Revisões

Produto escalar

O produto escalar de dois vetores $u = (x_1, \ldots, x_n)$ e $v = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ é o número real (ou **escalar**)

$$u \mid v = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Por exemplo, em $\mathbb{R}^3$, $(1, -1, 0) \mid (3, 5, -3) = 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 + 0 \cdot (-3) = -2$.

Propriedades: Facilmente se mostra que o produto escalar verifica as seguintes propriedades, para quaisquer $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

- $u \mid v = v \mid u$
- $u \mid (v + w) = u \mid v + u \mid w$
- $(\alpha u) \mid v = u \mid (\alpha v) = \alpha(u \mid v)$
- $u \mid u \geq 0$
- $u \mid u = 0 \Leftrightarrow u = 0_{\mathbb{R}^n}$

Norma

A norma ou comprimento de um vetor $u = (x_1, \ldots, x_n)$ é

$$\|u\| = \sqrt{u \mid u} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Propriedades: As primeiras das seguintes propriedades da norma resultam imediatamente das do produto escalar. As penúltima é menos simples de provar e dessa resulta a última. Para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

- $\|u\| \geq 0$
- $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0_{\mathbb{R}^n}$
- $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$
- $|u \mid v| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ (desigualdade de Cauchy-Schwartz)
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualdade triangular)

Exemplos:

$\|(3,-1)\| = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$;

$\|(-6,2)\| = \|(-2)(3,-1)\| = |-2|\|(3,-1)\| = 2\sqrt{10}$;

$\|(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},0)\| = \frac{1}{2}\|(1,-3,0)\| = \frac{1}{2}\sqrt{10}$.

Um vetor $u \in \mathbb{R}^n$ diz-se unitário sse $\|u\| = 1$.

Exemplos:

Todos os vetores da base canónica são unitários;

O vetor $(1,1,1)$ não é unitário, pois $\|(1,1,1)\| = \sqrt{3} \neq 1$.

Logo, $\|(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})\| = \frac{1}{\sqrt{3}}\|(1,1,1)\| = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$ e portanto $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$ é unitário.

Em geral, se u é um vetor não nulo, então $\frac{1}{\|u\|}u$ é um vetor unitário com a mesma direção sentido de u.

Exercício 1. Considere os vetores $u = (\sqrt{3} - 3, -1 - 3\sqrt{3})$ e $v = (-1, 3)$ de $\mathbb{R}^2$.

Calcule:

- a) $u \mid v$
- b) $\|u\|$
- c) $u \mid (2v + u)$
- d) Um vetor unitário com a mesma direção e sentido oposto ao de u
- e) $\|u + 2v\|^2$

Ângulo entre dois vetores

Se u e v são vetores não nulos de $\mathbb{R}^n$ então $\|u\|, \|v\| \neq 0$ e, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, $|u \mid v| \leq \|u\|\|v\|$. Logo,

$$-1 \leq \frac{u \mid v}{\|u\|\|v\|} \leq 1.$$

Define-se o ângulo entre u e v como sendo o único $\theta \in [0, \pi]$ tal que $\cos\theta = \frac{u \mid v}{\|u\|\|v\|}$, ou seja,

$$\theta = \operatorname{arccos} \frac{u \mid v}{\|u\|\|v\|}$$

Exemplos: **1.** O ângulo entre $u = (1, 1)$ e $v = (1, 0)$ é arcos $\frac{1}{\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{\pi}{4}$.

2. O ângulo entre $u = (2, 0, 0)$ e $v = (\sqrt{3}, 0, -1)$ é arccos $\frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{\pi}{6}$.

3. Dois vetores não nulos u e v são colineares sse o ângulo θ por eles formado é igual a 0 (têm o mesmo sentido) ou igual a π (têm sentidos opostos).

Ora,

$$\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 1 \Leftrightarrow \frac{u \mid v}{\|u\|\|v\|} = 1 \Leftrightarrow u \mid v = \|u\|\|v\|;$$

$$\theta = \pi \Leftrightarrow \cos\theta = -1 \Leftrightarrow u \mid v = -\|u\|\|v\|.$$

4. Dois vetores não nulos u e v fazem um ângulo $\theta = \frac{\pi}{2}$ sse $\cos\theta = 0$, ou seja, $u \mid v = 0$.

Ortogonalidade

- Diz-se que dois vetores u e v são ortogonais sse $u \mid v = 0$. Escreve-se então $u \perp v$.

