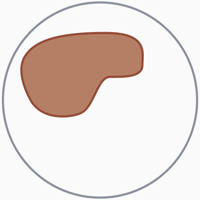




Note-se:

- Um ponto de acumulação de A não tem necessariamente de pertencer a A.
- Nem todo o ponto de A é ponto de acumulação de A.

Um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ diz-se limitado se e só se está contido numa bola.



Um compacto de $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ fechado e limitado.

Exemplos:

1. Qualquer bola fechada ou qualquer esfera em $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$.

2. Uma bola aberta de $\mathbb{R}^n$ não é um compacto de $\mathbb{R}^n$ pois, apesar de ser um conjunto limitado, não é fechado.

3. Uma recta em $\mathbb{R}^n$ não é um compacto pois, apesar de ser um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$, não é limitado.

Sejam $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e X_0 um ponto de acumulação de A.

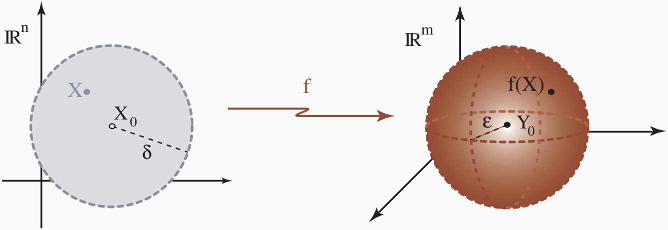
Então, $A = \operatorname{dom} f$ contém pontos diferentes de X_0 mas "arbitrariamente" próximos de X_0 (podendo f estar ou não definida em X_0). Nesta situação, tem sentido avaliar a evolução dos valores $f(X)$ quando $X \in \operatorname{dom} f \setminus \{X_0\}$ se aproxima de X_0.

- Informalmente, diz-se que $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = Y_0 \ (\in \mathbb{R}^m)$ se os valores de $f(X)$ se tornam arbitrariamente próximos de Y_0 desde que $X \neq X_0$ esteja suficientemente próximo de X_0. Se um tal ponto $Y_0 \in \mathbb{R}^m$ não existir, diz-se que não existe $\lim\limits_{X \to X_0} f(X)$.

- Caso X_0 não seja um ponto de acumulação de $\operatorname{dom} f$, não terá sentido falar em $\lim\limits_{X \to X_0} f(X)$.

- Mais formalmente, diz-se que Y_0 é o limite de $f(X)$ quando X tende para X_0, e escreve-se $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = Y_0$ se e só se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall X \in A, \left(0 \neq \|X - X_0\| < \delta \Rightarrow \|f(X) - Y_0\| < \varepsilon\right).$$



- Nesta definição, a noção de proximidade, de X a X_0 e de $f(X)$ a Y_0, é traduzida pelas distâncias $\|X - X_0\|$ e $\|f(X) - Y_0\|$. Note-se que, mesmo no caso de $X_0 \in A$, o facto de $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = Y_0$ nada diz a respeito do valor de f em X_0, pois exclui-se o caso de $X = X_0$ ao considerar $\|X - X_0\| \neq 0$.

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$, $f_1, \ldots, f_m$ as funções componentes de f, X_0 um ponto de acumulação de A e $Y_0 = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$.

Prova-se que:

- Se existe $\lim\limits_{X \to X_0} f(X)$, então esse limite é único.
- $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = Y_0$ sse $\forall i \in \{1, \ldots m\}, \lim\limits_{X \to X_0} f_i(X) = y_i$.

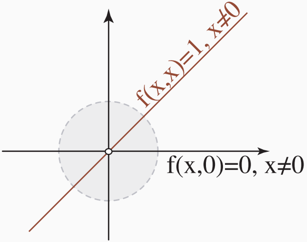
1. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é a função constante igual a $Y_0 \in \mathbb{R}^m$, então é claro que, para qualquer $X_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = Y_0$.

2. Seja $id_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a função identidade. Resulta imediatamente da definição que, para qualquer $X_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lim\limits_{X \to X_0} id_{\mathbb{R}^n}(X) = X_0$.

3. Seja $X_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n}) \in \mathbb{R}^n$. As funções componentes de $id_{\mathbb{R}^n}$ são as projecções de $\mathbb{R}^n$ em cada uma das coordenadas, $id_{\mathbb{R}^n} = (p_1, \dots, p_n)$, e $\lim\limits_{X \to X_0} id_{\mathbb{R}^n}(X) = X_0$, logo $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\lim\limits_{X \to X_0} p_i(X) = x_{0i}$.

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$. Então, $X_0 = (0,0)$ é ponto de acumulação de dom f.

Nos pontos da forma $(x,0)$, $x \neq 0$, a função f é constante igual a 0. Por outro lado, nos pontos da recta $x = y$, f é constante igual a 1: $f(x,x) = \frac{2x^2}{2x^2} = 1$, $x \neq 0$.



Como há pontos de cada uma destas rectas em qualquer vizinhança de $(0,0)$, conclui-se que, quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$, $f(x,y)$ não se aproxima de um único valor, pelo que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ e $X_0 \in A$.

- Diz-se que f é contínua em X_0 se e só se X_0 é um ponto isolado de A ou X_0 é um ponto de acumulação de A e $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = f(X_0)$.
- A função f diz-se contínua se e só se é contínua em X_0, para todo X_0 em A.

Continuidade

Exemplos

1. Qualquer função constante $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua.

2. A função identidade $id_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é contínua.

3. As projecções $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são contínuas.

4. A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ não é contínua em $(0,0)$, pois
não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

5. A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
não é contínua em $(0,0)$ pois, apesar de existir $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$, este limite não é igual a $f(0,0) = 0$.

Continuidade

Propriedades

Prova-se que:

- $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua em $X_0 \in A$ sse todas as funções componentes de f são contínuas em X_0.
- Se $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ são contínuas em $X_0 \in A$, então $f + g$ é contínua em X_0.
- Se $c \in \mathbb{R}$ e $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua em $X_0 \in A$, então $c \cdot f$ é contínua em X_0.
- Se $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são contínuas em $X_0 \in A$, então $f \cdot g$ é contínua em X_0.
- Se $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua em $X_0 \in A$ e $f(X_0) \neq 0$, então $\frac{1}{f}$ é contínua em X_0.
- Sejam $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ tais que $f(A) \subseteq B$. Se f é contínua em $X_0 \in A$ e g é contínua em $f(X_0)$, então $g \circ f$ é contínua em X_0.

1. A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x + 2y^2$ é contínua, pois é soma da projecção p_1 com o produto da constante 2 pelo produto $p_2 \cdot p_2$.

2. Mais geralmente, qualquer função cujas componentes sejam obtidas das projecções e funções constantes usando somas e produtos, é contínua.

