Integrais Múltiplos

Integrais Múltiplos

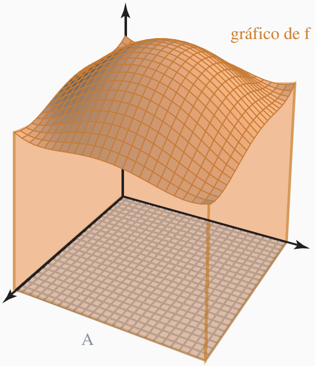
Introdução

Tal como se define o conceito de integral de uma função real de variável real, também se define o conceito de integral duplo de uma função escalar definida num subconjunto de $\mathbb{R}^2$, de integral triplo de uma função escalar definida num subconjunto de $\mathbb{R}^3$ e, em geral, o conceito de integral múltiplo de uma função escalar definida num subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

- Aqui, vamos considerar sempre funções $f : A \to \mathbb{R}$, limitadas (isto é, com contradomínio limitado), definidas num subconjunto limitado A de $\mathbb{R}^n$.

- O objectivo é, em qualquer caso, formalizar o conceito geral de volume de regiões em $\mathbb{R}^n$ (área, no caso de $\mathbb{R}^2$; comprimento, no caso de $\mathbb{R}$).

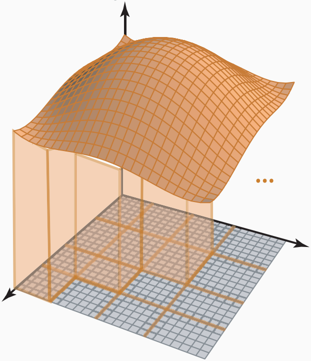
- Quando existe, o integral $\int_A f$ de uma tal função positiva f, pode ser interpretado como o volume da região de $\mathbb{R}^{n+1}$ compreendida entre o gráfico de f e $A \times \{0\}$ (mais precisamente, do sólido constituído pelos segmentos que unem cada ponto $(X, 0)$, para $X \in A$, ao correspondente $(X, f(X))$ do gráfico).

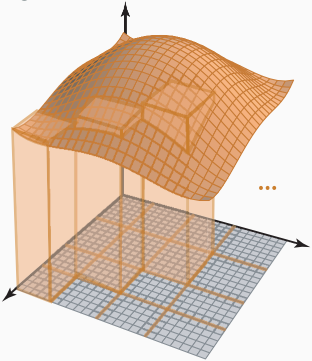


- No caso de f não ser sempre positiva, o volume correspondente aos pontos em que é negativa contribui com sinal negativo para o valor total do integral: $\int_A f$ é então o volume correspondente à parte positiva do gráfico subtraído do volume correspondente à parte negativa.

Não veremos em detalhe a definição do integral (de Riemman) $\int_A f$.

Informalmente, (para f positiva) a ideia é análoga à conhecida para funções de uma variável - aproxima-se a região limitada pelo gráfico de f, por defeito e por excesso, com "paralelipípedos" cujas bases cobrem todo o domínio de f e cujas alturas estão respectivamente abaixo e acima do gráfico:





É claro que a soma dos volumes dos paralelipípedos abaixo do gráfico de f (soma inferior) é sempre menor ou igual à soma dos volumes dos que estão acima (soma superior).

Em certas condições, existe um único nº real V maior ou igual a qualquer soma inferior e menor ou igual a qualquer soma superior.

- Diz-se então que f é integrável (em A) e V é o valor de $\int_A f$.

Nota: A integrabilidade de uma função f num domínio A depende simultaneamente das características do domínio e da função.

Notação: Para integrais duplos usa-se também a notação

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{ou} \quad \iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x;$$

Para integrais triplos usa-se também a notação

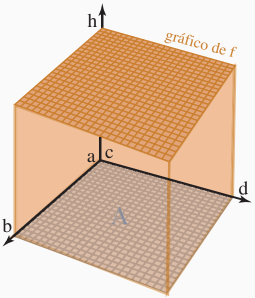
$$\iiint_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \quad \iiint_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \quad \text{ou} \quad \cdots$$

1. Sejam $a < b$ e $c < d$ números reais e considere-se o rectângulo em $\mathbb{R}^2$: $A = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.

Seja $f : A \to \mathbb{R}$ a função constante igual a h, em que $h \in \mathbb{R}^+$.

Então, a região compreendida entre o gráfico de f e $A \times \{0\}$ é um paralelipípedo, $[a, b] \times [c, d] \times [0, h]$, cuja base é $A \times \{0\}$ e de altura h. O seu volume é a área da base multiplicada pela altura e, portanto,

$$\iint_A h \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = (b - a)(d - c)h.$$



Mais geralmente, se A é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e a função constante igual a 1 é integrável em A, então $\int_A 1$ é o volume do "cilindro" $A \times [0,1]$, com base $A \times \{0\}$ e altura 1.

- Diz-se então que A tem volume (área, no caso de $n = 2$ e comprimento, no caso de $n = 1$) e

$$\textit{Volume de } A = \int_A 1$$

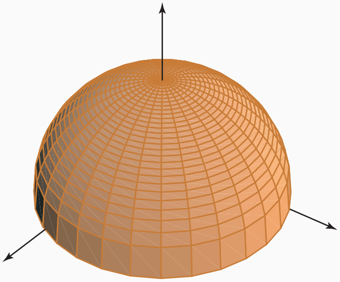
Por exemplo, se D é o disco de centro $(0,0)$ e raio 1 em $\mathbb{R}^2$, então

$$\iint_D 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \text{área de } D = \pi$$

que é igual ao volume do cilindro $D \times [0,1]$ em $\mathbb{R}^3$.

2. Seja ainda D o círculo em $\mathbb{R}^2$ de centro $(0,0)$ e raio 1 e $f : D \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

O gráfico de f é a semi-esfera definida por $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, ou seja, por $x^2+y^2+z^2 = 1 \ \wedge \ z \geq 0$.



Sendo o volume da bola $B((0,0,0);1)$ igual a $\frac{4\pi}{3}$, então o volume da metade A desta bola que está acima do plano xy é

$$\iiint_A 1 = \frac{2\pi}{3}$$

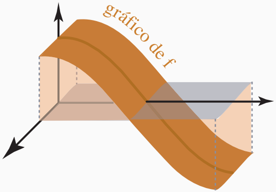
e

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} = \frac{2\pi}{3}$$

3. Seja $f(x,y) = \cos y$ e
$A = [-1,1] \times [0,\pi] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi\}$.

Então, imediatamente se pode afirmar que

$$\iint_A \cos y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 0$$



uma vez que, neste domínio, o volume da região limitada pelo gráfico de f acima do plano xy é igual ao volume da região limitada abaixo deste plano, e contribuem para o valor do integral com sinais opostos.