Exemplos: 1. Os vetores da base canónica de $\mathbb{R}^n$ são ortogonais entre si.

2. Um vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é ortogonal a $(2, -3)$ sse $(x, y) \mid (2, -3) = 0$, ou seja, $2x - 3y = 0$. Logo, o conjunto de todos os vetores de $\mathbb{R}^2$ que são ortogonais a $(2, -3)$ é a reta (vetorial) de equação $2x - 3y = 0$.

3. O conjunto de todos os vetores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que são ortogonais a $(2, -3, 1)$ é o plano de equação $2x - 3y + z = 0$.

4. O conjunto de todos os vetores de $\mathbb{R}^3$ que são ortogonais simultaneamente a $(2, -3, 1)$ e a $(5, -1, 0)$, ou seja, tais que $(x, y, z) \mid (2, -3, 1) = 0 = (x, y, z) \mid (5, -1, 0)$ é a reta de equações

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 5x - y = 0 \end{cases}.$$

Exercício 2 Calcule o ângulo entre os vetores $u = (1, 1, 0)$, $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ de $\mathbb{R}^3$. Estes vetores são colineares?

Exercício 3 Determine e identifique geometricamente:

a) o conjunto de todos os vetores de $\mathbb{R}^2$ ortogonais a $(-5, 1)$;

b) o conjunto de todos os vetores de $\mathbb{R}^2$ colineares com $(-5, 1)$;

c) o conjunto de todos os vetores de $\mathbb{R}^2$ que fazem um ângulo de $\frac{\pi}{4}$ com o vetor $(0, 1)$.

Exercício 4 Determine um vetor do espaço que seja ortogonal a $(1, 0, 1)$ e a $(2, 1, 1)$ e tenha norma 3 (quantas soluções existem?)

Exercício 5. Mostre que se u e v são vetores ortogonais não nulos, então u e v são linearmente independentes.

Bases ortonormadas

Uma base $b = (u_1, \ldots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$ diz-se uma base ortonormada sse:

- $\|u_i\| = 1$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ *(todos os vetores são unitários);*
- $u_i \mid u_j = 0$, $\forall i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$ *(os vetores são ortogonais entre si).*

Exemplos: 1. A base canónica de $\mathbb{R}^n$ é uma base ortonormada.

2. A base $((-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (1, 0))$ de $\mathbb{R}^2$ não é ortonormada, pois os vetores não são ortogonais entre si: $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \mid (1, 0) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$. No entanto, ambos os vetores são unitários.

3. A base $((-1, 2), (2, 1))$ não é ortonormada, pois os vetores não são unitários. No entanto, são ortogonais.

Para obter uma base ortonormada a partir desta, basta dividir cada um dos vetores pela sua norma: $(\frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2), \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1))$ é base ortonormada.

Coordenadas numa base ortonormada

As coordenadas de um vetor numa base ortonormada são particularmente simples de determinar:

Se $b = (u_1, \dots, u_n)$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^n$, então as coordenadas de um vetor u na base b são, respetivamente,

$$u \mid u_1, u \mid u_2, \dots, u \mid u_n$$

De facto, escrevendo-se $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$, temos

$$u \mid u_1 = (\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) \mid u_1 = \alpha_1 \underbrace{u_1 \mid u_1}_{=1} + \alpha_2 \underbrace{u_2 \mid u_1}_{=0} + \cdots + \alpha_n \underbrace{u_n \mid u_1}_{=0} = \alpha_1;$$

$$u \mid u_2 = \alpha_1 \underbrace{u_1 \mid u_2}_{=0} + \alpha_2 \underbrace{u_2 \mid u_2}_{=1} + \cdots + \alpha_n \underbrace{u_n \mid u_2}_{=0} = \alpha_2;$$

$$\vdots$$

$$u \mid u_n = \alpha_1 \underbrace{u_1 \mid u_n}_{=0} + \cdots + \alpha_n \underbrace{u_n \mid u_1}_{=1} = \alpha_n.$$

Exemplo: A base $b = (\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2), \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1))$ de $\mathbb{R}^2$ é ortonormada. As coordenadas de $(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2})$ em b são, respetivamente,
$\alpha_1 = (\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}) \mid (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) = -\frac{3\sqrt{5}}{2}$ e $\alpha_2 = (\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}) \mid (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Exercício 6. Verifique se são ortonormadas as seguintes bases de $\mathbb{R}^2$ e, em caso afirmativo, determine as coordenadas nessa base do vetor $(1,5)$ e de um vetor genérico (x,y):

a) $b = ((1,0),(1,1))$;

b) $b = ((-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}))$.

