



Notas-para-o-estudo-de-meca nica-de-fluidos

Mecânica dos Fluidos (Universidade do Porto)

Departamento de Engenharia Química da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

NOTAS PARA O ESTUDO DA MECÂNICA DOS FLUIDOS

João Moreira de Campos



Universidade do Porto

Faculdade de Engenharia

FEUP

ÍNDICE

7	1. Introdução e conceito de viscosidade
7	1.1 Introdução
7	1.1.1 O que são fluidos?
9	1.1.2 Os Fluidos, a Mecânica dos Fluidos e a Engenharia Química
10	1.1.3 Um apanhado da história da Mecânica de Fluidos
12	1.2 Fluidos viscosos
12	1.2.1 Forças que actuam no seio de um fluido
13	1.2.2 Conceito de viscosidade - lei de Newton para um fluido;
16	1.2.3 Fluidos Newtonianos - viscosidade de fluidos comuns
19	1.2.4 Variação da viscosidade com a temperatura e pressão
20	1.2.5 Fluidos não-Newtonianos
25	1.3 Exercícios de aplicação propostos
29	2. Hidrostática
29	2.1 Pressão num ponto no seio de um fluido
30	2.2 Equação Fundamental da Hidrostática
33	2.3 Manómetros diferenciais
35	2.4 Forças em superfícies submersas
36	2.4.1 Superfícies planas verticais
38	2.4.2 Superfícies planas inclinadas
43	2.4.3 Superfícies curvas
50	2.5 Equilíbrio relativo
56	2.6 Exercícios de aplicação propostos
67	3. Cinemática do escoamento de fluidos
67	3.1 Descrição Eulereana e Lagrangeana de um escoamento
68	3.2 Campo de velocidade
68	3.3 Campo de aceleração
70	3.4 Visualização do campo de escoamento
70	3.4.1 Linhas de corrente, trajectórias, linhas de rasto e linhas do tempo
74	3.5 Vectores velocidade e aceleração ao longo de uma linha de corrente
76	3.6 Exemplos propostos de aplicação
77	4 Equação de Bernoulli
77	4.1 Introdução
77	4.2 Equação de Bernoulli ao longo de uma linha de corrente

80	4.3 2ª Lei de Newton na direcção normal a uma linha de corrente
82	4.4 Aplicações da equação de Bernoulli
82	4.4.1 Introdução
83	4.4.2. Jactos Livres
87	4.4.3. Medidores de caudal
87	4.4.3.1 Venturi
88	4.4.3.2 Medidor de orifício
89	4.4.3.3 Descarregadores
92	4.4.4. Medidores de velocidade
92	4.4.4.1. Tubo de Pitot
99	5 Análise Integral em Volumes de Controlo Finitos
99	5.1 Análise diferencial, integral e dimensional
101	5.2 Teorema do Transporte de Reynolds
101	5.2.1 Dedução do teorema do transporte de Reynolds
104	5.2.2 Teorema do transporte de Reynolds generalizado
106	5.3 Conservação de Massa- Equação da Continuidade
106	5.3.1 Dedução da equação da continuidade
109	5.3.2 Carga e descarga de reservatórios
117	5.3.3. Exercícios propostos de aplicação
122	5.4 Equação da Energia- 1ª lei da Termodinâmica
122	5.4.1 Dedução da equação da energia
124	5.4.2 Casos particulares da equação da energia
126	5.4.3 Aplicação da equação da energia a algumas máquinas simples
127	5.4.4 Comparação entre a equação da energia e a equação de Bernoulli
130	5.4.5 Aplicação da equação da energia a escoamentos não-uniformes
131	5.4.6 Exercícios propostos de aplicação
133	5.5 Equação da Quantidade de Movimento
133	5.5.1 Dedução da equação da quantidade de movimento
136	5.5.2 Aplicações da equação da quantidade de movimento
136	5.5.2.1 Força de atrito na parede de tubos
137	5.5.2.2 Força exercida num cotovelo
139	5.5.2.3 Força exercida por um líquido em escoamento numa comporta
140	5.5.2.4 Força exercida por um jacto sobre uma superfície
142	5.5.2.5 Energia degradada numa expansão súbita

143	5.5.2.6 Energia degradada numa contracção súbita
144	5.5.2.7 Exemplos de aplicação diversos
148	5.5.3 Exercícios propostos de aplicação
155	6 Análise dimensional, semelhança e modelos
155	6.1 Introdução
157	6.2 Análise Dimensional
157	6.2.1 Teorema de Π Buckingham
159	6.2.2 Aplicação do teorema de Π Buckingham
159	6.2.2.1 Escoamento em tubagens
162	6.2.2.2 Escoamento em torno de objectos imersos
164	6.2.3 Algumas notas sobre a aplicação do Teorema de Π Buckingham
165	6.3 Grupos adimensionais na Mecânica de Fluidos
166	6.4 Correlação de dados experimentais
168	6.5 Teoria dos modelos
168	6.5.1 Semelhança cinemática, dinâmica e geométrica
170	6.5.2 Aplicação da teoria dos modelos
170	6.5.2.1 Escoamento em tubagens
171	6.5.2.2 Escoamento em torno de objectos
173	6.5.2.2.1 Força de arrasto e velocidade terminal
175	6.5.2.3 Escoamentos com superfície livre
176	6.6 Exercícios de aplicação propostos
181	7 Escoamentos Laminar e Turbulento
181	7.1 Introdução
182	7.2 Escoamento Laminar
182	7.2.1 Equação de Poiseuille
192	7.2.2- Escoamento laminar entre dois tubos concêntricos
194	7.2.3 Escoamento laminar numa coluna de parede molhada
196	7.2.4 Escoamento laminar numa coluna de parede molhada inclinada
197	7.3 Escoamento turbulento
197	7.3.1 Descrição do escoamento turbulento
200	7.3.2 Perfil de velocidade em escoamento turbulento
201	7.4 Exercícios propostos de aplicação
205	8 Escoamento em tubagens
205	8.1 Perdas de carga em tubagens- Gráfico de Moody
207	8.2 Características das tubagens

209	8.3 Perdas de carga localizadas em tubagens
213	8.4 Perdas de carga em tubagens não circulares
213	8.4.1 Exemplos
214	8.5 Exercícios resolvidos sobre perda de carga em tubagens
218	8.6 Perda de carga em tubagens múltiplas
222	8.7 Medidores de caudal
223	8.8 Exercícios propostos de aplicação
227	9 Camada limite e forças sobre objectos submersos
227	9.1 Introdução
227	9.2 Camada limite laminar numa placa plana imersa num fluido
227	9.2.1 Conceito de camada limite
229	9.2.2 Espessura da camada limite numa placa plana- solução de Blasius
231	9.3 Forças de arrasto e de sustentação sobre um objecto imerso
231	9.3.1 Introdução
232	9.3.2 Forças de arrasto e sustentação
233	9.3.3 Coeficiente de arrasto em função do número de Reynolds
235	9.4 Força de arrasto e velocidade terminal
237	9.5 Valores típicos do coeficiente de arrasto para sistemas a duas e três dimensões

1. INTRODUÇÃO E CONCEITO DE VISCOSIDADE

1.1 Introdução

1.1.1 O que são fluidos?

As imagens e sensações mais fortes são as que perduram na nossa memória. Como tal, não há nada melhor do que recorrer a uma imagem forte para compreender a importância dos fluidos. Com certeza que já assistiram a imagens de pessoas em greve da fome. Imagens chocantes em que se assiste a um definhamento lento do ser humano. Contudo, porque é que não fazem, em sinal de protesto, greve da sede ou greve da respiração? A resposta é evidente, os objectivos pretendidos não seriam atingidos, uma pessoa morre num período de 3 a 5 minutos se fizer greve da respiração, e entre 8 e 10 dias se fizer greve da sede. O ar e a água são fluidos, os mais importantes, já que são indispensáveis à vida de qualquer ser, animal ou vegetal. Contudo não são os únicos, no caso de gases, o dióxido de carbono, o hélio, o hidrogénio têm propriedades muito semelhantes às do ar e no caso de líquidos, o mercúrio, o sangue, o álcool, o petróleo, comportam-se de alguma forma semelhante à água.

A maioria destes fluidos tem uma presença contínua no dia a dia dos seres vivos. Imaginemos o quotidiano de um ser humano, que pode ser o de um qualquer vizinho nosso, e interroguemo-nos sobre muitas das suas acções diárias. Acorda de manhã com sono e muitas vezes sem se lembrar que acordar é estar vivo. Mas estar vivo não é ter todas as funções vitais a funcionar? Quais são as funções vitais? A respiração em que o ar e o dióxido de carbono têm um papel importante, o sistema circulatório onde o sangue desempenha um papel transportador de gases e nutrientes, o sistema digestivo onde a água e o ácido clorídrico têm uma actividade essencial, e as funções auxiliares, como a função de excreção do suor e a função renal, onde a água e o ácido úrico são de importância vital. Mesmo sem pensar no complexo sistema do corpo humano, onde os fluidos desempenham uma actividade enorme, o nosso vizinho resolve ir tomar banho para acordar. Tira o pijama, que nesse dia era 75% sintético, e liga a torneira da água. Pijama sintético? Mas donde vêm as fibras? Será que vêm das ramas de petróleo? E a água para o banho? E o gás para aquecer a água? Se não fossem fluidos poderiam desempenhar aquelas tarefas? Como terá a água atingido o 15º andar onde o nosso vizinho habita?

Depois de tomar banho, veste-se, desta vez todas as suas roupas são 100% algodão, e resolve tomar um copo de leite reconfortante e um iogurte. Leite e iogurte, têm propriedades tão diferentes. Serão fluidos? Como terão sido fabricados? Por quantos processos de transformação terão passado? Sem mais demoras, vai lavar os dentes. Água, pasta de dentes? Quais as semelhanças, quais as diferenças? Serão fluidos? Está atrasado, corre para o carro, olha para o mostrador e vê se o carro está em ordem. Água, óleo, gasolina? O tubo de escape por onde saem os gases de exaustão estará em condições? No dia anterior fazia imenso barulho. Arranca, chove, o vento é forte, e por viver ao pé do mar sente um leve cheiro a maresia. Quem transporta o cheiro? Se estivesse vento de Nordeste seria bem pior, sentiria o cheiro da fábrica de celulose que dista 10 km de sua casa. Sente dificuldade em guiar nestas condições, embora o seu carro seja potente e as suas linhas aerodinâmicas permitam uma condução segura em condições adversas. No caminho assiste a um desastre, um carro entrou num lençol de água, perdeu as condições de aderência e deu um toque. O que é que a água tem a ver com a aderência? E com os pneus? Chega ao trabalho, liga o sistema de ar condicionado e pede que lhe tragam uma água tônica para ir bebendo durante a manhã. Porque será que a água tônica liberta tantas bolhas de gás? Passa uma vista de olhos pelo jornal. Notícias aterradoras, um vulcão entrou em erupção? Vulcão, a lava será um fluido? Um ciclone, devastou, mais um vez, a costa da Califórnia. Qual seria a velocidade dos ventos? O que terá dado origem ao ciclone? Uma ponte nova não resistiu à força das águas de um rio e ameaça ruir. Quem projecta uma ponte não deverá saber calcular a força da água dos rios? Um avião, de pequeno porte, teve de aterrar de emergência devido a um problema relacionado com elevadas temperaturas numa asa. Quem projecta aviões não deve saber evitar estes problemas? O resto do dia do nosso vizinho foi passado a trabalhar, a comer e a dormir e num grande número de situações voltou a contactar com diferentes fluidos e várias interrogações poderiam novamente ser levantadas.

Como nota final, a palavra fluido significa a substância que se pode deslocar em liberdade completa (fluido ideal) ou em liberdade restrita (fluido real). O ramo da Mecânica que estuda as leis do movimento e a tendência ao escoamento dos fluidos é a Mecânica de Fluidos. O ramo da Mecânica de Fluidos que estuda em particular os líquidos (leia-se água) é a Hidromecânica e o que estuda em particular os gases (leia-se ar) a Aeromecânica.

1.1.2 Os Fluidos, a Mecânica dos Fluidos e a Engenharia Química

Muitas das respostas às perguntas do nosso vizinho podem ser dadas por um Engenheiro Químico, outras poderão ser mais apropriadamente dadas por Engenheiros Mecânicos, Cívicos, de Ambiente, ou Aeronáuticos.

Na Engenharia Química, ar e água estão presentes na maioria dos processos, e muitos outros fluidos são utilizados para os mais diversos fins. Um Engenheiro Químico lida, na maioria dos casos, com o que se designa por escoamentos internos, i.e., escoamentos confinados por uma superfície, quase sempre sólida, que foi projectada e construída para promover uma dada operação. Como exemplo, o escoamento de fluidos nas inúmeras peças de equipamento que vemos quando passamos ao lado de um grande número de Unidades Fabris que processam produtos químicos, sendo a Petrogal em Leça da Palmeira um exemplo elucidativo. São exemplos deste tipo de equipamentos, os permutadores de calor, as colunas de destilação, os reactores químicos, os tanques de armazenagem e em particular as tubagens que ligam entre si estas peças.

E o que é que a Mecânica de Fluidos permite ao Engenheiro Químico saber sobre o funcionamento destas peças de equipamento? Permite responder a perguntas tais como:

- Qual a velocidade e a pressão do fluido num dado ponto, ou secção recta, do escoamento?
- Que forças o fluido exerce sobre as paredes que confinam o escoamento?
- Como é que a forma e as dimensões do equipamento influenciam o escoamento?
- De que forma a pressão e a velocidade do escoamento podem ser medidas?
- Que potência é necessária para bombear um fluido em escoamento?
- Como é que se pode extrapolar resultados de estudos em modelos para equipamentos à escala real?

Muitas destas questões não servem só para caracterizar o escoamento, são essenciais para estudar outros processos, nomeadamente aqueles que envolvem transferência de calor e/ou transferência de massa. Um café arrefece mais rapidamente se soprarmos, aumentando a velocidade de renovação do ar, do que se o deixarmos calmamente

pousado sobre a mesa do café. Uma esfera de naftalina sublima mais rapidamente quando colocada em cima de um armário, sujeita à deslocção e renovação do ar de uma sala, do que quando fechada numa gaveta sem ar em circulação. Estes exemplos, embora façam parte do dia a dia de cada um, são semelhantes a muitos outros que se passam em vários processos da Engenharia Química, e mostram a necessidade do conhecimento da Mecânica de Fluidos.

Antes de iniciar o estudo da Mecânica dos Fluidos, vamos conhecer alguma coisa sobre a sua história, já que ela está intimamente ligada à História Universal.

1.1.3 Um apanhado da história da Mecânica de Fluidos

O que mais impressiona quando nos debruçamos sobre a história da Mecânica de Fluidos é o enorme número de conceitos que hoje aplicamos com grande sucesso e que foram descobertos há centenas, e alguns há milhares de anos. Quem imagina ao tomar banho numa praia cheia de motas de água, barcos de recreio, que tudo começou duzentos anos antes de Cristo com Arquimedes a descobrir o princípio da impulsão? O século XX foi sem dúvida o século do desenvolvimento tecnológico, mas a grande e complicada tarefa de interpretação dos fenómenos físicos, i.e. a construção dos alicerces do grande edifício, foi feita ao longo de muitos séculos, utilizando equipamento muito simples e uma grande dose de génio. Desafio os alunos no fim do semestre a lerem novamente a cronologia da Mecânica de Fluidos e a situarem no tempo tudo aquilo que aprenderam, ficarão certamente impressionados.

Algumas descobertas importantes para o progresso da Mecânica de Fluidos e respectivas datas

A Mecânica de Fluidos, tal como a maioria das Ciências Exactas nasceu e floresceu quando o Homem passou a acreditar nas suas possibilidades e a pôr em prática o seu espírito crítico, observando, experimentando e teorizando. Nesta breve cronologia está bem patente o desenvolvimento da Mecânica de Fluidos a partir do chamado período do conhecimento, o período Renascentista.

287-212 A.C. Arquimedes estabeleceu os princípios elementares da impulsão.

- 1452-1519 Leonardo da Vinci estabeleceu os princípios elementares da continuidade de massa.
- 1564-1642 Galileu Galilei impulsionou a Mecânica de Fluidos experimental.
- 1608-1647 Torricelli mediu a pressão atmosférica através da altura barométrica.
- 1623-1662 Pascal clarificou princípios barométricos e de transmissão de pressão.
- 1642-1727 Isaac Newton estudou a resistência ao escoamento de fluidos - regimes inercial e viscoso.
- 1695-1771 Pitot construiu o primeiro equipamento para medir o perfil de velocidade num escoamento.
- 1700-1782 Bernoulli adaptou princípios termodinâmicos para explicar a carga cinética de um fluido em escoamento.
- 1707-1783 Euler formulou a equação de Bernoulli, bem como equações básicas de escoamento de fluidos. Introduziu os conceitos de cavitação e de centrifugação.
- 1746-1822 Venturi realizou testes de escoamentos em contracções e expansões.
- 1785-1836 Louis Navier estabeleceu as equações microscópicas, ao nível de forças intermoleculares, de escoamento de fluidos.
- 1789-1857 Cauchy estudou a propagação de ondas de pressão em fluidos.
- 1797-1884 Hagen estudou a resistência ao escoamento em regime transitório (laminar/turbulento).
- 1799-1869 Poiseuille estudou a resistência ao escoamento em tubos capilares - regime laminar.
- 1810-1879 Froude desenvolveu estudos de similaridade entre modelos e protótipos.
- 1819-1903 Stokes derivou analiticamente várias equações de escoamento. Estudou o escoamento de líquidos em torno de esferas.
- 1838-1916 Mach iniciou estudos em escoamentos supersónicos.
- 1842-1912 Osborne Reynolds descreveu experiências em vários campos: cavitação, similaridade em modelos e escoamento em tubos.
- 1867-1940 Buckingham desenvolveu a análise dimensional.
- 1875-1953 Prandtl introduziu o conceito de camada limite.
- 1880-1953 Moody propôs um método para correlacionar a resistência ao escoamento em tubos.

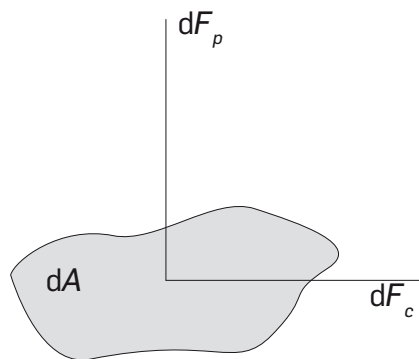
- 1881-1963 Von Karman deu contribuições importantes nos domínios da turbulência, da camada limite e da separação de um escoamento.
- 1883-1970 Blasius correlacionou a resistência ao escoamento em tubos com o número de Reynolds.

1.2 Fluidos viscosos

1.2.1 Forças que actuam no seio de um fluido

No seio de um fluido actuam forças à distância e por contacto. A força da gravidade é um exemplo de uma força que actua à distância, enquanto as forças tangenciais e normais que se desenvolvem no interior do fluido são exemplos de forças de contacto. As forças tangenciais são designadas por forças de corte (F_c) e as forças normais por forças de pressão (F_p). As forças de contacto são forças distribuídas ao longo da superfície onde actuam, na maioria das vezes de uma forma não-uniforme. Por serem distribuídas, estas forças são normalmente referenciadas à unidade de área, passando a designar-se por tensões.

Tomando uma área infinitesimal δA onde actuam forças de contacto, define-se:



$$p = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F_p}{\delta A} = \frac{dF_p}{dA} \quad (1.1)$$

$$\tau = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F_c}{\delta A} = \frac{dF_c}{dA} \quad (1.2)$$

A tensão normal p designa-se por pressão e a tangencial τ por tensão de corte. Se a distribuição das tensões ao longo de uma superfície for conhecida, as respectivas forças podem ser determinadas por integração.

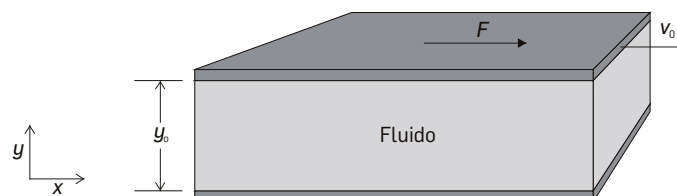
$$F_p = \int_A p(A) dA \quad (1.3)$$

$$F_c = \int_A \tau(A) dA \quad (1.4)$$

1.2.2 Conceito de viscosidade - lei de Newton para um fluido

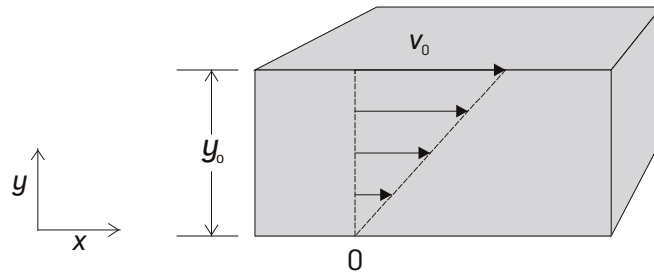
O conceito de viscosidade de um fluido está intimamente ligado à resistência que um fluido opõe ao seu deslocamento. Para introduzir este conceito, considerem-se duas placas planas paralelas de comprimento infinito e separadas por uma pequena distância y_0 . Num dado instante, $t = 0$, o espaço entre as placas está cheio com um fluido em repouso. Para deslocar, segundo a direcção x , a placa superior com uma velocidade v_0 é necessário aplicar uma força exterior F de forma a “vencer” a resistência ao movimento oferecida pelo fluido. A intensidade desta força exterior depende da área da placa, do tipo de fluido e da velocidade v_0 que se pretende imprimir à placa. Pode-se eliminar o efeito da área, tomando a força que se exerce por unidade de área.

Pelo princípio da acção-reacção, esta força exterior é igual, intensidade, direcção e sentido, à força que a placa exerce sobre o fluido adjacente. A força que o fluido adjacente exerce sobre a placa tem igual direcção e intensidade mas sentido contrário.



Demonstra-se que para valores reduzidos de v_0 e de y_0 , o perfil de velocidade que se desenvolve no fluido é linear e pode ser expresso analiticamente por:

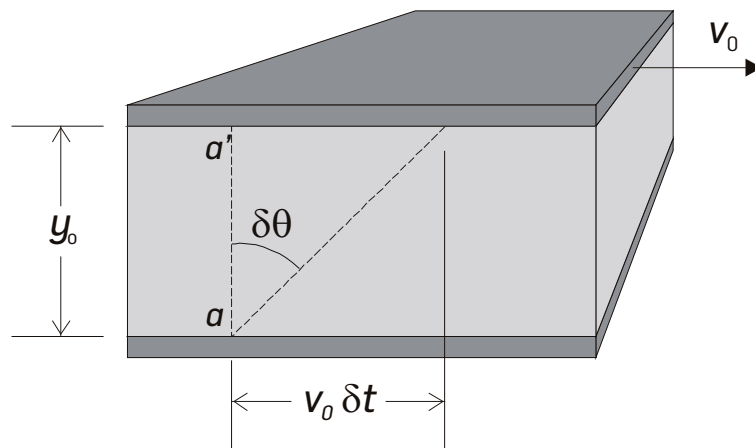
$$v_x(y) = \frac{v_0}{y_0} y \quad (1.5)$$



Sendo o perfil linear, a variação de v_x ao longo de y é constante :

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{v_0}{y_0} \quad (1.6)$$

Conhecido o perfil, pretende-se saber onde estarão situados os elementos de fluido, inicialmente ($t = 0$) na linha aa' , δt segundos após o início do movimento da placa. Pela condição de não-deslizamento, o elemento de fluido adjacente à placa em movimento percorre durante o intervalo de tempo δt uma distância $v_0 \delta t$, enquanto o elemento de fluido adjacente à placa parada se mantém imóvel.



Nos fluidos mais comuns, água e ar, observa-se uma relação de proporcionalidade entre a tensão de corte τ no interior do fluido e a resultante taxa de deformação do fluido expressa por $d\theta/\delta t$:

$$\tau \propto \frac{\delta\theta}{\delta t} \quad (1.7)$$

Por considerações geométricas e admitindo que o valor da tangente de um ângulo infinitesimal é bem aproximado pelo valor do próprio ângulo, obtém-se o valor da taxa de deformação:

$$\operatorname{tg} \delta\theta \cong \delta\theta = \frac{v_0}{y_0} \delta t \rightarrow \frac{\delta\theta}{\delta t} = \frac{v_0}{y_0} \quad (1.8)$$

Combinando as equações (1.6) - (1.8) resulta:

$$\tau \propto \frac{dv_x}{dy} = \mu \frac{dv_x}{dy} \quad (1.9)$$

A constante de proporcionalidade, μ , designa-se por coeficiente de viscosidade ou simplesmente por viscosidade. A variação de v_x ao longo de y é constante, perfil de velocidade linear, pelo que a tensão de corte no interior do fluido ao longo das diversas camadas é igualmente constante.

Há alguma semelhança entre a tensão de corte num fluido e a força de atrito quando há movimento relativo entre sólidos. Um exemplo ilustrativo é o que acontece a um baralho de cartas quando se pretende deslocar horizontalmente a primeira carta:

- se a superfície das cartas for muito polida, o atrito entre as cartas é muito reduzido. Quando se desloca a primeira carta, as que estão imediatamente a seguir não sofrem qualquer deslocamento. Considere que o deslocamento da primeira carta é l_1 quando se aplica a força F durante o tempo t ;
- se a superfície das cartas for ligeiramente rugosa, o atrito entre as cartas aumenta. Quando se desloca a primeira carta, as que estão imediatamente a seguir deslocam-se, observando-se uma grande diferença entre o espaço percorrido por cada uma. Se se aplicar a força F durante o tempo t , o deslocamento da primeira carta é $l_2 < l_1$;
- se a superfície das cartas for muito rugosa, a maioria das cartas desloca-se, mas não se observa uma grande diferença entre o espaço percorrido por cada uma. Se se aplicar a força F durante o intervalo de tempo t , o deslocamento da primeira carta é $l_3 < l_2 < l_1$.

Que conclusões se podem tirar comparando este exemplo com o do fluido posto em movimento pela força aplicada à placa?

- O atrito (a viscosidade) é responsável pelo movimento das cartas que se encontram por baixo da primeira carta (semelhante

ao movimento das camadas de fluido que se encontram sub-adjacentes à que está em contacto com a placa).

- Aplicando a mesma força, quanto maior é o atrito (viscosidade) menor é a velocidade de deslocamento da primeira carta (do fluido adjacente à placa).
- Um atrito muito elevado (elevada viscosidade) faz com que as cartas se desloquem lentamente, quase a par (que o fluido se desloque quase em bloco). A variação de velocidade das cartas na direcção normal ao baralho é pequena (a variação de velocidade no fluido na direcção normal ao escoamento é igualmente pequena).

A grande diferença é que nos sólidos o atrito é resultado da forma, tipo de material e acabamento das superfícies em contacto, enquanto que nos fluidos a resistência ao escoamento processa-se ao nível molecular e está intimamente ligada ao tamanho, e energia das moléculas (interna e intra-molecular).

1.2.3 Fluidos Newtonianos - viscosidade de fluidos comuns

Os fluidos em que se observa uma proporcionalidade directa entre a variação de velocidade (dv_x/dy) e a tensão de corte (τ), designam-se por fluidos Newtonianos. A constante de proporcionalidade é a viscosidade, também chamada de viscosidade dinâmica.

A maioria dos fluidos tem características Newtonianas, sendo os mais comuns: a água, o benzeno, o álcool etílico, o tetracloreto de carbono, o hexano, etc; as soluções aquosas de sais inorgânicos e de açúcares; o hidrogénio, o azoto, o ar, etc.

A tabela seguinte mostra valores da viscosidade dinâmica de alguns fluidos Newtonianos a 1 atm e 20 °C, sendo de realçar a grande diferença entre a viscosidade dos líquidos e a dos gases, e no caso dos líquidos a elevada gama de valores. A água é 1500 vezes menos viscosa que a glicerina pura.

A unidade da viscosidade dinâmica no sistema Internacional é o Pa.s [$\text{kg}/(\text{m.s})$], e no sistema c.g.s. o Poise [$\text{g}/(\text{cm.s})$]. Facilmente se conclui que 1 Poise = 0,1 Pa.s.

Frequentemente, a viscosidade dinâmica aparece dividida pela massa volúmica e designa-se esta razão por viscosidade cinemática:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.10)$$

No sistema c.g.s. a unidade da viscosidade cinemática é o Stoke (St), equivalendo 1 St a $10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$.

Tabela 1- Viscosidade de fluidos Newtonianos a 1atm e 20°C

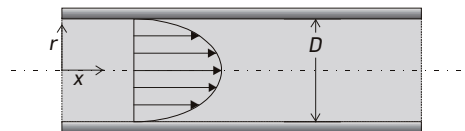
Fluido	μ (Pa.s)	$\frac{\mu}{\mu(\text{H}_2)}$
Hidrogénio	$8,9 \times 10^{-6}$	1
Ar	$1,8 \times 10^{-5}$	2,1
Gasolina	$2,9 \times 10^{-4}$	33
Água	$1,0 \times 10^{-3}$	114
Álcool	$1,2 \times 10^{-3}$	135
Mercúrio	$1,5 \times 10^{-3}$	170
Azeite	0,084	9440
Glicerina	1,5	168000

Exemplo 1.1

Água está em escoamento no interior de um tubo circular sendo o perfil de velocidade numa dada secção recta do tubo dado analiticamente por:

$$v_x(r) = \frac{\beta}{4\mu} (R^2 - r^2)$$

em que β é uma constante, r a distância radial medida a partir do eixo, R o raio interno do tubo, e $v_x(r)$ a velocidade do fluido ao longo da direcção x na posição r .



Calcule a tensão de corte na parede do tubo e no interior do fluido na posição $r=R/2$. Se o perfil persistir numa distância de tubo L , calcule a força exercida pela água sobre o tubo ao longo deste comprimento.

Solução

Por se tratar de um fluido Newtoniano, a intensidade da tensão de corte na parede é dado pela lei de Newton aplicada a fluidos:

$$\tau_{r=R} = \left| \mu \left(\frac{dv_x(r)}{dr} \right)_{r=R} \right|$$

A variação da velocidade com r junto à parede pode ser conhecida a partir do perfil de velocidade:

$$\frac{dv_x(r)}{dr} = -2r \frac{\beta}{4\mu} \rightarrow \left(\frac{dv_x(r)}{dr} \right)_{r=R} = -2R \frac{\beta}{4\mu}$$

A tensão de corte na parede calcula-se combinando as duas equações anteriores:

$$\tau_{r=R} = 2R\mu \frac{\beta}{4\mu} = \frac{R\beta}{2}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, agora para $r=R/2$:

$$\tau_{r=R/2} = \left| \mu \left(\frac{dv_x}{dr} \right)_{r=R/2} \right|$$

$$\frac{dv_x}{dr} = -2r \frac{\beta}{4\mu} \rightarrow \left(\frac{dv_x}{dr} \right)_{r=R/2} = -R \frac{\beta}{4\mu} \rightarrow \tau_{r=R/2} = \frac{R\beta}{4}$$

Pelo facto de o perfil não ser linear, a tensão de corte no interior do fluido varia ao longo de r , aumentando desde o eixo do tubo, onde o seu valor é nulo, até à parede, onde se observa o valor máximo. A tensão de corte exercida pelo fluido sobre a superfície interna do tubo, no sentido do escoamento, é uniforme ao longo de todo o comprimento L do tubo, pelo que a intensidade da força que o fluido exerce sobre a parede é dada por:

$$F = \tau_{r=R} A \rightarrow F = \left| \mu \left(\frac{dv_x(r)}{dr} \right)_{r=R} \right| 2\pi RL$$

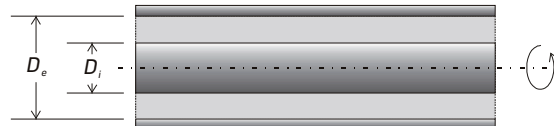
Substituindo, determina-se a chamada força de atrito sobre o tubo, F_f :

$$F_f = \pi R^2 \beta L$$

Exemplo 1.2

Um veio cilíndrico de raio R_i gira no interior de um tubo igualmente cilíndrico de raio R_e . O espaço entre tubos é preenchido por uma graxa de viscosidade μ . Determine a potência mecânica necessária para que o tubo interior gire a uma velocidade de rotação constante n (rpm). Suponha uma distribuição linear de velocidade na graxa. A potência a fornecer é dada pelo produto do momento da força de corte da graxa sobre o veio em rotação pela sua velocidade angular.

Dados: $R_i = 40$ mm; $R_e = 41$ mm; $\mu = 4 \times 10^{-3}$ Pa.s; $n = 1200$ rpm e $L = 150$ mm



Solução

Segundo o enunciado, a velocidade da graxa varia linearmente com r :

$$v(r) = v_{r=R_i} \frac{R_e - r}{R_e - R_i}$$

Recorrendo à definição de fluido Newtoniano, calcula-se a tensão de corte exercida pelo fluido no veio em rotação:

$$\tau_{r=R_i} = \left| \mu \left(\frac{dv_x}{dr} \right)_{r=R/2} \right| \rightarrow \tau_{r=R_i} = \mu \frac{v_{r=R_i}}{R_e - R_i}$$

De acordo com esta equação, a tensão de corte é uniforme sobre toda a superfície lateral do veio, não dependendo da coordenada axial x . As velocidades tangencial e angular estão relacionadas:

$$v_{r=R_i} = \omega R_i$$

Substituindo na equação anterior, obtém-se:

$$\tau_{r=R_i} = \mu \frac{\omega R_i}{R_e - R_i}$$

Se o veio gira a uma velocidade angular constante, a intensidade do momento aplicado por via mecânica, momento activo, tem de ser igual ao momento da força de corte aplicado pela graxa na superfície lateral, momento resistente. Contudo, o sentido destes momentos é contrário. O momento da força de corte na superfície lateral é dado pelo produto da intensidade da força de corte, uniforme ao longo da superfície lateral, pelo braço. A força de corte é tangente à superfície lateral em cada ponto, pelo que o braço, distância na perpendicular entre o vector força e o eixo do veio, coincide com o raio R_i . O braço é sempre o mesmo ao longo de toda a superfície lateral, pelo que:

$$M_{\text{f corte}} = R_i \tau_{r=R_i} 2\pi R_i L \rightarrow M_{\text{f corte}} = \frac{2\pi\mu\omega R_i^3 L}{(R_e - R_i)}$$

A potência a fornecer ao veio é dada pelo produto do momento pela velocidade angular ($\omega = 2\pi n/60$):

$$P = M_{\text{f corte}} \omega = \frac{2\pi^3 \mu n^2 R_i^3 L}{1800(R_e - R_i)}$$

1.2.4 Variação da viscosidade com a temperatura e pressão

A viscosidade dos gases e da maioria dos líquidos aumenta moderadamente com a pressão; a água é uma excepção já que diminui moderadamente.

A viscosidade dos gases aumenta com a temperatura. Duas expressões (entre muitas) que traduzem esta variação são a lei da potência e a lei de Sutherland:

$$\frac{\mu}{\mu_0} \approx \left(\frac{T}{T_0} \right)^n \quad (\text{Lei da potência}) \quad (1.11)$$

em que μ_0 representa a viscosidade conhecida à temperatura T_0 e n é função do tipo de gás;

$$\ln \frac{\mu}{\mu_0} \approx \frac{(T/T_0)^{3/2} (T_0 + S)}{T + S} \quad (\text{Lei de Sutherland}) \quad (1.12)$$

em que S é função do tipo de gás.

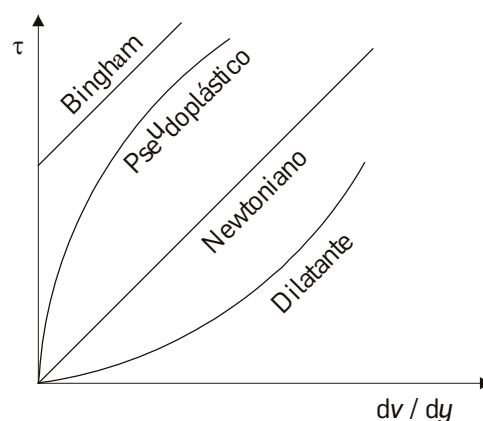
A viscosidade dos líquidos decresce com a temperatura de uma forma exponencial. Os resultados experimentais são bem ajustados por uma função do tipo:

$$\ln \frac{\mu}{\mu_0} \approx a + b \frac{T_0}{T} + \left(\frac{T_0}{T} \right)^2 \quad (1.13)$$

Estas expressões e muitas outras podem ser encontradas em vários livros sobre propriedades termodinâmicas de fluidos.

1.2.5 Fluidos não-Newtonianos

Há inúmeros fluidos em que não se observa uma proporcionalidade entre a tensão de corte e a variação da velocidade na direcção normal ao escoamento. Na figura estão representados as diversas funcionalidades que se observam na maioria dos fluidos que têm na sua estrutura moléculas maiores do que as da água ou que têm na sua composição uma elevada concentração de partículas sólidas em suspensão.

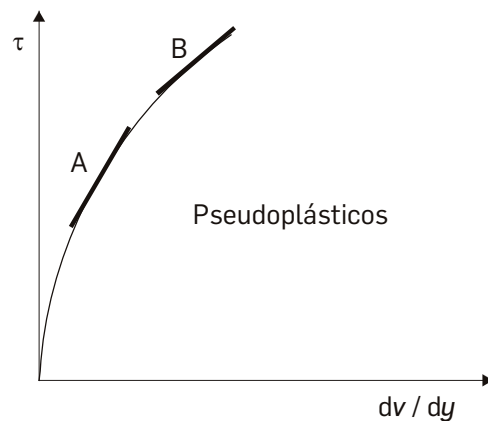


Fluidos Pseudoplásticos

Nos fluidos Pseudoplásticos ou reofluidificantes a razão $[\tau/(dv/dy)]$ diminui para valores crescentes da tensão de corte aplicada; o declive

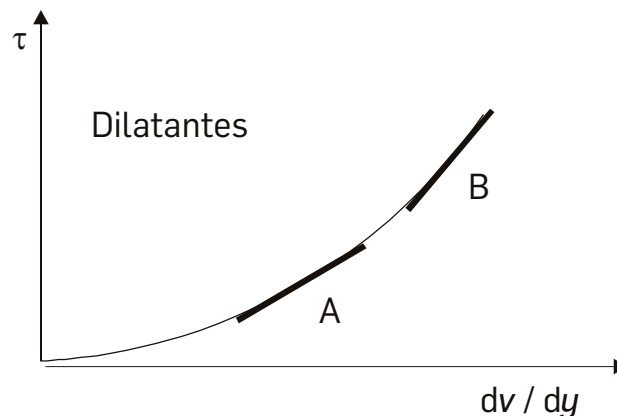
em cada ponto da curva representada na figura seguinte diminui à medida que o valor da tensão de corte aumenta.

São exemplos de fluidos Pseudoplásticos as lamas, pastas, sangue, soluções poliméricas, colas e óleos pesados. Os óleos pesados são um exemplo curioso, já que as características pseudoplásticas permitem que sejam usados quer como lubrificantes, quer como vedantes. Nos apoios de motores, onde as tensões de corte são elevadas, os óleos pesados são pouco viscosos permitindo a lubrificação, e nas juntas, onde as tensões de corte são reduzidas, são muito viscosos permitindo a vedação.



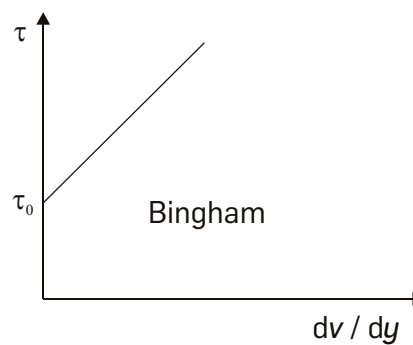
Fluidos Dilatantes

Nos fluidos Dilatantes a razão $[\tau/(dv/dy)]$ aumenta para valores crescentes da tensão de corte aplicada; o declive da curva representada na figura aumenta à medida que o valor da tensão de corte também aumenta. São exemplos de fluidos dilatantes ou espessantes as soluções aquosas de farinha.



Fluidos de Bingham

Estes fluidos apresentam elevada resistência (“infinita”) para baixas tensões de corte. São exemplos bem conhecidos a pasta de dentes e as geleias. A pasta de dentes só entra em escoamento quando se aplica uma tensão superior a τ_0 (tensão de cedência).



Fluidos Tixotrópicos e Reopéticos

São fluidos que quando sujeitos a uma tensão de corte, a variação de velocidade na direção normal ao escoamento varia com o tempo. Há dois tipos, os Tixotrópicos e os Reopéticos.

Os fluidos Tixotrópicos são aqueles em que a viscosidade diminui com o tempo. São exemplos as tintas. As tintas são muito viscosas quando se abre uma lata e se procede à sua homogeneização, agitando com o pincel, o que impede o assentamento dos pigmentos durante o período de armazenagem, mas são muito menos viscosas quando se inicia a sua aplicação. Os fluidos Reopéticos são aqueles em que a viscosidade aumenta com o tempo.

Os fluidos Viscoelásticos são caracterizados por voltarem ao seu estado inicial logo após cessar a tensão aplicada.

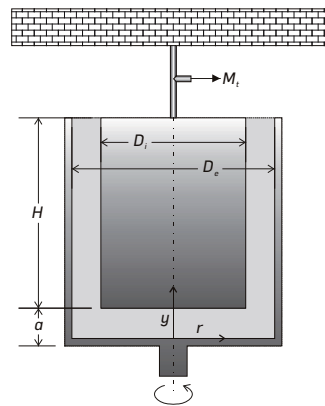
1.2.6 Viscosímetro de cilindros coaxiais

Exemplo 1.3

Um viscosímetro de cilindros coaxiais está representado na figura. O cilindro externo, de diâmetro D_e , está ligado a um eixo que lhe transmite uma velocidade de rotação, ω . O cilindro interno, de diâmetro D_i , está suspenso por um fio calibrado para

medir esforços de torção. O cilindro externo transmite movimento de rotação ao fluido viscoso e este por sua vez transmite movimento ao cilindro interno. O fio torce até que o momento da reacção do fio à torção equilibra o momento da força de corte exercida pelo fluido sobre o cilindro interno. Atingido este equilíbrio, o cilindro interno deixa de rodar. Acoplado ao fio, há um ponteiro que indica o momento de torção, M_t .

Determine a expressão que permite calcular a viscosidade de um fluido a ser testado, em função de M_t , D_i , D_e , H , a e da velocidade ω . Admita perfis lineares de velocidade no líquido.



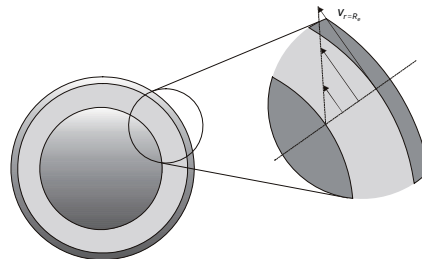
Solução

A intensidade do momento aplicado pelo fluido ao cilindro interno é igual à soma da intensidade dos momentos aplicados na superfície lateral e na base do cilindro. Ambos têm direcção segundo o eixo do cilindro e igual sentido, o mesmo sentido de rotação do cilindro exterior.

Intensidade do momento aplicado na superfície lateral pela força de corte

O perfil da velocidade tangencial no líquido em rotação é linear (sugerido no enunciado). Na figura seguinte está representada uma vista de topo que permite visualizar o perfil de velocidade. Analiticamente o perfil é dado por:

$$v(r) = v_{r=R_e} \frac{r - R_i}{R_e - R_i}$$



A tensão de corte na parede do cilindro interior é dada por:

$$\tau_{r=R_i} = \mu \left| \left(\frac{dv(r)}{dr} \right)_{r=R_i} \right| \rightarrow \tau_{r=R_i} = \mu \frac{v_{r=R_e}}{R_e - R_i}$$

A velocidade tangencial relaciona-se com a velocidade angular:

$$v_r = \omega r \rightarrow v_{r=R_e} = \omega R_e$$

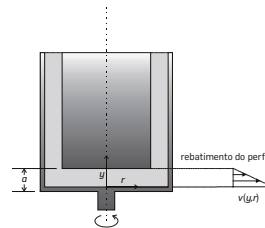
Substituindo na equação anterior obtém-se:

$$\tau_{r=R_i} = \mu \omega \frac{R_e}{R_e - R_i}$$

A intensidade do momento da força de corte relativamente ao eixo do cilindro é dada pelo produto da intensidade da força de corte, tangencial à superfície lateral do cilindro, pelo respectivo braço. O braço é a distância, na perpendicular, do vector força ao eixo do cilindro. Esta distância é igual ao raio do cilindro ao longo de toda a superfície lateral. A intensidade do momento aplicado pelo fluido na superfície lateral, $M_{\tilde{L}}$, é então dada por:

$$M_{\tilde{L}} = R_i F_L \rightarrow M_{\tilde{L}} = R_i \tau_{r=R_i} 2\pi R_i H \rightarrow M_{\tilde{L}} = \frac{2\pi\mu\omega R_e R_i^2 H}{(R_e - R_i)}$$

Intensidade do momento aplicado na base do cilindro pela força de corte



O perfil de velocidade no líquido em rotação é linear (sugerido no enunciado) ao longo da coordenada y representada na figura. Contudo, a velocidade tangencial do fluido além de variar com y varia igualmente com r . Analiticamente o perfil da velocidade tangencial é dado por:

$$v(r,y) = -v(r,0) \frac{y}{a} + v(r,0)$$

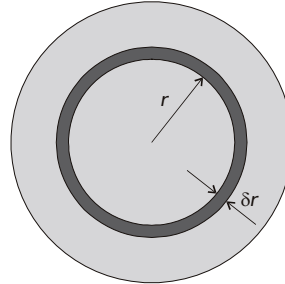
A tensão de corte na base do cilindro interior ($y=a$) é função de r :

$$\tau(r,a) = \left| \mu \left(\frac{dv(r,y)}{dy} \right)_{y=a} \right| \rightarrow \tau(r,a) = \mu \frac{v(r,0)}{a}$$

Mas $v(r,0) = \omega r$, resultando:

$$\tau(r,a) = \mu \omega \frac{r}{a}$$

Pelo facto da tensão de corte variar com r (força distribuída não uniforme) é necessário “encontrar” uma área infinitesimal onde, no limite, quando δr tende para 0, a tensão de corte tenda para um valor uniforme. A área da coroa infinitesimal representada na figura, cuja espessura é δr , satisfaz esta condição; quando δr tende para 0 a área tende para uma “linha” onde a tensão de corte é uniforme.



O valor desta área é dado por:

$$\delta A = [\pi(r + \delta r)^2 - \pi r^2] \rightarrow \delta A = 2\pi r \delta r$$

A intensidade do momento da força de corte, força tangencial, que se exerce nesta área infinitesimal é dada por:

$$\delta M_{F_B} = r \delta F_B = r \tau(r, a) 2\pi \delta r$$

Integrando ao longo do raio obtém-se:

$$M_{F_B} = \int_0^{R_i} r \mu \omega \frac{r}{a} 2\pi dr = \frac{\pi \mu \omega R_i^4}{2a}$$

Somando a intensidade dos dois momentos:

$$M_{F_L} + M_{F_B} = \frac{\pi \mu \omega R_i^4}{2a} + \frac{2\pi \mu \omega R_i^2 R_e H}{(R_e - R_i)}$$

A intensidade do momento da força de corte na superfície do cilindro é igual à intensidade do momento de torção do fio, M_t . Resolvendo em ordem à viscosidade, obtém-se:

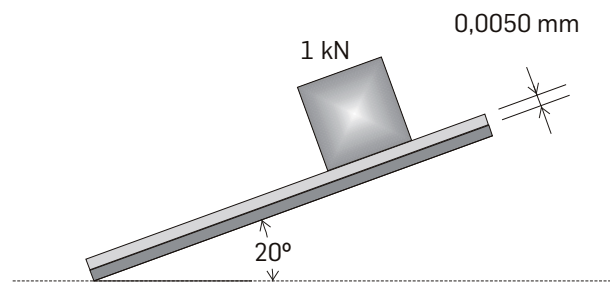
$$\mu = \frac{M_t}{2\pi \omega R_i^2 \left(\frac{R_e H}{R_e - R_i} + \frac{R_i^2}{4a} \right)}$$

1.3 Exercícios de aplicação propostos

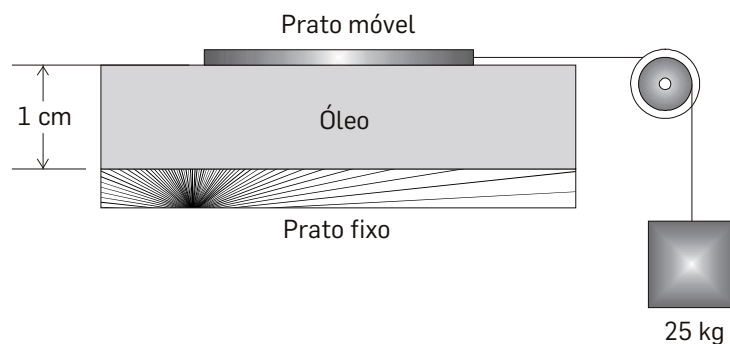
1.1 Um veio de aço ($\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$) com 30 mm de diâmetro e 400 mm de comprimento cai, sob a ação do seu próprio peso, no interior de um longo tubo vertical com 30,2 mm de diâmetro, aberto nas extremidades. O espaço entre o veio e o tubo está cheio com glicerina a 20 °C ($\mu = 1,5 \text{ Pa.s}$). Determine a velocidade terminal do veio.

1.2 O espaço entre duas placas planas separadas de 25 mm está cheio com um líquido de viscosidade 0,7 Pa.s. No seio do líquido, a 6 mm de uma das placas, é posta em movimento, velocidade 150 mm/s, uma nova placa, muito delgada, com dimensões 250 mm x 250 mm. Assumindo variações lineares de velocidade no líquido, determine a força que este exerce sobre a placa em deslocamento.

1.3 Um bloco de faces quadradas (200 mm de aresta) pesa 1 kN e desliza num plano inclinado ao longo do qual escorre uma película de óleo de 0,0050 mm de espessura. Supondo que o perfil de velocidade no óleo é linear, calcule a velocidade terminal do bloco. A viscosidade do óleo é 7 cP.

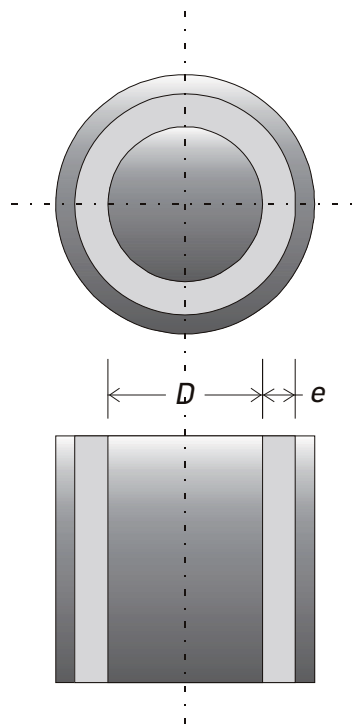


1.4 A figura mostra dois pratos distanciados de 1 cm, o inferior está fixo e o superior, de peso desprezável, em deslocamento uniforme sob a acção de uma massa de 25 kg. Se o fluido entre os pratos for óleo (viscosidade 0,650 Pa.s) e a área de contacto do prato superior com o óleo 0,75 m², determine a velocidade do prato superior. Admita perfil de velocidade linear no óleo.



1.5 Um cilindro vertical roda no interior de um outro cilindro montado coaxialmente. Entre os cilindros existe uma película de óleo de viscosidade μ e espessura e . Se o cilindro interior rodar a uma velocidade

angular de n rps (o exterior está parado) e tiver um diâmetro D , qual é o momento (binário) que é necessário aplicar? Assuma perfil linear de velocidade entre os cilindros.

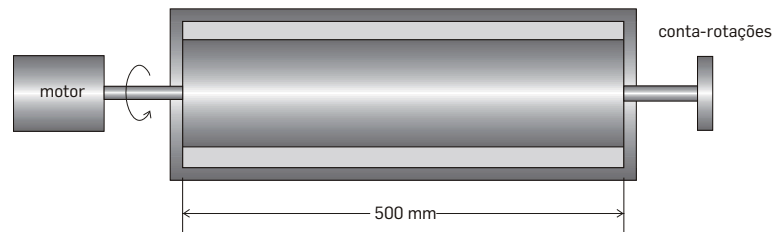


1.6 Uma película de óleo com 0,13 mm de espessura separa dois discos, cada um com 200 mm de diâmetro, montados coaxialmente. Calcule o momento (binário) necessário para rodar um dos discos a uma velocidade de 7 rps relativamente ao outro. A viscosidade do óleo é 0,14 Pa.s.

1.7 A figura representa um viscosímetro constituído por um motor eléctrico que acciona um tambor cilíndrico de diâmetro 50 mm colocado coaxialmente no interior de outro cilindro. O espaço entre os cilindros é preenchido por um fluido cuja viscosidade se pretende medir, sendo a espessura da camada 0,2 mm. O motor produz um momento (binário) constante de 0,05 N.m para qualquer velocidade entre 0 e 1000 rpm. A velocidade de rotação é medida por um conta-rotações montado na extremidade livre do veio.

- a. Calcule a viscosidade mínima que é possível medir com este dispositivo. Admita uma distribuição linear de velocidade no fluido.

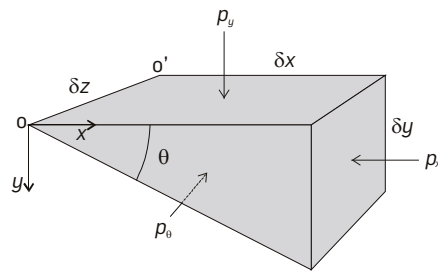
- b. Este método de medida poderá ser prejudicado por um eventual aquecimento do fluido dentro do dispositivo. Estabelecendo uma expressão para a potência calorífica dissipada, faça uma análise quantitativa e diga em que casos, grande viscosidade ou pequena, o aquecimento poderá tornar-se importante.



2. HIDROSTÁTICA

2.1 Pressão num ponto no seio de um fluido

Um fluido em repouso não está sujeito a tensões de corte. No elemento infinitesimal de fluido representado na figura, paralelepípedo seccionado por um plano diagonal, só actuam tensões normais. Por ser infinitesimal, as suas dimensões podem ser tão reduzidas quanto se desejar, pelo que no limite, o elemento representa um “ponto” no seio do fluido.

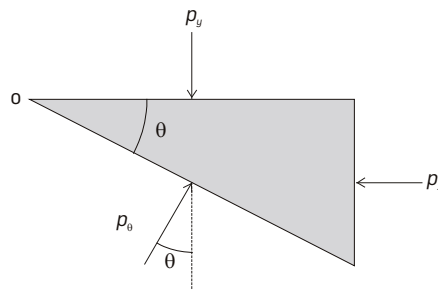


Um elemento de fluido está em repouso, quando as condições de equilíbrio estático são verificadas, nomeadamente o somatório vectorial das forças que sobre ele actuam é nulo.

Equilíbrio de forças na direcção \vec{ox} :

$$p_x \delta z \delta y = p_\theta \sin \theta \delta z \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} \quad (2.1)$$

$$p_x \delta z \delta y = p_\theta \frac{\delta y}{\sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2}} \delta z \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} \Rightarrow p_\theta = p_x \quad (2.2)$$



Equilíbrio de forças na direcção $\vec{o}\vec{y}$:

$$p_y \delta z \delta x + \rho g \frac{\delta x \delta y \delta z}{2} = p_\theta \cos \theta \delta z \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} \quad (2.3)$$

$$p_y \delta z \delta x + \rho g \frac{\delta x \delta y \delta z}{2} = \rho_\theta \frac{\delta x}{\sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2}} \delta z \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} \quad (2.4)$$

$$\Rightarrow p_\theta = p_x + \rho g \frac{\delta y}{2}$$

Tomando o $\lim \delta x, \delta y, \delta z \rightarrow 0$ o elemento reduz-se a um “ponto” no seio do fluido e de acordo com as equações (2.2) e (2.4) conclui-se que:

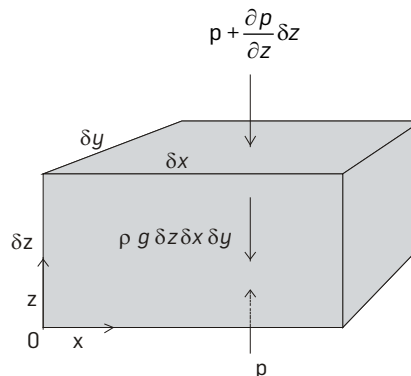
$$p_x = p_y = p_\theta \quad (2.5)$$

Esta igualdade mostra que no interior de um fluido em repouso a pressão num “ponto” exerce-se com igual intensidade em todas as direcções.

2.2 Equação Fundamental da Hidrostática

A equação fundamental da hidrostática resulta da aplicação das condições de equilíbrio estático necessárias para o fluido permanecer em repouso. Considere o elemento de fluido infinitesimal, de forma cúbica, representado na figura.

Equilíbrio segundo a direcção $\vec{o}\vec{z}$:

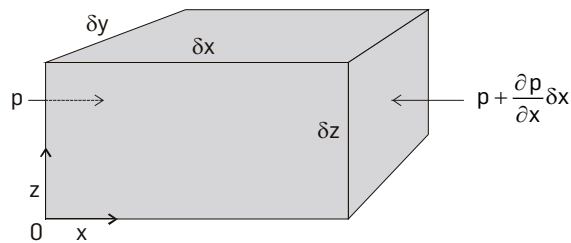


A pressão na face inferior do elemento é p , e na superior $p + \frac{\partial p}{\partial z} \delta z$, representando $\frac{\partial p}{\partial z} \delta z$ a variação de pressão no interior do fluido num comprimento infinitesimal.

De um balanço de forças segundo a direcção $\vec{o}z$ resulta:

$$-\rho g \delta z \delta x \delta y - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} \delta z \right) \delta x \delta y + p \delta x \delta y = 0 \rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (2.6)$$

Equilíbrio segundo a direcção $\vec{o}x$:

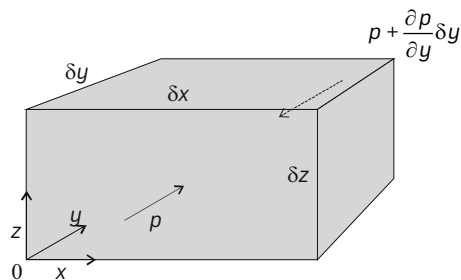


De um balanço de forças segundo a direcção $\vec{o}x$ resulta:

$$-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z + p \delta y \delta z = 0 \rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

Equilíbrio segundo a direcção $\vec{o}y$:

De um balanço de forças segundo a direcção $\vec{o}y$ resulta:



$$-\left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \delta y \right) \delta x \delta z + p \delta x \delta z = 0 \rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.8)$$

Do equilíbrio nas três direcções conclui-se que:

- no interior de um fluido em repouso há uma variação de pressão ao longo da direcção vertical, negativa no sentido contrário ao do vector aceleração da gravidade;
- ao longo dos planos perpendiculares ao vector aceleração da gravidade, a pressão é constante, i. e., os planos horizontais são planos isobáricos.

