Semana 8

Table of contents

1 Contrastes de hipótesis para la media de una población normal con Varianza conocida

Supuesto Práctico 1 Con el fin de estudiar el número medio de flexiones continuadas que pueden realizar sus alumnos, un profesor de educación física somete a 75 de ellos, elegidos aleatoriamente, a una prueba. El número de flexiones realizado por cada alumno, así como su sexo y si realizan o no deporte fuera del horario escolar se muestran en el fichero Flexiones.txt.

Se sabe que el número de flexiones se distribuye según una Normal de varianza poblacional 7.5. ¿Puede asumirse, considerando un nivel de significación del 5%, que el número medio de flexiones que realizan los alumnos es de 55?

El contraste de hipótesis asociado a este ejercicio es

$$H_0 \equiv \mu = 55$$
$$H_1 \equiv \mu \neq 55$$

Expresión 5: Contraste de hipótesis del supuesto práctico 1

En primer lugar debemos importar en R los datos que contienen el número de flexiones realizadas por cada alumno. Para ello, utilizamos la orden read.table.

```
datos<- read.table('Flexiones.txt', header = TRUE)
datos
```

```
   Flexiones Sexo Deporte
1         60    H       0
2         41    H       0
3         53    M       1
4         53    M       0
5         41    H       0
6         56    H       0
7         50    H       0
8         53    M       1
9         50    M       1
10        48    M       0
11        50    M       1
12        48    M       1
13        56    H       0
14        52    M       1
15        54    M       0
16        50    H       1
```

17	50	H	0
18	54	H	0
19	52	H	1
20	48	H	0
21	48	H	1
22	35	M	1
23	50	M	1
24	41	M	1
25	56	M	1
26	52	M	1
27	56	M	0
28	54	H	1
29	53	H	0
30	53	M	0
31	53	H	0
32	41	M	1
33	48	M	0
34	50	H	1
35	50	M	1
36	52	H	0
37	53	M	0
38	35	H	0
39	35	H	0
40	54	M	0
41	46	M	1
42	48	H	0
43	50	M	0
44	48	H	0
45	41	M	0
46	48	M	1
47	60	H	1
48	53	M	0
49	54	M	1
50	56	H	1
51	50	H	1
52	41	H	0
53	60	M	1
54	60	M	1
55	54	H	0
56	54	H	0
57	53	H	0
58	35	M	0
59	54	H	0

```
60        48    M       0
61        50    H       0
62        54    H       0
63        54    H       0
64        53    H       0
65        52    H       0
66        50    H       0
67        52    H       0
68        48    H       1
69        46    H       1
70        53    H       0
71        50    H       0
72        35    H       0
73        50    H       1
74        60    M       1
75        50    H       0
```

Una vez hecho esto, introducimos en R el nivel de significación que proporciona el enunciado. $\alpha = 0.05$

```
alpha<-0.05
media<-mean(datos$Flexiones)
mu_0<-55
varianza<-7.5
n<-nrow(datos)
z<-(media-mu_0)/(sqrt(varianza)/sqrt(n))
z
```

```
[1] -15.47408
```

Y también el valor crítico, que en este caso coincide con $z_{1-\alpha/2}$, el cuantil $1-\alpha/2$ de una distribución normal de media 0 y varianza 1.

```
cuantil<-qnorm(1-alpha/2)
cuantil
```

```
[1] 1.959964
```

Como el valor absoluto del estadístico de contraste (15.47408) es mayor que el valor crítico (1.959964), en este caso se rechaza la hipótesis nula en favor de la hipótesis alternativa. Es decir, no puede asumirse que el número medio de flexiones que realizan los alumnos es de 55.

2 Contrastes de hipótesis para la media de una población normal con Varianza desconocida

Supongamos que la varianza poblacional de la variable de interés es desconocida. Nuestro objetivo sigue siendo la resolución del contraste de hipótesis para la media de dicha variable.

$$\begin{array}{ccccc} H_0 \equiv \mu = \mu_0 & & H_0 \equiv \mu \geq \mu_0 & & H_0 \equiv \mu \leq \mu_0 \\ & \text{o} & & \text{o} & \\ H_1 \equiv \mu \neq \mu_0 & & H_1 \equiv \mu < \mu_0 & & H_1 \equiv \mu > \mu_0 \end{array}$$

Expresión 6: Contraste de hipótesis del supuesto práctico 1

Supongamos, de nuevo, una muestra aleatoria $X_1, X_2, ..., X_n$, de tamaño **n** de valores de la variable aleatoria que sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ, ambas desconocidas. Para resolver el contraste de hipótesis para μ en este caso partimos del estadístico de contraste

Supuesto Práctico 2 Considerando nuevamente el conjunto de datos que se ha presentado en el Supuesto práctico1, relativo al número de flexiones y el sexo de los alumnos. Contrastar a un nivel de significación del 2% la hipótesis de que el número medio de flexiones realizada por los alumnos es de 50. Suponer en este caso que el número de flexiones se distribuye según una normal de varianza desconocida. El fichero es Flexiones.txt.

```
datos<- read.table('Flexiones.txt', header = TRUE)
t.test(datos$Flexiones, alternative = 'two.sided', mu = 50, conf.level = 0.98)
```

```
    One Sample t-test

data:  datos$Flexiones
t = 0.15451, df = 74, p-value = 0.8776
alternative hypothesis: true mean is not equal to 50
98 percent confidence interval:
 48.46512 51.74822
sample estimates:
mean of x
 50.10667
```

Entre la información que devuelve la función t.test, encontramos la relativa al intervalo de confianza, que se estudió en la práctica 5. En esta práctica nos centraremos en la referente al contraste de hipótesis.

t = 0.15451, df = 74, p-value = 0.8776 alternative hypothesis: true mean isnotequal to 50 En primer lugar, aparece el valor del estadístico de contraste (0.15451) junto a los

grados de libertad de la distribución t de Student (74) que sigue dicho estadístico de contraste. A continuación, encontramos el p-valor, que en este caso es 0.8776. Por último, el programa nos recuerda que la hipótesis alternativa que se está contrastando es del tipo $\neq$.

Teniendo en cuenta que el p-valor (0.8776) es superior al nivel de significación (0.02) en este ejemplo no podemos rechazar la hipótesis nula, por lo que podemos asumir que el número medio de flexiones que realizan los alumnos es de 50.

3 Contrastes de hipótesis para el parámetro p de una distribución Binomial

Supongamos que X es una variable aleatoria con distribución de probabilidad binomial con parámetro n y π, $X \to B(n, \pi)$, de la que se extrae una muestra aleatoria $X_1, X_2, ..., X_n$ de tamaño n. Sea p la proporción poblacional. Se desea contrastar si el parámetro π puede ser igual a un valor π_0, es decir se desea resolver uno de los siguientes contrastes

Contraste bilateral

$$H_0 \equiv \pi = \pi_0$$
$$H_1 \equiv \pi \neq \pi_0$$

Contraste unilaterales

$$H_0 \equiv \pi \geq \pi_0 \qquad H_0 \equiv \pi \leq \pi_0$$
$$H_1 \equiv \pi < \pi_0 \qquad H_1 \equiv \pi > \pi_0$$

Expresión 12: Tipos de contrastes de hipótesis para la proporción

Supuesto Práctico 3 Considerando nuevamente el conjunto de datos que se ha presentado en el Supuesto práctico1, relativo al número de flexiones y el sexo de los alumnos. Contrastar a un nivel de confianza del 95%, si la proporción de alumnos varones es mayor o igual que 0.5 frente a que dicha proporción es menor. El fichero es Flexiones.txt.

El contraste que debemos resolver es

$$H_0 \equiv \pi_H \geq 0.5$$
$$H_1 \equiv \pi_H < 0.5$$

Expresión 14: Contraste de hipótesis del Supuesto Práctico 3

Para realizar la llamada a la función **prop.test** necesitamos conocer el número de alumnos varones y el número total de estudiantes en la muestra. Para ello utilizamos la función de R table.

En primer lugar, omo hicimos anteriormente, debemos importar en R los datos que contienen el número de flexiones realizadas por cada alumno. Para ello, utilizamos la orden *read.table.*

```r
setwd('C:/Users/abbyc/Desktop/Ciclo II 2022/Análisis estadístico con R/curso-R-2022')
# cambiar al directorio de trabajo donde están los datos
datos<- read.table('Flexiones.txt', header = TRUE)
```

Una vez importado los datos, utilizamos la función de R table como hemos dicho anteriormente

```r
table(datos$Sexo)
```

```
 H  M
43 32
```

De los 75 estudiantes que conforman la muestra, 43 son chicos. Por lo que la llamada a prop.test sería la siguiente:

```r
prop.test(43, 75, p = 0.5, alternative = 'less', conf.level = 0.95)
```

```
    1-sample proportions test with continuity correction

data:  43 out of 75, null probability 0.5
X-squared = 1.3333, df = 1, p-value = 0.8759
alternative hypothesis: true p is less than 0.5
95 percent confidence interval:
 0.0000000 0.6693525
sample estimates:
        p
0.5733333
```

De nuevo, los resultados de la función incluyen información sobre el intervalo de confianza y sobre el contraste de hipótesis. Nos centraremos en esta última.

