Autómatos Finitos determinísticos (DFA) (revisão)

3.1 Seja B a linguagem das palavras de alfabeto $\{0, 1\}$ que não terminam em 101 nem em 00. Por exemplo 11001010, 111010 e 10111000001 pertencem a B, mas 11101 e 00011000 não pertencem.

(a) Descreve um autómato finito determinístico completo que reconheça B.

(b) Para cada um dos estados do autómato descreve informalmente a linguagem correspondente.

3.2 Seja C a linguagem das palavras de alfabeto $\{c, d\}$ que têm no máximo uma ocorrência da sub-palavra ccc e que não terminam em dc. Por exemplo $dddccdcdccc$, cc e $dddccdcccddd$ pertencem a C, mas $dccccd$ e $cccccdcc$ não pertencem.

(a) Descreve um autómato finito determinístico completo que reconheça C.

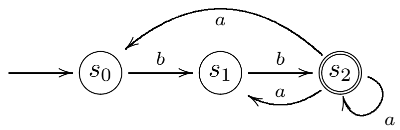
(b) Para cada um dos estados do autómato descreve informalmente a linguagem correspondente.

3.3 Seja D a linguagem das palavras de alfabeto $\{0, 1\}$ que não começam por 100 e têm no máximo uma ocorrência da sub-palavra 111. Por exemplo 1011011100, 111000110 e 10101011000 pertencem a D, mas 1011110 e 11101110 não pertencem.

(a) Descreve um autómato finito determinístico completo que reconheça D.

(b) Para cada um dos estados do autómato descreve informalmente a linguagem correspondente.

3.4 Considera o seguinte autómato finito não-determinístico E definido no alfabeto $\{a, b\}$.

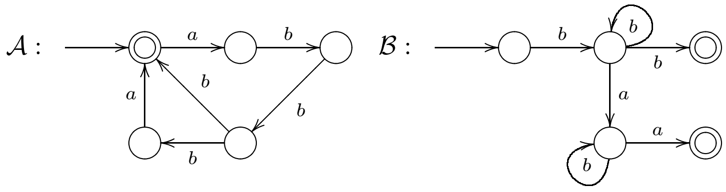


(a) Descreve $L(E)$ e indica uma palavra que pertença a $L(E)$ e outra que não pertença.

(b) Usando o método de construção de subconjuntos, determina um autómato finito determinístico equivalente a E. Indica claramente a que subconjuntos de estados de E corresponde cada estado do novo autómato.

Autómatos finitos não-determinísticos (NFA) e autómatos finitos não determinísticos com transições ϵ (NFA$_\varepsilon$)

3.5 Considera os autómatos finitos *não-determinísticos* representados pelos seguintes diagramas:



Diz quais das seguintes palavras são aceites por $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$:

(a) aa

(b) aba

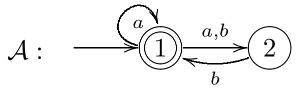
(c) $abba$

(d) bba

(e) $abab$

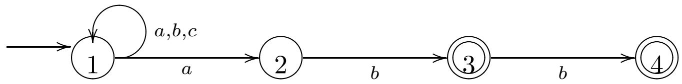
3.6 Constrói um autómato finito *não-determinístico* que reconheça a linguagem do alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ das palavras com um 1 na terceira posição a contar do fim.

3.7 Considera o seguinte autómato finito não-determinístico representado pelo seguinte diagrama:



Converte, pela construção dos subconjuntos, o autómato num autómato finito *determinístico*.

3.8 Seja $\mathcal{A}$ o autómato finito de alfabeto $\{a, b, c\}$ representado pelo diagrama seguinte.

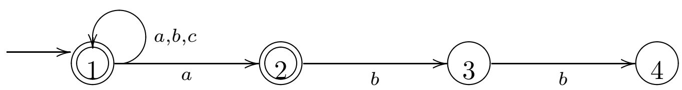


(a) Qual é a linguagem reconhecida pelo autómato $\mathcal{A}$? Porquê?

(b) Usando o método da construção de subconjuntos, determina um autómato determinístico que seja equivalente a $\mathcal{A}$.