Sejam A um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ funções limitadas e $a \in \mathbb{R}$. Prova-se que:

- Se A tem volume e f é contínua, então f é integrável em A.
- Se f é integrável em A então af é integrável em A e
$$\int_A af = a \int_A f$$
- Se f e g são integráveis em A então $f + g$ é integrável em A e
$$\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$$
- Se $A = A_1 \cup A_2$, A_1 e A_2 são disjuntos, e f é integrável em A_1 e em A_2, então
$$\int_A f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f$$
- Se f e g são integráveis em A e $\forall x \in A$, $f(X) \leq g(X)$, então
$$\int_A f \leq \int_A g$$

Nos exemplos anteriores, todos os integrais foram calculados recorrendo apenas à interpretação dos seus valores como o volume, previamente conhecido, de regiões de $\mathbb{R}^n$.

A situação mais comum será a inversa: usa-se o integral precisamente para calcular (e definir) volumes não conhecidos.

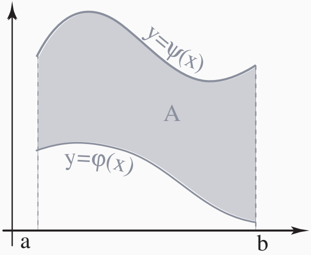
- A técnica principal para o cálculo de integrais múltiplos, chamada iteração, consiste em reduzir o cálculo de um integral múltiplo de uma função definida em $\mathbb{R}^n$ ao cálculo sucessivo de n integrais simples, chamados neste contexto integrais iterados.

O teorema que fundamenta este processo, Teorema de Fubini, não será aqui estudado. Será explicada a sua aplicação em casos particulares e através de exemplos.

Integrais Múltiplos

Cálculo de integrais duplos - caso particular

Seja A uma região de $\mathbb{R}^2$ do tipo
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b \wedge \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$,

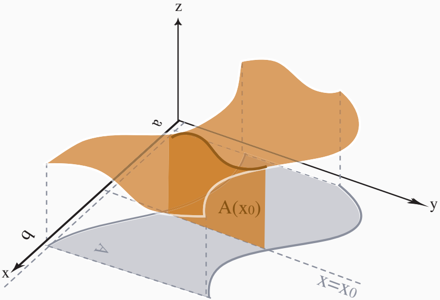


em que $a < b \in \mathbb{R}$
e $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas
tais que $\forall x \in [a,b]$, $\varphi(x) \leq \psi(x)$.

Esta região A tem área,
e o seu valor é dado por
$\int_a^b \psi(x) - \varphi(x) \, \mathrm{d}x$.

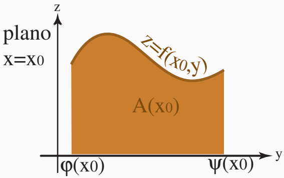
Se $f : A \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então f é integrável em A e $\iint_A f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ dá o volume do sólido de $\mathbb{R}^3$ limitado entre $A \times \{0\}$ e o gráfico de f.

(continuação)



Intuitivamente, este volume pode ser obtido "somando" todas as áreas $A(x_0)$, onde $A(x_0)$ é a área da figura plana obtida por intersecção do sólido com o plano $x = x_0$ ($x_0 \in [a, b]$); mais precisamente,

$$\iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x.$$



Ora, em cada região de área $A(x_0)$, tem-se $\varphi(x_0) \leq y \leq \psi(x_0)$ e portanto

$$A(x_0) = \int_{\varphi(x_0)}^{\psi(x_0)} f(x_0, y)\,\mathrm{d}y$$

(continuação)

Obtém-se finalmente

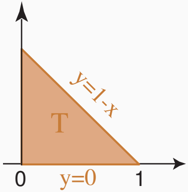
$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Na expressão acima, os parêntesis são dispensáveis, uma vez que os símbolos $\mathrm{d}y$ e $\mathrm{d}x$ delimitam sem ambiguidade cada um dos integrais iterados: primeiro calcula-se $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ (integrando em ordem à variável y) cujo resultado é a função $A(x)$ de x; depois, calcula-se o integral $\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$ (integrando em ordem à variável x).

Note-se que, nesta forma, a ordem dos símbolos $\mathrm{d}y$ e $\mathrm{d}x$ não é indiferente: indica a ordem das variáveis relativamente às quais se fazem as sucessivas integrações.

1. Calcule-se o integral duplo $\iint_T xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, onde T é a região de $\mathbb{R}^2$ limitada pelo triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

A região T pode ser descrita como
$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$.

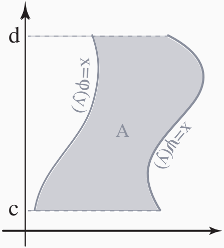


Então,

$$\iint_T xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{1-x} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_0^{1-x} \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{24}$$

Analogamente, se o domínio de integração A de um integral duplo $\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ é da forma
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(y) \leq x \leq \psi(y) \wedge c \leq y \leq d\}$,
em que $c < d \in \mathbb{R}$ e $\varphi, \psi : [c,d] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas tais que $\forall y \in [c,d]$, $\varphi(y) \leq \psi(y)$, então

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$



Por exemplo, o integral do exemplo 1 também pode ser calculado como

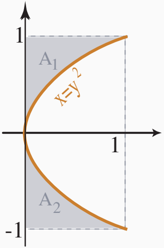
$$\iint_T xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{1-y} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\frac{x^2 y}{2} \right]_0^{1-y} \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-y)^2 y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{24}$$

2. Calcule-se $\iint_A e^{y^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ no domínio
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq y^2 \wedge -1 \leq y \leq 1\}$:

$$\iint_A e^{y^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\int_0^{y^2} e^{y^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\left[e^{y^3}x\right]_0^{y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-1}^{1} e^{y^3}y^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{y^3}}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}(e - e^{-1})$$



O mesmo integral pode ser iterado pela ordem inversa das variáveis, mas para tal será necessário decompôr a região A em $A_1 \cup A_2$, como indicado na figura, e exprimir o integral na forma

$$\iint_A e^{y^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \iint_{A_1} e^{y^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \iint_{A_2} e^{y^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Não é no entanto uma boa opção, uma vez que não sabemos primitivar (em ordem a y) a função e^{y^3}.

3. Para calcular a área da região definida no exemplo anterior, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq y^2 \wedge -1 \leq y \leq 1\}$, como um integral duplo e com a ordem de integração inversa:

$$\text{área de } A = \iint_A 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \iint_{A_1} 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y + \iint_{A_2} 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x + \int_0^1 \int_{-1}^{-\sqrt{x}} 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = 2 \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$$

$$= 2 \int_0^1 1 - \sqrt{x} \,\mathrm{d}x = 2 \left[x - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Alternativamente, ainda seria possível calcular a área de A subtraíndo à área do rectângulo $[0,1] \times [-1,1]$ a área limitada entre a parábola $x = y^2$ e a recta $x = 1$:

$$\text{área de } A = 2 - \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \qquad \text{ou} \qquad \text{área de } A = 2 - \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

A técnica de iteração funciona de forma análoga para integrais triplos, que podem ser calculados como uma sequência de 3 integrais iterados.