Assim, podemos concluir que são contínuas as funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cujas componentes sejam funções polinomiais nas variáveis $x_1, \dots, x_n$.

Em particular, qualquer função afim de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ é contínua.

3. A função $f(x, y) = e^{x^3 y}$ é contínua em $\mathbb{R}^2$, uma vez que é a composta da função exponencial com a função polinomial $g(x, y) = x^3 y$, que são ambas contínuas.

4. A função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ é contínua (em todos os pontos do domínio), uma vez que é produto da função polinomial $g(x,y) = xy$ pelo quociente de $h(x,y) = x^2 + y^2$, definidas em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ambas contínuas.

5. Consideremos a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x,y) = (\underbrace{x^2 + 2y}_{f_1(x,y)}, \underbrace{\frac{x^3}{x^2+y^2}}_{f_2(x,y)}, \underbrace{\operatorname{sen} x}_{f_3(x,y)}).$$

As funções componentes, f_1, f_2 e f_3, são contínuas, uma vez que f_1 é uma função polinomial, f_2 é o quociente entre duas funções polinomiais e f_3 é a composta da função seno com a projecção na primeira coordenada.

Assim, a função f é contínua.

Derivadas

Chegamos ao tema principal deste capítulo, que é o estudo de derivadas de funções vectoriais de variável vectorial (ou, várias variáveis).

A noção de derivada de uma função num ponto está relacionada com a variação da função a partir desse ponto.

Nos casos já conhecidos de funções reais de variável real ou curvas, o domínio da função está contido em $\mathbb{R}$ e portanto a variação dos pontos do domínio dá-se numa única direcção.

Quando generalizamos a derivada para funções com domínio em $\mathbb{R}^n$, começamos por abordar a variação da função em diferentes perspectivas. Isto conduz-nos diversas noções de "derivadas", e finalmente a definição de derivada de uma função num ponto irá unificar todas as perspectivas.

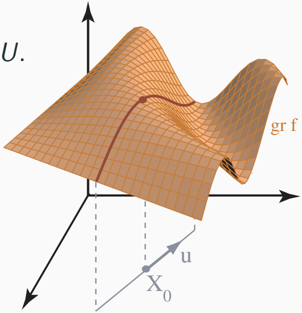
Começamos então pelas *derivadas direccionais* que, como o próprio nome indica, fornecem informação sobre a variação da função quando os pontos do domínio variam numa única direcção.

Derivadas direccionais

Definição

Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^m$, $X_0 \in U$ e $u \in \mathbb{R}^n$.

Como U é aberto, tem-se $X_0 + t\,u \in U$ para valores suficientemente pequenos de t, digamos, $|t| < \varepsilon$. Pode-se então definir a curva $\alpha(t) = f(X_0 + tu)$, para $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, que passa em $f(X_0)$ e cujo traço é a imagem por f do segmento de recta $\{X_0 + tu : \ t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\} \subseteq U$.



Se α é derivável no ponto $t = 0$, o vector velocidade de α em 0 chama-se a derivada direccional de f no ponto X_0 na direcção do vector u e representa-se por $\mathrm{D}\,f(X_0; u)$:

$$\mathrm{D}\,f(X_0; u) = \alpha'(0), \qquad \alpha(t) = f(X_0 + tu).$$

Derivadas direccionais

Observações

- A derivada direccional $\mathrm{D}\, f(X_0; u)$ dá informação sobre a variação de f a partir do ponto X_0 (apenas) na direcção do vector u.

Como o vector velocidade de uma curva tem como coordenadas as derivadas das suas funções componentes, decorre que:

- Se $f_1, \ldots, f_m$ são as funções componentes de f, então existe $\mathrm{D}\, f(X_0; u)$ se e só se existem $\mathrm{D}\, f_i(X_0; u)$, $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$ e

$$\mathrm{D}\, f(X_0; u) = (\mathrm{D}\, f_1(X_0; u), \ldots, \mathrm{D}\, f_m(X_0; u)) \in \mathbb{R}^m.$$

- No caso de f ser uma função escalar $(m = 1)$, $\alpha(t) = f(X_0 + tu)$ é uma função real de variável real (t) e $\mathrm{D}\, f(X_0; u) = \alpha'(0) \in \mathbb{R}$.

- Note-se também que existe sempre $\mathrm{D}\, f(X_0; 0_{\mathbb{R}^n})$ e é igual a zero: $\alpha(t) = f(X_0 + t0_{\mathbb{R}^n})$ é constante igual a $f(X_0)$.

1. Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^3 + yz$, $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $u = (1, 2, 3)$. Então,

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= f(X_0 + tu) = f((x_0, y_0, z_0) + (t, 2t, 3t)) \\
&= f(x_0 + t, y_0 + 2t, z_0 + 3t) \\
&= (x_0 + t)^3 + (y_0 + 2t)(z_0 + 3t), \\
\alpha'(t) &= 3(x_0 + t)^2 + 2(z_0 + 3t) + 3(y_0 + 2t) \quad \text{e} \\
\mathrm{D}(X_0; u) &= \alpha'(0) = 3x_0^2 + 3y_0 + 2z_0 \ (\in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Por exemplo, para $X_0 = (0, 1, -1)$, $\mathrm{D}\, f(X_0; u) = 3 - 2 = 1$.

2. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(x,y) = (x^2 + \operatorname{sen} y, ye^x)$ e sejam g_1, g_2 as suas funções componentes. Se $X_0 = (0,\pi)$ e $u = (1,2)$:

$$\begin{aligned}
& & \alpha_1(t) &= g_1(X_0 + tu) = g_1(t, \pi + 2t) = t^2 + \operatorname{sen}(\pi + 2t) \\
&\Rightarrow & \alpha_1'(t) &= 2t + 2\cos(\pi + 2t), \\
& & \alpha_2(t) &= g_2(X_0 + tu) = (\pi + 2t)e^t \\
&\Rightarrow & \alpha_2'(t) &= 2e^t + (\pi + 2t)e^t
\end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\, g(X_0; u) &= (\mathrm{D}\, g_1(X_0; u), \mathrm{D}\, g_2(X_0; u)) = (\alpha_1'(0), \alpha_2'(0)) \\
&= (2\cos\pi, 2 + \pi) = (-2, 2 + \pi) \ (\in \mathbb{R}^2)
\end{aligned}$$

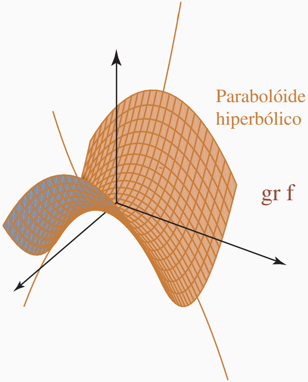
3. Seja $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 - y^2 \end{array}$.