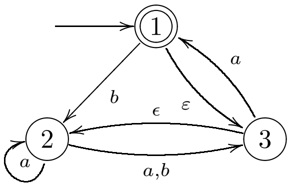
(c) Recorda que se um dado autómato determinístico $(S, \Sigma, \delta, s_0, F)$ em que δ é uma função total (não encrava), reconhece L, então o autómato $(S, \Sigma, \delta, s_0, S \setminus F)$ reconhece $\Sigma^\star \setminus L$ (isto é, a linguagem complementar de L).

Por que é que a linguagem reconhecida pelo autómato seguinte não é a complementar da linguagem reconhecida por $\mathcal{A}$?



⋆ **3.9** Descreve um autómato finito determinístico que reconheça a linguagem A das palavras de alfabeto $\{0, 1\}$ em que não ocorrem sequências pares de 0's imediatamente à esquerda de sequências ímpares de 1's.

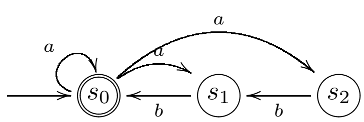
3.10 Considera o seguinte autómato finito não-determinístico representado pelo seguinte diagrama:



(a) Calcula o fecho-ϵ de cada estado.

(b) Usando a construção por subconjuntos, determina um autómato finito determinístico equivalente.

3.11 Considera o seguinte autómato finito não-determinístico $\mathcal{A}$ definido em $\Sigma = \{a, b\}$:



(a) Indica, justificando, uma palavra de Σ^* que pertence a $L(\mathcal{A})$ e uma que não pertença.

(b) Descreve informalmente $L(\mathcal{A})$.

(c) Usando o método de construção de subconjuntos, determina um autómato finito determinístico equivalente a $\mathcal{A}$.

3.12 Seja $L \subseteq \{0, 1\}^*$ a linguagem das palavras que contém um par de 0s separados por uma subpalavra de comprimento $5k$ para algum $k > 0$. Por exemplo, $010110000000, 101010101000010 \in L$. Constrói um autómato finito não determinístico que reconhece L.

3.13 Considera o autómato finito com transições por ϵ, $(\{s_0, s_1, s_2\}, \{a, b, c\}, \delta, s_0, \{s_2\})$ com a seguinte função de transição δ:

	ϵ	a	b	c
s_0	$\{s_1, s_2\}$	$\emptyset$	$\{s_1\}$	$\{s_2\}$
s_1	$\emptyset$	$\{s_0\}$	$\{s_2\}$	$\{s_0, s_1\}$
s_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

(a) Apresenta o diagrama que descreve o autómato.

(b) Calcula o fecho-ϵ de cada estado.

(c) Determina todas as palavras com comprimento ≤ 3 aceites pelo autómato.

(d) Determina um autómato finito determinístico completo equivalente.

3.14 Considera o autómato finito não determinístico $\mathcal{A} = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}, \{0, 1\}, \delta, s_0, \{s_2, s_4\})$, onde a função de transição δ é definida pela tabela seguinte:

	ϵ	0	1
$\rightarrow s_0$	$\{s_2, s_4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
s_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{s_3\}$
$\star s_2$	$\emptyset$	$\{s_5\}$	$\emptyset$
s_3	$\{s_4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\star s_4$	$\emptyset$	$\{s_1\}$	$\emptyset$
s_5	$\emptyset$	$\{s_2\}$	$\emptyset$

(a) Apresenta o diagrama que descreve o autómato e diz quais das seguintes palavras são aceites por $\mathcal{A}$: 0001, 010101 e 00000

(b) Descreve a linguagem reconhecida por $\mathcal{A}$, eventualmente usando uma expressão regular.

(c) Determina o fecho por ϵ de cada estado de $\mathcal{A}$.

(d) Usando o método de construção de subconjuntos, determina um autómato finito determinístico completo equivalente a $\mathcal{A}$.

$\star$ **3.15** Considera o autómato finito $(\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}, \{a, b\}, \delta, s_0, \{s_4\})$ com a seguinte função de transição:

	ϵ	a	b
$\rightarrow s_0$	$\emptyset$	$\{s_0, s_1\}$	$\{s_2\}$
s_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{s_3\}$
s_2	$\{s_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
s_3	$\emptyset$	$\{s_1, s_4\}$	$\{s_4\}$
$\star s_4$	$\emptyset$	$\{s_1\}$	$\emptyset$

(a) Para cada uma das seguintes palavras indica se são aceites ou não pelo autómato:

i) *bbab*

ii) *aaaaba*

iii) *ababab*

(b) Descreve a linguagem aceite pelo autómato.

