Relatório 1º projecto ASA 2022/2023

Grupo: AL030

Aluno(s): Fábio Mata (102802) e Nuno Gonçalves (103392)

Descrição do Problema e da Solução

Pretende-se ladrilhar uma dada área definida sobre um retângulo (com N linhas e M colunas), delimitada por um caminho em escada. Os ladrilhos a utilizar são quadrados de lados unitários, ou seja: 1x1, 2x2, etc. O objetivo é calcular o número de configurações distintas de quadrados que permitem ladrilhar a referida área.

Para tal, vamos removendo quadrados de dimensão 1x1, 2x2, …, até ao maior quadrado que cabe no último degrau da escada, de forma a dividir o problema original em subproblemas, e ir repetindo este algoritmo até chegar ao caso base (não restarem quadrados). Ao resolver o problema desta forma, garantimos que obtemos todas as combinações possíveis sem repetições, visto que cada subproblema consiste na remoção de um quadrado de tamanho diferente, o que vai resultar numa combinação única. De forma a otimizar esta solução decidimos guardar os valores já computados num HashMap.

Análise Teórica

Esta análise foi feita considerando o pior caso da solução: a escada ser um quadrado. Por exemplo, num quadrado 3x3, a configuração da escada ser 3 3 3.

Seja N o número de linhas, M o número de colunas e D = min(M, N) (dimensão máxima dos ladrilhos) :

- Leitura dos dados de entrada: simples leitura através de um ciclo que depende do número de linhas. Logo $\Theta(N)$;
- Computação de cada subproblema:
    - Transformação da escada numa string (para utilizar no HashMap): $\Theta(N)$;
    - Verificar se o subproblema já foi resolvido: $O(1)$ (em média);
    - Determinação da linha em que se aplica o algoritmo: $O(N)$;
    - Verificar se chegámos ao caso base: $O(1)$;
    - Criação de cópias da escada para cada subproblema do atual e remoção do quadrado associado:
        - Número de cópias: $O(D)$;
        - Cópia da escada: $\Theta(N)$;
        - Remoção do quadrado: $O(D)$;
        - Final: $O(D \times (N + D)) \in O(N^2)$, uma vez que $N \geq D$;
    - Chamadas recursivas para resolver cada subproblema gerado:
        - Número de chamadas: $O(D)$;
        - Escadas dos novos subproblemas: escada atual sem o quadrado associado;
    - Soma dos resultados dos seus subproblemas: $O(1)$;
    - Guardar o resultado no HashMap: $O(1)$ (em média);
- Apresentação do resultado: $O(1)$

Relatório 1º projecto ASA 2022/2023

Grupo: AL030

Aluno(s): Fábio Mata (102802) e Nuno Gonçalves (103392)

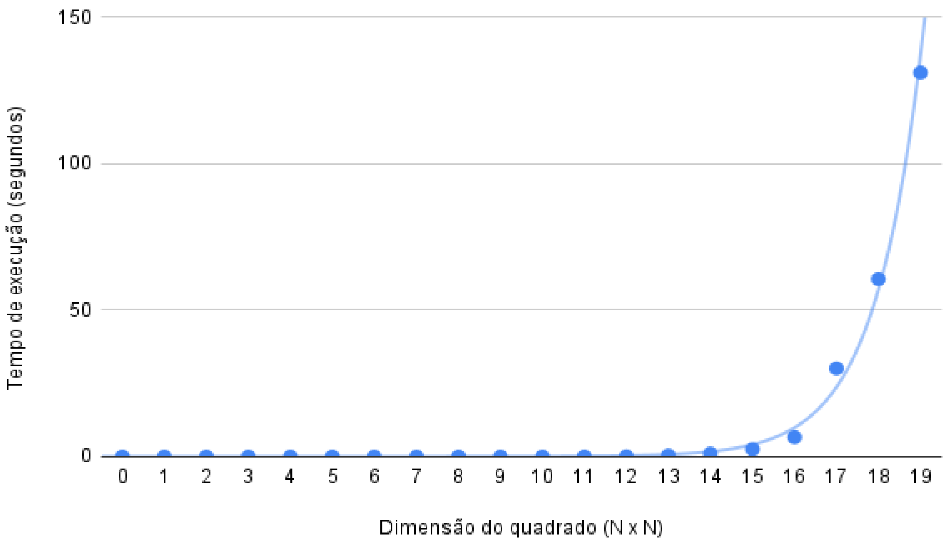
Uma vez que o número de chamadas feitas em cada subproblema é variável, assim como o tamanho da escada, não conseguimos aplicar nenhum teorema/método de análise assimptótica lecionado nas aulas.

Sendo que o pior caso se trata de um quadrado NxN, o número de escadas que se podem formar no mesmo é $\binom{2N}{N} \sim \frac{2^{2N}}{\sqrt{N\pi}}$, o que constitui um majorante para o número total de chamadas feitas. Como a complexidade da computação de cada subproblema $\in O(N^2)$, concluímos que a complexidade geral da solução $\in O(2^{2N})$.

Complexidade global da solução (simplificada) : $O(2^N)$.

Avaliação Experimental dos Resultados

Utilizámos o gerador de escadas válidas fornecido para obter casos de teste e assim cronometrar o tempo de execução da nossa solução. Gerámos quadrados com dimensões entre 0 e 19 (20 instâncias NxN). Os resultados obtidos estão descritos no gráfico abaixo:



Quando a dimensão do quadrado é inferior a 12, conseguimos aproximar os tempos de execução através de uma reta de regressão linear, o que é expectável, devido ao número de combinações não tomar ordens de grandeza muito elevadas. No entanto, com o incremento da dimensão, o número de combinações aumenta exponencialmente.

Este resultado está de acordo com o que foi previsto teoricamente, uma vez que o custo do número de chamadas recursivas domina o da computação de cada subproblema, resultando assim num comportamento exponencial.