Teorma de Schur para deducir condiciones de estacionariedad de los procesos AR(2). Función de autocovarianza y autocorrelación del proceso AR(2)

lunes, 18 de agosto de 2025 09:06 a. m.

Ideal Considere un proceso AR(2):

$$(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2)X_t = Z_t$$

$\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma_Z^2)$

$$\tilde{X}_t = X_t - \mu$$

Recuerde que:

El módulo de un número complejo $v = a + bi$ se define como: $|v| = \sqrt{a^2+b^2}$

1.3.1. Teorema de Schur

Los módulos de las raíces de la ecuación

$$g^p - a_1 g^{p-1} - a_2 g^{p-2} - \cdots - a_{p-1} g - a_p = 0 \tag{1.12}$$

serán todas menores que la unidad, si y sólo si los p determinantes que se muestran a continuación son todos positivos.

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & a_p \\ a_p & -1 \end{vmatrix} \tag{1.13}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & a_p & a_{p-1} \\ a_1 & -1 & 0 & a_p \\ a_p & 0 & -1 & a_1 \\ a_{p-1} & a_p & 0 & -1 \end{vmatrix} \tag{1.14}$$

$$D_p = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & a_p & a_{p-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & a_p & \cdots & a_2 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ a_{p-1} & a_{p-2} & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & a_p \\ a_p & 0 & \cdots & 0 & -1 & a_1 & \cdots & a_{p-1} \\ a_{p-1} & a_p & \cdots & 0 & 0 & -1 & \cdots & a_{p-2} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_p & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \tag{1.15}$$

Suponga que el proceso AR(2) anterior es estacionario, entonces por el teorema de Schur los $p=2$ determinantes son positivos, es decir

$$(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2)\tilde{X}_t = Z_t$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & \phi_2 \\ \phi_2 & -1 \end{vmatrix} > 0, \text{ sii}$$

$$D_1 = 1-\phi_2^2 > 0, \text{ sii}$$

$$-\phi_2^2 > -1 \ ; \ \phi_2^2 < 1 \text{ sii } \underline{|\phi_2| < 1} \quad (1)$$

ii)

$$D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & a_p & a_{p-1} \\ a_1 & -1 & 0 & a_p \\ a_p & 0 & -1 & a_1 \\ a_{p-1} & a_p & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \phi_2 & \phi_1 \\ \phi_1 & -1 & 0 & \phi_2 \\ \phi_2 & 0 & -1 & \phi_1 \\ \phi_1 & \phi_2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$= (1+\phi_2)^2 \left[(1-\phi_2)^2 - \phi_1^2\right] > 0$, ENTONCES

$= (1+\phi_2)^2(1-\phi_2)^2 - (1+\phi_2)^2\phi_1^2 > 0$, ENTONCES

$= (1+\phi_2)^2(1-\phi_2)^2 > (1+\phi_2)^2\phi_1^2$, ENTONCES

$= (1-\phi_2)^2 > \phi_1^2$, ENTONCES

CASO 1: $1-\phi_2 > 0$ Y $\phi_1 > 0$; ENTONCES

$1-\phi_2 > \phi_1$ sii $1 > \phi_1 + \phi_2$, POR LO TANTO

$$\underbrace{\phi_1 + \phi_2 < 1} \quad (2)$$

CASO 2: $1-\phi_2 > 0$ Y $\phi_1 < 0$; ENTONCES

$1-\phi_2 > -\phi_1$ sii $1 > \phi_2 - \phi_1$, POR LO TANTO

$$\underbrace{\phi_2 - \phi_1 < 1} \quad (3)$$

CASO 3: $1-\phi_2 < 0$; $\phi_1 > 0$

CONTRADICE QUE $D_1 > 0$

EN RESUMEN, UN PROCESO AR(2) ES ESTACIONARIO SIEMPRE QUE SE CUMPLAN LAS 3 CONDICIONES SIGUIENTES

i) $|\phi_2| < 1$

ii) $\phi_2 + \phi_1 < 1$

iii) $\phi_2 - \phi_1 < 1$

EJEMPLO: CONSIDERE EL PROCESO

$$(1 - 0.9B + 0.2B^2) X_t = Z_t \qquad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma_Z^2)$$

$\phi_1 = 0.9$; $\phi_2 = -0.2$

NOTE QUE:

i) $|\phi_2| = |-0.2| < 1$

ii) $\phi_2 + \phi_1 = -0.2 + 0.9 < 1$

iii) $\phi_2 - \phi_1 = -0.2 - 0.9 < 1$

POR LO TANTO, EL PROCESO X_t ES ESTACIONARIO

CALCULEMOS LA FUNCIÓN DE AUTOCOVARIANZA Y AUTOCORRELACIÓN DEL PROCESO AR(2)

$$\gamma_X(h) = Cov(\breve{X}_t, \breve{X}_{t+h}) = E(\breve{X}_t \breve{X}_{t+h}) - E(\breve{X}_t) E(\breve{X}_{t+h})$$