Neste caso, as
derivadas direccionais no ponto $X_0 = (0, 0)$
são todas nulas: para qualquer $u = (a, b)$,

$$\alpha(t) = f((0,0) + t(a,b)) = (a^2 - b^2)t^2,$$

$$\alpha'(t) = 2(a^2 - b^2)t; \quad \text{e}$$

$$\mathrm{D}\, f((0,0);(a,b)) = \alpha'(0) = 0$$



Derivadas direccionais

Observação

Para funções reais de variável real, há casos em que não é possível calcular a derivada num ponto usando as regras de derivação. Isso acontece nomeadamente quando a função não é dada sempre pela mesma expressão numa vizinhança do ponto em causa (por exemplo, como calcula $f'(0)$ se $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, se $x \neq 0$ e $f(0) = 1$?).

Nesses casos, temos de recorrer à definição de derivada.

Uma situação idêntica acontece com certas derivadas direccionais, uma vez que estas se reduzem ao cálculo de derivadas de funções reais de variável real.

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$, para $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$.

Para calcular as derivadas direccionais no ponto $(0,0)$:
$Df((0,0);(a,b)) = g'(0)$, onde $g(t) = f((0,0) + t(a,b))$. Então

$$
\begin{aligned}
Df((0,0);(a,b)) &= \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0) + t(a,b)) - f((0,0))}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t^3 a^3}{t^3(a^2+b^2)} \\
&= \frac{a^3}{(a^2+b^2)}
\end{aligned}
$$

Derivadas parciais

Definição

Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^m$, $X_0 \in U$ e $(e_1, \ldots, e_n)$ a base canónica de $\mathbb{R}^n$.

- Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, a derivada direccional $\mathrm{D}\, f(X_0; e_i)$, caso exista, diz-se a derivada parcial de f em ordem a x_i no ponto X_0 e representa-se também por $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{X_0}$.

Pelo que foi observado atrás, se $f = (f_1, \ldots, f_m)$,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{X_0} = \Big(\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right|_{X_0}, \ldots, \left.\frac{\partial f_m}{\partial x_i}\right|_{X_0} \Big).$$

Exemplo: Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x, y) = x^2 - y^2$ então, de acordo com o que já foi calculado:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \mathrm{D}\, f((0,0);(1,0)) = 0 \quad \text{e} \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \mathrm{D}\, f((0,0);(0,1)) = 0.$$

Derivadas parciais

Cálculo - exemplo

Considere-se, por exemplo, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{X_0} = \mathrm{D}\, f((x_0, y_0); (1, 0)) = \alpha'(0), \quad \text{onde } \alpha(t) = f((x_0 + t, y_0)).$$

Neste caso, α é uma função real de variável real e

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= \lim_{t \to 0} \frac{\alpha(t) - \alpha(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0} \frac{f((x_0 + t, y_0)) - f((x_0, y_0))}{(x_0 + t) - x_0} \\ &= g'(x_0), \end{aligned}$$

onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função definida por $g(x) = f(x, y_0)$.

Daqui resulta que a derivada parcial de f em ordem a x no ponto (x_0, y_0) pode ser calculada usando as regras de derivação já conhecidas para funções reais de variável real, considerando a coordenada x variável e y constante igual a y_0.

Exemplo: Se $f(x,y) = x\,\mathrm{sen}(xy)$ então pode calcular-se $\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{(x,y)}$ considerando $f(x,y)$ como função apenas de x, e y como uma constante:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x,y)} = \mathrm{sen}(xy) + xy\cos(xy).$$

Assim, por exemplo, $\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{(1,2\pi)} = \mathrm{sen}(2\pi) + 2\pi\cos(2\pi) = 2\pi$.

- Em geral, sendo $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$, mostra-se analogamente que cada $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\big|_X$ pode ser calculada usando as regras de derivação já conhecidas para funções reais de variável real, considerando a coordenada x_i como variável e as restantes coordenadas como constantes.

Exemplo: Seja $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y,z)=(x^2\operatorname{sen} z, xe^y)$. As funções componentes de f são $f_1(x,y,z)=x^2\operatorname{sen} z$ e $f_2(x,y,z)=xe^y$. As derivadas parciais de f num ponto genérico $X=(x,y,z)$ são então

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_X = \Big(\frac{\partial f_1}{\partial x}\Big|_X, \frac{\partial f_2}{\partial x}\Big|_X\Big) = (2x\operatorname{sen} z, e^y),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_X = \Big(\frac{\partial f_1}{\partial y}\Big|_X, \frac{\partial f_2}{\partial y}\Big|_X\Big) = (0, xe^y),$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_X = \Big(\frac{\partial f_1}{\partial z}\Big|_X, \frac{\partial f_2}{\partial z}\Big|_X\Big) = (x^2\cos z, 0)$$

Também se pode calcular, por exemplo, $\frac{\partial f_1}{\partial x}\big|_X$ usando a definição: sendo $\alpha(t)=f_1((x,y,z)+t(1,0,0))=(x+t)^2\operatorname{sen} z$, tem-se
$\alpha'(t)=2(x+t)\operatorname{sen} z$ e
$\frac{\partial f_1}{\partial x}\big|_X = \mathrm{D}\, f((x,y,z);(1,0,0))=\alpha'(0)=2x\operatorname{sen} z$.

Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^m$.

- Seja $i \in \{1, \ldots, n\}$. Se, para todo $X \in U$, existir $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_X$, pode-se definir a **derivada parcial de f em ordem a** x_i como a função

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} : U & \to & \mathbb{R}^m \\ X & \mapsto & \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_X \end{array} .$$

Diz-se que f é de classe c^1 sse existem todas as derivadas parciais de f, $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$, e são funções contínuas.

Derivada num ponto

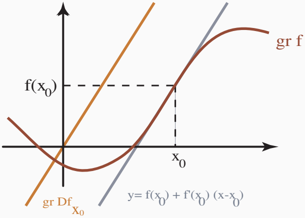
Ideia informal

Comecemos pelo conceito já conhecido de derivada de uma função real de variável real, como motivação para o conceito mais geral de derivada de uma função vectorial de variável vectorial num ponto.

- Se U é um aberto de $\mathbb{R}$ e $f : U \to \mathbb{R}$ é derivável em $x_0 \in U$, sabe-se que $f'(x_0)$ é o declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$. Por outras palavras, $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, cujo gráfico é essa recta, é a função afim que "melhor aproxima" f numa vizinhança de x_0.

Represente-se por $\mathrm{D}\, f_{x_0}$ a função linear associada a g, i.e.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{D}\, f_{x_0} : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x_0)\, x \end{array}$$



cujo gráfico é a recta de declive $f'(x_0)$ que passa na origem.