El valor del estadístico de contraste es 1.3333, con un p-valor de 0.8759. Como el p-valor es mayor que el nivel de significación, que es 0.05, no rechazamos la hipótesis de que la proporción de alumnos es mayor o igual que 0.5.

4 Contrastes de hipótesis para la diferencias de medias de dos poblaciones normales e independientes

De un modo general, dos muestras se dice que son independientes cuando las observaciones de una de ellas no condicionan para nada a las observaciones de la otra, siendo dependientes

en caso contrario. En realidad, el tipo de dependencia que se considera a estos efectos es muy especial: cada dato de una muestra tiene un homónimo en la otra, con el que está relacionada, de ahí el nombre alternativo de muestras apareadas. Por ejemplo, supongamos que se quiere estudiar el efecto de un medicamento, sobre la hipertensión, a un grupo de 20 individuos. El experimento se podría planificar de dos formas:

1. Aplicando el medicamento a 10 de estos individuos y dejando sin tratamiento al resto. Transcurrido un tiempo se miden las presiones sanguíneas de ambos grupos y se contrasta la hipótesis $H_0 : \mu_1 = \mu 2$ vs $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ para evaluar si las medias son iguales o no. Como las muestras están formadas por individuos distintos sin relación entre sí, se dirá que son muestras independientes.
2. Aplicando el medicamento a los 20 individuos disponibles y anotando su presión sanguínea antes y después de la administración del mismo. En este caso los datos vienen dados por parejas, presión antes y después y tales datos están relacionados entre sí. Las muestras son apareadas.

Consideramos ahora dos variables aleatorias independientes X_1 y X_2 con distribuciones normales de parámetro $(\mu_1,' sigma_1)$ y (μ_2, σ_2) respectivamente, de las que vamos a tomar muestras aleatorias independientes de tamaños n_1 y n_2, respectivamente.

Supuesto Práctico 4 Continuando con los datos relativos a las flexiones realizadas por un grupo de estudiantes y asumiendo que las flexiones que realizan los chicos y las que realizan las chicas se distribuyen según sendas distribuciones normales con medias y varianzas desconocidas, contrastar a un nivel de significación del 5% si las varianzas poblacionales de ambas distribuciones pueden asumirse iguales.

El contraste de hipótesis que debemos resolver es

$$H_0 \equiv \sigma_H^2 = \sigma_M^2$$

$$H_1 \equiv \sigma_H^2 \neq \sigma_M^2$$

Expresión 18: Contraste de hipótesis sobre las varianzas del Supuesto Práctico 3 donde σ_H^2 representa la varianza del número de flexiones realizadas por los chicos σ_M^2 y representa la varianza del número de flexiones realizadas por las chicas.

Lo primero que tenemos que hacer para aplicar la función var.test es separar en dos variables los datos relativos a las flexiones realizadas por los chicos y por las chicas.

```
Flexiones.chicos<- datos$Flexiones[datos$Sexo == 'H']
Flexiones.chicas<- datos$Flexiones[datos$Sexo == 'M']
```

```r
# A continuación, utilizamos la función var.test

var.test(Flexiones.chicos, Flexiones.chicas, alternative = 'two.sided', conf.level = 0.95)
```

```
    F test to compare two variances

data:  Flexiones.chicos and Flexiones.chicas
F = 0.87506, num df = 42, denom df = 31, p-value = 0.679
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.4415454 1.6765483
sample estimates:
ratio of variances
         0.8750585
```

Analizando la información relativa al contraste de hipótesis que se incluye en la salida de var.test, vemos que el valor del estadístico de contraste es **0.87506**. La distribución F de Snedecor que sigue el estadístico de contraste tiene 42 grados de libertad en el numerador y 31 en el denominador. El **p-valor** asociado al contraste es 0.679. Como este valor es superior al nivel de significación (que para este ejemplo es 0.05), no podemos rechazar la hipótesis nula que hemos planteado. Es decir, se puede considerar que la varianza del número de flexiones realizadas por chicos y la varianza del número de flexiones realizadas por chicas son iguales.

Supuesto Práctico 5 En vista de los resultados obtenidos en el Supuesto Práctico 4, y suponiendo que el número de flexiones que realizan los alumnos y las alumnas se distribuyen de acuerdo a variables normales de medias y varianzas desconocidas, ¿puede suponerse, a un nivel de significación del 5%, que el número medio de flexiones que realizan los chicos y las chicas es igual?

El contraste que debemos resolver en esta ocasión es

$$H_0 \equiv \mu_H = \mu_M \qquad H_0 \equiv \mu_H - \mu_M = 0$$

o

$$H_1 \equiv \mu_H \neq \mu_M \qquad H_0 \equiv \mu_H - \mu_M \neq 0$$

Expresión 22: Contraste de hipótesis para la diferencia de medias de dos poblaciones normales independientes

En ambos casos μ_H, representa la media poblacional del número de flexiones realizadas por chicos y μ_M es la media poblacional del número de flexiones realizadas por las chicas.

Dado que en el Supuesto práctico 4 se concluyó la igualdad de las varianzas del número de flexiones que hacen chicos y chicas, debemos establecer a **TRUE** el valor del parámetro **var.equal** cuando realicemos la llamada a la función **t.test.**

```
# cambiar al directorio de trabajo donde están los datos
datos<- read.table('Flexiones.txt', header = TRUE)

Flexiones.chicos<- datos$Flexiones[datos$Sexo == 'H']
Flexiones.chicas<- datos$Flexiones[datos$Sexo == 'M']

t.test(Flexiones.chicos, Flexiones.chicas, alternative = 'two.sided', mu = 0, var.equal =
```

```
    Two Sample t-test

data:  Flexiones.chicos and Flexiones.chicas
t = -0.06154, df = 73, p-value = 0.9511
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -2.887271  2.714306
sample estimates:
mean of x mean of y
 50.06977  50.15625
```

Entre la información sobre el contraste de hipótesis que se incluye entre los resultados

se incluye el valor del estadístico de contraste **(-0.06154)**, los grados de libertad de la distribución t de Student que sigue el estadístico de contraste **(73)** y el p-valor **(0.9511)**. Como el p-valor es mayor que el nivel de significación fijado (0.05), no rechazamos la hipótesis nula del contraste.

5 Contrastes de hipótesis para la diferencia de medias de dos poblaciones normales relacionadas

Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ e $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ dos muestras aleatorias de tamaño n y relacionadas, de tal forma que la primera procede de una población $N(\mu_1, \sigma_1)$ y la segunda de una población $N(\mu_2\sigma_2)$.

Antes de plantear y resolver el contraste de hipótesis para la diferencia de medias de estas dos poblaciones, se hace necesario indicar qué se entiende por muestras relacionadas. Se

dice que dos muestras $X_1, X_2, ..., X_n$ e $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ están relacionadas o apareadas cuando los datos de las muestras vienen por parejas, uno de cada una de ellas, de manera que cada individuo proporciona dos observaciones. El contraste que debemos resolver será alguno de los siguientes:

$$\begin{cases} H_0 \equiv \mu_1 - \mu_2 = d_0 \\ H_1 \equiv \mu_1 - \mu_2 \neq d_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 \equiv \mu_1 - \mu_2 \geq d_0 \\ H_1 \equiv \mu_1 - \mu_2 < d_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 \equiv \mu_1 - \mu_2 \leq d_0 \\ H_1 \equiv \mu_1 - \mu_2 > d_0 \end{cases}$$

Expresión 23: Contraste de hipótesis para la diferencia de medias dos poblaciones normales relacionadas

En los casos de muestras relacionadas, se utiliza nuevamente la función t.test para la resolución de contrastes de hipótesis, pero se ha de indicar que los datos que reciben como parámetros provienen de muestras relacionadas incluyendo en la llamada a la función el argumento lógico paired, cuyo valor debe establecerse a TRUE.

t.test (x, y, alternative = c("two.sided", "less", "greater"), mu = 0, paired = TRUE, conf.level = 0.95)

Supuesto Práctico 6 Para estudiar los efectos de un programa de control de peso, el profesor de educación física selecciona aleatoriamente a 6 alumnos y se les toma nota de sus pesos antes y después de pasar por el programa.

