Expressões regulares e Linguagens

2.1 Quais das seguintes afirmações são verdadeiras? Justifica.

(a) $baa \in \mathcal{L}(a^\star b^\star a^\star b^\star)$
(b) $\mathcal{L}(b^\star a^\star) \cap \mathcal{L}(a^\star b^\star) = \mathcal{L}(a^\star + b^\star)$
(c) $\mathcal{L}(a^\star b^\star) \cap \mathcal{L}(c^\star d^\star) = \emptyset$
(d) $abcd \in \mathcal{L}((a(cd)^\star b)^\star)$

2.2 Escreve expressões regulares para cada uma das seguintes linguagens de $\{0, 1\}$.

(a) palavras com mais do que três 0's
(b) palavras com um número de 0's divisivel por três.
(c) palavras com exactamente uma ocorrência da subpalavra 000.
(d) palavras em que não ocorre a subpalavra 000.

2.3 Para cada um dos seguintes pares de expressões regulares, indica, justificando, se são equivalentes.

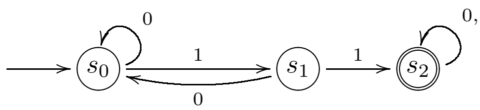
(a) $(a^\star b)^\star$, $(a + b)^\star$
(b) $(a(bba)^\star)^\star$, $(a + bb)^\star$
(c) $(a^\star b^\star)^\star$, $(a + b)^\star$
(d) $\emptyset + a + (a^\star b)b^\star$, $(ab^\star)^\star$

2.4 Escreve expressões regulares mais simples equivalentes às seguintes expressões.

(a) $\emptyset + a^\star + b^\star + (a + b)^\star$
(b) $((a^\star b^\star)^\star (b^\star a^\star)^\star)^\star$
(c) $(a^\star b)^\star + (b^\star a)^\star$
(d) $(a + b)^\star a(a + b)^\star$

Autómatos Finitos

2.5 Considera o autómato finito representado na figura.



(a) Constrói uma descrição formal para este autómato como um tuplo $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$;
(b) Indica quais das seguintes palavras são aceites por este autómato: 101001, 11001010111, 111111 e 0000011000;
(c) Diz (em português) qual a propriedade que uma palavra de $\{0, 1\}^*$ tem de ter para ser aceite por este autómato.

2.6 Considera os seguintes autómatos finitos do alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$,

$$\mathcal{A} = (\{s_0, s_1\}, \Sigma, \delta_A, s_0, \{s_1\})$$
$$\mathcal{B} = (\{s_0, s_1, s_2\}, \Sigma, \delta_B, s_0, \{s_1, s_2\})$$

com as funções de transição dadas por:

$$\delta_A(s_0, 0) = s_0 \quad \delta_A(s_0, 1) = s_1$$
$$\delta_A(s_1, 0) = s_0 \quad \delta_A(s_1, 1) = s_1$$

$$\delta_B(s_0, 0) = s_1 \quad \delta_B(s_0, 1) = s_2$$
$$\delta_B(s_1, 1) = s_2 \quad \delta_B(s_2, 0) = s_1$$

(a) Para cada um dos autómatos desenha o diagrama que representa.

(b) Diz quais das seguintes palavras são aceites por algum dos autómatos:

$$\begin{array}{lll} \epsilon & 101 & 111 \\ 11001 & 01010 & 00011 \end{array}$$

(c) Diz quais as linguagens reconhecidas pelos autómatos.

2.7 Descreve um autómato finito que reconheça a linguagem das palavras de $\{0,1\}^*$ que...

(a) não têm nenhum "1";
(b) são diferentes de "1";
(c) contêm pelo menos algum "0" e algum "1";
(d) têm comprimento não inferior a 2;
(e) não contêm "101" como sub-palavra;
(f) terminam em "1";
(g) terminam em "1" mas não em "111";
(h) têm pelo menos dois "0" consecutivos;
(i) terminam em "1" e têm pelo menos dois "0" consecutivos;
(j) têm um número ímpar de "0" ou um número par de "1";
(k) têm no máximo um par de "0" e um par de "1" consecutivos;
(l) são representação binária de inteiros positivos múltiplos de 4;
(m) são representação binária de inteiros positivos múltiplos de 2 mas não de 3;
(n) contêm (algures) pelo menos três "0" seguidos, mas não contêm dois ou mais "1" seguidos'
(o) se têm algum par de "0" adjacentes, este aparece antes de qualquer par de "1" adjacentes;
(p) não terminam em "1101" nem em "1011";
(q) têm igual número de "0" e "1" e nenhum seu prefixo tem um número de "0" que excede em dois o número de "1", nem um número de "1" que excede em dois o número de "0"

2.8 Seja $\mathcal{A} = (\Sigma, S, \delta, s_0, F)$ um autómato finito determinístico e s um estado de $\mathcal{A}$, tal que $\delta(s, a) = s$, $\forall a \in \Sigma$. Mostra por indução no comprimento de x, que $\forall x \in \Sigma^\star, \widehat{\delta}(s, x) = s$.

2.9 Considera a seguinte operação

$$\begin{array}{rcl} \Sigma^\star & \longrightarrow & \Sigma^\star \\ \varepsilon & \longmapsto & (\varepsilon)^R = \varepsilon \\ \sigma\alpha & \longmapsto & (\sigma\alpha)^R = (\alpha)^R\sigma \text{ (com } \sigma \in \Sigma \text{ e } \alpha \in \Sigma^\star). \end{array}$$

Dada uma linguagem L, seja $L^R = \{x^R \mid x \in L\}$. Mostra que se L for aceite por um autómato finito , então L^R também o é.

2.10 Descreve um autómato finito determinístico que reconheça a linguagem A das palavras de alfabeto $\{0,1\}$ em que não ocorrem sequências pares de `0`'s imediatamente à esquerda de sequências ímpares de `1`'s.

⋆ **2.11** Seja B a linguagem das palavras de alfabeto $\{0,1\}$ que representam em binário números múltiplos de 5.

(a) Descreve um autómato finito determinístico que reconheça esta linguagem.

(b) Para o autómato encontrado, prova que o mesmo reconhece a linguagem B.

2.12 Seja A a linguagem das palavras de alfabeto $\{a, b\}$ que depois de cada ocorrência de aaa contêm pelo menos uma ocorrência de bb. Por exemplo $aaaabaabb$, $ababa$ e $bbaabaaaaabbaa$ pertencem a A, mas $bbaaababa$ e $aaaabbaaab$ não pertencem.

(a) Descreve um autómato finito determinístico completo que reconheça A.

(b) Para cada um dos estados do autómato descreve informalmente a linguagem correspondente.

2.13 Seja B a linguagem das palavras de alfabeto $\{0,1\}$ que não terminam em 101 nem em 00. Por exemplo 11001010, 111010 e 10111000001 pertencem a B, mas 11101 e 00011000 não pertencem.

(a) Descreve um autómato finito determinístico completo que reconheça B.

(b) Para cada um dos estados do autómato descreve informalmente a linguagem correspondente.

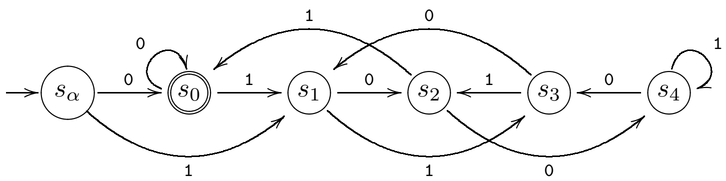
2.14 Seja C a linguagem das palavras de alfabeto $\{c,d\}$ que têm no máximo uma ocorrência da subpalavra ccc e que não terminam em dc. Por exemplo $dddccdcdccc$, cc e $dddccdcccddd$ pertencem a C, mas $dccccd$ e $cccccdcc$ não pertencem.

(a) Descreve um autómato finito determinístico completo que reconheça C.

