Las ecuaciones de Yules-Walker en su forma general

$$\gamma_m = \sum_{k=1}^{p} \phi_k \gamma_{m-k} + \sigma_z^2 \delta_{m,0} \text{, donde} \quad . \qquad (1)$$

$\delta_{m,0}$ es la función delta de Kronecker

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$p$ representa el orden del proceso autoregresivo

Ejemplo: Considere el proceso AR(3) siguiente

$$(1 - \underbrace{0.1}_{\phi_1}B - \underbrace{0.3}_{\phi_2}B^2 + \underbrace{0.2}_{\phi_3}B^3)X_t = Z_t \quad ; \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma_z^2)$$

$$\gamma_m = \sum_{k=1}^{p} \phi_k \gamma_{m-k} + \sigma_z^2 \delta_{m,0} ;$$

Calculemos las autocovarianzas del proceso

$$m=0; \quad \gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \phi_3 \gamma_3 + \sigma_z^2 \quad . \qquad (2)$$

$$m=1; \quad \gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1 + \phi_3 \gamma_2 \quad \ldots \qquad (3)$$

$$m=2; \quad \gamma_2 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_0 + \phi_3 \gamma_1 \quad . \qquad (4)$$

$m=3;\quad V_3 = \phi_1 V_2 + \phi_2 V_1 + \phi_3 V_0 \qquad \ldots (5)$

DE LAS ECUACIONES (3)-(5) SE DEDUCE EL SIGUIENTE SISTEMA

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 & V_1 & V_2 \\ V_1 & V_0 & V_1 \\ V_2 & V_1 & V_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}$$

, DONDE

$\phi_1 = 0.1$

$\phi_2 = 0.3$

$\phi_3 = -0.2$

DE DONDE

$$\rho_1 = \frac{V_1}{V_0} = \frac{\phi_1 V_0 + \phi_2 V_1 + \phi_3 V_2}{V_0} = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \phi_3 \rho_2$$

$$\rho_2 = \frac{V_2}{V_0} = \frac{\phi_1 V_1 + \phi_2 V_0 + \phi_3 V_1}{V_0} = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \phi_3 \rho_1$$

$$\rho_3 = \frac{V_3}{V_0} = \frac{\phi_1 V_2 + \phi_2 V_1 + \phi_3 V_0}{V_0} = \phi_1 \rho_2 + \phi_2 \rho_1 + \phi_3$$

$\vdots$

PARA CUALQUIER PROCESO AR(p), LAS p-PRIMERAS AUTOCORRELACIONES SE CALCULAN A PARTIR DE LAS EC. DE Y-W, MIENTRAS QUE EL RESTO SE OBTIENEN DE LA SIGUIENTE EXPRESIÓN

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \ldots + \phi_p \rho_{k-p}$$

RECORDAR $\gamma_k = \gamma_{-k}$

CON RESPECTO A LA ESTACIONARIEDAD DE PROCESOS AR(p) EN GENERAL, SE DEDUCE A PARTIR DEL TEOREMA DE SCHUR Y DE LOS RESULTADOS DE CONVERGENCIA DE LAS ECUACIONES EN DIFERENCIA DE ORDEN p, LO SIGUIENTE:

UN PROCESO AR(p) O MA(q) ES ESTACIONARIO / INVERTIBLE SI LOS MÓDULOS DE LOS INVERSOS DE LAS RAÍCES DEL POLINOMIO DE RETRASO ASOCIADO AL PROCESO, SON TODOS MENORES QUE LA UNIDAD

EJEMPLO VEAMOS SI EL PROCESO AR(3) MENCIONADO ANTES ES ESTACIONARIO:

$$(1 - \underset{\phi_1}{0.1}B - \underset{\phi_2}{0.3}B^2 + \underset{\phi_3}{0.2}B^3)X_t = Z_t \quad ; \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma_z^2)$$

CALCULE LAS RAÍCES DEL POLINOMIO

$$1 - 0.1x - 0.3x^2 + 0.2x^3 = 0$$

$x_1 = -1.40$ $\qquad \dfrac{1}{|x_1|} = \dfrac{1}{|1.40|} < 1$

$x_2 = 1.45 + 1.21i$

$x_3 = 1.45 - 1.21i$ $\qquad \dfrac{1}{\sqrt{(1.45)^2 + (1.21)^2}} < 1$

$$\shortparallel$$

$$0.52 < 1$$

COMO LAS 3 RAÍCES DEL POLINOMIO DE RETRASO TIENEN MÓDULO INVERSO MENOR QUE 1, SE PUEDE AFIRMAR QUE

EL PROCESO ES ESTACIONARIO.