Antes	72.0	73.5	70.0	71.5	76.0	80.5
Despues	73.0	74.5	74.0	74.5	75.0	82.0

Tabla 2: Datos del supuesto práctico 6

¿Puede suponerse, a un nivel de significación del 5%, que el programa para el control de peso es efectivo? O, dicho de otra forma, ¿el peso medio de los alumnos antes de someterse al programa es igual al peso medio tras el programa?

El contraste de hipótesis que debemos resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} H_0 \equiv \mu_1 - \mu_2 = d_0 \\ H_1 \equiv \mu_1 - \mu_2 \neq d_0 \end{cases}$$

Expresión 24: Contraste de hipótesis para el Supuesto práctico 6

donde μ_a y μ_d hacen referencia al peso medio poblacional antes y después de pasar por el programa de control de peso, respectivamente.

Como puede observarse, los datos vienen por parejas: peso antes y después, dos datos por individuo. Parece lógico que los datos se encuentren relacionados entre sí.

En primer lugar, vamos a introducir los datos en R.

```
Antes <- c(72.0, 73.5, 70.0, 71.5, 76.0, 80.5)
Despues<- c(73.0, 74.5, 74.0, 74.5, 75.0, 82.0)

#contraste de hipotesis
t.test(Antes, Despues, alternative = 'two.sided', mu = 0, paired = TRUE)
```

```
    Paired t-test

data:  Antes and Despues
t = -2.2238, df = 5, p-value = 0.07676
alternative hypothesis: true mean difference is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -3.4135884  0.2469217
sample estimates:
mean difference
      -1.583333
```

Según los datos que se incluyen en la salida de la función, el estadístico de contraste toma un valor de **-2.2238** y sigue una distribución t de Student con 5 grados de libertad. El p-valor asociado al contraste es **0.07676**. Como este p-valor es mayor que 0.05, que es el nivel de significación del contraste, podemos afirmar que la diferencia entre los pesos medios de los alumnos antes y después de seguir el programa de control de peso es nula o, equivalentemente, que ambos pesos medios pueden suponerse iguales.

6 Contrastes de hipótesis para la diferencia de proporciones

Consideremos dos muestras aleatorias $X_1, X_2, ..., X_{n1}$ e $Y_1, Y_2, ..., Y_{n2}$ de tamaños $n1$ y $n2$ independientes entre sí, extraídas de poblaciones con distribuciones binomiales $B(n1, \pi_1)$ y $B(n2, \pi2)$, respectivamente. Pretendemos resolver alguno de los siguientes contrastes de hipótesis:

$$\begin{cases} H_0 \equiv \pi_1 - \pi_2 = \delta_0 \\ H_1 \equiv \pi_1 - \pi_2 \neq \delta_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 \equiv \pi_1 - \pi_2 \geq \delta_0 \\ H_1 \equiv \pi_1 - \pi_2 < \delta_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 \equiv \pi_1 - \pi_2 \leq \delta_0 \\ H_1 \equiv \pi_1 - \pi_2 > d_0 \end{cases}$$

Expresión 25: Contraste de hipótesis para la diferencia de proporciones

Supuesto Práctico 7 Retomando el conjunto de datos relativo a las flexiones que realizan un grupo de estudiantes, contrastar, a un nivel de significación del 8% si la proporción de alumnos y de alumnas que practican deporte pueden considerarse iguales.

El contraste que vamos a resolver es

$$\begin{cases} H_0 \equiv \pi_H - \pi_M = 0 \\ H_1 \equiv \pi_H - \pi_M \neq 0 \end{cases}$$

Expresión 27: Contraste de hipótesis para el Supuesto práctico 7

donde π_H y π_M representan la proporciones de chicos y chicas que practican deporte, respectivamente.

En primer lugar, utilicemos el comando table para determinar cuántos chicos y cuantas chicas practican deporte.

```
table(datos$Sexo, datos$Deporte)
```

```
   0  1
H 32 11
M 13 19
```

En total, 11 de los 43 y 19 de las 32 chicas muestreados practican deporte fuera del horario escolar. Vamos a crear dos vectores con esta información: en uno indicaremos el total de chicos y chicas que practican deporte y en el otro el total de chicos y chicas en la muestra.

```
vector_Deporte<- c(11, 19)
vector_Sexo<- c(43, 32)
```

Es muy importante que los valores se introduzcan en el mismo orden en los dos vectores. Ahora ya podemos utilizar la función prop.test utilizando estos dos vectores como argumentos.

```r
prop.test(vector_Deporte, vector_Sexo, alternative = 'two.sided', conf.level = 0.92)
```

```
    2-sample test for equality of proportions with continuity correction

data:  vector_Deporte out of vector_Sexo
X-squared = 7.3787, df = 1, p-value = 0.0066
alternative hypothesis: two.sided
92 percent confidence interval:
 -0.5566881 -0.1191840
sample estimates:
  prop 1   prop 2
0.255814 0.593750
```

Según la salida de la función prop.test, el p-valor asociado al contraste es **0.0066**, que al ser menor que el nivel de significación (0.08), nos lleva a concluir que las proporciones de chicos y chicas que hacen deporte no coinciden.

7 Contrastes de hipótesis no paramétricos

En la sesión anterior hemos estudiado contrastes de hipótesis acerca de parámetros poblacionales, tales como la media y la varianza, de ahí el nombre de contrastes paramétricos. En estadística paramétrica se trabaja bajo el supuesto de que las poblaciones poseen distribuciones conocidas, donde cada función de distribución teórica depende de uno o más parámetros poblacionales. Sin embargo, en muchas situaciones, es imposible especificar la forma de la distribución poblacional. El proceso de obtener conclusiones directamente de las observaciones muestrales, sin formar los supuestos con respecto a la forma matemática de la distribución poblacional se llama **teoría no paramétrica.**

En esta sesión vamos a realizar procedimientos que no exigen ningún supuesto, o muy pocos acerca de la familia de distribuciones a la que pertenece la población, y cuyas observaciones pueden ser cualitativas o bien se refieren a alguna característica ordenable. En estos casos, cuando no se dispone de información acerca de qué distribución de probabilidad sigue la variable a nivel poblacional, se pueden utilizar **técnicas estadísticas no paramétricas** para el planteamiento y resolución de **contrastes de hipótesis no paramétricos**. .Estas técnicas se basan exclusivamente en la información que se recoge en la muestra para resolver los contrastes.

Así, uno de los objetivos de esta sesión es el estudio de contrates de hipótesis para determinar si una población tiene una distribución teórica específica. La técnica que nos introduce a estudiar esas cuestiones se llama **Contraste de la Chi-cuadrado para la Bondad de Ajuste**. Una variación de este contraste se emplea para resolver los **Contrastes de Independencia**. Tales

contrastes pueden utilizarse para determinar si dos características (por ejemplo preferencia política e ingresos) están relacionadas o son independientes. Y, por último estudiaremos otra variación del contraste de la bondad de ajuste llamado **Contraste de Homogeneidad**. Tal contraste se utiliza para estudiar si diferentes poblaciones, son similares (u homogéneas) con respecto a alguna característica. Por ejemplo, queremos saber si las proporciones de votantes que favorecen al candidato A, al candidato B o los que se abstuvieron son las mismas en dos ciudades.

7.1 El procedimiento Prueba de la Chi-cuadrado

Hemos agrupado los procedimientos en los que el denominador común a todos ellos es que su tratamiento estadístico se aborda mediante la distribución Chi-cuadrado. El procedimiento Prueba de Chi-cuadrado tabula una variable en categorías y calcula un estadístico de **Chi-cuadrado.** Esta prueba compara las frecuencias observadas y esperadas en cada categoría para contrastar si todas las categorías contienen la misma proporción de valores o si cada categoría contiene una proporción de valores especificada por el usuario.

7.2 Contraste de hipótesis no paramétrico para la independencia de los valores de una variable cualitativa

Supongamos que se dispone de información sobre una variable cualitativa, X, y se quiere comprobar si todas las categorías de la variable aparecen por igual. Es decir, se pretende comprobar si las categorías de la variable son independientes o no. El contraste de hipótesis que se debe resolver es el siguiente:

$$H_0 \equiv \text{Las categorías de la variable X aparecen igual}$$
$$H_1 \equiv \text{Las categorías de la variable X no aparecen igual}$$

Para resolver este contraste en R se utiliza la función chisq.test (que ya se presentó en la práctica 3). Los argumentos de esta función son:

chisq.test(x, p = rep(1/length(x), length(x)))

donde

- **x** es un vector que recoge las frecuencias con las que aparece cada categoría de la variable.
- **p** es un vector, de la misma dimensión que x, que recoge las proporciones que se quieren probar para cada categoría de la variable. Por defecto, se contrasta si todos los valores de la variable aparecen en la misma proporción.