ADEMÁS

$$E(\breve{X}_t) = E(X_t - \mu) = E(X_t) - \mu = 0$$

POR LO TANTO,

$$\gamma_X(h) = E(\breve{X}_t \breve{X}_{t+h})$$

$$\breve{X}_{t+h} = \phi_1 \breve{X}_{t+h-1} + \phi_2 \breve{X}_{t+h-2} + Z_{t+h}$$

$$\breve{X}_t \breve{X}_{t+h} = \phi_1 \breve{X}_t \breve{X}_{t+h-1} + \phi_2 \breve{X}_t \breve{X}_{t+h-2} + \breve{X}_t Z_{t+h}$$

RECUERDE, EL PROCESO AR(2) CONSIDERADO

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) \breve{X}_t = Z_t$$

$$\breve{X}_t = X_t - \mu$$

$$\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma_Z^2)$$

$$\breve{X}_t - \phi_1 \breve{X}_{t-1} - \phi_2 \breve{X}_{t-2} = Z_t$$

$$E(\tilde{X}_t \tilde{X}_{t+h}) = \phi_1 E(\tilde{X}_t \tilde{X}_{t+h-1}) + \phi_2 E(\tilde{X}_t \tilde{X}_{t+h-2}) + E(\tilde{X}_t Z_{t+h})$$

Si $h=0$

$$\gamma_x(0) = \phi_1 E(\tilde{X}_t \tilde{X}_{t-1}) + \phi_2 E(\tilde{X}_t \tilde{X}_{t-2}) + E(\tilde{X}_t Z_t)$$

$$= \phi_1 \gamma_x(1) + \phi_2 \gamma_x(2) + \underbrace{E(\tilde{X}_t Z_t)}_{*}$$

$$* \quad E(\tilde{X}_t Z_t) = \phi_1 \cancelto{0}{E(Z_t \tilde{X}_{t-1})} + \phi_2 \cancelto{0}{E(Z_t \tilde{X}_{t-2})} + E(Z_t^2)$$

$$= E(Z_t^2) = \sigma^2_z$$

$$Var(Z_t) = \sigma^2_z = E(Z_t^2) - E(Z_t)^2$$

Por lo tanto,

$$\gamma_x(0) = \phi_1 \gamma_x(1) + \phi_2 \gamma_x(2) + \sigma^2_z$$

Si $|h|>0$

$$\gamma_x(h) = \phi_1 \gamma_x(h-1) + \phi_2 \gamma_x(h-2)$$

Por lo tanto

$$\gamma_x(h) = \begin{cases} \phi_1 \gamma_x(1) + \phi_2 \gamma_x(2) + \sigma^2_z & h=0 \\ \phi_1 \gamma_x(h-1) + \phi_2 \gamma_x(h-2) & |h|>0 \end{cases}$$

Ahora calculemos la FAC teórica del proceso AR(2)

$$\rho_x(h) = \frac{\gamma_x(h)}{\gamma_x(0)}$$

$$\rho_x(1) = \rho_1 = \frac{V_x(1)}{V_x(0)} = \frac{\phi_1 V_x(0) + \phi_2 V_x(1)}{V_x(0)} = \phi_1 + \phi_2 \frac{V_x(1)}{V_x(0)}$$

$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1$, por lo tanto

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$$

Por otra parte,

$$\rho_x(2) = \rho_2 = \frac{V_x(2)}{V_x(0)} = \phi_1 \frac{V_x(1)}{V_x(0)} + \phi_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2$$

$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2$$

En general

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} \ ; \quad |k| \geq 3$$

Considere el proceso AR(2) del ejemplo anterior

Ejemplo: $(1 - 0.9B + 0.2B^2) X_t = Z_t \qquad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma_Z^2)$

$\phi_1 = 0.9 \ ; \ \phi_2 = -0.2$

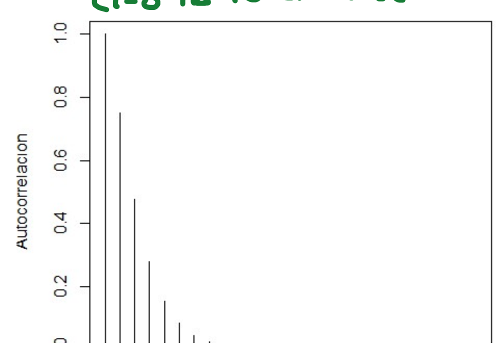
Calculemos las 3 primeras autocorrelaciones para este proceso (ρ_1, ρ_2, ρ_3)

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} = \frac{0.9}{1+0.2} = 0.75$$

$$\rho_2 = (0.9)\rho_1 + (-0.2) = 0.475$$

$$\rho_3 = 0.9\rho_2 + (-0.2)\rho_1 = 0.2775$$

Gráfica de la FAC teórica del proceso AR(2) $(1-0.9B+0.2B^2)X_t = Z_t$



$$\rho_3 = 0.9\,\rho_2 + (-0.2)\,\rho_1 = 0.2775$$