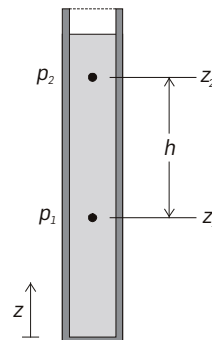
As conclusões anteriores podem ser condensadas em notação vectorial:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} = g \vec{\text{rad}} p = \rho \vec{g} \quad (2.9)$$

Fluidos incompressíveis

Sempre que a variação da massa volúmica com a pressão é pouco significativa, o fluido pode ser tratado como incompressível. No caso de um fluido incompressível, a equação geral da hidrostática integra-se facilmente entre dois “pontos” de um fluido em repouso:

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\rho g \int_{z_1}^{z_2} dz \Rightarrow p_1 = p_2 + \rho g h \quad (2.10)$$



A altura h , frequentemente denominada por carga de pressão, representa a altura de uma coluna de líquido, com peso volúmico $\gamma = \rho g$, necessária para obter uma diferença de pressão $p_1 - p_2$.

Fluidos compressíveis

Os gases são, contrariamente aos líquidos, fluidos compressíveis em particular quando escoam a elevada velocidade, pelo que a sua massa volúmica varia com a pressão. Assim, para integrar a equação fundamental da hidrostática é necessário conhecer a equação de estado do gás. Se o gás puder ser considerado um gás perfeito:

$$p = \rho RT \Rightarrow \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = \ln \frac{p_2}{p_1} = -\frac{g}{R} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{T} \quad (2.11)$$

em que o valor de R , constante dos gases perfeitos, depende do tipo de gás, mais propriamente da sua massa molecular.

Em condições isotérmicas (T_0), a diferença de pressão entre as cotas z_1 e z_2 é dada por:

$$p_2 = p_1 \exp \left[-\frac{g(z_2 - z_1)}{RT_0} \right] \quad (2.12)$$

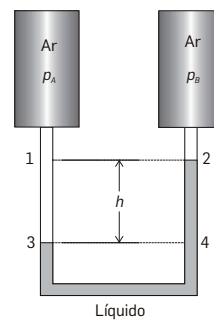
Se a diferença de cota não for muito significativa ou o valor da temperatura muito reduzido, o valor da exponencial é muito próximo da unidade, resultando $p_2 = p_1$. Nestas condições, a pressão no seio de um gás pode ser considerada, com boa aproximação, uniforme. Esta aproximação é consequência da massa volúmica dos gases ser muito baixa, aproximadamente 1000 vezes inferior à da água em condições de pressão e temperatura ambiente.

2.3 Manómetros diferenciais

O manómetro diferencial utiliza-se para medir diferenças de pressão e, na sua versão mais simples, é um tubo em U de secção recta reduzida, que contém no seu interior um líquido de massa volúmica conhecida.

Exemplo 2.1

Na figura, os "braços" do manómetro estão ligados a recipientes fechados contendo ar a pressão diferente, p_A e p_B . Pretende-se saber, por leitura no manómetro, qual a diferença de pressão no interior dos recipientes.

**Solução**

Analisando os níveis de líquido no manómetro, pode-se afirmar de imediato que a pressão no recipiente A é maior que no recipiente B, já que o nível de líquido no braço do manómetro ligado ao recipiente B é maior.

Aplicando a equação fundamental da hidrostática entre os pontos de referência 1 e 3 resulta:

$$p_1 - p_3 = -\rho_{ar}gh$$

Por continuidade, a pressão na interface de dois fluidos (ponto 3) é a mesma, quer do lado do ar, quer do lado do líquido. As superfícies horizontais no interior do mesmo fluido são isobáricas logo:

$$p_3 = p_4$$

Aplicando a equação fundamental da hidrostática entre os pontos 4 e 2 resulta:

$$p_4 - p_2 = -\rho_L gh$$

Adicionando membro a membro as equações anteriores obtém-se:

$$p_1 - p_2 = (\rho_L - \rho_{ar})gh$$

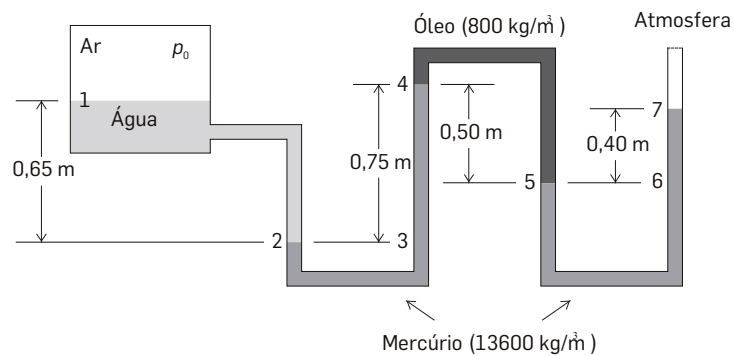
Mas $\rho_L \gg \rho_{ar}$ logo:

$$p_1 - p_2 = \rho_L gh \rightarrow p_A - p_B = \rho_L gh$$

Se o líquido no manómetro fosse água e as pressões $p_A = 1 \text{ atm} \approx 10^5 \text{ Pa}$ e $p_B = 0$ (vazio), o desnível (carga de pressão) que se observaria seria aproximadamente de 10 m de coluna de água. No caso de o líquido ser mercúrio, o desnível que se observaria seria de 760 mm de coluna de mercúrio (experiência de Torricelli).

Exemplo 2.2

Qual a pressão absoluta p_0 e a pressão manométrica do ar sobre a superfície livre da água no tanque, sabendo que a pressão atmosférica é 760 mm Hg?

**Solução**

Aplicando sucessivamente a equação fundamental da hidrostática resulta:

$$p_0 = p_1 \quad (\text{pressão uniforme no ar})$$

$$p_1 - p_2 = -0,65 \rho_{\text{H}_2\text{O}} g$$

$$p_2 = p_3 \quad (\text{plano isobárico})$$

$$p_3 - p_4 = 0,75 \rho_{\text{Hg}} g$$

$$p_4 - p_5 = -0,50 \rho_{\text{óleo}} g$$

$$p_5 = p_6 \quad (\text{plano isobárico})$$

$$p_6 - p_7 = 0,40 \rho_{\text{Hg}} g$$

$$p_7 = p_{\text{atm}}$$

Substituindo os dados da figura, o valor da pressão absoluta é $p_0 \approx 2,4 \times 10^5$ Pa. A pressão manométrica ou relativa é obtida subtraindo à pressão absoluta a pressão atmosférica, $p_0 - p_{\text{atm}} \approx 2,4 \times 10^5$ Pa.

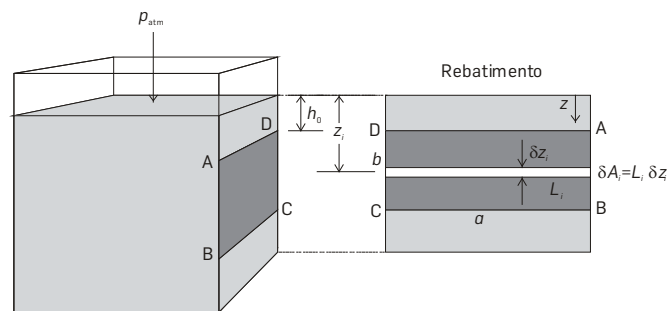
2.4 Forças em superfícies submersas

Sobre uma superfície em contacto com um fluido em repouso ou sobre um corpo submerso, a força de pressão é sempre normal à super-

fície/corpo e é sempre compressiva e nunca de tracção, i.e., exerce-se sempre contra a superfície/corpo.

2.4.1 Superfícies planas verticais

Pretende-se determinar a força hidrostática na “janela” rectangular (ABCD) situada sobre uma das faces laterais de um tanque com água. A figura mostra a “janela” rebatida sobre o plano do papel. A altura da “janela” é b e o seu comprimento a .



O líquido exerce sobre a “janela” uma pressão que varia ao longo do eixo dos z de acordo com a equação fundamental da hidrostática. A origem do eixo dos z , por uma questão de simplicidade, foi colocada na superfície livre do líquido.

Para determinar a força de pressão, seleccionou-se uma tira infinitesimal rectangular i de comprimento L_i e espessura δz_i que dista z_i da superfície livre do líquido. No limite quando $\delta z_i \rightarrow 0$, a tira tende para uma linha horizontal ao longo da qual a pressão é uniforme (a linha pertence a um plano isobárico, paralelo à superfície livre).

A força de pressão, δF_i , na tira é dada por:

$$\delta F_i = p_i \delta A_i \quad (2.13)$$

Segundo a equação fundamental da hidrostática, a pressão na tira depende da sua distância à superfície livre (origem dos eixos):

$$p_i = p_{\text{atm}} + \rho g z_i \rightarrow \delta F_i = (p_{\text{atm}} + \rho g z_i) L_i \delta z_i \quad (2.14)$$

A força de pressão total é dada pelo somatório das forças no número infinito de tiras infinitesimais em que se pode dividir a “janela” :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta F_i = \sum_{i=1}^{\infty} (\rho_{atm} - \rho g z_i) L_i \delta z_i \quad (2.15)$$

Recorrendo à definição de integral definido de uma função contínua obtém-se:

$$F = \lim_{\delta z_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{\infty} \delta F_i = \int_{h_0}^{h_0+b} (\rho_{atm} + \rho g z) L \, dz \quad (2.16)$$

Integrando, obtém-se a força interna, δF_{int} , exercida sobre a “janela”, ($L = a$):

$$F_{int} = p_{atm} ab + \rho g ab \left(h_0 + \frac{b}{2} \right) \quad (2.17)$$

A primeira parcela representa a força que a pressão atmosférica exerce interiormente sobre a janela e aparece pelo facto da superfície livre estar aberta para a atmosfera.

De uma forma semelhante pode calcular-se a força exterior exercida sobre a janela pela pressão atmosférica:

$$\delta F_i = p_{atm} L_i \delta z_i \rightarrow F_{ext} = \int_{h_0}^{h_0+b} p_{atm} L \, dz = p_{atm} ab \quad (2.18)$$

Considerou-se sobre toda a janela uma pressão uniforme e igual à atmosférica. A intensidade da força resultante, interior e exterior, exercida sobre a janela é dada por:

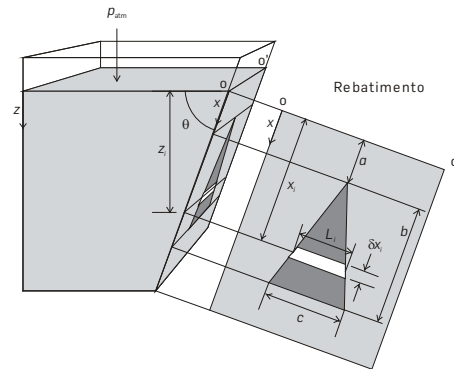
$$F_{total} = F_{int} - F_{ext} = \rho g ab \left(h_0 + \frac{b}{2} \right) \quad (2.19)$$

A direcção desta força é horizontal, perpendicular à superfície da “janela”, e o seu sentido é de dentro para fora. A força resultante pode ser calculada numa só integração, basta lembrar que as forças interna e externa têm a mesma direcção e sentidos opostos. Em sistemas com superfície livre aberta para a atmosfera, a força resultante pode ser calculada por simples integração da pressão manométrica.

2.4.2 Superfícies planas inclinadas

Considere uma "janela" triangular contida numa superfície plana inclinada, ângulo θ com a superfície horizontal, tal como mostra a figura. Pretende-se determinar a força hidrostática sobre a "janela" triangular, altura b e lado da base c , e o momento dessa força em relação ao eixo $\overrightarrow{oo'}$.

Tal como no exemplo anterior é necessário "encontrar" uma tira infinitesimal onde, no limite, a pressão seja uniforme. A direcção z é a da aceleração da gravidade (vertical) e a direcção x a da superfície inclinada; a origem de ambos os eixos está colocada na superfície livre. A tira infinitesimal i escolhida tem espessura δx_i , comprimento L_i e dista z_i da superfície livre.



A força hidrostática sobre a tira infinitesimal i é dada por:

$$\delta F_i = \delta F_{i,int} - \delta F_{i,ext} = [(p_{atm} + \rho g z_i) - p_{atm}] L_i \delta x_i \quad (2.20)$$

Mas devido à inclinação da parede e à geometria da "janela", z_i e L_i são função de x_i :

$$z_i = x_i \sin \theta \wedge \frac{L_i}{x_i - a} = \frac{c}{b} \rightarrow L_i = \frac{c}{b} (x_i - a) \quad (2.21)$$

A segunda condição resulta da semelhança de triângulos (teorema de Thales). A expressão $x_i - a$ representa a distância, segundo a direcção x , do vértice do triângulo à tira infinitesimal. A força hidrostática sobre a janela é dada por:

$$F = \lim_{\delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \delta F_i = \int_a^{a+b} (\rho g x \sin \theta) \frac{c}{b} (x - a) dx \quad (2.22)$$

$$F = \rho g \sin \theta \frac{c}{b} \left[(a+b)^2 \left(\frac{2b-a}{6} \right) + \frac{a^3}{6} \right] \quad (2.23)$$

Para calcular o momento da força hidrostática relativamente ao eixo $\vec{oo'}$ é necessário voltar a analisar a tira infinitesimal. A intensidade do vector momento relativamente ao eixo $\vec{oo'}$ é dada pelo produto da força de pressão na tira pela distância na perpendicular do eixo à linha de acção da força (braço da força). Como a força de pressão é perpendicular à tira, o braço é a distância, ao longo do plano inclinado, entre a tira e o eixo, i.e., x_i .

A direcção do vector momento é perpendicular ao plano que contém a força na tira e o respectivo "braço", i.e., tem a direcção do eixo $\vec{oo'}$. O sentido do vector momento é dado pelo sentido da progressão de um saca-rolhas; o sentido anti-horário é positivo e o horário negativo. No exemplo da figura anterior, a força hidrostática faz a "janela" rodar, em torno do eixo $\vec{oo'}$, no sentido anti-horário.

A intensidade do momento da força de pressão na tira e a intensidade do momento da força de pressão na "janela" são dados por:

$$\delta M_{i,oo'} = x_i \delta F_i = x_i [(p_{atm} + \rho g z_i) - p_{atm}] L_i \delta x_i \quad (2.24)$$

$$\lim_{\delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \delta M_{i,oo'} = M_{oo'} = \int_a^{a+b} x [(p_{atm} + \rho g z) - p_{atm}] L dx \quad (2.25)$$

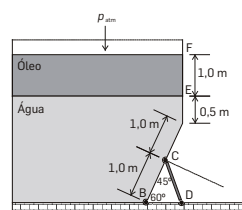
$$\begin{aligned} M_{oo'} &= \int_a^{a+b} (\rho g x \sin \theta) \frac{c}{b} (x-a) dx = \\ &= \rho g \sin \theta \frac{c}{b} \left[(a+b)^3 \left(\frac{3b-a}{12} \right) + \frac{a^4}{12} \right] \end{aligned} \quad (2.26)$$

Exemplo 2.3

Uma comporta BEF é suportada por uma coluna CD. As articulações B, C e D são rótulas (dobradiças) e a largura da comporta é 2,4 m (direcção perpendicular ao plano do papel):

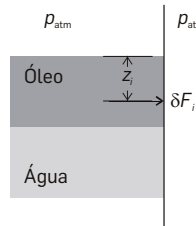
a- calcule as componentes horizontal e vertical da força hidrostática sobre a comporta; b- determine a força na dobradiça B e no apoio D.

Dados: $\rho_{\text{óleo}} = 800 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{\text{água}} = 1000 \text{ kg/m}^3$. Tome $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Solução

Força (F_1) que o óleo exerce na comporta.

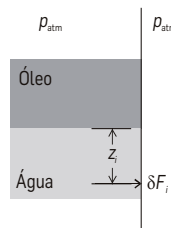


A origem do eixo dos z está situada na superfície livre do óleo.

$$\delta F_i = \delta F_{i,int} - \delta F_{i,ext} = [(p_{atm} + \rho g z_i) - p_{atm}] L_i \delta x_i$$

$$F_1 = \int_0^1 \rho_{oleo} g z L dz = \frac{1}{2} \rho_{oleo} g L \approx 9,6 \text{ kN}$$

Força que a água exerce na comporta.

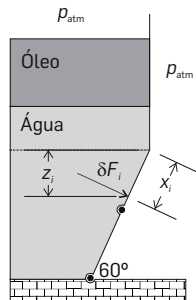


A água exerce força na parte vertical da comporta e na parte inclinada.

Secção vertical da comporta (F_2). A origem do eixo dos z está situada na interface óleo-água.

$$\delta F_i = [(p_{atm} + \rho_{oleo} g + \rho_{H_2O} g z_i) - p_{atm}] L_i \delta z_i$$

$$F_2 = \int_0^{0,5} (\rho_{oleo} g + \rho_{H_2O} g z) L dz = 12,6 \text{ kN}$$



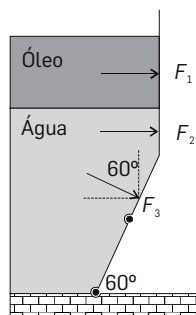
Secção inclinada da comporta (F_3). A origem do eixo dos z está situada no plano horizontal que separa a parte vertical da comporta da parte inclinada.

$$\delta F_i = [(p_{atm} + \rho_{oleo} g + 0,5 \rho_{H_2O} g + \rho_{H_2O} g z_i) - p_{atm}] L_i \delta x_i$$

$$F_3 = \int_0^2 [\rho_{oleo} g + \rho_{H_2O} g (0,5 + z)] L dx$$

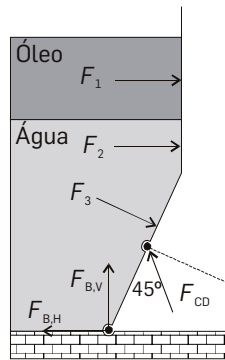
$$F_3 = \int_0^2 [\rho_{oleo} g + \rho_{H_2O} g (0,5 + x \sin 60)] L dx = 104 \text{ kN}$$

Componentes da força hidrostática sobre a comporta.



$$F_H = F_1 + F_2 + F_3 \cos 30 = 112 \text{ kN}$$

$$F_V = F_3 \cos 60 = 52 \text{ kN}$$

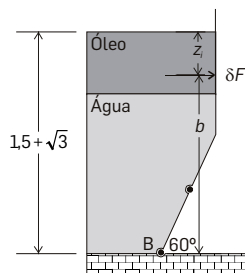
Equilíbrio estático da comporta

Sobre a barra CD actuam somente duas forças: as exercidas pelas rótulas C e D. Para a barra CD estar em equilíbrio é necessário que o somatório dos momentos das forças aplicadas em relação a um eixo (representado por um ponto no plano) seja nulo. Esta condição só é verificada, se as duas forças que actuam na barra tiverem a mesma linha de acção, neste caso coincidente com a direcção da barra, e sentidos contrários. Esta conclusão tem de ser observada sempre que sobre um sistema em equilíbrio estático actuem somente duas forças.

Do equilíbrio da rótula C conclui-se que a força exercida sobre a comporta, F_{CD} , tem de ter a direcção da barra CD e o sentido de D para C. Na rótula B o sentido e direcção da força sobre a comporta é desconhecido, pelo que se representa a força pelas suas duas componentes ortogonais, $F_{B,V}$ e $F_{B,H}$ (sentidos arbitrados).

Analizando a figura onde estão representadas as forças que actuam sobre a comporta conclui-se que há três incógnitas, $F_{B,V}$, $F_{B,H}$ e F_{CD} . As equações escalares de equilíbrio estático da comporta são igualmente três: o somatório das componentes horizontais das forças igual a zero, o somatório das componentes verticais das forças igual a zero e o somatório dos momentos das forças relativamente a um eixo perpendicular ao plano, representado por um ponto no plano, igual a zero.

Momento das forças aplicadas na comporta relativamente ao eixo de rotação representado na figura pelo ponto B.



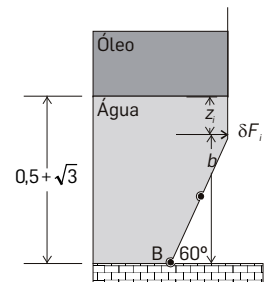
A escolha deste eixo tem vantagens, já que os momentos das forças $F_{B,V}$ e $F_{B,H}$ (ambas incógnitas) são iguais a zero.

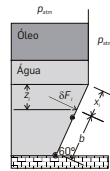
$$\delta M_B = b \delta F_i = (1,5 + \sqrt{3} - z_i) \delta F_i$$

$$M_{F_1, B} = \int_0^1 (\rho_{oleo} g z) (1,5 + \sqrt{3} - z) L dz = 24,6 \text{ kN.m}$$

$$\delta M_B = b \delta F_i = (0,5 + \sqrt{3} - z_i) \delta F_i$$

$$M_{F_2, B} = \int_0^{0,5} (\rho_{oleo} g + \rho_{H_2O} g z) (0,5 + \sqrt{3} - z) L dz = 14,0 \text{ kN.m}$$





$$\delta M_B = b \delta F_i = (2 - x_i) \delta F_i$$

$$M_{F3,B} = \int_0^2 (\rho_{oleo} g + 0,5 \rho_{H_2O} g x \sin 60) (2 - x) L dx = 90,0 \text{ kN.m}$$

Somatório dos vectores momento relativamente ao eixo de rotação B:

$$-M_{F1,B} - M_{F2,B} - M_{F3,B} + 1 \times \cos 45 F_{CD} = 0$$

$$F_{CD} = 182 \text{ kN}$$

Tal como já foi referido anteriormente, os vectores momento têm todos direcção perpendicular ao plano do papel. O sentido de cada vector é positivo se da sua acção resultar a rotação do sistema no sentido anti-horário e negativo se a rotação for no sentido horário.

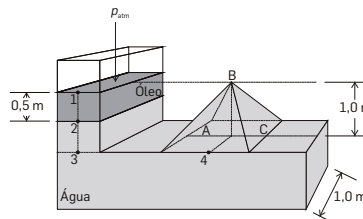
Dos somatórios das componentes horizontais e das componentes verticais das forças aplicadas à comporta obtém-se $F_{B,V}$ e $F_{B,H}$.

Exemplo 2.4

Na figura seguinte está representada uma pirâmide regular de base quadrada (1 m de lado) "colada" a uma caixa paralelepipedica. Determine:

- A pressão em B.
- A componente horizontal da força hidrostática sobre uma das faces da pirâmide.
- A componente vertical da força hidrostática sobre uma das faces da pirâmide.

Dados: $\rho_{oleo} = 800 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{água} = 1000 \text{ kg/m}^3$.

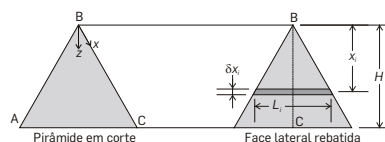


Solução

a. Aplicando a equação geral da hidrostática entre os pontos de referência assinalados na figura, partindo da superfície do óleo até ao ponto B, obtém-se:

$$p_B = p_{atm} + 0,5 \rho_{oleo} g + 0,5 \rho_{H_2O} g - 1,0 \rho_{H_2O} g = 9,9 \times 10^4 \text{ Pa}$$

b. Na figura seguinte está representada uma face lateral da pirâmide rebatida no plano do papel.



A força exercida na tira infinitesimal i de espessura δx_i e comprimento L_i é dada por:

$$\delta F_i = [(p_B + \rho_{H_2O} g z_i) - p_{atm}] L_i \delta x_i$$

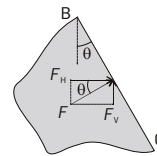
A força de pressão na face da pirâmide é dada pelo integral:

$$F = \int_0^H [(p_B + \rho_{H_2O} g z) - p_{atm}] L dx$$

Mas tanto z como L variam com x , havendo necessidade de recorrer a relações geométricas:

$$\frac{x}{L} = \frac{H}{1,0} \rightarrow L = \frac{x}{H} \quad (\text{teorema Thales}) \quad z = x \cos \theta \wedge \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2} \wedge H = 1,12 \text{ m}$$

A força resultante é normal à face da pirâmide, sendo as suas componentes dadas por:

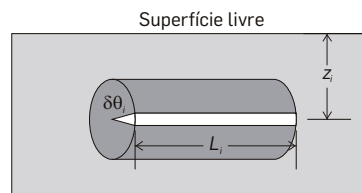


$$F_V = F \operatorname{sen} \theta \wedge F_H = F \cos \theta$$

2.4.3 Superfícies curvas

Método de integração da pressão.

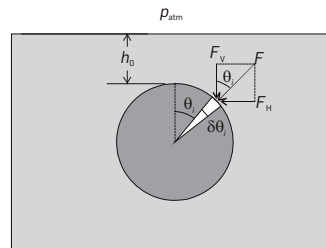
Há casos de geometrias curvas simples, cilindros e esferas, em que o cálculo da força de pressão por integração da pressão na área em que actua é possível. Considere-se um cilindro de comprimento L , mergulhado num líquido de massa volúmica ρ , com o eixo paralelo à superfície livre do líquido.



É necessário encontrar uma tira infinitesimal, onde, no limite da espessura, a pressão seja uniforme, quer em intensidade, quer também em direcção e sentido. A tira representada na figura, desenhada a partir de um acréscimo de arco $\delta\theta_i$, satisfaz estas condições. A área infinitesimal da tira é dada por $\delta A_i = L_i \operatorname{arc} \delta\theta_i$. Recorrendo a relações geométricas pode-se exprimir esta área em função do incremento de ângulo $\delta\theta_i$:

$$\operatorname{tg} \delta \theta_i \cong \delta \theta_i = \frac{\operatorname{arc} \delta \theta_i}{R} \rightarrow \operatorname{arc} \delta \theta_i = R \delta \theta_i \rightarrow \delta A_i = RL_i \delta \theta_i \quad (2.27)$$

Na figura seguinte está representada uma vista de topo do cilindro com as respectivas componentes da força de pressão na tira. O próximo passo é exprimir cada uma destas componentes em função do incremento de ângulo $\delta \theta_i$.



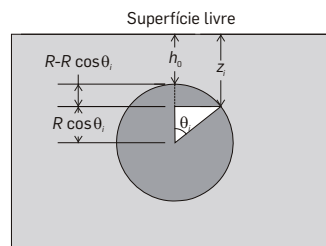
- *Componente vertical da força de pressão:*

$$\delta F_v = \cos \theta_i \delta F_i = \cos \theta_i p_i \delta A_i = \cos \theta_i p_i (RL_i \delta \theta_i) \quad (2.28)$$

A pressão na tira é função da distância à superfície livre que por sua vez é função de θ_i . Por relações geométricas obtém-se:

$$p_i = p_{atm} + \rho_L g z_i \wedge z_i = h_0 + (R - R \cos \theta_i) \quad (2.29)$$

A relação geométrica entre z_i e $\delta \theta_i$ está esquematizada na figura seguinte.



Substituindo a equação (2.29) na (2.28), obtém-se:

$$\delta F_v = [p_{atm} + \rho_L g (h_0 + R - R \cos \theta_i)] \cos \theta_i RL_i \delta \theta_i \quad (2.30)$$

Somando as forças de pressão que actuam sobre um infinito número de tiras infinitesimais ao longo da superfície lateral do cilindro obtém-se:

$$\lim_{\delta\theta_i \rightarrow 0} \sum F_{Vi} = F_V = \int_0^{2\pi} (p_{atm} + \rho_L g h_0 + \rho_L g R) R L \cos \theta d\theta - \int_0^{2\pi} \rho_L g R^2 L \cos^2 \theta d\theta \quad (2.31)$$

Integrando, obtém-se a componente vertical da força de pressão que não é mais do que a impulsão sofrida por um corpo imerso num fluido. Arquimedes dizia “um corpo mergulhado num líquido sofre da parte deste uma força vertical de baixo para cima cuja intensidade é igual ao peso do volume de líquido deslocado”.

$$F_V = -\rho_L g \pi R^2 L \quad (2.32)$$

O sinal negativo indica que o sentido da força é de baixo para cima contrário ao sentido positivo do eixo dos z.

- *Componente horizontal da força de pressão.*

Recorrendo às figuras e relações anteriores, obtêm-se as seguintes expressões para a componente horizontal da força de pressão:

$$\delta F_{Hi} = \sin \theta_i \delta F_i = \sin \theta_i p_i \delta A_i = \sin \theta_i p_i (R L_i \delta \theta_i) \quad (2.33)$$

$$p_i = p_{atm} + \rho_L g z_i \wedge z_i = h_0 + (R - R \cos \theta_i) \quad (2.34)$$

$$\delta F_{Hi} = [p_{atm} + \rho_L g (h_0 + R - R \cos \theta_i)] \sin \theta_i R L_i \delta \theta_i \quad (2.35)$$

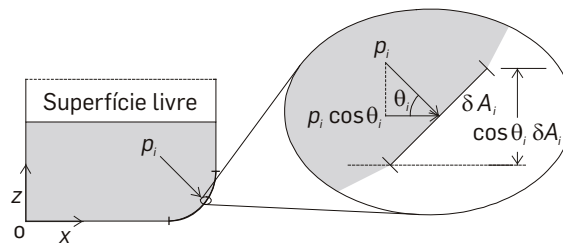
$$F_H = \int_0^{2\pi} (p_{atm} + \rho_L g h_0 + \rho_L g R) R L \sin \theta d\theta - \int_0^{2\pi} \rho_L g R^2 L \cos \theta \sin \theta d\theta = 0 \quad (2.36)$$

Resolvendo o integral, conclui-se que a componente horizontal da força de pressão sobre o cilindro é nula, i.e., um objecto mergulhado num fluido em repouso não se desloca no plano horizontal. Este comportamento é facilmente entendido, já que é sempre possível encontrar na superfície do cilindro duas tiras infinitesimais onde as componentes horizontais da força de pressão são iguais em intensidade e direcção mas têm sentidos opostos.

Nem sempre a geometria da superfície curva é tão simples! É necessário um método geral para determinar a força de pressão em superfícies curvas.

Método da projecção

Considere um tanque com água, em que uma das faces laterais tem a extremidade com forma cilíndrica (eixo paralelo à superfície livre). A superfície lateral cilíndrica pode ser dividida, por incrementos de ângulo, em tiras infinitesimais de área δA_i . Uma dessas tiras está representada na figura numa escala aumentada. O arco infinitesimal correspondente ao incremento de ângulo está representado por um segmento de recta, já que um arco de circunferência é bem aproximado por um número infinito de segmentos de recta de comprimento infinitesimal.



O ângulo θ_i é o ângulo que a força de pressão na tira faz com o eixo \vec{ox} .

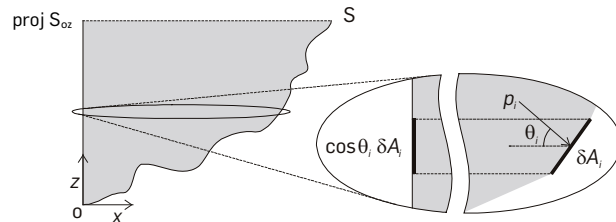
- *Componente horizontal da força de pressão*

A componente horizontal da força de pressão na tira infinitesimal é $p_i \delta A_i \cos \theta_i$. Mas $\delta A_i \cos \theta_i$ não é mais do que a projecção de δA_i num plano perpendicular a \vec{ox} .

$$\delta F_{Hi} = p_i \delta A_i \cos \theta_i = p_i \text{proj}_{\vec{oz}} \delta A_i \quad (2.36)$$

Esta relação verifica-se, qualquer que seja θ_i e qualquer que seja a forma da superfície curva. Conclui-se que:

“A componente, segundo um dado eixo, da força de pressão que se exerce sobre uma superfície de orientação e forma qualquer, é sempre igual à força de pressão sobre a projecção dessa superfície num plano perpendicular ao eixo considerado.”

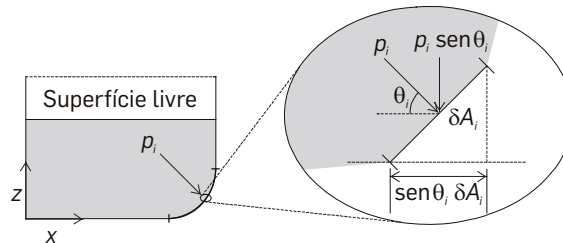


A componente horizontal da força de pressão que se exerce numa superfície curva S de forma irregular é dada por:

$$F_H = \int_S p \cos \theta dA = \int_{\text{proj}_{\text{oz}} S} p d(\text{proj}_{\text{oz}} A) \quad (2.37)$$

Desta forma, é possível substituir o cálculo de um integral complicado sobre S , pelo cálculo simples da força de pressão sobre a projeção da superfície S num plano vertical (perpendicular a \vec{ox}).

- Componente vertical da força de pressão



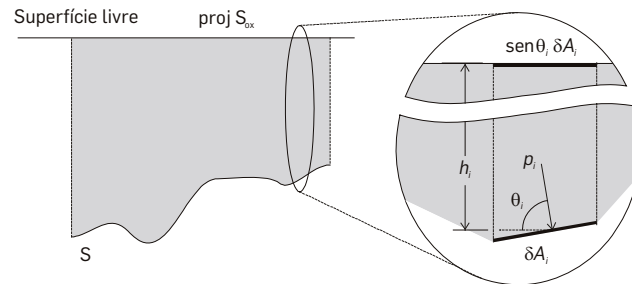
A componente vertical da força de pressão sobre a tira infinitesimal representada na figura é dada por:

$$\delta F_{Vi} = p_i \delta A_i \cdot \text{sen } \theta_i \quad (2.38)$$

Considerando pressões manométricas, a pressão na superfície livre é igual a zero e na tira infinitesimal é dada por $p_i = \rho_L g h_i$, em que h_i é a distância da tira infinitesimal à superfície livre. Substituindo esta relação na equação anterior obtém-se:

$$\delta F_{Vi} = \rho_L g h_i \text{sen } \theta_i \delta A_i \quad (2.39)$$

Mas $\text{sen } \theta_i \delta A_i$ representa a $\text{proj}_{\vec{ox}} \delta A_i$, e $h_i \text{sen } \theta_i \delta A_i$ é o volume elementar de líquido contido entre a tira de área δA_i e a superfície livre.



A componente vertical da força de pressão sobre a tira passa a ser dada por:

$$\delta F_{Vi} = \rho_L g h_i \text{proj}_{ox}^- \delta A_i = \rho_L g \delta V_i \quad (2.40)$$

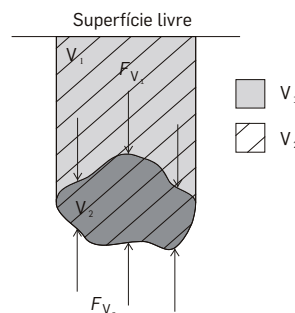
em que δV_i representa o volume de líquido compreendido entre a tira infinitesimal e a superfície livre. Estendendo a toda a superfície, resulta:

$$F_V = \int_V \rho_L g dV = \rho_L g V \quad (2.41)$$

em que V representa o volume contido entre a superfície onde a força de pressão actua e a sua projecção na superfície livre.

Como conclusão, a componente vertical da força de pressão sobre uma superfície é igual ao peso do líquido medido verticalmente entre a superfície onde a força actua e a superfície livre.

Se a superfície é fechada, qualquer que seja a sua forma, é fácil obter, por simples subtracção, a componente vertical da força de pressão (impulsão).



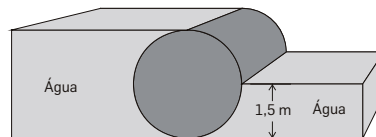
$$F_V = F_{V_2} - F_{V_1} = \rho_L g V_2 - \rho_L g V_1 = \rho_L g V_S \quad (2.42)$$

Nesta equação, F_{V_1} representa a componente vertical da força de pressão com sentido de cima para baixo que actua na superfície de contorno do sólido e F_{V_2} a componente vertical da força de pressão com

sentido de baixo para cima que igualmente actua na superfície de contorno do sólido. O volume V_s é o volume do sólido e a intensidade da componente vertical da força de pressão é igual à impulsão.

Exemplo 2.5

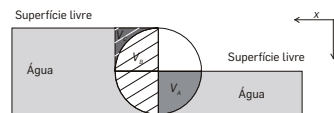
O cilindro representado de topo na figura tem 3 m de diâmetro e 5 m de comprimento (direcção perpendicular ao plano do papel). Qual a grandeza, direcção e sentido da força hidrostática que sobre ele actua ?



Solução: Resolução pelo método das projecções

- *Componente Vertical*

Um quarto de cilindro (lado direito da figura) e meio cilindro (lado esquerdo da figura) sofrem a acção da força de pressão da água.



No quarto de cilindro, a componente vertical da força de pressão que actua sobre a superfície tem sentido de baixo para cima. A superfície projectada sobre a superfície livre tem a forma de um rectângulo, de largura igual ao raio e comprimento igual ao do cilindro. O volume compreendido entre a superfície onde a pressão actua e a projecção desta superfície sobre a superfície livre é o volume do quarto de cilindro (V_A).

$$F_{V1} = -\rho_{H_2O} g V_A = -\frac{1}{4} \rho_{H_2O} g V_{cilindro}$$

No meio cilindro, a componente vertical da força de pressão actua sobre a superfície em diferentes sentidos: de baixo para cima no quarto de cilindro mais afastado da superfície livre e de cima para baixo no quarto de cilindro em contacto com a superfície livre. Em ambos os casos a superfície projectada sobre a superfície livre tem a forma de um rectângulo de largura igual ao raio e comprimento igual ao do cilindro.

No caso do quarto de cilindro mais afastado da superfície livre, o volume compreendido entre a superfície onde a pressão actua e a projecção desta superfície na superfície livre é igual à soma dos volumes V_B e V_C .

$$F_{V2} = -\rho_{H_2O} g (V_B + V_C)$$

No caso do quarto de cilindro em contacto com a superfície livre, o volume compreendido entre a superfície e a projecção desta superfície na superfície livre é igual ao volume V_C .

$$F_{V3} = \rho_{H_2O} g V_C$$

Somando as componentes verticais das forças de pressão resulta:

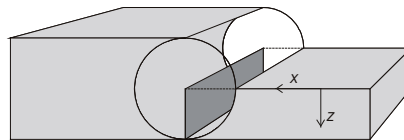
$$F_V = -\rho_{H_2O} g (V_A + V_B + V_C) + \rho_{H_2O} g V_C = -\frac{3}{4} \rho_{H_2O} g V_{cilindro} = -\frac{3}{4} \rho_{H_2O} g \pi R^2 L$$

- Componente horizontal

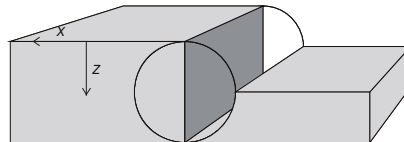
A superfície lateral do quarto de cilindro projectada num plano vertical tem a forma de um rectângulo de altura igual ao raio e comprimento igual ao comprimento do cilindro. A força de pressão actua no sentido positivo do eixo dos x .

Para determinar a componente horizontal da força de pressão, basta integrar a pressão na área projectada, i. e., na superfície plana vertical representada na figura.

$$F_{H1} = \int_0^R \rho_{H_2O} g z L \, dz = \frac{1}{2} \rho_{H_2O} g L R^2$$



No meio cilindro, a componente horizontal da força de pressão actua sobre toda a superfície no sentido negativo do eixo dos x . A superfície lateral do meio cilindro projectada num plano vertical tem a forma de um rectângulo de altura igual ao diâmetro e comprimento igual ao comprimento do cilindro.



Para determinar a componente horizontal da força basta integrar a pressão na área projectada, i. e., na superfície plana vertical representada na figura.

$$F_{H2,3} = - \int_0^{2R} \rho_{H_2O} g z L \, dz = -2 \rho_{H_2O} g L R^2$$

Somando as componentes horizontais da força de pressão resulta:

$$F_H = \frac{1}{2} \rho_{H_2O} g L R^2 - 2 \rho_{H_2O} g L R^2 = -\frac{3}{2} \rho_{H_2O} g L R^2$$

Caso não haja nenhuma força a contrariar o movimento, o cilindro desloca-se no sentido negativo do eixo dos x .

2.5 Equilíbrio relativo

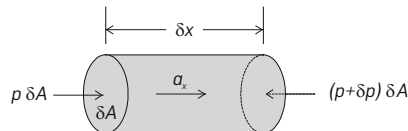
A equação fundamental da hidrostática foi deduzida sabendo que num qualquer elemento no interior do fluido não actuam tensões de corte. Quando um fluido é transportado de tal forma que todos os seus elementos

têm a mesma velocidade, não há deslocamento relativo entre os elementos e não se desenvolvem tensões de corte no seu interior. Um exemplo é quando se transporta um copo com água. Já ouviram falar certamente de corridas entre pessoas que transportam copos com água em bandejas. Porque será que estes “maratonistas” têm de ter uma velocidade controlada? É evidente que é para a água não transbordar. Mas já pensaram qual a relação entre a velocidade do “maratonista” e a quantidade de água que transborda? E por que sítio do copo transborda mais água?

Considere-se o caso de um tanque, contendo líquido com massa volúmica ρ , que se desloca em movimento rectilíneo uniformemente acelerado na horizontal. Tome um elemento infinitesimal de fluido de forma cilíndrica, com eixo paralelo à direcção do movimento, comprimento δx e área das bases δA . Para o elemento estar em equilíbrio é necessário que se exerça sobre o elemento uma força que se “oponha” à força de inércia:

$$\delta F_x = a_x \delta m \quad (2.43)$$

em que δF_x é a força de inércia na direcção horizontal, a_x é a aceleração horizontal exterior imposta ao elemento de fluido e δm a massa do elemento de fluido.



A força que se opõe à força de inércia resulta da diferença de pressão entre a base e o topo do elemento:

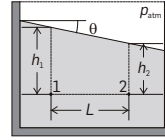
$$p \delta A - (p + \delta p) \delta A = \delta m a_x \rightarrow -\delta p \delta A = \rho_L \delta A \delta x a_x \rightarrow -\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_L a_x \quad (2.44)$$

Conclui-se que se houver aceleração segundo uma direcção é necessário uma variação de pressão no fluido ao longo dessa direcção para que não haja movimento relativo entre os elementos de fluido. O sentido positivo desta variação é contrário ao sentido da aceleração.

Com base na equação anterior, a diferença de pressão entre dois pontos situados numa linha segundo a direcção do movimento, é dada (após integração) por:

$$p_1 - p_2 = \rho_L a_x L \quad (2.45)$$

em que L representa a distância entre os pontos.



Por outro lado, dado que a aceleração actua numa direcção perpendicular à da força de gravidade, para haver equilíbrio estático continua a ter de se observar a equação fundamental da hidrostática tal como foi demonstrado no início do capítulo:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_L g \rightarrow p_1 - p_2 = \rho_L g(h_1 - h_2) \quad (2.46)$$

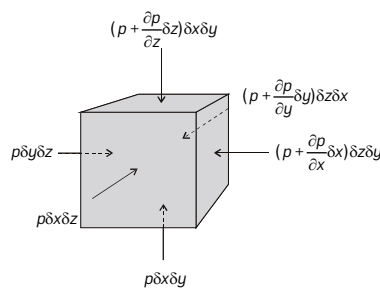
Só no caso de a superfície livre estar inclinada é que se podem observar simultaneamente as duas relações de equilíbrio segundo x e z.

Combinando as equações (2.45) e (2.46), obtém-se:

$$\rho_L a_x L = \rho_L g(h_1 - h_2) \Rightarrow \frac{h_1 - h_2}{L} = \frac{a_x}{g} = \tan \theta \quad (2.47)$$

O ângulo θ mede a inclinação da superfície livre relativamente a um plano horizontal.

Tem interesse, de seguida, considerar o movimento uniformemente acelerado rectilíneo, mas não necessariamente na direcção horizontal. A 2ª lei de Newton na sua forma vectorial é expressa por $\sum \delta \vec{F} = \delta m \vec{a}$, a qual conduz a três equações escalares: $\delta F_x = \delta m a_x$, $\delta F_y = \delta m a_y$, $\delta F_z = \delta m a_z$.



Num elemento paralelepipedico de arestas δx , δy e δz sujeito a uma aceleração constante $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, o equilíbrio estático é expresso por:

$$\begin{cases} p\delta y\delta z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\delta x\right)\delta y\delta z = \rho_L \delta y\delta z\delta x a_x \\ p\delta x\delta z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\delta y\right)\delta x\delta z = \rho_L \delta y\delta z\delta x a_y \\ p\delta y\delta x - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}\delta z\right)\delta y\delta x - \rho_L \delta y\delta z\delta x g = \rho_L \delta y\delta z\delta x a_z \end{cases} \quad (2.48)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_L a_x \\ \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho_L a_y \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_L (a_z + g) \end{cases} \Rightarrow \text{grad } p = -\rho_L (\vec{a} - \vec{g}) \quad (2.49)$$

Um caso particular, curioso e com interesse, é o da queda livre de um recipiente contendo um líquido. Neste caso, $\vec{a} = \vec{g} \rightarrow \text{grad } p = 0$, o que significa que a pressão é constante no interior de todo o líquido e igual à pressão sobre a superfície livre.

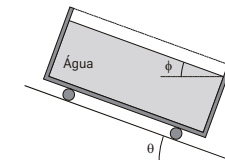
A equação fundamental da hidrostática é um caso particular da equação (2.49) em que $\vec{a} = 0$:

$$\text{grad } p = \rho_L \vec{g} \rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_L g \quad (2.50)$$

com \vec{oz} dirigido para cima.

Exemplo 2.6

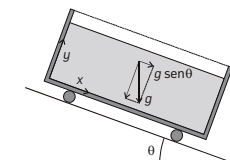
Uma vagoneta com água é abandonada num plano inclinado como mostra a figura. Se o ângulo θ for de 15° , diga qual a inclinação ϕ da superfície livre relativamente à horizontal. Admita que o ar não oferece resistência ao deslocamento da vagoneta e que não há atrito nas rodas.



Solução

O sistema de eixos utilizado para resolver este exercício é o que está representado na figura seguinte, sendo a direcção x a da superfície livre inclinada. O vector aceleração da gravidade está decomposto segundo a direcção dos eixos escolhidos.

A equação de equilíbrio na sua forma vectorial é dada por:



$$\text{grad } p = -\rho_L \vec{g} \Rightarrow \text{grad } p = -\rho_L (\vec{a} - \vec{g})$$

O vector aceleração da vagoneta é, no sistema de coordenadas escolhido, dado pela componente activa do vector aceleração da gravidade:

$$\vec{a} = g \sin \theta \vec{i}$$

A gravidade exerce-se nos elementos de fluido segundo as duas direcções :

$$\vec{g} = g \sin \theta \vec{i} - g \cos \theta \vec{j}$$

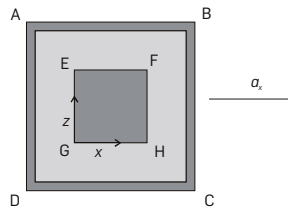
Substituindo resulta:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_{H_2O} (g \sin \theta - g \sin \theta) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho_{H_2O} g \cos \theta \end{cases}$$

Em conclusão, as superfícies de pressão uniforme (isobáricas) são superfícies paralelas ao plano inclinado. Na superfície livre, a pressão é uniforme (atmosférica) pelo que esta superfície é paralela ao plano inclinado, $\theta = \phi = 15^\circ$.

Exemplo 2.7

Um tanque cúbico com 2 m de lado tem no seu interior um prisma de base quadrangular ($L_x = 0,7$ m, $L_y = 0,7$ m, $L_z = 1$ m) com duas faces horizontais, uma contendo a aresta EF e outra a aresta GH. O tanque é fechado, está cheio de água, e sofre uma aceleração horizontal de intensidade 10 m/s^2 . Calcule a força hidrostática sobre o prisma.



Solução

A equação de equilíbrio estático na forma vectorial :

$$\vec{\text{grad}} p = -\rho_{H_2O} (\vec{a} - \vec{g})$$

O tanque tem aceleração horizontal, segundo a direcção x, e a gravidade actua sobre os elementos de fluido segundo a direcção z, pelo que:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_{H_2O} a_x \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_{H_2O} g \end{cases}$$

A variação total de pressão é expressa por:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial z} dz \rightarrow dp = -\rho_{H_2O} a_x dx - \rho_{H_2O} g dz$$

Integrando resulta:

$$p = -\rho_{H_2O} a_x x - \rho_{H_2O} g z + C$$

A constante de integração pode ser determinada desde que a pressão num ponto seja conhecida, o que não é o caso.

- *Força hidrostática na face horizontal que contém a aresta EF*

Esta face é perpendicular ao eixo dos z (cota L_z) pelo que a pressão na face só varia ao longo de x . A pressão é uniforme numa tira infinitesimal com comprimento segundo y e espessura δx_i :

$$\delta F_i = p L_y \delta x_i$$

Estendendo a um número infinito de tiras infinitesimais sobre a face resulta:

$$F_{EF} = \int_0^{L_x} (-\rho_{H_2O} a_x x - \rho_{H_2O} g L_z + C) L_y dx = -\rho_{H_2O} a_x L_y \frac{L_x^2}{2} - \rho_{H_2O} g L_z L_x L_y + C L_x L_y$$

- *Força hidrostática na face horizontal que contém a aresta GH*

Esta face é paralela à face que contém a aresta EF pelo que o cálculo da força é semelhante. A única diferença é que a cota da face é 0 em vez de L_z .

$$F_{GH} = \int_0^{L_x} (-\rho_{H_2O} a_x x + C) L_y dx = -\rho_{H_2O} a_x L_y \frac{L_x^2}{2} + C L_x L_y$$

- *Componente vertical da força hidrostática sobre o prisma*

$$F_{GH} - F_{EF} = \rho_{H_2O} g L_y L_x L_z = \rho_{H_2O} g V_{prisma}$$

O resultado anterior mostra que a componente vertical da força que se exerce sobre o prisma é uma vez mais a força de impulsão. O resultado seria diferente se o sistema estivesse sujeito a uma aceleração vertical. No caso da aceleração vertical ter sentido contrário ao do eixo dos z , a componente vertical da força sobre o prisma seria dada por:

$$F_{GH} - F_{EF} = \rho_{H_2O} (g - a_z) V_{prisma}$$

- *Força hidrostática na face vertical que contém a aresta FH*

Esta face é perpendicular ao eixo dos x (afastamento L_x) pelo que a pressão na face só varia ao longo de z . A pressão é uniforme numa tira infinitesimal com comprimento segundo y e espessura δz_i :

$$\delta F_i = p L_y \delta z_i$$

Estendendo a um número infinito de tiras infinitesimais sobre a face resulta:

$$F_{FH} = \int_0^{L_z} (-\rho_{H_2O} a_x L_x - \rho_{H_2O} g z + C) L_y dz = -\rho_{H_2O} g L_y \frac{L_z^2}{2} - \rho_{H_2O} a_x L_z L_x L_y + C L_z L_y$$

- *Força hidrostática na face vertical que contém GE*

Esta face é paralela à face que contém a aresta FH pelo que o cálculo da força é semelhante. A única diferença é que o afastamento da face é 0 em vez de L_x .

$$F_{GE} = \int_0^{L_z} (-\rho_{H_2O} g z + C) L_y dz = -\rho_{H_2O} g L_y \frac{L_z^2}{2} + C L_z L_y$$

- Componente horizontal (segundo x) da força sobre o prisma

$$F_{GE} - F_{FH} = \rho_{H_2O} a_x L_y L_x L_z = \rho_{H_2O} a_x V_{prisma}$$

- Força hidrostática na face de topo que contém as arestas representadas no plano do papel

Esta face é perpendicular ao eixo dos y (afastamento 0), pelo que a pressão na face varia não só ao longo de x como também ao longo de z . Não é possível encontrar uma tira infinitesimal onde a pressão seja uniforme, pelo que é seleccionado um elemento infinitesimal de dimensões δz_i e δx_i . No limite, quando estas dimensões tendem para 0, o elemento tende para um ponto. A força de pressão no elemento é dada por:

$$\delta F_i = p \delta x_i \delta z_i$$

Fazendo o somatório das forças no infinito número de elementos em que se pode dividir a face resulta:

$$\sum_{i=1}^{\infty} F_i = F_{FHEG} = \int_0^{L_z} \int_0^{L_x} (-\rho_{H_2O} a_x x - \rho_{H_2O} g z + C) dx dz = -\rho_{H_2O} g L_x \frac{L_z^2}{2} - \rho_{H_2O} a_x L_z \frac{L_x^2}{2} + C L_z L_x$$

Na face oposta, a força hidrostática tem igual intensidade mas sentido contrário. Assim, a resultante das forças que actuam no prisma segundo a direcção y é nula.

2.6 Exercícios de aplicação propostos

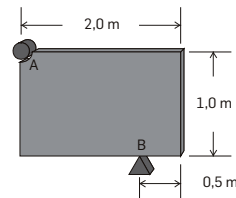
Forças distribuídas

2.1 Uma chapa de alumínio ($\rho = 6500 \text{ kg/m}^3$) é suportada, conforme mostra a figura, por um apoio de rotação em A e por um apoio simples (sem atrito) em B. Admita que a chapa tem espessura constante de 4 mm e calcule:

- O momento do peso da chapa em relação a A através dum integral e depois verifique o resultado por um método mais simples.
- As forças em A e B que equilibram a chapa.

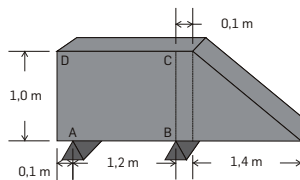
Admita que a secção da chapa (1m x 1m) mais perto de A tem espessura 4 mm enquanto a outra secção tem espessura 2 mm e calcule:

- O momento do peso da chapa em relação a A através dum integral e depois verifique o resultado por um método mais simples.
- As forças em A e B que equilibram a chapa.



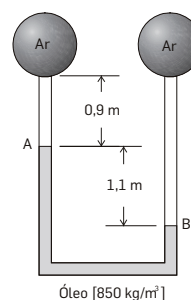
2.2 Uma chapa de aço ($\rho = 6500 \text{ kg/m}^3$) com 10 mm de espessura tem a forma de um trapézio e está “suportada” por apoios simples conforme indica a figura. Calcule:

- O peso da chapa? Calcule por um integral e verifique por outro processo.
- O momento do peso da chapa em relação ao apoio A?
- A força exercida pela chapa em cada um dos apoios?
- Mantendo o apoio A fixo e aproximando deste o apoio B, a distância mínima entre A e B para que o equilíbrio se mantenha?
- A resultante das forças que a parte da chapa para a esquerda da linha BC faz sobre a parte à direita desta linha? Considere o apoio em B como estando imediatamente à direita da linha BC.



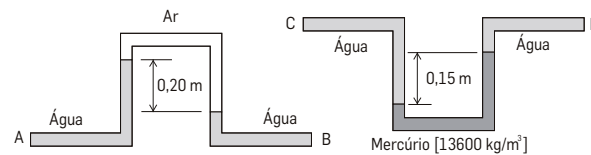
Manômetros

2.3 Qual a diferença de pressão entre os pontos A e B representados na figura expressa em: a) dynes/cm²; b) cm de c.a. (coluna de água); c) mm Hg; d) Pa; e) atm; f) psi (lbf/in²).



2.4 Para medir a diferença de pressão entre dois pontos numa tubagem que transporta um líquido é vulgar usar um dos tipos de manómetros indicados na figura.

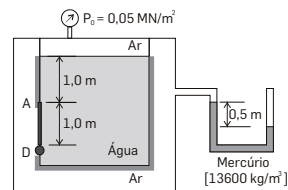
- Calcule, as diferenças de pressão $p_A - p_B$ e $p_C - p_D$ em dynes/cm²;
- Se no manómetro da direita em vez de 0,15 m o desnível for h , estabeleça uma expressão para $p_C - p_D$ em função de h , g e da massa volúmica dos líquidos.



2.5 Numa sala de 3,0 m de altura, qual a diferença de pressão entre o chão e o tecto, se a temperatura for 25 °C e a pressão ao nível do chão 1 atm ? Dê a resposta em mm c. a.

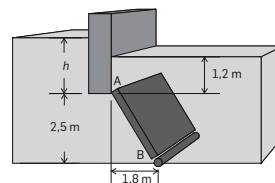
Força hidrostática em superfícies planas

2.6 Na figura, AD representa um corte segundo a altura de uma porta triangular (triângulo equilátero), sendo o eixo de rotação D horizontal. Em A existe um batente que impede a comporta de abrir. Calcule:

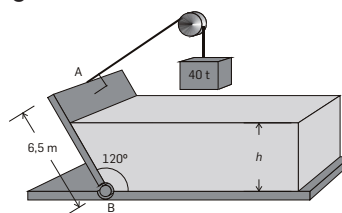


- A força a que a porta está sujeita por acção do ar e da água.
- A força no eixo de rotação D.
- A força mínima em A que abre a porta (direcção e sentido).

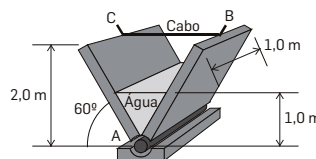
2.7 A comporta AB representada na figura tem 2,1 m de largura (direcção perpendicular ao plano do papel) e pesa 1,4 ton. A comporta é articulada em B por meio de um eixo de rotação e está sustentada numa parede lisa (A). Determine o nível de água mínimo, h , para o qual a comporta abre.



2.8 A comporta representada na figura tem 3.5 m de largura (direcção perpendicular ao plano do papel) e está presa ao chão por meio de um eixo de rotação em B. Um cabo (em A) com um peso de 40 t mantém a comporta na posição da figura. Desprezando o peso da comporta determine o nível de água h .

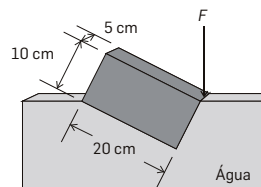


2.9 A figura representa uma comporta em forma de calha. Os lados da comporta têm forma rectangular (comprimento 1,0 m na direcção perpendicular ao plano do papel). Em A existe um eixo de rotação. Calcule a tensão no cabo.



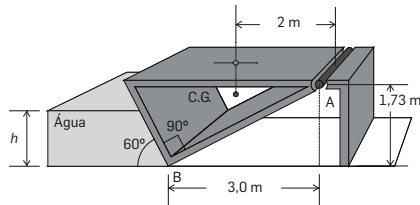
2.10 A caixa paralelepípedica maciça, representada na figura, tem peso W e 5 cm de largura (direcção perpendicular ao plano do papel). Quando mergulhada em água e sujeita à força F fica na posição de equilíbrio que a figura mostra. Calcule:

- A resultante da força hidrostática sobre a caixa
- A massa volúmica do material de que é feita a caixa, bem como a intensidade da força F .

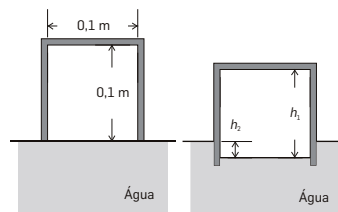


2.11 A comporta representada na figura retém água com uma altura h . A comporta pesa 750 kg por metro de largura (direcção perpendicular ao plano do papel), está articulada no eixo de rotação A e simplesmente pousada em B.

- Considere $h = 1,5$ m e calcule as forças por metro de largura de comporta que se exercem no eixo de rotação A e no apoio B.
- Calcule o valor mínimo de h para a comporta abrir.

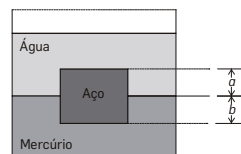


2.12 Um copo cilíndrico é colocado na posição invertida sobre a superfície da água. Ao abandonar o copo, ele fica na posição indicada. Sabendo que a espessura do vidro do copo é 8 mm e que a massa volúmica do vidro é 7500 kg/m^3 , calcule h_1 e h_2 . Diga se a força de impulsão é uma parcela importante no balanço de forças.



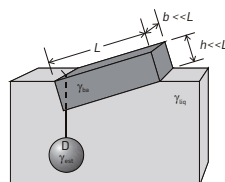
2.13 Um bloco paralelepípedo de aço ($\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$) é mergulhado num banho de mercúrio ($\rho = 13600 \text{ kg/m}^3$) coberto por água. O bloco fica a flutuar na posição indicada na figura.