Supuesto Práctico 8

La directora de un hospital quiere comprobar si los ingresos en el hospital se producen en la misma proporción durante todos los días de la semana. Para ello, se anota el número de ingresos durante una semana cualquiera. Los datos se recogen en la siguiente tabla:

Día de la semana	Númerp de ingresos
Lunes	78
Martes	90
Miercoles	94
Jueves	89
Viernes	110
Sábado	84
Domingo	44

Tabla 2: Datos del supuesto práctico 8

Contrastar, a un nivel de significación del 5%, si la hipótesis de la directora del hospital puede suponerse cierta. ¿Puede asumirse que las proporciones de ingresos de lunes a domingo son (0.15, 0.15, 0.15, 0.15, 0.20, 0.15, 0.05)?

Solución En primer lugar vamos a introducir los datos en R.

```
frecuencias <- c(78, 90, 94, 89, 110, 84, 44)
```

El contraste que se debe resolver es:

$$H_0 \equiv \text{Los ingresos en el hospital se producen en la misma proporción todos los días de la semana}$$
$$H_1 \equiv \text{Los ingresos en el hospital no se producen en la misma proporción todos los días de la semana}$$

Para resolver este contraste se usa la función chisq.test.

```
chisq.test(frecuencias)
```

```
    Chi-squared test for given probabilities

data:  frecuencias
X-squared = 29.389, df = 6, p-value = 5.135e-05
```

El estadístico de contraste, que sigue una distribución chi-cuadrado, toma el valor **29.389**. Los grados de libertad de la distribución chi-cuadrado para este ejemplo son 6. El p-valor asociado al contraste es menor que 0.05 por lo que, considerando un nivel de significación del 5%, se rechaza la hipótesis nula. Es decir, se concluye que los ingresos hospitalarios no se producen en la misma proporción todos los días de la semana.

Para comprobar si el vector (0.15, 0.15, 0.15, 0.15, 0.20, 0.15, 0.05) puede considerarse como el vector de proporciones de ingresos hospitalarios durante los 7 días de la semana, creamos un vector en R que recoja estos valores:

```
proporciones<-c(0.15, 0.15, 0.15, 0.15, 0.20, 0.15, 0.05)
```

Volvemos a llamar a la función chisq.test incluyendo como argumento el vector que acabamos de definir.

```
chisq.test(frecuencias, p = proporciones)
```

```
    Chi-squared test for given probabilities

data:  frecuencias
X-squared = 9.5286, df = 6, p-value = 0.146
```

En este caso, el valor del estadístico de contraste es **9.5286**. El p-valor asociado es **0.146** que, al ser superior a 0.05, nos indica que no se puede rechazar la hipótesis nula. Esto equivale a decir que, a un nivel de significación del 5%, puede suponerse que los ingresos hospitalarios se producen según los valores que se recogen en el vector proporciones.

Supuesto Práctico 9 Lanzamos un dado 720 veces y obtenemos los resultados que se muestran en la tabla.

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	116	120	115	120	125	124

Tabla 2: Datos del supuesto práctico 9

Contrastar la hipótesis de que el dado está bien construido.

Solución Comencemos introduciendo en R las frecuencias con las que aparecen los valores del dado.

```
frecuencias <- c(116, 120, 115, 120, 125, 124)
```

Que el dado esté bien construido equivale a decir que todos sus valores aparecen en la misma proporción. Por tanto, el contraste de hipótesis que se debe resolver es el siguiente:

$H_0 \equiv$ Los valores del dado aparecen en la misma proporción $H_0 \equiv$ Los valores del dado no aparecen en la misma proporción

Para resolver este contraste de hipótesis se utiliza la función **chisq.test**, que recibe como argumento el vector de frecuencias.

```
chisq.test(frecuencias)
```

```
    Chi-squared test for given probabilities

data:  frecuencias
X-squared = 0.68333, df = 5, p-value = 0.9839
```

El valor del estadístico de contraste es **0.68333** y el p-valor asociado es igual a 0.984. Como este p-valor es superior a 0.05 no se puede rechazar la hipótesis nula por lo que, a un nivel de significación del 5%, concluimos que todos los valores del dado aparecen en la misma proporción. Dicho de otra forma, el dado está bien construido.

7.3 Contraste de hipótesis no parametricos para la independencia de dos variables cualitativas

Supongamos que se dispone de datos de dos variables cualitativas, X e Y, y se quiere comprobar si los valores que toma una de ellas dependen en cierta medida de los valores que toma la otra. En tal caso, se dice que las variables X e Y son dependientes. Para comprobar la dependencia (o, equivalentemente, la independencia) de X e Y se debe resolver el siguiente contraste de hipótesis

$H_0 \equiv$ X e Y son variables independientes $H_1 \equiv$ X e Y no son variables independientes (son dependientes)

En R se usa el comando chisq.test para resolver este tipo de contrastes. Dicho comando tiene los siguientes argumentos:

chisq.test (x, correct = TRUE)

donde

- **x** es el nombre de la tabla de doble entrada (a la cual se suele denominar tabla de contingencia, como se verá en el apéndice de esta misma práctica) para las dos variables cualitativas

- **correct** es un argumento lógico que indica si es necesaria una corrección por continuidad (que se denomina corrección por continuidad de Yates) a la hora de calcular el estadístico de contraste.

Supuesto Práctico 10 La siguiente tabla muestra información sobre el número de ejemplares de 7 especies de peces avistados aguas arriba y aguas abajo en un río.

	Zona	
	Aguas arriba	*Aguas abajo*
EspecieA	37	19
EspecieB	12	10
EspecieC	10	7
EspecieD	18	20
EspecieE	11	8
EspecieF	16	12
EspecieG	59	24

Tabla5; Datos del Supuesto Práctico 10

Contrastar, a un nivel de significación del 5%, si la especie de pez y la zona de avistamiento pueden considerarse variables independientes.

Solución En primer lugar, introduzcamos en R los datos que proporciona el enunciado y construyamos la tabla de contingencia.

```
frecuencias <- c(37, 19, 12, 10, 10, 7, 18, 20, 11, 8, 16, 12, 59, 24)
tabla_conting <- matrix (frecuencias, 7, 2, byrow = TRUE, dimnames =
                           list(c('A', 'B', 'C', 'D', 'E', 'F', 'G'),
                                c('Aguas_Arriba','Aguas_abajo')))
tabla_conting
```

```
  Aguas_Arriba Aguas_abajo
A           37          19
B           12          10
C           10           7
D           18          20
```

```
E           11           8
F           16          12
G           59          24
```

El contraste de hipótesis que se debe resolver es:

$H_0 \equiv$ La especie y la zona de avistamiento son independientes\ $H_1 \equiv$ La especie y la zona de avistamiento no son independientes

A continuación, usaremos la función chisq.test (sin aplicar la corrección por continuidad) para resolver el contraste.

```
chisq.test(tabla_conting, correct = FALSE)
```

```
    Pearson's Chi-squared test

data:  tabla_conting
X-squared = 7.7604, df = 6, p-value = 0.2562
```

El estadístico de contraste, que sigue una distribución chi-cuadrado con 6 grados de libertad, toma el valor **7.7604**. El p-valor asociado al contraste es **0.2562**. Como este p-valor es mayor que 0.05, no podemos rechazar la hipótesis nula por lo que concluimos que la especie y la zona de avistamiento son variables independientes. Esto es, para cada especie, se observan el mismo número de peces aguas arriba y aguas abajo en el río.

Supuesto Práctico 11

Se realiza una investigación para determinar si hay alguna asociación entre el peso de un estudiante y un éxito precoz en la escuela. Se selecciona una muestra de 50 estudiantes y se clasifica a cada uno según dos criterios, el peso y el éxito en la escuela. Los datos se muestran en la tabla adjunta

Éxito/Sobrepeso	SI	NO
SI	162	263
NO	38	37

Tabla 6: Datos del supuesto práctico 11

Contrastar, a un nivel de significación del 5%, si las dos variables estudiadas están relacionadas o si, por el contrario, son independientes.