(b) Para cada um dos estados do autómato descreve informalmente a linguagem correspondente.

Resolução de exercícios escolhidos

2.11 (a) Um autómato finito determinístico que reconhece esta linguagem é:



(b) Para provar que este autómato reconhece a linguagem dada vamos provar que para uma palavra w que represente um número da forma $k5+i$ $(i \in \{0,1,2,3,4\})$ se tem $\widehat{\delta}(s_\alpha, w) = s_i$. A demonstração segue por indução no comprimento de w. Se $|w| = 1$ então ou $w = \mathtt{0}$ e $\widehat{\delta}(s_\alpha, \mathtt{0}) = s_0$, ou $w = \mathtt{1}$ e $\widehat{\delta}(s_\alpha, \mathtt{1}) = s_1$.
Suponhamos que a propriedade se verifica para todas as palavras de comprimento igual a n e seja w' tal que $|w'| = n+1$, podemos escrever $w' = wx$ em que $|w| = n$ e $x \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}$ e portanto

$$\widehat{\delta}(s_\alpha, w') = \delta(\widehat{\delta}(s_\alpha, w), x).$$

Por hipótese de indução $w \equiv i \pmod 5 \;\Leftrightarrow\; \widehat{\delta}(s_\alpha, w) = s_i$. Temos portanto que analisar 5 casos:

$i = 0$, então $\widehat{\delta}(s_\alpha, w) = s_0$
- $\delta(s_0, \mathtt{0}) = s_0$. Como $w\mathtt{0} = 2w$, $(w \equiv 0 \pmod 5) \Rightarrow (2w \equiv 0 \pmod 5)$.
- $\delta(s_0, \mathtt{1}) = s_1$. Como $w\mathtt{1} = 2w+1$, $(w \equiv 0 \pmod 5) \Rightarrow ((2w+1) \equiv 1 \pmod 5)$.

$i = 1$, então $\widehat{\delta}(s_\alpha, w) = s_1$
- $\delta(s_1, \mathtt{0}) = s_2$ e $(w \equiv 1 \pmod 5) \Rightarrow (2w \equiv 2 \pmod 5)$.
- $\delta(s_1, \mathtt{1}) = s_3$ e $(w \equiv 1 \pmod 5) \Rightarrow ((2w+1) \equiv 3 \pmod 5)$.

$i = 2$, então $\widehat{\delta}(s_\alpha, w) = s_2$
- $\delta(s_2, \mathtt{0}) = s_4$ e $(w \equiv 2 \pmod 5) \Rightarrow (2w \equiv 4 \pmod 5)$.
- $\delta(s_2, \mathtt{1}) = s_0$ e $(w \equiv 2 \pmod 5) \Rightarrow ((2w+1) \equiv 0 \pmod 5)$.

$i = 3$, então $\widehat{\delta}(s_\alpha, w) = s_3$
- $\delta(s_3, \mathtt{0}) = s_1$ e $(w \equiv 3 \pmod 5) \Rightarrow (2w \equiv 1 \pmod 5)$.
- $\delta(s_3, \mathtt{1}) = s_2$ e $(w \equiv 3 \pmod 5) \Rightarrow ((2w+1) \equiv 2 \pmod 5)$.

$i = 4$, então $\widehat{\delta}(s_\alpha, w) = s_4$
- $\delta(s_4, \mathtt{0}) = s_3$ e $(w \equiv 4 \pmod 5) \Rightarrow (2w \equiv 3 \pmod 5)$.
- $\delta(s_4, \mathtt{1}) = s_4$ e $(w \equiv 4 \pmod 5) \Rightarrow ((2w+1) \equiv 4 \pmod 5)$.

A propriedade verifica-se para uma palavra de comprimento $n+1$ e portanto temos mostrado que a propriedade é universal. Fica assim mostrado, em particular, que as palavras w que são reconhecidas pelo autómato, aquelas que $\widehat{\delta}(s_\alpha, w) = s_0$, são exactamente as que $w \equiv 0 \pmod 5$.