- Calcule a razão a/b usando as equações fundamentais da hidrostática.
- Verifique a resposta anterior usando o princípio de Arquimedes.



2.14 Uma barra uniforme com dimensões $L \times h \times b$ e de peso volúmico γ_{ba} flutua ao longo da diagonal, tal como mostra a figura, quando tem suspensa numa das faces de topo, uma esfera pesada (γ_{esf}).

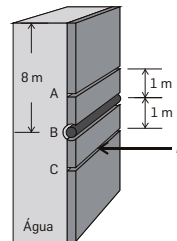
- Mostre que esta situação só é possível se $\gamma_{ba} = \frac{\gamma_{liq}}{3}$.
- Com a condição anterior mostre que o diâmetro da esfera tem que ser dado por:



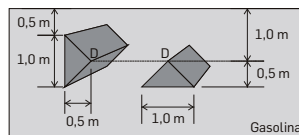
$$D = \left[\frac{Lhb}{\pi \left(\frac{\gamma_{esf}}{\gamma_{liq}} - 1 \right)} \right]^{1/3}$$

2.15 A comporta rectangular ABC, com 2,0 m de comprimento na direcção perpendicular ao plano do papel, abre por rotação do eixo B. Calcule:

- A força P que se tem de aplicar para manter a comporta fechada quando a altura de água acima do eixo é de 8,0 m.
- A força no eixo de rotação B.
- A força hidrostática na comporta, se esta tiver a forma de um meio cilindro com eixo de rotação em B e raio 1,0 m.
- No caso da alínea c, o momento da força hidrostática relativamente ao eixo de rotação B.

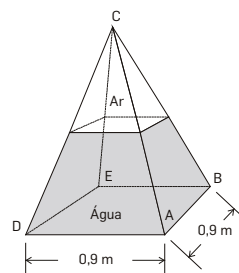


2.16 Dois sólidos prismáticos com faces de topo triangulares (triângulos isósceles) estão mergulhados em gasolina ($\rho = 720 \text{ kg/m}^3$). As faces estão contidas no mesmo plano (plano do papel) e os vértices D estão a 1,0 m de profundidade. Calcular a força que a gasolina exerce sobre cada uma das faces triangulares.



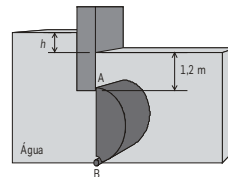
2.17 Um recipiente tem a forma de uma pirâmide regular de altura 2,4 m e base quadrangular (0,9 m x 0,9 m). No recipiente há água até 1,2 m de altura e sobre a água, o ar está à pressão atmosférica (760 mm de Hg). Calcule:

- As componentes (direcção sentido e intensidade) da força hidrostática nas faces ABC e DEC.
- A força hidrostática na base ABED.
- A direcção, sentido e intensidade da força hidrostática sobre a pirâmide.



Forças em superfícies curvas

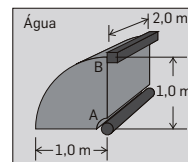
2.18 A comporta AB representada na figura é um meio cilindro maciço de diâmetro 2,5 m e 2,1 m de comprimento.



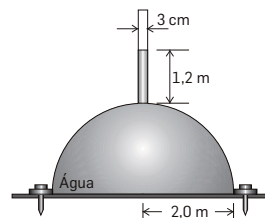
Calcule a resultante da força hidrostática que se exerce na comporta, bem como o momento dessa resultante relativamente ao eixo de rotação B. Tome $h = 3,0$ m.

2.19 Um barril com a forma de um quarto de cilindro está mergulhado em água e a sua posição é mantida por um eixo de rotação A, em torno do qual o barril pode rodar, e por um batente fixo B ao qual o barril encosta. O comprimento do quarto de cilindro na direcção perpendicular ao plano do papel é 2,0 m.

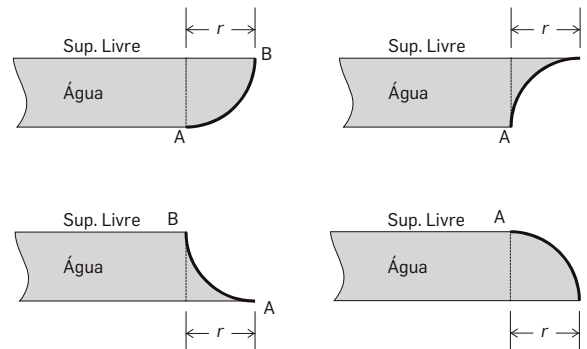
- Calcule as componentes da força hidrostática a que o barril está sujeito.
- Calcule o momento de cada componente em relação ao eixo A.
- Calcule as forças exercidas pelo eixo A e batente B no equilíbrio.



2.20 Uma cápsula semi-esférica representada na figura pesa 30 kN, está cheia de água e está presa ao chão por 6 parafusos igualmente espaçados. Qual a força mínima que cada parafuso tem que exercer ?



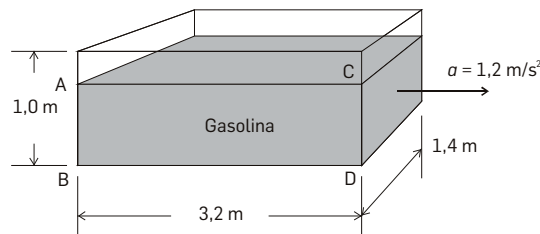
2.21 Para cada uma das figuras, determinar as componentes da força que a água exerce sobre a comporta AB (1/4 de cilindro com 1,0 m de comprimento na direcção perpendicular ao papel e raio 0,5 m). Use o "método das projecções".



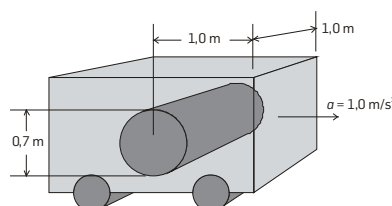
Equilíbrio relativo

2.22 Um recipiente contém gasolina ($\rho = 720 \text{ kg/m}^3$) e está sujeito a uma aceleração constante linear, com direcção horizontal (esquerda para a direita) de intensidade $1,2 \text{ m/s}^2$. Quando parado a altura de gasolina no tanque é $0,8 \text{ m}$. Calcular:

- O ângulo entre o plano horizontal e a superfície livre.
- A força que a gasolina exerce no fundo do recipiente e nas faces perpendiculares ao plano do papel que contêm as arestas AB e CD.



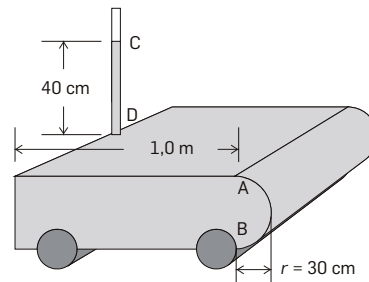
2.23 Num tanque paralelepipedico fechado repleto de água, está mergulhado um cilindro. O eixo do cilindro é horizontal e está colocado perpendicularmente à direcção de deslocamento do tanque. O cilindro tem $1,0 \text{ m}$ de comprimento e $0,7 \text{ m}$ de diâmetro. Quais as componentes horizontal e vertical da força hidrostática a que o cilindro está sujeito, quando a aceleração é constante e igual a 1 m/s^2 .



2.24 Calcule a força hidrostática no meio cilindro representado na figura (comprimento 1,0 m na direcção perpendicular ao plano do papel) nas duas situações seguintes:

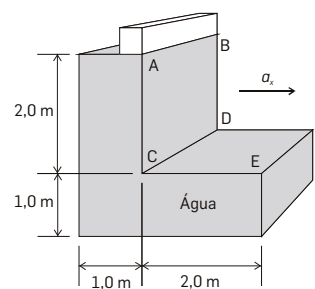
- Quando o “carro” está parado.
- Quando o “carro” tem uma aceleração horizontal de 1 m/s^2 .

Nota: o tubo CD é um tubo capilar e está aberto para a atmosfera.



2.25 O tanque de água representado na figura é fechado, excepto ao longo de uma fenda que está em contacto com a atmosfera .

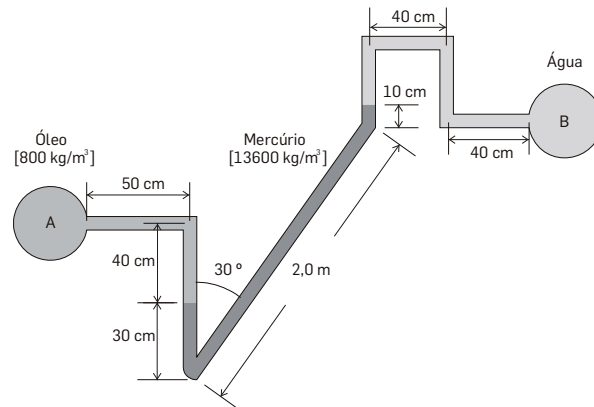
- Para que valor da aceleração a_x é que a pressão da água em E é igual à atmosférica ?
- Descreva sucintamente o que sucede à pressão em E, à medida que são aplicadas acelerações crescentes.
- Para $a_x = 1 \text{ m/s}^2$ calcule a grandeza, direcção e sentido da força hidrostática sobre as superfícies ABCD e CDEF (por unidade de comprimento na direcção perpendicular ao papel).



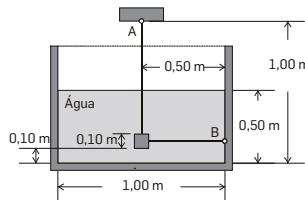
2.26 Na figura estão representados dois recipientes esféricos A e B ligados entre si.

- Calcule a diferença de pressão entre A e B expressa em mm c. a.
- Imagine o conjunto da figura no interior de um veículo que se desloca na horizontal com aceleração de 2 m/s^2 . Qual a diferença de pressão entre A e B?
- Admita que o conjunto da figura cai na vertical em queda livre. Durante a queda qual a diferença de pressão entre A e B?

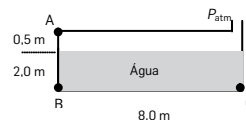
- d. Repita a alínea c supondo que a aceleração durante a queda é de 5 m/s^2 .



2.27 Um recipiente aberto para a atmosfera contém água até 0,50 m de altura. Um bloco cúbico de madeira ($\rho = 880 \text{ kg/m}^3$) com 0,10 m de aresta está mergulhado na água e é mantido na posição indicada na figura por dois cabos “presos” no centro de duas das faces do bloco. Se aplicar ao sistema uma aceleração horizontal de 1 m/s^2 (da esquerda para a direita), calcule a direcção sentido e intensidade das forças que os cabos exercem sobre o bloco.



2.28 O tanque representado na figura sofre uma aceleração da esquerda para a direita de 10 m/s^2



Calcule, durante a aceleração:

- A pressão nos pontos A, B, C.
- A força no fundo do tanque por metro de largura do tanque.
- A força na face vertical esquerda por metro de largura do tanque.
- A força na face de topo do tanque por metro de largura do tanque.

Exame Janeiro de 2003

3. CINEMÁTICA DO ESCOAMENTO DE FLUIDOS

3.1 Descrição Eulereana e Lagrangeana de um escoamento

Há duas maneiras de analisar/descrever em termos cinemáticos e dinâmicos o escoamento de um fluido. Uma, a chamada Eulereana, descreve todo o campo de escoamento quer em termos de velocidade $v = f(x, y, z, t)$, quer em termos de pressão $p = f(x, y, z, t)$. Outra, a chamada Lagrangeana descreve o escoamento de uma partícula de fluido no espaço e no tempo. Comparemos estas duas formas de descrever o escoamento, com duas formas de descrever o tráfego numa auto-estrada. Um certo comprimento de auto-estrada é seleccionado para sistema. Num dado intervalo de tempo muitos carros não identificados entram e saem do sistema. Se o controlador de tráfego ignorar a identidade dos carros e se preocupar com a velocidade dos carros que passam em determinados locais ao longo do tempo, ele está a descrever o tráfego tomando uma aproximação Eulereana. Ao invés se o controlador estiver interessado na velocidade e posição no sistema ao longo do tempo de um carro identificado, ele está a descrever o tráfego tomando uma aproximação Lagrangeana.

Um outro exemplo elucidativo é o da descrição do campo de temperatura de um rio onde, num certo local, há uma fonte emissora que lança líquido a uma temperatura elevada. Se forem colocados em vários pontos, ao longo do rio, instrumentos de medida fixos e a temperatura for registada ao longo do tempo em cada um desses pontos, é possível conhecer o campo de temperatura em cada instante. Este é o método de descrição Eulereano. Contudo, com este método, não se sabe qual a temperatura de uma partícula de fluido ao atravessar aquele campo. Para tal, conhecido o campo de temperatura em cada instante, seria necessário conhecer a localização da partícula em função do tempo.

Se em vez de instrumentos de medida em vários pontos, for colocado um instrumento de medida "preso" a uma partícula (ou mais partículas), obtém-se a descrição da temperatura da partícula em função do tempo. Este é o método de descrição Lagrangeano. O campo de temperatura não seria conhecido, a menos que se soubesse a localização das partículas ao longo do tempo.

A descrição Eulereana é habitualmente usada na maior parte dos estudos em Mecânica de Fluidos. Contudo, há casos em que a Lagrangeana permite um maior conhecimento, por exemplo, quando se injecta no sangue uma partícula colorida cujo trajecto ao longo do corpo pode ser seguido por instrumentação exterior. Neste caso estuda-se o fluxo sanguíneo por um método Lagrangeano.

3.2 Campo de velocidade

Determinar o campo de velocidade $v = f(x, y, z, t)$ é muitas vezes resolver integralmente um problema de escoamento de um fluido, já que o conhecimento de outras propriedades decorre deste, por exemplo, o conhecimento do campo de pressão. A velocidade é como se sabe uma grandeza vectorial.

$$\vec{v}(x, y, z, t) = v_x(x, y, z, t)\vec{i} + v_y(x, y, z, t)\vec{j} + v_z(x, y, z, t)\vec{k} \quad (3.1)$$

Outras propriedades cinemáticas são deriváveis matematicamente partindo do conhecimento do campo de velocidade, tais como o vector deslocamento e o vector aceleração.

3.3 Campo de aceleração

Por definição o vector aceleração traduz a variação do vector velocidade com o tempo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (3.2)$$

ou

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z \quad (3.3)$$

As diferentes parcelas do vector aceleração são usualmente designadas por:

- aceleração total ou substancial (derivada total ou substancial)- $\left[\frac{d\vec{v}}{dt} \text{ ou } \frac{D\vec{v}}{Dt} \right]$
- aceleração local (derivada local)- $\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right]$
- aceleração convectiva.- $\left[v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right]$

Recorrendo ao operador gradiente:

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.4)$$

e ao produto interno de vectores, o termo da aceleração convectiva toma a seguinte forma:

$$v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \quad (3.5)$$

O vector aceleração pode assim ser escrito de uma forma mais compacta:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \quad (3.6)$$

A mesma simbologia pode ser usada para descrever a variação no espaço e no tempo de outras propriedades contínuas de um fluido (quer escalares, quer vectoriais), por exemplo, a propriedade escalar temperatura - $T = f(x, y, z, t)$

A variação total ou substancial da temperatura em ordem ao tempo é dada por:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T \quad (3.7)$$

Para perceber o significado físico destas derivadas, retome-se o exemplo do rio com uma fonte emissora de água quente num dado ponto bem localizado. Comece-se por supor que a fonte emissora lança água sempre à mesma temperatura, que as condições exteriores não se alteram ao longo do tempo, e que a velocidade do rio em cada ponto é constante ao longo do tempo.

Pretende-se saber a variação total de temperatura. Se for seguida uma aproximação Eulereana, mergulha-se o medidor de temperatura num ponto, ou vários medidores em vários pontos, e mede-se a temperatura ao longo do tempo. Conclui-se que ao longo do tempo a temperatura não varia num ponto, mas que é diferente de ponto para ponto. Em termos físicos, o campo de temperatura é estacionário, mas não uniforme. Em termos matemáticos, a derivada local da temperatura é nula, mas a derivada total não:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \text{mas} \quad \frac{DT}{Dt} \neq 0$$

E como conhecer a derivada convectiva? Seguindo uma aproximação Lagrangeana, colocam-se dois medidores, um de temperatura e outro de velocidade (direcção, sentido e intensidade), “presos” a uma partícula (ou mais), e regista-se a temperatura e a velocidade durante o tempo que a

partícula demora a atravessar o campo estacionário mas não uniforme. Destas medições obtém-se informação que permite calcular a derivada convectiva da temperatura da partícula nos pontos por onde passou:

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \vec{v} \cdot \nabla T$$

Percebe-se agora que se chama derivada convectiva por estar associada ao escoamento do fluido.

Resta abordar o caso de a fonte emissora lançar líquido a uma temperatura que varia ao longo do tempo. Neste caso, a temperatura no campo além de não ser uniforme, varia em cada ponto com o tempo, i.e., em cada instante há um campo de temperatura diferente. A variação da temperatura de uma partícula ao atravessar o campo tem de ser calculada pela soma da variação local com a variação convectiva:

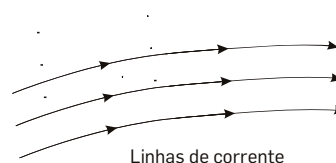
$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z}$$

3.4 Visualização do campo de escoamento

3.4.1 Linhas de corrente, trajectórias, linhas de rasto e linhas do tempo

Embora o campo de velocidade (e de pressão) descreva de uma forma precisa um escoamento, foi necessário encontrar formas simples de o visualizar. A forma mais simples é seguir uma partícula de fluido ao longo (espaço e tempo) do seu escoamento, i.e., conhecer a sua *trajectória*.

Outra, a mais usada, é através das chamadas *linhas de corrente*. Estas linhas são obtidas/desenhadas de forma a serem sempre tangentes aos vectores velocidade das partículas de fluido em escoamento num dado instante.

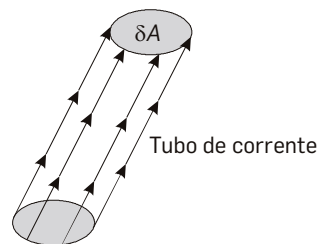


Linhas de corrente

Num escoamento estacionário a orientação das linhas de corrente é fixa no tempo e as trajectórias das partículas coincidem com as linhas de corrente. Num escoamento não estacionário as linhas de corrente

são somente uma representação instantânea do campo de escoamento, não havendo correspondência entre as linhas de corrente e a trajetória das partículas.

As linhas de corrente em torno de uma área infinitesimal formam um tubo, designado por tubo de corrente. Por definição de linha de corrente, não há saída de partículas de fluido através das paredes laterais de um tubo de corrente.



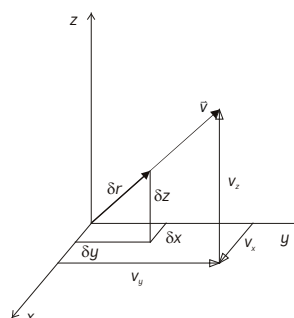
Outra forma de visualizar um escoamento, além das linhas de corrente e das trajetórias das partículas de fluido, é através das chamadas *linhas de rasto* e das *linhas de tempo*.

A *linha de rasto* é o lugar geométrico das partículas que passaram (em instantes anteriores) por um dado ponto de coordenadas (x_0, y_0) .

A *linha de tempo* é “desenhada” unindo, num dado instante, um conjunto de partículas do fluido. O escoamento é visualizado seguindo em instantes sucessivos a evolução desta linha no espaço.

Em escoamentos estacionários as linhas de corrente, as trajetórias e as linhas de rasto coincidem.

As linhas de corrente podem ser calculadas analiticamente partindo do conhecimento do campo de velocidade. Considere-se um vector velocidade \vec{v} tangente ao arco de comprimento infinitesimal δr desenhado ao longo da linha de corrente.



Por condições de proporcionalidade:

$$\frac{\partial x}{v_x} = \frac{\partial y}{v_y} = \frac{\partial z}{v_z} = \frac{\partial r}{|\vec{v}|} \quad (3.8)$$

ou

$$\frac{dx}{dy} = \frac{v_x}{v_y} \quad \frac{dx}{dz} = \frac{v_x}{v_z} \quad \frac{dy}{dz} = \frac{v_y}{v_z} \quad (3.9)$$

A expressão analítica das linhas de corrente obtém-se integrando as equações anteriores, por simples separação de variáveis, tomando t constante. Para tal é necessário conhecer, quer o campo de velocidade, quer as coordenadas de um ponto da linha de corrente, (x_0, y_0, z_0) .

Como exemplo, pretende-se calcular e desenhar as linhas de corrente de um campo de velocidade que é expresso analiticamente por:

$$v_x = \frac{x}{1+t} \quad v_y = \frac{y}{1+2t} \quad v_z = 0$$

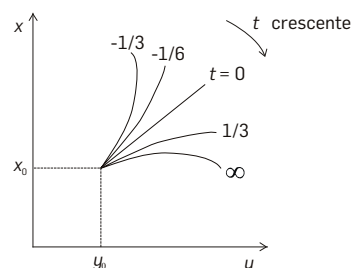
O escoamento é bidimensional ($v_z = 0$), pelo que as linhas de corrente são paralelas ao plano xy . É igualmente um escoamento dependente do tempo, i.e., não estacionário.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \frac{v_x}{v_y} \rightarrow \frac{dx}{\frac{x}{1+t}} = \frac{dy}{\frac{y}{1+2t}} \rightarrow \int_{x_0}^x \frac{1+t}{x} dx = \\ &= \int_{y_0}^y \frac{1+2t}{y} dy \rightarrow (1+t) \ln \frac{x}{x_0} = (1+2t) \ln \frac{y}{y_0} \end{aligned}$$

ou

$$y = y_0 \left(\frac{x}{x_0} \right)^n \quad \text{com} \quad n = \frac{1+t}{1+2t}$$

Esta é a equação das linhas de corrente que passam por (x_0, y_0) ao longo de t . Na figura seguinte podem observar-se as partículas de fluido a deslocarem-se no tempo para a direita.



A trajectória da partícula que no instante $t = 0$ passou no ponto de coordenadas (x_0, y_0) não coincide no estado não-estacionário com a linha de corrente para $t = 0$. A equação desta trajectória pode ser calculada:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = \frac{x}{1+t}, \quad \frac{dy}{dt} = v_y = \frac{y}{1+2t}$$

Integrando obtém-se:

$$x = C_1(1+t), \quad y = C_2(1+2t)^{1/2}$$

No instante $t = 0$ a partícula de fluido passa pelo ponto de coordenadas (x_0, y_0) pelo que, $C_1 = x_0$ e $C_2 = y_0$. Eliminando t das equações anteriores resulta:

$$y = y_0 \left[1 + 2 \left(\frac{x}{x_0} - 1 \right) \right]^{1/2}$$

Esta é a equação da trajectória da partícula que passa no ponto (x_0, y_0) no instante $t = 0$.

A equação da linha de rasto das partículas que passaram no ponto (x_0, y_0) em instantes anteriores a t_0 pode ser igualmente calculada.

Designem-se os instantes anteriores a t_0 por ζ , pelo que a condição inicial é dada por $x = x_0, y = y_0$ para $t = \zeta$.

$$\frac{dx}{dt} = v_x = \frac{x}{1+t}, \quad \frac{dy}{dt} = v_y = \frac{y}{1+2t}$$

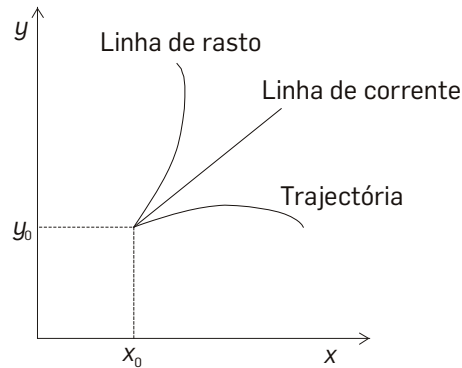
Integrando entre ζ e t_0 :

$$x = \frac{x_0(1+t_0)}{1+\zeta}, \quad y = y_0 \left(\frac{1+2t_0}{1+2\zeta} \right)^{1/2}$$

Estas são as equações da linha de rasto das partículas de fluido que passaram no ponto (x_0, y_0) em instantes $\zeta < t_0$. A linha de rasto pode ser traçada fixando t_0 e dando valores a ζ . Alternativamente, pode-se eliminar ζ resultando:

$$\left(\frac{y}{y_0} \right)^2 = \frac{1+2t_0}{1+2 \left[(1+t_0) \left(\frac{x_0}{x} \right) - 1 \right]}$$

A figura seguinte mostra a linha de corrente que passa no ponto (x_0, y_0) no instante $t = 0$, a trajectória da partícula de fluido que passou no instante $t = 0$ no ponto (x_0, y_0) e a linha de rasto das partículas que em instantes anteriores a $t = 0$ passaram no ponto (x_0, y_0) .



3.5 Vectores velocidade e aceleração ao longo de uma linha de corrente

Num escoamento estacionário, o vector velocidade é tangente à linha de corrente e a sua intensidade pode ser expressa em termos do comprimento da linha de corrente, δs , percorrido pelo elemento de fluido no intervalo de tempo δt .

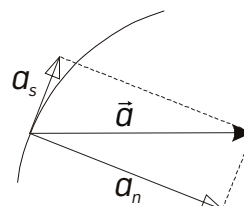
$$v_s = \frac{ds}{dt} \quad (3.10)$$

em que v_s representa a velocidade na direcção da linha de corrente. A componente numa outra qualquer direcção é obtida projectando v_s segundo essa direcção.

Por definição, a aceleração de uma partícula de fluido na direcção tangencial à linha de corrente é dada por:

$$a_s = \frac{dv_s}{dt} \quad (3.11)$$

Além da componente tangencial, há a componente normal do vector aceleração. A componente tangencial expressa a variação da intensidade do vector velocidade, enquanto que a componente normal traduz a mudança de direcção deste vector.



Para exprimir as componentes do vector aceleração, considerem-se as linhas de corrente representadas na figura seguinte, as quais não são nem rectas nem estão equidistantes. No intervalo de tempo δt uma partícula de fluido percorre uma distância δs ao longo da linha de corrente central e a sua velocidade varia tanto em intensidade como em direcção. A variação de intensidade é traduzida pelo aproximar das linhas de corrente.

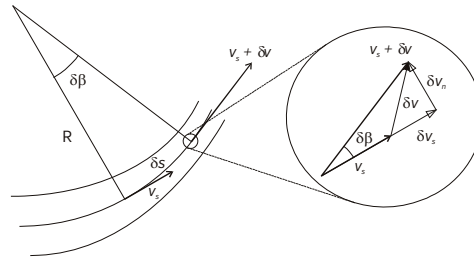
A variação da intensidade ao longo de δs é dada por:

$$\delta v_s = \frac{dv_s}{ds} \delta s \quad (3.12)$$

Mas $\delta s = v_s \delta t$ logo:

$$\frac{dv_s}{dt} = v_s \frac{dv_s}{ds} \rightarrow a_s = \frac{1}{2} \frac{dv_s^2}{ds} \quad (3.13)$$

Esta equação exprime a componente tangencial da aceleração.



Aplicando o mesmo raciocínio para a componente normal da velocidade resulta:

$$\delta v_n = \frac{dv_n}{ds} \delta s \rightarrow \frac{dv_n}{dt} = v_s \frac{dv_n}{ds} \quad (3.14)$$

Recorrendo à figura anterior:

$$\tan \delta \beta = \frac{\delta s}{R} \wedge \tan \delta \beta = \frac{\delta v_n}{v_s + \delta v_s} \approx \frac{\delta v_n}{v_s} \rightarrow \frac{dv_n}{ds} = \frac{v_s}{R} \quad (3.15)$$

Substituindo na equação anterior obtém-se:

$$a_n = \frac{v_s^2}{R} \quad (3.16)$$

em que R representa o raio de curvatura da linha de corrente. O vector aceleração nas coordenadas da linha de corrente é dado por:

$$\vec{a} = v_s \frac{dv_s}{ds} \vec{s} + \frac{v_s^2}{R} \vec{n} \quad (3.17)$$

3.6 Exemplos propostos de aplicação

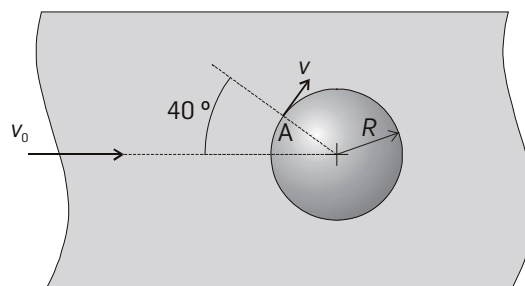
3.1 O campo de velocidade de um escoamento é dado por $\vec{v} = x\vec{i} + x(x-1)(y+1)\vec{j}$. Desenhe a linha de corrente que passa no ponto (x_0, y_0) e compare-a com a linha de rasto das partículas que passam nesse ponto.

3.2 O campo de velocidade de um escoamento no plano xy é dado por: $v_x = 3 \text{ m/s}$, $v_y = 6 \text{ m/s}$ para $0 \text{ s} < t < 20 \text{ s}$ e $v_x = -4 \text{ m/s}$, $v_y = 0 \text{ m/s}$ para $20 \text{ s} < t < 40 \text{ s}$. Se a partir do instante $t = 0$ se injectar tinta no ponto de coordenadas $(x = y = z = 0)$ desenhe:

a- As trajectórias de duas partículas de fluido que passam na origem, respectivamente nos instantes $t = 0 \text{ s}$ e $t = 20 \text{ s}$.

b- As linhas de corrente que passam no ponto $(x = y = z = 0)$ nos instantes $t = 10 \text{ s}$ e $t = 30 \text{ s}$.

3.3 Um fluido está em escoamento em torno de uma esfera tal como mostra a figura. Longe da esfera a velocidade é $v_0 = 30 \text{ m/s}$, e na zona frontal da esfera é $v = \frac{3}{2}v_0 \sin\theta$. Determine as componentes normal e tangencial da aceleração no ponto A sabendo que o raio da esfera é $0,20 \text{ m}$.



4 EQUAÇÃO DE BERNOULLI

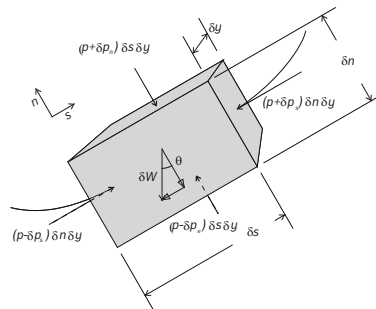
4.1 Introdução

A equação de Bernoulli é uma equação muito simples, frequentemente aplicada, e muito rica em considerações estruturantes do raciocínio para a compreensão da Mecânica de Fluidos. Por estas razões decidiu-se introduzir este capítulo dedicado exclusivamente a esta equação. No capítulo seguinte este tema será novamente abordado numa perspectiva complementar.

4.2 Equação de Bernoulli ao longo de uma linha de corrente

A equação de Bernoulli é aplicável sempre que a intensidade das forças de corte é de uma ordem de grandeza inferior à intensidade das outras forças que se desenvolvem num fluido, nomeadamente forças de pressão e gravidade.

Considere-se um elemento de fluido infinitesimal de dimensões δn e δs no plano da figura e δy na direcção normal a este plano.



Em estado estacionário, da aplicação 2ª lei de Newton segundo a direcção da linha de corrente, s , resulta:

$$\sum \delta F_s = \delta m a_s = \delta m v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} = \rho \delta V v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} \quad (4.1)$$

em que v_s representa a velocidade do elemento de fluido segundo a direcção da linha de corrente, δm e δV a massa e o volume do elemento infinitesimal, a_s a aceleração do elemento segundo a linha de corrente e $\sum \delta F_s$ o somatório das forças aplicadas ao elemento de fluido segundo a direcção da linha de corrente.

Forças aplicadas sobre o elemento de fluido.

- *Força da gravidade segundo a direcção da linha de corrente:*

$$\delta W_s = -\rho g \sin \theta \delta V \quad (4.2)$$

- *Força de pressão segundo a direcção da linha de corrente:*

Sendo p a pressão no centro do elemento, os valores médios da pressão nas faces perpendiculares à linha de corrente s são: $p + \delta p_s$ e $p - \delta p_s$ com δp_s dado por:

$$\delta p_s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \delta s \right) \quad (4.3)$$

A resultante das forças de pressão segundo s é por conseguinte:

$$\begin{aligned} \delta F_{p,s} &= (p - \delta p_s) \delta n \delta y - (p + \delta p_s) \delta n \delta y = \\ &= -2\delta p_s \delta n \delta y = -\frac{\partial p}{\partial s} \delta s \delta n \delta y = -\frac{\partial p}{\partial s} \delta V \end{aligned} \quad (4.4)$$

- *Somatório das forças aplicadas ao elemento de fluido na direcção da linha de corrente.*

$$\sum \delta F_s = \delta W_s + \delta F_{p,s} = \left(-\rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial s} \right) \delta V \quad (4.5)$$

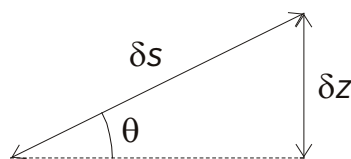
Combinando as equações (4.1) e (4.5) obtém-se:

$$\rho v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} \delta V = \left(-\rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial s} \right) \delta V \quad (4.6)$$

A equação (4.6) pode ser re-escrita numa forma mais simples. Aplicando as regras de derivação:

$$v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_s^2}{\partial s} \quad (4.7)$$

Por considerações geométricas



$$\sin \theta = \frac{\partial z}{\partial s} \quad (4.8)$$

Ao longo da linha de corrente s , a coordenada perpendicular n tem valor constante, pelo que:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial s} ds + \frac{\partial p}{\partial n} dn \rightarrow dp = \frac{\partial p}{\partial s} ds \quad (4.9)$$

Substituindo as equações (4.7) a (4.9) na equação (4.6) obtém-se:

$$-\rho g \frac{dz}{ds} - \frac{dp}{ds} = \frac{1}{2} \rho \frac{dv^2}{ds} \rightarrow dp + \frac{1}{2} \rho dv^2 + \rho g dz = 0 \quad (4.10)$$

Integrando:

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + gz = C \quad (4.11)$$

em que C representa um valor constante.

Se a massa volúmica puder ser considerada independente da pressão, fluido incompressível, líquidos e gases a baixa velocidade, a equação anterior toma a forma:

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gz = C \quad (4.12)$$

Esta equação é conhecida por equação de Bernoulli ao longo de uma linha de corrente.

Na sua aplicação é necessário tomar atenção às hipóteses formuladas:

- as forças de corte foram consideradas desprezáveis quando comparadas com as forças de inércia e gravidade (escoamento "sem atrito"), o fluido foi considerado incompressível e o escoamento estacionário;
- a equação aplica-se ao longo de uma linha de corrente;
- não há troca de energia calorífica entre o fluido e o exterior;
- não há sistemas mecânicos a fornecer energia mecânica ao fluido, nem a receber energia mecânica do fluido.

A equação de Bernoulli traduz o conhecido princípio trabalho-energia: o trabalho realizado pela resultante das forças exteriores, pressão e gravidade, que actuam num elemento de fluido é igual à variação da energia cinética do elemento. Este trabalho é igual ao produto da dis-

tância percorrida pelo elemento, numa dada direcção, pela intensidade da resultante das forças aplicadas nessa direcção.

A equação de Bernoulli aparece frequentemente escrita sob outras formas:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gz = C \quad (4.13)$$

$$\frac{p}{g\rho} + \frac{1}{2g}v^2 + z = C \quad (4.14)$$

Os termos da equação (4.13) representam energia por unidade de massa enquanto os termos da equação (4.14) representam energia por unidade de peso, igualmente designados por carga de escoamento (pressão), potencial e cinética e são expressos em unidades de comprimento.

A equação de Bernoulli pode também ser interpretada de uma forma complementar, talvez mais simples de compreender: ao longo de uma linha de corrente, a energia mecânica total transportada por um elemento de fluido é constante. Esta energia mecânica total é a soma das energias potencial, cinética e de escoamento. A variação de uma destas formas de energia mecânica implica a variação de pelo menos uma das outras duas, para que a energia mecânica total permaneça constante.

4.3 2ª Lei de Newton na direcção normal a uma linha de corrente

Em muitos escoamentos uni-dimensionais as linhas de corrente são rectas ou bem aproximadas por rectas, e a variação do vector velocidade na direcção normal às linhas de corrente (aceleração segundo n) é desprezável quando comparada com a sua variação na direcção das linhas de corrente (aceleração segundo s). Contudo é um bom exercício estabelecer a 2ª lei de Newton para o caso desta variação não ser desprezável.

Analisando a figura onde estão esquematizadas as forças que se exercem num elemento de fluido e aplicando a 2ª lei de Newton segundo a direcção normal, n , resulta:

$$\sum \delta F_n = \delta m a_n = \frac{v_s^2}{R} \delta m = \frac{v_s^2}{R} \rho \delta V \quad (4.15)$$

em que R representa o raio de curvatura da linha de corrente.

Forças aplicadas sobre o elemento de fluido.

- *Força da gravidade na direcção normal à linha de corrente:*

$$\delta W_n = -\rho g \cos \theta \delta V \quad (4.16)$$

- *Força de pressão na direcção normal à linha de corrente:*

Se a pressão no centro do elemento for p , os valores médios da pressão no topo e na base do elemento de fluido são respectivamente $p + \delta p_n$ e $p - \delta p_n$, com δp_n dado por:

$$\delta p_n = \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\delta n}{2} \quad (4.17)$$

A resultante das forças de pressão segundo n é dada por:

$$\begin{aligned} \delta F_{p,n} &= (p - \delta p_n) \delta s \delta y - (p + \delta p_n) \delta y \delta s = \\ &= -2\delta p_n \delta s \delta y = -\frac{\partial p}{\partial n} \delta s \delta n \delta y = -\frac{\partial p}{\partial n} \delta V \end{aligned} \quad (4.18)$$

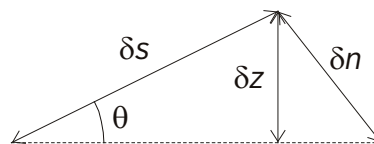
- *Somatório das forças aplicadas ao elemento de fluido na direcção normal à linha de corrente.*

$$\sum \delta F_n = W_n + \delta F_{p,n} = \left(-\rho g \cos \theta - \frac{\partial p}{\partial n} \right) \delta V \quad (4.19)$$

Combinando as equações. (4.15) a (4.19) obtém-se:

$$\rho \frac{V_s^2}{R} \delta V = \left(-\rho g \cos \theta - \frac{\partial p}{\partial n} \right) \delta V \quad (4.20)$$

Por considerações geométricas:



$$\cos \theta = \frac{\delta z}{\delta n} \quad (4.21)$$

Na direcção normal à linha de corrente a coordenada s tem valor constante, pelo que:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial s} ds + \frac{\partial p}{\partial n} dn \rightarrow dp = \frac{\partial p}{\partial n} dn \quad (4.22)$$

Substituindo as equações (4.21) e (4.22) em (4.20), obtém-se:

$$-\rho g \frac{dz}{dn} - \frac{dp}{dn} = \rho \frac{v_s^2}{R} \quad (4.23)$$

No caso de um gás, o peso do elemento de fluido pode ser desprezado, e a equação anterior traduz que qualquer mudança na direcção do escoamento é acompanhada de uma variação de pressão na direcção normal ao escoamento. Pelo facto da aceleração na direcção normal ser positiva e n “apontar” para o centro da curvatura, a pressão devido à mudança de direcção do elemento de fluido diminui ao longo de n .

Multiplicando ambos os membros da equação anterior por dn e integrando, resulta:

$$\int \frac{dp}{\rho} + \int \frac{v_s^2}{R} dn + gz = C \quad (4.24)$$

Se a massa volúmica puder ser considerada independente da pressão, fluido incompressível, líquidos e gases a baixa velocidade, a equação anterior toma a forma:

$$p + \rho \int \frac{v_s^2}{R} dn + \rho gz = C \quad (4.25)$$

Para integrar esta equação é necessário saber como R e v_s variam com n .

4.4 Aplicações da equação de Bernoulli

4.4.1 Introdução

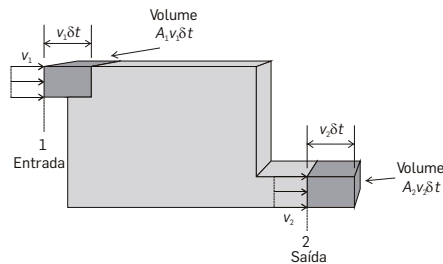
Em alguns exemplos que vão ser apresentados é necessário conhecer o conceito de conservação de massa, a chamada equação da continuidade. De seguida vai-se enunciar/estabelecer esta equação de uma forma muito simples e intuitiva; no capítulo seguinte ela será deduzida com detalhe.

Considere-se um fluido em escoamento através de um volume fixo, por exemplo um tanque que tem uma entrada e uma saída (ver figura seguinte). Se não houver acumulação de fluido no interior do tanque, a massa que

entra por unidade de tempo no tanque (caudal de entrada) tem de ser igual à massa que sai igualmente por unidade de tempo (caudal de saída).

Se A_2 e v_2 representarem a área da secção recta de saída e a velocidade média do fluido à saída, o volume de fluido que sai do tanque no intervalo de tempo δt é dado por $v_2 A_2 \delta t$. Na figura, este volume está representado a escuro. Note que $v_2 \delta t$ representa o espaço percorrido em δt pelo fluido que no início do intervalo de tempo estava prestes a sair do tanque. O volume de fluido que sai por unidade de tempo (caudal volumétrico) é dado por $Q_2 = (v_2 A_2 \delta t) / \delta t = v_2 A_2$ e a massa de fluido que sai por unidade de tempo (caudal mássico) por $m_2 = \rho_2 v_2 A_2$.

Igual raciocínio pode ser feito para a entrada do tanque. Como não há acumulação de massa, o caudal mássico de entrada tem de ser igual ao de saída:



$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 \quad (4.26)$$

Se o fluido de entrada e de saída for o mesmo e não houver variação da massa volúmica:

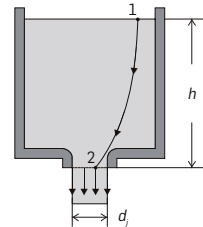
$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad (4.27)$$

4.4.2. Jactos Livres

Considere-se o escoamento de um líquido através de um orifício situado na base de um tanque de grande dimensão. Pretende-se saber qual o caudal (mássico ou volumétrico) de escoamento e como este caudal varia com a altura de líquido dentro do tanque.

Aplicando a equação de Bernoulli entre os pontos 1, na superfície do tanque, e 2, imediatamente à saída do orifício, ambos situados na mesma linha de corrente, resulta:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 \quad (4.28)$$



A velocidade à superfície do tanque representa a velocidade de descida da superfície livre.

O raio do orifício é muito menor que o raio do tanque, assim:

$$\begin{aligned} \rho_1 A_1 v_1 &= \rho_2 A_2 v_2 \therefore A_1 \gg A_2 \wedge \rho_1 = \rho_2 \rightarrow \\ \rightarrow v_2 &\gg v_1 \rightarrow \frac{1}{2} v_2^2 \gg \frac{1}{2} v_1^2 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Como exemplo, se o raio do tanque for 10 vezes superior ao do orifício (20 mm o do orifício e 200 mm o do tanque), a área do tanque é 100 vezes superior à do orifício e a energia cinética por unidade de massa à saída do orifício é 10000 superior à energia cinética por unidade de massa à superfície do tanque.

A diferença de cota entre os pontos 1 e 2 é variável ao longo do tempo de descarga e é dada por:

$$\rho g(z_1 - z_2) = \rho g h(t) \quad (4.30)$$

Tanto a superfície livre, como a secção recta do jacto imediatamente à saída do orifício estão à pressão atmosférica. O ponto 2, mesmo que situado no eixo do jacto, está à pressão atmosférica, já que as linhas de corrente são supostamente rectas paralelas não havendo variação de pressão na direcção normal a estas linhas. Todo o jacto, desde que deixa de estar confinado pelas paredes, passa a estar sujeito à pressão atmosférica.

$$p_1 = p_2 = p_{\text{atm}} \quad (4.31)$$

Substituindo as equações (4.30) e (4.31) na equação de Bernoulli resulta:

$$\frac{1}{2} \rho v_2^2 = \rho g h(t) \rightarrow v_2 = \sqrt{2gh(t)} \quad (4.32)$$

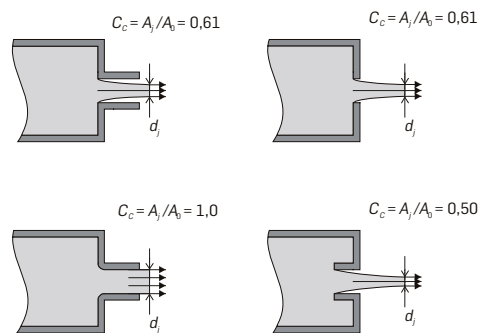
Esta equação mostra que a velocidade de saída do jacto é proporcional à raiz quadrada da altura de líquido no tanque. O caudal volumétrico de saída do tanque é dado por:

$$Q = A_o \sqrt{2gh(t)} \quad (4.33)$$

em que A_o representa a área do orifício.

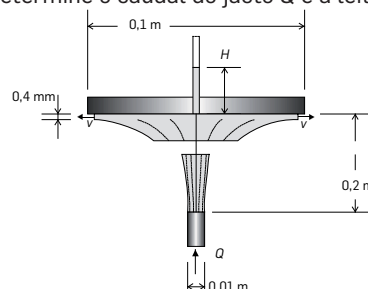
O diâmetro do jacto pode não coincidir com o diâmetro do orifício dependendo da forma como o orifício é construído: em esquina, arredondado, etc. Há geralmente uma contração do jacto, o chamado efeito da vena contracta. Esta contração é maior ou menor conforme a forma como as linhas de corrente contornam o orifício. Quando as linhas de corrente “acompanham” os bordos do orifício a contração é mínima e vice-versa. Define-se então um coeficiente de contração C_c igual à razão entre a menor área do jacto, na chamada zona da vena contracta, e a área do orifício. Os valores deste coeficiente são dados na literatura em função da geometria do orifício. A figura seguinte mostra alguns exemplos de escoamentos em orifícios e os respectivos valores do coeficiente de contração. O caudal volumétrico de saída passa a ser dado por:

$$Q = C_c A_o \sqrt{2gh} \quad (4.34)$$



Exemplo 4.1

Água sai de um tubo sob a forma de um jacto livre e vai embater num prato plano circular. A geometria do escoamento é simétrica relativamente ao eixo do jacto tal como mostra a figura. Determine o caudal do jacto Q e a leitura do manómetro H

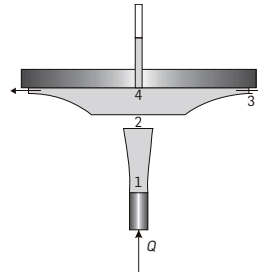


Solução

O jacto ao sair do tubo fica à pressão atmosférica. Ao percorrer uma certa distância na vertical "ganha" energia potencial. Como a energia mecânica total é constante e a pressão é atmosférica há um decréscimo de energia cinética. Pela equação da continuidade, este decréscimo de velocidade tem de ser acompanhado por um aumento da área de escoamento, i.e., o jacto sofre um alargamento.

Aplicando a equação de Bernoulli entre o ponto 1 situado à saída do tubo, e o ponto 2 perto do prato imediatamente antes do jacto mudar de direcção, obtém-se:

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{1}{2g} v_1^2 = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{1}{2g} v_2^2$$



Por ser um jacto, não confinado, e em contacto com a atmosfera:

$$p_1 = p_2 = p_{\text{atm}}$$

A equação de Bernoulli toma então a seguinte forma:

$$v_1^2 = v_2^2 + 0,4g$$

De seguida aplica-se equação de Bernoulli entre o ponto 2 (muito perto do prato) e um ponto 3 situado no jacto após mudar de direcção. O prato é circular pelo que o escoamento passa a ser radial logo após o jacto mudar de direcção. A área de escoamento passa a ser a da superfície lateral de um cilíndrico com altura igual à espessura do jacto. Sendo a diferença de cota entre os dois pontos (2 e 3) desprezável a equação de Bernoulli reduz-se a:

$$\frac{1}{2g} v_2^2 = \frac{1}{2g} v_3^2 \rightarrow v_2 = v_3$$

A equação da continuidade, na sua forma mais simples, diz que o caudal mássico que sai do tubo é igual ao caudal mássico no escoamento radial:

$$\pi R_t^2 v_1 = 2\pi R_p e v_3$$

em que e representa a espessura do líquido em escoamento radial, R_t o raio do tubo e R_p o raio do prato. Combinando as equações anteriores obtém-se:

$$Q = A_t v_1 = A_t \sqrt{\frac{0,4g}{1 - \left(\frac{R_t^2}{2R_p e}\right)^2}} \approx 0,06 \text{ l/s}$$

O ponto 4 representado na figura é um ponto de estagnação, a carga cinética com que o líquido vinha animado transforma-se em carga de pressão no instante em que o líquido embate no prato. Devido ao aumento de pressão no ponto de estagnação, o líquido sobe no tubo capilar. Pelo facto do tubo estar aberto para a atmosfera, e da pressão no jacto antes do impacto ser também atmosférica, a altura H é dada por:

$$H = \frac{1}{2g} v_2^2$$

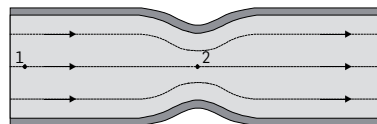
4.4.3. Medidores de caudal

Uma forma de medir o caudal de um fluido em escoamento num tubo é colocar no seu trajecto algum tipo de restrição de forma a provocar a formação de duas zonas: uma de baixa velocidade e alta pressão, e outra de alta velocidade e baixa pressão. Medindo a diferença de pressão entre as duas zonas é possível conhecer o caudal volumétrico ou mássico através da equação de Bernoulli. De seguida são dados alguns exemplos.

4.4.3.1 Venturi

O venturi é um medidor frequentemente utilizado, para medir quer o caudal de líquidos quer o de gases. Consiste num estreitamento suave da conduta onde o fluido está em escoamento.

Supondo que o escoamento é estacionário, que as forças de inércia são muito superiores às forças viscosas, e que o fluido é incompressível, pode-se aplicar a equação de Bernoulli ao longo de uma linha de corrente (horizontal) entre os pontos 1 e 2. O ponto 2 situa-se na secção recta do estrangulamento da conduta.



$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (4.35)$$

Supondo que os perfis de velocidade são uniformes nas secções rectas que contêm os pontos 1 e 2 (hipótese aceitável quando as forças de inércia são dominantes), a equação da continuidade permite escrever.

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (4.36)$$

Combinando as equações (4.35) e (4.36) resulta uma equação que permite calcular o caudal volumétrico que está a passar na conduta por simples leitura da variação de pressão:

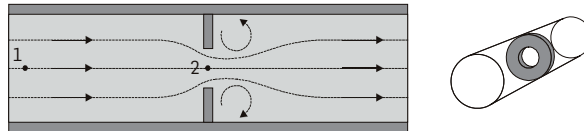
$$Q = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]}} \quad (4.37)$$

Mais uma vez, dependendo da razão entre as áreas das secções rectas do estrangulamento e da conduta, a área do jacto pode ser inferior à área do estrangulamento. Define-se então um coeficiente de contracção $C_c = A_j/A_2$, em que A_j representa a área do jacto, e o caudal passa a ser dado por:

$$Q = C_c A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left[1 - \left(\frac{C_c A_2}{A_1} \right)^2 \right]}} \quad (4.38)$$

4.4.3.2 Medidor de orifício

O medidor de orifício é frequentemente utilizado para medir caudais já que é um dispositivo barato, simples de implementar e dá resultados bastante precisos. Na sua forma mais simples é um disco circular com uma área central aberta ao escoamento menor do que a área da secção recta da conduta. Por simples medição do decréscimo de pressão do fluido ao passar por este disco pode-se conhecer o caudal de escoamento.



De uma forma análoga à do Venturi, aplicando a equação de Bernoulli entre os pontos 1 e 2 situados na mesma linha de corrente, obtém-se:

$$Q = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]}} \quad (4.39)$$

No medidor de orifício, tal como nos exemplos anteriores, o diâmetro do orifício nem sempre coincide com o diâmetro do jacto que o "atravessa", sendo necessário usar um coeficiente de contracção para corrigir o caudal.

4.4.3.3 Descarregadores

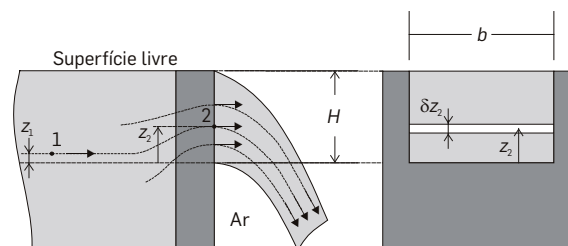
Os descarregadores servem para medir caudais em canais abertos para a atmosfera, podendo ter várias geometrias. De seguida são estudados dois exemplos.

- Descarregador rectangular

Na figura está representado um descarregador rectangular de largura b . Uma barragem em descarga é um bom exemplo para compreender este tipo de medidor.

São necessárias algumas hipóteses para aplicar a equação de Bernoulli entre os pontos 1 e 2 representados na figura ao longo de uma linha de corrente:

- a montante do descarregador, a velocidade só tem componente horizontal e o perfil de velocidade é uniforme. A variação de pressão na secção recta que contém o ponto 1 é hidrostática;
- a superfície livre permanece horizontal entre as secções rectas que contêm os pontos 1 e 2 ;
- o ponto 2 situa-se à saída do descarregador e tal como no jacto livre a pressão neste ponto é atmosférica (linhas de correntes supostamente rectas paralelas);
- a velocidade na secção recta que contém o ponto 2 só tem componente horizontal. Numa queda de água, o fluido não escorre pela “encosta”, descreve um arco tal como um projectil com velocidade inicial na direcção normal à direcção da gravidade;
- a intensidade da força de corte é desprezável comparativamente com a intensidade das outras forças em jogo (escoamento sem atrito viscoso).



Aplicando a equação de Bernoulli ao longo da linha de corrente que passa nos pontos 1 e 2 resulta:

$$\rho g(H - z_1) + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \rightarrow v_2 = \sqrt{2g(H - z_2) + v_1^2} \quad (4.40)$$

De acordo com a equação, a velocidade de descarga é função da cota do ponto 2. Assim, tem que se definir uma área de descarga infinitesimal onde a velocidade possa ser considerada uniforme. Considere-se a tira infinitesimal de altura δz_2 a uma distância z_2 da base do descarregador (ver Figura). O caudal de descarga através desta área elementar é dado por:

$$\delta Q = v_2 \delta A = v_2 b \delta z_2 \quad (4.41)$$

Estendendo esta análise a toda a área do descarregador resulta:

$$Q = \int_0^H v_2 b \, dz \rightarrow Q = \int_0^H [2g(H - z) + v_1^2]^{1/2} b \, dz \quad (4.42)$$

Integrando:

$$Q = \frac{2}{3} b \sqrt{2g} \left[\left(H + \frac{v_1^2}{2g} \right)^{3/2} - \left(\frac{v_1^2}{2g} \right)^{3/2} \right] \quad (4.43)$$

Na maioria dos casos $H \gg \frac{v_1^2}{2g}$ pelo que o caudal volumétrico de descarga é dado por:

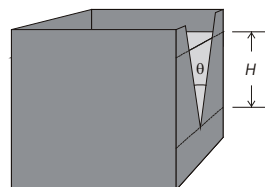
$$Q = \frac{2}{3} b \sqrt{2g} H^{3/2} \quad (4.44)$$

- *Descarregador triangular*

No caso de um descarregador triangular a largura da tira infinitesimal é função da coordenada z . Seguindo o mesmo raciocínio que para o descarregador rectangular e exprimindo a largura da tira em função de z , obtém-se:

$$Q = \frac{8}{15} \tan \frac{\theta}{2} \sqrt{2g} H^{5/2} \quad (4.45)$$

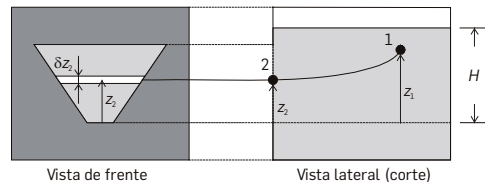
Deixa-se como exercício deduzir este resultado.



Exemplo 4.2

Um descarregador tem a forma de um trapézio simétrico cuja base inferior tem 1 m de comprimento e a base superior 5 m (ambas horizontais). A altura do trapézio é 3 m.

- Deduza uma expressão que relacione o caudal de descarga com o nível de água acima da base inferior do trapézio, H (superior a 3 m).
- Se H for 4,0 m calcule o caudal de descarga nas seguintes condições:
 - Supondo a velocidade nula a montante do descarregador.
 - Supondo que a área da secção recta a montante é de 40 m²

**Solução**

Aplicando Bernoulli entre um ponto 1 longe do descarregador a uma cota z_1 e um ponto 2 à saída do descarregador a uma cota z_2 (referência a base do trapézio), obtém-se:

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{1}{2}v_2^2$$

Recordando as hipóteses formuladas no estudo dos descarregadores:

$$p_1 = p_{\text{atm}} + \rho g(H - z_1), p_2 = p_{\text{atm}}$$

Substituindo na equação de Bernoulli:

$$v_2 = \sqrt{2g(H - z_2) + v_1^2}$$

O caudal volumétrico de descarga através de um elemento infinitesimal de altura δz_2 e comprimento b , que dista z_2 da base do trapézio é dado por:

$$\delta Q = v_2 \delta A = v_2 b \delta z_2$$

Mas b varia linearmente com z_2 :

$$b = \frac{4}{3}z_2 + 1$$

Substituindo as equações anteriores na expressão do caudal volumétrico que passa na tira infinitesimal, obtém-se:

$$\delta Q = \sqrt{2g(H - z_2) + v_1^2} \left(\frac{4}{3}z_2 + 1 \right) \delta z_2$$

Estendendo a toda a área do descarregador:

$$Q = \int_0^3 \sqrt{2g(H - z) + v_1^2} \left(\frac{4}{3}z + 1 \right) dz$$

Para $H=4,0$ m e $v_1=0$ a expressão para o cálculo do caudal reduz-se a:

$$Q = \int_0^3 \sqrt{2g(4-z)} \left(\frac{4}{3}z + 1 \right) dz$$

Quando a velocidade a montante não é desprezável o cálculo é mais complicado:

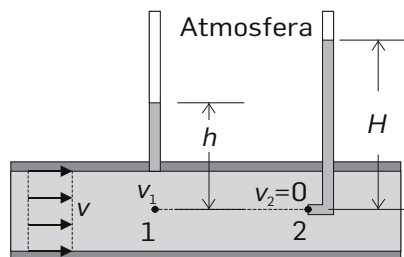
$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{1}{A_1} \int_0^3 \sqrt{2g(4-z) + v_1^2} \left(\frac{4}{3}z + 1 \right) dz$$

O caudal Q é função de v_1 pelo que é necessário um processo iterativo. A melhor estimativa inicial é o valor de Q calculado supondo $v_1 = 0$. Divide-se este valor de Q por A_1 , e obtém-se uma estimativa para v_1 . Com este valor, resolve-se o integral, e obtém-se um novo valor de Q e consequentemente um novo valor de v_1 . Compara-se este novo valor de v_1 com o anterior, se não coincidirem faz-se nova iteração. Este processo continua até que haja concordância entre dois valores consecutivos de v_1 .