Solución Introducimos los datos en R

```r
 frecuencias <- c(162, 263, 38, 37)
tabla_conting <- matrix (frecuencias, 2, 2, byrow = TRUE, dimnames = list(c
            ('Exito = Sí', 'Exito = No'), c('Sobrepeso = Sí', 'Sobrepeso = No')))
tabla_conting
```

```
           Sobrepeso = Sí Sobrepeso = No
Exito = Sí            162            263
Exito = No             38             37
```

El contraste de hipótesis que se debe resolver es:

$H_0 \equiv$ El exito en la escuela y el sobrepeso son independientes\ $H_0 \equiv$ El exito en la escuela y el sobrepeso no son independientes

Vamos a resolver el contraste usando la función chisq.test (sin aplicar la corrección por continuidad).

```r
chisq.test(tabla_conting, correct = FALSE)
```

```
    Pearson's Chi-squared test

data:  tabla_conting
X-squared = 4.183, df = 1, p-value = 0.04083
```

El p-valor asociado a este contraste es **0.04083**. Como este p-valor es menor que 0.05, se rechaza la hipótesis nula del contraste, por lo que concluimos que el éxito escolar y el sobrepeso son variables dependientes. Esto es, los valores de una dependen de los valores de la otra.

7.4 Otros contrastes no paramétricos

7.5 El procedimiento Prueba binomial

Supuesto Práctico 12

Se quiere comprobar si la proporción de hombres y mujeres en un municipio andaluz es la misma o no. Para ello, se selecciona una muestra aleatoria de habitantes del municipio, de los cuales 258 son hombres y 216 son mujeres. A un nivel de significación del 5%, ¿puede asumirse cierta la igualdad en el número de hombres y mujeres?

Solución

Comencemos planteando las hipótesis del contraste. En este caso, se quiere probar la igualdad de hombres y de mujeres en el municipio. Para ello, es posible plantear el contraste de hipótesis de dos formas distintas. Por un lado, se puede contrastar si la proporción de hombres es de 0.5 (en cuyo caso la proporción de mujeres será también 0.5 y habrá equidad entre ambos géneros) frente a que esta proporción es distinta de 0.5. Pero, alternativamente, se puede contrastar si la proporción de mujeres es de 0.5 (lo que implica que la proporción de hombre será, igualmente, de 0.5 y habrá equidad entre géneros) frente a que esta proporción es distinta de 0.5.

En cualquier caso, el contraste a resolver es

$$\begin{cases} H_0 \equiv p = 0.5 \\ H_1 \equiv p \neq 0.5 \end{cases}$$

Expresión 31: Contraste de hipótesis para el Supuesto práctico 12

donde p representa la proporción de hombres (o de mujeres, dependiendo de la forma de resolver el contraste que se siga) en la población.

Utilicemos la función **binom.test** para resolver el contraste.

```
binom.test(258, n = 474, p = 0.5, alternative = 'two.sided', conf.level = 0.95)
```

```
    Exact binomial test

data:  258 and 474
number of successes = 258, number of trials = 474, p-value = 0.05956
alternative hypothesis: true probability of success is not equal to 0.5
95 percent confidence interval:
 0.4982562 0.5897954
sample estimates:
probability of success
             0.5443038
```

En la salida aparecen los datos de entrada que se han usado para resolver el contraste (258 hombres de 474 habitantes muestreados) así como el tipo de la hipótesis alternativa (distinto de) y la proporción que se ha usado como referente para el contraste (0.5).

También aparece un p-valor, que es el que nos ayuda a resolver el contraste. En este caso, el p-valor es **0.05956**. Como es mayor que 0.05, no podemos rechazar la hipótesis nula, por lo que podemos asumir que la proporción de hombres en la población es de 0.5. Consecuentemente,

la proporción de mujeres también puede considerarse igual a 0.5 y puede concluirse que el número de hombres y mujeres en el municipio es el mismo.

Por último, en la salida se incluye un intervalo de confianza al nivel de confianza indicado en la llamada a **binom.test** (95% en nuestro caso), para la proporción de hombres en el municipio. Este intervalo es **(0.4982, 0.5897)**. Como era de esperar, la proporción de referencia pertenece al intervalo calculado.

Si se hubiese optado por considerar **p** como la proporción de mujeres en el municipio y resolver el contraste a partir de esta proporción se llegaría a la misma conclusión, tal y como se muestra a continuación.

```
binom.test(216, n = 474, p = 0.5, alternative = 'two.sided', conf.level = 0.95)
```

```
    Exact binomial test

data:  216 and 474
number of successes = 216, number of trials = 474, p-value = 0.05956
alternative hypothesis: true probability of success is not equal to 0.5
95 percent confidence interval:
 0.4102046 0.5017438
sample estimates:
probability of success
             0.4556962
```

Supuesto Práctico 13

Entre los pacientes con cáncer de pulmón, el 90% o más muere generalmente en el espacio de tres años. Como resultado de nuevas formas de tratamiento, se cree que esta tasa se ha reducido. En un reciente estudio sobre 150 paciente diagnosticados de cáncer de pulmón, 128 murieron en el espacio de tres años. ¿Se puede afirmar que realmente ha disminuido la tasa de mortalidad?

Solución
En primer lugar, vamos a plantear las hipótesis del contraste.

$$\begin{cases} H_0 \equiv p \geq 0.9 \quad eltratamiento\ no\ es\ efectivo \\ H_1 \equiv p < 0.9 \quad eltratamiento\ es\ efectivo \end{cases}$$

Expresión 32: Contraste de hipótesis para el Supuesto práctico 13

A continuación, utilizaremos la función binom.test para resolver el contraste. Teniendo en cuenta el número de pacientes de la muestra que fallecieron (128), el número de pacientes totales en la muestra (150), la proporción que se quiere contrastar (0.9) y la forma de la hipótesis alternativa ("menor que").

```
binom.test(128, 150, p = 0.9, alternative = 'less', conf.level = 0.95)
```

```
    Exact binomial test

data:  128 and 150
number of successes = 128, number of trials = 150, p-value = 0.04396
alternative hypothesis: true probability of success is less than 0.9
95 percent confidence interval:
 0.0000000 0.8985727
sample estimates:
probability of success
             0.8533333
```

El p-valor asociado al contraste es 0.04396. De manera que, considerando un nivel de significación del 5%, rechazamos la hipótesis nula, por lo que se puede concluir que la proporción de pacientes que fallecieron en el espacio de tres años es inferior a 0.9 y, consecuentemente, que el tratamiento es efectivo.

7.6 Contraste de aleatoriedad. Test de Rachas

El procedimiento Prueba de Rachas contrasta la aleatoriedad de un conjunto de observaciones de una variable continua. Para ello, el test de rachas cuenta las cadenas de valores consecutivos que presenta la variable por encima y por debajo de un determinado punto de corte. Cada uno de estas cadenas recibe el nombre de racha (de ahí el nombre del contraste). Un número muy elevado o muy reducido de rachas apuntarán hacia la no aleatoriedad de los datos que componen la muestra.

Una racha es una secuencia de observaciones similares, una sucesión de símbolos idénticos consecutivos. Ejemplo: + + - - - + - - + + + + - - - (6 rachas). Una muestra con un número excesivamente grande o excesivamente pequeño de rachas sugiere que la muestra no es aleatoria.

Las hipótesis del contraste son las siguientes:

H0 Los datos de la muestra son aleatorios

H1 Los datos de la muestra no son aleatorios

Para resolver el contraste con R se utiliza la función runs.test del paquete randtests. De manera que el primer paso es instalar y cargar este paquete.

```
#install.packages('randtests')
library(randtests)
```

Supuesto Práctico 14

Se realiza un estudio sobre el tiempo en horas de un tipo determinado de escáner antes de la primera avería. Se ha observado una muestra de 10 escáner y se ha anotado el tiempo de funcionamiento en horas: 18.21; 2.36; 17.3; 16.6; 4.70; 3.63; 15.56; 7.35; 9.78; 14.69. A un nivel de significación del 5%, ¿se puede considerar aleatoriedad en la muestra?

Solución

Formulamos el contraste que debemos resolver.

