Invertibilidad en los procesos MA

miércoles, 20 de agosto de 2025 08:56 a. m.

CONSIDERE LOS SIGUIENTES PROCESOS MA(1)

$X_t = (1-5B)Z_t$ CON $\sigma_Z^2 = 1$; $Z_t \sim WN(0, \sigma_Z^2)$

$Y_t = (1-1/5B)W_t$ CON $\sigma_W^2 = 25$; $W_t \sim WN(0, \sigma_W^2)$

CALCULEMOS LAS FUNCIONES DE AUTOCOVARIANZA PARA X_t Y Y_t

$$\gamma_X(h) = \begin{cases} -5 & h = \pm 1 \\ 0 & |h| \geq 2 \end{cases}$$

$$\gamma_k = \begin{cases} -\theta\sigma_Z^2 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$$

$$\gamma_Y(h) = \begin{cases} -5 & h = \pm 1 \\ 0 & |h| \geq 2 \end{cases}$$

POR LO TANTO, X_t Y Y_t TIENEN LA MISMA FUNCIÓN DE AUTOCOV Y ESTO IMPLICA QUE TIENEN LA MISMA DISTRIBUCIÓN

SIN EMBARGO, SOLO Y_t SERÁ INVERTIBLE

$Y_t = (1 - \frac{1}{5}B)W_t$

$Y_t = W_t - \frac{1}{5}W_{t-1}$

$W_t = Y_t + \frac{1}{5}W_{t-1}$

$W_t = Y_t + \frac{1}{5}(Y_{t-1} + \frac{1}{5}W_{t-2})$

$W_t = Y_t + \frac{1}{5}Y_{t-1} + (\frac{1}{5})^2 W_{t-2}$

$W_t = Y_t + \frac{1}{5}Y_{t-1} + (\frac{1}{5})^2(Y_{t-2} + \frac{1}{5}W_{t-3})$

SUP QUE $\frac{1}{5} = \theta$

$\vdots$

$W_t = \theta^j W_{t-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j Y_{t-j}$

Como $\theta = \frac{1}{5}$; $|\theta| < 1$, cuando $j \to \infty$

$$W_t = \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j Y_{t-j} \Bigg\{ AR(\infty)$$

$$W_t = \eta(B) Y_t \quad \text{DONDE} \quad \eta(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j B^j$$

CON $\eta_j = \theta^j$

SUP QUE EXISTE $\theta^{-1}(B)$, ENTONCES

$$\theta^{-1}(B) Y_t = W_t$$

ENTONCES

$$\sum_{j=0}^{\infty} \theta^j Y_{t-j} = \eta(B) Y_t = \theta^{-1}(B) Y_t$$

ENTONCES $\eta(B) = \theta^{-1}(B)$

POR LO TANTO

$$\theta^{-1}(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j B^j = 1 + \theta B + \theta^2 B^2 + \quad + \theta^j B^j + \dots$$