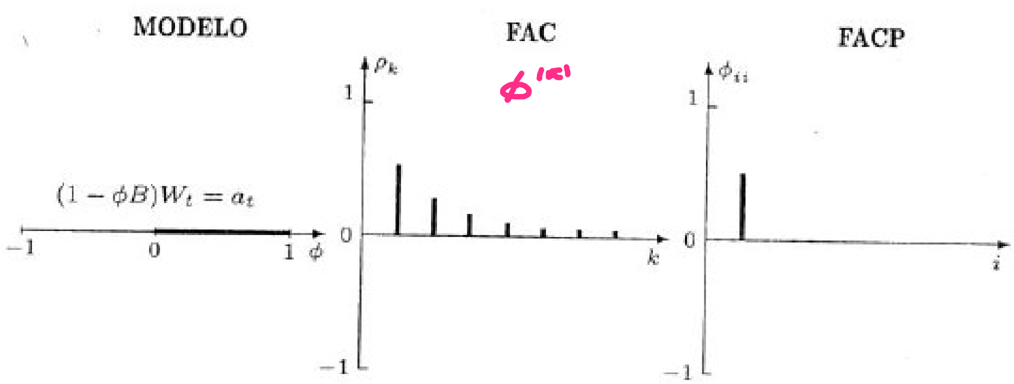
Regiones admisibles de los procesos AR(1) y AR(2)

lunes, 25 de agosto de 2025 08:56 a. m.

Considere un proceso AR(1) $(1-\phi B)W_t = a_t$

Recuerde que si $|\phi|<1$, este proceso es estacionario, a partir de esta condición, se identifican dos regiones admisibles

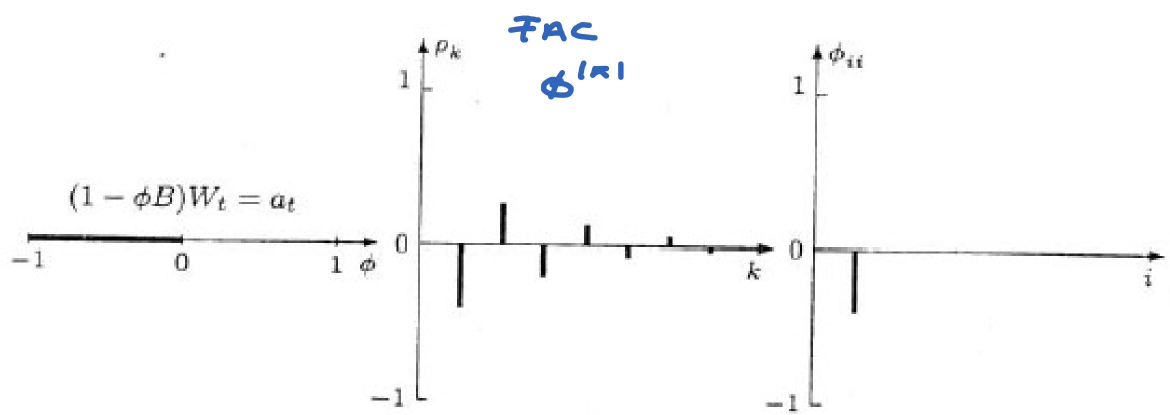
Región admisible 1: $0<\phi<1$



- Conforme $k>0$ crece, la FAC tiende a cero con decaimiento exponencial cuando $0<\phi<1$.

Ejemplo visto en la clase del 18/08/2025

Región admisible 2: $-1<\phi<0$



- Conforme $k>0$ crece, la FAC tiende a cero con signos alternados si $-1<\phi<0$.

Ejemplo $(1+0.4B)X_t = Z_t$

Gráfico de FAC teórica del proceso $(1+0.4B)X_t = Z_t$

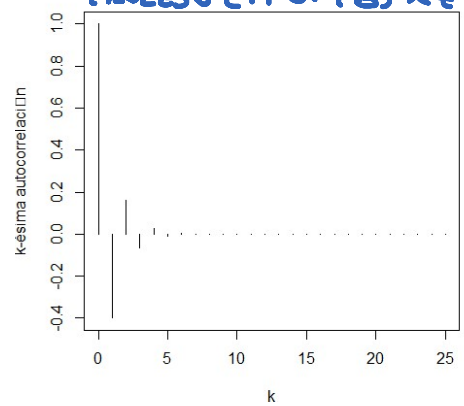
Ejemplo $(1+0.4B)X_t = Z_t$

$\rho_1 = (-0.4)^1$

$\rho_2 = (-0.4)^2$

$\rho_3 = (-0.4)^3$

Gráfico de FAC teórica del proceso $(1+0.4B)X_t = Z_t$



Consideremos un proceso AR(2) $(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2)W_t = a_t$