(c) Determina o autómato finito determinístico que reconhece a linguagem complementar desta.

$\star$ **3.16** Considera o autómato finito $(\{s_0, s_1, s_2, s_3, \}, \{a, b\}, \delta, s_0, \{s_0, s_3\})$ com a seguinte função de transição:

	ϵ	a	b
$\rightarrow \star s_0$	$\{s_1, s_2\}$	$\{s_0\}$	$\emptyset$
s_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{s_3\}$
s_2	$\emptyset$	$\{s_0\}$	$\emptyset$
$\star s_3$	$\emptyset$	$\{s_1, s_2\}$	$\emptyset$

(a) Para cada uma das seguintes palavras indica se são aceites ou não pelo autómato:

   i) *abaa*

   ii) *baaa*

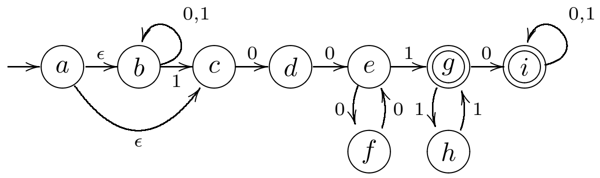
   iii) *ababba*

(b) Descreve a linguagem aceite pelo autómato.

(c) Determina o autómato finito determinístico que reconhece a linguagem complementar desta.

Resolução de exercícios escolhidos

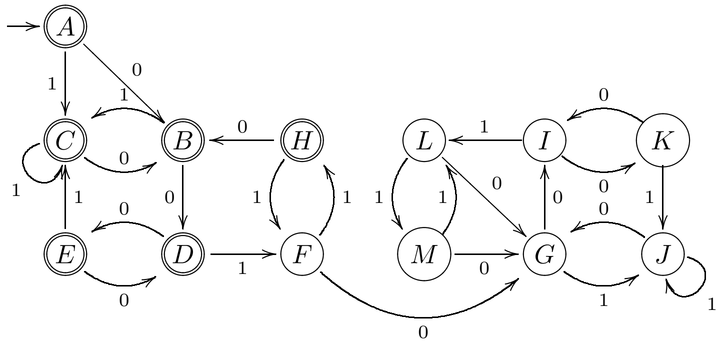
3.9 (a) É aparentemente demasiado complicado encontrar directamente um autómato finito determinístico que reconheça esta linguagem... e portanto em vez disso, passamos rapidamente à força bruta... primeiro encontramos um autómato finito **não determinístico** que reconheça a **linguagem complementar** desta: ou seja a linguagem formada pelas palavras que contêm uma sequência par de `0`'s imediatamente à esquerda de uma sequência ímpar de `1`'s. Um autómato não determinístico para esta linguagem é:



Comecemos por encontrar um autómato finito determinístico completo equivalente a este:

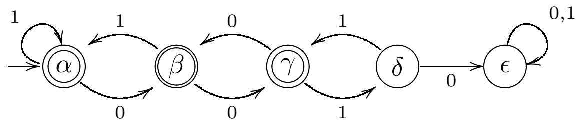
		0		1	
$\rightarrow \{a,b,c\}$	(A)	$\{b,d\}$	(B)	$\{b,c\}$	(C)
$\{b,d\}$	(B)	$\{b,e\}$	(D)	$\{b,c\}$	(C)
$\{b,c\}$	(C)	$\{b,d\}$	(B)	$\{b,c\}$	(C)
$\{b,e\}$	(D)	$\{b,f\}$	(E)	$\{b,c,g\}$	(F)
$\{b,f\}$	(E)	$\{b,e\}$	(D)	$\{b,c\}$	(C)
$\star\{b,c,g\}$	(F)	$\{b,d,i\}$	(G)	$\{b,c,h\}$	(H)
$\star\{b,d,i\}$	(G)	$\{b,e,i\}$	(I)	$\{b,c,i\}$	(J)
$\{b,c,h\}$	(H)	$\{b,d\}$	(B)	$\{b,c,g\}$	(F)
$\star\{b,e,i\}$	(I)	$\{b,f,i\}$	(K)	$\{b,c,g,i\}$	(L)
$\star\{b,c,i\}$	(J)	$\{b,d,i\}$	(G)	$\{b,c,i\}$	(J)
$\star\{b,f,i\}$	(K)	$\{b,e,i\}$	(I)	$\{b,c,i\}$	(J)
$\star\{b,c,g,i\}$	(L)	$\{b,d,i\}$	(G)	$\{b,c,h,i\}$	(M)
$\star\{b,c,h,i\}$	(M)	$\{b,d,i\}$	(G)	$\{b,c,g,i\}$	(M)

Como este autómato é completo, o autómato que reconhece a linguagem complementar (o nosso objectivo!) é:



Este autómato é equivalente a este outro, muito mais simples[1]:

[1]Que se obtém minimizando o anterior.