4.4.4. Medidores de velocidade

4.4.4.1. Tubo de Pitot

O tubo de Pitot é um dispositivo há muito tempo usado para medir a velocidade num ponto do escoamento. Por ser necessário colocá-lo no seio do escoamento, técnica intrusiva que perturba o escoamento, não é muito utilizado quando se pretende medidas muito rigorosas. Em particular, torna-se pouco atractivo quando se pretende medir a velocidade perto de uma parede ou de um sólido mergulhado num escoamento.



Considere a linha de corrente que passa pelos pontos 1 e 2. O ponto 2 está situado imediatamente antes da entrada de um tubo muito fino, tubo de Pitot, orientado na direcção do escoamento (a outra extremidade do tubo está aberta para a atmosfera). Na parede da tubagem, na direcção da linha vertical que passa no ponto 1, está colocado um outro tubo fino também aberto para a atmosfera.

A pressão estática no ponto 1 pode ser conhecida por simples leitura de h :

$$p_1 - p_{\text{atm}} = \rho gh \quad (4.46)$$

O fluido em escoamento, quando chega à abertura estreita do tubo de Pitot (2), não tem energia suficiente para entrar e provocar escoamento no interior do tubo manométrico. Fica por assim dizer “à porta”, formando-se à frente da abertura uma zona de fluido estagnado. A carga cinética dos elementos de fluido ao longo da linha de corrente, transforma-se em carga de pressão, a chamada pressão dinâmica. Assim:

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \quad (4.47)$$

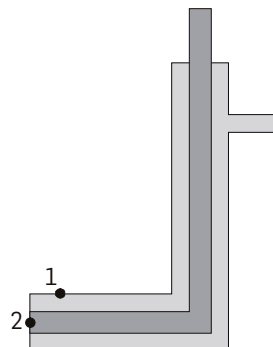
À soma da pressão estática (p_1) com a dinâmica $\left(\frac{1}{2}\rho v_1^2\right)$, chama-se pressão total. Por leitura do manómetro:

$$p_2 - p_{\text{atm}} = \rho gH \quad (4.48)$$

Combinando as equações (4.46)-(4.48) resulta:

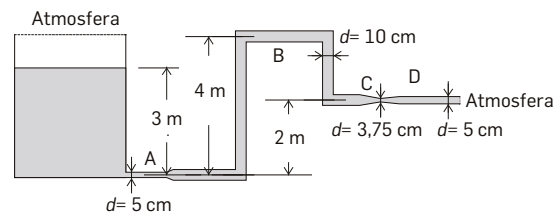
$$v_1 = \sqrt{2g(H - h)} \quad (4.49)$$

O tubo de Pitot permite assim medir a velocidade “quase” pontual de um escoamento por simples leitura de duas alturas manométricas. Uma versão, mais desenvolvida do tubo de Pitot, o chamado tubo de Pitot com manga, está esquematizada na figura seguinte. Em 1 mede-se a pressão estática e em 2 a pressão total.

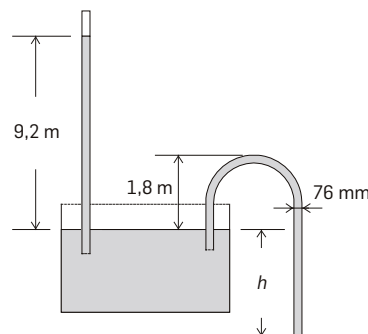


4.6 Exercícios propostos de aplicação

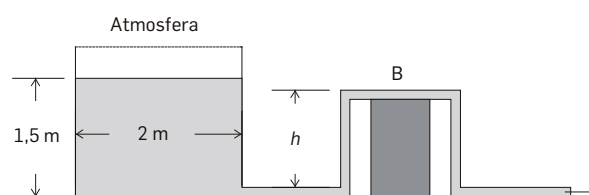
4.1 Água é descarregada de um tanque para a atmosfera, através da tubagem representada na figura. Calcule as cargas total, cinética e de pressão em A, B, C, e D bem como o caudal de descarga. Suponha que o nível do tanque permanece constante e que as forças viscosas são desprezáveis.



4.2 A água de um tanque está a ser descarregada para a atmosfera através de um sifão como mostra a Figura. O barómetro de água representado na figura indica o valor máximo de 9,2 m. Determine o valor máximo de h de forma a que não ocorra cavitação no tubo de descarga. A pressão atmosférica é 740 mm de Hg. A pressão no extremo fechado do barómetro é a pressão do vapor de água.



4.3 Um tanque cilíndrico com 2,0 m de diâmetro descarrega para a atmosfera através de uma mangueira de 20 mm de diâmetro interno. A saída da mangueira encontra-se ao nível da base do tanque, mas tem que passar sobre um obstáculo alto. Suponha que as forças viscosas são desprezáveis.

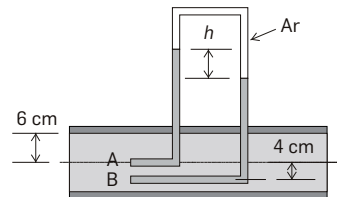


- Calcule o caudal volumétrico de descarga.
- Estabeleça uma relação entre a pressão do líquido em B e a diferença de cota h .
- Qual o valor máximo de h se o líquido for água à temperatura de $60\text{ }^{\circ}\text{C}$ ($p_v = 150\text{ mmHg}$).

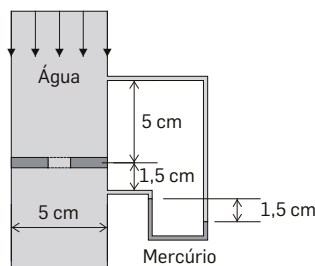
R: a- $1,7\text{ l/s}$; b- $p_B = p_{\text{atm}} - \rho g h$; c- $h_{\text{máx}} = 8\text{ m}$

4.4 Um tubo cilíndrico horizontal é percorrido por um fluido. Dois tubos muito finos estão colocados no interior do tubo tal como mostra a Figura. A abertura do tubo A está alinhada com o eixo do tubo horizontal e o tubo B tem a abertura 4 cm abaixo deste eixo (na vertical). Mostre que as velocidades v_A (ao nível de A) e v_B (ao nível de B) estão relacionadas com h segundo:

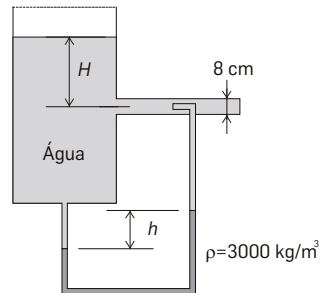
$$\frac{v_A^2}{2g} - \frac{v_B^2}{2g} = h$$



4.5 Água é transportada num tubo vertical com 5 cm de diâmetro e para medir o caudal introduziu-se no tubo uma placa com um orifício de 2 cm de diâmetro. Determine o caudal de descarga sabendo que a menor secção recta do jacto (vena contracta), onde está colocada a segunda toma de pressão, tem um diâmetro $0,8 d_{\text{orif}}$. Suponha que as forças viscosas são desprezáveis.

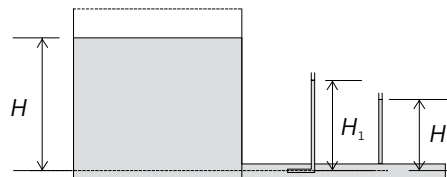


4.6 Observe a Figura e determine h em função de H . Suponha que as forças viscosas são desprezáveis. R: $h=0, \forall H$

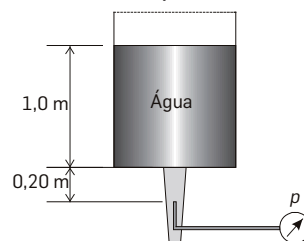


4.7 Água sai de um reservatório através de uma conduta de secção circular com 20 mm de diâmetro e é descarregada para a atmosfera. Suponha que as forças viscosas são desprezáveis. Encontre uma relação entre as alturas H e H_1 . Determine os valores de H_1 e H_2 quando o caudal mássico for 1,0 kg/s.

R: a- $H=H_1$; b- $H_1=0,52$ m e $H_2=0$



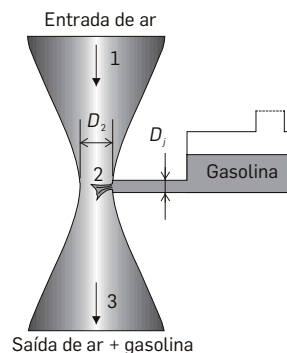
4.8 Um tanque cilíndrico de diâmetro 1,0 m descarrega água para a atmosfera através de um orifício com 4 mm de diâmetro situado na base. Para conhecer a velocidade de descarga, colocou-se no jacto um tubo de Pitot tal como mostra a figura. Determine o caudal de descarga no instante em que o nível da água é o indicado na figura, bem como a pressão P que o manómetro ligado ao tubo de Pitot deve indicar. Suponha que as forças viscosas são desprezáveis.



4.9 Os carburadores dos automóveis são bem mais complicados que a versão representada na figura, contudo basicamente o sistema de operação é o mesmo. As áreas das secções rectas onde estão situados os pontos 1 e 3 são suficientemente elevadas de forma a que as cargas cinéticas nessas secções são desprezáveis quando comparadas com

a carga cinética na secção onde está situado o ponto 2. À entrada e à saída do carburador (1 e 3) a pressão é próxima da ambiente. A gasolina está armazenada num reservatório de nível constante e aberto para a atmosfera, e é injectada no ar através de um orifício largo de diâmetro D_j . O diâmetro da secção onde está representado o ponto 2 é D_2 . Suponha que as forças viscosas são desprezáveis.

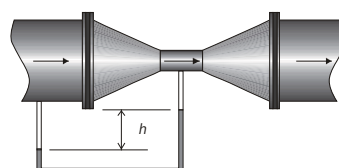
- Escreva a razão ar-fuel, i.e., o caudal mássico de ar dividido pelo caudal mássico de gasolina, em função das variáveis apropriadas. Se se aumentar a entrada de ar (nos carros através de um mecanismo associado ao pedal do acelerador) como é que acha que a razão ar-fuel varia? R: $\dot{m}_{ar}/\dot{m}_{gas} = A_2/A_j \sqrt{\rho_{ar}/\rho_{gas}}$
- Se a razão for de 15 ao nível do mar, acha que será maior, igual ou menor no cimo da serra da Estrela a uma altitude de 2000 m.



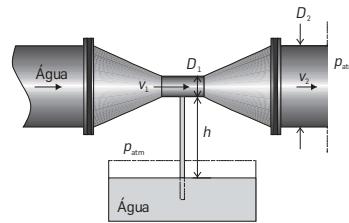
4.10 a. Um Venturi é um equipamento que permite medir o caudal de escoamento de um fluido num tubo. Se o escoamento for incompressível e as forças viscosas forem desprezáveis mostre que o caudal volumétrico Q está relacionado com a altura manométrica h pela seguinte expressão:

$$Q = \frac{A_2}{\sqrt{1 - (D_2/D_1)^4}} \sqrt{\frac{2gh(\rho_m - \rho)}{\rho}}$$

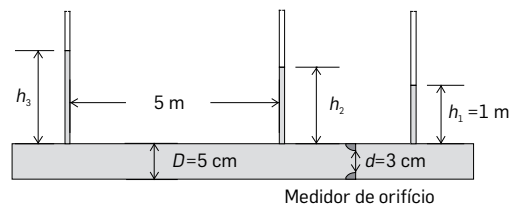
em que ρ e ρ_m são respectivamente as massas específicas do fluido em escoamento e do fluido manométrico



b. Um Venturi pode igualmente funcionar como uma “bomba aspiradora” de fluido. Encontre uma expressão para a velocidade v_1 em função da altura máxima h para que a água de um reservatório aberto chegue ao estrangulamento do Venturi.



4.11 Um tubo liso contendo água em escoamento a um caudal de $7 \text{ m}^3/\text{hr}$ tem num dado troço um medidor de orifício tal como mostra a figura. O diâmetro do orifício é de 30 mm.



Estime os níveis de água nos tubos capilares h_3 e h_2 . Suponha que as forças viscosas são desprezáveis e que o coeficiente de contracção é 1.

5 ANÁLISE INTEGRAL EM VOLUMES DE CONTROLO FINITOS

5.1 Análise diferencial, integral e dimensional

Há três formas clássicas de estudar o escoamento de um fluido e os seus efeitos, todas importantes, e por vezes complementares:

- estudo do escoamento de um elemento de fluido de dimensões infinitesimais, designado por estudo diferencial;
- estudo do escoamento e seus efeitos num volume de controlo seleccionado, designado por estudo integral;
- estudo experimental de um escoamento e seus efeitos com suporte na análise dimensional.

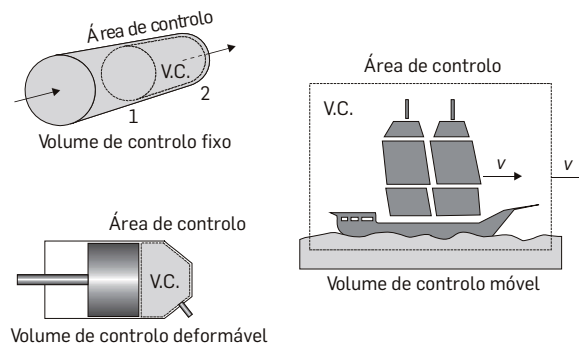
- *Estudo diferencial*

Quando as leis de conservação são escritas para um elemento de fluido infinitesimal designam-se por equações diferenciais básicas de escoamento. Após serem estabelecidas para um dado problema, elas têm que ser integradas, sujeitas às condições fronteira apropriadas. Soluções analíticas exactas são na grande maioria dos casos impossíveis de obter, pelo que as equações têm de ser resolvidas por integração em computadores, sendo as soluções numéricas aproximações das soluções exactas. Com este tipo de análise, os detalhes do escoamento não são ignorados, sendo por isso possível descrever todo o campo de escoamento, velocidade e pressão.

- *Estudo integral*

As leis de conservação são escritas e aplicadas a um sistema o qual é definido como uma quantidade arbitrária de massa com identidade própria. Tudo o que não faça parte do sistema é designado por arredores e entre os arredores e o sistema existe a fronteira. Em muitos problemas de Mecânica dos Fluidos, não tem interesse estudar o escoamento de uma dada massa de fluido, i.e., não tem interesse estudar o escoamento do sistema, mas sim estudar os efeitos desse escoamento. Ao estudar a acção dos ventos numa ponte, não tem interesse estudar o campo de escoamento do ar em torno da ponte, mas sim os efeitos dos ventos sobre a ponte. Assim, define-se uma região, que no caso

anterior engloba a ponte, a qual é designada por volume de controlo. Este volume de controlo pode ser fixo ou móvel no espaço, e rígido ou deformável no tempo. Na figura estão esquematizados alguns exemplos de volumes de controlo.



- *Estudo experimental com suporte na análise dimensional*

Muitos problemas são difíceis de estudar quer por análise integral quer por análise diferencial, por exemplo o estudo das condições aerodinâmicas de um carro de Fórmula I. Estes estudos são geralmente levados a cabo experimentalmente. Quando a dimensão dos objectos é pequena, simulam-se as condições exteriores, por exemplo em túneis de vento ou de água, e realizam-se estudos em protótipos. Quando as dimensões dos objectos são grandes, realizam-se estudos em modelos à escala, sendo a análise dimensional uma ferramenta importante para que se possa tirar conclusões.

Qualquer que seja a forma de abordar um escoamento, têm de ser sempre satisfeitas as equações de conservação, a equação de estado do fluido e as condições na fronteira:

- conservação de massa;
- conservação de quantidade de movimento (2ª lei de Newton);
- conservação de energia (1ª lei da Termodinâmica);
- equação de estado do fluido;
- condições fronteira em superfícies sólidas, interfaces, entradas e saídas.

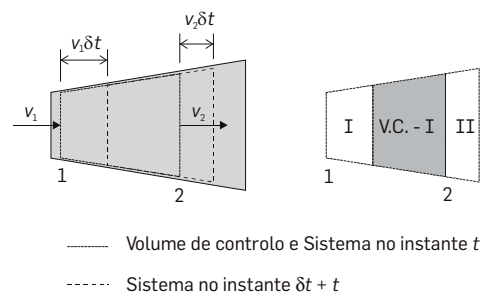
Neste capítulo vai ser seguida a abordagem integral.

5.2 Teorema do Transporte de Reynolds

5.2.1 Dedução do teorema do transporte de Reynolds

O teorema do transporte de Reynolds vai servir de suporte para deduzir as equações integrais de conservação de massa, quantidade de movimento e energia. Este teorema faz a ponte entre o que se passa no sistema e o que se passa no volume de controlo. Na figura está representado, a ponteadado, um volume de controlo fixo e estacionário com uma entrada (1) e uma saída (2). O fluido desloca-se na direcção normal às superfícies de entrada e saída com velocidades respectivamente v_1 e v_2 . Estas velocidades são, por hipótese, uniformes nas respectivas secções.

Num dado instante t , a massa de fluido seleccionada para sistema preenche por completo o volume de controlo. Durante o intervalo de tempo δt , o sistema move-se para a direita, e está representado a tracejado na figura. Os elementos do sistema que estavam no instante t sobre a superfície de saída do volume de controlo (2) deslocaram-se para a direita de $\delta l_2 = v_2 \delta t$. Os elementos de fluido que estavam no instante t sobre a superfície de entrada do volume de controlo (1) deslocaram-se para a direita de $\delta l_1 = v_1 \delta t$.



Para facilitar a dedução do teorema de Reynolds, o volume de controlo passa a ser designado por VC, o que sai do VC durante o intervalo de tempo δt ocupa um volume designado por II e o que entra no VC durante este intervalo de tempo ocupa um volume designado por I. Assim no instante t o sistema está todo no interior do VC, enquanto que no instante $t + \delta t$ está contido em VC- I + II.

Seja B uma propriedade extensiva qualquer (que dependa da massa do sistema). No instante t :

$$B_{\text{Sist}}(t) = B_{\text{VC}}(t) \quad (5.1)$$

No instante $t + \delta t$:

$$B_{Sist}(t + \delta t) = B_{VC}(t + \delta t) - B_I(t + \delta t) + B_{II}(t + \delta t) \quad (5.2)$$

A variação de B_{Sist} no intervalo de tempo δt é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\delta B_{Sist}}{\delta t} &= \frac{B_{Sist}(t + \delta t) - B_{Sist}(t)}{\delta t} = \\ &= \frac{B_{VC}(t + \delta t) - B_I(t + \delta t) + B_{II}(t + \delta t) - B_{Sist}(t)}{\delta t} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Rearranjando e sabendo que $B_{Sist}(t) = B_{VC}(t)$ obtém-se:

$$\frac{\delta B_{Sist}}{\delta t} = \frac{B_{VC}(t + \delta t) - B_{VC}(t)}{\delta t} - \frac{B_I(t + \delta t)}{\delta t} + \frac{B_{II}(t + \delta t)}{\delta t} \quad (5.4)$$

No limite quando $\delta t \rightarrow 0$, cada uma das parcelas da equação (5.4) tem um significado:

$$\left[\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta B_{Sist}}{\delta t} = \frac{DB_{Sist}}{Dt} \right]$$

- Esta parcela representa a variação da propriedade B no sistema por unidade de tempo. A variação em ordem ao tempo de uma qualquer propriedade de um sistema, escalar ou vectorial, associada a um elemento de fluido em escoamento, é designada por derivada total ou substancial.

$$\left[\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_{VC}(t + \delta t) - B_{VC}(t)}{\delta t} \right]$$

- Esta parcela representa a variação da propriedade B no VC por unidade de tempo. Seja b a propriedade B por unidade de massa (propriedade intensiva do sistema). Se se dividir o volume de controlo num número infinito de volumes infinitesimais, cada um de volume δV_i e massa $\rho \delta V_i$, pode-se escrever:

$$B_{VC} = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} b_i (\rho_i \delta V_i) = \int_{VC} \rho b dV$$

Substituindo:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_{VC}(t + \delta t) - B_{VC}(t)}{\delta t} = \frac{B_{VC}}{\partial t} = \frac{\partial \left(\int_{VC} \rho b dV \right)}{\partial t}$$

$$\left[\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_{II}(t + \delta t)}{\delta t} \right]$$

- Esta parcela representa a velocidade (quantidade por unidade de tempo) de saída do VC da propriedade extensiva B através da superfície de controlo. Observando a figura anterior, a quantidade de B na região II é dada por:

$$B_{II}(t + \delta t) = \rho_2 b_2 A_2 \delta l_2 = \rho_2 b_2 A_2 (v_2 \delta t)$$

No limite quando $\delta t \rightarrow 0$:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_{II}(t + \delta t)}{\delta t} = \rho_2 b_2 A_2 v_2$$

$$\left[\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_I(t + \delta t)}{\delta t} \right]$$

- Esta parcela representa a velocidade (quantidade por unidade de tempo) de entrada no VC da propriedade extensiva B através da superfície de controlo. Observando a figura anterior, a quantidade de B na região I é dada por:

$$B_I(t + \delta t) = \rho_1 b_1 A_1 \delta l_1 = \rho_1 b_1 A_1 (v_1 \delta t)$$

No limite quando $\delta t \rightarrow 0$:

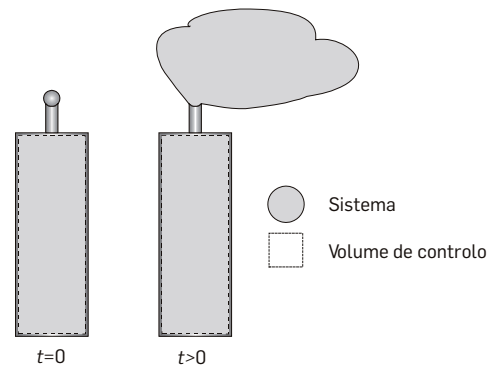
$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_I(t + \delta t)}{\delta t} = \rho_1 b_1 A_1 v_1$$

Combinando todos as parcelas anteriores de acordo com a eq. (5.4) obtém-se o teorema de Transporte de Reynolds.

$$\frac{DB_{Sist}}{Dt} = \frac{\left(\int_{VC} \rho b dV \right)}{\partial t} + \rho_2 A_2 b_2 v_2 - \rho_1 A_1 b_1 v_1 \quad (5.5)$$

Um exemplo, bem ilustrativo, do teorema de Transporte de Reynolds é o que se passa num garrafa de gás pressurizado quando se abre a válvula de saída.

O VC está a tracejado na figura, e o sistema é todo o gás que no instante $t = 0$ (antes da abertura da válvula) está no interior da garrafa. De seguida vão ser analisados, para este exemplo, cada um dos termos da eq. (5.5).



Não há entrada de massa no VC, logo:

$$\rho_1 A_1 b_1 v_1 = 0 \rightarrow \frac{DB_{Sist}}{Dt} = - \frac{\partial \left(\int_{VC} \rho b dV \right)}{\partial t} + \rho_2 A_2 b_2 v_2$$

A quantidade de massa no sistema é constante no tempo, nada se perde, nada se ganha, tudo se transforma:

$$\frac{DB_{Sist}}{Dt} = 0 \rightarrow - \frac{\partial \left(\int_{VC} \rho b dV \right)}{\partial t} + \rho_2 A_2 b_2 v_2 = 0$$

Esta equação mostra que a velocidade a que a massa “desaparece” da garrafa, i.e. do V.C., é igual ao caudal mássico de saída.

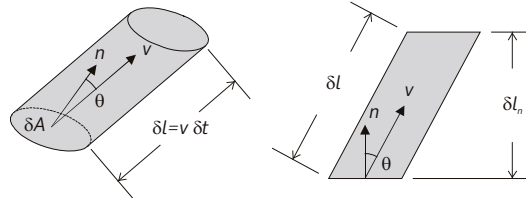
5.2.2 Teorema do transporte de Reynolds generalizado

No caso do vector velocidade não ser normal aos planos que contêm as superfícies de entrada e/ou de saída do VC, ou no caso da velocidade não ser uniforme na entrada e/ou na saída do VC, o teorema de transporte de Reynolds apresenta uma forma mais complexa.

Seja v a velocidade com que o fluido atravessa a área infinitesimal δA de saída do VC. No intervalo de tempo δt , o volume de fluido que atravessa esta área é dado por:

$$\delta V = \delta l_n \delta A = \delta l \cos \theta \delta A = (v \delta t) \cos \theta \delta A \quad (5.6)$$

em que θ é o menor ângulo, ($0^\circ < \theta < 90^\circ$), que o vector velocidade faz com o versor normal à superfície de saída δA (ver figura seguinte).



A quantidade de propriedade b que atravessa a área δA no intervalo de tempo δt é dada por:

$$b\rho \delta V = b\rho (v\delta t) \cos\theta \delta A \quad (5.7)$$

Integrando na área de saída:

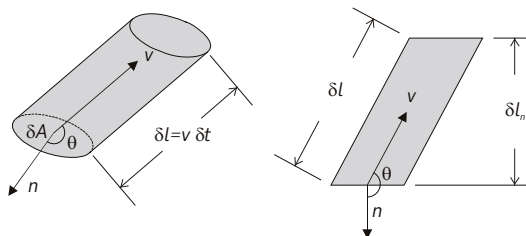
$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_{II}(t + \delta t)}{\delta t} = \int_{A_s} \rho b v \cos\theta dA = \int_{A_s} \rho b (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA \quad (5.8)$$

Na entrada do VC, o sentido do vetor normal à superfície aponta para fora do volume de controlo. Assim o menor ângulo que o vetor faz com o vector velocidade à entrada está compreendido entre $90^\circ < \theta < 180^\circ$ (ver figura seguinte). Logo:

$$b\rho \delta V = -b\rho (v\delta t) \cos\theta \delta A \quad (5.9)$$

Integrando na área de entrada:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_I(t + \delta t)}{\delta t} = - \int_{A_E} \rho b v \cos\theta dA = - \int_{A_E} \rho b (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA \quad (5.10)$$



A diferença entre o que sai e o que entra de B na unidade de tempo é dada por:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_{II}(t + \delta t)}{\delta t} - \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_I(t + \delta t)}{\delta t} &= \int_{A_s} \rho b \vec{v} \cdot \vec{n} dA - \left(- \int_{A_E} \rho b \vec{v} \cdot \vec{n} dA \right) = \\ &= \int_{AC} \rho b \vec{v} \cdot \vec{n} dA \end{aligned} \quad (5.11)$$

em que AC representa a área exterior do volume de controlo, i.e., a área de controlo.

O teorema de Transporte de Reynolds é rescrito na seguinte forma:

$$\frac{DB_{Sist}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho b dV + \int_{AC} \rho b \vec{v} \cdot \vec{n} dA \quad (5.12)$$

Falta generalizar para o caso em que o volume de controlo se desloca a uma velocidade constante. Se o referencial se deslocar à velocidade do VC, então a velocidade relativa entre o fluido e o VC é dado por:

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v} - \vec{v}_{VC} \quad (5.13)$$

O teorema de Reynolds relativamente a um observador móvel toma então a seguinte forma:

$$\frac{DB_{Sist}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho b dV + \int_{AC} \rho b \vec{v}_{rel} \cdot \vec{n} dA \quad (5.14)$$

5.3 Conservação de Massa- Equação da Continuidade

5.3.1 Dedução da equação da continuidade

Quando a propriedade extensiva B é a massa, então o valor da propriedade intensiva é $b = 1$. O teorema de Transporte de Reynolds aplicado à propriedade massa toma a seguinte forma:

$$\frac{DM_{Sist}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{AC} \rho \vec{v}_{rel} \cdot \vec{n} dA$$

Pelo princípio de conservação de massa de um sistema, mais uma vez nada se cria, nada se perde, tudo se transforma, a equação anterior reduz-se a:

$$\frac{DM_{Sist}}{Dt} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{AC} \rho \vec{v}_{rel} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (5.15)$$

Esta equação é designada por equação da conservação de massa aplicada a um VC.

Se não houver variação de massa com o tempo no interior do VC, i.e, se não houver acumulação ou desacumulação de massa no interior do VC, resulta a chamada equação da continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV = 0 \rightarrow \int_{AC} \rho \vec{v}_{rel} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (5.16)$$

Se o volume de controlo for fixo e sabendo que $\vec{v} \cdot \vec{n}$ é positivo para o que sai do VC e negativo para o que entra no VC, obtém-se a forma mais simples da equação da continuidade:

$$\int_{AC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \dot{m}_S - \dot{m}_E \quad (5.17)$$

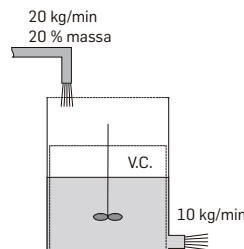
em que \dot{m}_S representa o caudal mássico de saída pela área de controlo e \dot{m}_E o caudal mássico de entrada.

Exemplo 5.1

Um tanque contém, no início de uma dada operação, 1000 kg de uma solução de salmoura com 10% de sal (em massa). O tanque, num dado instante, passa a ser alimentado por uma corrente, contendo 20% (em massa) de sal, a um caudal de 20 kg/min. A mistura no tanque é mantida uniforme por agitação mecânica. A salmoura é removida do tanque a um caudal de 10 kg/min. Determine a quantidade de sal no tanque em qualquer instante t e o tempo ao fim do qual a quantidade de sal no tanque é 200 kg.

Solução

O primeiro passo é representar o VC, a tracejado na figura. De seguida aplica-se a equação da continuidade à salmoura (sal + água) sabendo que:



$$\int_{AC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \dot{m}_S - \dot{m}_E = 10 \text{ kg/min} - 20 \text{ kg/min} = -10 \text{ kg/min}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV = \frac{dM}{dt} = 10 \text{ kg/min}$$

em que M representa a massa de salmoura no tanque em qualquer instante t . Integrando a equação anterior, sabendo que no instante $t = 0$ a massa de salmoura no tanque é 1000 kg, obtém-se:

$$\frac{dM}{dt} - 10 = 0 \rightarrow M = 10t + 1000$$

Se S representar a massa de sal, a concentração de sal (massa de sal/massa de salmoura) no interior do V.C. ao longo do tempo é dada por:

$$\frac{S}{M} = \frac{S}{1000 + 10t}$$

De seguida aplica-se a equação da continuidade ao sal sabendo que na corrente de saída, em qualquer instante, a concentração de sal é igual à concentração no interior do volume de controlo:

$$\int_{AC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \dot{m}_S - \dot{m}_E = 10 \frac{S}{1000 + 10t} - 20 \times 0,2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV = \frac{dS}{dt} = - \left(\frac{S}{100 + t} - 4 \right) \rightarrow \frac{dS}{dt} + \frac{S}{100 + t} - 4 = 0$$

Esta equação é uma equação diferencial de 1ª ordem cuja solução é:

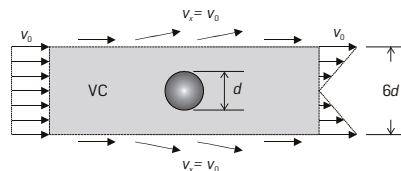
$$S = \frac{2t(200 + t)}{100 + t} + \frac{C}{100 + t}$$

em que C é a constante de integração, cujo valor é determinado a partir da condição inicial: $t = 0$, $S = 100 \rightarrow C = 10000$. A massa de sal no tanque ao longo do tempo é finalmente dada por:

$$S = \frac{10000 + 400t + 2t^2}{100 + t}$$

Exemplo 5.2

Na figura, estão representados os perfis de velocidade, para o volume de controlo em torno de um cilindro de comprimento L mergulhado num fluido, com o eixo perpendicular à direcção de escoamento. Se o fluido for incompressível, qual o caudal através das superfícies horizontais do volume de controlo?



Solução

Considerando o fluido incompressível não há variação de massa no interior do volume de controlo, pelo que da equação da continuidade resulta:

$$\int_{AC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = 0 \rightarrow \int_{AS} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA + \int_{AE} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = 0$$

A saída dá-se quer pela superfície vertical (A_{SV}) quer pelas superfícies horizontais (A_{SH}).

$$\int_{AC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = 0 \rightarrow \int_{ASV} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA + \int_{ASH} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA + \int_{AE} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = 0$$

O perfil de velocidade à entrada é uniforme:

$$\int_{AE} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = -\rho v_0 6dL$$

O perfil de velocidade à saída na superfície vertical varia linearmente desde o plano central até cada uma das extremidades:

$$\vec{v} = \frac{v_0}{3d} y \vec{i} \quad 0 \leq y \leq 3d$$

O caudal mássico de saída pela superfície vertical do VC é dado por:

$$\int_{ASV} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \int_{ASV} \rho \frac{v_0}{3d} y \vec{i} \cdot \vec{n} dA = 2 \times \int_0^{3d} \rho \frac{v_0}{3d} y L dy = 3\rho v_0 dL$$

O caudal mássico de saída pelas superfícies horizontais do VC é dado por:

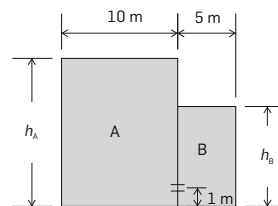
$$\int_{ASH} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = - \int_{AE} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA - \int_{ASV} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = 6\rho v_0 dL - 3\rho v_0 dL = 3\rho v_0 dL$$

5.3.2 Carga e descarga de reservatórios

Exemplo 5.3

Dois tanques (A e B) com uma parede comum comunicam por um orifício estreito de área A_0 , tal como mostra a figura. Calcule:

- O caudal de descarga do tanque A em função de h_A , h_B e A_0 . Considere que no instante inicial $h_A > h_B$.
- O tempo que demora h_A a baixar de 3,5 m para 3,0 m considerando o tanque B inicialmente vazio. Tome $A_0 = 2,0 \text{ cm}^2$, $A_1 = 10 \text{ cm}^2$ e $A_2 = 5 \text{ cm}^2$.
- O tempo que demora o tanque A a baixar de 3,5 m até 2,5 m considerando o tanque B inicialmente vazio. Tome $A_0 = 2,0 \text{ cm}^2$, $A_1 = 10 \text{ cm}^2$ e $A_2 = 5 \text{ cm}^2$.



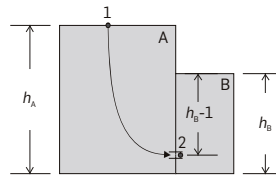
Solução

- O caudal de descarga do tanque A depende do nível de água no tanque B estar acima ou abaixo do orifício:

- *Superfície livre do tanque B acima do orifício.*

Aplicando a equação de Bernoulli ao longo da linha de corrente, entre o ponto 1 situado na superfície do tanque A e o ponto 2 situado no tanque B imediatamente à saída do orifício, resulta:

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{1}{2}v_2^2$$



Na superfície do tanque A a pressão é atmosférica. A área do orifício é muito menor que a área da secção recta do tanque A, pelo que:

$$v_1^2 \ll v_2^2$$

A pressão à saída do orifício é bem aproximada pela pressão hidrostática no tanque B; a razão é semelhante à apresentada no capítulo anterior para a descarga de um jacto de líquido para a atmosfera.

$$p_2 = p_{\text{atm}} + \rho g(h_B - 1)$$

Substituindo na equação de Bernoulli resulta:

$$gh_A + \frac{p_{\text{atm}}}{\rho} = g + \frac{p_{\text{atm}}}{\rho} + g(h_B - 1) + \frac{1}{2}v_2^2 \rightarrow v_2 = \sqrt{2g(h_A - h_B)}$$

O caudal volumétrico de descarga do tanque A é dado por:

$$Q = A_o v_2 = A_o \sqrt{2g(h_A - h_B)}$$

- *Superfície livre do tanque B abaixo do orifício.*

Neste caso o tanque A está a descarregar para a atmosfera:

$$p_2 = p_{\text{atm}}$$

Aplicando a equação de Bernoulli entre os pontos 1 e 2 resulta:

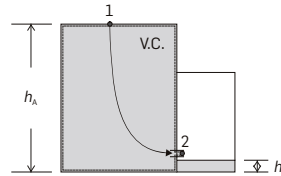
$$gh_A + \frac{p_{\text{atm}}}{\rho} = g + \frac{p_{\text{atm}}}{\rho} + \frac{1}{2}v_2^2 \rightarrow v_2 = \sqrt{2g(h_A - 1)}$$

O caudal volumétrico de descarga do tanque A é dado por:

$$Q = A_o v_2 = A_o \sqrt{2g(h_A - 1)}$$

- Tempo que demora o tanque A a baixar de 3,5 m até 3,0 m

A área da secção recta do tanque A é o dobro da do tanque B. Assim, quando o nível do tanque A baixa de 3,5 m até 3,0 m o nível do tanque B, inicialmente vazio, sobe 1 m, i.e., sobe até ao nível do orifício.



O VC está representado na figura. Nada entra no VC, sai fluido através do orifício e o volume de fluido dentro do VC vai diminuindo com o tempo. Aplicando a equação de conservação de massa ao VC representado na figura resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{AC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{h_A} \rho A_A dz = \frac{\partial}{\partial t} (\rho A_A h_A) = \rho A_A \frac{\partial h_A}{\partial t} \\ \int_{AC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA &= \rho v_2 A_0 = \rho \sqrt{2g(h_A - 1)} A_0 \\ \rho A_A \frac{\partial h_A}{\partial t} + \rho \sqrt{2g(h_A - 1)} A_0 &= 0 \rightarrow \frac{A_A}{A_0} \frac{\partial h_A}{\partial t} = -v_2 = -\sqrt{2g(h_A - 1)} \end{aligned} \quad (1)$$

Integrando entre $t = 0$ ($h_A = 3,5$ m) e t_1 ($h_A = 3,0$ m):

$$\int_0^{t_1} dt = -\frac{A_A}{A_0} \int_{3,5}^{3,0} \frac{dh_A}{\sqrt{2g(h_A - 1)}} \rightarrow t_1 = -\frac{A_A}{A_0} \int_{3,5}^{3,0} \frac{dh_A}{\sqrt{2g(h_A - 1)}} \approx 0,25 \frac{A_A}{A_0 \sqrt{g}} \quad (*)$$

c. Tempo que demora o tanque A a baixar de 3,5 m até 2,5 m

Quando o nível do tanque A baixa de 3,5 m até 2,5 m o nível do tanque B, inicialmente vazio, sobe 2,0 m. O tempo de descarga vai ser dividido em 2 períodos: o primeiro, já calculado, corresponde ao tempo que demora o nível do tanque A a baixar de 3,5 m até 3,0 m; o segundo corresponde ao tempo que o nível do tanque A demora a baixar de 3,0 m até 2,5 m.

No segundo período, o termo correspondente à saída de fluido do VC é dado por:

$$\begin{aligned} \int_{AC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA &= \rho v_2 A_0 = \rho \sqrt{2g(h_A - h_B)} A_0 \\ \rho A_A \frac{\partial h_A}{\partial t} + \rho \sqrt{2g(h_A - h_B)} A_0 &= 0 \rightarrow \frac{A_A}{A_0} \frac{\partial h_A}{\partial t} = -\sqrt{2g(h_A - h_B)} \end{aligned}$$

Integrando entre t_1 ($h_A = 3,0$ m) e t_2 ($h_A = 2,5$ m):

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = -\frac{A_A}{A_0} \int_{3,0}^{2,5} \frac{dh_A}{\sqrt{2g(h_A - h_B)}} \rightarrow t_2 - t_1 = -\frac{A_A}{A_0} \int_{3,0}^{2,5} \frac{dh_A}{\sqrt{2g(h_A - h_B)}}$$

Para conhecer $t_2 - t_1$ é necessário saber como h_B varia com h_A . Aplicando a equação da conservação de massa ao tanque B resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{AC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{h_B} \rho A_B dz = \frac{\partial}{\partial t} (\rho A_B h_B) = \rho A_B \frac{\partial h_B}{\partial t} \\
\int_{AC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA &= -\rho v_2 A_0 \\
\rho A_B \frac{\partial h_B}{\partial t} - \rho v_2 A_0 &= 0 \rightarrow \frac{A_B}{A_0} \frac{\partial h_B}{\partial t} = v_2 \quad (2)
\end{aligned}$$

Comparando as equações de conservação de massa aplicadas ao tanque A e B, (1) e (2), conclui-se que:

$$\frac{A_B}{A_0} \frac{dh_B}{dt} = -\frac{A_A}{A_0} \frac{dh_A}{dt} \rightarrow A_B \int_0^{h_B} dh_B = -A_A \int_{3,5}^{h_A} dh_A \rightarrow h_B = \frac{A_A}{A_B} (3,5 - h_A)$$

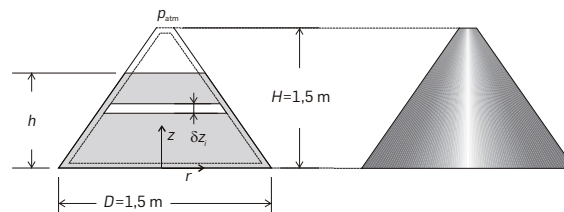
Substituindo a relação entre h_B e h_A na equação de conservação de massa aplicada ao tanque A, obtém-se:

$$t_2 - t_1 = -\frac{A_A}{A_0} \int_{3,0}^{2,5} \frac{dh_A}{\sqrt{2g \left[h_A - \frac{A_A}{A_B} (3,5 - h_A) \right]}} \quad (**)$$

O tempo total é dado pela soma dos tempos calculados pelas equações (*) e (**)

Exemplo 5.4

Estime, aplicando a equação da continuidade na sua forma integral, o tempo necessário para encher de água um recipiente de forma cônica se o caudal de alimentação for 1l/min. A alimentação processa-se por um pequeno orifício no topo do cone.



Solução

O VC está representado na figura a pontilhado. Nada sai do VC, entra fluido a um caudal constante e o volume de fluido dentro do VC vai aumentando com o tempo. Aplicando a equação da conservação de massa ao VC representado na figura resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{AC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = 0$$

Na figura está representado um elemento infinitesimal i de altura δz_i . Quando δz_i tende para 0 a forma deste elemento tende para a de um disco circular de espessura infinitesimal e raio r . O volume deste disco infinitesimal é $\delta V_i = \pi r_i^2 \delta z_i$. Somando o infinito número de discos em que se pode dividir o volume de líquido dentro do VC, resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \, dV = \frac{\partial}{\partial t} \left[\lim_{\delta z_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \rho \pi r_i^2 \delta z_i \right] = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho \pi r^2 \, dz$$

em que h representa a altura de água dentro do VC num dado instante.
O valor de r varia linearmente com z :

$$r = \frac{r_0 (H - z)}{H}$$

em que r_0 representa o raio da base do cone e H a altura do cone.
Substituindo na equação de conservação de massa, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \, dV &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho \pi \left[\frac{r_0 (H - z)}{H} \right]^2 dz = \frac{\rho \pi r_0^2}{H^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h (H - z)^2 dz = \\ &= \frac{\rho \pi r_0^2}{H^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{1}{3} (H - h)^3 + \frac{1}{3} H^3 \right] = \frac{\rho \pi r_0^2}{H^2} (H - h)^2 \frac{dh}{dt} \end{aligned}$$

O caudal de entrada é dado no enunciado:

$$\int_{AC} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA = -1,67 \times 10^{-2} \, \text{kg/s}$$

Substituindo cada termo na equação de conservação de massa, resulta:

$$\frac{\rho \pi r_0^2}{H^2} (H - h)^2 \frac{dh}{dt} - 1,67 \times 10^{-2} = 0$$

Integrando entre o instante inicial em que não há água no cone e o tempo t ao fim do qual o cone está cheio, $h = H$, resulta:

$$\int_0^H (H - h)^2 \, dh = \frac{1,67 \times 10^{-2} H^2}{\rho \pi r_0^2} \int_0^t dt$$

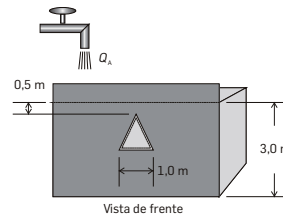
$$t = \frac{\rho \pi r_0^2 H}{5 \times 10^{-2}} = 880 \, \text{min}$$

Este resultado pode ser confirmado dividindo simplesmente o volume do cone pelo caudal volumétrico de entrada

Exemplo 5.5

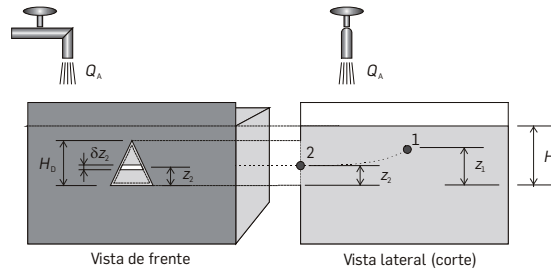
Um tanque quadrado (10m x 10m) de elevada capacidade está inicialmente vazio. Numa das faces do tanque há uma "janela/d Descarregador" com a forma de um triângulo equilátero tal como mostra a figura. Num dado instante, o tanque passa a ser alimentado com água, a um caudal Q_A . Calcule:

- O caudal de alimentação Q_A , sabendo que, passado muito tempo, o nível de água no tanque é de 3,0 m.
- O tempo que a superfície livre do tanque demora a atingir o nível da aresta inferior (contida num plano horizontal) do descarregador.
- O tempo que a superfície livre do tanque demora a atingir o nível do vértice superior do descarregador.

**Solução**

O tanque começa a encher, e até a superfície livre atingir o plano da aresta inferior do descarregador só entra água no tanque. De seguida, o tanque, que continua a ser alimentado, começa a descarregar para a atmosfera a um caudal que depende do nível de água no interior do tanque. Após o nível de água atingir o vértice superior, continua a descarregar, agora através de toda a "janela". O nível de água no tanque continua a aumentar, bem como o caudal de descarga que é função deste nível, até que este caudal iguale o caudal de entrada. Esta igualdade observa-se para uma altura de 3,0 m de água dentro do tanque

a. No estado estacionário, não há acumulação e a massa que entra no tanque por unidade de tempo tem de ser igual à que sai por unidade de tempo. O caudal de alimentação Q_A é igual ao caudal de descarga através de um descarregador triangular (Capítulo 4).



Aplicando Bernoulli entre um ponto 1 longe do descarregador a uma cota z_1 e um ponto 2 à saída do descarregador a uma cota z_2 (referência a base do triângulo), obtém-se:

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{1}{2}v_2^2$$

Recordando as hipóteses formuladas no estudo dos descarregadores e de acordo com a figura:

$$p_1 = p_{atm} + \rho g(H - z_1), p_2 = p_{atm}$$

em que H representa a altura de água acima da aresta do descarregador.

Substituindo na equação de Bernoulli:

$$v_2 = \sqrt{2g(H - z_2) + v_1^2}$$

O caudal de descarga através de um elemento infinitesimal de altura δz_2 que dista z_2 da base do triângulo é dado por:

$$\delta Q = v_2 \delta A = v_2 b \delta z_2$$

em que b representa a largura da tira infinitesimal.

Mas b varia linearmente com z_2 sendo a respectiva equação:

$$b = 1 - \frac{z_2}{H_D}$$

em que H_D representa a altura do triângulo.

$$\delta Q = \sqrt{2g(H - z_2) + v_1^2} \left(1 - \frac{z_2}{H_D}\right) \delta z_2$$

Estendendo a toda a área do descarregador:

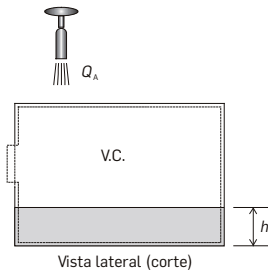
$$Q_D = \int_0^{H_D} \sqrt{2g(H - z_2) + v_1^2} \left(1 - \frac{z_2}{H_D}\right) dz_2$$

A montante do descarregador, a área da secção normal ao escoamento é muito elevada (30 m^2), pelo que a velocidade do fluido, v_1 , é muito baixa (desprezável na soma das duas parcelas). A expressão para o cálculo do caudal simplifica-se:

$$Q_A = Q_D = \int_0^{H_D} \sqrt{2g(H - z_2)} \left(1 - \frac{z_2}{H_D}\right) dz_2$$

Em que Q_A representa o caudal volumétrico de alimentação ao tanque. De acordo com o enunciado $H_D = \sqrt{3}/2$ e $H = 0,5 + \sqrt{3}/2$.

b. Durante o tempo que o nível da água demora a atingir a aresta inferior do descarregador, só há alimentação ao tanque. O caudal de alimentação foi calculado na alínea anterior.



O VC está desenhado na figura, onde h representa a altura de água no tanque num dado instante. Cada um dos termos da equação de conservação de massa é analisado de seguida.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{AC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = 0$$

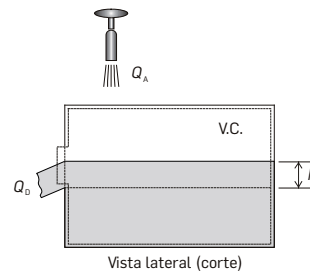
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho A dz = A \rho \frac{dh}{dt}$$

$$\int_{AC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = -\rho Q_A$$

$$A \frac{dh}{dt} = Q_A \rightarrow A \int_0^{3-H} dh = Q_A \int_0^t dt \rightarrow t = \frac{A(3-H)}{Q_A}$$

em que A representa a área da base do tanque, Q_A o caudal de alimentação calculado na alínea anterior e $H = 0,5 + \sqrt{3}/2$.

c. Durante o tempo que o nível da água demora a atingir o vértice do descarregador, além de haver alimentação, o tanque está a descarregar para a atmosfera. O caudal de descarga vai aumentando e a velocidade de subida da superfície livre vai diminuindo até se atingir o estado estacionário. O caudal de descarga aumenta por duas razões: porque a área de descarga vai aumentando e porque a velocidade de descarga, função da cota da superfície livre, também vai aumentando. O caudal de alimentação foi calculado na alínea anterior.



Cada um dos termos da equação de conservação de massa é analisado de seguida.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{AC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho A dz = A \rho \frac{dh}{dt} \\ \int_{AC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA &= -\rho Q_A + \rho Q_D\end{aligned}$$

O caudal de descarga, quando a superfície livre se encontra a 3,0 m da base, já foi calculado na alínea a:

$$Q_D = \int_0^{H_D} \sqrt{2g(H-z_2)} \left(1 - \frac{z_2}{H_D}\right) dz_2$$

No caso da cota da superfície livre variar, a dedução pode ser refeita e conclui-se que:

$$Q_D = \int_0^h \sqrt{2g(h-z_2)} \left(1 - \frac{z_2}{H_D}\right) dz_2$$

em que h representa a altura da superfície livre relativamente à aresta do descarregador.

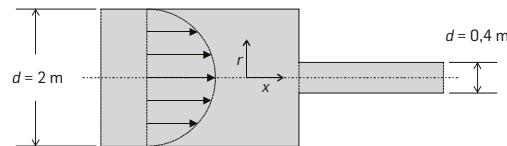
Substituindo cada termo na equação de conservação de massa obtém-se:

$$\begin{aligned}A \rho \frac{dh}{dt} + \int_0^h \rho \sqrt{2g(h-z_2)} \left(1 - \frac{z_2}{H_D}\right) dz_2 - Q_A \rho &= 0 \\ A \int_0^{H_D} \frac{dh}{\sqrt{2g(h-z_2)} \left(1 - \frac{z_2}{H_D}\right) dz_2 + Q_A} &= \int_0^t dt\end{aligned}$$

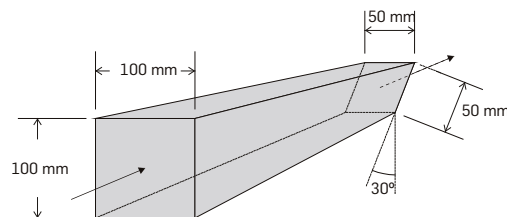
em que t representa o tempo que a superfície livre demora a ir da aresta inferior do descarregador até ao vértice. O tempo total é a soma dos tempos calculados nas alíneas b e c.

5.3.3. Exercícios propostos de aplicação

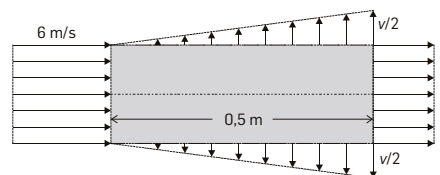
5.1 Água em escoamento numa conduta circular tem um perfil de velocidade dado pela equação $v = 4(1 - r^2/1)$, com v expresso em m/s. Calcule a velocidade média da água na conduta de 0,4 m de diâmetro.



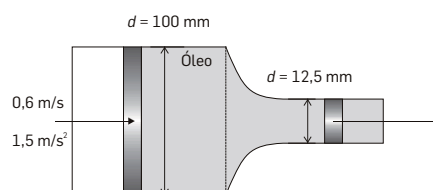
5.2 Água entra num canal de secção recta quadrada tal como mostra a figura a uma velocidade de 1,5 m/s. O canal converge, sendo a secção de descarga quadrada com 50 mm de aresta. A secção de descarga faz um ângulo de 30° com a vertical, contudo a velocidade nesta secção mantém a direcção horizontal. Calcule a velocidade média de saída e o respectivo caudal mássico.



5.3 Água entra num dos extremos de um tubo (1,2 m de diâmetro) com a parede lateral perfurada a uma velocidade de 6 m/s. A descarga através da parede é bem aproximada por um perfil de velocidade linear. Se o escoamento for estacionário calcule a velocidade v de descarga.



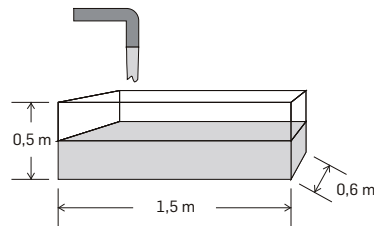
5.4 Na figura, o pistão maior tem uma velocidade de 0,6 m/s e uma aceleração de $1,5 \text{ m/s}^2$. Calcule a velocidade e a aceleração do pistão menor.



5.5 O êmbolo de uma seringa tem uma face de área 500 mm^2 . Se o líquido for injectado a um caudal constante de $300 \text{ cm}^3/\text{s}$ qual a velocidade a que o êmbolo avança? O espaço entre o corpo da seringa e o êmbolo permite a passagem de um caudal de líquido que é 10% do caudal que sai pela agulha.

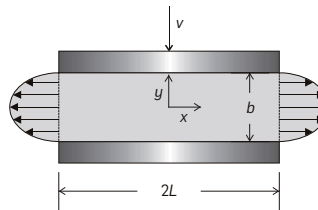


5.6 Um tanque está a ser alimentado com água a um caudal constante de 1 l/min . Diga qual é a taxa de variação da altura de água dentro do tanque.

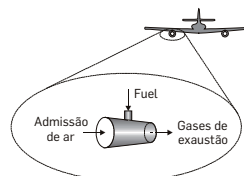


5.7 Dois pratos muito compridos, de largura $2L$, estão separados por uma distância b . O prato superior desloca-se verticalmente a uma velocidade constante v . O espaço entre os pratos está cheio com um líquido que é removido à medida que o prato superior “avança”. Calcule o caudal mássico e a velocidade máxima de descarga nos dois seguintes casos:

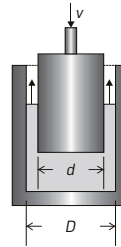
- Perfil de velocidade de saída uniforme.
- Perfil de velocidade de saída parabólico.



5.8 Um avião desloca-se a uma velocidade de 971 km/hr . A área frontal do motor a jacto por onde é admitido o ar ($\rho = 0,736 \text{ kg/m}^3$) é de $0,80 \text{ m}^2$. Um observador estacionário (colocado na Terra) estimou a velocidade de saída dos gases de exaustão como sendo 1050 km/hr . A área de saída dos gases de exaustão ($\rho = 0,515 \text{ kg/m}^3$) é de $0,558 \text{ m}^2$. Estime o caudal mássico de fuel que é alimentado ao motor.



5.9 Um tanque vertical cilíndrico fechado no fundo e de diâmetro D está cheio com um líquido incompressível. Um pistão cilíndrico de diâmetro d , desloca-se dentro do tanque concentricamente a uma velocidade v . O líquido entre o pistão e as paredes do tanque desloca-se no sentido ascendente. Determine a velocidade média do líquido relativamente ao fundo do tanque e relativamente ao pistão.

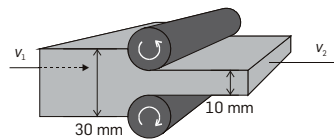


5.10 A densidade de um gás em escoamento num tubo de secção recta A e comprimento L_0 varia de acordo com a seguinte equação:

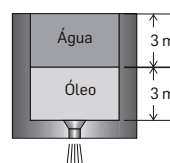
$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{x}{2L_0} \right) \sin \frac{v_0 t}{L_0} \quad \frac{L_0 \pi}{v_0^2} > t \geq 0 \wedge 0 \leq x \leq L_0$$

sendo x a distância ao longo do eixo do tubo e v_0 uma velocidade de referência conhecida. Determine a variação de caudal mássico, entre a entrada e a saída em qualquer instante.

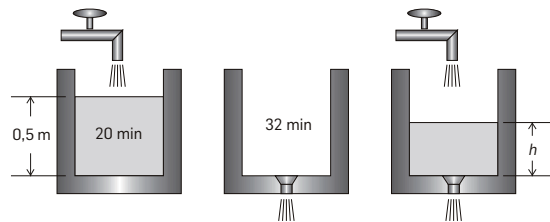
5.11 Chapas de aço a elevada temperatura passam por um “moinho de rolos” tal como mostra a figura. O aço ao sair é 10% mais denso do que ao entrar. Se a velocidade de alimentação for $v_1 = 0,2$ m/s, qual a velocidade v_2 à saída? Há um aumento de 9% na largura da chapa.



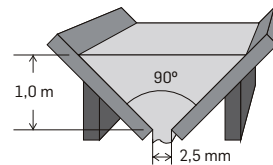
5.12 Um tanque cilíndrico com 1,0 m de diâmetro, contém água e óleo tal como mostra a figura ($\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1000$ kg/m³, $\rho_{\text{óleo}} = 1200$ kg/m³). No fundo do tanque há um orifício de diâmetro $d_0 = 5$ mm. Calcule o tempo necessário para que o óleo e a água escoem. Suponha que não há dissipação de energia mecânica no orifício.



5.13 Uma torneira descarrega água para um tanque cilíndrico com um orifício no fundo. Com a torneira totalmente aberta e o orifício de descarga tapado, o tanque enche em 20 minutos até uma altura de 0,5 m. Se nesse instante se fechar a torneira e destapar o orifício, o tanque esvazia em 32 minutos. Qual a altura que a água atingirá se a torneira estiver totalmente aberta e o orifício no fundo estiver destapado? Suponha que não há dissipação de energia mecânica no orifício.

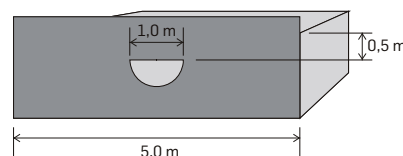


5.14 Uma calha é formada por duas placas inclinadas e contém água tal como mostra a figura. Na junção das duas placas há uma “fenda” ao longo da calha com 2,5 mm de espessura. Se a altura inicial de água na calha for 1,0 m calcule o tempo que demora o nível a baixar até 0,5 m.



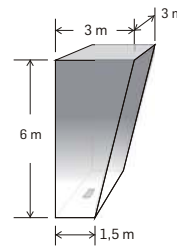
5.15 Um tanque de base quadrada, 5,0 m de aresta, tem numa das faces um orifício semicircular de diâmetro 1,0 m tal como mostra a figura. Calcule:

- O caudal de água que é necessário alimentar ao tanque para manter o nível da superfície livre.
- Quanto tempo demorará o nível a baixar 0,5 m se a alimentação for cortada?



5.16 Um tanque cilíndrico, diâmetro D , contém água e descarrega para a atmosfera através de um orifício lateral de diâmetro d ($d \ll D$) que dista h da base. Derive uma expressão para calcular o tempo que demora a baixar o nível de água no tanque de H_1 até H_2 .