Por exemplo, se o domínio de integração A é da forma

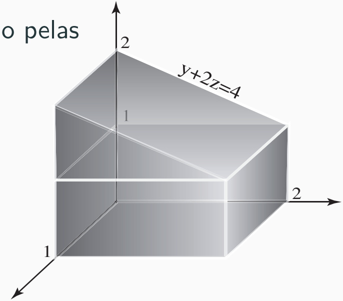
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x), \varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\}$$

em que φ_1, ψ_1 (1 variável) e φ_2, ψ_2 (2 variáveis) são funções contínuas, pode escrever-se

$$\iiint_A f \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \underbrace{\int_a^b \underbrace{\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} \underbrace{\int_{\varphi_2(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) \, \mathrm{d}z}_{\text{função de } (x,\, y)} \, \mathrm{d}y}_{\text{função de } x} \, \mathrm{d}x}_{\in \mathbb{R}}$$

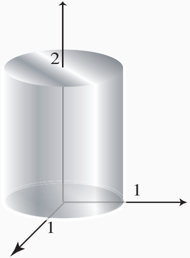
1. Seja A o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ definido pelas condições
$0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq 2 - \frac{y}{2}$.

Calcule-se $I = \iiint_A xy + e^z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$:

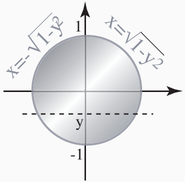


$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^2 \int_0^1 \int_0^{2-\frac{y}{2}} xy + e^z \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^2 \int_0^1 \Big[xyz + e^z \Big]_0^{2-\frac{y}{2}} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^2 \int_0^1 2xy - \frac{xy^2}{2} + e^{2-\frac{y}{2}} - 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^2 \left[x^2 y - \frac{x^2 y^2}{4} + e^{2-\frac{y}{2}} x - x \right]_0^1 \mathrm{d}y \\
&= \int_0^2 y - \frac{y^2}{4} + e^{2-\frac{y}{2}} - 1 \, \mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12} - 2e^{2-\frac{y}{2}} - y \right]_0^2 = -\frac{2}{3} - 2e + 2e^2
\end{aligned}
$$

2. Seja C a região de $\mathbb{R}^3$ limitada pelo cilindro de equação $x^2 + y^2 = 1$ e os planos $z = 0$ e $z = 2$.



Nesta região, z varia entre 0 e 2.



Fixado um z entre estes dois valores, o que corresponde a considerar a secção de C por um plano da forma $z =$ constante, as coordenadas x e y obedecem à condição $x^2 + y^2 \leq 1$.

A variação máxima de y é entre -1 e 1 e, para cada um destes valores, $-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$. Assim,

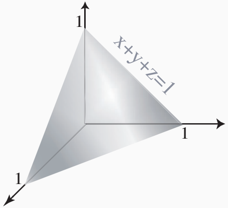
$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \leq z \leq 2, -1 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$$

2. (Continuação) O integral $\iiint_C y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ é nulo, uma vez que a região C é simétrica relativamente ao plano $y = 0$ e a função $f(x, y, z) = y$ toma valores simétricos nas metades de C que estão em cada um dos lados deste plano.

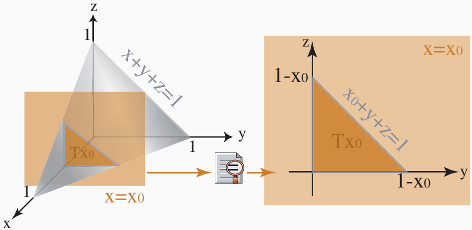
Calculemos $I = \iiint_C |y| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}xy\,\mathrm{d}z$:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^2 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} |y| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^2 \int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} -y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_0^2 \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= 2 \int_0^2 \int_0^1 y \Big[x\Big]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 4 \int_0^2 \int_0^1 y\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= -\frac{4}{3} \int_0^2 \Big[(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 \mathrm{d}z = \frac{4}{3} \int_0^2 1\,\mathrm{d}z = \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

3. Considere-se, em $\mathbb{R}^3$, o tetraedro
$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x, y, z \geq 0, \; x + y + z \leq 1\}$
e $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$.



Neste caso, para calcular $\int_T f$, a escolha da ordem de iteração é indiferente, uma vez que as 3 coordenadas x, y, z têm um papel simétrico tanto no domínio como na função.



A coordenada x varia, neste domínio, entre 0 e 1. Fixe-se $x = x_0 \in [0, 1]$. A intersecção de T com o plano $x = x_0$ é o triângulo T_{x_0} representado na figura.

Em T_{x_0}, a variação máxima de y é entre 0 e $1 - x_0$ e , fixado um tal y, z varia entre 0 e $1 - x_0 - y$.

3. (continuação) Portanto,

$$\iiint_T f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \left(\iint_{T_{x_0}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Calculando este integral, I, vem

$$I = \frac{1}{3} \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[(x+y+z)^3 \right]_0^{1-x-y} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3} \int_0^1 \int_0^{1-x} 1-(x+y)^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int_0^1 \left[y - \frac{(x+y)^4}{4} \right]_0^{1-x}$$
$$= \frac{1}{3} \int_0^1 1 - x - \frac{1}{4} + \frac{x^4}{4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}$$

Tal como é muitas vezes útil usar uma mudança de variável para calcular integrais simples, também alguns integrais múltiplos são mais facilmente calculados fazendo uma mudança das coordenadas cartesianas, $x, y, z \ldots$, para outros sistemas de coordenadas.

- Uma mudança de coordenadas em $\mathbb{R}^n$ é uma função

$$\begin{array}{rcl} g : A \subseteq \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (u_1, \ldots, u_n) & \mapsto & g(u_1, \ldots, u_n) \end{array}$$

tal que $g_{|\overset{\circ}{A}}$ é injectiva, de classe c^1 e $\det \mathcal{J} g(u) \neq 0$, $\forall u \in \overset{\circ}{A}$.

- Diz-se então que $(u_1, \ldots, u_n)$ são as coordenadas de $(x_1, \ldots, x_n) = g(u_1, \ldots, u_n)$ no novo sistema de coordenadas definido por g.

Seja $g : A \to \mathbb{R}^n$ uma mudança de coordenadas em $\mathbb{R}^n$, em que A é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$.

Sejam $B = g(A)$ e $f : B \to \mathbb{R}$ uma função limitada e integrável.

Em determinadas condições que asseguram a existência dos integrais, prova-se que

(Teorema da Mudança de variável)

$$\int_B f = \int_A f \circ g \cdot |\det \mathcal{J} g|$$

ou, com outra notação,

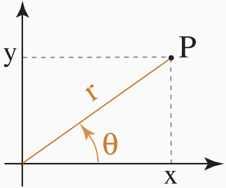
$$\int_B f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \int_A f(g(u_1, \ldots, u_n)) \cdot |\det \mathcal{J} g(u_1, \ldots, u_n)|\, \mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_n$$

(mudam-se as variáveis $x_1, \ldots, x_n$ para $u_1, \ldots, u_n$)

A escolha de um sistema de coordenadas apropriado para calcular um dado integral depende simultaneamente das características do domínio e da função.