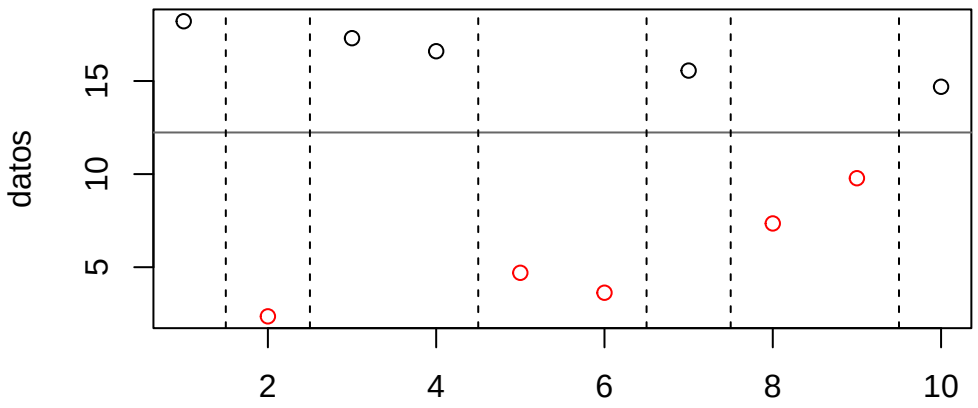
$H_0 \equiv$ Los datos de la muestra son aleatorios\ $H_1 \equiv$ Los datos de la muestra no son aleatorios

Comenzamos introduciendo los datos en R:

```
datos <- c(18.21, 2.36, 17.3, 16.6, 4.70, 3.63, 15.56, 7.35, 9.78, 14.69)
```

Para resolver el contraste, cargamos el paquete **randtests** y, a continuación, llamamos a la función **runs.test**. Cuando llamamos a esta función, debemos tener en cuenta que la hipótesis alternativa es del tipo **"distinto de"**. Por otra parte, como el enunciado no especifica ningún punto de corte para transformar los valores del vector numérico en valores dicotómicos, este punto de corte vendrá dado por la mediana de los datos (función median en R).

```
#library(randtests)
runs.test (datos, alternative = 'two.sided', threshold = median(datos), plot = TRUE)
```




```
    Runs Test

data:  datos
statistic = 0.67082, runs = 7, n1 = 5, n2 = 5, n = 10, p-value = 0.5023
alternative hypothesis: nonrandomness
```

Según los resultados del test de rachas, se han encontrado 7 rachas (runs), que vienen separadas por líneas discontinuas verticales. Hay 5 valores por encima de la mediana (n1), marcados en negro, y otros 5 valores por debajo de la mediana (n2), marcados en rojo.

El p-valor asociado al contraste es 0.5023 superior a 0.05, por lo que no es posible rechazar la hipótesis nula. Por tanto, podemos concluir que los datos de la muestra son aleatorios.

7.7 Contraste sobre bondad de ajuste: Procedimiento Prueba de Kolmogorov-Smirnov

Mediante el contraste de bondad de ajuste de Kolmogorv-Smirnov se prueba si los datos de una muestra proceden, o no, de una determinada distribución de probabilidad. Lo que se hace es comparar la función de distribución acumulada que se calcula a partir de los datos de la muestra con la función de distribución acumulada teórica de la distribución con la que se compara.

El contraste de hipótesis que se plantea es el siguiente:

$H_0 \equiv$ Los datos de la muestra proceden de la distribución de probabilidad \ $H_1 \equiv$ Los datos de la muestra no proceden de la distribución de probabilidad

Supuesto Práctico 15

Las puntuaciones de 10 individuos en una prueba de una oposición han sido las siguientes: 41.81, 40.30, 40.20, 37.14, 39.29, 38.79, 40.73, 39.26, 35.74, 41.65. ¿Puede suponerse, a un nivel de significación del 5% que dichas puntuaciones se ajustan a una distribución normal de media 40 y desviación típica 3?

Solución

El contraste de hipótesis que se plantea es el siguiente:

$H_0 \equiv$ Los datos de la muestra proceden de una distribución N(40,3) $H_1 \equiv$ Los datos de la muestra no proceden de de una distribución N(40,3)

Comenzamos introduciendo los datos en R:

```
datos <- c(41.81, 40.30, 40.20, 37.14, 39.29, 38.79, 40.73, 39.26, 35.74, 41.65)
```

A continuación, se resuelve el contraste mediante una llamada a la función ks.test. Debemos tener en cuenta que la distribución de comparación es la distribución normal (por tanto, el argumento y tomará el valor pnorm) de media igual a 40 y desviación típica igual a 3.

```
ks.test(datos, y = pnorm, 40, 3, alternative = 'two.sided')
```

```
    Exact one-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  datos
D = 0.27314, p-value = 0.3752
alternative hypothesis: two-sided
```

En este caso, el valor del estadístico de contraste es **0.27314** y el p-valor asociado al contraste es **0.3752**. Como el p-valor es superior a 0.05 no podemos rechazar la hipótesis nula, por lo que concluimos que los datos de la muestra proceden de una distribución normal de media 40 y de desviación típica 3.

7.8 Pruebas para dos muestras independientes

El procedimiento Pruebas para dos muestras independientes compara dos grupos de casos existentes en una variable y comprueba si provienen de la misma población (homogeneidad). Estos contrastes, son la alternativa no paramétrica de los tests basados en el t de Student, Al

igual que con el test de Student, se tienen dos grupos de observaciones independientes y se compara si proceden de la misma población.

Supuesto Práctico 16

En unos grandes almacenes se realiza un estudio sobre el rendimiento de ventas de los vendedores. Para ello, se observa durante 10 días el número de ventas de dos vendedores:

Vendedor A: 10 40 60 15 70 90 30 32 22 13 Vendedor B: 45 60 35 30 30 15 50 20 32 9

Contrastar, considerando un nivel de significación del 5%, si los rendimientos medianos de ambos vendedores pueden asumirse iguales.

Solución

Comenzamos introduciendo los datos de ventas de los dos vendedores:

```
datosA <- c (10, 40, 60, 15, 70, 90, 30, 32, 22, 13)
datosB <- c (45, 60, 35, 30, 30, 15, 50, 20, 32, 9)
```

A continuación, vamos a plantear el contraste que se debe resolver

$$\begin{cases} H_0 \equiv Me_A - Me_B = 0 \\ H_1 \equiv Me_A - Me_B \neq 0 \end{cases}$$

Expresión 35: Contraste de hipótesis para diferencia de medias

O, equivalentemente

$$\begin{cases} H_0 \equiv Me_A = Me_B \\ H_1 \equiv Me_A \neq Me_B \end{cases}$$

Expresión 36: Contraste de hipótesis para diferencia de medias

Vamos a resolver el contraste utilizando la función **wilcox.test**. Para ello, tendremos en cuenta que los datos proceden de muestras independientes, que el valor de la diferencia entre las medianas que se pretende comprobar es 0 y que la hipótesis alternativa del contraste es del tipo "distinto de". Además, indicaremos que se incluya el intervalo de confianza para la diferencia de las medianas entre las salidas de la función y que no se aplique la corrección por continuidad

```r
wilcox.test (datosA, y = datosB, alternative = 'two.sided', mu = 0, paired = FALSE,
             correct = FALSE, conf.int = TRUE, conf.level = 0.95)
```

```
Warning in wilcox.test.default(datosA, y = datosB, alternative = "two.sided", :
cannot compute exact p-value with ties
```

```
Warning in wilcox.test.default(datosA, y = datosB, alternative = "two.sided", :
cannot compute exact confidence intervals with ties
```

```
    Wilcoxon rank sum test

data:  datosA and datosB
W = 52.5, p-value = 0.8497
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -17.00003  25.00003
sample estimates:
difference in location
             0.5611639
```

En este caso, el p-valor asociado al contraste es, aproximadamente, 0.85. Como este p-valor es mayor que 0.05 no se puede rechazar la hipótesis nula, considerando un nivel de significación del 5%. Por tanto, concluimos que las medianas de las ventas de ambos vendedores pueden asumirse iguales. El intervalo de confianza para la diferencia de las medianas incluye, como era de esperar, el valor 0.

7.9 Pruebas para dos muestras relacionadas

Esta prueba es similar a la anterior, con la salvedad de que ahora se supone que los datos de las muestras están relacionados, es decir, no son independientes.

Supuesto Práctico 17 En un encinar de Navarra se pretende comprobar si un tratamiento ayuda a disminuir el nivel de húmedas de las hojas de las encinas. Para ello, se realiza un estudio a 10 encinas, en las que se seleccionan aleatoriamente 10 hojas y se registra el nivel de humedad de las hojas antes y después del tratamiento. Los resultados son los siguientes:

Suponiendo un nivel de significación del 5%, ¿Puede suponerse efectivo el tratamiento?

Solución En primer lugar, introduzcamos los datos en dos vectores numéricos en R.

