Mathematik - Unterichtsmitschriften

Timm Albers

19.06.2014 - 10.07-2014

Matrizen

431/2

19.06.2014

a)

M mit $MA = A$, $AM = A$.

b)

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$AE_m = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = A$$

$$E_nA = A \quad \text{(wie oben)}$$

431/3

19.06.2014

a)

$$AB = BA = E_3 \quad \text{A und B sind zueinander invers}$$

Nebenbetrachtung

Addition

$$a + (-a) = 0 \quad \text{a und (-a) sind zueinander invers; 0 ist das neutrale Element}$$

Multiplikation

$$a\frac{1}{a} = 1 \quad \text{a und (1/a) sind zueinander invers; 1 ist das neutrale Element}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B \text{ gesucht mit } AB = E_2$$

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$AB = E_2$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2a + c & 2b + d \\ -a - c & -b - d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2a + c = 1$$

$$2b + d = 0$$

$$-a - c = 0$$

$$-b - d = 1$$

=> lösen (z.B. Additionsverfahren)

Abbildungen mit Matrizen

19.06.2014

Skizze

$$f(x) = x \quad \text{(Identität)}$$

$$y = x$$

$$\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} (1 \\ 1) \end{pmatrix}$$

$$d = d'$$

$$P(3|1)$$
$$P'(1|3)$$
$$Q(x_1|y_1)$$
$$Q'(y_1|x_1)$$

Skizze

$$g : \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{(Ursprungsgerade)}$$
$$P(4|3)$$
$$P'(0|5)$$

$$P(p_1|p_2)$$
$$g : \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$
$$\text{Lotgerade (duch P und P } \perp \text{ g)}$$
$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = 0$$
$$r_1 l_1 + r_2 l_2 = 0$$

z.B.

$$l_1 = r_2$$
$$l_2 = -r_1$$
$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 \\ -r_1 \end{pmatrix} = 0$$
$$(\begin{pmatrix} r_2 \\ -r_1 \end{pmatrix} \quad \text{Richtungsvektor für l)}$$
$$l : \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} r_2 \\ -r_1 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt F berechnen durch Gleichsetzen

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} r_2 \\ -r_1 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_1 = \frac{p_1 r_1 + p_2 r_2}{r_1^2 + 2_2^2}$$

$$\lambda_2 = \frac{p_2 r_1 - p_1 r_2}{r_1^2 + r_2^2}$$

$$\vec{OP'} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + 2\lambda_2 \begin{pmatrix} r_2 \\ -r_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP'} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + 2\frac{p_2 r_1 - p_1 r_2}{r_1^2 + r_2^2} \begin{pmatrix} r_2 \\ -r_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP'} = \frac{1}{r_1^2 + r_2^2} \begin{pmatrix} (r_1^2 - r_2^2) p_1 + 2 r_1 r_2 p_2 \\ 2 r_1 r_2 p_1 + (r_2^2 - r_1^2) p_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP'} = \frac{1}{r_1^2 + r_2^2} \begin{pmatrix} r_1^2 - r_2^2 & 2 r_1 r_2 \\ 2 r_1 r_2 & r_2^2 - r_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$\left(\frac{1}{r_1^2 + r_2^2} \begin{pmatrix} r_1^2 - r_2^2 & 2 r_1 r_2 \\ 2 r_1 r_2 & r_2^2 - r_1^2 \end{pmatrix}\right)$ (Transformationsmatrix für eine Spiegelung an $\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$)

HA: Rechnung mit allen Zwischenschritten rechnen!

435/3

02.07.2014

a)

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP'} = ? \quad \text{gedreht um 90 Grad}$$

$$M = ?$$

$$M * \vec{OP} = \vec{OP'}$$

$$\vec{OP'} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$M_{90} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x} & 0 \\ 0 & \frac{x}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{OP''} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \quad \text{gedreht um 180 Grad}$$

$$M_{180} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\vec{OP'''} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \quad \text{gedreht um 270 Grad}$$

$$M_{180} = \begin{pmatrix} \frac{y}{x} & 0 \\ 0 & -\frac{x}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