Iremos estudar alguns sistemas de coordenadas, em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$, que são frequentemente os mais adequados para descrever os domínios de integração e para calcular integrais duplos e triplos.

Um ponto $P \in \mathbb{R}^2$ de coordenadas cartesianas $(x, y) \neq (0, 0)$ fica determinado pela distância r à origem e pelo ângulo $\theta \in [0, 2\pi[$ que o seu vector de posição faz com o vector $(1, 0)$, contado no sentido directo a partir de $(1, 0)$.



- Os parâmetros r e θ dizem-se as coordenadas polares de P.

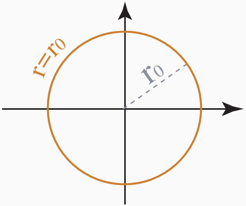
O ponto $P = (0, 0)$ fica determinado pela coordenada $r = 0$.

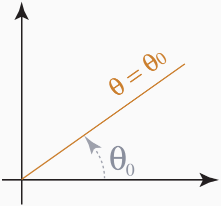
(Coordenadas polares $r \in \mathbb{R}_0^+$, $\theta \in [0, 2\pi[$)

$$(x, y) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) \iff$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \wedge \quad \begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \mathrm{sen}\,\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}, \text{se } (x, y) \neq (0, 0)$$

1. Se $r_0 \in \mathbb{R}^+$, a equação em coordenadas polares $r = r_0$ define o conjunto dos pontos $(x, y) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) \in \mathbb{R}^2$ tais que $\sqrt{x^2 + y^2} = r_0$, que é a circunferência centrada na origem de raio r_0.





2. O subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido, em coordenadas polares, pela equação $\theta = \theta_0$, em que θ_0 é um ângulo fixo entre 0 e 2π, é a semi-recta que faz com o semi-eixo positivo dos xx um ângulo θ_0 (quando contado no sentido directo a partir deste semi-eixo).

A mudança para coordenadas polares é realizada pela função

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) \end{array}$$

que é de classe c^1, sobrejectiva, e injectiva quando restrita ao interior do domínio. Além disso, $\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$,

$$\det \mathcal{J}g_{(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r > 0$$

Assim, se $A \subseteq \mathbb{R}^2$ é limitado, $B = g(A)$ e $f : B \to \mathbb{R}$ estão nas condições do Teorema da Mudança de Variável, então

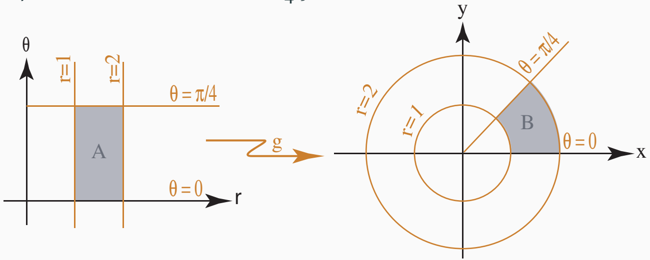
$$\iint_B f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_A f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) \cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

1. Considere-se a parte B do anel definido por $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ cujos pontos (x, y) satisfazem ainda as condições $0 \leq y \leq x$.

Escrevendo $(x, y) = g(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$, obtém-se

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \iff 1 \leq r \leq 2 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq x \iff 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

Assim, $B = \{(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta): \ 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\} = g(A)$, onde $A = \{(r, \theta): \ 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$.



1. (continuação) Note-se que A e $B = g(A)$ não têm a mesma área: a transformação causada pela função g altera a área. De facto, a área do rectângulo A é $\frac{\pi}{4}$ e a área de B é $\frac{4\pi-\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$.

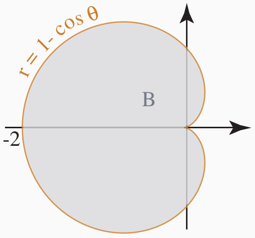
Por outro lado, sabe-se que a área de B é dada pelo integral $\iint_B 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ e, usando a mudança para coordenadas polares, vem

$$\iint_B 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_A 1 \cdot r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$$

O produto por r no segundo integral vai fazer a correcção entre a área de A $(= \iint_A 1 \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta)$ e a área de B. Fazendo o cálculo:

$$\iint_B 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_A 1 \cdot r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^2 r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 3 \, \mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{8}$$

2. Calcule-se a área da região B de $\mathbb{R}^2$ limitada pela curva cuja equação em coordenadas polares é $r = 1 - \cos\theta$.



Então, B é o conjunto dos pontos de $(x, y) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) \in \mathbb{R}^2$ tais que $0 \leq r \leq 1 - \cos\theta$ e $0 \leq \theta < 2\pi$.

Sendo
$A = \{(r, \theta) : \ 0 \leq r \leq 1 - \cos\theta, 0 \leq \theta < 2\pi\}$,

$$\text{área de } B = \iint_B 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= \iint_A r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\cos\theta} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

2. (continuação) Logo,

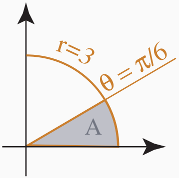
$$\begin{aligned}\text{área de } B &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[r^2\right]_0^{1-\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1+\cos^2\theta - 2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 1 + \frac{1+\cos(2\theta)}{2} - 2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{3}{2}\,\mathrm{d}\theta + \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cos(2\theta) - 2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}_{=0} = 3\pi\end{aligned}$$

Note-se que a curva que constitui a fronteira de B, de equação em coordenadas polares $r = 1 - \cos\theta$, tem equação em coordenadas cartesianas $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2+y^2} - x$. Seria bastante complicado calcular a área de B usando um integral em coordenadas cartesianas (apesar de a função a integrar ser o mais simples possível).

3. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq \sqrt{3}y \leq x\}$ e $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$. Em coordenadas polares,

$$x^2 + y^2 \leq 9 \iff r \leq 3$$

$$\text{e} \quad y \geq 0 \iff \theta \in [0, \pi].$$



Os pontos $(x, y) \neq (0, 0)$ da recta $x = \sqrt{3}y$ satisfazem a equação

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \iff \frac{r \operatorname{sen} \theta}{r \cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \iff \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

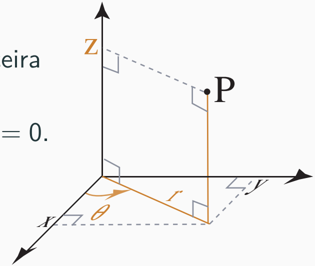
O ângulo $\theta \in [0, \pi]$ que satisfaz esta condição é $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Assim, $A = \{(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) : \ r \leq 3, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}\}$ e

$$\iint_A e^{x^2+y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^3 e^{r^2} \cdot r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[e^{r^2} \right]_0^3 \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{12}(e^9 - 1)$$

- As coordenadas cilíndricas de um ponto $P \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ de $\mathbb{R}^3$ são r, θ e z, onde z é a terceira coordenada cartesiana de P e ρ, θ são as coordenadas polares de $(x, y, 0)$ no plano $z = 0$.

  Os pontos da forma $P = (0, 0, z)$ ficam determinados pelas coordenadas $r = 0$ e z.