Antes	10.5	9.7	13.3	7.5	12.8	15.2	11.2	10.7	5.2	18.9
Después	11.2	7.8	9.2	3.4	8.9	10.8	11.4	8.5	6.2	11.1

Tabla 7; Datos del Supuesto Práctico 17

```
datosAntes <- c(10.5, 9.7, 13.3, 7.5, 12.8, 15.2, 11.2, 10.7, 5.2, 18.9)
datosDespues <- c(11.2, 7.8, 9.2, 3.4, 8.9, 10.8, 11.4, 8.5, 6.2, 11.1)
```

$$\begin{cases} H_0 \equiv Me_A = Me_B \\ H_1 \equiv Me_A > Me_B \end{cases}$$

Expresión 39: Contraste de hipótesis paraSupuesto Práctico 17

Vamos a resolver el contraste usando la función wilcox.test. Hay que recordar que como los datos son relacionados, debemos asignar al parámetro paired el valor TRUE.

```
wilcox.test (datosAntes, y = datosDespues, alternative = 'greater', mu = 0,
             paired = TRUE, correct = FALSE)
```

```
    Wilcoxon signed rank exact test

data:  datosAntes and datosDespues
V = 49, p-value = 0.01367
alternative hypothesis: true location shift is greater than 0
```

En este ejemplo, el p-valor asociado al contraste es **0.013**, inferior a 0.05, por lo que se rechaza la hipótesis nula considerando un nivel de significación del 5%. Esto quiere decir que el tratamiento utilizado es efectivo para reducir el nivel de humedad de las hojas de las encinas.

8 Ejercicios Guiados

8.1 Ejercicio Guiado1

Un fabricante diseña un experimento para estimar la tensión de ruptura media de una fibra es 20. Para ello, observa las tensiones de ruptura, en libras, de 16 hilos de dicha fibra seleccionados aleatoriamente.

a) Si la tensión de ruptura se distribuye según una normal de desviación típica

b) Si la tensión de ruptura se distribuye según una normal de desviación típica desconocida.

Las tensiones son 20.8, 20.6, 21.0, 20.9, 19.9, 20.2, 19.8, 19.6, 20.9, 21.1, 20.4, 20.6, 19.7, 19.6, 20.3, 20.7.

Solución:

En ambos casos, el contraste de hipótesis que debemos resolver es

$$\begin{cases} H_0 \equiv \mu = 20 \\ H_1 \equiv \mu \neq 20 \end{cases}$$

Expresión 40: Contraste de hipótesis para el Ejercicio Guiado1

En primer lugar, introduciremos en un vector los datos de las 16 tensiones observadas.

```
tensiones <- c(20.8, 20.6, 21.0, 20.9, 19.9, 20.2, 19.8, 19.6, 20.9, 21.1, 20.4,
               20.6,19.7, 19.6, 20.3, 20.7)
```

También indicamos el nivel de significación, μ_0 y la desviación típica poblacional de la variable que proporciona el enunciado

```
alpha <- 0.02
mu_0 <- 20
desv_tipica <- 0.45
```

a) Si la tensión de ruptura se distribuye según una normal de desviación típica

En este primer caso, y dado que conocemos la desviación típica poblacional de la distribución de la tensión de la fibra, debemos calcular manualmente los valores del estadístico de contraste y del valor crítico, que serán

```
n <- length(tensiones)
media <- mean(tensiones)
Z <- (media - mu_0) / (desv_tipica/sqrt(n))
Z
```

```
[1] 3.388889
```

```r
cuantil <- qnorm(1 - alpha/2);cuantil
```

```
[1] 2.326348
```

De este modo, ya tenemos todo lo necesario para la resolución del contraste. Como el valor absoluto del estadístico de contraste 3.3888 es mayor que el cuantil Z1- /2 , rechazamos la hipótesis nula en favor de la alternativa. Es decir, no puede asumirse que la tensión media de ruptura de la fibra sea de 20 unidades.

b) Si la tensión de ruptura se distribuye según una normal de desviación típica desconocida.

Cuando la desviación típica no se conoce, usamos la función test para obtener el intervalo de confianza

```r
t.test(tensiones, alternative = 'two.sided', mu = 20, conf.level = 0.98)
```

```
    One Sample t-test

data:  tensiones
t = 2.9154, df = 15, p-value = 0.01066
alternative hypothesis: true mean is not equal to 20
98 percent confidence interval:
 20.04092 20.72158
sample estimates:
mean of x
 20.38125
```

En este segundo caso, el valor del estadístico de contraste es **2.9154**. El p-valor asociado al contraste es **0.01066**, que al ser menor que 0.02, el nivel de significación, nos lleva también al rechazo de la hipótesis nula.

En este segundo caso, el intervalo de confianza para la tensión media de la fibra, al 98% de confianza, es **(20.04092, 20.72158)**.

8.2 Ejercicio Guiado2

En una muestra de 40 alumnos, 25 de ellos están conformes con las decisiones que ha tomado el profesor con respecto a las calificaciones. ¿Puede suponerse, con un nivel de significación del 5%, que la mitad o más de los alumnos están de acuerdo con las calificaciones del profesor?

Solución:

En este caso, el contraste que se debe resolver es:

$$\begin{cases} H_0 \equiv \pi \geq 0.5 \\ H_1 \equiv \pi < 0.5 \end{cases}$$

Expresión 41: Contraste de hipótesis para el Ejercicio Guiado2

En este caso, debemos utilizar la función prop.test para resolver el contraste de hipótesis anterior. Disponemos tanto del número de alumnos que presentan la característica de interés (estar conforme con el profesor) como del número total de alumnos en la muestra, de manera que podemos realizar la llamada a la función tal y como sigue:

```
prop.test(25, 40, p = 0.5, alternative = 'less', conf.level = 0.95)
```

```
    1-sample proportions test with continuity correction

data:  25 out of 40, null probability 0.5
X-squared = 2.025, df = 1, p-value = 0.9226
alternative hypothesis: true p is less than 0.5
95 percent confidence interval:
 0.0000000 0.7501004
sample estimates:
    p
0.625
```

El p-valor para este contraste es 0.9226, el cual es mayor que el nivel de significación, que es 0.05. Por ello, no podemos rechazar la hipótesis nula del contraste y concluiremos diciendo que la mitad o más de los alumnos están de acuerdo con las calificaciones del profesor.

8.3 Ejercicio Guiado3

Una agencia estatal vigila la calidad del agua para la cría de peces. Esta agencia desea comparar la cantidad media de cierta sustancia tóxica en dos ríos contaminados por desperdicios industriales. Se seleccionaron 11 muestras en un río y 8 muestras en el otro. Los resultados de los análisis fueron:

Río 1: 10, 10, 12, 13, 9, 8, 12, 12, 10, 14, 8

Río 2: 11, 8, 9, 7, 10, 8, 8, 10

Si las dos poblaciones son normales e independientes, ¿puede suponerse que la cantidad media de sustancia tóxica presente en ambos ríos es la misma? Considerar un nivel de significación del 5%.

Solución:

En primer lugar introducimos los datos en R:

```
Rio1 <- c(10, 10, 12, 13, 9, 8, 12, 12, 10, 14, 8)
Rio2 <- c(11, 8, 9, 7, 10, 8, 8, 10)
```

Aunque el enunciado nos pide resolver un contraste de hipótesis para la diferencia de la cantidad media de sustancia tóxica en ambos ríos, primero debemos saber si la variabilidad del nivel de sustancia tóxica en ambos ríos puede considerarse igual. Para ello, resolveremos el siguiente contraste de hipótesis:

$$\begin{cases} H_0 \equiv \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 \equiv \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

Expresión 42: Contraste de hipótesis para el Ejercicio Guiado3

Para resolver este primer contraste, empleamos la función **var.test**

```
var.test(Rio1, Rio2, alternative = 'two.sided', conf.level = 0.90)
```

```
    F test to compare two variances

data:  Rio1 and Rio2
F = 2.1846, num df = 10, denom df = 7, p-value = 0.3119
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
90 percent confidence interval:
 0.6007504 6.8498698
sample estimates:
ratio of variances
          2.184643
```

Según los resultados de var.test, el estadístico de contraste toma el valor **2.1846**. El p-valor asociado al contraste es **0.3119**, que es mayor que el nivel de significación (0.10). Por tanto, no podemos rechazar la hipótesis nula o, equivalentemente, podemos asumir que ambas varianzas son iguales en ambos ríos.

Teniendo en cuenta esta información, resolveremos el contraste para la diferencia de medias, que en este caso toma la forma

$$\begin{cases} H_0 \equiv \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1 \equiv \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$$

Expresión 43: Contraste de hipótesis para el Ejercicio Guiado3

Vamos a realizar una llamada a la función t.test para resolver este contraste.

```
t.test(Rio1, Rio2, alternative = 'two.sided', mu = 0, var.equal = TRUE,
       conf.level =  0.90)
```

```
    Two Sample t-test

data:  Rio1 and Rio2
t = 2.2564, df = 17, p-value = 0.0375
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
90 percent confidence interval:
 0.424258 3.280287
sample estimates:
mean of x mean of y
 10.72727   8.87500
```

En este caso, el p-valor asociado al contraste es **0.0375**, que es menor que 0.10, el nivel de significación. Por tanto, rechazamos la hipótesis nula y concluimos que la cantidad media de tóxico en ambos ríos no es la misma.