435/4

02.07.2014

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$M * \vec{OP} = \vec{OP'}$$

$$x = r\cos\alpha$$

$$y = r\sin\alpha$$

$$\vec{OP'} = \begin{pmatrix} r(\cos\alpha + \varphi) \\ r(\sin\alpha + \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi) \\ r(\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi) \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{r(\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi)}{r\cos\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{r(\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi)}{r\sin\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r(\cos\alpha+\varphi)}{r\cos\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{r(\sin\alpha+\varphi)}{r\sin\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{x}{y}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{x^2+y^2}\cos(\tan^{-1}\frac{x}{y}+\varphi)}{\sqrt{x^2+y^2}-\cos(\tan^{-1}\frac{x}{y})} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sin(\tan^{-1}\frac{x}{y}+\varphi)}{\sqrt{x^2+y^2}-\sin(\tan^{-1}\frac{x}{y})} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\cos(\tan^{-1}\frac{x}{y}+\varphi)}{\cos(\tan^{-1}\frac{x}{y})} & 0 \\ 0 & \frac{\sin(\tan^{-1}\frac{x}{y}+\varphi)}{\sin(\tan^{-1}\frac{x}{y})} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\cos(\tan^{-1}\frac{x}{y})\cos\varphi - \sin(\tan^{-1}\frac{x}{y})\sin\varphi}{\cos(\tan^{-1}\frac{x}{y})} & 0 \\ 0 & \frac{\sin(\tan^{-1}\frac{x}{y})\cos\varphi - \cos(\tan^{-1}\frac{x}{y})\sin\varphi}{\sin(\tan^{-1}\frac{x}{y})} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \cos\varphi - \frac{\sin(\tan^{-1}\frac{x}{y})\sin\varphi}{\cos(\tan^{-1}\frac{x}{y})} & 0 \\ 0 & \cos\varphi - \frac{\cos(\tan^{-1}\frac{x}{y})\sin\varphi}{\sin(\tan^{-1}\frac{x}{y})} \end{pmatrix}$$

Neuer Ansatz

$$M = \begin{pmatrix} \frac{r\cos\alpha\cos\varphi - r\sin\alpha\sin\varphi}{r\cos\alpha} & 0 \\ 0 & ... \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{r\cos\alpha\cos\varphi - r\sin\alpha\sin\varphi}{rx} & 0 \\ 0 & ... \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{x\cos\varphi - y\sin\varphi}{rx} & 0 \\ 0 & \frac{x\sin\varphi - y\cos\varphi}{ry} \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP'} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Integralrechnung

Aufgabe

08.07.2014

Bestimmen Sie den Flächeninhalt zwischen 0 und 1 zwischen

$$f(x) = x^2$$

und der x-Achse näherungsweise.

(Untersumme)

$$a = 0 \quad \text{Start}$$
$$b = 1 \quad \text{Ende}$$
$$f(x) = x^2 \quad \text{Funktion}$$
$$n = 10 \quad \text{Anzahl der Rechtecke}$$
$$h = \frac{b-a}{n}$$
$$A = hf(0) + hf(h) + hf(2h) + ... + hf((n-1)h)$$
$$A = h(f(0) + f(h) + f(2h) + ... + f((n-1)h))$$
$$A = (\sum_{i=0}^{n=1} f(ih))h$$

Bestimmtes Integral

$$\lim_{n \to \infty} (\sum_{i=0}^{n=1} f(ih)) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

gesprochen: Integral von a bis b über f(x) dx

Vergleich mit dem Differentialquotienten

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{Grenzwert des Differenzenquotienten}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h}$$
$$= \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \quad \text{Differentialquotient (gesprochen d f von x nach dx)}$$

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Ist die Funktion f stetig, so ist die Integralfunktion Ia mit

$$I_a(x) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

differenzierbar und die Ableitung ist gleich der Integralfunktion f:

$$I'_a(x) = f(x)$$

09.07.2014

$$I_a(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$
$$I'_a(x) = \frac{\mathrm{d}I_a(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

Beweis

Tafelbild

$$I'_a(x) = \lim_{h\to 0} \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z)h}{h} = \lim_{h\to 0} f(z) = f(x) \quad \text{q.e.d.}$$

grobe Näherung für

$$\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t \quad \text{ist} \quad f(z)h$$

mit

$$x \le z \le x+h$$

wobei für h gegen 0 dann z gegen x läuft und f(z) gegen f(x).
(siehe Tafelbild)