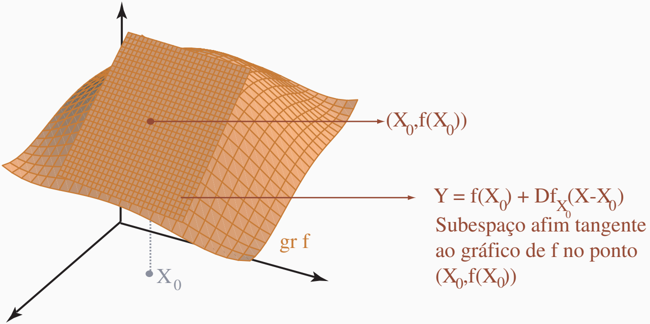
Derivada num ponto

Ideia informal

Pretende-se generalizar este conceito para funções f de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$:

- quando existe, $\mathrm{D}\, f_{X_0}$ é a melhor "aproximação" linear de f perto de X_0; mais precisamente, $g(X) = f(X_0) + \mathrm{D}\, f_{X_0}(X - X_0)$ é a função afim que melhor aproxima f numa vizinhança do ponto X_0.

- O gráfico da função afim g, que é um subespaço afim de $\mathbb{R}^{n+m}$ (recta, plano, etc.), é tangente ao gráfico de f em $(X_0, f(X_0))$.



Derivada num ponto

Definição

Formalmente, sendo U um aberto de $\mathbb{R}^n$, diz-se que uma função $f : U \to \mathbb{R}^m$ é derivável em $X_0 \in U$, sse existe uma função linear

$$\mathrm{D}\, f_{X_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

tal que

$$\lim_{X \to X_0} \frac{\|f(X) - f(X_0) - \mathrm{D}\, f_{X_0}(X - X_0)\|}{\|X - X_0\|} = 0.$$

- Prova-se que, quando existe, esta função linear $\mathrm{D}\, f_{X_0}$ é única e diz-se a derivada de f no ponto X_0.

- A matriz de $\mathrm{D}\, f_{X_0}$ relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ chama-se a matriz jacobiana de f em X_0 e representa-se por $\mathcal{J} f_{X_0}$.

Matriz jacobiana

Nota

- Já a seguir, no slide 52, veremos como se calcula a matriz jacobiana de uma função num ponto, através das derivadas parciais da função no mesmo ponto. Esta será em geral a forma mais simples de calcular a derivada num ponto.

- A designação "matriz jacobiana" refere-se ao matemático alemão Carl Gustav Jakob Jacobi (Potsdam, 10 de dezembro de 1804 - Berlim, 18 de fevereiro de 1851), que fez contribuições fundamentais na teoria das funções elípticas, dinâmica, equações diferenciais e teoria dos números.

Derivada num ponto

Exemplos

1. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é linear então, para qualquer ponto X_0, a função linear que melhor aproxima f perto de X_0 é a própria função f. Portanto, $\forall X_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{D}\, f_{X_0} = f$.

2. Se $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma função afim, $g(X) = Y_0 + f(X)$, em que $Y_0 \in \mathbb{R}^m$ e f é linear então, para qualquer $X_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{D}\, g_{X_0} = f$. O subespaço afim tangente ao gráfico de g em qualquer ponto é o próprio gráfico de g.

Em particular, se $g(X) = Y_0$ é constante, então $\mathrm{D}\, f_{X_0}$ é a função nula.

3. Se f é uma função real de variável real derivável num ponto x_0, então $Df_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $\mathrm{D}\, f_{x_0}(x) = f'(x_0) \cdot x$.

Em geral, como se calcula a derivada de uma função num ponto?

A resposta vem da relação da derivada com as derivadas direccionais, que vamos explorar a seguir.

Derivada num ponto

Relação com as derivadas direccionais

Suponhamos que U é um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f : U \to \mathbb{R}^m$ é derivável em $X_0 \in U$. Pela definição de Df_{X_0}, tem-se então

$$\lim_{X \to X_0} \frac{\|f(X) - f(X_0) - \mathrm{D}\, f_{X_0}(X - X_0)\|}{\|X - X_0\|} = 0.$$

Se $u \in \mathbb{R}^n$ e $X = X_0 + tu \in U$, para t suficientemente pequeno, resulta em particular

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|f(X_0 + tu) - f(X_0) - \mathrm{D}\, f_{X_0}(tu)\|}{\|tu\|} = 0$$

logo

$$\frac{1}{u} \lim_{t \to 0} \left\| \frac{f(X_0 + tu) - f(X_0)}{t} - \mathrm{D}\, f_{X_0}(u) \right\| = 0.$$

Podemos então concluir que $\mathrm{D}\, f(X_0; u) = \lim_{t \to 0} \frac{f(X_0 + tu) - f(X_0)}{t}$ existe e é igual a $Df_{X_0}(u)$. Assim:

Derivada num ponto

Relação com as derivadas direccionais e parciais

Se f é derivável em X_0, então, para qualquer $u \in \mathbb{R}^n$, a derivada direccional $Df(X_0; u)$ existe e

$$\mathrm{D}\, f_{X_0}(u) = \mathrm{D}\, f(X_0; u).$$

Em particular, as imagens por $\mathrm{D}\, f_{X_0}$ dos vectores da base canónica são

$$\mathrm{D}\, f_{X_0}(e_i) = \mathrm{D}\, f(X_0; e_i) = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{X_0} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

e portanto, sendo $f = (f_1, \ldots, f_m)$,

$$\mathcal{J} f_{X_0} = M_{b_c, b_c}(\mathrm{D}\, f_{X_0}) = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{X_0} & \cdots & \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right|_{X_0} \\ \vdots & & \vdots \\ \left.\frac{\partial f_m}{\partial x_1}\right|_{X_0} & \cdots & \left.\frac{\partial f_m}{\partial x_n}\right|_{X_0} \end{pmatrix}$$

Derivada num ponto

Relação com as derivadas direccionais e parciais

Estes resultados fornecem um método para determinar a derivada de uma função f, com domínio num aberto U de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, num ponto X_0 através das derivadas parciais nesse ponto, desde que se saiba à priori que a função é derivável nesse ponto:

- Calculam-se as derivadas parciais de f e obtém-se a matriz $\mathcal{J}f_{X_0}$;
- Df_{X_0} é a função linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ cuja matriz relativamente às bases canónicas é $\mathcal{J}f_{X_0}$.

No entanto, como veremos num exemplo à frente, a existência das derivadas parciais em X_0, e até de todas as derivadas direccionais em X_0, não garante que f seja derivável nesse ponto. Apesar disso, prova-se que:

Se f é de classe c^1 então f é derivável em todos os pontos.

