Proceso media móvil de orden 1 (MA(1))

miércoles, 13 de agosto de 2025 08:28 a. m.

CONSIDERE UN PROCESO MA(1):

$$\tilde{X}_t = (1-\theta B)Z_t \quad ; \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma_Z^2)$$

$$\tilde{X}_t = X_t - \mu$$

SIN PÉRDIDA DE GENERALIDAD SUPONGA QUE $\mu = 0$

RECUERDE

$$Var(X) = Var(-X)$$

$$X_t = (1-\theta B)Z_t$$

$$X_t = Z_t - \theta Z_{t-1}$$

i) $\mu_X(t) = E(X_t) = E(Z_t - \theta Z_{t-1}) = 0$

ii) $Var(X_t) = Var(Z_t - \theta Z_{t-1}) = Var(Z_t) - \theta^2 Var(Z_{t-1})$

$$= \sigma_Z^2 + \theta^2\sigma_Z^2 = (1+\theta^2)\sigma_Z^2$$

iii) $\gamma_X(t+h, t) = Cov(X_{t+h}, X_t)$

Caso 1: $h=1$ o $h=-1$

$$\gamma_X(t+1, t) = Cov(X_{t+1}, X_t) = Cov(Z_{t+1} - \theta Z_t, Z_t - \theta Z_{t-1})$$

$$= Cov(Z_{t+1}, Z_t - \theta Z_{t-1}) - \theta\, Cov(Z_t, Z_t - \theta Z_{t-1})$$

$$= \underbrace{Cov(Z_{t+1}, Z_t)}_{0} - \theta\, \underbrace{Cov(Z_{t+1}, Z_{t-1})}_{0} -$$

$$\theta\,[Cov(Z_t, Z_t) - \theta\, Cov(Z_t, Z_{t-1})] = -\theta\, Var(Z_t)$$

$$= -\theta\sigma_Z^2$$

Caso $|h|>1$

$$\gamma_X(t+h, t) = 0$$

Por lo tanto $\quad (1+\theta^2)\sigma_Z^2 \quad h=0$

Por lo tanto

$$V_X(t+h, t) = \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma_Z^2 & h=0 \\ -\theta\sigma_Z^2 & h=1 \text{ ó } h=-1 \\ 0 & |h|>1 \end{cases}$$

Por lo tanto, $\{\tilde{X}_t\}$ el proceso MA(1) es estacionario

Ahora calculemos la función de autocorrelación del proceso MA(1)

Definición
La función de autocorrelación (ACF) de $\{X_t\}$ en el desplazamiento h es

$$\rho_X(h) \equiv \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} = Cor(X_{t+h}, X_t). \qquad (9)$$

$$\rho_X(h) = \frac{V_X(h)}{V_X(0)} = \frac{V_X(t+h,t)}{V_X(0)} = \begin{cases} \dfrac{(1+\theta^2)\sigma_Z^2}{(1+\theta^2)\sigma_Z^2} = 1 & h=0 \\ \dfrac{-\theta\sigma_Z^2}{(1+\theta^2)\sigma_Z^2} & |h|=1 \\ 0 & |h|>1 \end{cases}$$

$$\rho_X(h) = \begin{cases} 1 & h=0 \\ \dfrac{-\theta}{1+\theta^2} & |h|=1 \\ 0 & |h|>1 \end{cases}$$

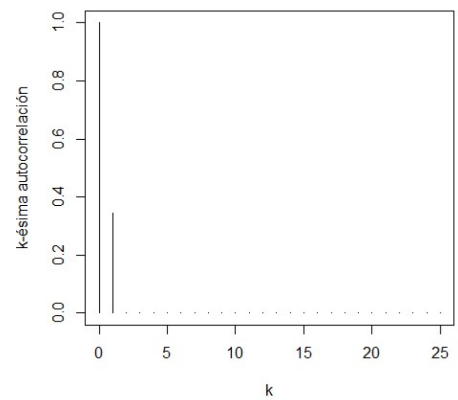
Ejemplo: Considere el siguiente proceso MA(1):

$$X_t = (1 + 0.4B) Z_t \,; \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma_Z^2)$$

GRÁFICO DE FAC TEÓRICA DEL PROCESO $X_t = (1+0.4B)Z_t$

MA(1)

ρ_2
ρ_1
ρ_0



$\theta = -0.4$

$\rho_x(0) = 1 = \rho_0$

$$\rho_x(1) = \frac{-(-0.4)}{1+(0.16)} = 0.34$$

$\rho_x(2) = 0$