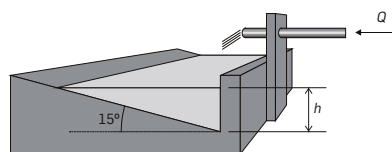
5.17 Um tanque aberto no topo tal como mostra a figura está cheio de água. Na base há um orifício de área $9,0 \text{ cm}^2$. Quanto tempo demora o tanque a descarregar? Suponha que não há dissipação de energia mecânica no orifício.



5.18 Uma cisterna hemisférica com 4 m de diâmetro está totalmente cheia de água. Quanto tempo demorará a cisterna a descarregar através de um orifício de diâmetro 80 mm, situado no "fundo". Suponha que não há dissipação de energia mecânica no orifício.

5.19 Uma vala rectangular com 10 m de largura, na direcção perpendicular ao plano do papel, tem uma inclinação de 15° na base, tal como mostra a figura. Água está a ser despejada na vala a um caudal de 10 l/s.

- Qual o valor de dh/dt quando $h = 1,0 \text{ m}$?
- Quanto tempo demora a superfície livre a subir de 1,0 m até 1,2 m?
- Suponha que além do caudal constante de 10 l/s está a entrar um caudal de água proveniente das chuvas igual a $2 \text{ l/(s m}^2 \text{ de vala com água)}$. Nesta nova situação, quanto tempo demora a superfície livre a subir de 1,0 m até 1,2 m?



5.20 Um tanque de secção quadrada ($5 \text{ m} \times 5 \text{ m}$) tem água até 2 m de altura. Numa das faces do tanque há uma "janela" trapezoidal. O trapézio é isósceles, tem 2,0 m de aresta inferior, 1,0 m de aresta superior e 1,0 m de altura. Destapando a janela inicia-se a descarga de água. Simultaneamente, o tanque é alimentado com um caudal igual ao de descarga, de modo a manter o nível de água no tanque constante.

- Qual o caudal de água de alimentação?
- Cortando a alimentação, o nível de água começa a baixar. Quanto tempo demorará a baixar 0,5 m?
- Quanto tempo demorará a deixar de sair água do tanque?

5.4 Equação da Energia- 1ª lei da Termodinâmica

5.4.1 Dedução da equação da energia

Se e representar energia por unidade de massa, o teorema de Reynolds permite escrever:

$$\frac{D}{Dt} \int_{Sist} e \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho dV + \int_{AC} e \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA \quad (5.18)$$

Significado de cada termo:

$$\frac{D}{Dt} \int_{Sist} e \rho dV$$

Representa a variação de energia no sistema na unidade de tempo.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho dV$$

Representa a variação de energia no volume de controlo na unidade de tempo.

$$\int_{AC} e \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA$$

Representa a energia que sai do volume de controlo através da área de controlo na unidade de tempo; a entrada no volume de controlo é tida com uma saída com sinal negativo (produto interno negativo).

A energia por unidade de massa do sistema, e , é dada pela soma da energia interna u , com a energia cinética e a energia potencial do sistema, todas por unidade de massa:

$$e = u + \frac{1}{2} v^2 + gz \quad (5.19)$$

A 1ª lei da termodinâmica aplicada ao sistema, “diz” que:

$$\frac{D}{Dt} \int_{Sist} e \rho dV = \sum \dot{Q}_{Sist} + \sum \dot{W}_{Sist} \quad (5.20)$$

em que $\sum \dot{Q}_{Sist}$ representa a energia adicionada ou retirada do sistema por unidade de tempo sob a forma de energia térmica, e $\sum \dot{W}_{Sist}$ a energia adicionada ou retirada do sistema por unidade de tempo sob a forma de trabalho (trabalho realizado sobre ou pelo sistema).

Por convenção considera-se positivos a energia térmica transferida dos arredores para o sistema e o trabalho realizado pelos arredores sobre o sistema, e negativos a energia térmica transferida do sistema para os arredores e o trabalho realizado pelo sistema sobre os arredores:

$$\sum \dot{Q}_{Sist} = \sum \dot{Q}_e - \sum \dot{Q}_s \quad (5.21)$$

$$\sum \dot{W}_{Sist} = \sum \dot{W}_e - \sum \dot{W}_s \quad (5.22)$$

No instante de tempo t o sistema e o volume de controlo coincidem, logo:

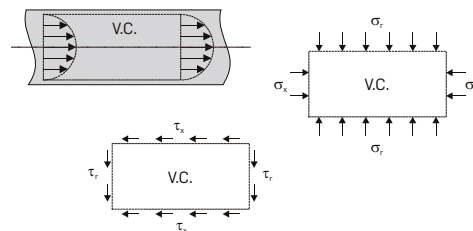
$$\left(\sum \dot{Q} + \sum \dot{W} \right)_{Sist} = \left(\sum \dot{Q} + \sum \dot{W} \right)_{VC} \quad (5.23)$$

Combinando as equações (5.18)-(5.23), resulta a chamada 1ª lei da termodinâmica aplicada a um volume de controlo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho dV + \int_{AC} e \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \left(\sum \dot{Q} + \sum \dot{W} \right)_{VC} \quad (5.24)$$

Há duas formas de realizar/fornecer trabalho ao volume de controlo: o chamado trabalho ao veio resultante da acção de pás, turbinas, veios rotativos, pistões etc., e o trabalho que os elementos de fluido na fronteira realizam sobre o volume de controlo.

O trabalho realizado sobre o volume de controlo pelas forças associadas ao escoamento na fronteira vai ser expresso recorrendo ao escoamento de um fluido num tubo (figura). O VC exclui as paredes do tubo onde a condição de não deslizamento é observada.



O trabalho realizado por unidade de tempo (potência) pela força das tensões normais que actuam num elemento de fluido, $\delta \dot{W}_p$, é calculado pelo produto interno da força pelo vector velocidade do elemento.

$$\delta \dot{W}_p = \delta \vec{F}_p \cdot \vec{v} \quad (5.25)$$

A força de tensão normal é expressa pelo produto da tensão normal ($\vec{\sigma} = -p\vec{n}$ em que \vec{n} representa o versor normal ao elemento de fluido “apontando” para “fora do elemento”) pela área do elemento em que a força actua:

$$\delta \vec{F}_p = -p\vec{n}\delta A \rightarrow \delta \vec{W}_p = -p\vec{v} \cdot \vec{n}\delta A \quad (5.26)$$

Estendendo a todas os elementos do volume de controlo resulta:

$$\dot{W}_p = \int_{AC} -p\vec{v} \cdot \vec{n} dA \quad (5.27)$$

Se a velocidade só tiver componente horizontal, o produto interno $\vec{v} \cdot \vec{n}$ é nulo em toda a superfície lateral do volume de controlo representado na figura, não o sendo nas secções de entrada e saída.

O trabalho realizado por unidade de tempo (potência) pela força das tensões tangenciais que actuam num elemento de fluido, $\delta \dot{W}_\tau$, é dado pelo produto interno da força pelo vector velocidade do elemento:

$$\delta \dot{W}_\tau = \delta \vec{F}_\tau \cdot \vec{v} \quad (5.28)$$

No volume de controlo seleccionado, a velocidade é nula em todo o perímetro molhado do tubo, condição de não deslizamento, enquanto que nas secções de entrada e saída, o vector da tensão tangencial é perpendicular ao vector velocidade. Assim, o trabalho realizado pela força das tensões tangenciais é nulo em toda a AC.

Após estas considerações, a 1ª lei da termodinâmica é expressa por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e\rho dV + \int_{AC} e\rho\vec{v} \cdot \vec{n} dA = \dot{Q} + \dot{W}_{veio} - \int_{AC} p\vec{v} \cdot \vec{n} dA \quad (5.29)$$

e após rearranjo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e\rho dV + \int_{AC} \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) \rho\vec{v} \cdot \vec{n} dA = \dot{Q} + \dot{W}_{veio} \quad (5.30)$$

5.4.2 Casos particulares da equação da energia

Estado estacionário:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e\rho dV = 0 \rightarrow \int_{AC} \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) \rho\vec{v} \cdot \vec{n} dA = \dot{Q} + \dot{W}_{veio} \quad (5.31)$$

Se as propriedades dentro do parêntesis forem uniformes ao longo das superfícies de entrada e de saída do volume de controlo, pode-se escrever:

$$\int_{AC} \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right)_s \dot{m}_s - \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right)_e \dot{m}_e \quad (5.32)$$

em que \dot{m}_s e \dot{m}_e representam respectivamente o caudal mássico de saída e o caudal mássico de entrada no volume de controlo.

Se houver trabalho ao veio fornecido/efectuado ao/pelo sistema, a equação da energia toma então a seguinte forma:

$$\left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right)_s \dot{m}_s - \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right)_e \dot{m}_e = \dot{Q} + \dot{W}_{\text{veio}} \quad (5.33)$$

Esta é a equação da energia nas condições de escoamento uni-direccional, em estado estacionário, com propriedades distribuídas uniformemente nas secções de entrada e de saída do volume de controlo. Muitas vezes aparece escrita em termos da propriedade termodinâmica entalpia. Para sistemas abertos:

$$h = u + \frac{p}{\rho} \quad (5.34)$$

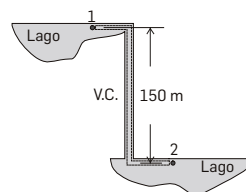
em que h representa a entalpia por unidade de massa.

Se não houver acumulação de fluido dentro do volume de controlo, os caudais mássicos de entrada e saída são iguais e:

$$\left[h_s - h_e + \frac{v_s^2 - v_e^2}{2} + g(z_s - z_e) \right] \dot{m} = \dot{Q} + \dot{W}_{\text{veio}} \quad (5.35)$$

Exemplo 5.6

Na figura está representada um esboço de uma queda de água de altura 150 m. Determine a elevação de temperatura associada a esta queda de água.



Solução

Aplicando a equação da energia ao volume de controlo esboçado na figura resulta:

$$u_2 - u_1 + \left(\frac{p}{\rho}\right)_2 - \left(\frac{p}{\rho}\right)_1 + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) = \frac{\dot{Q}}{\dot{m}}$$

A pressão à entrada e saída do volume de controlo é atmosférica e a variação da carga cinética desprezável comparativamente com a variação de energia potencial (a saída do volume de controlo está longe da queda de água). Se o escoamento for adiabático, $\dot{Q} = 0$, resulta:

$$u_2 - u_1 = g(z_1 - z_2)$$

Sendo um sistema aberto, a variação de energia interna por unidade de massa é dada por:

$$u_2 - u_1 = C_p(T_2 - T_1)$$

em que C_p representa a capacidade calorífica do líquido a pressão constante.

Logo

$$T_2 - T_1 = \frac{g(z_1 - z_2)}{C_p} \rightarrow T_2 - T_1 = 0,35^\circ\text{C}$$

5.4.3 Aplicação da equação da energia a algumas máquinas simples

Estrangulamento Adiabático

O chamado estrangulamento adiabático representa razoavelmente o escoamento de um fluido através de uma válvula parcialmente aberta, através de uma válvula de expansão de um frigorífico, através de uma fenda num contentor de armazenagem de gás comprimido, etc.

Supondo que o escoamento é estacionário e horizontal, que as velocidades de entrada e saída do volume de controlo são iguais e que não há calor transferido do ou para o volume de controlo (adiabático), da equação da energia resulta:

$$h_s = h_e \quad (5.36)$$

Turbinas e Compressores

Uma turbina ou máquina de expansão é um dispositivo que permite extrair trabalho de um fluido em escoamento. Compressores, bombas, ventiladores e pás com eixo rotativo, pelo contrário fornecem trabalho ao fluido.

Supondo que o escoamento é estacionário, que a diferença de nível entre a entrada e a saída é desprezável, que não há trocas de calor entre o

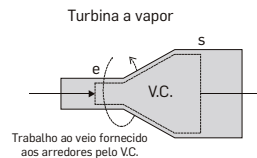
volume de controlo e os arredores, que os caudais mássicos de entrada e saída do volume de controlo são iguais, e que a variação de energia cinética entre a entrada e a saída é desprezável, da equação da energia resulta:

$$\frac{\dot{W}_{veio}}{\dot{m}} = h_s - h_e \quad (5.37)$$

No caso de uma turbina é retirado trabalho do volume de controlo (por convenção negativo $h_s < h_e$), no caso de um compressor está a ser fornecido trabalho ao volume de controlo (por convenção positivo $h_s > h_e$).

Exemplo 5.7

Vapor entra numa turbina com uma velocidade de 30 m/s e uma entalpia de 3350 kJ/kg. A corrente de saída é uma mistura de vapor e líquido com uma velocidade de 60 m/s e uma entalpia de 2550 kJ/kg. Se o escoamento na turbina for adiabático e as variações de cota desprezáveis, determine o trabalho fornecido, por unidade de massa de vapor, pela turbina aos arredores.



Solução

O volume de controlo seleccionado está a tracejado na figura. Aplicando a equação da energia ao V.C. resulta:

$$\dot{m} \left[h_s - h_e + \frac{v_s^2 - v_e^2}{2} + g(z_s - z_e) \right] = \dot{Q} + \dot{W}_{veio}$$

A diferença de cota é desprezável e o escoamento adiabático donde:

$$\left[h_2 - h_1 + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right] = w_{veio} \rightarrow w_{veio} \approx -800 \text{ kJ/kg}$$

O trabalho por unidade de caudal mássico é negativo porque é fornecido pelo V.C. aos arredores. Note que a variação da energia cinética é desprezável comparativamente com a variação de entalpia.

5.4.4 Comparação entre a equação da energia e a equação de Bernoulli

Em estado estacionário, com propriedades uniformes nas superfícies de entrada e saída e sem trabalho ao veio, a equação da energia apresenta a seguinte forma:

$$\left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right)_s \dot{m}_s - \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right)_e \dot{m}_e = \dot{Q} \quad (5.38)$$

rearranjando para o caso de :

$$\frac{p_s}{\rho} + \frac{v_s^2}{2} + gz_s = \frac{p_e}{\rho} + \frac{v_e^2}{2} + gz_e - (u_s - u_e - q) \quad (5.39)$$

em que:

$$q = \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} \quad (5.40)$$

A equação de Bernoulli é aplicada ao longo de uma linha de corrente e foi deduzida pondo a hipótese de não se desenvolverem tensões de corte no fluido (não “haver” resistência viscosa ao escoamento):

$$\frac{p_s}{\rho} + \frac{v_s^2}{2} + gz_s = \frac{p_e}{\rho} + \frac{v_e^2}{2} + gz_e \quad (5.41)$$

Comparando as equações (5.39) e (5.41) conclui-se que para “não haver” resistência viscosa ao escoamento tem que se verificar a seguinte condição:

$$u_s - u_e - q \cong 0 \quad (5.42)$$

A resistência viscosa promove degradação de energia mecânica, passagem irreversível de energia mecânica a térmica, pelo que:

$$u_s - u_e - q > 0 \quad (5.43)$$

Este termo representa a energia mecânica degradada por resistência viscosa:

$$u_s - u_e - q = \text{perdas} \quad (5.44)$$

A equação da energia é muitas vezes apresentada na seguinte forma

$$\frac{p_s}{\rho} + \frac{v_s^2}{2} + gz_s = \frac{p_e}{\rho} + \frac{v_e^2}{2} + gz_e - \text{perdas} \quad (5.45)$$

Quando há trabalho ao veio

$$\frac{p_s}{\rho} + \frac{v_s^2}{2} + gz_s = \frac{p_e}{\rho} + \frac{v_e^2}{2} + gz_e + w_{\text{veio}} - \text{perdas} \quad (5.46)$$

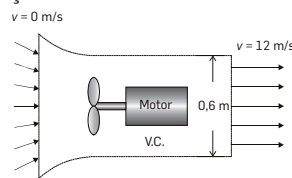
em que

$$w_{\text{veio}} = \frac{\dot{W}_{\text{veio}}}{\dot{m}} \quad (5.47)$$

A equação 5.46 pode ser enunciada de uma forma simples: em estado estacionário, a soma da energia mecânica que entra no V.C. com a energia mecânica fornecida pelo trabalho ao veio é igual à soma da energia mecânica que sai do V.C. com a energia mecânica degradada (estas energias são todas referenciadas à unidade de massa).

Exemplo 5.8

Uma ventoinha de fluxo axial trabalha acoplada a um motor que debita 0,4 kW de potência. As pás da ventoinha produzem um escoamento de ar axial com uma velocidade de 12 m/s que é "sentido" num tubo circular com 0,6 m de diâmetro. O escoamento a montante da ventoinha tem uma velocidade desprezável. Determine a % do trabalho fornecido pela ventoinha que tem aplicação útil. Estime a eficiência do processo de ventilação.



Solução

Parte da energia fornecida pelas pás vai degradar-se devido ao atrito entre o fluido e as pás do ventilador. Esta energia que permanece no fluido sob a forma de energia térmica não tem aplicação mecânica e designa-se por energia degradada (perdas).

Aplicando a equação da energia ao volume de controlo representado na figura, resulta:

$$\left[\left(\frac{p}{\rho} \right)_s - \left(\frac{p}{\rho} \right)_e + \frac{v_s^2 - v_e^2}{2} + g(z_2 - z_1) \right] = w_{\text{veio}} - \text{perdas}$$

Sabendo que $p_s = p_e = p_{\text{atm}}$, $z_2 - z_1 \approx 0$ e $\frac{v_s^2}{2} \approx 0$ resulta:

$$\left[\frac{v_e^2}{2} \right] = w_{\text{veio}} - \text{perdas} \rightarrow w_{\text{veio}} - \text{perdas} = 72 \text{ J/kg}$$

Vamos chamar ao termo $w_{\text{veio}} - \text{perdas}$, energia útil por unidade de massa, $w_{\text{útil}}$. A potência útil será dada por:

$$\dot{W}_{\text{útil}} = w_{\text{útil}} \times \dot{m} = 72\dot{m}$$

A eficiência do processo de ventilação é por definição:

$$\eta = \frac{\text{potência útil}}{\text{potência fornecida às pás}}$$

A potência fornecida às pás, supondo que não há perdas por atrito nas partes mecânicas do ventilador, é:

$$\dot{W} = 400 = w \times \dot{m} = 95,8\dot{m}$$

O caudal mássico foi calculado considerando $\rho_{\text{ar}} = 1,23 \text{ kg/m}^3$.

A eficiência do processo de ventilação é:

$$\eta = \frac{72\dot{m}}{95,8\dot{m}} = 75,2\%$$

5.4.5 Aplicação da equação da energia a escoamentos não-uniformes

No caso da velocidade não ser uniforme nas secções de entrada e saída tem que se ter atenção à evolução do integral.

$$\int_{AC} \frac{v^2}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA \quad (5.48)$$

Para um escoamento com velocidade não uniforme nas entradas e saídas do VC define-se:

$$\int_{AC} \frac{v^2}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \dot{m} \left(\frac{\alpha_s \bar{v}_s^2}{2} - \frac{\alpha_e \bar{v}_e^2}{2} \right) \quad (5.49)$$

em que α representa o coeficiente de energia cinética e \bar{v} a velocidade média na respectiva secção. O coeficiente α é definido pelas seguintes equações:

$$\alpha_s = \frac{\int_{A_s} \frac{v^2}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA}{\dot{m} \frac{\bar{v}_s^2}{2}} \quad \text{e} \quad \alpha_e = \frac{\int_{A_e} \frac{v^2}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA}{\dot{m} \frac{\bar{v}_e^2}{2}} \quad (5.50)$$

A equação da energia toma então a seguinte forma:

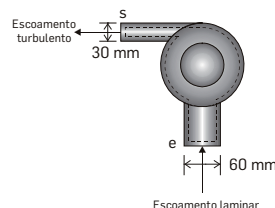
$$\frac{p_s}{\rho} + \frac{\alpha_s \bar{v}_s^2}{2} + gz_s = \frac{p_e}{\rho} + \frac{\alpha_e \bar{v}_e^2}{2} + gz_e + w_{\text{veio}} - \text{perdas} \quad (5.51)$$

Se o escoamento for laminar, perfil de velocidade parabólico, $\alpha = 2$, e se o escoamento for uniforme o seu valor é $\alpha = 1$.

Exemplo 5.9

Uma ventoinha montada num secador de cabelo, tal como mostra a Figura, movimenta ar a um caudal mássico de 0,1 kg/min. Na entrada, o diâmetro do tubo é de 60 mm e na saída de 30 mm. Se o aumento de pressão estática através do secador for de 0,1 kPa e a potência fornecida pela ventoinha ao ar 0,14 W, calcule as perdas assumindo:

- Distribuição de velocidade uniforme em ambas as secções.
- Distribuição parabólica na secção de entrada e uniforme na de saída.



Solução

Aplicando a equação de energia ao volume de controlo obtém-se:

$$\frac{p_s}{\rho} + \frac{\alpha_s \bar{v}_s^2}{2} + gz_2 = \frac{p_e}{\rho} + \frac{\alpha_e \bar{v}_e^2}{2} + gz_e - \text{perdas} + w_{\text{veio}}$$

Tomando $z_2 - z_1 \approx 0$ resulta:

$$\text{perdas} = w_{\text{veio}} - \left(\frac{p_s - p_e}{\rho} \right) + \frac{\alpha_e \bar{v}_e^2}{2} - \frac{\alpha_s \bar{v}_s^2}{2}$$

em que:

$$w_{\text{veio}} = \frac{\dot{W}_{\text{veio}}}{\dot{m}} \rightarrow w_{\text{veio}} = \frac{0,14}{\frac{0,1}{60}} = 84 \text{ J/kg}$$

A velocidade média na secção de entrada ($\rho_{\text{ar}} = 1,23 \text{ kg/m}^3$) é:

$$\bar{v}_e = \frac{\dot{m}}{\rho A_1} = \frac{\frac{0,1}{60}}{1,23\pi \frac{(60 \times 10^{-3})^2}{4}} = 0,479 \text{ m/s}$$

A velocidade média na secção de saída ($\rho_{\text{ar}} = 1,23 \text{ kg/m}^3$) é:

$$\bar{v}_s = \frac{\dot{m}}{\rho A_2} = \frac{\frac{0,1}{60}}{1,23\pi \frac{(30 \times 10^{-3})^2}{4}} = 1,92 \text{ m/s}$$

A variação da massa volúmica devido ao aumento de pressão é muito pequena, pelo que se consideram iguais massas volúmicas à entrada e à saída do VC.

a. Perfis uniformes à entrada e saída.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

$$\text{perdas} = w_{\text{veio}} - \left(\frac{p_2 - p_1}{\rho} \right) + \frac{\alpha_1 \bar{v}_1^2}{2} - \frac{\alpha_2 \bar{v}_2^2}{2} = 0,975 \text{ J/kg}$$

b. Perfil parabólico à entrada e uniforme à saída:

$$\alpha_1 = 2 \wedge \alpha_2 = 1$$

$$\text{perdas} = w_{\text{veio}} - \left(\frac{p_2 - p_1}{\rho} \right) + \frac{\alpha_2 \bar{v}_2^2}{2} - \frac{\alpha_1 \bar{v}_1^2}{2} = 0,940 \text{ J/kg}$$

5.4.6 Exercícios propostos de aplicação

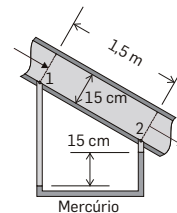
5.21 Óleo ($\rho = 920 \text{ kg/m}^3$) é bombeado entre dois níveis a um caudal de $0,0053 \text{ m}^3/\text{s}$, por meio de uma bomba centrífuga. A pressão relativa nas secções de entrada (sucção) e de saída (descarga) da bomba é respectivamente -350 Pa e 5500 Pa . Se os diâmetros internos dos tubos de sucção e de descarga forem respectivamente $0,05 \text{ m}$ e $0,076 \text{ m}$, calcule

a potência eléctrica fornecida à bomba admitindo que esta tem uma eficiência de 75%. Despreze as perdas por dissipação viscosa no fluido.

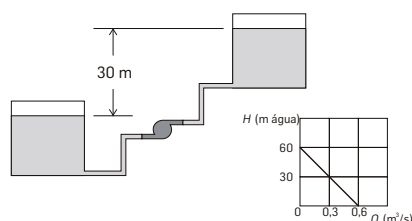
5.22 Água é bombeada de um tanque para outro, sendo 80 m a diferença de nível entre as respectivas superfícies livres. Os diâmetros internos dos tubos de sucção e descarga são respectivamente 100 mm e 50 mm. As secções de entrada e saída da bomba estão no mesmo plano horizontal, 6,0 m acima da superfície livre do tanque inferior. A energia mecânica degrada-se, devido à dissipação viscosa. A perda de carga no tubo de sucção é 2 vezes a carga cinética nesse tubo, no tubo de descarga é 25 vezes a carga cinética nesse tubo e na saída do tubo de descarga para o tanque é igual à carga cinética no tubo de descarga. Quando a potência fornecida pela bomba ao fluido é 40 kW, a carga de pressão na entrada da bomba é 3,0 m de água. Nestas condições, calcule o caudal de descarga bem como a energia degradada entre a entrada e a saída da bomba.

5.23 Água está em escoamento descendente num tubo inclinado tal como mostra a figura. Determine:

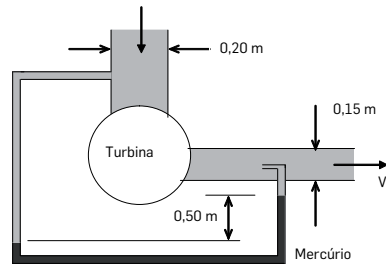
- A diferença de pressão $p_1 - p_2$;
- As perdas de energia por unidade de massa entre as secções 1 e 2.



5.24 Uma bomba transfere água de um reservatório para outro a uma cota superior como mostra a figura. A diferença de nível entre as superfícies livres dos tanques é de 30 m. A perda de carga por atrito na conduta é dada por $K_L \bar{v}^2 / 2g$ em que K_L é um coeficiente de perdas considerado constante. A relação entre o aumento de carga do fluido quando passa na bomba, H , e o caudal bombeado Q está representada no gráfico da figura. Se $K_L = 20$ e o diâmetro do tubo for 25 mm qual o caudal de água que está a ser bombeado?



5.25 Determine a potência de saída da turbina representada na figura quando circula um caudal de água de $0,5 \text{ m}^3/\text{s}$. A turbina tem uma eficiência de 90%. (Exame 2003)



5.5 Equação da Quantidade de Movimento

5.5.1 Dedução da equação da quantidade de movimento

No caso da propriedade intensiva b ser a quantidade de movimento por unidade de massa, o teorema de Reynolds permite escrever:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\text{Sist}} \vec{v} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{VC}} \vec{v} \rho dV + \int_{\text{AC}} \vec{v} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA \quad (5.58)$$

Significado de cada termo da equação

$$\frac{D}{Dt} \int_{\text{Sist}} \vec{v} \rho dV$$

Representa a variação da quantidade de movimento no sistema na unidade de tempo

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{VC}} \vec{v} \rho dV$$

Representa a variação da quantidade de movimento no volume de controlo na unidade de tempo

$$\int_{\text{AC}} \vec{v} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA$$

Representa a quantidade de movimento que sai através da área de controlo na unidade de tempo; a entrada no volume de controlo é tida como uma saída com sinal negativo (produto interno negativo).

Aplicando a 2ª lei de Newton ao sistema resulta:

$$\frac{D}{Dt} \int_{Sist} \vec{v} \rho dV = \sum \vec{F}_{Sist} \quad (5.59)$$

Esta equação mostra que a variação da quantidade de movimento na unidade de tempo no sistema é igual à soma vectorial das forças externas que sobre ele actuam.

Como, num dado instante t , o volume de controlo coincide com o sistema, pode-se escrever:

$$\sum \vec{F}_{Sist} = \sum \vec{F}_{VC} \quad (5.60)$$

Combinando as equações (5.58) - (5.60) resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{v} \rho dV + \int_{AC} \vec{v} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \sum \vec{F}_{VC} \quad (5.61)$$

Esta é a equação vectorial da quantidade de movimento que se aplica a volumes de controlo indeformáveis, fixos ou móveis. O referencial de coordenadas é sempre inercial, fixo ou em movimento uniforme, e as forças envolvidas são forças de superfície ou forças à distância. A equação por ser vectorial, desdobra-se num número de equações algébricas que depende do tipo de problema: unidimensional, bidimensional ou tridimensional.

Algumas indicações importantes para aplicar correctamente a equação 5.61.

- Indicações respeitantes ao termo $\sum \vec{F}_{VC}$
 1. As forças externas têm sinal algébrico associado, positivo se a força está dirigida no sentido positivo do eixo coordenado e negativo no caso contrário.
 2. Somente forças exteriores ao volume de controlo devem ser consideradas. Se o volume de controlo englobar somente o fluido, as forças de reacção das superfícies sólidas em contacto com o fluido têm de ser consideradas. Se o volume de controlo englobar as superfícies sólidas estas forças de reacção já não são consideradas, pois são forças internas ao volume de controlo. Contudo, neste último caso, as forças que mantêm as superfícies

cies sólidas no “sítio” são exteriores ao volume de controlo e têm de ser consideradas.

3. Em alguns casos, e em particular se o volume de controlo seleccionado englobar superfícies sólidas, a força resultante da acção da pressão atmosférica na área de controlo é nula e não necessita de ser considerada. Como resultado, na entrada e na saída de fluido do volume de controlo deve-se considerar pressões relativas.
4. Se as superfícies de entrada e saída do fluido no volume de controlo forem seleccionadas de forma a serem perpendiculares à direcção de escoamento, então as forças de superfície exercidas pelo fluido exterior sobre o volume de controlo são somente forças normais de pressão. Caso as superfícies não sejam escolhidas desta forma, tem que se ter em conta as forças tangenciais de corte.

- Indicações respeitantes ao termo

Se o escoamento for estacionário a variação com o tempo da quantidade de movimento no volume de controlo é nula.

- Indicações respeitantes ao termo $\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{v} \rho dV$

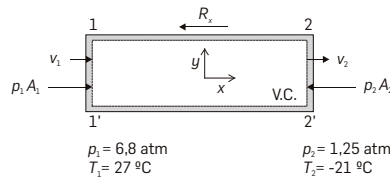
1. O sinal algébrico (+ ou -) associado à quantidade de movimento que atravessa a superfície de controlo tem que ser cuidadosamente analisado:
 - Na entrada de quantidade de movimento o produto interno $\vec{v} \cdot \vec{n}$ é sempre negativo. Se o sentido do eixo coordenado escolhido para positivo coincidir com o sentido do vector velocidade à entrada, então o valor algébrico do termo é negativo, caso contrário é positivo;
 - Na saída de quantidade de movimento o produto interno $\vec{v} \cdot \vec{n}$ é sempre positivo. Se o sentido do eixo coordenado escolhido para positivo coincidir com o sentido do vector velocidade à saída, então o valor algébrico do termo é positivo, caso contrário é negativo.
2. Quando o perfil de velocidade é uniforme nas secções de entrada e saída do volume de controlo, o cálculo do integral é facilitado; o caso de não ser será discutido com um exemplo ilustrativo.

5.5.2 Aplicações da equação da quantidade de movimento

5.5.2.1 Força de atrito na parede de tubos

Exemplo 5.9

Um caudal mássico de ar está em escoamento num tubo de diâmetro interno D . À entrada a pressão é p_1 e a temperatura T_1 e à saída a pressão é p_2 e a temperatura T_2 . Assumindo uma distribuição uniforme de velocidade nas secções 1 e 2 calcule a força que o tubo exerce sobre o ar em escoamento.



Solução

Pretende-se conhecer a força de reacção do tubo sobre o ar em escoamento, pelo que se deve escolher um volume de controlo em que esta força apareça como exterior. O volume de controlo seleccionado está representado na figura, exclui a parede do tubo e nas secções de entrada e saída de fluido a área da secção recta é normal ao vector velocidade.

Da aplicação da componente axial da equação da quantidade de movimento resulta:

$$\int_{AC} \vec{v} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \sum F_{VC} = -R_x + p_1 A_1 - p_2 A_2$$

em que R_x representa a força de reacção do tubo sobre o ar em escoamento e p_1 e p_2 as pressões absolutas à entrada e à saída de fluido do VC.

Assumindo perfis uniformes de velocidade nas secções 1 e 2, obtém-se:

$$+ v_1 \rho_1 (-v_1 A_1) + (v_2) \rho_2 (v_2 A_2) = -R_x + p_1 A_1 - p_2 A_2$$

Recorrendo à equação da continuidade:

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

Combinando as duas equações anteriores:

$$\dot{m}(v_2 - v_1) = -R_x + p_1 A_1 - p_2 A_2$$

Considerando o ar um gás perfeito, as velocidades de entrada e de saída no volume de controlo são dadas por:

$$v_1 = \frac{\dot{m}}{\rho_1 A} \quad v_2 = \frac{\dot{m}}{\rho_2 A}$$

com

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} \quad \rho_2 = \frac{p_2}{RT_2}$$

O valor de R_x calcula-se através das equações anteriores:

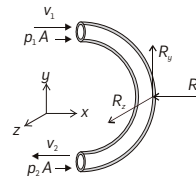
$$R_x = p_1 A - p_2 A - \dot{m}(v_2 - v_1)$$

5.5.2.2 Força exercida num cotovelo

Exemplo 5.10

Água está em escoamento num tubo com um cotovelo de 180°. A área da secção recta do tubo é constante, A , e a velocidade média da água é v . As pressões absolutas à entrada e à saída do tubo são respectivamente p_1 e p_2 .

- Calcule as componentes horizontal e vertical da força exercida pelo cotovelo sobre o fluido.
- Calcule as componentes horizontal e vertical da força exterior necessária para manter o cotovelo no "sítio".

**Solução**

a. Pretende-se a força de reacção do cotovelo sobre o líquido em escoamento, pelo que se deve escolher um volume de controlo em que esta força apareça como exterior. O volume de controlo seleccionado está representado na figura e exclui a parede do cotovelo.

Nas secções de entrada e saída a pressão não tem componente segundo y , pelo que a equação da quantidade de movimento nesta direcção se reduz a:

$$\int_{AC} v_y \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = R_y$$

em que R_y representa a componente segundo y da força de reacção no tubo. A componente da velocidade segundo a direcção y é nula, tanto na secção de entrada como na de saída do VC, resultando $R_y = 0$.

Igual conclusão se obtém aplicando a equação da quantidade de movimento segundo a direcção z , i.e., $R_z = 0$.

Equação da quantidade de movimento segundo a direcção x :

$$\int_{AC} v_x \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = -R_x + p_1 A_1 + p_2 A_2$$

em que p_1 e p_2 representam a pressão absoluta nas secções de entrada e de saída do volume de controlo e R_x a força de reacção do cotovelo sobre o fluido segundo a direcção x .

Assumindo perfis de velocidade uniformes à entrada e saída do volume de controlo:

$$(+v_1) \rho_1 (-v_1 A_1) + (-v_2) \rho_2 (v_2 A_2) = p_1 A_1 + p_2 A_2 - R_x$$

Da equação da continuidade resulta:

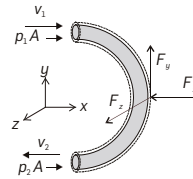
$$\dot{m} = \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

Combinação as duas últimas equações:

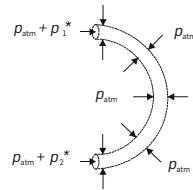
$$-\dot{m}(v_2 + v_1) = A_1 p_1 - A_2 p_2 - R_x \rightarrow R_x = +A_1 p_1 + A_2 p_2 + \dot{m}(v_2 + v_1)$$

$$R_x = A(p_1 + p_2) + 2\dot{m}v$$

b. Pretende-se conhecer a força exterior que se tem de exercer para manter no "sítio" o cotovelo, pelo que o volume de controlo tem de englobar o tubo. As forças exteriores são a pressão atmosférica e a força, F que mantém o tubo no "sítio". O volume de controlo seleccionado está representado na figura.



Recorde-se que as componentes da força de pressão sobre uma superfície curva podem ser calculadas projectando a área onde a força actua nas direcções perpendiculares às das componentes e integrando, nas áreas projectadas, a respectiva pressão. Considere-se na entrada e saída do V.C., a pressão total como a soma da pressão relativa com a pressão atmosférica. Aplicando o método das projecções para calcular a força da pressão atmosférica sobre o volume de controlo, conclui-se que esta força é nula em qualquer das direcções.



Equação da quantidade de movimento segundo a direcção do eixo dos x :

$$\int_{AC} v_x \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = -F_x + p_1^* A_1 + p_2^* A_2$$

em que p_1^* e p_2^* representam a pressão relativa nas secções de entrada e de saída do volume de controlo e F_x a força exterior segundo x necessária para manter o cotovelo no "sítio".

Assumindo perfis de velocidade uniformes à entrada e saída do volume de controlo:

$$(+v_1) \rho_1 (-v_1 A_1) + (-v_2) \rho_2 (v_2 A_2) = p_1^* A_1 + p_2^* A_2 - F_x$$

Da equação da continuidade resulta:

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

Combinação as duas últimas equações:

$$F_x = A (p_1^* + p_2^*) + 2\dot{m}v$$

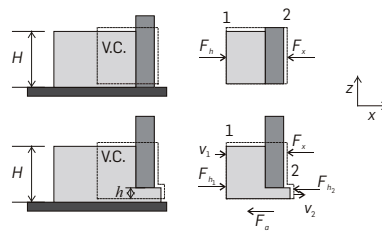
Comparando as soluções das alíneas a e b facilmente se conclui que:

$$F_x = R_x - 2A p_{atm}$$

5.5.2.3 Força exercida por um líquido em escoamento numa comporta

Exemplo 5.11

Uma comporta móvel de um metro de comprimento, na direcção perpendicular ao plano do papel, está esquematizada na figura nas posições de fechada e aberta. Em qual das posições é maior a força que se tem de aplicar para manter a comporta no “sítio”?



Solução

Mais uma vez se coloca o problema que volume de controlo se deve seleccionar. Pretende-se a força que mantém a comporta no “sítio”, pelo que se escolheu um volume de controlo que engloba a comporta. A acção da pressão atmosférica é nula sobre o volume de controlo e deve-se usar pressões relativas.

Comporta fechada

Integrando a pressão relativa ao longo da secção 1 resulta:

$$F_h = \int_{AC} p dA = \int_0^H \rho g z L dz = \frac{1}{2} \rho g H^2$$

Representando F_h a força hidrostática.

Aplicando a equação da quantidade de movimento segundo x:

$$\int_{AC} v_x \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \frac{1}{2} \rho g H^2 - F_x = 0 \rightarrow F_x = \frac{1}{2} \rho g H^2 \quad (1)$$

A intensidade da força exercida para manter a comporta no “sítio”, F_x , é igual à intensidade da força hidrostática.

Comporta aberta

Integrando a pressão relativa ao longo da secção de saída do fluido (2):

$$F_{h2} = \int_{AC} p dA = \int_0^h \rho g z L dz = \rho g \frac{h^2}{2}$$

Aplicando a equação da quantidade de movimento segundo x:

$$\int_{AC} v_x \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \frac{1}{2} \rho g H^2 - \frac{1}{2} \rho g h^2 - F_o - F_x$$

em que F_x representa a força que se tem de exercer sobre a comporta para a manter no sítio e F_a a força de atrito que o solo exerce sobre o fluido no volume de controlo. Considerando perfis de velocidade uniformes à entrada e à saída:

$$(+v_1)\rho_1(-v_1H) + (+v_2)\rho_2(v_2h) = \frac{1}{2}\rho gH^2 - \frac{1}{2}\rho gh^2 - F_x - F_a$$

Tomando $v_1 \ll v_2$, devido à elevada razão entre as áreas das secções rectas normais ao escoamento:

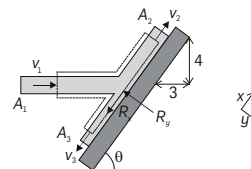
$$F_x = \frac{1}{2}\rho gH^2 - \frac{1}{2}\rho gh^2 - F_a - \rho v_2^2 h \quad (2)$$

Comparando as equações (1) e (2) conclui-se que a força que se tem de exercer sobre a comporta para a manter no "sítio" é maior no caso de ela estar fechada.

5.5.2.4 Força exercida por um jacto sobre uma superfície

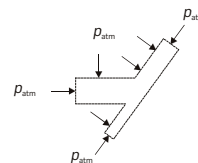
Exemplo 5.12

Um jacto de água incide num prato inclinado como mostra a figura. Calcule as componentes da força que o prato exerce sobre o fluido. Despreze a força de atrito entre a água e o prato.



Solução

Neste caso, em que é pedida a força de reacção do prato sobre o fluido, seleccionou-se um volume de controlo que não engloba o prato. A pressão atmosférica actua na área de controlo seleccionada tal como mostra a figura seguinte. Projectando a área de controlo em planos perpendiculares à direcção dos eixos coordenados e integrando nas áreas projectadas, conclui-se que segundo o eixo dos x a força resultante da pressão atmosférica é nula, e segundo o eixo dos y é igual ao produto da área do prato, A_p , pela pressão atmosférica.



A força de reacção que o prato exerce sobre o volume de controlo, tem duas componentes R_x , reacção à força de atrito, e R_y , reacção do prato à força de pressão do fluido. A pressão à superfície do prato é diferente da pressão atmosférica. No embate do jacto, há conversão de energia cinética em energia de pressão e forma-se uma zona estagnada de elevada pressão. Esta pressão "em excesso" vai ser "gasta" em movimentar,

na direcção tangencial ao prato, o fluido em redor da zona estagnada. Na figura o sentido de R_x é arbitrado.

Aplicando a equação da quantidade de movimento segundo a direcção do eixo dos x :

$$\int_{AC} v_x \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = -R_x$$

$$\int_{AC} v_x \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = (v_1 \cos \theta)(-\rho v_1 A_1) + (v_2)(\rho v_2 A_2) + (-v_3)(\rho v_3 A_3)$$

em que θ é o ângulo que o vector velocidade faz com o versor segundo x na entrada do volume de controlo. Este ângulo é igual ao que o prato faz com o plano horizontal.

Aplicando a equação de Bernoulli entre 1 e 2 ao longo de uma linha de corrente obtém-se:

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = 0$$

Considerando desprezável a variação de energia potencial:

$$v_1 = v_2 = v_3 = v$$

Aplicando a equação da continuidade:

$$A_1 v = A_2 v + A_3 v \rightarrow A_1 = A_2 + A_3$$

Se a força de atrito for desprezável, $R_x = 0$, por combinação das equações anteriores obtém-se:

$$v^2 \rho (-A_1 \cos \theta + A_2 - A_3) = 0 \rightarrow A_2 = A_3 + A_1 \cos \theta$$

Se A_1 for conhecido, das duas últimas equações obtém-se os valores de A_2 e A_3 . De acordo com a equação, o valor de A_2 é superior ao de A_3 .

Aplicando a equação da quantidade de movimento segundo a direcção do eixo dos y :

$$\int_{AC} v_y \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = +p_{atm} A_p - R_y$$

em que A_p representa a área do prato.

$$\int_{CA} v_y \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = (v_1 \sin \theta)(-\rho v_1 A_1)$$

Resultando, para a componente y da força de reacção:

$$R_y = - (v_1 \sin \theta)(-\rho v_1 A_1) + p_{atm} A_p$$

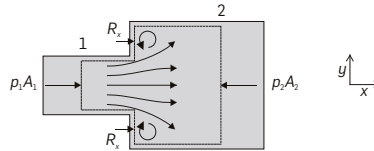
Se se pretender a força externa que deve ser exercida sobre o prato para o manter no "sítio", esta força é dada por:

$$F_y = - (v_1 \sin \theta)(-\rho v_1 A_1)$$

5.5.2.5 Energia degradada numa expansão súbita

Exemplo 5.13

No início de uma expansão o fluido sai em jacto, pelo que o aumento da área da secção recta normal ao escoamento dá-se de uma forma gradual. A região entre o jacto e a parede da conduta é ocupada por fluido em recirculação. Esta recirculação causa turbulência e consequente degradação de energia mecânica. Pretende-se calcular a força de reacção da conduta sobre o fluido devido à expansão e a energia mecânica degradada. Desprezar a força de atrito na parede do tubo.

**Solução**

O volume de controlo seleccionado neste caso não engloba a parede da conduta já que se pretende calcular a força que esta exerce sobre o fluido devido à expansão. Seja R_x a força de reacção da conduta sobre o volume de controlo na zona da expansão.

Equação da quantidade de movimento segundo x :

$$\int_{CA} v_x \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = + p_1 A_1 - p_2 A_2 + R_x$$

em que p_1 e p_2 representam a pressão absoluta nas secções de entrada e saída do fluido no VC.

A área da secção recta do jacto sofre um alargamento lento, pelo que a pressão, no início da expansão, é bem aproximada pela pressão a montante. Esta aproximação permite escrever:

$$R_x = p_0 (A_2 - A_1) \approx p_1 (A_2 - A_1)$$

em que p_0 é a pressão do fluido no início da expansão.

Combinando as duas últimas equações:

$$\begin{aligned} \int_{CA} v_x \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA &= (p_1 - p_2) A_2 \\ (+v_1) \rho_1 (-v_1 A_1) + (+v_2) \rho_2 (v_2 A_2) &= (p_1 - p_2) A_2 \end{aligned}$$

Aplicando a equação da continuidade:

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

Substituindo na equação anterior:

$$(p_1 - p_2) A_2 = \dot{m} (v_2 - v_1)$$

Aplicando a equação da energia ao volume de controlo representado na figura obtém-se:

$$\frac{p_2}{\rho g} - \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = - \text{perdas}$$

Combinando as duas últimas equações resulta:

$$perdas = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} - \frac{v_2(v_1 - v_2)}{g} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$$

Quando há uma expansão para um reservatório de grande diâmetro

$$A_2 \rightarrow \infty, v_2 \rightarrow 0 \Rightarrow perdas = \frac{v_1^2}{2g}$$

o que significa que se degrada toda a carga cinética com que o fluido vinha animado antes da expansão.

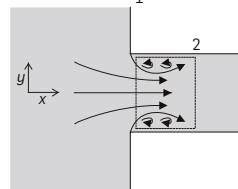
5.5.2.6 Energia degradada numa contracção súbita

Exemplo 5.14

Após a contracção dá-se um estreitamento do jacto, formação da chamada vena contracta, com fluido em recirculação entre esta zona e a conduta (semelhante ao escoamento através de um orifício). Nesta zona de recirculação há degradação de energia mecânica devido à turbulência que se gera.

Solução

Aplicando a equação da quantidade de movimento segundo x ao VC seleccionado:



$$\int_{CA} v_x \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = +p_1 A_1 - p_2 A_2$$

$$(+v_1)\rho(-v_1 A_1^*) + (+v_2)\rho(v_2 A_2) = (p_1 - p_2)A_2$$

em que $A_1^* = C_c A_2$, sendo C_c o chamado coeficiente de contracção.

Aplicando a equação da continuidade:

$$\dot{m} = A_1 \rho_1 v_1 = A_2 \rho_2 v_2$$

resulta:

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{g} \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right)$$

Aplicando a equação da energia:

$$\frac{p_2}{\rho g} - \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = -perdas$$

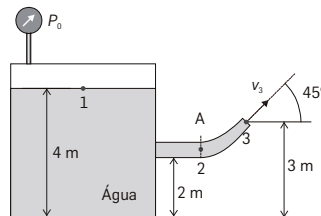
Combinando as duas últimas equações:

$$perdas = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} - \frac{v_2^2}{g} \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right) = \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right)^2$$

5.5.2.7 Exemplos de aplicação diversos

Exemplo 5.15

A figura mostra um tanque de base quadrada (2m x 2m) a descarregar por um tubo para a atmosfera. O tubo de descarga é constituído por um troço curvo logo após um troço horizontal (junção em A). O troço horizontal tem 10 cm de diâmetro interno, enquanto que o diâmetro do troço curvo vai diminuindo até à saída (8 cm à saída). Determine a força que a água exerce no tubo curvo bem como a força que a água exerce nas paredes do tanque.

**Solução**

Antes de aplicar a equação da quantidade de movimento é necessário conhecer a velocidade em diversos pontos do tubo curvo, nomeadamente nos pontos assinalados por (2) e (3) na figura.

Aplicando a equação de Bernoulli ao longo de uma linha de corrente entre um ponto à superfície do tanque (1) e um à saída do tubo (3) obtém-se:

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{1}{2g} v_1^2 = \frac{p_3}{\rho g} + z_3 + \frac{1}{2g} v_3^2$$

$$\frac{1}{2g} v_3^2 = \frac{p_1 - p_{atm}}{\rho g} - (z_3 - z_1) \rightarrow v_3 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_{atm})}{\rho} - 2g(z_3 - z_1)}$$

A equação da continuidade permite relacionar a velocidade média na secção do tubo que contém o ponto (2) com a velocidade média à saída (3):

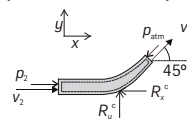
$$v_3 A_3 = v_2 A_2 \rightarrow v_2 = \frac{v_3 A_3}{A_2} = \frac{v_3 d_3^2}{d_2^2}$$

Aplicando de seguida a equação de Bernoulli entre um ponto na superfície do tanque (1) e um ponto antes do cotovelo (2), calcula-se a pressão na secção (2):

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{1}{2g} v_1^2 = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{1}{2g} v_2^2$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{1}{2g} v_2^2 - (z_1 - z_2) \rightarrow p_2 = p_1 - \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g(z_1 - z_2)$$

Pretende-se saber qual a força exercida pelo líquido no tubo curvo. Para tal selecciona-se um volume de controlo que não inclui a parede do tubo.



Aplicando a equação da quantidade de movimento segundo x ao volume de controlo seleccionado resulta:

$$(-\dot{m})(v_2) + (\dot{m})(v_3 \cos 45) = p_2 A_2 - (p_{atm} \cos 45) A_1 - R_x^c$$

$$R_x^c = -(-\dot{m})(v_2) - (\dot{m})(v_3 \cos 45) + p_2 A_2 - (p_{atm} \cos 45) A_1$$

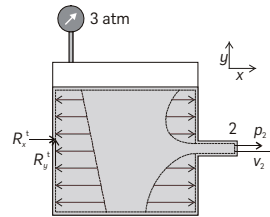
em que R_x^c é a reacção do tubo à força do líquido no cotovelo na direcção x .

Aplicando a equação da quantidade de movimento segundo y ao VC seleccionado, desprezando o peso do líquido no interior do VC, resulta:

$$(\dot{m})(v_3 \cos 45) = -(p_{atm} \cos 45) A_1 + R_y^c$$

$$R_y^c = (p_{atm} \cos 45) A_1 + (\dot{m})(v_3 \cos 45)$$

Para determinar a força que o jacto exerce ao sair sobre as paredes do tanque, escolheu-se o VC representado na figura.



A diferente distribuição de pressão nas paredes do tanque é consequência do aumento de velocidade do líquido na zona de saída do tanque, com a consequente diminuição da pressão (equação de Bernoulli). Desta assimetria resulta a chamada força do jacto, que tende a deslocar o tanque no sentido negativo do eixo dos x .

Aplicando a equação da quantidade de movimento segundo x ao VC:

$$(\dot{m})(v_2) = R_x^t - p_2 A_2$$

$$R_x^t = (\dot{m})(v_2) + p_2 A_2$$

em que R_x^t representa a reacção do tanque à saída do jacto.

Aplicando a equação da quantidade de movimento segundo y ao VC resulta:

$$R_y^t = P_{liq}$$

em que P_{liq} representa o peso do líquido no interior do VC.

Caso se pretenda conhecer a força exterior necessária para manter o dispositivo no "sítio", escolhe-se um volume de controlo que englobe todo o dispositivo, incluindo o tanque e a tubagem. A acção da pressão atmosférica anula-se em toda a área do VC e o resultado da aplicação da equação da quantidade de movimento é:

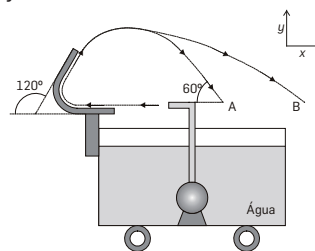
$$F_x = R_x^t - R_x^c - (p_{atm} \cos 45) A_1 = (\dot{m})(v_3 \cos 45)$$

$$F_y = R_y^t + R_y^c - (p_{atm} \cos 45) A_1 = (\dot{m})(v_3 \cos 45) + P_{liq}$$

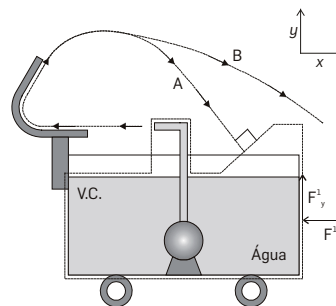
Exemplo 5.16

Um tubo com um cotovelo de 90° roscado à saída de uma bomba colocada no interior de um tanque direcciona um jacto de água de encontro a um dispositivo que muda a direcção do jacto. Considere que o jacto tem 5 cm de diâmetro e uma velocidade de 9 m/s. Calcule a componente horizontal da força exterior que se tem de exercer para que o tanque permaneça parado nos seguintes casos:

- O jacto segue o trajecto A.
- O jacto segue o trajecto B.

**Solução**

a. Para calcular a força exterior que se deve exercer para manter o tanque no "sítio", considerem-se separadamente dois volumes de controlo. Comece-se por analisar o volume de controlo que engloba o tanque, a bomba e o tubo de elevação de água, tal como mostra a figura. Entra e sai água do VC, e tanto na entrada como na saída a área de controlo é normal ao vector velocidade.



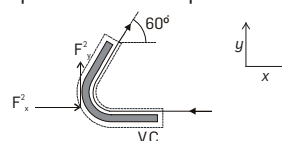
A pressão é atmosférica em toda a superfície de controlo. Aplicando a equação da quantidade de movimento segundo x , obtém-se:

$$(-v)(\dot{m}) + (v \cos 60)(-\dot{m}) = -F_x^1$$

Da equação da quantidade de movimento segundo y , obtém-se

$$(-v \sin 60)(-\dot{m}) = F_y^1$$

Considere-se agora o VC que contém o dispositivo de mudança de direcção:



Aplicando a equação da quantidade de movimento segundo x , obtém-se

$$(-v)(-\dot{m}) + (v \cos 60)(-\dot{m}) = -F_x^2$$

Aplicando a equação da quantidade de movimento segundo y , obtém-se:

$$(v \sin 60)(\dot{m}) = F_y^2$$

A resultante da força exterior que se tem de exercer sobre todo o dispositivo, não considerando o peso do líquido, é:

$$\text{Segundo } x: F_x = -v\dot{m} - v \cos 60\dot{m} + v\dot{m} + v \cos 60\dot{m} = 0$$

$$\text{Segundo } y: F_y = v\dot{m} \sin 60 + v\dot{m} \sin 60 = 2v\dot{m} \sin 60$$

O valor da componente segundo y é diferente de zero já que exteriormente ao volume de controlo, pela acção da força de gravidade, o jacto muda de direcção.

b. O caso do *trajecto B* é semelhante, excepto não haver entrada de quantidade de movimento no primeiro VC seleccionado.

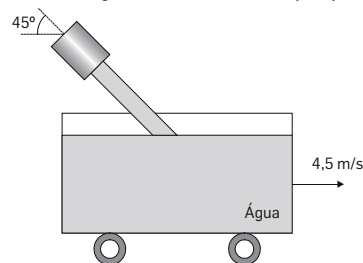
As componentes da resultante da força exterior sobre o dispositivo, não considerando o peso do líquido, são:

$$\text{Segundo } x: F_x = +v\dot{m} + v \cos 60\dot{m} - v\dot{m} = v \cos 60\dot{m}$$

$$\text{Segundo } y: F_y = v \sin 60\dot{m}$$

Exemplo 5.17

Um carro tanque com o topo aberto para a atmosfera desloca-se da esquerda para a direita a uma velocidade uniforme de 4,5 m/s. Num dado instante (representado na figura) o tanque passa por baixo de um jacto de água estacionário de diâmetro 0,10 m e 10 m/s de velocidade. Qual a força exercida no tanque pelo jacto de água?

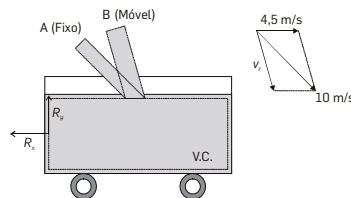


Solução

O volume de controlo seleccionado está representado na figura. Se o carro se encontra em movimento, o percurso do jacto será visto de diferente forma conforme o observador se encontre parado, ou em movimento no interior do carro. Se o observador se deslocar no interior do carro, a direcção em que ele vê o jacto entrar no tanque é a que está representada na figura.

O respectivo vector velocidade é dado por :

$$\vec{v}_r = \vec{v} - \vec{v}_{VC} = 10 \cos 45^\circ \vec{i} - 10 \sin 45^\circ \vec{j} - 4,5 \vec{i} = (10 \cos 45 - 4,5) \vec{i} - 10 \sin 45^\circ \vec{j}$$



A equação escalar de quantidade de movimento segundo x toma a seguinte forma:

$$(10 \cos 45 - 4,5)(-\dot{m}) = -R_x$$

em que R_x é a força de reacção que o tanque exerce sobre o volume de controlo segundo a direcção x . No volume de controlo escolhido, a força exercida pela pressão atmosférica é nula.

O caudal mássico é dado por:

$$\dot{m} = 10\rho A_j$$

resultando:

$$R_x = 10\rho A_j (10 \cos 45 - 4,5) \quad (1)$$

A equação da quantidade de movimento segundo y , desprezando o peso do líquido no volume de controlo, toma a seguinte forma:

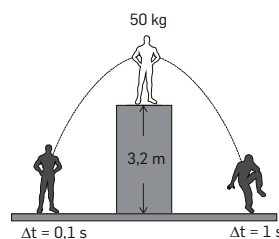
$$R_y = 10\rho A_j (10 \sin 45) \quad (2)$$

As componentes da força exercida pelo líquido no tanque têm sentidos contrários às respectivas reacções calculadas nas equações (1) e (2).

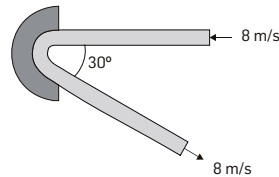
5.5.3 Exercícios propostos de aplicação

5.26 Uma pessoa com 50 kg de peso deixa-se cair, em pé, de uma altura de 3,2 m. Determine a força média a que a pessoa está sujeita no embate admitindo que:

- Não dobra os joelhos ao bater no chão e por isso pára em 0,1 s.
- Estava preparada para a queda e amorteceu o embate dobrando os joelhos, demorando 1,0 s a parar (desde que toca no chão).



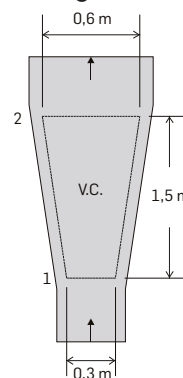
5.27 Determine as componentes x e y da força exterior que se tem de exercer numa pá estacionária que, tal como mostra a figura, desvia um jacto de água de $7 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$ e velocidade 8 m/s .



5.28 Um orifício circular com 4 cm de diâmetro descarrega água na vertical, para baixo, a um caudal de 0,263 l/s. A água cai livremente sem atrito e pretende-se saber:

- A forma do jacto de água, i.e., como é que o diâmetro do jacto varia com a altura.
- a força que o jacto exerce ao embater numa chapa horizontal colocada a 0,5 m do orifício de descarga.
- A força que o jacto exerce ao embater numa chapa horizontal colocada a 2,0 m do orifício.