1. Seja $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z)=(x^2y+z,\cos x+z^2)$ e f_1,f_2 as suas funções componentes. Para $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{J}f_X=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}\Big|_X & \frac{\partial f_1}{\partial y}\Big|_X & \frac{\partial f_1}{\partial z}\Big|_X \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}\Big|_X & \frac{\partial f_2}{\partial y}\Big|_X & \frac{\partial f_2}{\partial z}\Big|_X \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 1 \\ -\operatorname{sen} x & 0 & 2z \end{pmatrix}$$

Como existem todas as derivadas parciais de f e são contínuas, f é de classe c^1. Portanto, f é derivável em todos os pontos.

Para determinar, por exemplo, a derivada de f em $X_0=(\frac{\pi}{2},1,1)$, calcula-se a respectiva matriz jacobiana

$$\mathcal{J}f_{X_0}=\begin{pmatrix} \pi & \frac{\pi^2}{4} & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

que determina a função linear

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{D}\, f_{X_0}:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (a,b,c) & \mapsto & (\pi a+\frac{\pi^2}{4}b+c,-a+2c) \end{array}.$$

2. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(x,y) = (2x + y + 1, -x + 3y)$, que é uma função afim: $g(x,y) = (1,0) + \underbrace{(2x + y, -x + 3y)}_{f(x,y)(\text{linear})}$.

Como já foi dito, em qualquer ponto (x_0, y_0), $\mathrm{D}\, g_{(x_0,y_0)} = f$. De facto,

$$\mathcal{J} g_{(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} & \frac{\partial g_1}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} & \frac{\partial g_2}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

é sempre igual à matriz de f relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Para calcular uma derivada direccional de g, por exemplo, $\mathrm{D}\, g((1,1);(-2,3))$ pode-se usar a derivada de $\mathrm{D}\, g_{(1,1)}$:

$$\mathcal{J} g_{(1,1)} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 11 \end{pmatrix}$$

logo, $\mathrm{D}\, g((1,1);(-2,3)) = \mathrm{D}\, g_{(1,1)}((-2,3)) = (-1, 11)$.

3. Consideremos $f(x,y) = x^2 - y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Se $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathcal{J}f_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} & \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \end{pmatrix}.$$

Como f é de classe c^1, f é derivável em todos os pontos.

Para calcular, por exemplo, a derivada de f em $(3,1)$:

$$\mathcal{J}f_{(3,1)} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a - 2b \end{pmatrix},$$

logo,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{D}\, f_{(3,1)} : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & 6a - 2b \end{array}.$$

- Em geral, se $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função escalar derivável em $X_0 \in U$, então $\mathcal{J}f_{X_0}$ é uma matriz linha:

$$\mathcal{J}f(X_0) = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{X_0} & \cdots & \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{X_0} \end{pmatrix}.$$

4. Se f é uma função real de variável real, $\mathcal{J}f_{x_0}$ é uma matriz com apenas uma entrada (1 linha x 1 coluna), que é $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x_0} = f'(x_0)$.

Por exemplo, se $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, então $\mathcal{J}f_{x_0} = \left(-\frac{1}{x_0^2}\right)$.

Para $x_0 = 1$, $\mathcal{J}f_1\big(a\big) = \big(-1\big)\big(a\big) = \big(-a\big)$, logo

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\, f_1 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ a &\mapsto -a \end{aligned}.$$

- Note-se que o domínio de $\mathrm{D}\, f_1$ é todo o espaço vectorial $\mathbb{R}$, mesmo que o domínio de f não seja todo o $\mathbb{R}$!

5. Sejam I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ uma curva, com funções componentes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, derivável em $t_0 \in I$, no sentido definido no capítulo anterior. Então, $\mathcal{J}\alpha_{t_0}$ é uma matriz com uma só coluna:

$$\mathcal{J}\alpha_{t_0} = \begin{pmatrix} \alpha_1'(t_0) \\ \vdots \\ \alpha_n'(t_0) \end{pmatrix}$$

logo,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{D}\,\alpha_{t_0} : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n \\ a & \mapsto & a(\alpha_1'(t_0), \ldots, \alpha_n'(t_0)) = a\alpha'(t_0) \end{array}$$

em que o valor de $\mathrm{D}\,\alpha_{t_0}(a)$ é obtido multiplicando $\mathcal{J}\alpha_{t_0}$ pela matriz $\big(a\big)$.

Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^n$, $f, g : U \to \mathbb{R}^m$, $X_0 \in U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Se f é derivável em X_0, então f é contínua em X_0.
- Se $f_1, \ldots, f_m$ são as funções componentes de f, então f é derivável em X_0 se e só se $f_1, \ldots, f_m$ são deriváveis em X_0 e, neste caso, as funções componentes de $\mathrm{D}\, f_{X_0}$ são $\mathrm{D}(f_1)_{X_0}, \ldots, \mathrm{D}(f_m)_{X_0}$.
- Se f e g são deriváveis em X_0, então $f + g$ é derivável em X_0 e $\mathrm{D}(f+g)_{X_0} = \mathrm{D}\, f_{X_0} + \mathrm{D}\, g_{X_0}$.
- Se f é derivável em X_0, então λf é derivável em X_0 e $\mathrm{D}(\lambda f)_{X_0} = \lambda\, \mathrm{D}\, f_{X_0}$.

Já vimos atrás que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ não é contínua em $(0,0)$, pois não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Logo, f não é derivável em $(0,0)$.

No entanto, existem as derivadas parciais em $X_0 = (0,0)$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{X_0} = Df(X_0; e_1) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0)) - f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{X_0} = Df(X_0; e_2) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(0,1)) - f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

Existem funções contínuas que não são deriváveis. Por exemplo, pode-se mostrar que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é contínua, mas não é derivável em $(0,0)$.

Exercício: Verifique que existem todas as derivadas direccionais em $X_0 = (0,0)$ e que, para todo o vector $u = (a,b) \neq (0,0)$,

$$Df((0,0);(a,b)) = \frac{a^2 b}{a^2+b^2}.$$

(Alerta: Tenha em atenção que, da maneira que f é definida por ramos, não pode usar as regras aritméticas de derivação para calcular $\alpha'(0)$, onde $\alpha(t) = f((0,0)+t(a,b))$ e tem de recorrer à definição de derivada!)

Se f fosse derivável em X_0, teria de acontecer $\forall (a,b) \neq (0,0)$, $Df_{X_0}(a,b) = Df((0,0);(a,b)) = \frac{a^2 b}{a^2+b^2}$. Mas a função definida por esta expressão não é linear. Logo, não pode ser Df_{X_0}!

- Derivada da função composta ou Regra da Cadeia

Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^n$, V um aberto de $\mathbb{R}^m$, $f : U \to \mathbb{R}^m$ e $g : V \to \mathbb{R}^p$ tais que $f(U) \subseteq V$.

