## FORMULÁRIO

### Alguns valores de funções trigonométricas

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos 0 = 1$ | $\operatorname{sen} 0 = 0$ | $\operatorname{tg} 0 = 0$ | $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ | $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ | $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ | $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ |
| $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ | $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ | | | | |

### Algumas relações trigonométricas

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1;$ $\qquad$ $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y;$ $\qquad$ $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x;$ $\qquad$ $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

### Funções exponenciais e logarítmicas - Algumas propriedades

$a^{x+y} = a^x a^y;$ $\qquad$ $a^{xy} = (a^x)^y;$ $\qquad$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x};$ $\qquad$ $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a(x^y) = y \log_a x;$ $\qquad$ $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x;$ $\qquad$ $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$\log_a 1 = 0;$ $\qquad$ $\log_a(a^x) = x;$ $\qquad$ $\frac{\log_a x}{\log_a b} = \log_b x$

## DERIVADAS

### Reta tangente ao gráfico

- Se $f$ é uma função derivável em $a$ então $f'(a)$ é o declive da recta tangente ao gráfico de $f$ em $(a, f(a))$ e $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ é uma equação da recta tangente ao gráfico de $f$ em $(a, f(a))$.

### Algumas propriedades

- Se $f$ é uma função derivável em $a$, então, para qualquer número real $c$ $(cf)'(a) = cf'(a)$
- Se $f$ e $g$ são funções deriváveis em $a$, então
  - $f+g$ é derivável em $a$ e $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
  - $f \cdot g$ é derivável em $a$ e $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
  - Se $g(a) \neq 0$ então $f/g$ é derivável em $a$ e $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}$.
- Se $f$ é derivável em $a$ e $g$ é derivável em $f(a)$, então $g \circ f$ é derivável em $a$ e

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

- Se $f$ é uma função contínua injectiva derivável em $a$ e $f'(a) \neq 0$, então $f^{-1}$ é derivável em $f(a)$ e $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

### Derivadas de algumas funções

Se $f(x) = c$ então $f'(x) = 0$, para qualquer $c \in \mathbb{R}$; $\qquad$ Se $f(x) = x^k$ então $f'(x) = kx^{k-1}$, para qualquer $k \in \mathbb{R}$;

Se $f(x) = \operatorname{sen} x$ então $f'(x) = \cos x$; $\qquad$ Se $f(x) = \cos x$ então $f'(x) = -\operatorname{sen} x$;

Se $f(x) = arcsenx$ então $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\qquad$ Se $f(x) = arccosx$ então $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

Se $f(x) = arctgx$ então $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $\qquad$ Se $f(x) = tgx$ então $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$;

Se $f(x) = e^x$ então $f'(x) = e^x$; $\qquad$ Se $f(x) = a^x$ então $f'(x) = (\log a)a^x$;

Se $f(x) = \log|x|$ então $f'(x) = \frac{1}{x}$; $\qquad$ Se $f(x) = \log_a |x|$ então $f'(x) = \frac{1}{x \log a}$.

**Lista de Primitivas Imediatas**

$$\int k\,dx = kx + C \qquad \int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1},\ n \neq -1.$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = log_e(|x|) + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{log_e a} + C,\ a >= 0.$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C \qquad \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \operatorname{tg} x + C \qquad \int \frac{1}{\cos x}\,dx = \log(|\frac{1}{\cos x} + tgx|) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + C \qquad \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$$

**Primitivação por Partes**

Se $F$ é uma primitiva de $f$ em $I$ e $g$ é uma função diferenciável em $I$ então

$$\int (f(x)\cdot g(x))\,dx = F(x)\cdot g(x) - \int (F(x)\cdot g'(x))\,dx.$$

**Primitivação por substituição**

Se $g$ é uma função primitivável em $I$ e $f : J \longrightarrow I$ é bijetiva e diferenciável então $g \circ f$ é uma função primitivável em $J$ e

$$\int g(f(t))\cdot f'(t)\,dt = \int g(x)\,dx.$$

**Primitivação de funções racionais**

- Qualquer fração racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$, com $\operatorname{gr}(P(x)) < \operatorname{gr}(Q(x))$, pode ser escrita como soma de frações cujos denominadores sejam potências de polinómios irredutíveis, isto é, polinómios de grau 1 ou de grau 2 irredutíveis, os quais são factores da decomposição de $Q(x)$ em produto de polinómios irredutíveis. Alm disso, os numeradores destas frações terão grau inferior ao do polinómio irredutível que aparece no denominador.

- $\displaystyle\int \frac{1}{x+a}\,dx = \log|x+a| + C$

- $\displaystyle\int \frac{1}{(x+a)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x+a)^{n-1}} + C$, para $n > 1$

- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$, para $a \neq 0$

- $\displaystyle\int \frac{1}{(x+b)^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+b}{a} + C$

- $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+a^2}\,dx = \log(x^2+a^2) + C$

- $\displaystyle\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,dx = \log|x^2+bx+c| + C$

- $\displaystyle\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n}\,dx = -\frac{1}{(n-1)(x^2+bx+c)^{n-1}} + C,\ n \neq 1$

- $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{x}{(2n-2)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,dx\ ,\ n > 1$