5.29 Um tubo vertical cónico com 1,5 m de altura alarga de 0,3 m (diâmetro) na base até 0,6 m no topo. Calcule a intensidade e o sentido da força que a água em escoamento ascendente a um caudal de 0,28 m^3/s exerce sobre a parede do tubo. A pressão na base do tubo é de 207 kPa. Assuma que a perda de energia no alargamento é dada por:

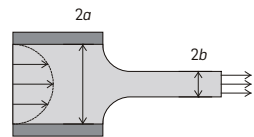


5.30 Um fluido ao percorrer um tubo cilíndrico de raio R em regime laminar tem um perfil de velocidade dado por

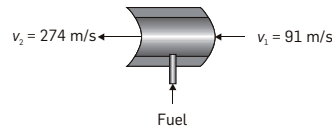
$$v = v_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

em que r representa a distância ao eixo.

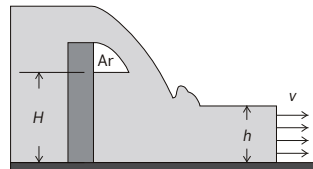
No extremo do tubo, ao sair para a atmosfera, o jacto afila e fica com perfil de velocidade uniforme v sobre toda a secção recta. Com base na equação da quantidade de movimento determine a relação entre a e b . Despreze o efeito da força da gravidade.



5.31 A figura mostra um motor a jacto. Ar ($\rho = 1,29 \text{ kg/m}^3$) entra no motor a uma velocidade de 90 m/s. A massa de fuel consumido representa 1% da massa de ar que entra no motor. Ar e gases provenientes do fuel consumido saem a uma velocidade de 274 m/s. As áreas das secções rectas de entrada e de saída são $1,0 \text{ m}^2$. Nestas condições calcule o sentido e a intensidade do impulso a que o motor está sujeito. Considere o ar incompressível



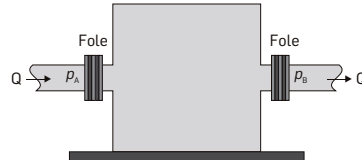
5.32 Na queda de água representada na figura, observa-se a formação de uma zona estagnada junto à parede com altura H . A velocidade e a altura do fluido no canal (de largura constante) são respectivamente v e h . Por aplicação da equação da quantidade de movimento, determine H em função de ρ , v , h . Escolha o volume de controlo de modo a poder desprezar a componente horizontal da quantidade de movimento do fluido à entrada. Despreze as perdas de energia mecânica.



5.33 Uma caixa cúbica fechada, excepto nas "entradas" A e B, é percorrida por água a um caudal Q . As pressões na entrada e na saída são respectivamente: $P_A = 3 \text{ atm}$ e $P_B = 2 \text{ atm}$.

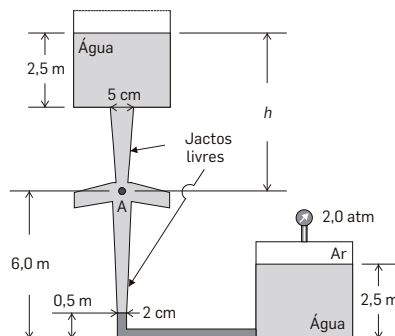
- Qual o caudal de água, sabendo que a única perda de carga entra em A e B corresponde ao alargamento súbito em A, onde toda a energia cinética é perdida? Dados: $d_e = 70 \text{ mm}$; $d_s = 50 \text{ mm}$
- As juntas do tubo em A e B são flexíveis de modo que não transmitam nenhuma força horizontal. Toda a força a que a caixa está

sujeita é suportada pela base. Qual o valor da componente horizontal da força a que a caixa está sujeita, quando é percorrida pelo caudal calculado na alínea a).

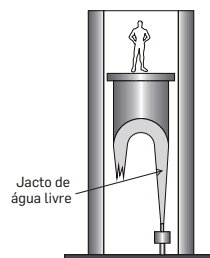


5.34 Jactos de água saem de dois tanques e encontram-se a uma determinada cota como mostra a figura. Despreze a energia mecânica dissipada e determine:

- A altura h sabendo que o ponto A representado na figura é um ponto de estagnação (velocidade nula).
- Se à cota do ponto A fosse colocada uma placa muito delgada, qual seria a intensidade sentido e direcção da força exterior que teria de se exercer para a manter no "sítio".



5.35 Um novo tipo de elevador está esquematizado na figura. Por regulação do caudal de água é possível elevar o elevador até à altura desejada. Assumindo que o caudal mássico máximo do jacto é 220 kg/s e a velocidade à saída da mangueira 60 m/s, qual a relação entre o peso do elevador e a altura a que o jacto eleva o elevador?



5.36 Num rio em que a velocidade da água é 1,5 m/s, um barco a motor desloca-se contra a corrente à velocidade de 9,0 m/s (ambas as velocidades têm como referencial a margem). O barco é impulsionado

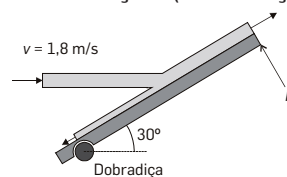
por um motor (a jacto de água) que aspira água do rio a um caudal de $0,15 \text{ m}^3/\text{s}$ e a descarrega pela parte de trás à velocidade de 18 m/s relativamente ao barco (direcção do movimento do barco mas em sentido contrário). O motor consome 21 kW .

Determine a força propulsora do barco e a eficiência do sistema de propulsão se:

- A água entrar pela proa (frente), com a mesma direcção que o movimento do barco.
- A água entrar pela parte lateral, perpendicularmente ao movimento do barco.

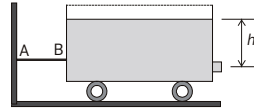
5.37 Um balão de 86 g de massa está cheio com ar, $\rho = 1,29 \text{ kg/m}^3$. O pipo (tubo pequeno de enchimento) tem $6,0 \text{ mm}$ de diâmetro e está dirigido na vertical para baixo no instante em que o balão é "solto". Desprezando o atrito calcule o caudal mássico de saída de ar no instante inicial em que a aceleração do balão é 15 m/s^2 .

5.38 Um jacto "circular" de água com 50 mm de diâmetro é lançado contra uma porta quadrada, com $1,2 \text{ m}$ de lado. O ângulo entre o plano da porta e a direcção do jacto é 30° . A velocidade é $1,8 \text{ m/s}$ e o jacto "atinge" a porta no centro. Desprezando a força de corte entre o fluido e a porta calcule a força normal F que se tem de aplicar na extremidade superior da porta para a manter em equilíbrio. Na extremidade inferior da porta existe um apoio de rotação (dobradiça).



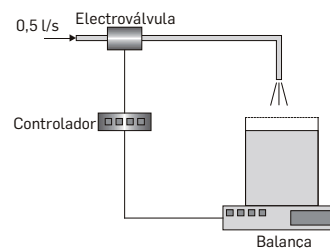
5.39 Um tanque cilíndrico colocado sobre rodas está cheio com água até uma altura h_0 acima do orifício circular de descarga. Um cabo rígido AB prende o tanque a uma parede, impedindo o seu movimento. O orifício de descarga é destapado no instante $t = 0$. Considere A_1 a área do tanque e A_2 a área do orifício e determine:

- Uma expressão para o nível de água no tanque em função do tempo.
- Uma expressão para a força exercida pelo cabo AB no tanque em função do tempo.
- O valor de h , do caudal de descarga, e a força no cabo, 30 s após o orifício ter sido destapado. Dados: $A_1 = 2,0 \text{ m}^2$, $A_2 = 1,0 \text{ cm}^2$ e $h_0 = 6,25 \text{ m}$

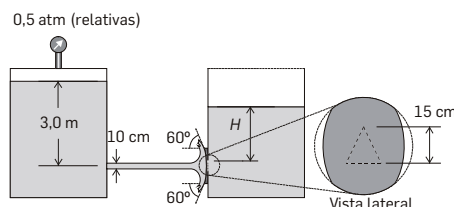


5.40 A figura representa esquematicamente um sistema automático de enchimento de recipientes de água. O recipiente de 1 kg e 5 litros de capacidade, é colocado sobre uma balança eléctrica. Um controlador gera um sinal de comando que fecha uma electroválvula, situada na tubagem de alimentação, quando o valor medido na balança atinge o limite ajustado no controlador.

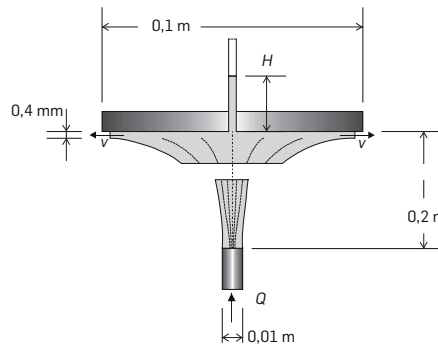
- Se o controlador for regulado para actuar quando a balança detecta uma massa de 60 kg (água e recipiente), observa-se que os recipientes não ficam completamente cheios. Comente adequadamente o que se passa.
- Faça o cálculo da correcção a introduzir no controlador, tendo em conta que o caudal de enchimento é de 0,5 l/s e o diâmetro da tubagem é 15 mm.



5.41 Uma placa tapa o orifício de um reservatório. O orifício tem a forma de um triângulo equilátero com 15 cm de altura. A placa é mantida no "sítio" através da força de um jacto livre de água que sai de um outro reservatório e sobre ela incide. Determine o valor máximo de H para que não ocorra perda de água pelo orifício. Despreze a força de atrito entre o jacto e a placa e considere que a placa é muito leve.

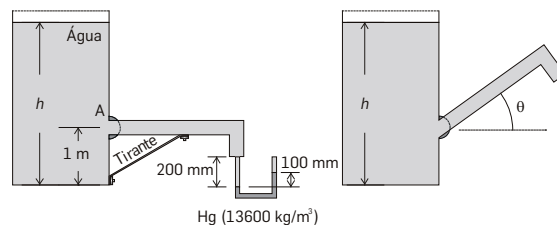


5.42 Água sai de um tubo sob a forma de um jacto livre e vai embater num prato plano circular. A geometria do escoamento é simétrica tal como mostra a figura. Determine o caudal e a leitura H do manómetro. Determine a força exterior que se tem de exercer para manter o prato no "sítio". Despreze a acção das forças viscosas.

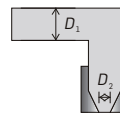


5.43 A figura representa um reservatório com um tubo de descarga de diâmetro D e comprimento L , articulado em A.

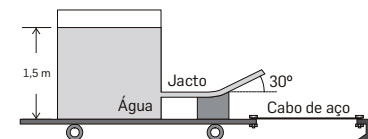
- Supondo o tubo fixo na horizontal através do tirante T, determine a altura h de água no tanque. Na extremidade do tubo colocou-se um tubo de Pitot para medir a velocidade de descarga.
- Se o tirante for retirado, o tubo de saída estabilizará numa determinada posição definindo um ângulo θ com a horizontal. Determine a relação $h(\theta)$. Considere que o material do tubo é muito leve e despreze a força de atrito no tubo.



- Se acoplar um convergente na saída do tubo, ver pormenor da figura, como acha que se alteraria a relação $h(\theta)$? Justifique



5.44 Água está a sair em jacto de um tanque aberto para a atmosfera através de um orifício circular com 13 cm^2 de área, sendo 1,5 m a altura de água no tanque (1,0 m acima do orifício). O jacto ao sair do tanque embate numa pá curva que lhe muda a direcção de um ângulo de 30° . Determine a força, intensidade e sentido, a que está sujeito o cabo de aço horizontal que segura o carro sobre o qual está pousado o tanque e a pá curva.



6 ANÁLISE DIMENSIONAL, SEMELHANÇA E MODELOS

6.1 Introdução

Embora muitos problemas de Mecânica de Fluidos possam ser resolvidos analiticamente por resolução das equações que descrevem o fenómeno, outros há que só podem ser resolvidos experimentalmente ou por combinação de resultados analíticos com experimentais. Neste capítulo vão ser estudadas algumas técnicas que permitem planejar, executar, compreender e correlacionar dados experimentais.

Outro dos objectivos deste capítulo é aprender como devem ser extrapolados dados obtidos em laboratório para sistemas semelhantes mas à escala “industrial” - os chamados estudos de semelhança.

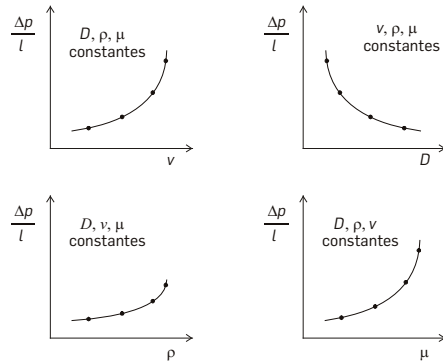
Para introduzir o estudo da análise dimensional recorre-se ao problema de escoamento de um fluido Newtoniano, incompressível e em estado estacionário, num tubo circular horizontal de secção recta constante. Pretende-se conhecer a perda de pressão por unidade de comprimento de tubo, resultante da acção das forças viscosas.

O primeiro passo para planejar o estudo é decidir quais as variáveis que afectam a perda de pressão por unidade de comprimento do tubo. A experiência diz que o diâmetro do tubo, D , a densidade do fluido, ρ , a viscosidade do fluido, μ , e a velocidade média do fluido, v , são as variáveis que afectam a perda de pressão. Esta dependência é traduzida matematicamente por:

$$\frac{\Delta p}{l} = f(D, \rho, \mu, v) \quad (6.1)$$

Contudo, desconhece-se a natureza da função, sendo o principal objectivo do estudo experimental determiná-la. As experiências devem ser realizadas de uma forma sistemática, pelo que a melhor opção será medir a perda de pressão em séries de experiências. De série para série altera-se o valor de uma das variáveis e mantêm-se as outras constantes. Deste estudo resultam gráficos do tipo que a figura seguinte mostra.

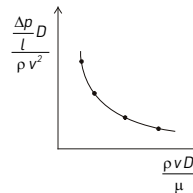
A tarefa de construir estes gráficos não é simples, é necessário realizar muitas experiências algumas delas de difícil execução. Por exemplo, encontrar fluidos de igual massa volúmica mas de diferente viscosidade é difícil, mesmo impossível se for necessário realizar várias experiências nestas condições. Igualmente, pela análise destes gráficos, não é possível, de uma forma simples, conhecer a função que a equação (6.1) sugere.



Para ultrapassar estas dificuldades recorre-se muitas vezes à Análise Dimensional. De uma forma breve refira-se que esta análise permite agrupar as variáveis em grupos adimensionais, o que facilita muito o estudo dos experimentalistas. No exemplo da perda de pressão num tubo, a análise dimensional permite concluir que:

$$\frac{D \frac{\Delta p}{l}}{\rho v^2} = \phi\left(\frac{\rho v D}{\mu}\right) \quad (6.2)$$

Ao realizar experiências, em vez de cinco variáveis em estudo passa a haver somente dois grupos adimensionais. Assim, para construir um gráfico da perda de pressão por unidade de comprimento sofrida por um fluido em escoamento num tubo, só é necessário variar $\rho v D / \mu$ e determinar os correspondentes valores de $D \Delta p / (\rho v^2 l)$. O resultado é expresso por uma curva universal tal como mostra a figura. As experiências podem ser realizadas num tubo qualquer, com um fluido qualquer, desde que a velocidade do escoamento se altere.



De seguida demonstra-se que estes grupos são efectivamente adimensionais.

$$\frac{D \frac{\Delta p}{l}}{\rho v^2} = \frac{L[M/(L^2 T^2)]}{(M/L^3)(L^2/T^2)} = L^0 M^0 T^0$$

$$\frac{\rho v D}{\mu} = \frac{(M/L^3)(M/L)(L)}{M/(LT)} = M^0 L^0 T^0$$

em que M representa a dimensão massa, T a dimensão tempo e L a dimensão comprimento. Estas três dimensões foram seleccionadas como fundamentais ou básicas.

6.2 Análise Dimensional

6.2.1 Teorema de Π Buckingham

Teorema de Π Buckingham - Uma equação dimensionalmente homogénea que envolve k variáveis pode ser "transformada" numa relação entre k-r grupos adimensionais independentes, em que r representa o número mínimo de dimensões fundamentais necessárias para descrever as variáveis.

Uma equação dimensionalmente homogénea é aquela em que as dimensões do lado direito da equação são iguais às do lado esquerdo. Para a larga maioria dos problemas de Mecânica de Fluidos, qualquer variável pode ser expressa recorrendo às dimensões fundamentais L (comprimento), T (tempo) e M (massa).

Os grupos adimensionais são geralmente designados pelo símbolo Π_i . Com base no teorema de Π Buckingham, a equação que relaciona as k variáveis:

$$u_1 = f(u_1, u_2, \dots, u_k) \quad (6.3)$$

pode ser rearranjada e apresentada na seguinte forma:

$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{k-r}) \quad (6.4)$$

Determinação dos termos Π_i

- *Passo I* – Listagem das variáveis envolvidas no problema

Este é o passo mais difícil e também o mais importante; depende do conhecimento do experimentalista sobre as leis físicas que regem o fenómeno.

Devem ser incluídas as variáveis que descrevem a geometria do sistema (diâmetro e comprimento do tubo), as que definem as propriedades físicas do fluido (viscosidade, massa volúmica e tensão superficial)

e as que traduzem o efeito das forças exteriores ao sistema (aceleração da gravidade e a perda de pressão por atrito na parede do tubo). Contudo, em alguns problemas poderão ter de ser incluídas variáveis que não se encaixam facilmente nestas três categorias.

É importante que as variáveis listadas sejam independentes; por exemplo, se num dado problema a área da secção recta de escoamento for importante, ela não deve ser listada a par com o diâmetro da tubagem, já que são duas variáveis dependentes. Igualmente se a massa volúmica do fluido ρ e o peso volúmico γ forem importantes, elas não devem ser listadas conjuntamente com a aceleração da gravidade, g .

- *Passo II* – Expressir cada variável em termos das dimensões fundamentais

Na grande maioria dos problemas de Mecânica de Fluidos as dimensões fundamentais com as quais se exprimem todas as variáveis são: o comprimento, L , a massa, M e o tempo T ou alternativamente L , F (força) e T .

- *Passo III* – Determinar o número de termos Π_i necessários

O número de termos Π_i necessários, segundo o teorema de Buckingham, é igual a $k-r$, em que k representa o número de variáveis listadas para descrever o fenómeno e r o número de dimensões fundamentais necessárias para descrever as variáveis. Pode haver casos (raros) em que as dimensões fundamentais podem ser apresentadas sob uma forma combinada diminuindo r .

- *Passo IV* – Seleccionar um número de variáveis igual ao das dimensões fundamentais

Da lista de variáveis selecciona-se um número igual ao das dimensões fundamentais. Estas variáveis vão ser repetidamente combinadas com as restantes para formar grupos adimensionais. Tem de se ter o cuidado das variáveis seleccionadas não formarem elas próprias, por combinação, um grupo adimensional. Quando se está interessado em estudar uma dada variável (variável dependente) ela não deve ser seleccionada.

- *Passo V* – Formar termos Π_i multiplicando uma das variáveis não seleccionadas pelo produto das variáveis seleccionadas cada

uma elevada a um dado expoente. O valor do expoente tem de ser determinado de forma a que o produto seja adimensional.

Cada grupo adimensional será formado por $u_i u_1^{a_i} u_2^{b_i} u_3^{c_i}$ em que u_i representa uma das variáveis não seleccionadas, u_1 , u_2 e u_3 as variáveis seleccionadas e a_i , b_i e c_i os expoentes a determinar de forma a que o produto seja adimensional.

- *Passo VI*– Repetir o passo V para todas as variáveis não seleccionadas .
- *Passo VII* – Verificar se todos os termos Π_i são adimensionais.
- *Passo VIII* – Expressar na forma final a função entre os termos Π_i .

$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{k-r})$$

No primeiro grupo deve aparecer em numerador a variável dependente que se pretende estudar. A relação funcional entre os grupos adimensionais deve ser determinada através da experimentação.

6.2.2 Aplicação do teorema de Π Buckingham

6.2.2.1 Escoamento em tubagens

Para ilustração, vai-se aplicar o teorema de Π Buckingham ao exemplo do escoamento de um fluido Newtoniano, incompressível, em estado estacionário, num tubo circular horizontal. Pretende-se determinar a perda de pressão devida ao atrito por unidade de comprimento de tubo. Como já foi dito as variáveis envolvidas no problema são:

- Passo I

$$\frac{\Delta p}{l} = f(D, \rho, \mu, v)$$

- Passo II

Exprime-se as variáveis em termos das unidades fundamentais (M, L e T)

$$\frac{\Delta p}{l} \doteq \text{MT}^{-2}\text{L}^{-2}$$

$$D \doteq \text{L}$$

$$\rho \doteq \text{ML}^{-3}$$

$$\mu \doteq \text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$$

$$v \doteq \text{LT}^{-1}$$

- Passo III

Há 5 variáveis ($k = 5$) e é necessário utilizar 3 ($r = 3$) dimensões fundamentais para as descrever dimensionalmente. De acordo com o teorema de Buckingham formam-se 2 grupos adimensionais.

- Passo IV

Seleccionam-se 3 variáveis, número igual ao das dimensões fundamentais. Não se deve seleccionar $\Delta p/l$ já que é a variável que se quer estudar (variável dependente) e não deve aparecer repetida. As variáveis escolhidas não devem formar por combinação um grupo adimensional. Optou-se por escolher D , v e ρ .

- Passo V

Formação dos grupos adimensionais. Começa-se pelo grupo que envolve $\Delta p/l$.

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p}{l} D^a v^b \rho^c$$

$$(\text{MT}^{-2}\text{L}^{-2})(\text{L})^a(\text{LT}^{-1})^b(\text{ML}^{-3})^c = \text{M}^0\text{L}^0\text{T}^0$$

$$1 + c = 0 \quad (\text{M})$$

$$-2 - b = 0 \quad (\text{T})$$

$$-2 + a + b - 3c = 0 \quad (\text{L})$$

A solução deste sistema algébrico de equações é $c = -1$, $b = -2$ e $a = 1$, logo:

$$\Pi_1 = \frac{\frac{\Delta p}{l} D}{\rho v^2}$$

- Passo VI

O procedimento vai agora ser repetido para a variável μ :

$$\Pi_2 = \mu D^a v^b \rho^c$$

$$(ML^{-1}T^{-1})(L)^a(LT^{-1})^b(ML^{-3})^c = M^0L^0T^0$$

$$1 + c = 0 \quad (M)$$

$$-1 - b = 0 \quad (T)$$

$$-1 + a + b - 3c = 0 \quad (L)$$

A solução deste sistema algébrico de equações é $c = -1$, $b = -1$ e $a = -1$, logo:

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho v D}$$

- Passo VII

Verifica-se se os grupos são efectivamente adimensionais

$$\Pi_1 = \frac{\frac{\Delta p}{l} D}{\rho v^2} \doteq \frac{(ML^{-2}T^{-2})(L)}{(ML^{-3})(L^2T^{-2})} \doteq M^0L^0T^0$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho v D} \doteq \frac{(ML^{-1}T^{-1})}{(ML^{-3})(LT^{-1})(L)} \doteq M^0L^0T^0$$

- Passo VIII

O resultado é expresso na forma:

$$\frac{\frac{\Delta p}{l} D}{\rho v^2} = f\left(\frac{\mu}{\rho v D}\right)$$

Cada grupo adimensional pode ser rearranjado (invertido ou multiplicado por outro grupo adimensional), como é o caso de Π_2 .

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho v D} \rightarrow \Pi_2^* = \frac{\rho v D}{\mu}$$

Este é o grupo adimensional “mais famoso” da Mecânica de Fluidos e é conhecido por número de Reynolds.

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2} = f(\text{Re})$$

6.2.2.2 Escoamento em torno de objectos imersos

Um prato pouco espesso de comprimento l e largura w está colocado paralelamente à direcção do escoamento de um fluido. Assume-se que a força que o fluido faz sobre o prato (força de arrasto, F_a) é uma função de w e l , da viscosidade e da massa volúmica do fluido, ρ e μ e da velocidade de aproximação do fluido ao prato, v . Pretende-se determinar os grupos adimensionais convenientes para estudar experimentalmente este problema.

A escolha de variáveis é feita no enunciado:

$$F_a = f(w, l, \mu, \rho, v)$$

As dimensões das variáveis são:

$$F_a = \text{MLT}^{-2}$$

$$w = \text{L}$$

$$l = \text{L}$$

$$\rho = \text{ML}^{-3}$$

$$\mu = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$$

$$v = \text{LT}^{-1}$$

O número de variáveis é $k = 6$ e de dimensões necessárias para exprimir as variáveis é $r = 3$, pelo que se vão formar 3 grupos adimensionais.

Para variáveis principais escolhe-se w , v e ρ as quais são independentes, já que cada uma inclui uma nova dimensão. Começa-se por F_a , variável dependente.

$$\Pi_1 = F_a w^a v^b \rho^c$$

$$(MT^{-2}L)(L)^a(LT^{-1})^b(ML^{-3})^c = M^0L^0T^0$$

$$1 + c = 0 \quad (M)$$

$$-2 - b = 0 \quad (T)$$

$$1 + a + b - 3c = 0 \quad (L)$$

A solução deste sistema algébrico de equações é $c = -1$, $b = -2$ e $a = -2$, logo:

$$\Pi_1 = \frac{F_a}{\rho v^2 w^2}$$

O procedimento vai agora ser repetido para a variável l .

$$\Pi_2 = l w^a v^b \rho^c$$

$$(L)(L)^a(LT^{-1})^b(ML^{-3})^c = M^0L^0T^0$$

$$c = 0 \quad (M)$$

$$b = 0 \quad (T)$$

$$1 + a + b - 3c = 0 \quad (L)$$

A solução deste sistema algébrico de equações é $c = 0$, $b = 0$ e $a = -1$, logo:

$$\Pi_2 = \frac{l}{w}$$

O procedimento vai agora ser repetido para a variável μ .

$$\Pi_3 = \mu w^a v^b \rho^c$$

$$(ML^{-1})(L)^a(LT^{-1})^b(ML^{-3})^c = M^0L^0T^0$$

$$1 + c = 0 \quad (M)$$

$$-1 - b = 0 \quad (T)$$

$$-1 + a + b - 3c = 0 \quad (L)$$

A solução deste sistema algébrico de equações é $c = -1$, $b = -1$ e $a = -1$, logo:

$$\Pi_3 = \frac{\mu}{\rho v w}$$

Verifica-se se os grupos são efectivamente adimensionais.

$$\Pi_1 = \frac{F_a}{\rho v^2 w^2} \doteq \frac{(MLT^{-2})}{(ML^{-3})(L^2T^{-2})(L^2)} \doteq M^0 L^0 T^0$$

$$\Pi_2 = \frac{l}{w} \doteq \frac{(L)}{(L)} \doteq M^0 L^0 T^0$$

$$\Pi_3 = \frac{\mu}{\rho v w} \doteq \frac{(ML^{-1}T^{-1})}{(ML^{-3})(LT^{-1})(L)} \doteq M^0 L^0 T^0$$

O resultado final é expresso na forma:

$$\frac{F_a}{\rho v^2 w^2} = \phi\left(\frac{\mu}{\rho v w}, \frac{1}{w}\right)$$

Cada grupo adimensional pode ser rearranjado

$$\Pi_3 = \frac{\mu}{\rho v w} \rightarrow \Pi_3^* = \frac{\rho v w}{\mu} \rightarrow \frac{F_a}{w^2 v^2 \rho} = \varphi\left(\frac{w}{l}, Re\right)$$

6.2.3 Algumas notas sobre a aplicação do Teorema de Π Buckingham

A escolha das variáveis, em número igual às dimensões fundamentais, é aleatória desde que respeite as condições já enunciadas: não seleccionar a variável em estudo e as variáveis escolhidas combinadas não formarem um grupo adimensional. Pelo facto da escolha ser “aleatória” resultam grupos adimensionais diferentes. Mas estes grupos adimensionais podem ser combinados entre si, resultando uma solução única.

Veja-se o exemplo da perda de pressão num tubo:

1. Se as variáveis seleccionadas forem D , v e ρ obtém-se:

$$\frac{\frac{\Delta p}{l} D}{\rho v^2} = \phi\left(\frac{\rho v D}{\mu}\right)$$

2. Se as variáveis seleccionadas forem D , v e μ obtém-se:

$$\frac{\frac{\Delta p}{l} D}{\mu v} = \varphi\left(\frac{\rho v D}{\mu}\right)$$

Ambos os resultados estão correctos, contudo a função é diferente. O 1º termo da primeira solução pode ser obtido por combinação dos dois termos da segunda.

$$\frac{\frac{\Delta p}{l} D}{\rho v^2} = \frac{\mu}{D v \rho} \cdot \frac{\frac{\Delta p}{l} D^2}{\mu v}$$

6.3 Grupos adimensionais na Mecânica de Fluidos

Número de Reynolds – mede a razão entre as forças de inércia e as forças viscosas que actuam sobre um elemento de fluido:

$$\text{Re} = \frac{l^2 v^2 \rho}{l v \mu} = \frac{l v \rho}{\mu}$$

O número de Reynolds crítico permite distinguir entre escoamentos laminares e turbulentos em tubos, em camadas limite ou em torno de objectos. Para números de Reynolds menores do que o crítico, a acção das forças viscosas sobrepõe-se à das forças de inércia e o escoamento dá-se em regime laminar. Para números de Reynolds maiores do que o crítico, a acção das forças de inércia sobrepõe-se à das forças viscosas e o escoamento é turbulento.

Número de Froude – mede a razão entre as forças de inércia e a força da gravidade que actuam sobre um elemento de fluido

$$\text{Fr} = \frac{l^2 v^2 \rho}{\rho g l^3} = \frac{v^2}{g l} = \frac{v}{\sqrt{g l}}$$

É um grupo importante em escoamentos com superfície livre, escoamentos abertos para a atmosfera, tais como, escoamentos em torno de barcos, escoamentos em rios ou canais.

Número de Euler – mede a razão entre as forças de pressão e as forças de inércia que actuam sobre um elemento de fluido

$$Eu = \frac{l^2 p}{\rho v^2 l^2} = \frac{p}{\rho v^2}$$

Muitas vezes o número de Euler é escrito em termos de diferença de pressão

$$Eu = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho v^2}$$

O número de Euler apresentado nesta forma é usualmente designado por coeficiente de pressão.

Número de Mach e de Cauchy – medem a razão entre as forças de inércia e as forças de compressão que se exercem sobre um elemento de fluido.

$$Ca = \frac{l^2 \rho v^2}{l^2 \rho c^2} \rightarrow Ma = \frac{v}{c}$$

A variável c representa a velocidade do som. Quando o número de Mach é pequeno (menor que 0,3) as forças de inércia não são suficientemente elevadas para causar qualquer mudança significativa na massa volúmica do fluido. Esta mudança é muito significativa quando o número de Mach é superior a 1 e o escoamento é supersónico (este grupo é frequentemente utilizado em aerodinâmica).

Número de Weber – mede a razão entre as forças de inércia e as forças de tensão superficial que actuam num elemento de fluido e é particularmente importante quando há uma interface no escoamento.

$$We = \frac{l^2 \rho v^2}{\sigma l} = \frac{l \rho v^2}{\sigma}$$

Este grupo é importante em escoamentos tais como bolhas de gás e gotas em ascensão num líquido.

6.4 Correlação de dados experimentais

A correlação de dados experimentais vai ser ilustrada com um exemplo.

Perda de pressão num fluido em escoamento num tubo horizontal

Determinou-se experimentalmente a relação entre a perda de pressão por unidade de comprimento num tubo circular horizontal de secção recta constante com parede lisa e as variáveis que a afectam. No laboratório, a variação de pressão foi medida num tubo liso com 1,5 m de comprimento e 15 mm de diâmetro interno. O fluido utilizado foi água a 25 °C ($\mu = 1 \text{ cP}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$). Os ensaios foram realizados variando a velocidade do fluido.

$v \text{ (m/s)}$	$\Delta p \text{ (Pa)}$
0,36	300
0,60	740
0,89	1460
1,78	5154
3,4	15560
5,16	32210
7,11	56760
8,76	81830

Pretende-se determinar uma relação funcional entre a perda de pressão por unidade de comprimento e as outras variáveis.

Como já foi analisado:

$$\frac{\Delta p}{l} = f(D, \rho, \mu, v)$$

e pelo teorema de Π Buckingham:

$$\frac{D}{\rho v^2} \frac{\Delta p}{l} = \phi\left(\frac{\rho v D}{\mu}\right)$$

Com os dados da tabela podem ser calculados estes dois grupos adimensionais.

$v \text{ (m/s)}$	$p \text{ (Pa)}$	$\frac{D}{\rho v^2} \frac{\Delta p}{l}$	$\frac{\rho v D}{\mu}$
0,36	300	0,0195	4 000
0,60	760	0,0175	6 700

v (m/s)	p (Pa)	$\frac{D}{\rho v^2} \frac{\Delta p}{l}$	$\frac{\rho v D}{\mu}$
0,89	1 460	0,0155	10 000
1,78	5 154	0,0132	20 000
3,40	15 560	0,0113	38 100
5,16	32 210	0,0101	58 000
7,11	56 760	0,0094	80 000
8,76	81 830	0,0089	98 500

Representando graficamente (log-log) verifica-se que um bom ajuste aos resultados experimentais é dado pela equação :

$$\frac{D}{\rho v^2} \frac{\Delta p}{l} = 0,150 \left(\frac{\rho v D}{\mu} \right)^{-0,25}$$

Blasius (1883-1970) com base num estudo semi-empírico concluiu que:

$$\frac{D}{\rho v^2} \frac{\Delta p}{l} = 0,1582 \left(\frac{\rho v D}{\mu} \right)^{-0,25}$$

Esta equação é muito semelhante à obtida com base na análise dimensional e na experimentação. A relação obtida é válida na gama do número de Reynolds 4000 a 100000.

6.5 Teoria dos modelos

6.5.1 Semelhança cinemática, dinâmica e geométrica

Um problema pode ser descrito em termos de uma funcionalidade entre grupos adimensionais:

$$\Pi_{1,p} = \phi(\Pi_{2,p}, \Pi_{3,p}, \dots, \Pi_{n,p})$$

Se a equação anterior descrever o comportamento de um dado protótipo, uma relação semelhante pode ser escrita para descrever o comportamento de um modelo à escala:

$$\Pi_{1,m} = \phi(\Pi_{2,m}, \Pi_{3,m}, \dots, \Pi_{n,m})$$

A função é a mesma, já que o problema em estudo é o mesmo. Se o estudo no modelo se realizar de forma a serem respeitadas as seguintes condições:

$$\Pi_{2,m} = \Pi_{2,p}$$

$$\Pi_{3,m} = \Pi_{3,p}$$

.....

$$\Pi_{n,m} = \Pi_{n,p}$$

conclui-se que:

$$\Pi_{1,m} = \Pi_{1,p}$$

Traduzindo por palavras o que foi analiticamente descrito, se os grupos adimensionais importantes para descrever o fenómeno em estudo forem numericamente iguais no modelo e no protótipo, a variável em estudo no protótipo pode ser conhecida pela medição do seu valor no modelo.

Semelhança Geométrica – Quando se iguala grupos adimensionais que representam relações geométricas, está-se a impor semelhança geométrica entre o modelo e o protótipo, i.e., que o modelo seja uma representação à escala do protótipo.

Semelhança Dinâmica – Quando se iguala grupos adimensionais que representam razões entre forças (ex. número de Reynolds) está-se a impor semelhança dinâmica entre o modelo e o protótipo.

Quando se garante semelhança *geométrica e dinâmica* entre o modelo e o protótipo, está-se a garantir *semelhança cinemática*, i.e., a garantir que a razão entre as velocidades é igual à razão entre as acelerações em todo o campo de escoamento.

Para que haja semelhança entre o modelo e o protótipo é necessário que haja semelhança geométrica, dinâmica e consequentemente cinemática.

6.5.2 Aplicação da teoria dos modelos

6.5.2.1 Escoamento em tubagens

Quando se estabelece por análise dimensional os grupos importantes para estudar a perda de pressão por unidade de comprimento num tubo horizontal de secção recta constante, conclui-se que:

$$\frac{D}{\rho V^2} \frac{\Delta p}{l} = \phi\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right) = \phi(\text{Re})$$

Se o problema fosse equacionado em termos de perda de pressão num comprimento l do protótipo resultaria:

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = \varphi\left(\frac{l}{D}, \frac{\rho V D}{\mu}\right) = \varphi\left(\frac{l}{D}, \text{Re}\right)$$

O grupo adimensional representado no lado esquerdo da equação é usualmente designado por coeficiente de atrito:

$$C_f = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho V^2} \quad (6.5)$$

Na maioria dos casos os tubos não são lisos, apresentam uma certa rugosidade, a qual é determinante para a perda de pressão. Definindo por ε a altura média dos elementos rugosos da superfície, da análise dimensional resulta:

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = \psi\left(\frac{\varepsilon}{D}, \frac{l}{D}, \frac{\rho V D}{\mu}\right) = \psi\left(\frac{\varepsilon}{D}, \frac{l}{D}, \text{Re}\right) \quad (6.6)$$

Para que haja semelhança geométrica entre o modelo e o protótipo é necessário que:

$$\frac{l_m}{D_m} = \frac{l_p}{D_p} \rightarrow \frac{l_m}{l_p} = \frac{D_m}{D_p}, \frac{\varepsilon_m}{D_m} = \frac{\varepsilon_p}{D_p} \rightarrow \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_p} = \frac{D_m}{D_p} \Rightarrow \frac{l_m}{l_p} = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_p} = \frac{D_m}{D_p} = \lambda$$

Quando o factor de escala é $\ll 1$, esta condição é muitas vezes difícil de respeitar, já que não é fácil construir modelos com uma rugosidade muito reduzida.

Da semelhança dinâmica resulta:

$$\frac{\rho_m D_m V_m}{\mu_m} = \frac{\rho_p D_p V_p}{\mu_p} \rightarrow \frac{V_m}{V_p} = \frac{\mu_m}{\mu_p} \cdot \frac{\rho_p}{\rho_m} \cdot \frac{D_p}{D_m}$$

Quando se usa o mesmo fluido no modelo e no protótipo:

$$\frac{V_m}{V_p} = \frac{D_p}{D_m} = \frac{1}{\lambda}$$

Nesta situação e para qualquer factor de escala $\lambda < 1$, a velocidade no modelo é superior à velocidade no protótipo, o que por vezes se torna complicado de realizar.

Quando o fluido é o mesmo no modelo e no protótipo, para respeitar as condições de semelhança geométrica e dinâmica é necessário que:

$$\Delta p_p = \frac{\rho_p}{\rho_m} \left(\frac{V_p}{V_m} \right)^2 \Delta p_m \Rightarrow \Delta p_p = \lambda^2 \Delta p_m$$

Um caso particular de interesse, é o de um escoamento turbulento perfeitamente desenvolvido, em que o valor da perda de pressão é independente de Re (voltar-se-à a este assunto no capítulo 8). Neste caso:

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = \phi \left(\frac{\varepsilon}{D}, \frac{l}{D} \right)$$

Se as condições de semelhança geométricas forem respeitadas, resulta:

$$\Delta p_p = \frac{\rho_p}{\rho_m} \left(\frac{V_p}{V_m} \right)^2 \Delta p_m$$

não havendo qualquer restrição à razão das velocidades.

6.5.2.2 Escoamento em torno de objectos

Muitos modelos foram construídos para estudar escoamentos em torno de objectos, por exemplo em torno de automóveis, pontes, edifícios, aviões, etc. No caso de escoamentos incompressíveis ($Ma < 0,3$), aplicando a análise dimensional às variáveis que quantificam a força de arrasto exercida pelo fluido sobre o objecto, F_a , resulta:

$$\frac{F_a}{\frac{1}{2}\rho v^2 l^2} = \phi\left(\frac{l_2}{l_1}, \frac{\varepsilon}{l_1}, \frac{\rho v l_1}{\mu}\right)$$

em que l_1 e l_2 representam dimensões características do objecto. O grupo adimensional representado no lado esquerdo da equação é usualmente designado por coeficiente de arrasto:

$$C_D = \frac{F_a}{\frac{1}{2}\rho v^2 l_1^2} \quad (6.7)$$

Da semelhança geométrica resulta:

$$\frac{l_{1,m}}{l_{2,m}} = \frac{l_{1,p}}{l_{2,p}} \rightarrow \frac{l_{1,m}}{l_{1,p}} = \frac{l_{2,m}}{l_{2,p}}, \frac{\varepsilon_m}{l_{1,m}} = \frac{\varepsilon_p}{l_{1,p}} \rightarrow \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_p} = \frac{l_{1,m}}{l_{1,p}} = \frac{l_{2,m}}{l_{2,p}} = \lambda$$

Da semelhança dinâmica resulta:

$$\frac{\rho_m v_m l_{1,m}}{\mu_m} = \frac{\rho_p v_p l_{1,p}}{\mu_p}$$

Se as semelhanças geométrica e dinâmica forem respeitadas:

$$C_{Dm} = C_{Dp} \rightarrow \frac{F_m}{\frac{1}{2}\rho_m v_m l_{1,m}^2} = \frac{F_p}{\frac{1}{2}\rho_p v_p l_{1,p}^2}$$

Quando o fluido é o mesmo no modelo e no protótipo, resulta:

$$\frac{v_m}{v_p} = \frac{l_{1,p}}{l_{1,m}} = \frac{1}{\lambda}$$

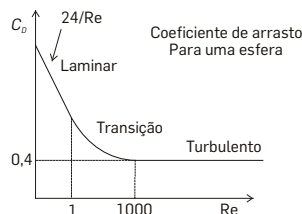
No caso da escala ser de 1:10 ($\lambda = 0,1$), a velocidade no modelo terá que ser 10 vezes superior à velocidade no protótipo, o que, como já foi referido, em muitos casos é difícil de realizar experimentalmente. Igualmente, para velocidades elevadas, e no caso do fluido ser ar, as condições de escoamento no modelo poderão ser tais que as forças de compressão se tornem importante ($Ma > 0,3$), o que não permite extrapolar os resultados do modelo para o protótipo.

Em alguns casos usam-se fluidos diferentes no modelo e no protótipo (fluidos menos viscosos e/ou mais densos no modelo) de maneira a reduzir a razão das velocidades.

Na figura seguinte está representada (representação log-log) a variação do coeficiente de arrasto com o número de Reynolds, no caso do objecto imerso ser uma esfera. Como se pode observar na figura, a

partir de $Re > 1000$ o coeficiente de arrasto torna-se independente do número de Reynolds. Para valores de $Re < 1$ o valor do coeficiente de arrasto é dado por:

$$C_D = \frac{24}{Re}$$



6.5.2.2.1 Força de arrasto e velocidade terminal

Exemplo 6.1

Pequenos grãos esféricos de pólen de diâmetro 0,04 mm e massa volúmica 800 kg/m³ caem do topo de um pinheiro com 20 m de altura. Se houver uma brisa de ar na direcção horizontal com intensidade 1 m/s, determine a que distância da árvore o grão cai. Assuma que a velocidade horizontal do grão é igual à do ar.

Solução

As forças verticais que se exercem no grão durante a queda são: o seu peso, W , a força de impulsão I , e a força de arrasto, F_D , exercida pelo ar sobre o grão (resultante da integração das forças tangenciais).

Durante os instantes iniciais da queda, a velocidade relativa do grão (referencial com velocidade igual à do ar) aumenta rapidamente, aumentando F_D . Após estes instantes o somatório das componentes verticais das forças anula-se e os grãos entram em queda livre com velocidade uniforme, a chamada velocidade terminal.

$$W - I = F_D$$

O peso de cada grão e a força de impulsão são dadas respectivamente por:

$$W = \rho_p g \pi D^3 / 6$$

$$I = \rho_{ar} g \pi D^3 / 6$$

A força de arrasto é função de Reynolds, tal como foi demonstrado pela análise dimensional:

$$\frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho_{ar} v^2 \pi \frac{D^2}{4}} = C_D = \phi \left(\frac{\rho_{ar} v D}{\mu_{ar}} \right)$$

em que v representa a componente vertical da velocidade relativa entre o grão e o ar. Neste exemplo, assume-se que a velocidade do ar não tem componente vertical, pelo que v representa a velocidade de queda do grão de pólen.

Como se pode ver na figura anterior, no caso de $Re < 1$ (o diâmetro das partículas é reduzido pelo que é provável que o valor do número de Reynolds seja inferior a 1, mas esta hipótese será confirmada) o valor do coeficiente de arrasto é dado por:

$$C_D = \frac{24}{Re}$$

pelo que:

$$F_D = \frac{1}{2} \rho_{ar} v^2 \pi \frac{D^2}{4} C_D = \frac{1}{2} \rho_{ar} v^2 \pi \frac{24 D^2}{4} \frac{\mu_{ar}}{\rho_{ar} v D} = 3 \pi \mu_{ar} v D$$

Estabelecendo o balanço de forças e resolvendo em ordem a v resulta:

$$v = \frac{(\rho_p - \rho_{ar}) g D^2}{18 \mu_{ar}}$$

Em condições de pressão (1 atm) e temperatura (20 °C) normais: $\mu_{ar} = 1,79 \times 10^{-5}$ Pa.s e $\rho_{ar} = 1,23 \times 10^{-5}$ kg/m³. Calculando o número de Reynolds obtém-se, $Re = 0,107 < 1$.

Conhecida a velocidade de descida do grão de pólen, calcula-se o tempo que o grão demora a percorrer os 20 m que separam o topo do pinheiro do solo, bem como a distância percorrida pelo grão na horizontal durante a queda

$$t = \frac{h}{v} \rightarrow d = t v_{ar} = \frac{h v_{ar}}{v} = 514 \text{ m}$$

em que v_{ar} representa a componente horizontal da velocidade do ar.

Exemplo 6.2

Uma pequena gota de água esférica com 0,1 mm de diâmetro está na atmosfera a uma altura de 1500 m. Será que a gota sobe ou desce se o vento soprar na direcção vertical (para cima) a uma velocidade de 1,5 m/s ? E no caso da velocidade do vento ser 0,1 m/s?

Solução

Supõe-se, tal como no exemplo anterior, que o tamanho da gota é suficientemente pequeno pelo que $Re < 1$. Aproveitando o resultado do problema anterior:

$$v = \frac{(\rho_p - \rho_{ar}) g D^2}{18 \mu_{ar}}$$

em que v representa a velocidade relativa entre a gota e o ar.

Supondo que a 1500 m as condições de pressão e temperatura são 20 °C e 1 atm ($\rho_{ar} = 1,23 \times 10^{-5}$ kg/m³ e $\mu_{ar} = 1,79 \times 10^{-5}$ Ns/m²), calcula-se a velocidade, $v = 0,3$ m/s.

Por definição de velocidade relativa:

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_{ar} - \vec{v}_g$$

em que a velocidade \vec{v}_{rel} é a velocidade "vista" por um observador que se move à velocidade do ar e \vec{v}_g, \vec{v}_{ar} por observadores estacionários.

Se a gota e o ar se deslocarem em sentidos contrários o valor absoluto da velocidade relativa tem de ser maior que o valor absoluto da velocidade do ar. No caso de se deslocarem no mesmo sentido, o valor absoluto da velocidade relativa tem de ser menor que o valor absoluto da velocidade do ar. Assim, no caso do ar ter uma velocidade de 1,5 m/s, a gota desloca-se para cima a uma velocidade de 1,2 m/s. No caso do ar ter uma velocidade de 0,1 m/s, a gota desloca-se para baixo a uma velocidade 0,2 m/s.

6.5.2.3 Escoamentos com superfície livre

Escoamentos em rios, canais, quedas de água e em torno de barcos e submarinos são exemplos de escoamentos com superfície livre. Neste tipo de escoamentos as forças de inércia e as forças viscosas são importantes, tal como as forças de gravidade e eventualmente as de tensão superficial. Assim de uma forma geral:

$$\Pi_1 = \phi\left(\frac{l_2}{l_1}, \frac{\varepsilon}{l_1}, \frac{\rho l_1 v}{\mu}, \frac{v}{\sqrt{g l_1}}, \frac{\rho v^2 l_1}{\sigma}\right)$$

Para que haja semelhança, os números de Froude têm de ser iguais no modelo e no protótipo:

$$\frac{v_m}{\sqrt{g l_{1,m}}} = \frac{v_p}{\sqrt{g l_{1,p}}} \Rightarrow \frac{v_m}{v_p} = \sqrt{\frac{l_{1,m}}{l_{1,p}}} = \sqrt{\lambda}$$

e igualmente os números de Reynolds têm que ser iguais:

$$\text{Re}_m = \text{Re}_p \Rightarrow \frac{v_m}{v_p} = \frac{\rho_p}{\rho_m} \frac{l_{1,p}}{l_{1,m}} \frac{\mu_m}{\mu_p}$$

Combinando as relações obtidas, resulta:

$$\frac{\mu_m}{\mu_p} \frac{\rho_p}{\rho_m} = \lambda^{3/2}$$

Geralmente o fluido no protótipo é água (eventualmente salgada) e o factor de escala λ é $\ll 1$. Para se realizarem as experiências no modelo teria que se arranjar um fluido muito denso e muito pouco viscoso, fluido esse que na maioria das situações não existe.

O problema torna-se ainda mais complicado se a força de tensão superficial desempenhar um papel importante. Se os números de Weber têm de ser iguais:

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_p} \frac{\rho_p}{\rho_m} = \lambda^2$$

Neste caso, ainda seria mais difícil arranjar fluidos para respeitar iguais números de Froude, Reynolds e Weber. Felizmente em muitos problemas de superfície livre, os efeitos das forças de tensão superficial e os das forças viscosas são pequenos e consequentemente a semelhança entre os números de Reynolds e entre os números de Weber não é determinante.

6.6 Exercícios de aplicação propostos

6.1 A velocidade v que um corpo de massa m em queda livre atinge ao fim de uma altura h é função de: m , h , g , e da velocidade inicial, v_0 . Mostre que a relação entre v e estas variáveis é da forma:

$$\frac{v}{\sqrt{gh}} = \phi\left(\frac{v_0}{\sqrt{gh}}\right)$$

Determine a natureza da função por comparação com a solução cinemática.

$$\text{R: } \frac{v}{\sqrt{gh}} = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\sqrt{gh}}\right)^2 + 2}$$

6.2 A perda de pressão ao longo de um tubo horizontal de secção recta constante por onde escoa um fluido viscoso, depende do caudal de escoamento, do diâmetro do tubo, da viscosidade do fluido e do comprimento do tubo

- Exprima a relação entre as variáveis por análise dimensional
- Sabendo que a perda de pressão é proporcional ao comprimento que mais pode concluir.

$$\text{R: } \Delta p = C_1 \frac{Q\mu l}{D^4}$$

6.3 Mostre através da análise dimensional que a força de arrasto F_a exercida sobre uma esfera de diâmetro D , que se move a uma velocidade constante v num fluido parado de massa volúmica ρ e viscosidade μ , pode ser expressa por:

$$C_D = \frac{F_a}{\frac{1}{2}\rho v^2 \pi \frac{D^2}{4}} = \phi\left(\frac{\rho v D}{\mu}\right)$$

Observou-se que uma bola de aço ($\rho = 7750 \text{ kg/m}^3$) de 2,5 mm de diâmetro, cai com uma velocidade uniforme de 5 mm/s num líquido de den-

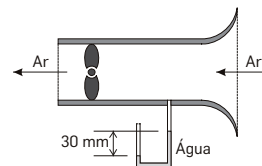
tidade 830 kg/m³. Sabendo que a função $\phi(z) = 24/z$ para qualquer z , calcule a viscosidade do líquido.

R: $\mu = 4,7 \text{ Pa}\cdot\text{s}$

6.4 Para movimentar grandes caudais de gás usam-se frequentemente ventiladores. O caudal volumétrico de ar (Q) é função da massa volúmica do fluido (ρ), do diâmetro do ventilador (D), da velocidade de rotação das pás (N) e da potência (P) fornecida ao ventilador.

Dispõe-se de um ventilador para bombear ar com 1m de diâmetro, accionado por um motor de 5 CV e com $N = 1500 \text{ rpm}$. Foi construído um modelo à escala 1/5 com motor de 1 CV para bombear água.

- Qual a velocidade de rotação a usar no modelo de modo a poder relacionar os caudais no modelo e no protótipo? R: $N = 1374 \text{ rpm}$
- Com a rotação calculada em a), qual o caudal de água no modelo se no protótipo se observarem as condições da figura? As perdas de pressão na entrada do tubo e no próprio tubo são desprezáveis. R: $Q = 0,093 \text{ m}^3/\text{s}$



6.5 Para efectuar uns cálculos, pretende-se saber a velocidade de subida de uma bolha de ar de volume $5,0 \times 10^{-8} \text{ m}^3$ num líquido, muito dispendioso, $\rho = 2100 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0,0044 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ e $\sigma = 0,040 \text{ J/m}^2$. Não havendo possibilidade de adquirir o líquido resolveu-se fazer testes num modelo utilizando soluções aquosas de glicerina.

A partir dos dados da tabela, calcule qual a concentração da solução de glicerina que se deve utilizar bem como o volume da bolha. Por que factor se deve multiplicar a velocidade observada no modelo para se obter a velocidade pretendida. A bolha de ar pode ser tomada como esférica.

Concentração (v/v)	20%	40%	60%
$\sigma \text{ (J/m}^2\text{)}$	0,0747	0,0765	0,0785
$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$	1080	1180	1290
$\mu \text{ (Pa}\cdot\text{s)}$	0,002	0,0062	0,057

R: 40%, $V = 3,14 \times 10^{-7} \text{ m}^3/\text{s}$, $v_{\text{mod}}/v_{\text{prót}} = 1,36$.

6.6 Para determinar a perda de pressão num sistema de tubagens de uma estação de bombagem de água, pretende-se fazer um ensaio num modelo reduzido à escala de 1:5. Dispõe-se de ar a 27 °C e 10^5 Pa de pressão absoluta. ($\mu_{ar} = 1.8 \times 10^{-5}$ Pa.s)

No protótipo irá circular água a 15 °C numa tubagem com 40 mm de diâmetro à velocidade de 0,5 m/s. Determinar a velocidade do ar e o caudal necessário, bem como a forma de calcular a perda de pressão no protótipo a partir da perda medida no modelo.

6.7 A força exercida por um fluido sobre um cilindro com diâmetro da base igual à altura foi estudada em modelos de vários tamanhos com líquidos diferentes, mas sempre com a mesma orientação do cilindro em relação ao escoamento. Os resultados obtidos estão representados na Tabela.

D (m)	v (m/s)	ρ (kg/m ³)	μ (Pa.s)	F (N)
0,10	1	1000	0,001	1,96
0,20	1	1000	0,001	7,86
0,20	4	800	0,003	100,5
0.10	2	800	0,003	6,27
0.10	2	900	0,004	7,06

Em face destes resultados, os experimentadores concluíram que a viscosidade não tinha influência sobre a força exercida pelo fluido sobre o cilindro.

- Acha a conclusão acertada?
- Como compara esta situação com a da força exercida sobre uma esfera?

6.8 A perda de carga por atrito em duas tubagens exactamente iguais transportando líquidos A e B é proporcional a $v^{1.8}$ em que v é a velocidade média do líquido no tubo.

A massa volúmica de B é 1,5% superior à de A e a viscosidade de B 25% superior à de A. Para a mesma velocidade qual será a razão entre as perdas de carga?

6.9 Um modelo á escala 1: 4 de um submarino, que se desloca à velocidade de 15 m/s, vai ser testado num túnel de vento (ar) a 5 atm, para determinar a força de arrasto. O modelo tem 3 m de comprimento. Qual

a velocidade do ar a usar no teste do modelo e qual a razão entre as forças de arrasto para o modelo e para o protótipo nessas condições? ($\mu_{\text{ar}} = 1,8 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}$)

6.10 Uma partícula de poeira de forma esférica ($\rho = 200 \text{ kg/m}^3$) tem 0,1 mm de diâmetro. Esta partícula é lançada, partindo do repouso, do alto de uma torre, 35 m acima do nível do mar. Assumindo o ar parado e escoamento laminar da partícula, estime:

- a velocidade terminal;
- o espaço que tem de percorrer para atingir 98% da sua velocidade terminal. R: $v_t = 0,06 \text{ m/s}$, $h = 3 \text{ mm}$.

6.11 Um corpo em forma de diamante, de dimensão característica 230 mm, quando suspenso num túnel de ar (condições PTN) sofre uma força por parte do ar ($\mu_{\text{ar}} = 1,8 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}$), a qual se encontra tabelada em função da velocidade. Use os dados da tabela para prever a força de arrasto num corpo de forma semelhante, mas com dimensão característica 380 mm, quando suspenso num túnel de água a 20 °C em escoamento à velocidade de 2,2 m/s.

$F \text{ (N)}$	$v \text{ (m/s)}$
5,56	9,1
8,68	11,6
13,44	14,6
18,02	17,1
21,40	18,6
24,87	20,1

6.12 A queda de pressão Δp sofrida por um caudal de ar ao passar num filtro depende do caudal volumétrico Q , da massa volúmica ρ , da espessura do filtro H , e da porosidade do filtro (volume ε de poros sobre volume total). Os dados seguintes foram obtidos com ar a 1 atm e 20°C, através de um filtro com 30 mm de espessura e uma porosidade de 45%.

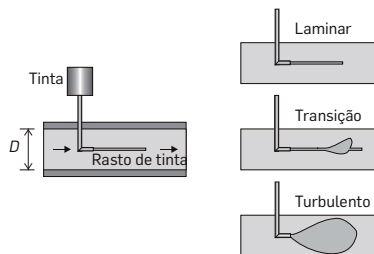
$\Delta p \text{ (m água)}$	0,008	0,032	0,071	0,126	0,197	0,285
$Q \text{ (m}^3/\text{s)}$	0,094	0,189	0,283	0,378	0,472	0,566

Use os dados e determine a queda de pressão no mesmo filtro se a espessura for 60 mm e o caudal volumétrico 0,354 m³/s. (Exame 2003).

7 ESCOAMENTOS LAMINAR E TURBULENTO

7.1 Introdução

Osborne Reynolds (1814-1912) foi o primeiro a mostrar as diferenças entre um escoamento em regime laminar e um escoamento em regime turbulento, para o que utilizou a instalação que está esquematizada na figura.



A experiência, muito simples, consiste na injeção quase pontual de uma tinta colorida num fluido e na observação do rasto provocado pelo escoamento. Para caudais baixos observa-se uma linha recta colorida, muito bem definida com manchas muito ténues na fronteira; o fluido está em escoamento em regime laminar. Aumentando o caudal, a linha colorida deixa de ser recta e torna-se ligeiramente sinuosa, e, de tempos a tempos e sem localização definida, observam-se pequenas manchas de tinta; o fluido está em escoamento em regime de transição. Para caudais elevados, o rasto passa a ser uma mancha colorida esbatida, muito ténue nos pontos mais afastados da injeção, que ocupa toda ou quase toda a secção recta do tubo; o fluido está em escoamento em regime turbulento.

No escoamento em regime laminar num tubo, a velocidade tem somente uma componente ao longo do eixo. Em regime turbulento, embora a componente principal, não estacionária, seja ao longo do eixo, a velocidade tem também componentes nas direcções normais ao eixo.

Mas, o que se entende por caudal suficientemente baixo para se observar regime laminar ou suficientemente elevado para se observar regime turbulento? Em regime laminar são as forças viscosas que “comandam” o escoamento enquanto que em regime turbulento são as forças de inércia. O grupo adimensional Reynolds representa a razão entre estas forças, pelo que o seu valor permite saber quando é que

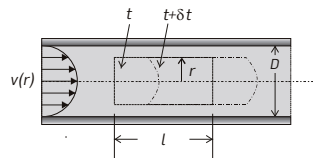
uma delas se “sobrepõe” ou “domina” a outra. Por observações experimentais concluiu-se que, num tubo de secção recta circular, desde que não haja perturbações ao escoamento, o regime é laminar quando o número de Reynolds é inferior a 2100 e é turbulento quando é superior a 4000. Entre estes dois limites, o regime é de transição. Estes valores limites variam conforme a geometria do tubo confinante, em particular são função da dimensão característica escolhida para definir o número de Reynolds.