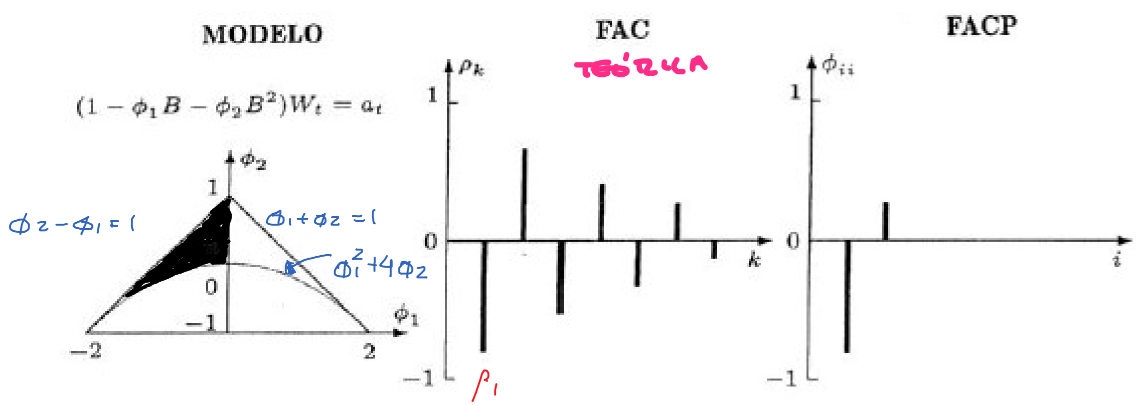
$\{a_t\} \sim WN(0, \sigma_a^2)$

Sabemos que es estacionario si se cumplen 3 condiciones

$|\phi_2|<1$; $\phi_2-\phi_1<1$; y $\phi_2+\phi_1<1$

A partir de estas condiciones se tienen las siguientes regiones admisibles para el proceso AR(2)

Región admisible I $\qquad \phi_1^2+4\phi_2 \geq 0$ y $\phi_1<0$



FAC teórica del proceso AR(2)

$\rho_0 = 1$

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$$

$$\rho_2 = \phi_2 + \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2}$$

- Si $\phi_1^2 + 4\phi_2 \geq 0$, entonces las raíces de la ecuación característica son reales y las autocorrelaciones decaerán exponencialmente a cero. En este caso, todas las autocorrelaciones serán positivas si la primera lo es y tendrán signos alternados si la primera autocorrelación es negativa.

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$$

$$\rho_2 = \phi_2 + \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2}$$

$\vdots$

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2}$$

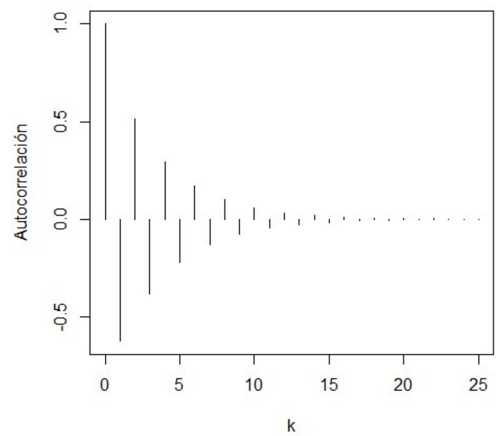
- Si $\phi_1^2 + 4\phi_2 \geq 0$, entonces las raíces de la ecuación característica son reales y las autocorrelaciones decaerán exponencialmente a cero. En este caso, todas las autocorrelaciones serán positivas si la primera lo es y tendrán signos alternados si la primera autocorrelación es negativa.

EJEMPLO $(1+0.5B-0.2B^2)W_t = a_t$

DISCRIMINANTE $\phi_1^2+4\phi_2 = (-0.5)^2 + 4(0.2) \geq 0$

$\phi_1 = -0.5 < 0$

GRÁFICO DE LA FAC TEÓRICA DEL PROCESO $(1+0.5B-0.2B^2)W_t = a_t$



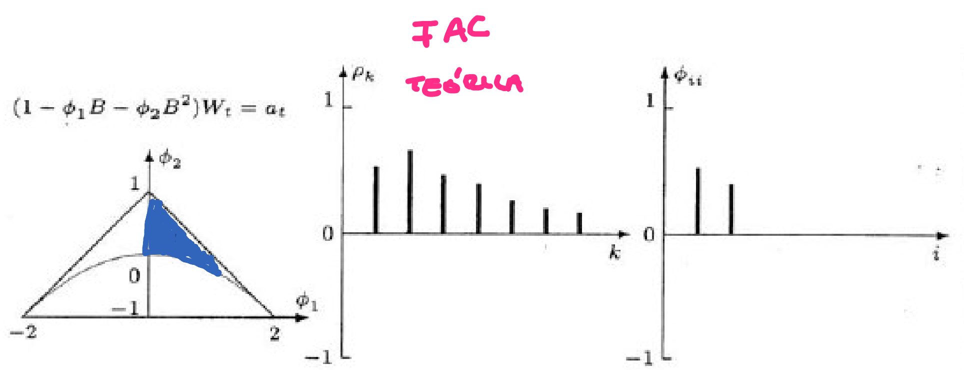
$$\rho_1 = \frac{-0.5}{1-0.2} = -0.625$$

$$\rho_2 = 0.2 + \frac{(-0.5)^2}{1-0.2} = 0.5125$$

$\vdots$

```
> rho(1,beta)  ρ1            ρ2            ρ3            ρ4            ρ5
 [1] -0.6250000000  0.5125000000 -0.3812500000  0.2931250000 -0.2228125000
 [6] ρ6 0.1700312500 -0.1295781250  0.0987953125 -0.0753132812  0.0574157031
[11] -0.0437705078  0.0333683945 -0.0254382988  0.0193928283 -0.0147840739
[16]  0.0112706026 -0.0085921161  0.0065501786 -0.0049935125  0.0038067920
[21] -0.0029020985  0.0022124076 -0.0016866235  0.0012857933 -0.0009802213
```

REGIÓN ADMISIBLE 2: $\phi_1^2+4\phi_2 > 0$ Y $\phi_1 > 0$



- Si $\phi_1^2 + 4\phi_2 \geq 0$, entonces las raíces de la ecuación característica son reales y las autocorrelaciones decaerán exponencialmente a cero. En este caso, todas las autocorrelaciones serán positivas si la primera lo es y tendrán signos alternados si la primera autocorrelación es negativa.

EJEMPLO: $(1-0.3B-0.4B^2)X_t = Z_t$; $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma_Z^2)$

$$\phi_1^2 + 4\phi_2 = (0.3)^2 + 4(0.4) > 0$$

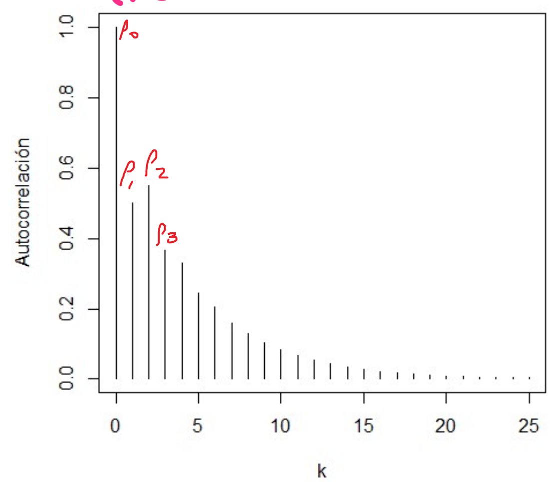
$$\phi_1 = 0.3 > 0$$

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} = \frac{0.3}{1-0.4} =$$

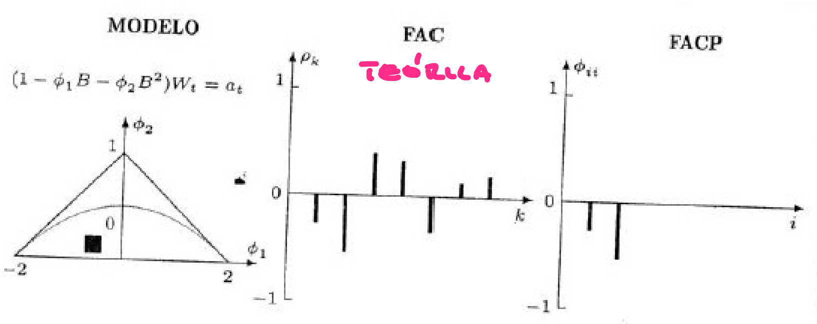
$$\rho_2 = \phi_2 + \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} = 0.4 + \frac{(0.3)^2}{1-0.4} =$$

```
> rho(1,beta)
 [1] 0.500000000 0.550000000 0.365000000 0.329500000 0.244850000 0.205255000
 [7] 0.159516500 0.129956950 0.102793685 0.082820886 0.065963740 0.052917476
[13] 0.042260739 0.033845212 0.027057859 0.021655443 0.017319776 0.013858110
[19] 0.011085344 0.008868847 0.007094792 0.005675976 0.004540709 0.003632603
[25] 0.002906065
```

FAC DEL PROCESO AR(2)
$(1-0.3B-0.4B^2)X_t = Z_t$



REGIÓN ADMISIBLE 3 ; $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$, $\phi_1 < 0$



- Si $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$, entonces las raíces de la ecuación característica son complejas conjugadas y la FAC correspondiente seguirá un comportamiento oscilatorio (sinusoidal) convergente a cero.