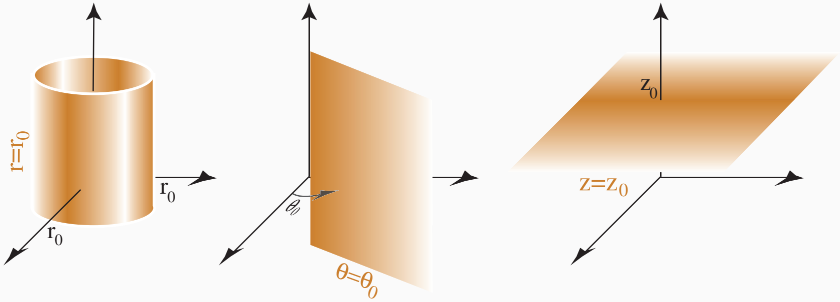
(Coordenadas cilíndricas r, θ, z)

$$(x, y, z) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z) \iff$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \wedge \quad \begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \text{sen}\,\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \quad , se\ (x, y) \neq (0, 0)$$

1. A coordenada $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é a distância do ponto ao eixo dos zz. Assim, a equação em coordenadas cilíndricas $r = r_0 (\in \mathbb{R}_0^+)$ define o cilindro de raio r_0 centrado no eixo dos zz.

2. A equação $\theta = \theta_0 (\in [0, 2\pi[)$, em coordenadas cilíndricas, define o semi-plano que contém o eixo dos zz e faz com o semi-plano positivo xz um ângulo θ_0 (contado no sentido directo a partir deste semi-plano).



A mudança para coordenadas cilíndricas é realizada pela função

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi[\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, z) & \mapsto & (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z) \end{array}$$

que é de classe c^1, sobrejectiva, e injectiva quando restrita ao interior do domínio. Além disso, $\forall (r, \theta, z) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times\mathbb{R}$,

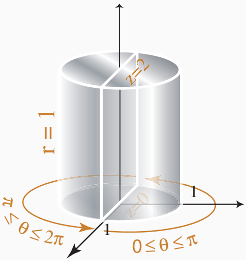
$$\det \mathcal{J} g_{(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r > 0$$

Assim, se $A \subseteq \mathbb{R}^3$ é limitado, $B = g(A)$ e $f : B \to \mathbb{R}$ estão nas condições do Teorema da Mudança de Variável, então

$$\iiint_B f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_A f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z) \cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

1. Calcule-se novamente, agora usando coordenadas cilíndricas, o integral $I = \iiint_C |y| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, em que

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}.$$



Descrevendo C em coordenadas cilíndricas:

$$C = \{(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z) \in \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi[\times\mathbb{R} : \\ r \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$$

e portanto

$$\iiint_C |y| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^2 |r\,\mathrm{sen}\,\theta| \cdot r \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

A função $|y| = |r\,\mathrm{sen}\,\theta|$ é igual a $\pm r\,\mathrm{sen}\,\theta$, conforme $r\,\mathrm{sen}\,\theta$ é positivo ou negativo, respectivamente. Ora,

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \geq 0 \iff \theta \in [0, \pi] \quad \text{e} \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \leq 0 \iff \theta \in [\pi, 2\pi]$$

1. (continuação) Então

$$I = \int_0^{\pi} \int_0^{1} \int_0^{2} r \operatorname{sen}\theta \cdot r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{1} \int_0^{2} -r \operatorname{sen}\theta \cdot r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta.$$

Alternativamente, e tal como foi feito em coordenadas cartesianas, atendendo a que tanto o domínio de integração como a função são simétricos relativamente ao plano $y = 0$, tem-se

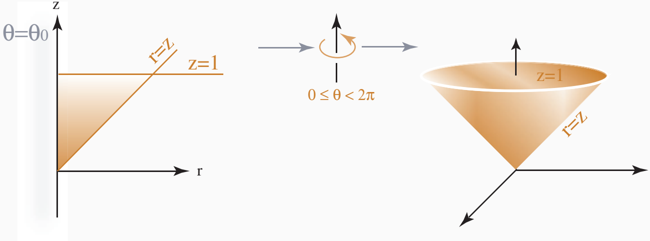
$$\begin{aligned}
I &= 2 \int_0^{\pi} \int_0^{1} \int_0^{2} r \operatorname{sen}\theta \cdot r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \\
&= 2 \int_0^{\pi} \int_0^{1} r^2 \operatorname{sen}\theta \big[z\big]_0^2 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta = 4 \int_0^{\pi} \int_0^{1} r^2 \operatorname{sen}\theta \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \\
&\frac{4}{3} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \left[r^3\right]_0^1 \mathrm{d}\theta = \frac{4}{3} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{4}{3} \big[-\cos\theta\big]_0^{\pi} = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

2. Seja $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 \le z^2, 0 \le z \le 1\}$ e $f(x, y, z) = zx^2 + zy^2$. Calcule-se $I = \iiint_A f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$.

Para descrever A em coordenadas cilíndricas, note-se que $x^2 + y^2 \le z^2 \iff r^2 \le z^2$ e, atendendo a que $z \ge 0$ (nos pontos de A), $r^2 \le z^2 \iff r \le z$.

Tal como no exemplo anterior, não há nenhuma condição relativamente à coordenada θ. Isto significa que θ varia livremente entre 0 e 2π e que a variação de r e z não dependem de θ. A região A é, pois, um sólido de revolução em torno do eixo dos zz.

2. (continuação) A secção de A por um semi-plano $\theta = \theta_0 (\in [0, 2\pi[)$ não depende de θ_0 e ajuda a perceber qual a forma de A e a determinar os limites de integração das coordenadas r e θ:



$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^z zr^2 \cdot r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^1 z \left[r^4 \right]_0^z \mathrm{d}z \,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^1 z^5 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{24} \int_0^{2\pi} \left[z^6 \right]_0^1 \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{24} \int_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{12}$$

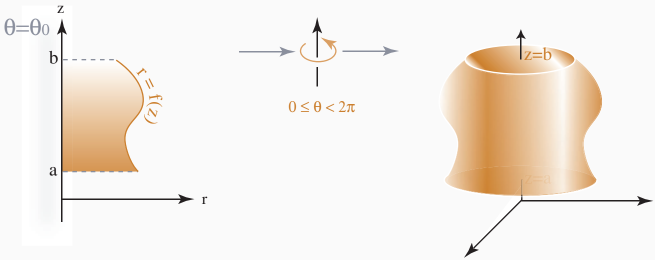
- Em geral, se $a < b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e positiva, o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ definido em coordenadas cilíndricas pela condição

$$r \leq f(z), \quad z \in [a, b],$$

ou seja, o conjunto

$$B = \{(r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta, z) : \theta \in [0, 2\pi[, \ z \in [a, b], \ r \in [0, f(z)]\}$$

é um sólido de revolução em torno do eixo dos zz.

