Procesos ARMA(1,1) y ARIMA(1,d,1)

jueves, 20 de febrero de 2025 10:37 a. m.

EL MODELO ARMA(1,1) SE DEFINE

$$(1-\phi B)X_t = (1-\theta B)Z_t \quad ; \quad Z_t \sim WN(0,\sigma_Z^2) \quad \cdots (1)$$

EN DONDE SI X_t ES ESTACIONARIO LE LLAMAMOS PROCESO ARMA(1,1) PERO SI X_t NO ES ESTACIONARIO, ENTONCES APLICAMOS ∇^d A X_t HASTA CONSEGUIR QUE SEA ESTACIONARIO: $W_t = \nabla^d X_t$ Y EN ESTE CASO EL PROCESO DEFINIDO A CONTINUACIÓN SE CONOCE COMO PROCESO ARIMA(1,d,1):

$$(1-\phi_W B)W_t = (1-\theta_W)Z_t \quad ; \quad Z_t \sim WN(0,\sigma_Z^2) \quad \cdots (2)$$

CALCULEMOS LA FUNCIÓN DE AUTOCOVARIANZA Y AUTOCORRELACIÓN DEL PROCESO ARMA(1,1): $(1-\phi B)\tilde{X}_t = (1-\theta B)Z_t \quad ; \quad Z_t \sim WN(0,\sigma_Z^2)$

$$\tilde{X}_t = X_t - \mu$$

SIN PÉRDIDA DE GENERALIDAD SUP QUE $\mu = 0$

DE AQUÍ

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t - \theta Z_{t-1}$$

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t - \theta Z_{t-1} \quad \cdots (1)$$

NOTE QUE

$$X_t X_t = \phi X_t X_{t-1} + X_t Z_t - \theta X_t Z_{t-1}$$

$$\gamma_0 = E(X_t X_t) = \phi E(X_t X_{t-1}) + E(X_t Z_t) - \theta E(X_t Z_{t-1})$$

$$= \phi \gamma_1 + \sigma_Z^2 - \theta\Big[\underbrace{\phi E(Z_{t-1}X_{t-1}) - \theta\sigma_Z^2}_{\text{POR EXP (1.51)}}\Big]$$

$$E(Z_{t-i}\tilde{X}_t) = \phi_1 E(Z_{t-i}\tilde{X}_{t-1}) + \phi_2 E(Z_{t-i}\tilde{X}_{t-2}) + \cdots + \phi_i E(Z_{t-i}\tilde{X}_{t-i}) - \theta_i\sigma_Z^2 \quad (1.51)$$
$$\text{con } \ i = 1, 2, \ldots, \text{máx}(p,q)$$

$$= \phi\gamma_1 + \sigma_Z^2 - \theta\left[\phi\sigma_Z^2 - \theta\sigma_Z^2\right]$$

$$= \phi\gamma_1 + \sigma_Z^2\big(1 - \theta(\phi - \theta)\big) \quad \cdots (2)$$

$$\gamma_1 = E(X_t X_{t-1}) = \phi E(X_{t-1} X_{t-1}) + E(X_{t-1} Z_t) - \theta E(X_{t-1} Z_{t-1})$$

$$= \phi \gamma_0 - \theta \sigma_Z^2$$

CONSIDERANDO $k \geq 2$

$k=2$: $$\gamma_k = E(X_t X_{t-2}) = \phi E(X_{t-2} X_{t-1}) - \theta E(\cancelto{0}{Z_{t-1} X_{t-2}})$$

$$= \phi \gamma_1$$

$\vdots$

$$\gamma_k = \phi \gamma_{k-1}$$

RESOLVIENDO EL SISTEMA DE ECUACIONES AL QUE SE LLEGA, SE OBTIENE γ_k Y ρ_k

$$E(X_t) = 0$$

$$\gamma_0 = Var(X_t) = \phi \gamma_1 + \sigma_Z^2 \left(1 - \theta(\phi - \theta)\right)$$

$$\gamma_k = \begin{cases} \phi \gamma_0 - \theta \sigma_Z^2 & k=1 \\ \phi \gamma_{k-1} & k \geq 2 \end{cases}$$

$$\rho_k = \frac{\phi^{k-1}(1-\phi\theta)(\phi-\theta)}{1-2\phi\theta+\theta^2} \qquad k=1,2,$$