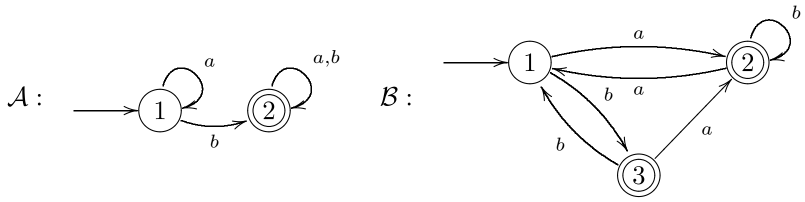
Modelos de Computação
Folha de trabalho n. 4

Conversão entre Autómatos Finitos e Expressões Regulares

4.1 Considera os seguintes autómatos finitos determinísticos:



Determina as expressões regulares das linguagens reconhecidas por cada autómato, pelo método de eliminação de estados e pelo método equacional.

4.2 Determina expressões regulares para cada uma das linguagens do exercício 2.5 da Folha 2.

4.3 Seja A a linguagem das palavras de alfabeto $\{0, 1\}$ em que não ocorrem sequências pares de 0's imediatamente à esquerda de sequências ímpares de 1's.

(a) Descreve um autómato finito determinístico que reconheça esta linguagem.

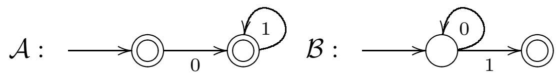
(b) Encontra uma expressão regular para a linguagem dada.

$\star$ **4.4** Seja B a linguagem das palavras de alfabeto $\{0, 1\}$ que representam em binário números múltiplos de 5.

(a) Descreve um autómato finito determinístico que reconheça esta linguagem.

(b) Encontra uma expressão regular para a linguagem dada.

4.5 Considera dois autómatos finitos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$:



Partindo de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, constrói autómatos não determinísticos que reconheçam:

(a) $L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{B})$

(b) $L(\mathcal{A}) \cdot L(\mathcal{B})$

(c) $L(\mathcal{B})^\star$

4.6 Seja $A = \{x \in \{a, b\}^\star \mid$ em que o número de ocorrências de ab é igual ao número de ocorrências de $ba\}$

(a) Descreve o autómato finito determinístico que reconhece esta linguagem.

(b) Encontra uma expressão regular para a linguagem dada.

4.7 Seja $B = \{\ x0y \mid x, y \in \{a, b\}^\star \mid$ a diferença entre o número de a's em x e o número de b's em y é par $\}$

(a) Descreve o autómato finito determinístico que reconhece esta linguagem.

(b) Encontra uma expressão regular para a linguagem dada.

4.8 Seja C a linguagem das palavras de alfabeto $\{0, 1\}$ que representam em binário números múltiplos de 4 mas não múltiplos de 3.

(a) Descreve o autómato finito determinístico que reconhece esta linguagem.

(b) Encontra uma expressão regular para a linguagem dada.

4.9 Seja D a linguagem das palavras de alfabeto $\{0, 1\}$ que representam em binário números múltiplos de 3 mas não múltiplos de 2.

(a) Descreve o autómato finito determinístico que reconhece esta linguagem.

(b) Encontra uma expressão regular para a linguagem dada.

4.10 Para cada uma das expressões regulares seguintes, constrói o autómato finito determinístico correspondente:

(a) $(000^\star + 111^\star)^\star$

(b) $(ab^\star a + a^\star a)^\star$

$\star$ (b) $(11 + 0)^\star(00 + 1)^\star$

(c) $(0 + 1(01^\star 0)^\star 1)^\star$

(d) $(11 + 0)^\star(00 + 1)^\star$

(e) $(ab + a)^\star$

(f) $(a + b)^\star aba$

(g) $(aaa + aaaaa)^\star$

(h) $(aa)^\star bbb(bbb)^\star$

4.11 Descreve cada uma das linguagens seguintes por uma expressão regular.

(a) $L_1 = \{\ x \in \{a, b, c, d\}^\star \mid x$ não têm b's à direita de c's nem a's à esquerda de d's $\}$

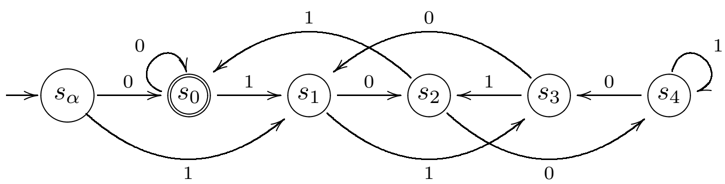
(b) $L_2 = \{\ xaay \mid x, y \in \{0, 1\}^\star$ e a diferença entre o número de `0`'s em x e em y é ímpar $\}$

(c) L_3 o conjunto das palavras de alfabeto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ que são representação em decimal de inteiros não negativos múltiplos 5 ou de 10.

(d) $L_4 = \{\ x \in \{0, 1\}^\star \mid x$ têm 110 como subpalavra mas não $101\}$

Resolução de exercícios escolhidos

4.4 (a) Como se viu em na folha 2, um autómato finito determinístico que reconhece esta linguagem é:



Começamos por escrever um sistema de equações correspondente ao autómato usando as variáveis x_α, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 para representar as expressões regulares das palavras que chegam respectivamente a s_α, s_0,s_1, s_2, s_3 e s_4.

$$
\begin{aligned}
x_\alpha &= \varepsilon \\
x_0 &= x_\alpha 0 + x_0 0 + x_2 1 \\
x_1 &= x_\alpha 1 + x_0 1 + x_3 0 \\
x_2 &= x_1 0 + x_3 1 \\
x_3 &= x_1 1 + x_4 0 \\
x_4 &= x_2 0 + x_4 1
\end{aligned}
$$

