Procesos AR(1) estacionarios

lunes, 18 de agosto de 2025 08:12 a. m.

Considere un proceso AR(1): $\tilde{X}_t - \phi \tilde{X}_{t-1} = Z_t$; $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma_Z^2)$

$\tilde{X}_t = X_t - \mu$

Note que

Proposition 2.2.1 *Let $\{Y_t\}$ be a stationary time series with mean 0 and covariance function γ_Y. If $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$, then the time series*

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Y_{t-j} = \psi(B) Y_t \qquad (2.2.3)$$

is stationary with mean 0 and autocovariance function

$$\gamma_X(h) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_k \gamma_Y(h + k - j). \qquad (2.2.4)$$

In the special case where $\{X_t\}$ is a linear process,

$$\gamma_X(h) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+h} \sigma^2. \qquad (2.2.5)$$

Suponga que un proceso AR(1) satisface que $|\phi| < 1$ y $\tilde{X}_t$ no está correlacionado con $\tilde{X}_s$ para cada $s < t$; probaremos que este proceso es estacionario

Sin pérdida de generalidad sup. que $\mu = 0$, entonces

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$$

$$X_t = \phi(\phi X_{t-2} + Z_{t-1}) + Z_t$$

$$X_t = \phi^2 X_{t-2} + \phi Z_{t-1} + Z_t$$

$$X_t = \phi^2(\phi X_{t-3} + Z_{t-2}) + \phi Z_{t-1} + Z_t$$

$$X_t = \phi^3 X_{t-3} + \phi^2 Z_{t-2} + \phi Z_{t-1} + Z_t$$

$$\vdots$$

$$X_t = \phi^k X_{t-k} + \sum_{j=0}^{k-1} \phi^j Z_{t-j}$$

Como $|\phi| < 1$, si $k \to \infty$, entonces

$$X_t = \sum_{j=0}^{k-1} \phi^j Z_{t-j}$$

$\phi(B)$

POR LA PROP 2.2.1 PODEMOS CONCLUIR, QUE EL PROCESO $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$ ES ESTACIONARIO, CON MEDIA CERO Y CON FUNCIÓN DE AUTOCOVARIANZA DADA POR

$$\gamma_X(h) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_k \gamma_Y(h+k-j). \tag{2.2.4}$$

In the special case where $\{X_t\}$ is a linear process,

$$\gamma_X(h) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+h} \sigma^2. \tag{2.2.5}$$

$$\gamma_x(h) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+h} \sigma_z^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \phi^{j+h} \sigma_z^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} \phi^h \sigma_z^2$$

COMO $|\phi|<1$ ENTONCES

$$\sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} \phi^h \sigma_z^2 \quad \text{CONVERGE A} \quad \frac{\phi^h \sigma_z^2}{1-\phi^2}$$

POR LO TANTO

$$\gamma_x(h) = \frac{\phi^{|h|} \sigma_z^2}{1-\phi^2} \quad ; \quad h \geq 0$$

CALCULEMOS LA FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN DEL PROCESO AR(1)

$$\rho_x(h) = \frac{\gamma_x(h)}{\gamma_x(0)}$$

$$\gamma_x(0) = Var(X_t) = Var(\phi X_{t-1} + Z_t) = \phi^2 Var(X_{t-1}) + Var(Z_t)$$

$$= \phi^2 Var(X_{t-1}) + \sigma_z^2$$

$$Var(X_t) - \phi^2 Var(X_{t-1}) = \sigma_z^2$$

$$(1-\phi^2)\,Var(X_t) = \sigma_z^2$$

$$Var(X_t) = \frac{\sigma_z^2}{1-\phi^2}$$

De esta forma, se tiene

$$\rho_x(h) = \frac{\dfrac{\phi^{|h|}\,\sigma_z^2}{1-\phi^2}}{\dfrac{\sigma_z^2}{1-\phi^2}} = \phi^{|h|} \; ; \quad h \geq 0$$

Ejemplo, considere el proceso

$$(1-0.4B)X_t = Z_t \; ; \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma_z^2)$$

$\phi = 0.4$

$\rho_1 = \phi$

$\rho_2 = \phi^2$

$\rho_3 = \phi^3$

$\vdots$

Gráfico de la FAC teórica del proceso $(1-0.4B)X_t = Z_t$