Suponhamos ainda que f é derivável em $X_0 \in U$ e g é derivável em $f(X_0)$.

Então, $g \circ f$ é derivável em X_0 e

$$\mathrm{D}(g \circ f)_{X_0} = \mathrm{D}\, g_{f(X_0)} \circ \mathrm{D}\, f_{X_0}$$

ou, de forma equivalente, como é conhecido de ALGA,

$$\mathcal{J}(g \circ f)_{X_0} = \mathcal{J} g_{f(X_0)} \times \mathcal{J} f_{X_0}.$$

1. Sejam $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (xy, \cos x) \end{array}$, $\begin{array}{rcl} g:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (e^{2x}y, x-y, \operatorname{arctg} y) \end{array}$.

Então,

$$\mathcal{J}f_{(x,y)} = \begin{pmatrix} y & x \\ -\operatorname{sen} x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{J}g_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2e^{2x}y & e^{2x} \\ 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{1+y^2} \end{pmatrix}.$$

Como f e g são de classe c^1, são deriváveis nos seus domínios. Logo, $g \circ f$ também é derivável em todos os $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e, por ex.,

$$\mathrm{D}(g \circ f)_{(2\pi,0)} = \mathrm{D}\, g_{f(2\pi,0)} \circ \mathrm{D}\, f_{(2\pi,0)} = \mathrm{D}\, g_{(0,1)} \circ \mathrm{D}\, f_{(2\pi,0)}; \text{ou seja}$$

$$\mathcal{J}(g \circ f)_{(2\pi,0)} = \mathcal{J}g_{(0,1)} \times \mathcal{J}f_{(2\pi,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4\pi \\ 0 & 2\pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, $\mathrm{D}(g \circ f)_{(2\pi,0)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é dada por $\mathrm{D}(g \circ f)_{(2\pi,0)}(a,b) = (4\pi b, 2\pi b, 0)$.

2. Sejam $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & y+e^{x^2} \end{array}$, $\begin{array}{rcl} \alpha:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t\cos t, 1+t^2) \end{array}$.

Então, $\mathcal{J}f_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2xe^{x^2} & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha'(t) = (\cos t - t \operatorname{sen} t, 2t)$ e, para $t_0 = 0$, $\alpha(t_0) = (0,1)$. Pela regra da cadeia,

$$\mathcal{J}(f\circ\alpha)_{t_0} = \mathcal{J}f_{\alpha(t_0)} \times \mathcal{J}\alpha_{t_0}$$

$$\iff \begin{pmatrix} (f\circ\alpha)'(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff (f\circ\alpha)'(t_0) = 0$$

Alternativamente, calculando primeiro $f\circ\alpha$ e depois $(f\circ\alpha)'(t_0)$:

$$(f\circ\alpha)(t) = f(t\cos t, 1+t^2) = 1 + t^2 + e^{(t\cos t)^2}$$

$$(f\circ\alpha)'(t) = 2t + 2(t\cos t)(\cos t - t\operatorname{sen} t)e^{(t\cos t)^2}$$

e $\quad (f\circ\alpha)'(0) = 0.$

Gradiente de funções escalares

Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f : U \to \mathbb{R}$ derivável em $X_0 \in U$.

Já foi visto que a matriz de $\mathrm{D}\, f_{X_0}$ relativamente às bases canónicas é a matriz-linha $\mathcal{J} f_{X_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{X_0} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{X_0} \right)$. Isto significa que, para $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{D}\, f_{X_0}(u) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{X_0} \cdot u_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{X_0} \cdot u_n = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{X_0}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{X_0} \Big) \,|\, u.$$

- Ao vector

$$\nabla f(X_0) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{X_0}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{X_0} \Big)$$

dá-se o nome de **gradiente** de f em X_0. Assim,

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{D}\, f_{X_0}(u) = \nabla f(X_0) \,|\, u.$$

Tomando vectores $u \in \mathbb{R}^n$ de norma constante, por exemplo, unitários, o valor de $\mathrm{D}\, f(X_0; u) = \mathrm{D}\, f_{X_0}(u) = \nabla f(X_0) \mid u$ dá uma "medida da variação" de f a partir do ponto X_0 na direcção do vector u. Ora, atendendo a que

$$\nabla f(X_0) \mid u = \underbrace{\|\nabla f(X_0)\|}_{\text{fixa; } \geq 0} \cdot \underbrace{\|u\|}_{=1} \cdot \underbrace{\cos \sphericalangle(\nabla f(X_0), u)}_{\in[-1,1]},$$

conclui-se que $\mathrm{D}\, f(X_0; u)$ é máxima quando $\cos \sphericalangle(\nabla f(X_0), u) = 1$, ou seja, quando u tem a mesma direcção e sentido do vector $\nabla f(X_0)$; e é mínima, quando $\cos \sphericalangle(\nabla f(X_0), u) = -1$, ou seja, quando u e $\nabla f(X_0)$ têm a mesma direcção e sentidos diferentes.

Assim, pode-se dizer que $\nabla f(X_0)$ aponta no sentido do maior crescimento de f a partir do ponto X_0.

Gradiente

Exemplo

Se $f(x,y,z) = xy + xz$, $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, então

$$\nabla f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_X, \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_X, \frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_X \right) = (y+z, x, x).$$

Por exemplo, a partir do ponto $X = (1,1,1)$, o sentido de maior crescimento de f é o do vector $\nabla f(1,1,1) = (2,1,1)$.

Para calcular a derivada direccional $\mathrm{D}\, f((1,1,1),(1,0,-1))$ ou, o que é o mesmo, $\mathrm{D}\, f_{(1,1,1)}(1,0,-1)$ (porque f é derivável):

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\, f_{(1,1,1)}(1,0,-1) &= \nabla f(1,1,1) \,|\, (1,0,-1) \\ &= (2,1,1) \,|\, (1,0,-1) = 1. \end{aligned}$$

Gradiente

Observação

- Note-se que o gradiente só está definido para funções escalares.

Em geral, se $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, então as m linhas de $\mathcal{J}f_X$ são formadas pelas coordenadas de $\nabla f_1(X), \ldots, \nabla f_m(X)$ (enquanto as n colunas de $\mathcal{J}f_{X_0}$ são formadas pelas coordenadas das derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_X, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_X$): Sugestivamente,

$$\mathcal{J}f_X = \begin{pmatrix} \leftarrow & \nabla f_1(X) & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & \nabla f_m(X) & \rightarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_X & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_X \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe c^1 e $c \in \mathbb{R}$. Recorde-se que a hipersuperfície de nível de valor c de f é $N_c f = \{X \in U : \ f(X) = c\}$.

