у Так корреляционная связь между признаками незначимая;

## Критерий Вилконсона и проверка гипотезы об однородности двух выборок

Критерий Вилкоксона \*1 служит для проверки однородности двух независимых выборок:  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , и  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Достоинство этого критерия состоит в том, он применим к случайным величинам, распределения неизвестны; требуется лишь, чтобы величины воторых неизвестны; были непрерывными.

Если выборки однородны, то считают, что они извлечены из одной и той же генеральной совокупности и, следовательно, имеют одинаковые, причем неизвестные, вепрерывные функции распределения  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$ .

Таким образом, нулевая гипотеза состоит в том, что при всех значениях аргумента (обозначим его через х) функции распределения равны между собой:  $F_1(x) = F_2(x)$ . Конкурирующими являются следующие гипотезы:

 $F_1(x) \neq F_2(x), F_1(x) < F_2(x) \text{ и } F_1(x) > F_2(x).$ 

Заметим, что принятие конкурирующей гипотезы На:  $F_1(x) < F_1(x)$  означает, что X > Y. Действительно, веравенство  $F_1(x) < F_2(x)$  равносильно неравенству P(X < x) < P(Y < x). Отсюда легко получить, что P(X > x) > P(Y > x). Другими словами, вероятность того, что случайная величина Х превзойдет фиксированное мействительное число х, больше, чем вероятность слузайной величине У оказаться большей, чем х; в этом смысле X > Y.

Аналогично, если справедлива конкурирующая гипо-

Tesa  $H_1: F_1(x) > F_2(y)$ , to X < Y.

выборок одинакового объема: в 1947 г. Мани и Уитии обобщили кризерва на выборки различного объема.

Далее предполагается, что объем первой выпуска быторы. Далее предполагается, что остана первов по первов по первов по первов по первор по пе

меньше (не больше) объемя меровать (поменять между так, то выборки можно перенумеровать между так, то выборки можно перенумеровать (поменять между так, то выборки можно перенумеровать между так, то выборки можно перенумеровать (поменять между так, то выборки так, то выстрани так, то выборки так, то выстранительного так, то выстранительного так, то выстранительного так, то выстра так, то высорна нулевой гипотель. А. Проверка нулевой гипотель выборов не превосходит 25. Правила 1. Пля обекх выборов не превосходит 25. Правила 1. Пля превосходит 25. (к) об раноризмента 20 превосходительного превосходи а. Правим выборов не превосходит из Правим 1.  $R_{\rm e}$  побы при заданном уровне значимости  $\alpha=2Q$  привати изулевую гипотезу  $H_{\rm e}:F_{\rm e}(x)=F_{\rm e}(x)$  об однородим при независимых выборок объемов  $n_{\rm e}$  и  $n_{\rm e}(n_{\rm e}< n_{\rm e})$  при холух независимых выборок объемов  $n_{\rm e}$  и  $n_{\rm e}(n_{\rm e}< n_{\rm e})$  при холух рабочи в при холух рабо

укондей гипотезе П, Г, (к) обеих выборок в возрасть.

1) расположить варианты обеих выборок в возрасть. щем порядке, т. е. в виде пряду наблюдаемое значение ряда, и найти в этом ряду наблюдаемое значение в ряда, и найти в отпорядковых номеров вариант ряда, и найти в этом ряду терия W<sub>язбя</sub>—сумму порядковых номеров вариану пер

й выборки; 2) найти по таблице приложения 10 инжики крипа  $(Q; n_*, n_*)$ , где  $Q = \alpha/2$ . ческую точку  $w_{\text{наже вр}}(Q; n_1, n_2)$ , где  $Q = \alpha/2$ ;

кую точку точку по формуле 3) найти верхнюю критическую точку по формуле

$$w_{\text{sepan. sp}} = (n_1 + n_2 + 1) n_1 - w_{\text{same. sp.}}$$

Если W наба < Wники. нр или W наба > Wаеран. пр Нулевую гипотезу отвергают.

нотезу отвергают. Если шинин, кр < W наба < шверан, кр — нет оснований с вергнуть нулевую гипотезу.

Пример 1. При уровие значимости 0,05 проверить нужвую год. тезу об однородности двух выборок объемов  $n_1 = 6$  и  $n_2 = 8$ :

при конкурирующей гипотезе  $H_1: F_1(x) \neq F_2(x)$ .

Решение. Расположим варианты обенх выборок в виде одност варнационного ряда и перенумеруем их:

3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 порядковые номера... 14 15 18 20 22 23 24 25 26 27 28 29 30 варианты . . .