7.2 Escoamento Laminar

7.2.1 Equação de Poiseuille

Dedução da equação de Poiseuille por aplicação da 2ª lei de Newton a um elemento de fluido.

A ponteadado na figura está representado um elemento de fluido. No instante t , este elemento é cilíndrico de comprimento l e raio r , centrado no eixo de um tubo circular de diâmetro interno D .



As trajectórias das partículas de fluido são paralelas entre si e paralelas à parede, sendo contudo a velocidade de uma partícula em r , diferente da velocidade de uma partícula em $r + \delta r$. Esta variação de velocidade resulta de o fluido ser viscoso e haver tensões de corte entre as partículas em posições adjacentes. Devido a esta variação de velocidade, os topos do elemento de fluido, que são planos no instante t , apresentam-se deformados no instante $t + \delta t$ (elemento de fluido representado a traço ponto).

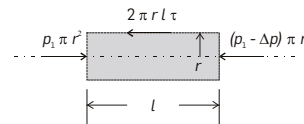
Quando o escoamento é estacionário, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$, e perfeitamente desenvolvido, $\vec{v} \nabla \vec{v} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \vec{i} = 0$, nenhuma partícula de fluido é acelerada ao longo de x , pelo que o perfil de velocidade se mantém constante ao longo desta direcção.

Para o elemento de fluido não sofrer aceleração, é necessário que o somatório vectorial das forças que sobre ele actuam seja nulo. Na

parede lateral do elemento actuam forças tangenciais de corte com sentido contrário ao escoamento, pelo que têm que se desenvolver outras forças na direcção do escoamento que se oponham às forças de corte. As forças que se desenvolvem são forças de pressão, aplicadas nas faces de topo do elemento, cuja intensidade vai diminuindo no sentido do escoamento.

Desprezando o efeito da gravidade, e considerando a pressão uniforme em cada uma das faces de topo, da aplicação da 2ª lei de Newton ao elemento de fluido resulta:

$$\Sigma F_x = ma_x = 0 \rightarrow p_1 \pi r^2 - (p_1 - \Delta p) \pi r^2 - \tau 2\pi r l = 0 \quad (7.1)$$



Rearranjando a equação anterior obtém-se:

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{2\tau}{r} \quad (7.2)$$

com $\frac{\Delta p}{l}$ constante ao longo de x e independente de r .

No eixo do tubo, o perfil de velocidade parabólico apresenta um máximo pelo que a tensão de corte é nula (relembrar definição de fluido Newtoniano). Na parede do tubo, a tensão de corte é máxima já que é onde se observa a maior variação de velocidade. Assim, podem-se escrever as seguintes condições fronteira:

$$r = 0 \rightarrow \tau = 0 \wedge r = R \rightarrow \tau = \tau_R \quad (7.3)$$

em que τ_R representa a tensão de corte na parede do tubo.

Aplicando estas condições à equação (7.2) obtém-se:

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{4\tau_R}{D} \quad (7.4)$$

É preciso conhecer a tensão de corte na parede e para tal o perfil de velocidade. Admitindo que o fluido tem comportamento Newtoniano:

$$\tau = -\mu \frac{dv_x}{dr} \quad (7.5)$$

Combinando as equações (7.2) e (7.5) resulta:

$$\frac{dv_x}{dr} = -\left(\frac{\Delta p}{2\mu l}\right)r \quad (7.6)$$

Integrando ao longo do raio:

$$\int dv_x = -\frac{\Delta p}{2l} \int r dr \rightarrow v_x = -\left(\frac{p}{4l}\right)r^2 + C_1 \quad (7.7)$$

Pelo facto de o fluido ser viscoso, observa-se a condição de não deslizamento na parede, $v_x = 0$ para $r = R$, pelo que:

$$C_1 = \frac{\Delta p D^2}{l 16} \quad (7.8)$$

O perfil de velocidades toma então a seguinte forma:

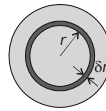
$$v_x(r) = \left(\frac{\Delta p D^2}{l 16}\right) \left[1 - \left(\frac{2r}{D}\right)^2\right] = v_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \quad (7.9)$$

com

$$v_{\max} = \frac{\Delta p D^2}{l 16}$$

A equação (7.9) é a já conhecida equação do perfil de velocidade parabólico para um escoamento em regime laminar num tubo de secção recta circular.

Para determinar o caudal volumétrico de escoamento no tubo, considere-se a coroa infinitesimal de área $2\pi r \delta r$ representada na figura, na qual a velocidade pode ser considerada uniforme desde que se tome o limite $\delta r \rightarrow 0$.



O caudal volumétrico que passa na coroa infinitesimal é dado por:

$$\delta Q = v_x(r) \delta A = v_x(r) 2\pi r \delta r$$

Dividindo a área da secção recta num número infinito de coroas infinitesimais e adicionando o caudal que passa em cada uma, resulta:

$$Q = \int v_x(r) dA = \int_0^R v_x(r) 2\pi r dr = 2\pi v_{\max} \int_0^R \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] r dr \quad (7.10)$$

Integrando, obtém-se:

$$Q = \frac{\pi R^2 v_{\max}}{2} \quad (7.11)$$

A velocidade média é a razão entre o caudal volumétrico e a área da secção recta de escoamento, logo:

$$\bar{v} = \frac{Q}{A} = \frac{\pi R^2 v_{\max}}{2} \frac{1}{\pi R^2} = \frac{v_{\max}}{2} \quad (7.12)$$

Para determinar a queda de pressão num comprimento l de tubo, recorre-se às equações (7.4), (7.5) e (7.9):

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{4\tau_R}{D} \quad \text{e} \quad \tau_R = -\mu \left[\frac{dv_x(r)}{dr} \right]_{r=R} = \mu \frac{4v_{\max}}{D} \rightarrow \frac{\Delta p}{l} = \frac{16\mu v_{\max}}{D^2} \quad (7.13)$$

Combinando as equações (7.12) e (7.13) resulta:

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{32\mu}{D^2} \bar{v} \quad (7.14)$$

ou

$$Q = \frac{\pi D^4 \Delta p}{128 l} \quad (7.15)$$

Esta equação é conhecida pela equação de Poiseuille e permite determinar a perda de carga, carga de pressão, provocada pelo atrito, forças viscosas, num escoamento em regime laminar num tubo de secção recta circular.

A equação de Poiseuille aparece frequentemente na literatura sob outra forma:

$$\Delta p = \frac{32\mu l \bar{v}}{D^2} \rightarrow \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho \bar{v}^2} = \frac{(32\mu l \bar{v}/D^2)}{\frac{1}{2}\rho \bar{v}^2} = 64 \left(\frac{\mu}{\rho \bar{v} D} \right) \left(\frac{l}{D} \right) = \frac{64}{\text{Re}} \left(\frac{l}{D} \right) \quad (7.16)$$

ou

$$\Delta p = f(\text{ou } C_f) \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 \frac{l}{D}, \text{ com } f(\text{ou } C_f) = \frac{64}{\text{Re}} \quad (7.17)$$

em que C_f é designado por coeficiente de atrito e f por factor de Fanning.

Dedução da equação de Poiseuille com base na análise dimensional

A perda de carga, carga de pressão, num escoamento em regime laminar em que as forças viscosas se sobrepõem às de inércia, é função da velocidade média do fluido, do diâmetro e comprimento do tubo, e da viscosidade do fluido:

$$\Delta p = \phi(v, l, D, \mu) \quad (7.18)$$

Aplicando o teorema de Π Buckingham resulta:

$$\frac{D\Delta p}{\mu \bar{v}} = \phi\left(\frac{l}{D}\right) \quad (7.19)$$

Embora a análise dimensional não dê qualquer informação, sabe-se que o escoamento é perfeitamente desenvolvido, pelo que a perda de carga é proporcional ao comprimento do tubo, l/D :

$$\phi\left(\frac{l}{D}\right) = C_1 \frac{l}{D} \quad (7.20)$$

Logo:

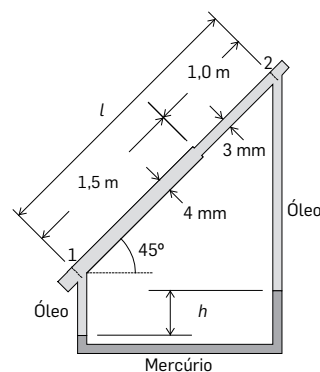
$$\frac{D\Delta p}{\mu \bar{v}} = C_1 \frac{l}{D} \rightarrow \frac{\Delta p}{l} = C_1 \frac{\mu \bar{v}}{D^2} \rightarrow \Delta p = 4C_1 \frac{\mu l}{\pi D^4} Q \quad (7.21)$$

Comparando esta equação com a equação deduzida a partir da 2ª lei de Newton conclui-se que $C_1 = 32$. Este valor pode ser obtido com base em resultados experimentais.

Exemplo 7.1

Na instalação representada na figura, os tubos são percorridos por um óleo viscoso de propriedades físicas, $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0,1 \text{ Pa.s}$. A queda de pressão é medida por meio de um manómetro de mercúrio, $\rho = 13600 \text{ kg/m}^3$, sendo o desnível observado h . Considerando regime de escoamento laminar e desprezando a perda de carga na junção dos tubos, diga:

- Qual o sentido em que o fluido se desloca quando $h = 30 \text{ mm}$?
- Qual o caudal volumétrico quando $h = 30 \text{ mm}$?
- Para o mesmo caudal, qual o desnível no manómetro se fosse alterada a inclinação dos tubos?



Solução:

a. Seleccione-se um volume de controlo, que não englobe o tubo, em que as secções de entrada e de saída do fluido estão assinaladas na figura pelos números 1 e 2 respectivamente. Se a diferença entre a carga total em 1 e a carga total em 2 for positiva, o escoamento é ascendente, sentido de 1 para 2. Se a diferença for negativa, o escoamento é descendente, sentido de 2 para 1. Em qualquer dos casos a diferença corresponde à carga dissipada.

$$\left(\frac{p_1}{\rho_{\text{óleo}} g} + z_1 + \frac{\alpha}{2g} \bar{v}_1^2 \right) - \left(\frac{p_2}{\rho_{\text{óleo}} g} + z_2 + \frac{\alpha}{2g} \bar{v}_2^2 \right)$$

Em escoamento laminar a carga cinética é muito baixa pelo que pode ser desprezada, tanto em 1 como em 2, quando comparada com as outras cargas em jogo (esta hipótese tem de ser verificada no fim da resolução). Assim, a diferença entre as cargas totais simplifica-se:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho_{\text{óleo}} g} - l \sin 45$$

Por leitura no manómetro é possível conhecer a diferença de pressão entre as secções de entrada e saída do volume de controlo:

$$p_1 - p_2 = \rho_{\text{Hg}} g h + \rho_{\text{óleo}} g l \sin 45 - \rho_{\text{óleo}} g h$$

Combinando as duas equações anteriores resulta :

$$\frac{\rho_{\text{Hg}}}{\rho_{\text{óleo}}} h - h$$

Como $\rho_{\text{Hg}} > \rho_{\text{óleo}}$, a conclusão é que o escoamento é ascendente, qualquer que seja o desnível do manómetro desde que $h > 0$.

$$\frac{\rho_{\text{Hg}}}{\rho_{\text{óleo}}} h - h > 0$$

b. A perda de carga, carga de pressão, na tubagem é dada por:

$$\frac{\rho_{\text{Hg}}}{\rho_{\text{óleo}}} h - h = \frac{\Delta p_{\text{atrito}}}{\rho_{\text{óleo}} g}$$

em que Δp_{atrito} representa a perda de pressão por atrito devido às tensões de corte que se desenvolvem no fluido.

A perda de pressão por atrito em regime laminar é dada pela equação de Poiseuille:

$$\Delta p_{\text{atrito}} = \frac{128 l}{\rho D^4} Q$$

Esta equação mostra que a perda de pressão por atrito é proporcional ao caudal de escoamento. Assim, por analogia com circuitos eléctricos, $\Delta V(\Delta p_{\text{atrito}}) = l(Q)R$, define-se uma resistência ao escoamento laminar, que de acordo com a equação de Poiseuille é dada por:

$$R = \frac{128 l}{\rho D^4}$$

No exemplo em estudo, há duas resistências ao escoamento associadas em série, uma em cada tubo. O caudal/intensidade de corrente é o mesmo nos dois tubos e a perda de carga total/diferença de potencial é a soma das perdas de carga em cada tubo. Logo, por ser uma associação em série, a resistência equivalente é igual à soma das resistências individuais:

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

em que R_1 representa a resistência ao escoamento no tubo de 4 mm, e R_2 a resistência no tubo de 3 mm.

$$R_{eq} = \frac{128\mu}{\pi} \left[\frac{l_1}{D_1^4} + \frac{l_2}{D_2^4} \right]$$

Recorrendo ao resultado da alínea a):

$$\rho_{Hg} h - \rho_{oleo} h = \frac{\Delta p_{atrito}}{g} = \frac{QR_{eq}}{g}$$

obtém-se:

$$Q = \frac{\rho_{Hg} - \rho_{oleo}}{R_{eq}} gh \quad (*)$$

$$R_{eq} = 7,42 \times 10^{10} \text{ Pa.s/m}^3 \rightarrow Q = 5,1 \times 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}$$

Depois de calcular Q tem de se verificar se efectivamente a carga cinética é ao não desprezável quando comparada, por exemplo, com a perda de carga por atrito.

$$\frac{\alpha}{2g} v_i^2 = 1,65 \times 10^{-6} \text{ m} \wedge \frac{\Delta p_{atrito}}{\rho_{leo} g} = 4,5 \times 10^{-1} \text{ m}$$

c. Analisando a equação (*), conclui-se que para um dado caudal Q , qualquer que seja a inclinação do tubo, a leitura do manómetro é sempre a mesma.

Exemplo 7.2

Num tubo de diâmetro 5,0 mm circula óleo a 40 °C. Pretende-se determinar o caudal, a partir do conhecimento do desnível h entre os dois ramos de um manómetro igualmente com óleo. O óleo no manómetro encontra-se a 20 °C, excepto num comprimento desprezável junto ao tubo onde a temperatura sobe de 20 °C a 40 °C.

- Com um caudal Q de óleo a percorrer o tubo, observou-se um desnível $h = 63$ mm. Qual o caudal e em que sentido se desloca o fluido?
- Se por fecho de uma válvula, a circulação de líquido for interrompida, qual o valor de h que se observará?
- Qual o caudal de líquido e o seu sentido se $h = 0$?
- Compare os dois últimos resultados com os que obterias se a temperatura do óleo fosse a mesma no tubo e no manómetro.

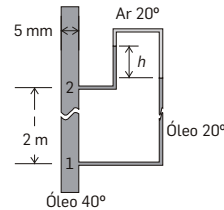
$$\text{Dados } \rho_{(20^\circ\text{C})} = 826 \text{ kg/m}^3, \rho_{(40^\circ\text{C})} = 806 \text{ kg/m}^3 \text{ e } \mu_{(40^\circ\text{C})} = 8 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$$

Solução

- O volume de controlo seleccionado não inclui o tubo. As secções de entrada e saída do VC estão assinaladas na figura respectivamente por 1 e 2.

Por leitura do manómetro obtém-se:

$$p_1 - p_2 = 2,0\rho_{(20^\circ\text{C})}g - h\rho_{(20^\circ\text{C})}g$$



A diferença entre as cargas totais nas secções 1 e 2 é dada por:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho_{(40^\circ\text{C})}g} - 2,0$$

Combinando as equações anteriores, resulta:

$$\frac{2,0\rho_{(20^\circ\text{C})} - h\rho_{(20^\circ\text{C})}}{\rho_{(40^\circ\text{C})}} - 2,0 = -0,015 < 0 \quad (*)$$

Sendo negativa a diferença entre as cargas totais (1-2), o escoamento dá-se no sentido descendente.

A diferença entre as cargas totais, é igual à perda de carga por atrito no tubo. Em regime laminar, esta perda de carga é dada pela equação de Poiseuille:

$$2,0 - \frac{2,0\rho_{(20^\circ\text{C})} - h\rho_{(20^\circ\text{C})}}{\rho_{(40^\circ\text{C})}} = \frac{128..l}{\pi D^4 \rho_{(40^\circ\text{C})}g} Q$$

Resolvendo em ordem a Q:

$$Q = \left[2,0 - \frac{2,0\rho_{(20^\circ\text{C})} - h\rho_{(20^\circ\text{C})}}{\rho_{(40^\circ\text{C})}} \right] \frac{\pi D^4 \rho_{(40^\circ\text{C})}g}{128..l}$$

$$Q = 113 \text{ mm}^3/\text{s}$$

b. Se a circulação for interrompida, a diferença de pressão é igual ao peso da coluna de líquido entre as secções 1 e 2:

$$p_1 - p_2 = 2,0\rho_{(40^\circ\text{C})}g$$

A diferença de pressão lida no manómetro é dada por:

$$p_1 - p_2 = 2,0\rho_{(20^\circ\text{C})}g - h\rho_{(20^\circ\text{C})}g$$

Combinando as duas últimas equações resulta:

$$h = \frac{2,0\rho_{(20^\circ\text{C})} - 2,0\rho_{(40^\circ\text{C})}}{\rho_{(20^\circ\text{C})}} = 48\text{mm}$$

c. Pretende-se saber o caudal e o sentido de circulação quando $h = 0$. Recorrendo à equação deduzida na alínea a) e substituindo $h = 0$ obtém-se:

$$\frac{2,0\rho_{(20^{\circ}\text{C})}}{\rho_{(40^{\circ}\text{C})}} - 2,0 = 50\text{mm} > 0$$

Logo o escoamento é ascendente (1-2). O caudal é dado por:

$$Q = \left[\frac{2,0\rho_{(20^{\circ}\text{C})}}{\rho_{(40^{\circ}\text{C})}} - 2,0 \right] \frac{\pi D^4 \rho_{(40^{\circ}\text{C})} g}{128 \mu l}$$

$$Q = 375 \text{ mm}^3/\text{s}$$

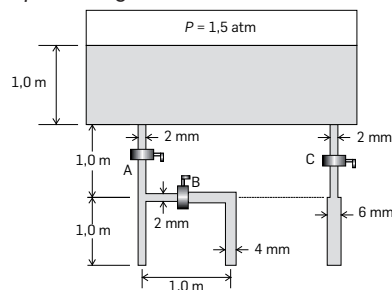
- d. Se a temperatura fosse igual no manómetro e no tubo, para $Q = 0$ a diferença de altura h seria também igual a 0.

Exemplo 7.3

Um líquido viscoso está em escoamento de um reservatório cuja pressão sobre a superfície livre é mantida a 1,5 atm. O fluido passa num conjunto de tubos capilares e é descarregado para a atmosfera. Nos capilares, o percurso do líquido é seleccionado por intermédio de um conjunto de válvulas tudo ou nada, tal como mostra a figura. Calcule:

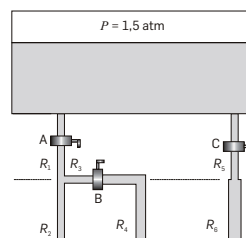
- O caudal de descarga se só a válvula A estiver aberta?
- O caudal de descarga se estiverem abertas as válvulas A e C?
- O caudal de descarga se estiverem abertas as válvulas A e B?

Dados: $\mu = 0,1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ e $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$



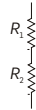
Solução

Os tubos são capilares de diferentes comprimentos e diâmetros associados em série e em paralelo. O escoamento nos capilares é laminar, e as diferentes resistências ao escoamento vão ser referenciada de acordo com a figura seguinte.



- a. *Válvula A aberta*

Neste caso há duas resistências associadas em série, R_1 e R_2 , por sinal de igual valor, já que os tubos têm o mesmo comprimento e o mesmo diâmetro. A resistência equivalente é então dada por:



$$R_{eq} = R_1 + R_2 = \frac{128\mu}{\pi} \left(\frac{l_1}{D_1^4} + \frac{l_2}{D_2^4} \right)$$

Aplicando a equação da energia a um volume de controlo entre a superfície livre do tanque e a saída de um tubo com uma resistência igual à equivalente, obtém-se:

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{\alpha}{2g} \bar{v}_1^2 = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{\alpha}{2g} \bar{v}_2^2 + \frac{\Delta p_{atrito}}{\rho g}$$

com

$$\Delta p_{atrito} = R_{eq} Q$$

Considerando desprezável, comparativamente com os outros termos, as cargas cinéticas à superfície livre do tanque e à saída do tubo, resulta:

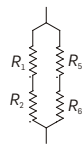
$$\begin{aligned} \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + (z_1 - z_2) &= \frac{\Delta p_{atrito}}{\rho g} \\ \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + (z_1 - z_2) &= \frac{R_{eq} Q}{\rho g} \end{aligned} \quad (1)$$

A pressão à superfície do tanque é 1,5 atm e à saída do tubo equivalente 1 atm; a diferença de cotas é de 3,0 m. O valor do caudal é dado por:

$$Q = \frac{8 \times 10^4}{R_{eq}} = 157 \text{ mm}^3/\text{s}$$

b. Válvulas A e C abertas

Neste caso há dois pares de resistências em série, R_1 com R_2 e R_5 com R_6 . Aplicando a equação da energia entre a superfície do tanque e a saída de cada tubo, conclui-se que sendo desprezáveis as energias cinéticas à superfície e saída dos tubos, as perdas de carga têm de ser iguais. Assim as resistências equivalentes dos pares acima referidos podem ser associadas em paralelo.



$$\begin{aligned} R_{eq}^1 &= R_1 + R_2 = \frac{128\mu}{\pi} \left(\frac{l_1}{D_1^4} + \frac{l_2}{D_2^4} \right) \\ R_{eq}^2 &= R_5 + R_6 = \frac{128\mu}{\pi} \left(\frac{l_5}{D_5^4} + \frac{l_6}{D_6^4} \right) \\ \frac{1}{R_{eq}} &= \frac{1}{R_{eq}^1} + \frac{1}{R_{eq}^2} \end{aligned}$$

Aplicando a equação da energia ao volume de controlo e fazendo considerações iguais às da alínea anterior resulta:

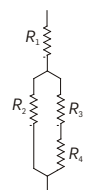
$$\begin{aligned} \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + (z_1 - z_2) &= \frac{\Delta p_{atrito}}{\rho g} \\ \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + (z_1 - z_2) &= \frac{R_{eq} Q}{\rho g} \end{aligned}$$

A pressão à superfície do tanque é 1,5 atm e à saída do tubo "equivalente" 1 atm; a diferença de cotas é de 3,0 m.

$$Q = \frac{7 \times 10^4}{R_{eq}} = 31 \text{ mm}^3/\text{s}$$

c. Válvulas A e B abertas

Neste caso há duas resistências associadas em série, R_3 com R_4 , a resistência equivalente de R_3 com R_4 em paralelo com R_2 e a equivalente desta associação em série com R_1 .



$$R_{eq}^1 = R_3 + R_4 = \frac{128\mu}{\pi} \left(\frac{l_3}{D_3^4} + \frac{l_4}{D_4^4} \right)$$

$$\frac{1}{R_{eq}^2} = \frac{1}{R_{eq}^1} + \frac{1}{R_2}$$

$$R_{eq} = R_1 + R_{eq}^2$$

Aplicando a equação da energia ao volume de controlo e fazendo iguais considerações às da alínea anterior resulta:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + (z_1 - z_2) = \frac{\Delta p_{atrito}}{\rho g}$$

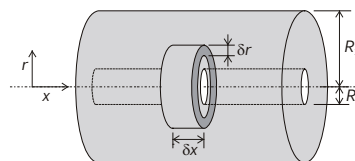
$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + (z_1 - z_2) = \frac{R_{eq} Q}{\rho g}$$

A pressão à superfície do tanque é 1,5 atm e à saída do tubo “equivalente” 1 atm; a diferença de cotas é de 3,0 m.

$$Q = \frac{8 \times 10^4}{R_{eq}} = 21 \text{ mm}^3/\text{s}$$

7.2.2- Escoamento laminar entre dois tubos concêntricos

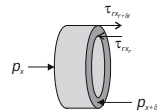
O fluido vai circular no espaço anelar entre dois tubos concêntricos de raio respectivamente R_1 e R_2 . Tal como no escoamento num tubo circular, o fluido é considerado incompressível e Newtoniano. O escoamento está em estado estacionário e é perfeitamente desenvolvido, não há efeitos de entrada nem de saída, pelo que a aceleração dos elementos de fluido é nula. Assim, o perfil de velocidade $v_x = f(r)$ é constante ao longo da direcção x , e as forças tangenciais de corte que se desenvolvem no fluido são “contrariadas” por um decréscimo das forças de pressão no sentido do escoamento.



Na figura está representado um elemento de fluido infinitesimal de comprimento δx e de espessura δr . Aplicando a 2ª lei de Newton a este elemento resulta:

$$\Sigma F_x = \Sigma F_x(\text{pressão}) + \Sigma F_x(\text{corte}) = m a_x = 0 \quad (7.22)$$

As forças de corte e de pressão, que actuam no elemento infinitesimal em forma de anel, estão representadas na figura seguinte:



$$p_x(2r\delta r) - p_{x+\delta x}(2r\delta r) - (\tau_{rx})_r(2r\delta x) + (\tau_{rx})_{r+\delta r}[2(r+\delta r)\delta x] = 0 \quad (7.23)$$

em que τ_{rx} representa a tensão de corte que actua segundo x e é normal à direcção r , $2\pi r\delta r$ a área infinitesimal da secção recta de escoamento, $2\pi r\delta x$ a área lateral interior do anel e $2\pi(r+\delta r)\delta x$ a área lateral exterior do anel.

Simplificando e rearranjando a equação (7.23) obtém-se:

$$-r \frac{p_{x+\delta x} - p_x}{\delta x} + \frac{(\tau_{rx})_{r+\delta r}(r+\delta r) - (\tau_{rx})_r r}{\delta r} = 0 \quad (7.24)$$

Tomando o limite quando δx e $\delta r \rightarrow 0$, e com base na definição de derivada resulta:

$$-r \frac{dp}{dx} + \frac{d}{dr}(r\tau_{rx}) = 0 \quad (7.25)$$

Sendo o escoamento horizontal e perfeitamente desenvolvido, dp/dx é constante e igual a $-\Delta p_{\text{atrito}}/l$ ao longo da direcção x , pelo que, da integração da equação anterior, por separação de variáveis, resulta:

$$\tau_{rx} = -\frac{r}{2} \left(\frac{\Delta p_{\text{atrito}}}{l} \right) + \frac{C_1}{r} \quad (7.26)$$

Por se tratar de um fluido Newtoniano:

$$\tau_{rx} = \mu \frac{dv_x(r)}{dr} \quad (7.27)$$

Combinando as duas equações anteriores, resulta:

$$\mu \frac{dv_x(r)}{dr} = -\frac{r}{2} \left(\frac{\Delta p_{\text{atrito}}}{l} \right) + \frac{C_1}{r} \quad (7.28)$$

integrando:

$$v_x(r) = -\frac{1}{4\mu} \left(\frac{\Delta p_{\text{atrito}}}{l} \right) r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (7.29)$$

Devido à condição de não deslizamento, a velocidade é nula tanto para $r = R_1$ como para $r = R_2$, o que permite determinar o valor das constantes. Substituindo o valor das constantes na equação anterior obtém-se o perfil de velocidade do escoamento:

$$v_x(r) = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\Delta p_{atrito}}{l} \right) \left[(R_1^2 - r^2) + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \left(\frac{r}{R_1} \right) \right] \quad (7.30)$$

O valor e posição radial da velocidade máxima é determinada derivando o perfil de velocidade em ordem a r e igualando a 0, $dv_x(r)/dr = 0$, obtendo-se:

$$r(v_x^{\max}) = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}}} \quad (7.31)$$

O valor da velocidade máxima é dado pela seguinte expressão:

$$v_x^{\max} = \frac{\Delta p_{atrito}}{4l} \left\{ R_1^2 - \left(\frac{R_1^2 - R_2^2}{2 \ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right)} \right) \left[1 - \ln \left(\frac{R_1^2 - R_2^2}{2 R_1^2 \ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right)} \right) \right] \right\} \quad (7.32)$$

O valor da velocidade média é calculado integrando a velocidade na área de escoamento:

$$\bar{v}_x = \frac{1}{A} \int_{R_2}^{R_1} v_x 2\pi r dr \rightarrow \bar{v}_x = \frac{\Delta p_{atrito}}{8l} \left(\frac{R_1^4 - R_2^4}{R_1^2 - R_2^2} - \frac{R_1^2 - R_2^2}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)} \right) \quad (7.33)$$

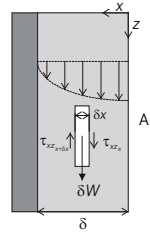
O caudal volumétrico é dado por:

$$Q = \bar{v}_x \pi (R_1^2 - R_2^2) \rightarrow Q = \frac{\pi \Delta p_{atrito}}{8\mu l} \left(R_1^4 - R_2^4 - \frac{(R_1^2 - R_2^2)^2}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)} \right) \quad (7.34)$$

Esta expressão relaciona a perda de pressão por atrito com o caudal de líquido que percorre o espaço entre os tubos concêntricos.

7.2.3 Escoamento laminar numa coluna de parede molhada

Uma “cortina” de líquido cai sob a acção da gravidade ao longo de uma parede plana de largura H (direcção perpendicular ao plano do papel).



Pelo facto de a pressão na interface ar/líquido ser constante, não se desenvolve qualquer variação de pressão, nem radial nem axial, para contrariar a acção das forças tangenciais de corte, tal como nos exemplos anteriores de escoamentos internos.

A acção das forças de corte que se desenvolvem no fluido é contrariada pela acção da força da gravidade. Assim, a partir de uma dada cota z , observa-se um escoamento perfeitamente desenvolvido e uma cortina de líquido de espessura constante, δ

Para estudar este escoamento laminar selecciona-se um elemento de fluido de espessura δx e comprimento l . Aplicando a segunda lei de Newton ao elemento de fluido representado na figura, resulta:

$$\delta W + \Sigma \delta F_z(\text{corte}) = 0 \quad (7.35)$$

em que δW representa o peso do elemento infinitesimal de fluido.

De acordo com a figura, por unidade de largura da parede, obtém-se:

$$\rho g \delta x l - (\tau_{xz})_{x+\delta x} l + (\tau_{xz})_x l = 0 \quad (7.36)$$

em que τ_{xz} representa a tensão de corte que actua segundo z e é normal à direcção x .

Rearranjando a equação anterior:

$$\frac{(\tau_{xz})_{x+\delta x} - (\tau_{xz})_x}{\delta x} = \rho g \quad (7.37)$$

Tomando o limite quando $\delta x \rightarrow 0$ e por definição de derivada, obtém-se:

$$\frac{d}{dx} \tau_{xz} = \rho g \quad (7.38)$$

Sendo a viscosidade do ar reduzida, a tensão de corte na interface gas-líquido ($x = 0$) pode ser considerada desprezável, pelo que da integração da equação anterior resulta:

$$\tau_{xz} = \rho g x \quad (7.39)$$

Segundo esta equação, a tensão de corte varia linearmente com x e tem um valor máximo na parede.

Recorrendo à definição de fluido Newtoniano e à equação (7.39), obtém-se o perfil de velocidade:

$$\tau_{xz} = -\mu \frac{dv_z(x)}{dx} = \rho g x \rightarrow v_z(x) = \frac{\rho g \delta^2}{2\mu} \left(1 - \frac{x^2}{\delta^2}\right) = v_{\max} \left(1 - \frac{x^2}{\delta^2}\right) \quad (7.40)$$

em que $v_{\max} = \frac{\rho g \delta^2}{2\mu}$

Conhecido o perfil de velocidade, é possível calcular o valor da velocidade média:

$$\bar{v}_z = \frac{1}{A} \int_A v_z(x) dA = \frac{\rho g}{3\mu} \delta^2 \quad (7.41)$$

Combinando as duas equações anteriores obtém-se uma relação entre a velocidade média e a velocidade máxima:

$$\bar{v}_z = \frac{2}{3} v_{\max} \quad (7.42)$$

O caudal volumétrico por unidade de largura da parede é dado por:

$$Q = \bar{v}_z \delta = \frac{\rho g \delta^3}{3\mu} \quad (7.43)$$

Por definição de diâmetro hidráulico, que será dada no capítulo seguinte, o número de Reynolds para este escoamento é expresso da seguinte forma:

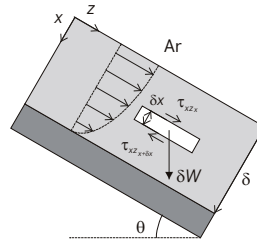
$$Re = \frac{4\rho\delta\bar{v}_z}{\mu} = \frac{4\rho^2 g \delta^3}{3\mu^2} \quad (7.44)$$

em que 4δ representa o diâmetro hidráulico.

Por observações experimentais o escoamento é laminar para $Re < 1200$.

7.2.4 Escoamento laminar numa coluna de parede molhada inclinada

Esta situação é muito semelhante à estudada na secção anterior sendo a única diferença a inclinação da parede. Assim, seguindo o mesmo raciocínio obtém-se uma expressão para o perfil de velocidade:



$$v_z(x) = \frac{\rho g \delta^2 \sin \theta}{2\mu} \left(1 - \frac{x^2}{\delta^2}\right) \quad (7.45)$$

em que θ é o ângulo que a parede faz com o plano horizontal.

A velocidade média no escoamento é dada por:

$$\bar{v}_z = \frac{1}{A} \int_A v_z(x) dA = \frac{\rho g \sin \theta}{3\mu} \delta^2 \quad (7.46)$$

O caudal por unidade de largura da parede é dado por:

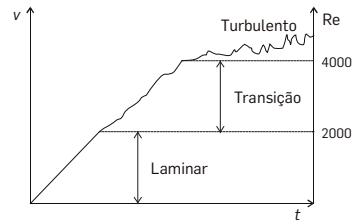
$$Q = \frac{\rho g \sin \theta \delta^3}{3\mu} \quad (7.47)$$

7.3 Escoamento turbulento

7.3.1 Descrição do escoamento turbulento

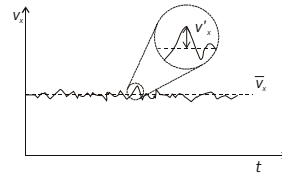
O padrão de escoamento quer no regime de transição laminar-turbulento, quer no regime turbulento é bastante complexo, e alguns dos seus aspectos ainda não são totalmente conhecidos, pelo que a este nível do curso só vão ser feitas considerações básicas.

Considere um tubo circular de grande comprimento, inicialmente cheio de líquido parado. Com o accionar de uma bomba hidráulica e o abrir de uma válvula reguladora, o líquido é posto em movimento. À medida que se abre a válvula, a velocidade aumenta e por conseguinte o número de Reynolds. Considere que este aumento se dá de uma forma lenta. Num período inicial, o número de Reynolds é baixo e o escoamento é laminar. Quando Reynolds atinge um valor próximo de 2100 começa a dar-se a transição de laminar para turbulento. Esta transição termina para Reynolds superior a 4000. Na figura está representada a evolução da velocidade ao longo do tempo num ponto fixo do escoamento.



O regime turbulento é caracterizado pela natureza irregular e aleatória do vector velocidade em cada ponto do escoamento. Estas flutuações ocorrem nas três componentes do vector velocidade, bem como na pressão e nas tensões de corte. Estas variáveis podem ser descritas em termos do seu valor médio, ao qual é adicionado uma parcela de flutuação. Seja $v_x(x, y, z, t)$ a componente da velocidade segundo x e \bar{v}_x o seu valor médio no intervalo de tempo Δt (ver figura seguinte)

$$\bar{v}_x = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} v_x(x, y, z, t) dt \quad (7.48)$$



A parcela de flutuação é dada por:

$$v'_x(x, t) = v_x(x, t) - \bar{v}_x \quad (7.49)$$

Como é evidente, o valor médio da parcela de flutuação em ordem ao tempo é zero:

$$\begin{aligned} \bar{v}'_x &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} (v_x - \bar{v}_x) dt = \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} v_x dt - \bar{v}_x \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} dt \right) = \\ &= \frac{1}{\Delta t} (\Delta t \bar{v}_x - \Delta t \bar{v}_x) = 0 \end{aligned} \quad (7.50)$$

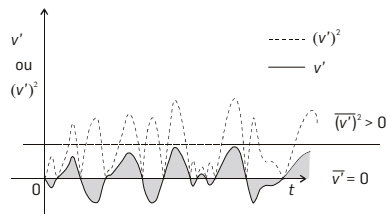
Pelo facto da parcela de flutuação tomar valores positivos ou negativos conforme o valor da velocidade é superior ou inferior ao valor médio, define-se o valor médio das flutuações num dado ponto do escoamento por:

$$\overline{(v'_x)^2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} (v'_x)^2 dt > 0 \quad (7.51)$$

O nível de turbulência ou a intensidade de turbulência é definido através deste valor médio das flutuações:

$$\mathfrak{I} = \frac{\sqrt{\overline{(v'_x)^2}}}{\bar{v}_x} = \frac{\left[\frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} (v'_x)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}}{\bar{v}_x} \quad (7.52)$$

Quanto maior o nível de turbulência, maior é a amplitude das flutuações.

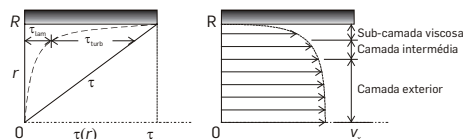


A tentativa de extrapolar o conceito de tensão de corte definida para um fluido viscoso ($\tau = \mu \frac{dv_x}{dy}$) para um fluido em escoamento turbulento, por simples substituição de v_x por \bar{v}_x não deu resultado, pelo facto da origem da tensão de corte em regime turbulento ser diferente da origem em regime laminar.

Em regime laminar a tensão de corte dá-se ao nível molecular, enquanto em regime turbulento é visível movimentos macroscópicos turbilionários sobrepostos ao próprio escoamento. Destes movimentos resultam tensões de corte adicionais entre os elementos de fluido. Uma maneira simplista de descrever um escoamento turbulento é considerá-lo como um escoamento laminar com turbilhões tridimensionais aleatórios “sobrepostos”. Com base nesta visão simplista define-se a tensão de corte aparente em regime turbulento por:

$$\tau = \mu \frac{dv_x}{dy} - \rho \overline{v'_x v'_y} = \tau_{\text{laminar}} + \tau_{\text{turbulento}} \quad (7.53)$$

Segundo esta maneira de descrever o escoamento turbulento, num tubo, perto da parede, há uma fina camada onde a tensão de corte laminar se sobrepõe à contribuição turbilionária, enquanto que longe da parede se dá o inverso.



Uma forma alternativa de definir e quantificar a tensão de corte em escoamento turbulento é através do conceito de viscosidade turbulenta, “eddy viscosity”:

$$\tau = \eta \frac{d\bar{v}_x}{dy} \quad (7.54)$$

O facto desta viscosidade ser função tanto das propriedades do fluido como das condições de escoamento torna o seu uso difícil. Prandtl propôs que o escoamento turbulento fosse visto como o transporte aleatório de pacotes de partículas ao longo de uma certa distância – comprimento de mistura, l_m – de uma região com uma dada velocidade para outra com velocidade diferente. Com base neste conceito, e após algumas considerações, Prandtl concluiu que a viscosidade turbulenta é dada por:

$$\eta = \rho l_m^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right| \quad (7.55)$$

e a tensão de corte por:

$$\tau_{turb} = \rho l_m^2 \left(\frac{d\bar{v}_x}{dy} \right)^2 \quad (7.56)$$

O problema passa agora a ser a determinação do comprimento de mistura o qual não é constante ao longo do escoamento.

7.3.2 Perfil de velocidade em escoamento turbulento

Como já foi referido, o perfil turbulento pode ser dividido em três zonas de acordo com a distância à parede: sub-camada viscosa junto à parede onde as forças viscosas são dominantes, camada exterior longe da parede onde as tensões de origem turbulenta são dominantes e camada intermédia.

Na sub-camada viscosa o perfil de velocidade é dado por:

$$\frac{\bar{v}_x(y)}{v^*} = \frac{yv^*}{\nu} \quad \text{válida para} \quad 0 \leq \frac{yv^*}{\nu} \leq 5 \quad (7.57)$$

em que $y = R - r$, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ e $v^* = (\tau_w/\rho)^{1/2}$ (a chamada velocidade de atrito)

Na camada intermédia o perfil de velocidade é dado por:

$$\frac{\bar{v}_x(y)}{v^*} = 2,5 \ln\left(\frac{yv^*}{\nu}\right) + 5,0 \quad (7.58)$$

Na camada exterior o perfil de velocidade é dado por:

$$\frac{v_c - \bar{v}_x(y)}{v^*} = 2,5 \ln\left(\frac{R}{y}\right) \quad (7.59)$$

em que v_c representa a velocidade no eixo do tubo.

Uma correlação empírica que ajusta bem os dados experimentais em todas as zonas, excepto muito perto, quer da parede quer do centro do tubo, é a designada lei da potência para o perfil de velocidade.

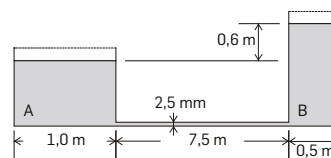
$$\frac{\bar{v}_x(r)}{v_c} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (7.60)$$

O expoente n é função do número de Reynolds, sendo o valor $n = 7$ usado numa gama alargada do número de Reynolds.

7.4 Exercícios propostos de aplicação

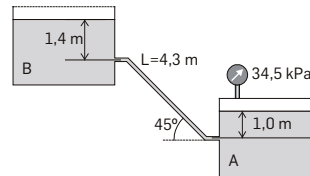
7.1 Dois tanques de base quadrada, cheios com água, estão ligados por um tubo muito fino ($\phi = 2,5 \text{ mm}$) e comprido tal como mostra a figura. No instante inicial o desnível entre os dois tanques é de $0,6 \text{ m}$. Calcule:

- A velocidade de descarga no instante inicial.
- O tempo que demora as superfícies livres dos tanques a ficarem a uma distância de $0,3 \text{ m}$.



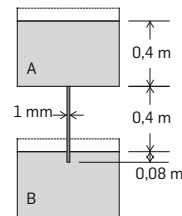
7.2 Um tubo capilar de diâmetro interior 6 mm liga o tanque A (fechado) a um tanque B (aberto) tal como mostra a figura. O líquido na instalação é água, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ e $\mu = 8 \times 10^{-4} \text{ Pa.s}$. A pressão do ar sobre a superfície livre do tanque A é $34,5 \text{ kPa}$ (pressão relativa). Qual a direcção de escoamento do líquido? Qual o caudal volumétrico nas condições da figura? Despreze as perdas de carga localizadas.

R: Sentido de A para B, $Q = 6,9 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$



7.3 Água a $40\text{ }^{\circ}\text{C}$ $\rho = 992\text{ kg/m}^3$, $\mu = 6,56 \times 10^{-4}\text{ Pa}\cdot\text{s}$, está em escoamento do tanque A para o tanque B.

- Determine, nas condições da figura, o caudal de escoamento? Despreze as perdas de carga na entrada do tubo capilar bem como na saída. R- $Q = 6,1 \times 10^{-7}\text{ m}^3/\text{s}$
- Se os tanques tiverem igual diâmetro ($D = 0,20\text{ m}$) qual o tempo que demora o tanque A a ficar reduzido a metade do seu conteúdo inicial? Considere que o tanque B tem uma altura suficiente para não transbordar. R- $t \approx 4\text{ horas}$

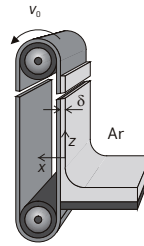


7.4 Uma película de água com espessura $\delta = 5\text{ mm}$ escorre ao longo de uma parede plana sob a acção da gravidade. O escoamento é estacionário (a espessura da película é constante), e perfeitamente desenvolvido (a velocidade v_z é função de x e não depende de z).

- Através de um balanço de forças a um elemento infinitesimal de fluido, encontre uma expressão para o perfil de velocidade. Considere a viscosidade do ar desprezável e admita outras hipóteses que julgar conveniente.
- Calcule a velocidade média do escoamento e relacione-a com a velocidade máxima.

7.5 Uma correia muito comprida (plano normal à folha de papel) passa através de um recipiente contendo um líquido muito viscoso de propriedades físicas μ e ρ . A correia move-se verticalmente com uma velocidade v_0 . Devido às forças viscosas, a correia "arrasta" uma película de líquido de espessura δ . Este arrastamento é contrariado pela acção da gravidade. Determine uma expressão para a velocidade média

da película de líquido que é arrastada. Admita que o escoamento é laminar, estacionário (a espessura da película é constante ao longo de z), e perfeitamente desenvolvido (a velocidade v_z é função de x e não depende de z).



8 ESCOAMENTO EM TUBAGENS

8.1 Perdas de carga em tubagens- Gráfico de Moody

Como foi referido na análise dimensional, a perda de pressão sofrida por um fluido incompressível em escoamento estacionário num tubo horizontal de secção circular de diâmetro D é função de:

$$\Delta p_{\text{atrito}} = \phi(v, D, l, \varepsilon, \mu, \rho) \quad (8.1)$$

Demonstrou-se que, aplicando o teorema de Π Buckingham, existe uma funcionalidade entre os seguintes grupos adimensionais:

$$\frac{\Delta p_{\text{atrito}}}{\frac{1}{2}\rho v^2} = \phi\left(\frac{\rho v D}{\mu}, \frac{l}{D}, \frac{\varepsilon}{D}\right) \quad (8.2)$$

No caso do escoamento ser perfeitamente desenvolvido, a perda de pressão é proporcional ao comprimento do tubo, logo:

$$\frac{\Delta p_{\text{atrito}}}{\frac{1}{2}\rho v^2} = \frac{l}{D} \phi\left(\text{Re}, \frac{\varepsilon}{D}\right) \quad (8.3)$$

A expressão anterior aparece muitas vezes na literatura na seguinte forma:

$$\Delta p_{\text{atrito}} = f(\text{ou } C_f) \frac{l}{D} \frac{\rho v^2}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta p_{\text{atrito}}}{\rho g} = h = \frac{1}{2} f \frac{l}{D} \frac{v^2}{g} \quad (8.4)$$

em que f ou C_f , é designado por factor de atrito ou coeficiente de atrito, e é função do número de Reynolds e da rugosidade relativa, ε/D :

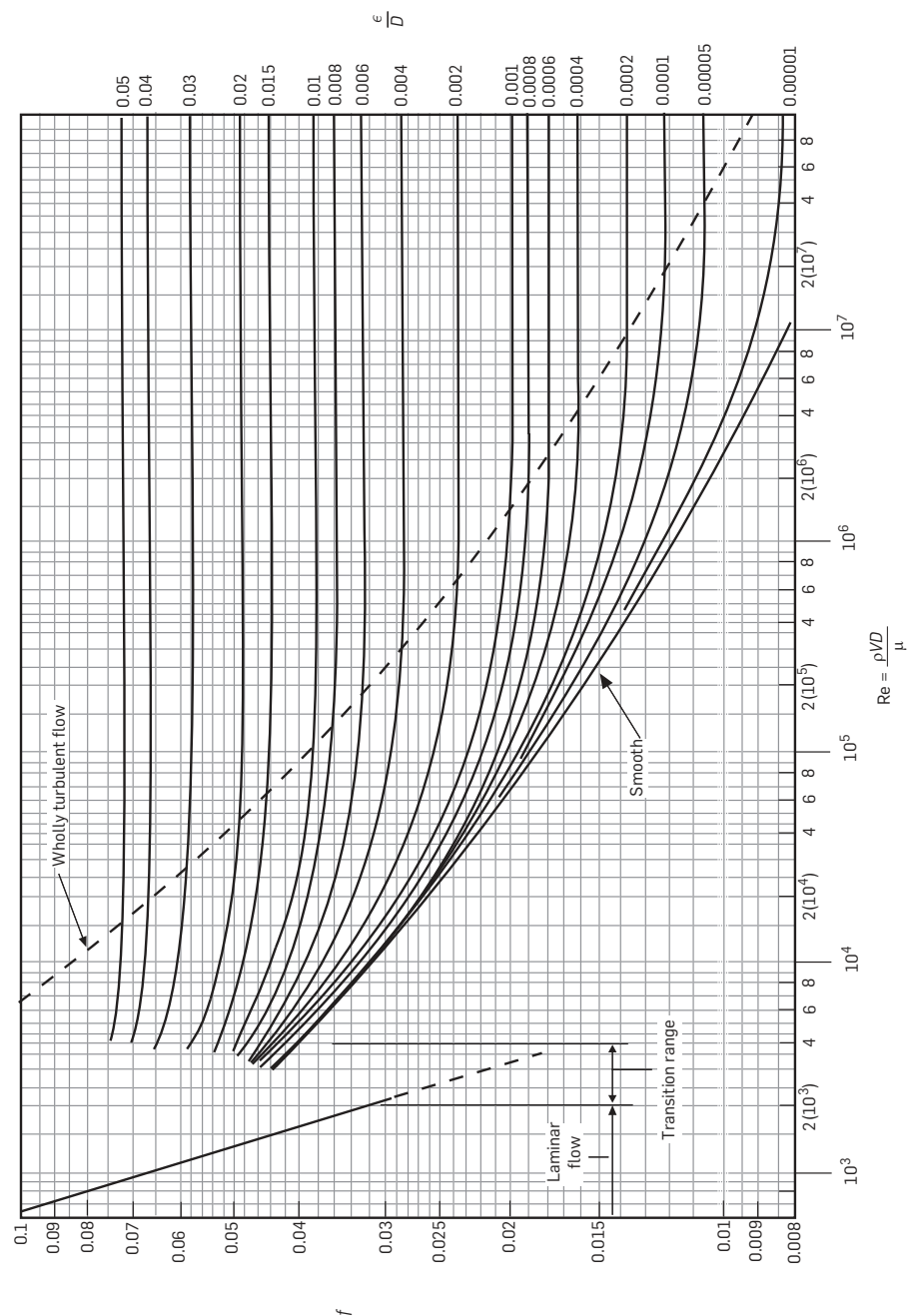
$$f(\text{ou } C_f) = \phi\left(\text{Re}, \frac{\varepsilon}{D}\right) \quad (8.5)$$

O factor de atrito pode ser obtido no diagrama de Moody em função do número de Reynolds e de ε/D .

No diagrama de Moody deve-se observar e reter os seguintes pontos:

- em regime laminar o factor de atrito é independente da rugosidade relativa;
- em regime laminar $f = 64/\text{Re}$;

- para $2100 < Re < 4000$ o regime tanto pode ser laminar como turbulento, sendo o valor de f indefinido - regime de transição;
- para elevados valores do número de Reynolds, escoamento perfeitamente turbulento, o valor de f é independente do número de Reynolds.



Para regime turbulento Colebrook apresentou uma expressão de ajuste às diversas curvas do diagrama de Moody, a qual permite calcular f com um erro inferior a 10%:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2,0 \log \left(\frac{\varepsilon/d}{3,7} + \frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right) \quad (8.6)$$

Após apresentar as correlações e gráficos que permitem determinar a perda de carga num tubo circular, tanto em regime laminar como em regime turbulento, é importante reter as principais dependências funcionais descritas na tabela seguinte. Estas dependências decorrem das considerações feitas sobre o diagrama de Moody, e no caso de regime laminar podem ser comprovadas por inspecção da equação de Poiseuille.

	Regime Laminar	Regime turbulento desenvolvido
Velocidade média	$Q \propto \nu$	$Q \propto \nu$
Queda de pressão	$Q \propto \Delta p_{\text{atrito}}$	$Q \propto \Delta p_{\text{atrito}}^{1/2}$
Massa volúmica	independente	$Q \propto \rho^{-1/2}$
Viscosidade	$Q \propto \mu^{-1}$	independente
Diâmetro do tubo	$Q \propto D^4$	$Q \propto D^{5/2}$
Comprimento do tubo	$\Delta p_{\text{atrito}} \propto l$	$\Delta p_{\text{atrito}} \propto l$
Rugosidade do tubo	independente	$\Delta p_{\text{atrito}} = f(\varepsilon)$

8.2 Características das tubagens

No dia a dia, as tubagens são referidas conforme o seu diâmetro nominal; a cada diâmetro nominal corresponde um diâmetro interno efectivo. A rugosidade dos tubos depende do material de que são feitos e por vezes do seu diâmetro interno. As tabelas seguintes mostram a relação entre o diâmetro nominal e o diâmetro interno efectivo, e valores típicos da rugosidade para alguns materiais mais comuns usados no fabrico de tubagens.

Diâmetros nominais para tubos normalizados

Tubos de aço inox, tubos de carbono e ligas de aço.

<i>Diâmetro nominal (in)</i>	<i>Diâmetro interno (in)</i>	<i>Área da secção recta interior (in²)</i>
1/2	0,364	0,1041
3/4	0,824	0,533
1	1,049	0,864
1 1/2	1,610	2,036
2	2,067	3,356
3	3,068	7,393
4	4,026	12,73
5	5,047	20,01
6	6,065	28,89
8	7,981	50,03
10	10,020	78,85
12	12,000	113,1
14	13,000	132,73
16	15,250	182,65
18	17,250	233,71
20	19,250	291,04
22	21,250	354,66
24	23,250	424,56

Rugosidade típica de alguns materiais

Material	Condition	ϵ		Uncertainty, %
		ft	mm	
Steel	Sheet metal, new	0.00016	0.05	± 60
	Stainless, new	0.000007	0.002	± 50
	Commercial, new	0.00015	0.046	± 30
	Riveted	0.01	3.0	± 70
	Rusted	0.007	2.0	± 50
Iron	Cast, new	0.00085	0.26	± 50
	Wrought, new	0.00015	0.046	± 20
	Galvanized, new	0.0005	0.15	± 40
	Asphalted cast	0.0004	0.12	± 50
Brass	Draw, new	0.000007	0.002	± 50
Plastic	Draw tubing	0.000005	0.0015	± 60
Glass	—	Smooth	Smooth	

cont.

Material	Condition	ε		Uncertainty, %
		ft	mm	
Concrete	Smoothed	0.00013	0.04	± 60
	Rough	0.007	2.0	± 50
Rubber	Smoothed	0.000033	0.01	± 60
Wood	Stave	0.0016	0.5	± 40

(tabela retirada do Munson, Young e Okiishi)

8.3 Perdas de carga localizadas em tubagens

Perdas de carga em válvulas, cotovelos, entradas e saídas, expansões súbitas, uniões, ramificações etc., são referidas como perdas localizadas. O método mais utilizado para determinar estas perdas é através do coeficiente de perdas K , o qual é definido por:

$$K = \frac{\Delta p_{\text{atrito}}}{\frac{1}{2}\rho v^2} \rightarrow \Delta p_{\text{atrito}} = K \frac{1}{2}\rho v^2 \rightarrow h = K \frac{v^2}{2g} \quad (8.7)$$

em que h representa a perda de carga e $K = \varphi(\text{Re}, \text{geometria})$

Na maioria dos casos de utilidade prática o escoamento é perfeitamente turbulento e K não depende do número de Reynolds.

Outra forma de exprimir as perdas de carga localizadas é através do comprimento equivalente de tubagem; comprimento de tubagem necessário para se obter uma perda de carga por atrito igual à perda de carga localizada.

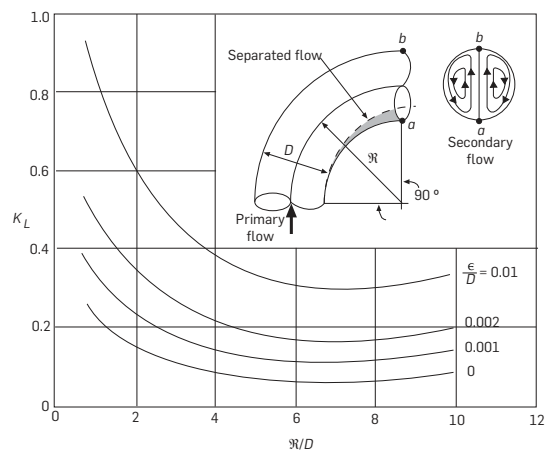
$$h = K \frac{v^2}{2g} = f \frac{l_{\text{eq}}}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (8.8)$$

Na tabela, para regime turbulento perfeitamente desenvolvido, estão inventariados alguns valores para o coeficiente de perdas em cotovelos, uniões, válvulas e ramificações.

O gráfico seguinte permite determinar o coeficiente de perdas para um cotovelo a 90° , em função da geometria, raio de curvatura, e da rugosidade relativa do tubo.

Component	K_L	
a.Elboows		
Regular 90 °, flanged	0.3	
Regular 90 °, threaded	1.5	
Long radius 90 °, flanged	0.2	
Long radius 90 °, threaded	0.7	
Long radius 45 °, flanged	0.2	
Regular 45 °, threaded	0.4	
b. 180 ° return bends		
180 ° return bend, flanged	0.2	
180 ° return bend, threaded	1.5	
c. Tees		
Line flow, flanged	0.2	
Line flow, threaded	0.9	
Branch flow, flanged	1.0	
Branch flow, threaded	2.0	
d. Union, threaded		
	0.08	
*e. Valves		
Globe, fully open	10	
Angle, fully open	2	
Gate, fully open	0.15	
Gate, $\frac{1}{4}$ closed	0.26	
Gate, $\frac{1}{2}$ closed	2.1	
Gare, $\frac{3}{4}$ closed	17	
Swing check, forward flow	2	
Swing check, backward flow	∞	
Ball valve, fully open	0.05	
Ball valve, $\frac{1}{3}$ closed	5.5	
Ball valve, $\frac{2}{3}$ closed	210	
Ball valve, $\frac{3}{4}$ closed	210	
Ball valve, fully closed	210	
	210	

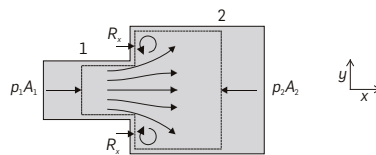
(tabela retirada do Munson, Young e Okiishi)



(gráfico retirado do Munson, Young e Okiishi)

As perdas de carga numa expansão súbita e numa contracção, são exemplos em que o resultado pode ser obtido analiticamente. Estes casos foram estudados no capítulo 5 e em seguida são transcritas as conclusões desses estudos.