EJEMPLO $(1+0.5B+0.7B^2)X_t = Z_t$; $\{Z_t\} \sim WN(0,\sigma_Z^2)$

$$\phi_1^2 + 4\phi_2 = (-0.5)^2 + 4(-0.7) = -2.55 < 0$$

$$\phi_1 < 0$$

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} =$$

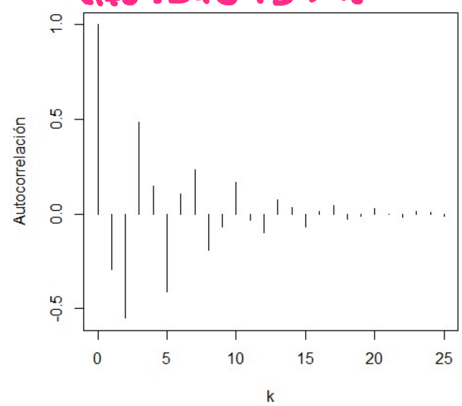
$$\rho_2 = \phi_2 + \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} =$$

```
> rho(1,beta)
 [1] -0.294117647 -0.552941176  0.482352941  0.145882353 -0.410588235
 [6]  0.103176471  0.235823529 -0.190135294 -0.070008824  0.168099118
[11] -0.035043382 -0.100147691  0.074604213  0.032801277 -0.068623588
[16]  0.011350900  0.042361062 -0.029126161 -0.015089663  0.027933144
[21] -0.003403808 -0.017851297  0.011308314  0.006841751 -0.011336695
```

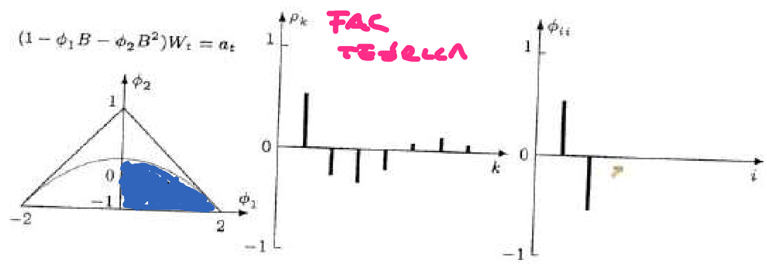
FAC DEL PROCESO
$(1+0.5B+0.7B^2)X_t = Z_t$

$$\rho_2 = \phi_2 + \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} =$$

$(1+0.5B+0.7B^2)X_t = Z_t$



Región admisible 4 $\quad \phi_1^2 + 4\phi_2 < 0 \; ; \; \phi_1 > 0$

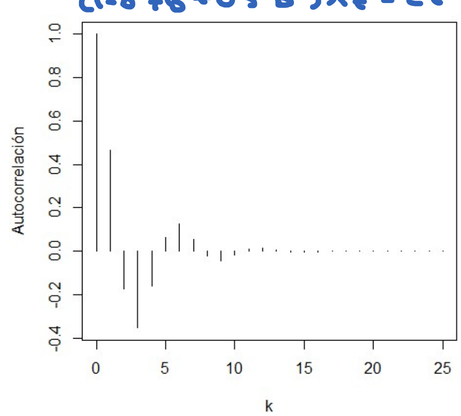


Ejemplo $\quad (1-0.7B+0.5B^2)X_t = Z_t \quad ; \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma_Z^2)$

$\phi_1 = 0.7 \; ; \; \phi_2 = -0.5$

$\phi_1^2 + 4\phi_2 = (0.7)^2 + (4)(-0.5) < 0$

FAC teórica del proceso
$(1-0.7B+0.5B^2)X_t = Z_t$




```
> rho(1,beta)
 [1]  4.666667e-01 -1.733333e-01 -3.546667e-01 -1.616000e-01  6.421333e-02
 [6]  1.257493e-01  5.591787e-02 -2.373216e-02 -4.457145e-02 -1.933393e-02
[11]  8.751970e-03  1.579335e-02  6.679356e-03 -3.221123e-03 -5.594464e-03
[16] -2.305564e-03  1.183338e-03  1.981118e-03  7.951139e-04 -4.339794e-04
[21] -7.013425e-04 -2.739501e-04  1.589062e-04  2.482094e-04  9.429346e-05
```