- Se $X_0 \in N_c f$ e $\nabla f(X_0) \neq 0$, este vector define a direcção normal a $N_c f$ em X_0. A recta normal a $N_c f$ em X_0 tem equação vectorial

$$X = X_0 + \lambda \nabla f(X_0), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- O espaço afim (de dimensão $n-1$) que passa em X_0 e é ortogonal a $\nabla f(X_0)$ diz-se o espaço tangente a $N_c f$ em X_0; tem portanto equação

$$(X - X_0) \,|\, \nabla f(X_0) = 0.$$

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = y - x^2$.

Para $c \in \mathbb{R}$, a curva de nível de valor c de f é a parábola $N_c(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y - x^2 = c\}$.

O vector $\nabla f(x,y) = (-2x, 1)$ nunca se anula e é normal à curva de nível que contém o ponto (x,y) $(c = f(x,y))$.

Por exemplo, o ponto $X_0 = (1,0)$ pertence à curva de nível $N_{-1}f$. A recta normal a $N_{-1}f$ neste ponto tem equação

$$(x,y) = (1,0) + \lambda \nabla f(1,0) = (1,0) + \lambda(-2,1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

e a recta tangente a $N_{-1}f$ em $(1,0)$ tem equação

$$((x,y) - (1,0)) \,|\, (-2,1) = 0 \iff -2x + y = -2.$$

2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2$. O ponto $X_0 = (1, 1, 1)$ pertence à superfície de nível de valor 2 de f, $N_2(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2\}$, que é um cilindro de raio $\sqrt{2}$ cujo eixo é o eixo dos zz.

Tem-se $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 0)$ e $\nabla f(1, 1, 1) = (2, 2, 0) \neq (0, 0, 0)$. A recta normal a $N_2 f$ em X_0 tem equação

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(2, 2, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

O espaço tangente à mesma superfície no mesmo ponto é, neste caso, um plano, e tem equação

$$((x, y, z) - (1, 1, 1))\,|(2, 2, 0) = 0 \iff 2x + 2y = 4.$$

3. Para determinar a recta tangente à curva de equação $x + y - \log(1 + y^2) = 1$ no ponto $X_0 = (1, 0)$, considere-se uma função f tal que a curva dada seja uma curva de nível de f:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x + y - \ln(1 + y^2).$$

Então a curva dada é $N_1 f$ e $\nabla f(x, y) = (1, 1 - \frac{2y}{1+y^2})$, logo $\nabla f(1, 0) = (1, 1) \neq (0, 0)$. A recta tangente procurada tem então equação $x + y = 1$.

4. Para determinar a recta normal ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$ no ponto $(2, 3, f(2, 3)) = (2, 3, 13)$, note-se que $\mathrm{gr} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = f(x, y)\}$ é a superfície de nível de valor 0 da função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x, y, z) = z - f(x, y)$. Ora, $\nabla g(x, y, z) = (-2x, -2y, 1)$ é sempre não nulo e a recta normal a $N_0 g$ em $(2, 3, 13)$ tem equação

$$(x, y, z) = (2, 3, 13) + \lambda(-4, -6, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercícios

Gráficos, curvas e superfícies de nível

1. Diga quais dos subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ são gráficos de funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

   a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; 2x + y - 2z = 1\}$ b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x = 0\}$
   c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = 1\}$ d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = z\}$

2. Esboce as curvas de nível das seguintes funções:

   a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x - 3y$ b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y + 3)^2$
   c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = y - x^2$ d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, z)$

3. Esboce as superfícies de nível das seguintes funções:

   a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x - z$ b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
   c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

4. Para cada uma das seguintes alíneas, determine uma função f de tal forma que o conjunto indicado seja uma curva de nível de f:

   a) a recta em $\mathbb{R}^2$ de equação $2x = y$;
   o segmento de recta em $\mathbb{R}^2$ que une os pontos $(0, 0)$ a $(1, 2)$;
   d) a curva em $\mathbb{R}^2$ de equação $e^{xy} + x^3y^3 + y^2 = 2$.

5. Diga se cada um dos seguintes conjuntos é aberto, fechado, limitado e/ou compacto e indique o seu interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação.

   Em $\mathbb{R}$: a) $[0,1[$ b) $[0,+\infty[$ c) $[0,1[\cup\{2\}$

   Em $\mathbb{R}^2$: d) $B((0,0);2)\cap D((1,0);2)$ e) $\{(0,y):\ 0\leq y\leq 1\}$;
   f) $]0,1[\times\mathbb{R}$; g) $\{(x,x^2):\ x\in\mathbb{R}\}$
   h) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 2-x\}$

   Em $\mathbb{R}^3$: i) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ z=1\}$ j) $\{(0,0,0)\}$
   k) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\leq z\leq 2\}$ l) $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$
   m) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1, 0\leq z\leq 1-y\}$

6. Justifique que são contínuas as seguintes funções:

a) $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+(\cos xy)^2 \end{array}$

b) $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (1-e^{x+y}, xy, \operatorname{sen} x) \end{array}$

7. Considere a função $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{x^2}{x^2+y^2},\ (x,y)\neq(0,0) \\ (0,0) & \mapsto & 0 \end{array}$.

Avalie a função f nos pontos das rectas de equações $x=0$ e $y=0$. O que pode concluir quanto à continuidade de f no ponto $(0,0)$?

8. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x^2-y)^2}$, se $(x,y)\neq(0,0)$ e $f(0,0)=0$.

a) Mostre que $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y))=\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$.

b) Verifique que se r é uma recta que passa na origem então $\lim_{X\to X_0} f_{|r}(X)=0$.

c) Mostre que f é constante igual a 1 nos pontos da parábola $y=x^2$, com $x\neq 0$ e conclua que f não é contínua em $X_0=(0,0)$.

9. Seja $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Determine, pela definição:

   a) $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ b) $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$ c) $Df((x_0,y_0);(1,2))$

10. Calcule, pela definição, as derivadas direccionais das funções que se seguem, nos pontos e segundo as direcções dadas:

    a) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ em $(1,1,0)$ segundo a direcção de $(1,-1,2)$.

    b) $f(x,y,z) = \operatorname{sen}(x + 2y - z)$ em $(1,1,0)$ segundo a direcção de $(1,1,1)$.