Como único estado final é o s_0 o objectivo é obter uma expressão regular para x_0. A primeiro passo é ver que podemos eliminar a variável x_α (que já tem como valor a expressão regular,

ε) e aplicar a regra de que $\varepsilon r = r\varepsilon = r$ para qualquer expressão r.

$$\begin{aligned}
x_\alpha &= \varepsilon \\
x_0 &= 0 + x_0 0 + x_2 1 \\
x_1 &= 1 + x_0 1 + x_3 0 \\
x_2 &= x_1 0 + x_3 1 \\
x_3 &= x_1 1 + x_4 0 \\
x_4 &= x_2 0 + x_4 1
\end{aligned}$$

A ordem porque eliminamos as restantes variáveis é arbitrário mas podemos usar a ordem usada no método de eliminação de estados. Começamos por aplicar o Lema de Arden a x_4 e substituir o valor resultante à equação de x_3

$$\begin{aligned}
x_3 &= x_1 1 + x_2 01^\star 0 \\
x_4 &= x_2 01^\star
\end{aligned}$$

Como x_3 não depende de x_3 podemos eliminá-lo directamente nas restantes equações

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0 + x_0 0 + x_2 1 \\
x_1 &= 1 + x_0 1 + (x_1 1 + x_2 01^\star 0)0 \\
x_2 &= x_1 0 + (x_1 1 + x_2 01^\star 0)1.
\end{aligned}$$

Podemos agora arranjar os termos da equação para x_2 para aplicarmos o Lema de Arden a essa equação.

$$x_2 = x_1(0 + 11) + x_2 01^\star 01,$$

Logo

$$x_2 = x_1(0 + 11)(01^\star 01)^\star,$$

e substituindo x_2 nas restantes vem:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0 + x_0 0 + x_1(0 + 11)(01^\star 01)^\star 1 \\
x_1 &= 1 + x_0 1 + x_1 10 + x_1(0 + 11)(01^\star 01)^\star 01^\star 00.
\end{aligned}$$

Arranjando os termos para eliminar x_1 temos

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0 + x_1(0 + 11)(01^\star 01)^\star 1 + x_0 0 \\
x_1 &= (1 + x_0 1) + x_1(10 + (0 + 11)(01^\star 01)^\star)01^\star 00
\end{aligned}$$

e podemos substuir a expressão resultante na equação para x_0:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0 + (1 + x_0 1)\alpha_1(0 + 11)(01^\star 01)^\star 1 + x_0 0 \\
x_1 &= (1 + x_0 1)(10 + (0 + 11)(01^\star 01)^\star)^\star \\
&= (1 + x_0 1)\alpha_1
\end{aligned}$$

onde $\alpha_1 = (10 + (0 + 11)(01^\star 01)^\star)^\star$. que resulta apenas uma equação para x_0 (só com essa variável)

$$x_0 = (0 + 1\alpha_1(0 + 11)(01^\star 01)^\star 1) + x_0(0 + 1\alpha_1(0 + 11)(01^\star 01)^\star 1)$$

ou seja, pelo Lema de Arden mais uma vez

$$x_0 \quad = \quad (0+1\alpha_1(0+11)(01^\star 01)^\star 1)(0+1\alpha_1(0+11)(01^\star 01)^\star 1)^\star$$

Donde uma expressão regular equivalente ao autómato será:

$(0{+}1(10{+}(0{+}11)(01^\star 01)^\star)^\star(0{+}11)(01^\star 01)^\star 1)(0{+}1(10{+}(0{+}11)(01^\star 01)^\star)^\star(0{+}11)(01^\star 01)^\star 1)^\star$.

4.10 (b) Seja $r = (11+0)^\star(00+1)^\star$. Vamos construir um DFA equivalente pelo método das derivadas. Começamos por calcular todas as derivadas (dissimilares) $D_w r$, $\forall w \in \{0,1\}$.

$$\begin{aligned}
D_\varepsilon r =& r = (11+0)^\star(00+1)^\star \\
D_1 r =& 1(11+0)^\star(00+1)^\star + (00+1)^\star = r_1 \\
D_0 r =& (11+0)^\star(00+1)^\star + 0(00+1)^\star = r_2 \\
D_1 r_1 =& (11+0)^\star(00+1)^\star + (00+1)^\star = r_3 \\
D_0 r_1 =& 0(00+1)^\star = r_4 \\
D_1 r_2 =& D_1 r = r_1 \\
D_0 r_2 =& (11+0)^\star(00+1)^\star + 0(00+1)^\star + (00+1)^\star = r_5 \\
D_1 r_3 =& = D_1 r_1 + (00+1)^\star = 1(11+0)^\star(00+1)^\star + (00+1)^\star = r_1(\text{ simplificando}) \\
D_0 r_3 =& D_0 r + 0(00+1)^\star = r_2(\text{ simplificando}) \\
D_1 r_4 =& \emptyset = r_7 \\
D_0 r_4 =& (00+1)^\star = r_6 \\
D_1 r_5 =& r_1 \\
D_0 r_5 =& r_5 \\
D_1 r_6 =& (00+1)^\star = r_6 \\
D_0 r_6 =& 0(00+1)^\star = r_4 \\
D_1 r_7 =& r_7 \\
D_0 r_7 =& r_7
\end{aligned}$$

Podemos agora construir um DFA onde o conjunto de estados é $S = \{r = r_0, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7\}$, o estado inicial é r_0 e os estados finais são $F = S \setminus \{r_4, r_7\}$ e $\delta(r_i, \sigma) = D_\sigma r_i$, com $\sigma \in \{0,1\}$ e $i \in \{0, \ldots, 7\}$.