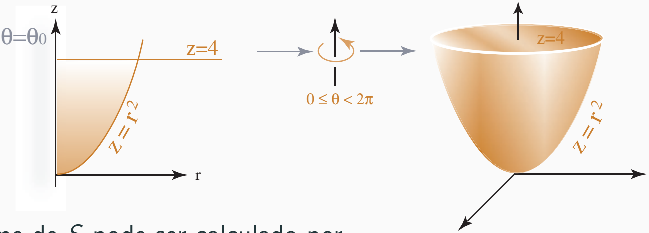


- O volume do sólido de revolução S definido, em coordenadas cilíndricas por $r \leq f(z)$, $z \in [a, b]$, é dado por:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(S) &= \iiint_S 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi} \int_a^b \int_0^{f(z)} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\theta = 2\pi \int_a^b \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{f(z)} \mathrm{d}z \\
&= \pi \int_a^b \left(f(z) \right)^2 \, \mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

Obtém-se assim uma fórmula para o cálculo do volume de um sólido de revolução (em torno do eixo dos zz), como um integral simples.

O sólido S de $\mathbb{R}^3$ limitado entre o parabolóide de equação $x^2 + y^2 = z$ e o plano $z = 4$ é descrito em coordenadas cilíndricas por $r^2 \leq z$ (i.e., $r \leq \sqrt{z}$) e $0 \leq z \leq 4$.



O volume de S pode ser calculado por

$$\mathrm{Vol}(S) = \int_S 1 = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2}^4 r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta = 2\pi \int_0^2 r(4 - r^2) \,\mathrm{d}r = 8\pi$$

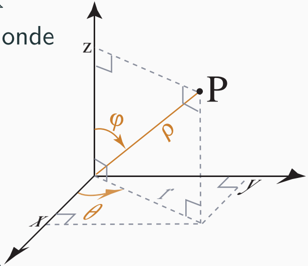
ou, equivalentemente,

$$\mathrm{Vol}(S) = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{z}\right)^2 \,\mathrm{d}z = \frac{2\pi}{3} \left[z^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = 8\pi$$

A um ponto $P = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ pode-se atribuir as coordenadas ρ, θ e φ, onde

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

é a distância de P à origem, θ coincide com a coordenada cilíndrica já definida e φ ($\in [0, \pi]$) é o ângulo que o vector $(0, 0, 1)$ faz com o vector de posição de P.



- As coordenadas ρ, θ e φ dizem-se as coordenadas esféricas de P. O ponto $(0, 0, 0)$ fica determinado pela coordenada $\rho = 0$.

Se r, θ, z são as coordenadas cilíndricas de P, facilmente se verifica que

$$r = \rho \operatorname{sen} \varphi \quad \text{e} \quad z = \rho \cos \varphi.$$

Daqui resulta a expressão de (x, y, z) em coordenadas esféricas:

(Coordenadas esféricas ρ, θ, φ)

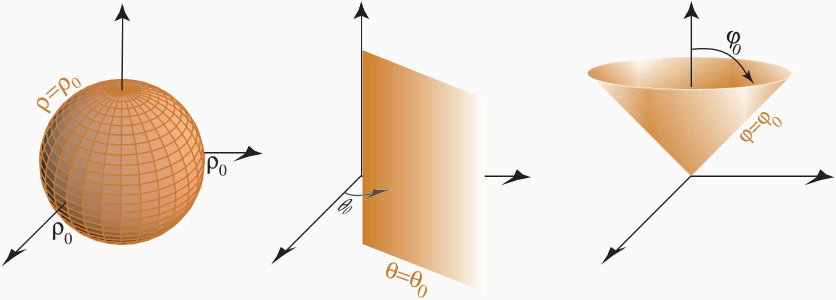
$$(x, y, z) = (\rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \varphi)$$

Muitas vezes é útil relacionar os 3 sistemas de coordenadas em $\mathbb{R}^3$, cartesianas, cilíndricas e esféricas. Tem-se então:

$$\begin{cases} x & = r \cos \theta & = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y & = r \operatorname{sen} \theta & = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z & = z & = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

1. A equação em coordenadas esféricas $\rho = \rho_0 (\in \mathbb{R}_0^+)$ define a superfície esférica de raio ρ_0 centrada na origem.

2. A equação $\varphi = \varphi_0 (\in [0, \pi])$, em coordenadas esféricas, define um cone em $\mathbb{R}^3$ cuja equação em coordenadas cilíndricas é $r = (\operatorname{tg} \varphi_0) z$ (corresponde a uma semi-recta, num semi-plano $\theta = \theta_0$).



A função de mudança para coordenadas esféricas é

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi[\times[0,\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ (\rho,\theta,\varphi) & \mapsto & (\rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \rho \cos\varphi) \end{array}$$

e, $\forall(\rho,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times]0,\pi[$,

$$\det \mathcal{J} g_{(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\varphi \cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta & \rho \cos\varphi \cos\theta \\ \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta & \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta & \rho \cos\varphi \operatorname{sen}\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho \operatorname{sen}\varphi \end{vmatrix} = -\rho^2 \operatorname{sen}\varphi < 0,$$

logo, $\left|\det \mathcal{J} g_{(r,\theta,\varphi)}\right| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$. Assim, se $B = g(A)$ e $f : B \to \mathbb{R}$ estão nas condições do Teorema da Mudança de Variável, então

$$\int_B f = \iiint_A f(\rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \rho \cos\varphi) \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi$$

1. Calcule-se o volume de uma bola de raio a (> 0) usando coordenadas esféricas.

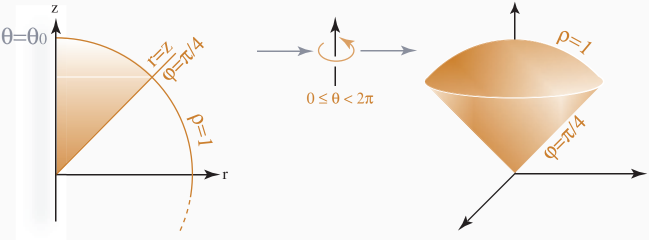
A bola (fechada) B centrada na origem de raio a é descrita em coordenadas esféricas pela condição $\rho \leq a$, sendo que as coordenadas θ e φ variam livremente em $[0, 2\pi[$ e $[0, \pi]$, respectivamente. O seu volume é dado por

$$\begin{aligned}
\iiint_B 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^\pi 1 \cdot \rho^2 \operatorname{sen} \varphi \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \int_0^a \rho^2 \big[-\cos \varphi \big]_0^\pi \, \mathrm{d}\rho \\
&= 2\pi \int_0^a 2\rho^2 \, \mathrm{d}\rho \\
&= 4\pi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^a = \frac{4\pi a^3}{3}
\end{aligned}$$

2. Seja $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ z^2 \geq x^2 + y^2, z \geq 0\}$. Vamos usar coordenadas esféricas para calcular $\int_B z$.