Найдем наблюдаемое значение критерия Вилкоксона-суму порядковых номеров (они набраны курсивом) вариант первой выбория

$$W_{\text{Hads}} = 3 + 7 + 9 + 10 + 12 + 13 = 54.$$

Найдем по таблице приложения 10 нижнюю критическую точку, учитывая, что  $Q = \alpha/2 = 0.05/2 = 0.025$ ,  $n_1 = 6$ ,  $n_2 = 8$ :

Найдем верхнюю критическую точку:

$$w_{\text{верхи. ир}} = (n_1 + n_2 + 1)n_1 - w_{\text{мажн. ир}} = (6 + 8 + 1) \cdot 6 - 29 = 61.$$

Так как 29 < 54 < 61, т. е. шинжи кр < Wинба < шьерки пр нет оснований отвергиуть нулевую гипотезу об однородности высом.

rne HACT

правило 2. При конкурирующей гипотезе  $F_1(x) > F_2(x)$  где  $Q = \alpha$  критическую токуритурующей гипотезе  $A_1(x) > A_2(x)$ повило 2. При можну рирующей гипотезе  $F_1(x) > F_2(x)$  найти по таблице иминию критическую гочку точку точку  $Q: n_1; n_2)$ , где  $Q = \alpha$ . Критическую точку гипотезу. Наба  $Q: \alpha$  жей отвергнуть нулевую гипотезу.

гипотезу.

всли W мобя < W мажи. пр нулевую гипотезу отвергают.

правило 3. При конкурирующей гипотезу отвергают.

правило найти верхнюю критическую критическую W набх < w зерхн. мр — нет оснований отвергнуть

кулевую гипотезу.

верую W наба > W верки. ир — нулевую гипотезу отвергают.

замечание. Если несколько вариант только однов За ки одинаковы, то в общем вариационном ряду им припивариационном ряду ям припк-ствот обычные порядковые номера (совпавщие варианты вумеруют если бы они были различными числами сывый обесли бы они были различными числами), если же совпа-так, как если разных выборок, то всем же совпада, кай разных выборок, то всем же совпарат и тот же порядковый номер, равный среднему арифистическому номеров, которые имели бы эти адриам. азак и тогорые имели бы эти варианты до совпадения.

 Проверка нулевой гипотезы в случае, если объем тотя бы одной из выборок превосходит 25. 1. При конкуопружидей гипотезе  $F_1(x) \neq F_2(x)$  нижняя критическая

тие  $Q=\alpha/2$ ;  $z_{\rm kp}$  находят по таблице функции Лапласа то равенству  $\Phi(z_{\rm kp})=(1-\alpha)/2$ ; знак [a] означает целую часть числа а.

В остальном правило 1, приведенное в п. А, сохра-

2. При конкурирующих гипотезах  $F_1(x) > F_2(x)$  и PROTOS. (x) < F, (x) нижнюю критическую точку находят по оркуле (\*), положив  $Q = \alpha$ ; соответственно  $z_{\rm sp}$  находят  $\Phi(z_{\rm re}) = 0$  $Q = \alpha$ ; соответственно  $Q = \alpha$ ; соответственно  $Q = \alpha$ ; соответственно  $Q = \alpha$ ; приведенные (1-2а)/2. В остальном правила 2-3, приведенные 1 п. А. сохраняются.

и О.О. проверить нулевую гипо-20 и п. = 50 при конвыборки H STO HE естами) и объем JA TOTO овернть ти двух конку.

растаю. ОТОНН ве кри. г пер-

критиуле

левую M OT-

гипо-

ДНОГО

13 14 29 30 у поорки:

очку,

правило 2. При конкурирующей гипотезе  $F_1(x) > F_1(x)$  найти по таблице нижнюю критическую  $F_1(x)$ правило 2. При по таблице нижнюю потезе  $F_1(x) > F_2(x)$  найти по таблице нижнюю критическую точку почку почку почку почку привати по гасмище нижнюю критическую  $F_{*}(x) > F_{*}(x)$  най и Q;  $n_{1}$ ;  $n_{2}$ ), где  $Q = \alpha$ . Критическую точку точку потезу.

гипотезу.

БСЛИ W набл < шинжи. кр — нулевую гипотезу отвергают.

правило 3. При конкурирующей гипотезе Н 1: F1(x) < правило в найти верхнюю гипотезе  $H_1:F_1(x) < F_2(x)$  ( $Q; n_1, n_2$ ) =  $(n_1 + n_2 + 1) n_1 - w_{\text{ниже во (<math>Q: Toq_{XY}: Toq_{XY}:$  $Z_{\rm F_8}(x)$  (Q;  $n_1$ ,  $n_2$ ) =  $(n_1 + n_2 + 1) n_1$  критическую точку:  $Q = \alpha$ .  $W_{\rm набл} < w_{\rm верхн. кр}$  нет основания (Q;  $n_1$ ,  $n_2$ ),  $W_{\text{набл}} < w_{\text{верхи. кр}} -$  нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. верхи W набя > W верхи. кр — нулевую гипотезу отвергают.

замечание. Если несколько вариант только однов заме одинаковы, то в общем вариант только однов ворки обычные порядковые номера (совпавшие вариант) выборки обычные порядковые номера (совпавшие варианты нумеруют сывают обы они были различными числами); если же совпатак. варианты разных выборок, то всем им присванвают по не порядковый номер, равный среднему арифметическому один и ковых номеров, которые имели бы эти варианты по один и тот же номеров, которые имели бы эти варианты до совпадения.