Aufgabe 224/2

Tafelbild

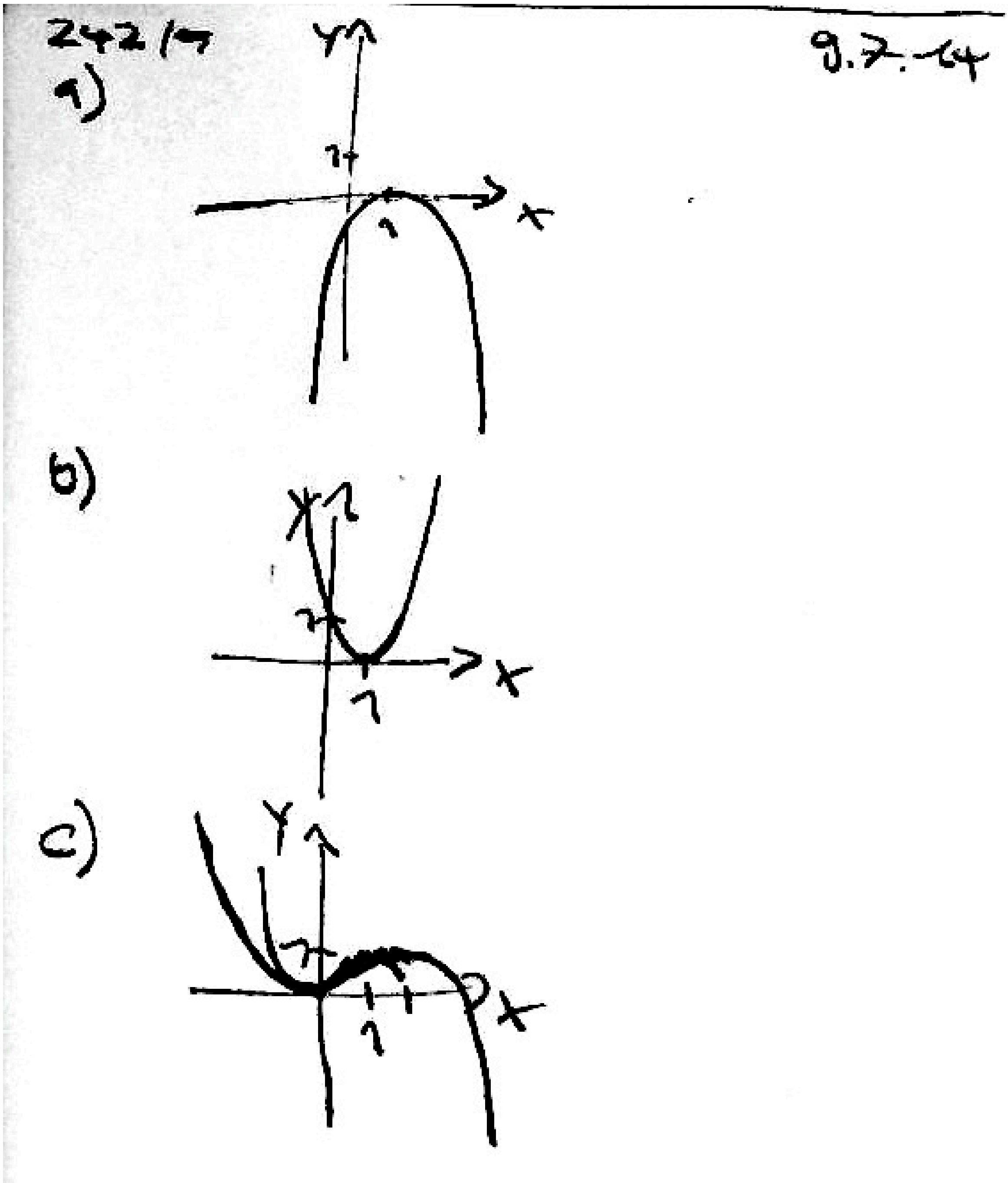

Figure 1: Tafelbild

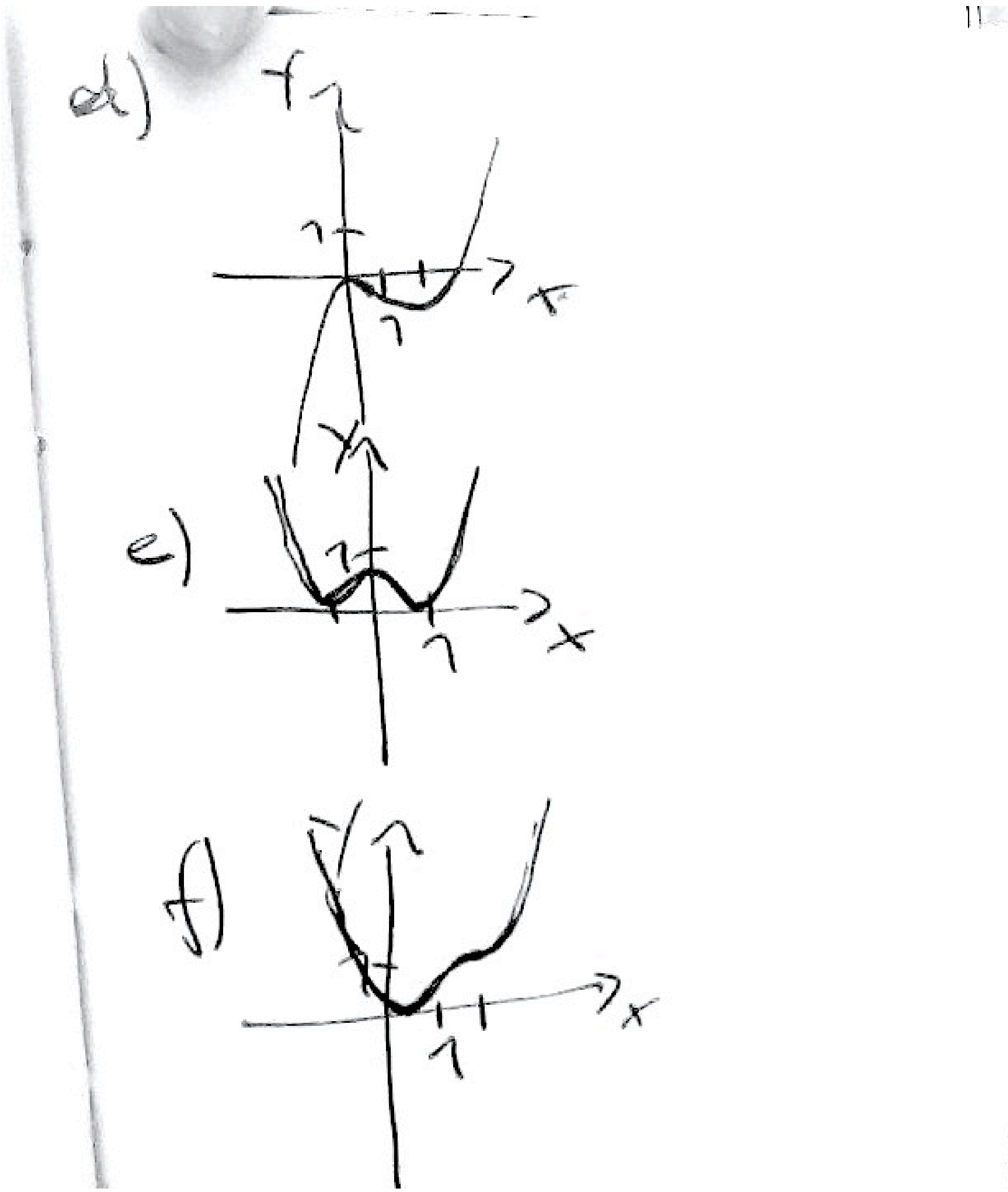

Figure 2: Tafelbild

Aufgabe 242/5

Stammfunktion

10.07.2014

Definition

Die Integralfunktion

$$I_0(x)$$

zur Integrantenfunktion

$$f(x)$$

wird eine *Stammfunktion* genannt.

Notation

F(x) Stammfunktion zu *f(x)* (d.h. *F'(x) = f(x)*)

Zusatz

$$F(x) = I_0(x) + c$$

(c = Integrationskonstante)
weil konstante Summanden beim Ableiten wegfallen:

$$F'(x) = I_0'(x)$$

Aufgabe 242/6

a)

$$f(t) = 2t - 4$$
$$I_0(t) = t^2 - 4t$$

b)

$$f(t) = 60t + 200$$
$$I_0(t) = 30t^2 + 200t$$

c)

$$f(t) = 3t^2$$
$$I_0(t) = t^3$$

d)

$$f(t) = 4t^3$$
$$I_0(t) = t^4$$

Aufgabe

Bestimmen Sie

$$A = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \quad \text{mit } f(x) = x^3 - x$$
$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + c$$
$$A = \int_{-1}^{1} x^3 - x\mathrm{d}x$$
$$A = [\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + c]_{-1}^{1} \quad \text{(Schreibweise für Bereich)}$$
$$A = \frac{1}{4}1^4 - \frac{1}{2}1^2 + c - (\frac{1}{4}(-1)^4 - \frac{1}{2}(-1)^2 + c)$$
$$A = 0$$

Begriff: orientierter Flächeninhalt (positiv wie negativ)

16.07.2014

17.07.2014

Klausurbesprechung: Analytische Geometrie / lineare Algebra (26.06.2014)

Aufgabe 1

a)

$$g_p : \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 24 \\ 28 \\ 6 \end{pmatrix}$$

z.Z. g_p und g_w windschief

- weder parallel
- noch Schnittpunkt

Schnittpunkt?