Para tal, note-se que

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 &\iff r \leq 1 \quad \text{e} \\
z^2 \geq x^2 + y^2 \ \wedge \ z \geq 0 &\iff z^2 \geq r^2 \ \wedge \ z \geq 0 \iff z \geq r \\
&\iff \rho \cos\varphi \geq \rho \,\mathrm{sen}\,\varphi \iff \rho = 0 \vee \cos\varphi \geq \mathrm{sen}\,\varphi \\
&\iff \varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]
\end{aligned}
$$



2. (continuação) Tem-se então,

$$\iiint_B z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^1 \rho \cos\varphi . \rho^2 \,\mathrm{sen}\, \varphi \; \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta$$

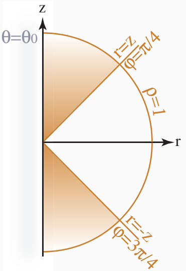
$$= 2\pi \int_0^{\pi/4} \cos\varphi \,\mathrm{sen}\, \varphi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi/4} \mathrm{sen}(2\varphi) \, \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{4} \left[\frac{-\cos(2\varphi)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}$$

Considerando agora
$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \; z^2 \geq x^2 + y^2\}$,

$$\iiint_C z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z =$$

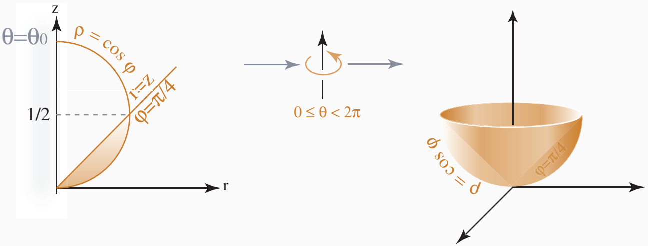
$$= \iiint_B z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z - \iiint_B z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = 0$$



3. Determine-se o volume da região A de $\mathbb{R}^3$ limitada entre a esfera de equação $x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ e o cone $x^2 + y^2 = z^2$.

Para obter a equação da esfera em coordenadas esféricas:

$$x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \iff x^2 + y^2 + z^2 = z$$
$$\iff \rho^2 = \rho \cos\varphi \iff \rho = \cos\varphi.$$



3. (continuação) O volume de A é então dado por

$$\int_A 1 = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\varphi} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta = 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\varphi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\varphi \cos^3\varphi \, \mathrm{d}\varphi = \frac{2\pi}{3} \left[\frac{-\cos^4\varphi}{4}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{24}$$

Se se pretender apenas o volume da parte A_1 de A situada no primeiro octante (que já não é um sólido de revolução), tem-se

$$\mathrm{Vol}(A_1) = \frac{1}{8} \mathrm{Vol}(A) = \frac{\pi}{192}$$

ou, equivalentemente,

$$\mathrm{Vol}(A_1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\varphi} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta = \cdots = \frac{\pi}{192}$$

Exercícios

Integrais iterados

1. Calcule os seguintes integrais iterados e esboce os respectivos domínios de integração.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} x^4 y + y^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{1} y \cos x + 2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} xye^{x+y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$

d) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-y}^{y} \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

e) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$

f) $\displaystyle\int_{1}^{2}\int_{0}^{1}\int_{y}^{1} 1 \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{|x|}\int_{0}^{1} (x+y+z) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\int_{0}^{2-z} x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$

2. Esboce o conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, 0 \leq x \leq 1, \, 0 \leq y \leq x\}$ e calcule o integral sobre D da função $f(x,y) = x \operatorname{sen} y$, usando os integrais iterados em cada uma das duas ordens possíveis.

3. Sejam $\varphi, \psi \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas tais que $\varphi(x) \leq \psi(x)$ para todo o $x \in [a, b]$. Seja D a região do plano limitada pelos gráficos de ϕ e ψ e as rectas $x = a$ e $x = b$.

   a) Escreva uma expressão para a área de D usando um integral simples.

   b) Escreva uma expressão para a área de D usando um integral duplo e represente-o como uma sequência de integrais iterados.

4. Calcule o volume do sólido compreendido entre o rectângulo $[0, 1] \times [1, 2]$ no plano xy e a superfície $z = x^2 + y$.

5. Calcule o volume de A , onde:

   a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq y \leq x^2,\ 0 \leq x \leq 1\}$;

   b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 1,\ 1 \leq y \leq 1 + x^2\}$;

   c) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z \leq 1\}$.

6. Calcule $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ onde:

   a) $f(x,y) = x \operatorname{sen} xy$ e $D = [0,\pi] \times [0,1]$.

   b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ e D é a região do plano limitada por $y = x^2,\ x = 2$ e $y = 1$.

   c) $f(x,y) = 1/(x+y)$ e D é a região limitada pelas rectas $y = x$, $x = 1$, $x = 2$ e $y = 0$.

   d) $f(x,y) = x^2 - y^2$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 1,\ x^2 - y^2 \geq 0\}$.

   e) $f(x,y) = x^3 + 4y$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geq x^2,\ y \leq 2x\}$.

   f) $f(x,y) = 1$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \leq \sqrt{x},\ y \geq \sqrt{3x-18},\ y \geq 0\}$.

   g) $f(x,y) = xy$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \leq x^3,\ x \leq 2,\ y \geq 0\}$.

   h) $f(x,y) = x$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R} :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq 1,\ y \geq \ln x\}$.

   i) $f(x,y) = \sqrt{1+x}$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x + y \geq 0,\ x^2 \leq y \leq 1\}$.

   j) $f(x,y) = |x-1|$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R} :\ y \geq x^2,\ y \geq (x-2)^2,\ y \leq 4\}$.

7. Escreva uma expressão para o volume da bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ como:

   i) um integral triplo; ii) um integral duplo.

Exercícios

Integrais triplos em coordenadas cartesianas

8. Calcule $\displaystyle\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ onde:

a) $f(x,y,z) = 1 + 2x - 3y^2$ e $D = [-1,1]^3$.

b) $f(x,y,z) = xyz$ e $D = [0,1] \times [-1,0] \times [1,4]$.

c) $f(x,y,z) = xyz$ e
$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 1 - y\}$

d) $f(x,y,z) = 3 + 2xy$ e D é a parte da bola centrada na origem de raio 2 que está acima do plano xy. (Sugestão: determine o valor do integral sem fazer cálculos)

e) $f(x,y,z) = xy$ e $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z \in [0,2],\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$.

f) $f(x,y,z) = x$ e $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1\}$.

g) $f(x,y,z) = (1 + x + y + z)^{-3}$ e D é o sólido limitado pelos 3 planos coordenados e pelo plano de equação $x + y + z = 1$.

h) $f(x,y,z) = 1$ e D é a região limitada pelo cilindro parabólico $z = 4 - x^2$ e os planos de equações $y = 0,\ y = 6,\ z = 0$.

i) $f(x,y,z) = xyz$ e $D = \{(x,y,z) :\ 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq z \leq x - y\}$.

j) $f(x,y,z) = 1$ e D é a pirâmide quadrangular de vértices $(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

Exercícios

Integrais duplos em coordenadas polares

9. Calcule, usando coordenadas polares, os integrais $\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, onde:

   a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ e $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 4\}$.

   b) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ e $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\}$.

   c) $f(x,y) = x^2 - y^2$ e $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x^2+y^2 \leq 2, \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$.

   d) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ e $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, \ x, y \leq 0\}$.

   e) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ e A é a região do plano limitada pelas circunferências de equações $x^2+y^2 = 4$ e $x^2+y^2 = 9$.

   f) $f(x,y) = 1 + xy$ e $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x^2+y^2 \leq 2, \ y \geq \sqrt{3}x\}$.