...o que mostra que talvez pensar um pouco antes de atacar um problema, compense...

3.15 (a) i) *bbab*, não.

ii) *aaaaba*, sim.

iii) *ababab*, não.

(b) $\{a\}^*\{a,b\}\{ba\}^*\{b\}\{a,b\}\{(\}\{ab\}\{ab\}^*\{a,b\})^*$

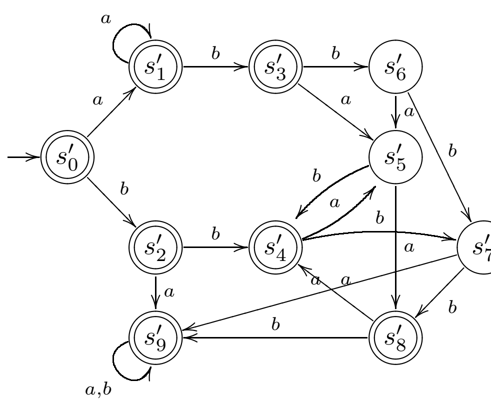
(c)

δ'	a	b
$\to \{s_0\}$	$\{s_0,s_1\}$	$\{s_1,s_2\}$
$\{s_0,s_1\}$	$\{s_0,s_1\}$	$\{s_1,s_2,s_3\}$
$\{s_1,s_2\}$	$\emptyset$	$\{s_3\}$
$\{s_1,s_2,s_3\}$	$\{s_1,s_4\}$	$\{s_3,s_4\}$
$\{s_3\}$	$\{s_1,s_4\}$	$\{s_4\}$
$\star\{s_1,s_4\}$	$\{s_1\}$	$\{s_3\}$
$\star\{s_3,s_4\}$	$\{s_1,s_4\}$	$\{s_4\}$
$\star\{s_4\}$	$\{s_1\}$	$\emptyset$
$\{s_1\}$	$\emptyset$	$\{s_3\}$

Ou seja, tomando $s'_0=\{s_0\}$, $s'_1=\{s_0,s_1\}$, $s'_2=\{s_1,s_2\}$, $s'_3=\{s_1,s_2,s_3\}$, $s'_4=\{s_3\}$, $s'_5=\{s_1,s_4\}$, $s'_6=\{s_3,s_4\}$, $s'_7=\{s_4\}$, $s'_8=\{s_1\}$, o autómato finito determinístico equivalente é

$$(\{s'_0,s'_1,s'_2,s'_3,s'_4,s'_5,s'_6,s'_7,s'_8\},\{a,b\},\delta',s'_0,\{s'_5,s'_6,s'_7\}).$$

Tornando este autómato completo (para poder encontrar o autómato que reconhece a linguagem complementar), e transformando os estados finais em não-finais e *vice versa*, vem:



3.16 (a) i) *abaa*, sim.

ii) *baaa*, sim.

iii) *ababba*, não.

(b) $(\{a\}^*\{b\}\{ab\}^*\{aa,\epsilon\})^*$

(c)

δ'	a	b
$\to\star\{s_0,s_1,s_2\}$	$\{s_0,s_1,s_2\}$	$\{s_3\}$
$\star\{s_3\}$	$\{s_1,s_2\}$	$\emptyset$
$\{s_1,s_2\}$	$\{s_0,s_1,s_2\}$	$\{s_3\}$

Ou seja, tomando $s'_0 = \{s_0, s_1, s_2\}$, $s'_1 = \{s_3\}$, $s'_2 = \{s_1, s_2\}$, o autómato determinístico equivalente é

$$(\{s'_0, s'_1, s'_2\}, \{a, b\}, \delta', s'_0, \{s'_0, s'_1\})$$

Tornando este autómato completo (para poder encontrar o autómato que reconhece a linguagem complementar), e transformando os estados finais em não-finais e *vice versa*, vem: