Estacionariedad débil

Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ se dice que es **estacionario débil** (o **de segundo orden**) si cumple las siguientes dos condiciones:
La esperanza es constante e independiente del tiempo:

$$\mu_{X_t} := \mathbb{E}[X_t] = \mu \quad \text{para todo } t$$

La función de autocovarianza depende solo del desfase h, es decir:

$$\gamma_X(t, t+h) := \mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h) \quad \text{para todo } t, h$$

Estacionariedad e Invertibilidad

Para un proceso AR(1) o MA(1), el coeficiente debe ser menor que 1 en valor absoluto. Para un proceso AR(p) o MA(q), el **módulo de las raíces del polinomio característico** debe ser mayor que 1.
El módulo se calcula como el valor absoluto de las raíces del polinomio asociado al modelo.

Región Admisible (2)

$$\begin{cases} |\phi_2| < 1 \\ \phi_1 + \phi_2 < 1 \\ \phi_2 - \phi_1 < 1 \end{cases}$$

Módulo

Dado un número complejo:

$$z = a + bi \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}$$

el **módulo** (o valor absoluto) de z, denotado por $|z|$, se define como:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Discriminante de (2)

$$D = \phi_1^2 + 4\phi_2$$

FACV de un AR(p)

Las ecuaciones de Yule-Walker para las autocovarianzas de un AR(p) se expresan como:

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 \\ \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix}$$

Lo que implica, por ejemplo:

$$\gamma_1 = \phi_1\gamma_0 + \phi_2\gamma_1 + \phi_3\gamma_2 + \phi_4\gamma_3$$

La relación de recurrencia es:

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + \cdots + \phi_p\rho_{k-p}, \quad k > p$$

Para encontrar los parámetros, dadas las correlaciones, se resuelve el sistema de ecuaciones lineales como una matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_3 \end{array}\right]$$

FACV de un MA(q)

La matriz de la función autorregresiva inversa (FAV) para un MA(q) tiene la siguiente estructura:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & & & \\ -\theta_1 & \theta_1^2 & \cdots & & \\ -\theta_2 & \theta_2\theta_1 & \theta_2^2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ -\theta_q & \theta_q\theta_1 & \theta_q\theta_2 & \cdots & \theta_q^2 \end{bmatrix} \sigma_e^2$$

La varianza total de un MA(q) es:

$$\gamma_0 = \sigma_e^2 \left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2\right)$$

Después de q, todas las autocovarianzas son 0. La correlación es $\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$

Valores Esperados

Multiplicas el proceso X_t por lo que quieres y le sacas el valor esperado. Ejemplo:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)X_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)e_t$$
$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2}$$
$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2}$$

$$\mathbb{E}[X_t e_t] = \sigma_e^2$$
$$\mathbb{E}[X_t e_{t+h}] = 0$$
$$\mathbb{E}[X_t e_{t-h}] = \text{Multiplica todo}$$
$$\mathbb{E}[e_t e_t] = \sigma_e^2$$
$$\mathbb{E}[X_t X_t] = \gamma_0$$
$$\mathbb{E}[X_t X_{t-h}] = \gamma_h$$

Representación ψ_i y convergencia

$$X_t - \phi X_{t-1} = \mu + e_t$$

$$X_t = \phi X_{t-1} + \mu + e_t$$

$$X_t = \phi(\phi X_{t-2} + \mu + e_{t-1}) + \mu + e_t$$

$$= \phi^h X_{t-h} + \sum_{i=0}^{h-1} \phi^i (\mu + e_{t-i})$$

cuando $h \to \infty$, y suponiendo que $|\phi| < 1$

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i (\mu + e_{t-i})$$

Esta es una representación MA(∞) del proceso AR(1), donde los coeficientes $\psi_i = \phi^i$. La serie $\sum_{i=0}^{\infty} \phi^i$ es convergente si $|\phi| < 1$, y su suma es una serie geométrica:

Serie Geométrica

$$\sum_{i=0}^{\infty} \phi^i = \frac{1}{1-\phi}$$

Por lo tanto, la suma ponderada de los efectos pasados converge, y la media del proceso se puede escribir como:

$$\mathbb{E}[X_t] = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \mu = \mu \cdot \frac{1}{1-\phi}$$

Representación MA(∞) del proceso AR(2)

Consideremos un proceso autorregresivo de orden 2:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = \mu + e_t$$

Reordenando:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \mu + e_t$$

La idea es obtener una representación en términos de una suma infinita ponderada de los errores e_t, es decir, encontrar coeficientes ψ_i tales que:

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i e_{t-i}$$

Para hacerlo formalmente, introducimos el operador rezago B, definido por $BX_t = X_{t-1}$. Así, la ecuación del AR(2) se puede escribir como:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)X_t = \mu + e_t$$

Si definimos el polinomio autorregresivo:

$$\Phi(B) := 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2$$

Entonces:

$$X_t = \Phi(B)^{-1}(\mu + e_t)$$

La inversa $\Phi(B)^{-1}$ existe y puede desarrollarse en serie de potencias (MA()) **siempre que las raíces del polinomio $\Phi(z)$ estén fuera del círculo unitario**, es decir, si el proceso es estacionario.
Desarrollamos:

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i (\mu + e_{t-i})$$

Y la media del proceso, tomando valor esperado:

$$\mathbb{E}[X_t] = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \mu = \mu \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i$$

La convergencia de la serie $\sum \psi_i$ garantiza que X_t tiene media finita y que la representación MA() es válida.

Observación

En el caso AR(1), los coeficientes $\psi_i = \phi^i$. En AR(2), los ψ_i se obtienen mediante la **recursión de Wold**:

$$\psi_0 = 1$$
$$\psi_1 = \phi_1$$
$$\psi_2 = \phi_1\psi_1 + \phi_2\psi_0 = \phi_1^2 + \phi_2$$
$$\psi_3 = \phi_1\psi_2 + \phi_2\psi_1$$
$$\vdots$$
$$\psi_k = \phi_1\psi_{k-1} + \phi_2\psi_{k-2}$$

Así, se puede calcular cualquier ψ_k en función de los parámetros del modelo.

Media de un ARMA(p, q)

Consideremos el modelo:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + e_t + \theta_1 e_{t-1} + \cdots + \theta_q e_{t-q}$$

Donde $\{e_t\} \sim WN(0, \sigma_e^2)$. Si el proceso es estacionario, entonces su media $\mu = \mathbb{E}[X_t]$ es constante en el tiempo.

$$\mu = \frac{c}{1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p}$$

Operador Diferencia

$$\nabla^d X_t = (1 - B)^d X_t$$

Autocorrelación ρ_k

Supones que $\hat{\rho}_0 = 0$

$$|\hat{r}_k| > 2\sqrt{\frac{1}{n}\left(1 + 2\sum_{j=1}^{q} \hat{\rho}_j^2\right)}$$

Autocorrelación Parcial ϕ_{kk}

$$|\hat{\phi}_{kk}| > 2\sqrt{\frac{1}{n}}$$

Cálculo de las Autocorrelaciones Parciales

$$\phi_{11} = \rho_1$$

$$\phi_{22} = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_{p-1} & \rho_p \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\phi_{33} = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_p \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{bmatrix}}$$

Se obtiene como: ϕ_{kk} Se obtiene como:

$$\frac{\det \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{p-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-3} & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{p-4} & \rho_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \cdots & \rho_1 & \rho_p \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{p-2} & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-3} & \rho_{p-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{p-4} & \rho_{p-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{bmatrix}}$$

Polinomios Característicos

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$$

$$\Theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q$$

$$\Psi(B) = \Phi^{-1}(B)\Theta(B)$$

$$\Pi(B) = \Theta^{-1}(B)\Phi(B)$$

FACV ARMA(1,1)

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \phi_1\gamma_1 + \sigma^2 - \theta_1(\phi_1\sigma^2 - \theta_1\sigma^2) \\
\gamma_1 &= \phi_1\gamma_0 - \theta_1\sigma^2 \\
\gamma_k &= \phi_1 \cdot \gamma_{k-1}, \quad k \geq 2
\end{aligned}$$

Para resolver, la haces un SEL

$$\begin{aligned}
\gamma_0 - \phi_1\gamma_1 &= +\sigma^2 - \theta_1(\phi_1\sigma^2 - \theta_1\sigma^2) \\
\gamma_1 - \phi_1\gamma_0 &= -\theta_1\sigma^2 \\
\gamma_k &= \phi_1\gamma_{k-1}, \quad k \geq 2
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\phi_1 \\ -\phi_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 - \theta_1(\phi_1\sigma^2 - \theta_1\sigma^2) \\ -\theta_1\sigma^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathrm{A}} \begin{bmatrix} 1 & \phi_1 \\ \phi_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \theta_1(\phi_1 - \theta_1) \\ -\theta_1 \end{bmatrix} \sigma^2$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2} \begin{bmatrix} [1 - \theta_1(\phi_1 - \theta_1)] - \phi_1\theta_1 \\ \phi_1[1 - \theta_1(\phi_1 - \theta_1)] - \theta_1 \end{bmatrix}$$

FACV ARMA(2,1)

$$\begin{aligned}
\gamma_0 - \phi_1\gamma_1 - \phi_2\gamma_2 &= (1 - \phi_1\theta + \theta^2)\sigma_\epsilon^2 \\
\gamma_1 - \phi_1\gamma_0 - \phi_2\gamma_1 &= -\theta\sigma_\epsilon^2 \\
\gamma_2 - \phi_1\gamma_1 - \phi_2\gamma_0 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\phi_1 & -\phi_2 \\ -\phi_1 & 1-\phi_2 & 0 \\ -\phi_2 & -\phi_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \phi_1\theta + \theta^2)\sigma_\epsilon^2 \\ -\theta\sigma_\epsilon^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

FACV ARMA(1,2)

$$\begin{aligned}
\gamma_0 - \phi_1\gamma_1 &= (1 - \theta_1(\phi_1 - \theta_1) - \theta_2(\phi_1(\phi_1 - \theta_1) - \theta_2)))\sigma_\epsilon^2 \\
\gamma_1 - \phi_1\gamma_0 &= (-\theta_1 - \theta_2(\phi_1 - \theta_1))\sigma_\epsilon^2 \\
\gamma_2 - \phi_1\gamma_1 &= -\theta_2\sigma_\epsilon^2
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\phi_1 \\ -\phi_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \theta_1(\phi_1 - \theta_1) - \theta_2(\phi_1(\phi_1 - \theta_1) - \theta_2))\,\sigma_\epsilon^2 \\ (-\theta_1 - \theta_2(\phi_1 - \theta_1))\,\sigma_\epsilon^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathrm{A}} \begin{bmatrix} 1 & \phi_1 \\ \phi_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1 - \theta_1(\phi_1 - \theta_1) - \theta_2(\phi_1(\phi_1 - \theta_1) - \theta_2))\,\sigma_\epsilon^2 \\ (-\theta_1 - \theta_2(\phi_1 - \theta_1))\,\sigma_\epsilon^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathrm{A}} \begin{bmatrix} 1 & \phi_1 \\ \phi_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1 - \theta_1(\phi_1 - \theta_1) - \theta_2(\phi_1(\phi_1 - \theta_1) - \theta_2))\,\sigma_\epsilon^2 \\ (-\theta_1 - \theta_2(\phi_1 - \theta_1))\,\sigma_\epsilon^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi_1^2} \begin{bmatrix} [(1 - \theta_1(\phi_1 - \theta_1) - \theta_2(\phi_1(\phi_1 - \theta_1) - \theta_2))] + \phi_1[(-\theta_1 - \theta_2(\phi_1 - \theta_1))] \\ \phi_1[(1 - \theta_1(\phi_1 - \theta_1) - \theta_2(\phi_1(\phi_1 - \theta_1) - \theta_2))] + [(-\theta_1 - \theta_2(\phi_1 - \theta_1))] \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi_1^2} \begin{pmatrix} 1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 - 2\phi_1\theta_1 - 2\phi_1^2\theta_2 + 2\phi_1\theta_1\theta_2 \\ \phi_1\left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 - 2\phi_1\theta_1 - 2\phi_1^2\theta_2 + 2\phi_1\theta_1\theta_2\right) + (-\theta_1 - \phi_1\theta_2 + \theta_1\theta_2) \end{pmatrix}}$$