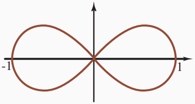
   g) $f(x,y) = |y|$ e $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 2x\}$.

   h) $f(x,y) = |x|$ e $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+(y-b)^2 \geq b^2, x^2+(y-a)^2 \leq a^2\}$, $(0 < b < a)$.

   i) $f(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e A é o interior do triângulo de vértices $(0,0), (1,0)$ e $(1,\sqrt{3})$.

10. Encontre a área da região em $\mathbb{R}^2$ limitada pela lemniscata

$$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2.$$



Lemniscata de Bernoulli

11. Calcule, usando coordenadas cilíndricas, os integrais $\iiint_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, onde:

a) $f(x,y,z) = x$ e $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

b) $f(x,y,z) = y$ e $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq z \leq 2\}$.

c) $f(x,y,z) = |z|$ e $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z \leq x^2+y^2 \leq 1,\ z > -2\}$.

d) $f(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2}$ e $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 2,\ 1 \leq z \leq 2\}$.

e) $f(x,y,z) = xyz$ e
$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

f) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ e $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z^2 \geq x^2+y^2,\ -1 \leq z \leq 1\}$.

g) $f(x,y,z) = 5z(x^2+y^2)^{3/2}$ e
$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

h) $f(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2}$ e
$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z \in [1,2],\ x,y \geq 0,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$.

12. Calcule, usando coordenadas esféricas, os integrais $\displaystyle\iiint_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, onde:

a) $f(x,y,z) = x + y + z$ e $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

b) $f(x,y,z) = 1$ e $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \leq z \leq 1, \ x^2 + y^2 \leq z^2\}$.

c) $f(x,y,z) = 1$ e $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 - 3z^2 \geq 0, \ x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$.

d) $f(x,y,z) = xyz$ e
$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0\}$.

e) $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2+x^2+y^2+z^2}}$ e $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 3, \ x, z \leq 0\}$.

f) $f(x,y,z) = x$ e A é a bola limitada pela esfera de equação de
$x^2 + y^2 + z^2 = 4z$.

g) $f(x,y,z) = 1$ e A é a região dentro da esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e acima do cone $z^2 \mathrm{sen}^2\alpha = (x^2 + y^2)\cos^2\alpha$, em que α é uma constante entre 0 e π.

13. Calcule o volume de $S \subseteq \mathbb{R}^3$, em que:

a) S é o sólido limitado pelo plano $z = 2$ e pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$.

b) S é a região acima do plano xy limitada entre o parabolóide $z = x^2 + y^2$ e o cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$

c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \; x^2 + y^2 \geq z^2\}$.

d) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 - z^2 \geq 0, \; x^2 + y^2 \leq 4\}$.

e) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \; x^2 + y^2 \geq 1\}$.

f) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; z^2 \leq x^2 + y^2, \; x^2 + y^2 \leq 2x, \; z \geq 0\}$.

g) S é a região limitada entre as superfícies $-z = x^2 + y^2, \; x^2 + y^2 = 4$ e $z = 0$.

h) S é sólido de revolução gerado por rotação em torno do eixo dos $xx's$ do conjunto dos pontos do plano xy limitado pelo eixo dos xx e a curva $y = x^2$, para $0 \leq y \leq 2$.

Soluções parciais de alguns exercícios

- **3**

  a) $\int_a^b \psi(x) - \varphi(x)\,\mathrm{d}x$

  b) $\int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

- **5**

  c) $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$

- **6**

  b) $\int_1^2 \int_1^{x^2} x^2 + y^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

  c) $\int_1^2 \int_0^{x} \frac{1}{x+y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

  d) $\int_0^1 \int_{-x}^{x} x^2 - y^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

  e) $\int_0^2 \int_{x^2}^{x} x^3 + 4y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

  f) $\int_0^3 \int_{y^2}^{\frac{y^2}{3}+6} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

  g) $\int_0^2 \int_0^{x^3} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

  h) $\int_0^1 \int_0^{e^y} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

  i) $\int_{-1}^0 \int_{x^2}^{-x} \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

  j) $2\int_1^2 \int_{x^2}^{1} x - 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

Soluções parciais de alguns exercícios

- **8**

  e) $\int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-y} xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \frac{1}{12}$
  f) $\int_0^1 \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = 0$
  g) $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (1+x+y+z)^{-3} \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \frac{\log(2)}{2} - \frac{5}{16}$
  h) $\int_0^6 \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} 1 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 64$
  j) $\frac{2}{3} = 4$ vezes o integral de 5 c.

- **9**

  a) $\int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta$
  b) $\int_0^{2\pi} \int_1^2 e^2 r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta$
  c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^2 r^3 \cos(2\theta) \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta$
  d) $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_1^2 r \log(r^2) \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta$
  e) $\int_0^{2\pi} \int_2^3 r^2 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta$
  f) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^2 r + r^3 \cos\theta \operatorname{sen}\theta \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta$
  g) $2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r^2 \operatorname{sen}\theta \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta$
  h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{2b \operatorname{sen}\theta}^{2a \operatorname{sen}\theta} r^2 \cos\theta \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta$
  i) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r \operatorname{sen}\theta \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta$

Soluções parciais de alguns exercícios

- 10

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{\cos(2\theta)}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

- 11

a) $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^1 r^2\cos\theta\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{r^2}^2 r^2\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

c) $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-2}^0 -zr\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{r^2} zr\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

d) $\int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}}\int_1^2 zr^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^{1-r} r^3z\cos\theta\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

f) $2\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^1 r^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^2\int_0^1 5zr^4\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2\int_1^2 zr^2\cos\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta$

Soluções parciais de alguns exercícios

- 13

a) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{r^2}^{2} r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$
b) $\int_0^{2\pi} \int_0^{a} \int_0^{r^2} r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$
c) $2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_z^{\sqrt{1-z^2}} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\theta$
d) $\int_0^{2\pi} \int_0^{2} \int_{-r}^{r} r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$
e) $\int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{1-z^2}} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\theta$
f) $\int_0^{2\pi} \int_0^{1} \int_z^{2\cos\theta} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\theta$
g) $\int_0^{2\pi} \int_0^{2} \int_{-r^2}^{0} r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$
h) O volume de S é igual ao volume de um sólido S', idêntico a S, mas cujo eixo de revolução é o eixo dos zz: S' é sólido de revolução gerado por rotação em torno do eixo dos $zz's$ do conjunto dos pontos do plano yz limitado pelo eixo dos zz e a curva $y = z^2$, para $0 \leq y \leq 2$.
$\mathrm{Vol}S = \mathrm{Vol}S' = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{z^2} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\theta.$