**Б.** Проверка нулевой гипотезы в случае, если объем тотя бы одной из выборок превосходит 25. 1. При конкурирующей гипотезе  $F_1(x) \neq F_2(x)$  нижняя критическая

гле  $Q = \alpha/2$ ;  $z_{\rm кр}$  находят по таблице функции Лапласа по равенству  $\Phi(z_{\rm kp}) = (1-\alpha)/2$ ; знак [a] означает целую часть числа а.

В остальном правило 1, приведенное в п. А, сохра-

няется. 2. При конкурирующих гипотезах  $F_1(x) > F_2(x)$  н  $F_1(x) < F_2(x)$  нижнюю критическую точку находят по формуле (\*), положив  $Q=\alpha$ ; соответственно  $z_{\kappa p}$  находят по таблице функции Лапласа по равенству Ф (гир)=  $=(1-2\alpha)/2$ . В остальном правила 2—3, приведенные в п. А, сохраняются.

Пример 2. При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотелу об однородности двух выборок объемов  $n_1 = 30$  и  $n_2 = 50$  при контурирующей гипотезе  $H_1: F_1(x) \neq F_2(x)$ , если известно, что в общем выборок, сумма вриационном ряду, составленном из вариант обенх выборок, сумма  $H_1:F_1(x)\neq F_2(x)$ , если известно, обенх выборок, сумма  $H_2:F_1(x)\neq F_2(x)$ , если известно, обенх выборок, обенх порядковых номеров вариант первой выборки Wнаба = 1600.

Решение. По условию, конкурирующая гипотеза вмеет выд  $F_1(x) \neq F_2(x)$ , поэтому критическая область — двусторонняя, Найдем гир по равенству

 $\Phi(z_{\text{mp}}) = (1-\alpha)/2 = (1-0.01)/2 = 0.495.$ 

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим вир = 2,58 таблице функции Лапласа (см. пред 2,58 в формулу (\*), получим Подставив  $n_1 = 30$ ,  $n_2 = 50$ ,  $z_{\rm KP} = 2,58$  в формулу (\*), получим

Wинжи. пр = 954.

Найдем верхнюю критическую точку:  $w_{\text{верхи. кр}} = (n_1 + n_2 + 1) n_1 - w_{\text{немки. кр}} = 2430 - 954 = 1476.$ 

Так как 1600 > 1476, т. е. W вабя > wверх. ир - нулевая гипотеза отвергается.

## Задачи

- 1. По двум независимым выборкам, объемы которых соответственно равны  $n_1$  и  $n_2$ , извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены исправленные выборочные дисперсии sx и sy. При уровне значимости с проверить нулевую гипотезу На: D(X) = D(Y) о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе  $H_1$ : D(X) > D(Y), если:
  - a)  $n_1 = 10$ ,  $n_2 = 16$ ,  $s_X^2 = 3.6$ ,  $s_Y^2 = 2.4$ ,  $\alpha = 0.05$ ;
  - 6)  $n_1 = 13$ ,  $n_2 = 18$ ,  $s_X^2 = 0.72$ ,  $s_Y^2 = 0.20$ ,  $\alpha = 0.01$ .

Ome. a)  $F_{\text{наба}} = 1,5$ ;  $F_{\text{кр}}(0,05; 9; 15) = 2,59$ . Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу; 6)  $F_{\text{набл}} = 3,6$ ;  $F_{\text{мр}}(0,01; 12; 17) = 3,45$ . Нуле-

вая гипотеза отвергается.

- 2. По двум независимым выборкам, объемы которых соответственно равны п и т, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние x и y. Генеральные дисперсин D(X) и D(Y) известны. При уровне значимости  $\alpha$  проверить нулевую гипотезу  $H_0$ : M(X) = M(Y) о равенстве математических ожиданий при конкурирующей гипотезе  $H_1: M(X) \neq M(Y)$ ,
  - a) n=30, m=20, D(X)=120, D(Y)=100,  $\alpha=0.05$ ; 6) n=50, m=40, D(X)=50, D(Y)=120,  $\alpha=0.01$ .

Отв. в)  $Z_{\text{наба}} = 1$ ,  $z_{\text{кр}} = 1.96$ . Нет оснований отвергнуть нулевую 3. По явум независимия  $z_{\text{кр}} = 2.58$ . Нулевая гипотеза отвергается. 3. По двум независным выборкам, объемы которых соответственно равны n=5 и m=6, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние  $x=15,9,\ y=14,1$ исправленные выборочные дисперсии  $s_X^2 = 14.76$ ,  $s_Y^2 = 4.92$ . При уровне значимости 0.05 проведение  $s_X^2 = 14.76$ ,  $s_Y^2 = 4.92$ . При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу  $H_0: M(X) = M(X)$ равенстве математических ожиданий при конкурирующей гипотезе

е. Предварительно сра