Produto vetorial em $\mathbb{R}^3$

O produto vetorial de $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ é o vetor de $\mathbb{R}^3$

$$u \times v = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Regra prática para o cálculo do produto vetorial

Sejam $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ os vetores da base canónica de $\mathbb{R}^3$. O produto vetorial de u e v calcula-se *formalmente* como se fosse o seguinte "determinante"* (por expansão pela primeira linha):

$$\begin{aligned} u \times v &= \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} \\ &= (y_1 z_2 - y_2 z_1) e_1 + (x_2 z_1 - x_1 z_2) e_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) e_3 \\ &= (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1) \end{aligned}$$

O "determinante" (*) não tem de facto sentido, pois ocorrem vetores e números nas entradas; mas formalmente tudo funciona como se se tratasse do cálculo de um determinante.

Exemplos: 1. Se $u = (1, 2, 3)$ e $v = (6, 5, 4)$ então

$$u \times v = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = -7e_1 + 14e_2 - 7e_3 = (-7, 14, -7).$$

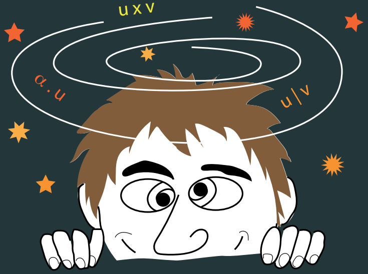
2. $(1, 2, 3) \times (2, 4, 6) = (0, 0, 0)$ (duas linhas do determinante são múltiplas uma da outra)

- Verifica-se facilmente que $u \times v$ é o vetor nulo sse u e v são colineares;

- Se u e v não são colineares, então $(u, v, u \times v)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

O quê?

Tantos produtos diferentes com vetores ao mesmo tempo?



Não há razão para confusões, desde que respeitem a notação e estejam atentos ao contexto, pois tudo tem de fazer sentido!

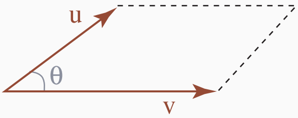
Produto vetorial em $\mathbb{R}^3$

Significado geométrico

Se u e v não são colineares, então o vetor $u \times v$ pode ser caracterizado geometricamente por:

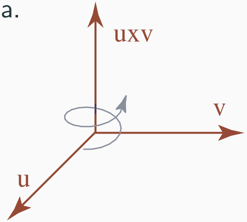
- comprimento: $\|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \operatorname{sen}\theta$, ($\theta$ é o ângulo entre u e v);

por outras palavras, $\|u \times v\|$ é igual à área do paralelogramo formado pelos vetores u e v.



- direção: $u \times v$ é ortogonal a u e a v;

- sentido: o sentido de $u \times v$ é tal que a base $(u, v, u \times v)$ é direta ou seja, tem a mesma orientação da base canónica.



Se $u = (x_1, y_1, z_1)$,
$v = (x_2, y_2, z_2)$ e $u \times v = (x_3, y_3, z_3)$,

isto significa que $\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} > 0$.

- Note-se em particular que das propriedades anteriores decorre que se u e v são vetores unitários e ortogonais entre si, então $(u, v, u \times v)$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$.

São simples de provar as seguintes propriedades algébricas do produto vetorial, para quaisquer $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

- $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$;
- $(\alpha u) \times v = u \times (\alpha v) = \alpha(u \times v)$;
- $u \times v = -v \times u$.

