Teorma de Schur para deducir condiciones de estacionariedad de los procesos AR(2). Función de autocovarianza y autocorrelación del proceso AR(2)

lunes, 18 de agosto de 2025 09:06 a. m.

Iniciar con un proceso AR(2):

$$(1-\phi_2 B^2) - \phi_1 B - \tilde{X}_t = Z_t$$

junto con $Z_t\ (0, \sigma_Z^2)$

$$\tilde{X}_t = X_t - \mu$$

Recuerde que:

El módulo de un número complejo $v = a + bi$ se define como: $|v| = \sqrt{a^2 + b^2}$

1.3.1. Teorema de Schur

Los módulos de las raíces de la ecuación

$$g^p - a_1 g^{p-1} - a_2 g^{p-2} - \cdots - a_{p-1} g - a_p = 0 \tag{1.12}$$

serán todas menores que la unidad, si y sólo si los p determinantes que se muestran a continuación son todos positivos.

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & a_p \\ a_p & -1 \end{vmatrix} \tag{1.13}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & a_p & a_{p-1} \\ a_1 & -1 & 0 & a_p \\ a_p & 0 & -1 & a_1 \\ a_{p-1} & a_p & 0 & -1 \end{vmatrix} \tag{1.14}$$

$$D_p = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & a_p & a_{p-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & a_p & \cdots & a_2 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ a_{p-1} & a_{p-2} & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & a_p \\ a_p & 0 & \cdots & 0 & -1 & a_1 & \cdots & a_{p-1} \\ a_{p-1} & a_p & \cdots & 0 & 0 & -1 & \cdots & a_{p-2} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_p & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \tag{1.15}$$

Suponga que el proceso AR(2) anterior es estacionario, entonces por el teorema de Schur los $p=2$ determinantes son positivos, es decir

$$(1-\phi_1 B - \phi_2 B^2)\tilde{X}_t = Z_t$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & \phi_2 \\ \phi_2 & -1 \end{vmatrix} > 0, \text{ sii}$$

$$D_1 = 1 - \phi_2^2 > 0, \text{ sii}$$

$-\phi_2^2 > -1$; $\phi_2^2 < 1$ sii $\underbrace{|\phi_2| < 1}$ (1)

ii) $D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & a_p & a_{p-1} \\ a_1 & -1 & 0 & a_p \\ a_p & 0 & -1 & a_1 \\ a_{p-1} & a_p & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \phi_2 & \phi_1 \\ \phi_1 & -1 & 0 & \phi_2 \\ \phi_2 & 0 & -1 & \phi_1 \\ \phi_1 & \phi_2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$= (1+\phi_2)^2 \left[(1-\phi_2)^2 - \phi_1^2 \right] > 0$, ENTONCES

$= (1+\phi_2)^2 (1-\phi_2)^2 - (1+\phi_2)^2 \phi_1^2 > 0$, ENTONCES

$= (1+\phi_2)^2 (1-\phi_2)^2 > (1+\phi_2)^2 \phi_1^2$, ENTONCES

$= (1-\phi_2)^2 > \phi_1^2$, ENTONCES

CASO I: $1-\phi_2 > 0$ Y $\phi_1 > 0$; ENTONCES

$1-\phi_2 > \phi_1$ sii $1 > \phi_1 + \phi_2$, POR LO TANTO

$\underbrace{\phi_1 + \phi_2 < 1}$ (2)

CASO 2: $1-\phi_2 > 0$ Y $\phi_1 < 0$; ENTONCES

$1-\phi_2 > -\phi_1$ sii $1 > \phi_2 - \phi_1$, POR LO TANTO

$\underbrace{\phi_2 - \phi_1 < 1}$ (3)

CASO 2: $1-\phi_2 < 0$; $\phi_1 > 0$

CONTRADICE QUE $D_1 > 0$

EN RESUMEN, UN PROCESO $AR(2)$ ES ESTACIONARIO SIEMPRE QUE SE CUMPLAN LAS 3 CONDICIONES SIGUIENTES

i) $|\phi_2| < 1$

ii) $\phi_2 + \phi_1 < 1$

iii) $\phi_2 - \phi_1 < 1$