- *Perda de carga numa expansão súbita*



Tal como se demonstrou no capítulo 5, exemplos de aplicação da equação da quantidade de movimento, a perda de carga numa expansão súbita é dada por:

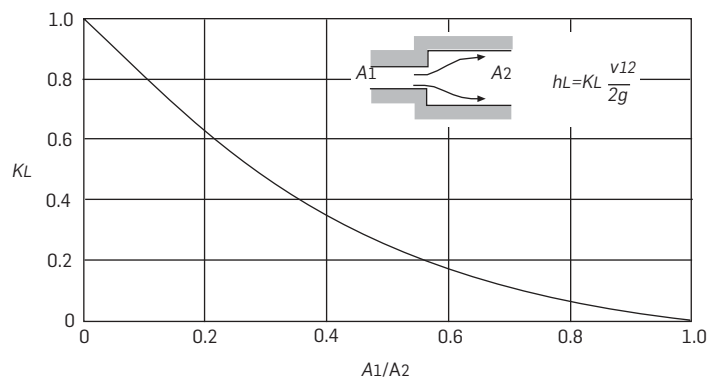
$$h = \frac{v_1^2}{2g} \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \frac{v_1^2}{2g} \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 = K \frac{v_1^2}{2g}$$

com

$$K = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

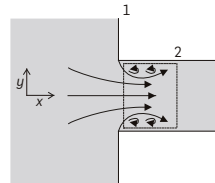
Quando há uma expansão para um reservatório de grande diâmetro:

$$A_2 \rightarrow \infty, v_2 \rightarrow 0 \Rightarrow h = \frac{v_1^2}{2g} \text{ e } K = 1$$



(gráfico retirado do Munson, Young e Okiishi)

- *Perda de carga numa contracção súbita*

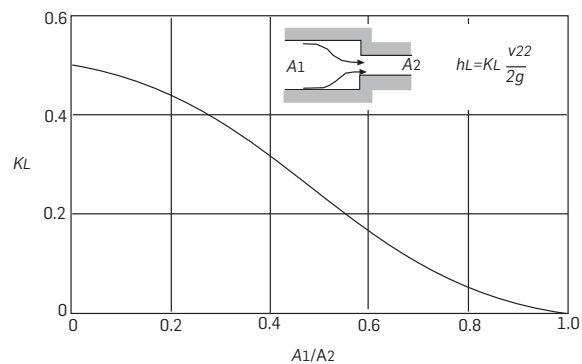


A perda de carga numa contracção súbita é dada por (ver capítulo 5):

$$h = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} - \frac{v_2^2}{g} \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right) = \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 = K \frac{v_2^2}{2g}$$

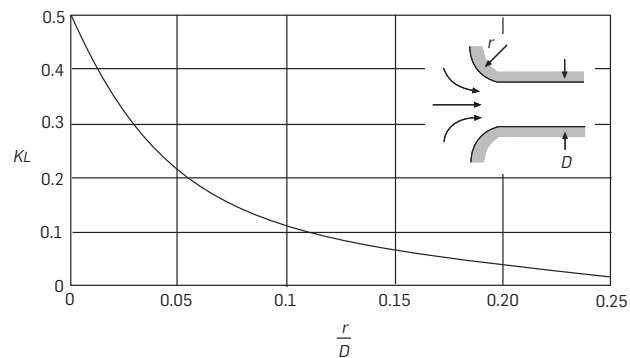
com

$$K = \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right)^2$$



(gráfico retirado do Munson, Young e Okiishi)

- *Perda de carga na saída de um tanque entrada num tubo*



(gráfico retirado do Munson, Young e Okiishi)

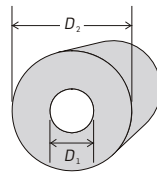
8.4 Perdas de carga em tubagens não circulares

Para condutas não circulares define-se o diâmetro hidráulico como, 4 vezes a razão entre a área da secção recta de escoamento e o perímetro molhado:

$$D_h = 4 \frac{A}{P_{\text{molhado}}} \quad (8.9)$$

8.4.1 Exemplos

- *Tubos concêntricos- escoamento entre tubos*

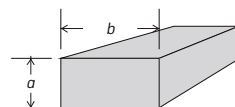


$$A = \frac{\pi D_2^2}{4} - \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{\pi}{4} (D_2^2 - D_1^2)$$

$$P_{\text{molhado}} = D_2 + D_1 = (D_2 + D_1)$$

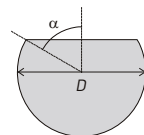
$$D_h = \frac{4 \frac{\pi}{4} (D_2^2 - D_1^2)}{\pi (D_2 + D_1)} = D_2 - D_1$$

- *Escoamento numa conduta rectangular*



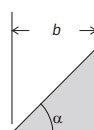
$$D_h = \frac{4ab}{2a + 2b} = \frac{2ab}{a + b}$$

- *Escoamento num sector de círculo*



$$D_h = D \left[1 + \frac{\sin(2\alpha)}{2(\pi - \alpha)} \right]$$

- *Escoamento num tubo de secção triangular*



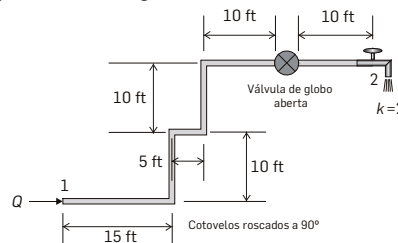
$$D_h = \left[\frac{2b \sin \alpha}{(1 + \sin \alpha + \cos \alpha)} \right]$$

8.5 Exercícios resolvidos sobre perda de carga em tubagens

Exercício Tipo I: Determinação da perda de carga numa instalação

Água a 20°C circula num edifício, da cave para o 2º andar, através de uma tubagem de cobre, rugosidade 0,0015 mm, de diâmetro interno 19,0 mm a um caudal $Q = 0,75$ l/s. A saída, no 2º andar, dá-se através de uma torneira com diâmetro de saída 12,7 mm.. Determine a pressão no ponto 1 da figura nas seguintes situações:

- Não considerando qualquer tipo de perda de carga.
- Considerando somente as perdas de carga na tubagem.
- Incluindo as perdas de carga localizadas.



Nota: O coeficiente de perdas à saída da torneira é baseado na velocidade de escoamento no tubo.

Solução

O volume de controlo escolhido exclui a tubagem. Aplica-se a equação da energia entre as secções de entrada e de saída do volume de controlo (1 e 2):

$$\frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h$$

em que h representa as perdas de carga na tubagem e as perdas de carga localizadas. Pelos dados do problema:

$$z_2 - z_1 = 6,10 \text{ m}$$

$$v_1 = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi D^2} = 2,65 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi D_{\text{torneira}}^2} = 5,90 \text{ m/s}$$

$$\text{Re (tubo)} = \frac{\rho v_1 D}{\mu} = 5,0 \times 10^4$$

$$\text{Re} > 2100 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

(Nota: as propriedades físicas foram retiradas das tabelas em apêndice)

a. Sem perdas de carga

Substituindo os valores anteriores e sabendo que $h = 0$, obtém-se:

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} + z_2 - z_1 = 7,6 \text{ m}$$

$$p_1 = 7,4 \times 10^4 \text{ Pa (pressão relativa)}$$

b. Com perdas de carga na tubagem.

A rugosidade relativa do tubo é:

$$\frac{\varepsilon}{D} = 8 \times 10^{-5}$$

Por leitura do gráfico de Moody:

$$f = \phi\left(\frac{\varepsilon}{D}, \text{Re}\right) \rightarrow f = 0,0215$$

A perda de carga na tubagem é dada por:

$$h = f \frac{L}{D} \frac{v_1^2}{2g} = 7,4 \text{ m}$$

Substituindo na equação da energia:

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} + z_2 - z_1 + h = 15,0 \text{ m}$$

$$p_1 = 14,7 \times 10^4 \text{ Pa (pressão relativa)}$$

c. Com perdas de carga na tubagem e localizadas.

Por leitura nas respectivas tabelas dos valores dos coeficientes de perdas nos cotovelos de 90° roscados ("threaded"), válvula de globo aberta ("globe valve, fully opened") e torneira, obtém-se:

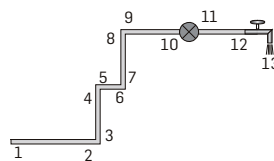
$$h_{\text{local}} = \sum k \frac{v_1^2}{2g} = [4(\text{cotovelos}) \times 1,5 + 10 + 2] \frac{2,65^2}{2 \times 9,8} = 6,5 \text{ m}$$

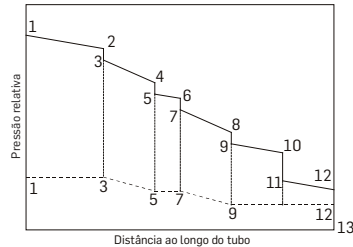
Substituindo na equação da energia:

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} + z_2 - z_1 + h = 15,0 + 6,5 = 21,5 \text{ m}$$

$$p_1 = 21 \times 10^4 \text{ Pa (pressão relativa)}$$

A figura seguinte mostra a pressão relativa ao longo da tubagem (linha a cheio). A tracejado está representada a pressão relativa no caso de as perdas de carga não serem contabilizadas. A linha de pressão apresenta dois tipos de rectas que diferem no declive: as de maior declive resultam de no trajecto do fluido, além da perda de pressão por atrito, haver conversão de energia de pressão em energia potencial; as de menor declive resultam de no trajecto do fluido só haver perda de pressão por atrito. Na saída, o diâmetro da torneira diminui, pelo que além da perda de energia localizada, há conversão de energia de pressão em energia cinética.





A figura seguinte mostra a *linha de energia do fluido*.

No caso de não serem contabilizar as perdas:

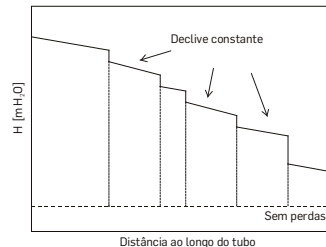
$$H = \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = \text{constante}$$

em que H representa a energia total, carga total, num ponto da tubagem.

A perda de carga na tubagem, h , por unidade de comprimento de tubo é constante:

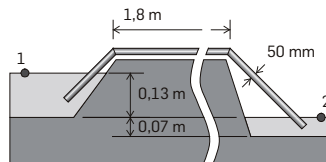
$$\frac{h}{l} = f \frac{v^2}{2gD}$$

A perda de carga na tubagem, sendo proporcional ao comprimento do tubo, aparece na linha de energia através de rectas de declive constante. As perdas de carga localizadas aparecem através de um salto descendente da linha de energia.



Exercício Tipo II - Determinação do caudal

Água a 20 °C, $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$ e $\mu = 1,0 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$, é bombeada por meio de um sifão ao longo de uma distância de 1,8 m. O diâmetro do tubo é 50 mm e a sua rugosidade $\varepsilon = 0,20 \text{ mm}$. O coeficiente de atrito em cada cotovelo é $K = 0,4$. Admita que na saída se perde toda a carga cinética e que na entrada $K = 0,8$. Determine o caudal de circulação.



Solução

Aplicando a equação da energia a um volume de controlo cujas entrada e saída coincidem com as superfícies livres (pontos 1 e 2) obtém-se:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + f \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g} + \sum K \frac{v^2}{2g}$$

Do enunciado e tabelas sabe-se que:

$$v_1 = v_2 = 0, p_1 - p_2 = 0, z_1 - z_2 = 0,13 \text{ m}$$

$$K_{\text{cotovelo}} = 0,4, K_{\text{entrada}} = 0,8, K_{\text{saída}} = 1,0$$

Substituindo na equação da energia:

$$0,13 = \left\{ f \frac{1,8}{0,05} + [0,8 + 2(0,4) + 1] \right\} \frac{v^2}{2 \times 9,8} \rightarrow 2,55 = (36f + 2,6)v^2 \quad (1)$$

Sabe-se ainda que:

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = 49800v \quad (2)$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0,20}{50} = 0,004$$

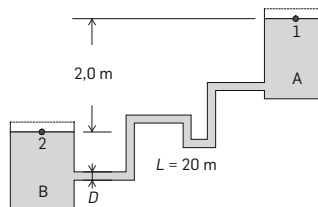
Para o cálculo há três relações: duas equações (1) e (2) e uma curva no diagrama de Moody correspondente ao valor da rugosidade relativa. Estas relações permitem calcular três incógnitas, f , Re e v , para o que se vai usar um processo iterativo. Como é difícil ter uma primeira estimativa para v , opta-se por arbitrar f considerando o escoamento turbulento e desenvolvido. Neste regime f é independente do número de Reynolds.

Arbitrando f , calcula-se v pela equação (1) e Re pela equação (2). Com os valores de Re e ε/D consulta-se o diagrama de Moody e obtém-se novo valor de f . Se este valor coincidir com o arbitrado, o processo iterativo termina, caso contrário toma-se o último valor de f e faz-se nova iteração até o processo convergir. Recorrendo a este processo iterativo obtém-se:

$$Re = 41300, f = 0,031, v = 0,828 \text{ m/s}$$

Exercício Tipo III: Determinação do diâmetro da tubagem

Água a 10°C , $\nu = 1,307 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ está em escoamento de um tanque A para um tanque B, através de um tubo de ferro galvanizado, $\varepsilon = 0,26 \text{ mm}$, com $20,0 \text{ m}$ de comprimento, a um caudal de 2 l/s . Na entrada do tanque B o valor do coeficiente de perdas é $K = 1,0$, na saída do tanque A $K = 0,5$ e em cada um dos seis cotovelos de 90° regulares e roscados $K = 0,5$. Determine o diâmetro da tubagem.



Solução

Aplicando a equação da energia a um volume de controlo cujas entrada e saída coincidam com as superfícies livres (pontos 1 e 2), e que não engloba a tubagem, obtém-se:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} + \sum K \frac{v^2}{2g}$$

Sabendo que à superfície dos tanques a pressão é atmosférica e que as cargas cinéticas são desprezáveis, a equação anterior simplifica-se:

$$z_1 - z_2 = \frac{v^2}{2g} \left(f \frac{L}{D} + \sum K \right)$$

Dos dados do problema obtém-se:

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi D^2} \rightarrow v = \frac{2,55 \times 10^{-3}}{D^2}$$

$$K_{saída} = 0,5, K_{entrada} = 1,0, K_{cotovelos} = 0,5 \times 6$$

Substituindo na equação da energia, resulta:

$$2,0 = \frac{v^2}{2 \times 9,8} \left\{ \frac{20}{D} f + [3,0 + 0,5 + 1] \right\} \rightarrow 6,0 \times 10^6 D^5 - 4,5D - 20f = 0 \quad (1)$$

Sabe-se ainda que:

$$Re = \frac{vD}{\nu} = \frac{1,95 \times 10^3}{D}, \frac{\varepsilon}{D} = \frac{2,6 \times 10^{-4}}{D} \quad (2) \text{ e } (3)$$

Há quatro relações para efectuar os cálculos, três equações (1), (2) e (3) e uma curva no diagrama de Moody correspondente ao valor da rugosidade relativa. Estas relações permitem calcular quatro incógnitas, f , Re , D e ε/D , através de um processo iterativo.

Pode-se desenvolver o processo iterativo em torno da variável f , contudo a complexidade da equação (1) sugere que o processo seja em torno da variável D . Estima-se D e calcula-se f (equação 1), Re (equação 2) e a rugosidade relativa (equação 3). Com estas duas últimas variáveis consulta-se o diagrama de Moody e obtém-se um novo valor de f . Se os valores de f coincidirem o processo está terminado, caso contrário arbitra-se novo valor de D e continua-se o processo iterativo. A solução do presente problema é $D \approx 40$ mm.

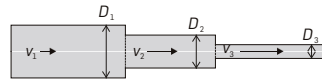
8.6 Perda de carga em tubagens múltiplas

No capítulo anterior estudou-se a associação de resistências ao escoamento em regime laminar. Esta associação baseia-se na analogia entre circuitos eléctricos e hidráulicos, e é aplicável a regime laminar porque a perda de carga é proporcional ao caudal de escoamento (equação de Poiseuille), tal como em circuitos eléctricos a diferença de potencial é proporcional á intensidade da corrente. Em escoamentos turbulentos a perda de carga é proporcional ao quadrado do caudal de escoamento e um tratamento análogo ao de circuitos eléctricos não é aplicável. De seguida são resolvidos exemplos de escoamentos em tubagens múltiplas em regime turbulento.

- Associação de tubos em série

Quando dois ou mais tubos com diâmetros diferentes são colocados em série, verificam-se as seguintes condições:

1. O caudal mássico que passa em cada um deles é o mesmo.
2. A perda de carga total é igual à soma das perdas de carga individuais.



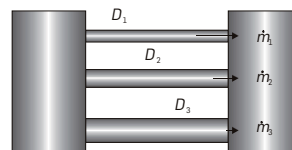
$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}_3$$

$$h_{\text{total}} = h_1 + h_2 + h_3$$

- Associação de tubos em paralelo

Quando dois ou mais tubos com diferentes diâmetros são colocados em paralelo, verificam-se as seguintes condições:

1. O caudal mássico total é igual à soma dos caudais mássicos individuais.
2. A perda de carga é a mesma em cada um dos tubos.

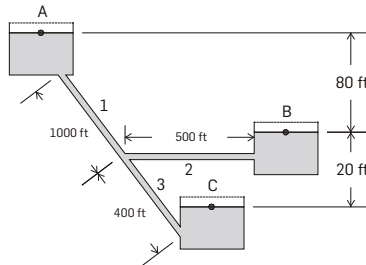


$$\dot{m} = \dot{m}_1 + \dot{m}_2 + \dot{m}_3$$

$$h = h_1 = h_2 = h_3$$

Exemplo 8.4

Três reservatórios com água estão ligados por três tubos tal como mostra a figura. Admita, só para simplificar o problema, que o diâmetro dos tubos é 1ft e o coeficiente de atrito para todos os tubos é 0,02. Pelo facto da razão comprimento/diâmetro dos tubos ser elevada, as perdas de carga localizadas são desprezáveis. Determine o caudal que chega ou que parte de cada reservatório.

**Solução**

Não é evidente o sentido do escoamento no tubo de ligação ao tanque B. Por hipótese, considere-se que o sentido é de B para C. Aplicando a equação da continuidade a um fluido incompressível:

$$\dot{m}_1 + \dot{m}_2 = \dot{m}_3 \rightarrow v_1 + v_2 = v_3 \quad (1)$$

Aplicando sucessivamente a equação de energia aos volumes de controlo entre a superfície do tanque A e o nó (*) e entre o nó e a superfície do tanque C obtém-se:

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} + z_A = \frac{p^*}{\rho g} + \frac{(v^*)^2}{2g} + z^* + f_1 \frac{L_1}{D} \frac{v_1^2}{2g}$$

$$\frac{p^*}{\rho g} + \frac{(v^*)^2}{2g} + z^* = \frac{p_C}{\rho g} + \frac{v_C^2}{2g} + z_C + f_3 \frac{L_3}{D} \frac{v_3^2}{2g}$$

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} + z_A = \frac{p_C}{\rho g} + \frac{v_C^2}{2g} + z_C + f_1 \frac{L_1}{D} \frac{v_1^2}{2g} + f_3 \frac{L_3}{D} \frac{v_3^2}{2g}$$

Dos dados do problema sabe-se que:

$$p_A = p_C = 0, v_A = v_C = 0, z_C = 0$$

Substituindo na equação da energia resulta:

$$z_A = f_1 \frac{L_1}{D} \frac{v_1^2}{2g} + f_3 \frac{L_3}{D} \frac{v_3^2}{2g}$$

$$322 = v_1^2 + 0,4v_3^2 \quad (2)$$

com v_1 e v_3 expressos em ft/s.

Aplicando de seguida a equação de energia aos volumes de controlo entre a superfície do tanque B e o nó (*), e entre o nó e a superfície do tanque C obtém-se:

$$\frac{p_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} + z_B = \frac{p^*}{\rho g} + \frac{(v^*)^2}{2g} + z^* + f_2 \frac{L_2}{D} \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\frac{p^*}{\rho g} + \frac{(v^*)^2}{2g} + z^* = \frac{p_C}{\rho g} + \frac{v_C^2}{2g} + z_C + f_3 \frac{L_3}{D} \frac{v_3^2}{2g}$$

$$\frac{p_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} + z_B = \frac{p_C}{\rho g} + \frac{v_C^2}{2g} + z_C + f_1 \frac{L_1}{D} \frac{v_1^2}{2g} + f_3 \frac{L_3}{D} \frac{v_3^2}{2g}$$

Dos dados do problema sabe-se que:

$$p_B = p_C = 0, v_B = v_C = 0, z_C = 0$$

Substituindo na equação da energia resulta:

$$z_B = f_1 \frac{L_1}{D} \frac{v_2^2}{2g} + f_2 \frac{L_2}{D} \frac{v_3^2}{2g}$$

$$64,4 = 0,5v_2^2 + 0,4v_3^2 \quad (3)$$

com v_2 e v_3 expressos em ft/s.

Resolvendo conjuntamente as equações (1), (2) e (3) conclui-se que o sistema não tem solução real positiva, o que significa que a hipótese de o fluido se deslocar do tanque B para o tanque C não é possível. Vai-se reformular o problema, pondo a hipótese que o fluido que sai do tanque A, parte entra no tanque C, e outra parte no tanque B. Aplicando a equação da continuidade

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_3 + \dot{m}_2 \rightarrow v_1 = v_3 + v_2 \quad (1^*)$$

A equação (2), resultante do escoamento de A para C, continua a ser válida. Aplicando a equação da energia ao fluido em escoamento de A para B resulta:

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} + z_A = \frac{p^*}{\rho g} + \frac{(v^*)^2}{2g} + z^* + f_1 \frac{L_1}{D} \frac{v_1^2}{2g}$$

$$\frac{p^*}{\rho g} + \frac{(v^*)^2}{2g} + z^* = \frac{p_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} + z_B + f_2 \frac{L_2}{D} \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} + z_A = \frac{p_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} + z_B + f_1 \frac{L_1}{D} \frac{v_1^2}{2g} + f_2 \frac{L_2}{D} \frac{v_2^2}{2g}$$

Dos dados do problema sabe-se que:

$$p_A = p_B = 0, v_A = v_B = 0$$

Substituindo na equação da energia resulta:

$$z_A - z_B = f_1 \frac{L_1}{D} \frac{v_1^2}{2g} + f_2 \frac{L_2}{D} \frac{v_2^2}{2g}$$

$$258 = v_1^2 + 0,5v_2^2 \quad (3^*)$$

com v_1 e v_2 expressos em ft/s.

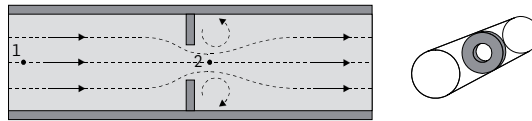
Resolvendo as equações (1*), (2) e (3*) obtém-se:

$$Q_1 = 12,5 \text{ ft}^3/\text{s}, Q_2 = 2,26 \text{ ft}^3/\text{s}, Q_3 = 10,2 \text{ ft}^3/\text{s}$$

8.7 Medidores de caudal

Como se estudou no capítulo 4, uma forma de medir o caudal de um fluido em escoamento num tubo é colocar no seu trajecto algum tipo de restrição de forma a provocar a formação de duas zonas: uma de baixa velocidade e alta pressão, e outra de alta velocidade e baixa pressão. Medindo a diferença de pressão entre as duas zonas é possível conhecer o caudal volumétrico ou mássico através da equação de Bernoulli. O medidor de orifício e o medidor de Venturi foram dois exemplos dados para medir caudais. As expressões para cálculo do caudal foram deduzidas supondo que o diâmetro do jacto coincidia com o diâmetro do orifício e que não havia perdas de energia mecânica por efeitos viscosos:

$$Q = A_2 \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]}} \quad (8.10)$$



Contudo, o diâmetro do jacto não coincide geralmente com o diâmetro do orifício como foi referido no capítulo 4. Há uma contracção do jacto, o chamado efeito da vena contracta. A contracção do jacto é maior ou menor conforme a forma como as linhas de corrente contornam o orifício. Quando as linhas de corrente “acompanham” os bordos do orifício a contracção é mínima e vice-versa. Definiu-se então um coeficiente de contracção C_c , cujo valor é igual à razão entre a menor área do jacto, área na vena contracta, e a área do orifício. Como já foi referido, os valores deste coeficiente são dados na literatura em função da geometria do orifício. O caudal volumétrico de saída é então expresso por:

$$Q = C_c A_2 \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]}} \quad (8.11)$$

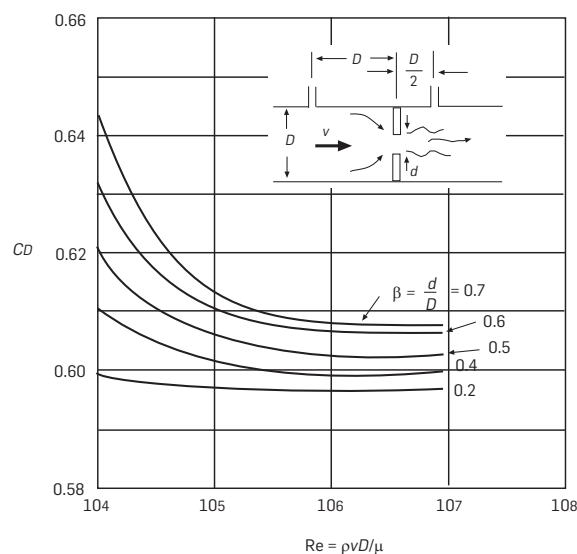
Falta contabilizar as perdas de energia mecânica por efeitos viscosos. Entre o jacto e a parede forma-se uma zona com fluido em circulação onde o escoamento é, na maioria dos casos, turbulento, o que conduz a uma perda de energia mecânica, a qual não pode ser calculada teoricamente. Esta dificuldade levou a que se definisse um coeficiente de descarga C_d , o qual tem em conta, tanto o efeito de diminuição de

pressão devido ao estreitamento e aceleração do jacto, como a diminuição de pressão por efeitos viscosos na zona de recirculação do fluido:

$$Q = C_0 Q_{ideal} = C_0 A_2 \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]}} \quad (8.12)$$

Este coeficiente de descarga depende da razão entre o diâmetro do orifício e o diâmetro do tubo e do número de Reynolds. Há normas precisas estabelecendo a correcta localização das tomas de pressão. No gráfico seguinte apresentam-se curvas que permitem determinar o coeficiente de descarga em função dos parâmetros citados.

O que foi exposto para o caso do medidor de orifício, aplica-se ao medidor de Venturi.



(gráfico retirado do Munson, Young e Okiishi)

8.8 Exercícios propostos de aplicação

8.1 Uma rede de abastecimento de água é constituída genericamente por um reservatório e 450 m de tubo liso de 180 mm de diâmetro interno. O tubo contém vários cotovelos e uma válvula à saída. A perda de carga nos cotovelos é nove vezes superior à carga cinética na tubagem. Quando a válvula está parcialmente fechada o caudal é $7,5 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$ e a pressão relativa imediatamente antes da válvula 0,5 atm.

- Calcule a diferença de nível entre a superfície do reservatório e a saída do tubo.
- O caudal quando a válvula estiver totalmente aberta.

Dado: Para tubo liso e escoamento turbulento $f = 0,079\text{Re}^{-1/4}$

8.2 O tanque representado na figura tem uma entrada em B e uma saída em C. Comece por considerar que o fluido que circula é água e que a única perda de carga em toda a instalação é na expansão em B onde o fluido perde toda a carga cinética com que vinha animado.

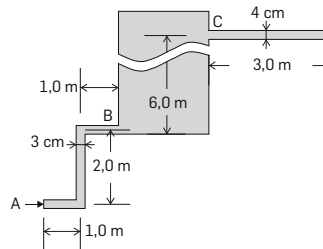
- Se a pressão em A for 2,4 atm e a pressão em D atmosférica calcule o caudal de água no circuito.
- Calcule a componente horizontal da força que o fluido exerce sobre as paredes do tanque.
- Mantendo a pressão em A, se se pretender aumentar o caudal de 20%, diga qual a potência que uma bomba, instalada entre A e B, teria que fornecer ao fluido. Se a eficiência da bomba for de 65% diga qual a potência consumida pela bomba.

Continue a considerar que o fluido é água mas pretende ser mais “rigoroso” e contabilizar as perdas de carga na tubagem além da perda de carga na expansão.

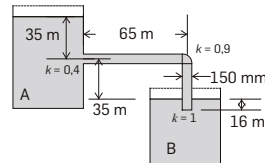
- Recalcule o caudal de água no circuito nas condições da alínea a).
- Apresente as expressões e diga o método de cálculo.

Considere um fluido muito viscoso em escoamento na instalação $\rho = 1200 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 10^{-1} \text{ Pa.s}$.

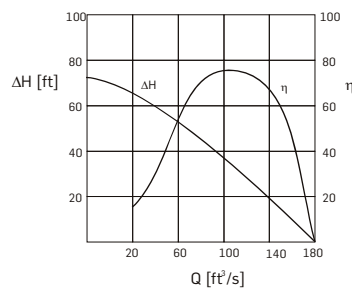
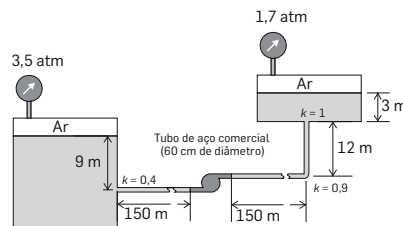
- Qual a pressão em A se o caudal mássico na instalação for $1/3$ do calculado na alínea a). Note que a perda de carga na expansão pode ser desprezável face à perda de carga na tubagem e comece por calcular a “resistência equivalente”.



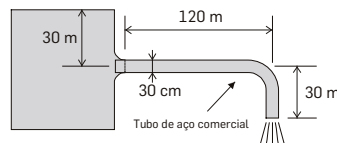
8.3 Um caudal de 170 l/s sai do tanque A para o tanque B. Se $v = 1,13 \times 10^{-6} \text{ m/s}$, qual o diâmetro da secção horizontal da tubagem?

**8.4**

- a. Qual o caudal Q que circula na instalação representada na figura? Qual a potência eléctrica da bomba? As características da bomba estão representadas no gráfico em anexo.
- b. Qual deverá ser o diâmetro do tubo se o caudal volumétrico for 3400 l/s ?



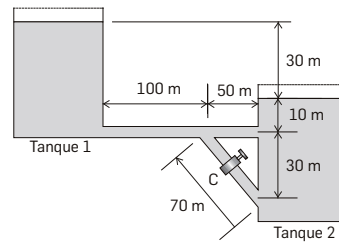
- 8.5** Qual a força exercida pela água no tubo na direcção horizontal ? A água sai do tubo em jacto livre. Despreze perdas menores.



- 8.6** Na instalação esquematizada na figura os tubos são todos de ferro fundido, rugosidade relativa 0,01, e 80 mm de diâmetro interno. Determine o caudal de água que sai do tanque 1 quando a válvula C está:

- a. Fechada;
- b. Aberta com $K = 0.5$.

Considere que na expansão do tubo para o tanque 2, o fluido perde toda a sua energia cinética e despreze as perdas na saída do tanque 1 para o tubo e na bifurcação.



9 CAMADA LIMITE E FORÇAS SOBRE OBJECTOS SUBMERSOS

9.1 Introdução

Sempre que um fluido em escoamento encontra um objecto sólido imerso, há desenvolvimento de tensões de corte na camada adjacente ao objecto. Sobre a superfície, a tensão de corte é máxima, e a velocidade tangencial do fluido é nula, a chamada condição de não deslizamento. Ao longo da direcção normal à superfície, a tensão de corte diminui e a velocidade tende para a velocidade do fluido antes de ser perturbado pela presença do objecto.

Estabelece-se assim um perfil de velocidade na camada adjacente ao objecto. À zona onde este perfil se desenvolve dá-se o nome de camada limite de quantidade de movimento. O perfil de velocidade e a espessura desta camada limite vão depender de vários factores, sendo os mais importantes a geometria e orientação do objecto, e o número de Reynolds. Sobre a superfície, além das forças de corte tangenciais actuam forças normais de pressão.

9.2 Camada limite laminar numa placa plana imersa num fluido

9.2.1 Conceito de camada limite

Suponha um fluido em escoamento não confinado, com um perfil de velocidade uniforme U . No seu trajecto, o fluido vai encontrar uma placa plana muito delgada de comprimento infinito colocada paralelamente à direcção de escoamento. Quando o fluido encontra a placa, esta exerce uma força tangencial de corte sobre o elemento de fluido adjacente. Este elemento não desliza, pára, e passa a exercer uma força de corte tangencial sobre o elemento de fluido mais próximo, retardando-o. Por sua vez, este vai retardar outro elemento adjacente. Este retardar dos elementos de fluido propaga-se, com uma intensidade atenuada, até que a alguma distância da placa, na direcção normal, a acção das forças de corte deixa de se fazer sentir. A partir desta distância, a velocidade do fluido volta a ser U . A toda a zona em que o fluido é retardado pela presença da placa chama-se camada limite de quantidade de movimento. Esta camada tem uma espessura, mas para a definir é necessário saber a partir de que valor próximo de U se considera que o fluido

não está perturbado. Será quando a velocidade na camada limite atinge 95% de U , quando atinge 99%, ou quando atinge 99,9%? É uma questão de definição, embora seja costume considerar-se que a camada limite acaba quando se atinge uma velocidade que é 1% inferior à velocidade exterior, $\delta_{99\%}$:

$$y = \delta_{99\%} \quad \text{quando} \quad u = 0,99U \quad (9.1)$$

No início da placa, a espessura da camada limite começa por ser muito fina e vai aumentando ao longo do seu comprimento, i. e., é função da distância x ao seu ponto de formação. A espessura é também função da razão entre as forças de inércia e as forças viscosas que actuam no fluido, i.e. do número de Reynolds. Assim, quanto maior a intensidade das forças viscosas comparativamente com a intensidade das forças de inércia, maior será a espessura da camada limite em qualquer ponto ao longo da placa.

Se a distância x for tomada como dimensão característica para definir o número de Reynolds, a espessura será somente função de Re_x .

$$Re_x = \frac{U\rho x}{\mu} \quad (9.2)$$

em que U é a velocidade do escoamento exterior, as propriedades físicas são as do fluido e a dimensão característica é a distância x ao longo da placa.

O escoamento na camada limite começa por ser laminar mas a partir de um dado x , i.e., de um dado valor de Re_x , começa a observar-se a transição de regime laminar para regime turbulento. Este valor de transição para uma placa plana é da ordem dos $Re_x = 2 \times 10^5$ a 3×10^6 dependendo da rugosidade da superfície e da intensidade de turbulência do escoamento exterior.

No caso do comprimento da placa não ser infinito, define-se o número de Reynolds tomando para dimensão característica o comprimento l da placa.

$$Re_l = \frac{U\rho l}{\mu} \quad (9.3)$$

Na figura seguinte está esboçada a camada limite que se desenvolve em torno da placa para três valores de Reynolds diferentes. Para $Re_l = 0,1$ a espessura da camada limite é elevada, começando a fazer-se sentir a presença da placa ainda antes do fluido entrar em contacto com

a superfície. Para $Re_l = 10^7$ a acção das forças viscosas só se faz sentir no início da placa e a sua espessura é pequena em qualquer ponto ao longo de x .

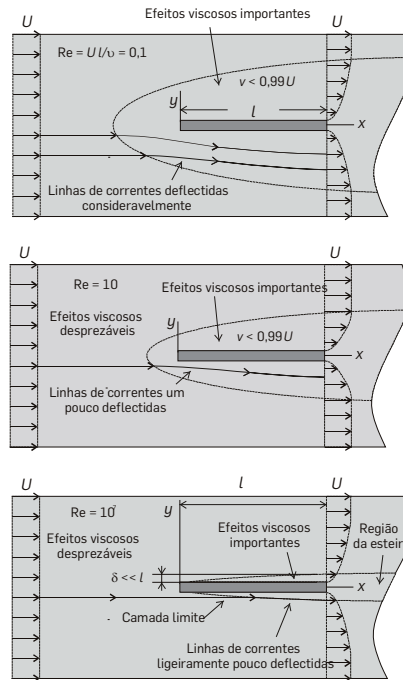


Figura 9.1 Camada limite para diferentes valores de Re_l . (Figura retirada do Munson, Young e Okiishi)

9.2.2 Espessura da camada limite numa placa plana- solução de Blasius

A análise e resolução das equações diferenciais de escoamento na camada limite estão fora do âmbito desta disciplina. Contudo, usando argumentos muito simples, pode-se estabelecer relações que permitem o cálculo da sua espessura.

Através da adimensionalização dos perfis de velocidade que se estabelecem na camada limite laminar ao longo da placa conclui-se que eles são semelhantes. Num dado ponto da placa, x , o perfil de velocidade é uma expressão da velocidade transversal em função da coordenada normal à placa y :

$$u = f(y) \Big|_x \quad (9.4)$$

Adimensionalizando a velocidade u pela velocidade U do escoamento exterior e y pela espessura da camada limite, δ , nesse ponto x , obtém-se:

$$\frac{u}{U} \Big|_x = g\left(\eta = \frac{y}{\delta}\right) \Big|_x \quad (9.5)$$

Ao adimensionalizar os perfis ao longo de x obtêm-se perfis sobrepostos, i.e., perfis idênticos, o que significa que há similaridade dos perfis ao longo do comprimento da placa. Assim, é possível uma só curva para representar todos os perfis ao longo da camada limite laminar. O próximo passo é conhecer a função $g(\eta = y/\delta)$. Blasius analisando os termos da equação diferencial de quantidade de movimento concluiu que:

$$\frac{u}{U} = g\left[\eta = \left(\frac{U}{\nu x}\right)^{\frac{1}{2}} y\right] \quad (9.6)$$

e determinou a funcionalidade $g(\eta)$ apresentando os resultados em forma de tabela (solução de Blasius).

Tabela 9.1 Escoamento laminar ao longo de uma placa plana (solução de Blasius)

$\eta = \left(\frac{U}{\nu x}\right)^{\frac{1}{2}} y$	$\frac{u}{U}$	$\eta = \left(\frac{U}{\nu x}\right)^{\frac{1}{2}} y$	$\frac{u}{U}$
0	0	3,6	0,9233
0,4	0,1328	4,0	0,9555
0,8	0,2647	4,4	0,9759
1,2	0,3938	4,8	0,9878
1,6	0,5168	5,0	0,9916
2,0	0,6298	5,2	0,9943
2,4	0,7290	5,6	0,9975
2,8	0,8115	6,0	0,9990
3,2	0,8761		1,0000

Como se pode ver na tabela, a velocidade no interior da camada limite atinge 99% da velocidade do escoamento exterior para um valor de $\eta=5$. Assim, segundo Blasius, o valor da espessura da camada limite pode ser calculado pela seguinte equação:

$$\delta = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad (9.7)$$

ou

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (9.8)$$

Com o conhecimento do perfil de velocidade é possível (Blasius apresentou igualmente em tabela a 1ª e a 2ª derivada de $g(\eta)$) determinar a tensão de corte na parede:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0,332 U^{3/2} \sqrt{\frac{\rho \mu}{x}} \quad (9.9)$$

É de salientar que num escoamento laminar desenvolvido a tensão de corte na parede é proporcional a U , enquanto que na camada limite laminar em desenvolvimento é proporcional $U^{3/2}$.

Para um prato plano de comprimento l e largura b , a força de atrito exercida pelo fluido em escoamento, \mathcal{D}_f , é dada pela integração da tensão de corte ao longo do comprimento do prato.

$$\mathcal{D}_f = b \int_0^l \tau_w dx \quad (9.10)$$

Esta força de atrito ao longo do prato é geralmente expressa pelo coeficiente de arrasto induzido pelo atrito C_{Df} . Segundo Blasius este coeficiente é dado por:

$$C_{Df} = \frac{\mathcal{D}_f}{\frac{1}{2} \rho U^2 b l} = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}_l}} \quad (9.11)$$

9.3 Forças de arrasto e de sustentação sobre um objecto imerso

9.3.1 Introdução

Quando um objecto está imerso num fluido em escoamento vão-se exercer dois tipos de forças sobre a superfície do objecto: forças de corte e forças de pressão. Na maioria dos casos estas forças variam sobre a superfície, forças distribuídas, sendo por isso necessário referenciá-las à unidade de área, tensões de corte e pressão. Ao integrar estas tensões ao longo de toda a superfície do objecto, obtém-se a força resultante da acção do fluido em escoamento sobre o objecto. Na maioria dos casos, esta força resultante provoca o deslocamento do objecto. À componente responsável pelo deslocamento do objecto ao longo da

direcção do escoamento, chama-se força de arrasto, \mathcal{D} , enquanto que à componente responsável pelo deslocamento do objecto na direcção normal ao escoamento chama-se força de sustentação, L .

9.3.2 Forças de arrasto e sustentação.

Considere-se um elemento infinitesimal de área δA , colocado numa posição oblíqua relativamente à direcção de escoamento.

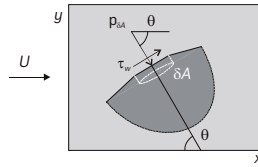


Figura 9.2 Forças que se exercem num elemento infinitesimal de área δA

As componentes segundo as direcções x e y da força que o fluido em escoamento exerce sobre o elemento de área infinitesimal, são dadas por:

$$\delta F_x = (p\delta A)\cos\theta + (\tau_w\delta A)\sin\theta \quad (9.12)$$

$$\delta F_y = -(p\delta A)\sin\theta + (\tau_w\delta A)\cos\theta \quad (9.13)$$

As forças de arrasto e de sustentação sobre o objecto são dadas pela integração, sobre toda a superfície, das forças elementares definidas nas duas equações anteriores.

$$\mathcal{D} = \int dF_x = \int p \cos\theta dA + \int \tau_w \sin\theta dA \quad (9.14)$$

$$L = \int dF_y = -\int p \sin\theta dA + \int \tau_w \cos\theta dA \quad (9.15)$$

Para levar a cabo as integrações necessárias para calcular a força de arrasto e de sustentação sobre o objecto é necessário não só conhecer a forma do objecto, i.e. θ para cada posição (x, y) , como também conhecer as distribuições de p e de τ_w ao longo da superfície do objecto. No caso de um prato plano colocado paralelamente à direcção de escoamento, $\theta = 90^\circ$, só a tensão de corte na parede contribui para a força de arrasto, e só a pressão contribui para a força de sustentação.

O conhecimento das distribuições de pressão e tensão de corte sobre a superfície de um objecto é em muitos casos difícil. Assim, uma alternativa é definir coeficientes adimensionais, e aplicar técnicas experimentais ou numéricas para conhecer os valores destes coeficientes para cada geometria.

O coeficiente de arrasto é definido por:

$$C_D = \frac{\mathcal{D}}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} \quad (9.16)$$

e o coeficiente de sustentação por:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} \quad (9.17)$$

em que A representa a área do objecto projectada num plano normal à direcção do escoamento.

9.3.3 Coeficiente de arrasto em função do número de Reynolds

O coeficiente de arrasto para um dado objecto vai depender do número de Reynolds, já que, a camada limite onde se exercem as tensões de corte vai depender deste parâmetro adimensional. A funcionalidade entre o coeficiente de arrasto e o número de Reynolds pode ser dividida em três categorias de acordo com o regime de escoamento na camada limite: (1) números de Reynolds muito baixos; (2) números de Reynolds moderados (camada limite laminar); (3) números de Reynolds elevados (camada limite turbulenta).

- *Números de Reynolds muito baixos ($Re < 1$)*

Para números de Reynolds muito baixos o escoamento é dependente do balanço entre as forças de pressão e as forças viscosas. Os efeitos da força de inércia são desprezáveis e a força de arrasto é função das seguintes variáveis:

$$\mathcal{D} = f(U, l, \mu) \quad (9.18)$$

em que l é a dimensão característica do objecto.

Aplicando os conhecimentos de análise dimensional é fácil concluir que:

$$\mathcal{D} = C_\mu l U \quad (9.19)$$

onde C é uma constante que depende da forma do objecto.

O valor do coeficiente de arrasto é então dado por:

$$C_D = \frac{\mathcal{D}}{\frac{1}{2}\rho U^2 l^2} = \frac{2C_\mu l U}{\rho U^2 l^2} = \frac{2C}{\text{Re}} \quad (9.20)$$

em que o número de Reynolds é definido como $\text{Re} = \frac{\rho U l}{\mu}$.

No caso de uma esfera o valor de C é 12 e a área projectada num plano normal ao escoamento é $A = \pi D^2/4$, resultando:

$$C_{D|esfera} = \frac{24}{\text{Re}} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = 3\pi U \mu D \quad (9.21)$$

- *Números de Reynolds moderados*

Para valores moderados do número de Reynolds, o escoamento na camada limite é laminar, e tal como se concluiu para uma placa plana, o coeficiente de arrasto devido ao atrito tende a diminuir moderadamente quando se aumenta o número de Reynolds. A equação 9.11 mostra que para uma placa plana, $C_D \approx \text{Re}^{-1/2}$. Para objectos com variações de forma não suaves, tais como esferas e cilindros, o valor de C_D é muito próximo de constante, na gama $10^3 < \text{Re}_D < 10^5$ (ver figura seguinte).

- *Números de Reynolds elevados*

Em regime turbulento o comportamento depende muito da forma do objecto. A contribuição da força de corte na parede, faz a força de arrasto aumentar. Contudo, quando a variação da forma do objecto não é suave, na transição, pode haver um decréscimo súbito da contribuição da força de pressão para a força de arrasto. Esta diminuição tem a ver com alterações da pressão nas zonas de fluido em recirculação. Do balanço entre a diminuição da parcela respeitante à força de pressão e o aumento respeitante à força de corte, observa-se, como no caso da esfera e do cilindro, um decréscimo no coeficiente de arrasto quando se inicia a transição (ver figura seguinte).

Na figura seguinte estão representados os valores do coeficiente de arrasto para uma esfera e para um cilindro com superfícies lisas (não-rugosas).

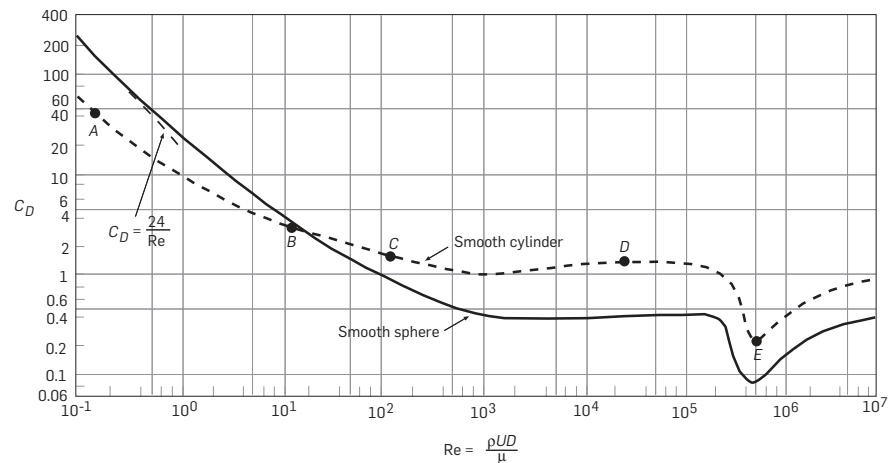


Figura 9.3 Coeficiente de arrasto para uma esfera e para um cilindro em função do número de Reynolds. (Gráfico retirado do Munson, Young e Okiishi)

9.4 Força de arrasto e velocidade terminal

De seguida são dados dois exemplos sobre o cálculo da velocidade terminal de uma esfera, que já foram abordados no capítulo 6.

Exemplo 9.1

Pequenos grãos esféricos de pólen de diâmetro 0,04 mm e massa volúmica 800 kg/m³ caem do topo de um pinheiro com 20 m de altura. Se houver uma brisa de ar na direcção horizontal com intensidade 1 m/s, determine a que distância da árvore o grão cai. Assuma que a velocidade horizontal do grão é igual à do ar.

Solução

As forças verticais que se exercem no grão durante a queda são: o seu peso, W , a impulsão I e a força de arrasto exercida pelo ar sobre o grão \mathcal{D} .

Durante os instantes iniciais da queda, a velocidade relativa do grão (referencial à velocidade do ar) aumenta rapidamente, aumentando \mathcal{D} . Após estes instantes o somatório das componentes verticais das forças anula-se e os grãos entram em queda livre com velocidade uniforme, a chamada velocidade terminal.

$$W - I = \mathcal{D}$$

O peso de cada grão é dado respectivamente por:

$$W = \rho_p g \pi D^3 / 6$$

$$I = \rho_{ar} g \pi D^3 / 6$$

A força de arrasto é função de Reynolds tal como foi demonstrado pela análise dimensional:

$$\frac{D}{\frac{1}{2}\rho_{ar}v^2\pi\frac{D^2}{4}} = C_D = \phi\left(\frac{\rho_{ar}vD}{\mu_{ar}}\right)$$

em que v representa a componente vertical da velocidade relativa entre o grão e o ar. Neste exemplo, assume-se que a velocidade do ar não tem componente vertical, pelo que v representa a velocidade da queda do grão de pólen.

Como se pode ver na figura, no caso de $Re < 1$ (pelo facto do diâmetro das partículas ser muito reduzido, é provável que o valor de Re seja inferior a 1, mas esta hipótese tem que ser confirmada), o valor do coeficiente de arrasto é dado por:

$$C_D = \frac{24}{Re}$$

pelo que:

$$D = \frac{1}{2}\rho_{ar}v^2\pi\frac{D^2}{4}C_D = \frac{1}{2}\rho_{ar}v^2\pi\frac{24D^2}{4}\frac{\mu_{ar}}{\rho_{ar}vD} = 3\pi\mu_{ar}vD$$

Estabelecendo o balanço de forças e resolvendo em ordem a v resulta:

$$v = \frac{(\rho_p - \rho_{ar})gD^2}{18\mu_{ar}}$$

A 1 atm e 20 °C, $\mu = 1,79 \times 10^{-5}$ Ns/m² e $\rho_{ar} = 1,23$ kg/m³. Calculando o número de Reynolds obtém-se, $Re = 0,107 < 1$.

Conhecida a velocidade de descida do grão de pólen, calcula-se o tempo que ele demora a percorrer os 20 m que separam o topo do pinheiro do solo, bem como a distância percorrida na horizontal durante a queda

$$t = \frac{h}{v} \rightarrow d = tv_{ar} = \frac{hv_{ar}}{v} = 514 \text{ m}$$

em que v_{ar} , representa a componente horizontal da velocidade do ar.

Exemplo 9.2

Uma pequena gota de água esférica com 0,1 mm de diâmetro está na atmosfera a uma altura de 1500 m. Será que a gota sobe ou desce se o vento soprar na direcção vertical (para cima) a uma velocidade de 1,5 m/s? E no caso da velocidade do vento ser 0,1 m/s?

Solução

Supõem-se, tal como no exemplo anterior, que o tamanho da gota é suficientemente pequeno pelo que $Re < 1$. Aproveitando o resultado do problema anterior:

$$v = \frac{(\rho_p - \rho_{ar})gD^2}{18\mu_{ar}}$$

em que v representa a velocidade relativa entre a gota e o ar.

Supondo que a 1500 m as condições de pressão e temperatura são 1 atm e 20 °C ($\rho_{ar} = 1,23$ kg/m³ e $\mu = 1,79 \times 10^{-5}$ Ns/m²), calcula-se a velocidade, $v = 0,3$ m/s.

Por definição de velocidade relativa:

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_{ar} - \vec{v}_g$$

em que a velocidade \vec{v}_{rel} representa a velocidade "vista" por um observador que se move à velocidade do ar e \vec{v}_g, \vec{v}_{ar} por observadores estacionários.

Se a gota e o ar se deslocarem em sentidos contrários o valor absoluto da velocidade relativa tem de ser maior que o valor absoluto da velocidade do ar. No caso de se deslocarem no mesmo sentido, o valor absoluto da velocidade relativa tem de ser menor que o valor absoluto da velocidade do ar. Assim, no caso do vento ter uma velocidade de 1,5 m/s, a gota desloca-se para cima a uma velocidade de 1,2 m/s. No caso de o vento ter uma velocidade de 0,1 m/s, a gota desloca-se para baixo a uma velocidade 0,2 m/s.

9.5 Valores típicos do coeficiente de arrasto para sistemas a duas e três dimensões

Um dos objectivos de quem projecta automóveis, aviões, pontes e muitas outras estruturas é de reduzir o valor do coeficiente de arrasto. Para isso fazem-se testes em modelos ou à escala em túneis de vento e túneis de água, para determinar a forma dos objectos para a qual a força de arrasto é mínima.

As tabelas seguintes mostram valores de coeficiente de arrasto para vários objectos bi-dimensionais e tri-dimensionais.

Tabela de coeficientes de arrasto para objectos bi-dimensionais (Munson, Young e Okiishi)










Shape	Reference area A (b = length)	Drag coefficient $C_D = \frac{F_D}{\frac{\rho}{2} U^2 A}$	Reynolds number $Re = \rho U D / \mu$														
 <p>Square rod with rounded corners</p>	$A = bD$	<table> <tr> <th>R/D</th><th>C_D</th></tr> <tr><td>0</td><td>2.2</td></tr> <tr><td>0.02</td><td>2.0</td></tr> <tr><td>0.17</td><td>1.2</td></tr> <tr><td>0.33</td><td>1.0</td></tr> </table>	R/D	C_D	0	2.2	0.02	2.0	0.17	1.2	0.33	1.0	$Re = 10^5$				
R/D	C_D																
0	2.2																
0.02	2.0																
0.17	1.2																
0.33	1.0																
 <p>Rounded equilateral triangle</p>	$A = bD$	<table> <tr> <th>R/D</th><th>C_D</th></tr> <tr><td>0</td><td>1.4</td></tr> <tr><td>0.02</td><td>1.2</td></tr> <tr><td>0.08</td><td>1.3</td></tr> <tr><td>0.25</td><td>1.1</td></tr> </table>	R/D	C_D	0	1.4	0.02	1.2	0.08	1.3	0.25	1.1	$Re = 10^5$				
R/D	C_D																
0	1.4																
0.02	1.2																
0.08	1.3																
0.25	1.1																
 <p>Semicircular shell</p>	$A = bD$	<table> <tr> <th>C_D</th></tr> <tr><td>2.3</td></tr> <tr><td>1.1</td></tr> </table>	C_D	2.3	1.1	$Re = 2 \times 10^4$											
C_D																	
2.3																	
1.1																	
 <p>Semicircular cylinder</p>	$A = bD$	<table> <tr> <th>C_D</th></tr> <tr><td>2.15</td></tr> <tr><td>1.15</td></tr> </table>	C_D	2.15	1.15	$Re > 10^4$											
C_D																	
2.15																	
1.15																	
 <p>T-beam</p>	$A = bD$	<table> <tr> <th>C_D</th></tr> <tr><td>1.80</td></tr> <tr><td>1.65</td></tr> </table>	C_D	1.80	1.65	$Re > 10^4$											
C_D																	
1.80																	
1.65																	
 <p>I-beam</p>	$A = bD$	2.05	$Re > 10^4$														
 <p>Angle</p>	$A = bD$	<table> <tr> <th>C_D</th></tr> <tr><td>1.98</td></tr> <tr><td>1.82</td></tr> </table>	C_D	1.98	1.82	$Re > 10^4$											
C_D																	
1.98																	
1.82																	
 <p>Hexagon</p>	$A = bD$	1.0	$Re > 10^4$														
 <p>Rectangle</p>	$A = bD$	<table> <tr> <th>l/D</th><th>C_D</th></tr> <tr><td>≤ 0.1</td><td>1.9</td></tr> <tr><td>0.5</td><td>2.5</td></tr> <tr><td>0.65</td><td>2.9</td></tr> <tr><td>1.0</td><td>2.2</td></tr> <tr><td>2.0</td><td>1.6</td></tr> <tr><td>3.0</td><td>1.3</td></tr> </table>	l/D	C_D	≤ 0.1	1.9	0.5	2.5	0.65	2.9	1.0	2.2	2.0	1.6	3.0	1.3	$Re = 10^5$
l/D	C_D																
≤ 0.1	1.9																
0.5	2.5																
0.65	2.9																
1.0	2.2																
2.0	1.6																
3.0	1.3																

Tabela de coeficientes de arrasto para objectos tri-dimensionais (Munson, Young e Okiishi)






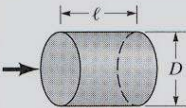
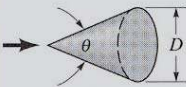
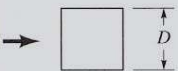
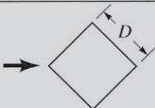
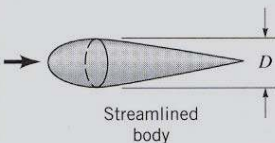

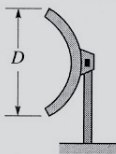

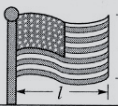












Shape	Reference area A	Drag coefficient C_D	Reynolds number $Re = \rho U D / \mu$										
 Solid hemisphere D	$A = \frac{\pi}{4} D^2$	 1.17 0.42	$Re > 10^4$										
 Hollow hemisphere D	$A = \frac{\pi}{4} D^2$	 1.42 0.38	$Re > 10^4$										
 Thin disk D	$A = \frac{\pi}{4} D^2$	1.1	$Re > 10^3$										
 Circular rod parallel to flow ℓ D	$A = \frac{\pi}{4} D^2$	<table><tr><th>ℓ/D</th><th>C_D</th></tr><tr><td>0.5</td><td>1.1</td></tr><tr><td>1.0</td><td>0.93</td></tr><tr><td>2.0</td><td>0.83</td></tr><tr><td>4.0</td><td>0.85</td></tr></table>	ℓ/D	C_D	0.5	1.1	1.0	0.93	2.0	0.83	4.0	0.85	$Re > 10^5$
ℓ/D	C_D												
0.5	1.1												
1.0	0.93												
2.0	0.83												
4.0	0.85												
 Cone θ D	$A = \frac{\pi}{4} D^2$	<table><tr><th>θ, degrees</th><th>C_D</th></tr><tr><td>10</td><td>0.30</td></tr><tr><td>30</td><td>0.55</td></tr><tr><td>60</td><td>0.80</td></tr><tr><td>90</td><td>1.15</td></tr></table>	θ , degrees	C_D	10	0.30	30	0.55	60	0.80	90	1.15	$Re > 10^4$
θ , degrees	C_D												
10	0.30												
30	0.55												
60	0.80												
90	1.15												
 Cube D	$A = D^2$	1.05	$Re > 10^4$										
 Cube D	$A = D^2$	0.80	$Re > 10^4$										
 Streamlined body D	$A = \frac{\pi}{4} D^2$	0.04	$Re > 10^5$										

Tabela de coeficientes de arrasto para diferentes objectos (Munson, Young e Okiishi)

Shape	Reference area	Drag coefficient C_D												
 Parachute	Frontal area $A = \frac{\pi}{4} D^2$	1.4												
 Porous parabolic dish	Frontal area $A = \frac{\pi}{4} D^2$	<table><tr><td>Porosity</td><td>0</td><td>0.2</td><td>0.5</td></tr><tr><td>→</td><td>1.42</td><td>1.20</td><td>0.82</td></tr><tr><td>←</td><td>0.95</td><td>0.90</td><td>0.80</td></tr></table> Porosity = open area/total area	Porosity	0	0.2	0.5	→	1.42	1.20	0.82	←	0.95	0.90	0.80
Porosity	0	0.2	0.5											
→	1.42	1.20	0.82											
←	0.95	0.90	0.80											
 Average person	Standing Sitting Crouching	$C_D A = 9 \text{ ft}^2$ $C_D A = 6 \text{ ft}^2$ $C_D A = 2.5 \text{ ft}^2$												
 Fluttering flag	$A = \ell D$	<table><tr><td>ℓ/D</td><td>C_D</td></tr><tr><td>1</td><td>0.07</td></tr><tr><td>2</td><td>0.12</td></tr><tr><td>3</td><td>0.15</td></tr></table>	ℓ/D	C_D	1	0.07	2	0.12	3	0.15				
ℓ/D	C_D													
1	0.07													
2	0.12													
3	0.15													
 Empire State Building	Frontal area	1.4												
 Six-car passenger train	Frontal area	1.8												
Bikes														
 Upright commuter	$A = 5.5 \text{ ft}^2$	1.1												
 Racing	$A = 3.9 \text{ ft}^2$	0.88												
 Drafting	$A = 3.9 \text{ ft}^2$	0.50												
 Streamlined	$A = 5.0 \text{ ft}^2$	0.12												
Tractor-trailer trucks														
 Standard	Frontal area	0.96												
 With fairing	Frontal area	0.76												
 With fairing and gap seal	Frontal area	0.70												
 Tree	$U = 10 \text{ m/s}$ $U = 20 \text{ m/s}$ $U = 30 \text{ m/s}$	0.43 0.26 0.20												
 Dolphin	Wetted area	0.0036 at $Re = 6 \times 10^6$ (flat plate has $C_{Df} = 0.0031$)												
 Large birds	Frontal area	0.40												