Exercício 7. Seja $b_c = (e_1, e_2, e_3)$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e considere os vetores $u = (-1, 3, 1)$, $v = (0, 1, 1)$ e $w = (1, 4, 1)$. Calcule:

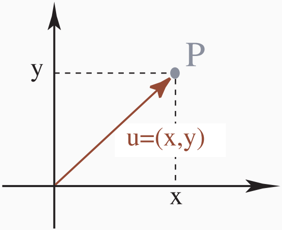
i) $e_1 \times e_2$	ii) $e_2 \times e_3$	iii) $e_1 \times e_3$
iv) $u \times v$	v) $v \times u$	vi) $v \times w$
vii) $u \times (v \times w)$	viii) $(u \times v) \times w$	ix) $(u \times v) \mid w$
x) $(u \times w) \mid w$	xi) $(u + w) \times w$	

O espaço afim $\mathbb{R}^n$: pontos e vetores

Consideremos agora os elementos $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ duplamente como pontos e como vetores.

P : ponto de coordenadas (x, y)

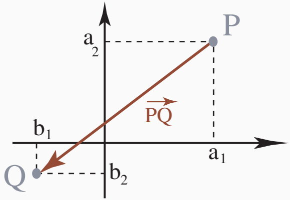
$u = (x, y)$:
vetor de posição do ponto P



A seguir definiremos operações entre pontos e vetores. Com esta estrutura, diz-se que $\mathbb{R}^n$ é um espaço afim.

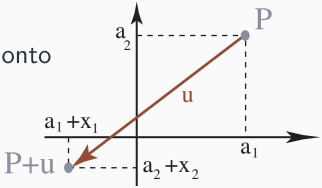
Operações entre pontos e vetores

Sejam P um ponto de $\mathbb{R}^n$ de coordenadas $(a_1, \ldots, a_n)$, Q um ponto de coordenadas $(b_1, \ldots, b_n)$ e $u = (x_1, \ldots, x_n)$ um vetor.



- A diferença entre Q e P é o vetor

$Q - P = \vec{PQ} = (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n)$



- A soma do ponto P com o vetor u é o ponto

$P + u$,
de coordenadas $(a_1 + x_1, \ldots, a_n + x_n)$.

Portanto, $P + \vec{PQ} = Q$.

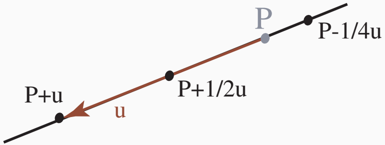
Operações entre pontos e vetores

- Somando ao ponto P múltiplos positivos do vetor u, obtém-se a semi-reta com origem em P e direção e sentido de u;

- Somando ao ponto P múltiplos negativos de u, obtém-se a semi-reta com origem em P, direção de u e sentido oposto ao de u;

- Somando ao ponto P todos os múltiplos de u, obtém-se a reta (afim) que passa em P e tem direção de u;

- Somando ao ponto P os múltiplos αu do vetor u com $\alpha \in [0, 1]$, obtém-se o segmento de reta que une P a Q.



Exemplo: Consideremos a reta em $\mathbb{R}^2$ que passa pelo ponto P de coordenadas $(1,1)$ e tem a direção do vetor $u = (3,-1)$.

Os pontos (x,y) desta reta são precisamente os pontos de $\mathbb{R}^2$ que podem ser obtidos como soma de P com um múltiplo αu de u, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Portanto, esta reta tem equação vetorial

$$(x,y) = (1,1) + \alpha(3,-1), \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

De forma equivalente, os pontos (x,y) da reta são os que tornam possível o sistema
$$\begin{cases} x = 1 + 3\alpha \\ y = 1 - \alpha \end{cases}$$
ou seja, os que satisfazem a equação cartesiana

$$x + 3y = 4.$$

Note-se que o vetor $(1,3)$ cujas coordenadas são os coeficientes de x e y nesta equação, é um vetor ortogonal à reta, pois $(1,3)\,|\,(3,-1) = 0$.