11. Verifique se existem as derivadas parciais no ponto $(0,0)$ da função definida no exercício 7.

12. Determine as derivadas parciais das seguintes funções:

    a) $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2 + (\cos xy)^2 \end{array}$

    b) $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \|(x,y)\| \end{array}$

    c) $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x^3+y^3+z^3, xyz) \end{array}$

    d) $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (1-e^{x+y}, xy, \operatorname{sen} x) \end{array}$

13. Justifique que cada uma das seguintes funções f é derivável em todos os pontos do domínio e calcule $\mathrm{D}\, f_{X_0}(u)$ nos pontos X_0 e vectores u indicados.

    a) $f(x,y) = x + 2x^2 - 3xy, \quad X_0 = (1,1), \quad u = (1,2).$

    b) $f(x,y) = \log(\sqrt{x^2+y^2}+1), \quad X_0 = (1,0), \quad u = (1,-1).$

    c) $f(x,y,z) = xyz, \quad X_0 = (1,\sqrt{2},\sqrt{2}), \quad u = (1,2,3).$

14. Para cada uma das seguintes funções f, justifique que f é derivável no ponto X_0 dado, determine a derivada $\mathrm{D}\, f_{X_0}$ (indicando explicitamente o domínio e o conjunto de chegada!) e calcule a derivada direccional $\mathrm{D}\, f(X_0; u)$.

    a) $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x^2y, e^{-xy}) \end{array}, \qquad X_0 = (1,0),\ u = (2,3).$

    b) $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x+y+z \end{array}, \qquad X_0 = (1,0,1),\ u = (3,3,3).$

    c) $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (\operatorname{sen} x, \cos x) \end{array}, \qquad X_0 = 0,\ u = 2.$

(14 - continuação)

d) $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \log x \end{array}$, $\quad X_0 = 1,\ u = 2.$

e) $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (xy, x+y, y) \end{array}$, $\quad X_0 = (2,-1),\ u = (-2,3).$

f) $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \log(x^2+y^2) \end{array}$, $\quad X_0 = (1,1),\ u = (5,-5).$

g) $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0):\ x \in \mathbb{R}\} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{1}{y}\cos(x^2) \end{array}$, $\quad X_0 = (0,1),\ u = (1,0).$

h) $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x^2y - zx, xyz) \end{array}$, $\quad X_0 = (1,1,0),\ u = (8,-2,0).$

i) $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (\log(1+y^2), xy, \log(1+x^2)+y) \end{array}$, $\quad X_0 = (0,0),\ u = (2,5).$

j) $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x\,\mathrm{sen}(yz), y\cos(xz), z\cos z) \end{array}$, $\quad X_0 = (1,1,0),\ u = (1,2,3).$

15. Justifique que não existe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, derivável em todos os pontos, tal que $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\forall u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\mathrm{D}\, f(X; u) > 0$.

16. $\star$ Considere a função
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \frac{x^2 y}{x^4 + y^2},\ (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) & \mapsto & 0 \end{array}.$$

    a) Verifique que existem as derivadas parciais de f em $(0, 0)$ e são ambas nulas. Com base nesse facto, o que pode concluir quanto à derivada de f em $(0, 0)$, se esta existir?

    b) Mostre que f não é derivável em $(0, 0)$.

    (Sugestão: use a alínea anterior e a definição de derivada, e prove que o limite em causa não existe avaliando a função em rectas apropriadas)

17. $\star$ Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(tX) = tf(X)$. Mostre que f é linear. (Sugestão: calcule $\mathrm{D}\, f((0, 0); X)$, $X \in \mathbb{R}^n$).

Exercícios

Derivada da função composta (regra da cadeia)

18. Use a regra da cadeia para calcular a derivada de $g \circ f$ no ponto X_0, onde:

    a) $f(x,y) = (x^2 + \operatorname{sen} y, xy, \operatorname{sen}(xy))$, $g(x,y,z) = (xy^2 + z, \frac{1}{x^2+z^2})$ e $X_0 = (1,0)$.

    b) $f(x,y,z) = (xy - \cos(z^2), e^{xy} - x\cos(yz^2))$,
    $g(x,y) = (xy^3 - 2y, y^2, y^5 - 4x^2)$ e
    $X_0 = (1,1,0)$.

    c) $f(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$, $g(x,y) = x^2 + xy$ e $X_0 = 0$.

    d) $f(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$, $g(x,y) = (-y, x)$ e $X_0 = 0$.

19. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (e^{x+y}, e^{x-y})$ e seja $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma curva derivável tal que $\alpha(0) = (0,0)$ e $\alpha'(0) = (1,1)$. Determine um vector tangente à curva $f \circ \alpha$ no ponto $t = 0$.

20. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \|(x,y)\|$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(r) = e^{-r^2}$. Determine $\nabla(g \circ f)(x,y)$.

21. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y) = (x^2, xy, y)$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $g(x,y,z) = (xy, yz)$. Verifique se $\mathrm{D}(g \circ f)_{(1,2)}$ é um isomorfismo.

Exercícios

Gradiente

22. Considere $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y,z) = xy + x^3 + 3y$. Calcule $\nabla f(0,0,0)$ e determine $\mathrm{D}\, f_{(0,0,0)}$.
23. Considere $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por
    $f(x,y,z) = x^2y - y^2x + y^2z - z^2y + z^2x - x^2z$.
    a) Mostre que $\forall X \in \mathbb{R}^3,\ \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_X + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_X + \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_X = 0$.
    b) Conclua que $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\mathrm{D}\, f((x,y,z);(1,1,1)) = 0$.
24. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = x^2 + y^2$.
    a) Identifique as superfícies de nível de f.
    b) Determine as equações cartesianas da recta normal e do plano tangente à superfície de nível $N_1(f)$ no ponto $(1,0,1)$.
25. Determine os pontos da curva $x^2 + y^2 - 2x + xy = 0$ em que a recta normal é paralela à recta de equação $y = x$.
26. Considere a curva de equação $x(x^2+y^2) + 9x^2 + y^2 = 0$. Determine os pontos da curva de tangente horizontal e os pontos de tangente vertical.
27. Determine equações da recta normal e do plano tangente à superfície $x^3 + xyz = 12$ no ponto $(2,2,1)$.

28. Determine equações da recta normal e do plano tangente ao gráfico de cada uma das funções seguintes nos pontos indicados:

    a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - x$, no ponto $X_0 = (1, 0, f(1, 0))$.

    b) $f(x, y) = xy - yx^2$, no ponto $(1, 2, f(1, 2))$.

29. Porque é razoável dizer que os gráficos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $g(x, y) = -x^2 - y^2 + xy^3$ são tangentes em $(0, 0)$?

30. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x + yz + xz$.

    a) Mostre que f não tem pontos críticos (pontos onde a derivada é nula).

    b) Mostre que $N_3 f \neq \emptyset$.

    c) Determine os pontos $X \in \mathrm{N}_3(f)$ tais que o plano tangente a $\mathrm{N}_3(f)$ em X é paralelo ao plano de equação $x = y$.

    d) Averigue se existe $X \in N_3 f$ tal que a recta normal a $N_3 f$ em X é paralela ao eixo dos zz.