$$g_w : \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gleichsetzen:

$$\text{I} \mid 20 - t = 24\lambda$$

$$\text{II} \mid 20 + 2t = 18\lambda$$

$$\text{III} \mid 5 + t = 6\lambda$$

$$25 = 39\lambda$$

$$\lambda = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

$$\text{in II } 20 + 2t = 18 \cdot \frac{5}{6} = \frac{18 \cdot 5}{6} = 15$$

$$20 + 2t = 15$$

$$2t = -5$$

$$t = -\frac{5ă}{2}$$

$$\text{t und } \lambda \text{ in I } 20 - (-\frac{5}{2}) =?24\frac{5}{6}$$

$$20 + \frac{5}{2} =!\frac{24 \cdot 5}{6} = 20$$

b)

gesucht:

$$E_p \text{ in Koordinatenform}$$

$$E_p : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -30 \\ 66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{6}$$

$$E_p : x_1 - 5x_2 + 11x_3 = \vec{n} \cdot \vec{s_0} = 0$$

Abstand

$$P = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AP} = \begin{pmatrix} -20 \\ -20 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{Vektor von P in die Ebene}$$

$$d = |\vec{AP} \cdot \vec{n_0}|$$

$$d = | \begin{pmatrix} -20 \\ -20 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}}{\sqrt{147}} |$$

$$d \approx 2,06LE$$

Aufgabe 2

a)

(Übergangsdiagramm)

$$M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 \\ 0,3 & 0,9 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = M \cdot v_0$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 \\ 0,3 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 \\ 360 \end{pmatrix}$$

b)

$$v_2 = M \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 204 \\ 396 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = M \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 182,4 \\ 417,6 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 240 \\ 360 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 \\ 360 \end{pmatrix}$$

$$\text{I} \mid 240a + 360b = 240$$

$$\text{II} \mid 240c + 360d = 360$$

$$\text{III} \mid a + c = 1$$

$$\mathrm{IV} \mid b + d = 1$$

$$\mathrm{I} \mid 2a + 3b = 2$$

$$\mathrm{II} \mid 2c + 3d = 3$$

$$\mathrm{III} \mid a + c = 1$$

$$\mathrm{IV} \mid b + d = 1$$

$$a = 1 - c$$

$$b = 1 - d$$

$$2(1 - c) + 3(1 - d) = 2$$

$$2c + 3d = 3$$

$$a = \frac{3d - 1}{2}$$

$$c = \frac{3 - 3d}{2}$$

22.07.2014

Wiederholung vom 10.07.2014

Aufgabe 242/5

Stammfunktion

Aufgabe 242/6

Aufgabe 245/5

Geben Sie eine Stammfunktion zu der gegebenen Funktion an.

a)

$$f(x) = 3x^2$$

$$I_0(x) = x^3$$

b)

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^3$$
$$I_0(x) = -\frac{1}{8}x^4$$

c)

$$h(t) = a^2 \cdot t^2$$
$$I_0(t) = \frac{1}{3}a^2 \cdot t^3$$

d)

$$k(t) = -\sin t$$
$$I_0(t) = \cos t$$

Aufgabe 245/6

Geben Sie eine Stammfunktion an.

a)

$$f(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6$$
$$I_0(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{5}x^5 - \frac{6}{7}x^7$$

b)

$$g(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt{2} \cdot x^2$$
$$I_0(x) = \frac{1}{\frac{2}{3}x^3} + \frac{\sqrt{2}}{3}x^3$$

c)

$$h(a) = k \cdot \sqrt{a}$$
$$h(a) = k \cdot a^{\frac{1}{2}}$$
$$I_0(a) = \frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}$$

d)

$$k(x) = x^{c-1} + 2x^{c-2} - x^c$$
$$I_0(x) = \frac{1}{c}x^c + \frac{2}{c-1}x^{c-1} - \frac{1}{c+1}x^{c+1}$$

e)

$$y_1(x) = 2\sin x - 3\cos x$$
$$I_0(x) = -2cosx - 3\sin x$$

f)

$$p(t) = k \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{1}$$
$$p(t) = k \cdot t \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{1}+1}a^{\sqrt{1}+1}$$

Aufgabe 246/10

22.07.2014

Bestimmtes Integral

Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so ist $\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ das bestimmte Integral über $f(x)$.

Unbestimmtes Integral

Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so ist $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$ das unbestimmte Integral von $f(x)$.

Satz: Faktorregel für Integrale

$$\int_a^b k \cdot f(x)\mathrm{d}x = k \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Satz: Summenregel für Integrale

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Satz: Allgemeine Intervaladditivität

Sei a, b, c beliebig: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$

249/5