Retas afins em $\mathbb{R}^2$

Em geral,

- A reta em $\mathbb{R}^2$ que passa num ponto P e tem vetor diretor $u \neq (0,0)$ tem equação vetorial

$$(x, y) = P + \alpha u, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- A reta em $\mathbb{R}^2$ que passa num ponto P de coordenadas (x_0, y_0) e é ortogonal ao vetor (a, b) tem equação cartesiana

$$ax + by = d, \qquad \textit{onde} \quad d = ax_0 + by_0.$$

Retas afins em $\mathbb{R}^3$

- A reta em $\mathbb{R}^3$ que passa num ponto P e tem vetor diretor $u \neq (0,0,0)$ tem equação vetorial

$$(x, y, z) = P + \alpha u, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- A reta em $\mathbb{R}^3$ que passa num ponto P de coordenadas (x_0, y_0, z_0) e é ortogonal a dois vetores não colineares (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) tem equações cartesianas

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}, \qquad \textit{onde} \quad \begin{cases} d_1 = a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 z_0 \\ d_2 = a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 z_0. \end{cases}$$

Retas afins em $\mathbb{R}^3$ - exemplo

Exemplo: Consideremos a reta em $\mathbb{R}^3$ que passa pelos pontos P de coordenadas $(1,2,3)$ e Q de coordenadas $(-3,-2,-1)$

Um vetor diretor da reta é $\vec{PQ} = Q - P = (-4,-4,-4)$. Logo, esta reta tem equação vetorial

$$(x,y,z) = (1,2,3) + \alpha(-4,-4,-4), \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Para obter as equações cartesianas, determinamos as condições sobre x, y, z para que seja possível o sistema

$$\begin{cases} x = 1 - 4\alpha \\ y = 2 - 4\alpha \\ z = 3 - 4\alpha \end{cases}$$

que são

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x - z = -2 \end{cases}$$

Note-se que os vetores $(1,-1,0)$ e $(1,0,-1)$ são ambos ortogonais ao vetor diretor da reta $(-4,-4,-4)$.

Planos afins em $\mathbb{R}^3$

Seja P um ponto de $\mathbb{R}^3$ e u, v dois vetores não colineares de $\mathbb{R}^3$.

- O plano em $\mathbb{R}^3$ que passa em P e tem vetores diretores u e v tem equação vetorial

$$(x, y, z) = P + \alpha u + \beta v, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- O plano em $\mathbb{R}^3$ que passa em P de coordenadas (x_0, y_0, z_0) e é ortogonal a um vetor não nulo (a, b, c) tem equação cartesiana

$$ax + by + cz = d, \qquad onde \quad d = ax_0 + by_0 + cz_0$$

Planos afins em $\mathbb{R}^3$ - exemplo

Exemplo: Determinemos equações do plano de $\mathbb{R}^3$ que passa nos pontos P, Q e R de coordenadas $(1, 2, 3)$, $(-3, -2, -1)$ e $(0, 1, 0)$, respetivamente.

Para obtermos a equação vetorial, precisamos de calcular dois vetores diretores do plano. Por exemplo, $u = -\frac{1}{4}\vec{PQ} = (1, 1, 1)$ e $v = \vec{QR} = (3, 3, 1)$ (que são não colineares). A equação vetorial é, então

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \alpha(1, 1, 1) + \beta(3, 3, 1), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

A equação cartesiana do plano pode ser obtida desta. Em alternativa, determina-se um vetor ortogonal ao plano: $u \times v = (-2, 2, 0)$.

A equação cartesiana do plano é, então,

$$-2x + 2y = 2$$

onde $d = 2$ foi determinado de forma a que o ponto R (ou P, ou Q) satisfaça a equação.

Exercício 8. Determine:

a) uma equação cartesiana da reta de $\mathbb{R}^2$ que passa no ponto de coordenadas $(1,1)$ e tem a direção do vetor $(1,2)$;

b) uma equação vetorial da reta de $\mathbb{R}^3$ que passa no ponto de coordenadas $(1,1,1)$ e tem a direção do vetor $(1,2,3)$;

c) uma equação do plano em $\mathbb{R}^3$ ortogonal ao vetor $u=(3,1,0)$ e passando pelo ponto P de coordenadas $(3,1,4)$.

Exercício 9. Calcule $u \times v$, em que $u=(1,2,0)$ e $v=(0,2,3)$. Determine as equações vetorial e cartesiana do plano que passa na origem e tem vetores directores u e v. Qual é o plano paralelo a este que passa no ponto P de coordenadas $(1,1,1)$?

Exercício 10. Determine a equação vetorial do plano em $\mathbb{R}^3$ definido pela equação cartesiana $x+2y-3z=1$.