8.4 Ejercicio Guiado4

Una empresa farmacéutica está interesada en la investigación preliminar de un nuevo medicamento que parece tener propiedades reductoras del colesterol en la sangre. A tal fin se toma una muestra al azar de 6 personas, y se determina el contenido en colesterol antes y después del tratamiento. Los resultados han sido los siguientes:

Antes: 217, 252, 229, 200, 209, 213

Después: 209, 241, 230, 208, 206, 211

Comprobar, a un nivel de significación del 4% si la aplicación del medicamento es efectiva. Es decir, comprobar si el nivel medio de colesterol en sangre de los pacientes antes de la aplicación del medicamento es mayor o igual al nivel medio de colesterol en sangre después del tratamiento.

Solución:

El contraste que debemos resolver es

$$\begin{cases} H_0 \equiv \mu_a - \mu_d \geq 0 \\ H_1 \equiv \mu_a - \mu_d < 0 \end{cases}$$

Expresión 44: Contraste de hipótesis para el Ejercicio Guiado4

```
Antes <- c(217, 252, 229, 200, 209, 213)
Despues <- c(209, 241, 230, 208, 206, 211)
```

Ahora sólo nos queda realizar la llamada a la función t.test, sin olvidar indicar mediante el parámetro paired la relación que existe entre los conjuntos de datos.

```
t.test(Antes, Despues, alternative = 'less', mu = 0, paired = TRUE, conf.level = 0.96)
```

```
    Paired t-test

data:  Antes and Despues
t = 0.91186, df = 5, p-value = 0.7982
alternative hypothesis: true mean difference is less than 0
96 percent confidence interval:
     -Inf 8.506849
sample estimates:
mean difference
            2.5
```

En este caso, el estadístico de contraste toma el valor **0.91186** y el p-valor es **0.7982**. Este p-valor supera el nivel de significación, que recordemos es 0.04. Por tanto, no podemos rechazar la hipótesis nula y concluimos que los niveles medios de colesterol antes y después del tratamiento pueden considerarse iguales, poniendo así en duda la efectividad del mismo.

8.5 Ejercicio Guiado5

Una determinada empresa quiere saber si su nuevo producto tendrá más aceptación en la población adulta o entre los jóvenes. Para ello, considera una muestra aleatoria de 400 adultos y 600 jóvenes, observando que sólo a 100 adultos y 300 jóvenes les había gustado su producto. Tomando un nivel de significación del 1%, ¿puede suponerse que el producto gusta por igual en adultos y jóvenes?

Solución:

Para responder a la pregunta que se nos plantea, resolveremos el siguiente contraste de hipótesis:

$$\begin{cases} H_0 \equiv \pi_A - \pi_J = 0 \\ H_1 \equiv \pi_A - \pi_J \neq 0 \end{cases}$$

Expresión 45: Contraste de hipótesis para el Ejercicio Guiado5

donde π_A y π_J es la proporción de adultos y jóvenes, respectivamente, a los que gusta el producto.

En este caso debemos utilizar la función **prop.test** para resolver este contraste. Pero primero, debemos crear un vector que indique el número de adultos y jóvenes a los que les gusta el producto así como un segundo vector con el número total de adultos y jóvenes encuestados

```
Adul_Jov_Gusta_Producto <- c(100, 300)
Adul_Jov_Total <- c(400, 600)

# Una vez hecho esto, llamamos a la función prop.test

prop.test(Adul_Jov_Gusta_Producto, Adul_Jov_Total, alternative = 'two.sided',
          conf.level = 0.99)
```

```
    2-sample test for equality of proportions with continuity correction

data:  Adul_Jov_Gusta_Producto out of Adul_Jov_Total
X-squared = 61.463, df = 1, p-value = 4.512e-15
alternative hypothesis: two.sided
99 percent confidence interval:
 -0.3287296 -0.1712704
sample estimates:
prop 1 prop 2
  0.25   0.50
```

Según los resultados que proporciona prop.test, el p-valor asociado a este contraste es muy pequeño, concretamente **4.512e-15**. Este p-valor es menor que 0.01, el nivel de significación. Por eso, rechazamos la hipótesis nula en favor de la alternativa y podemos afirmar que el producto no gusta por igual entre adultos y jóvenes.

9 Ejercicios Propuestos (Resueltos)

9.1 Ejercicio Propuesto1

Se realiza un experimento para estudiar el nivel (en minutos) que se requiere para que la temperatura del cuerpo de un lagarto del desierto alcance los 45º partiendo de la temperatura normal de su cuerpo mientras está en la sombra. Se supone que la varianza es conocida. Se obtuvieron las siguientes observaciones: 10.1 ; 12.5 ; 12.2 ; 10.2 ; 12.8 ; 12.1 ; 11.2 ; 11.4 ; 10.7 ; 14.9 ; 13.9 ; 13.3. Se pide:

a) Hallar estimaciones puntuales de la media y la varianza

b) Supóngase que la variable X: "Tiempo en alcanzar los 45º sigue una ley Normal

b1) ¿Puede concluirse que el tiempo medio requerido para alcanzar la dosis letal es de 15 minutos?

b2) ¿Puede concluirse que el tiempo medio requerido para alcanzar la dosis letal es inferior a 13 minutos?

Solución

```
Temperatura <- c(10.1 , 12.5 , 12.2 , 10.2 , 12.8 , 12.1 , 11.2 , 11.4 , 10.7 ,
                 14.9 , 13.9 , 13.3)
Temperatura
```

```
 [1] 10.1 12.5 12.2 10.2 12.8 12.1 11.2 11.4 10.7 14.9 13.9 13.3
```

a) Hallar estimaciones puntuales de la media y la varianza

```
media <- mean(Temperatura);media
```

```
[1] 12.10833
```

```
var <- var(Temperatura);var
```

```
[1] 2.186288
```

b1) ¿Puede concluirse que el tiempo medio requerido para alcanzar la dosis letal es de 15 minutos?

```r
t.test(Temperatura, alternative = "two.sided", mu = 15, conf.level = 0.95)
```

```
    One Sample t-test

data:  Temperatura
t = -6.7746, df = 11, p-value = 3.055e-05
alternative hypothesis: true mean is not equal to 15
95 percent confidence interval:
 11.16887 13.04780
sample estimates:
mean of x
 12.10833
```

El valor del estadístico de contraste experimental, **-6.7746**, deja a la derecha una área menor que $\mathbf{0 < 0.025}$. Por lo tanto se rechaza la hipótesis nula de que el tiempo medio requerido para alcanzar la dosis letal es de 15 minutos.

b2) ¿Puede concluirse que el tiempo medio requerido para alcanzar la dosis letal es inferior a 13 minutos?

```r
t.test(Temperatura, alternative = "less", mu = 13, conf.level = 0.95)
```

```
    One Sample t-test

data:  Temperatura
t = -2.089, df = 11, p-value = 0.03037
alternative hypothesis: true mean is less than 13
95 percent confidence interval:
     -Inf 12.87489
sample estimates:
mean of x
 12.10833
```

El valor del estadístico de contraste experimental, **-2.089**, deja a la derecha una área $\mathbf{0.030 < 0.05}$. Por lo tanto se rechaza la hipótesis nula y se concluye que el **tiempo medio requerido para alcanzar la dosis letal es inferior a 13 minutos.**

9.2 Ejercicio Propuesto 2

Se quieren comparar dos poblaciones de ranas pipiens aisladas geográficamente. Para ello se toman dos muestras de ambas poblaciones de tamaño 12 y 10 y se les mide la longitud del cuerpo expresado en milímetros.

Población 1: 20,1; 22,5; 22,2 ; 30,2 ; 22,8 ; 22,1 ; 21,2 ; 21,4 ; 20,7 ; 24,9 ; 23,9 ; 23,3

Población 2: 25,3 ; 31,2 ; 22,4 ; 23,1 ; 26,4 ; 28,2 ;21,3 ;31,1 ;26,2 ;21,4

Contrastar la hipótesis de igualdad de medias a un nivel de significación del 5%. (Suponiendo que la longitud se distribuya según una Normal).

Solución

```
Poblacion1 <- c(20.1, 22.5, 22.2 , 30.2 , 22.8 , 22.1 , 21.2 , 21.4 , 20.7 , 24.9
                , 23.9 , 23.3)
Poblacion2 <- c(25.3,31.2 , 22.4 , 23.1 , 26.4 , 28.2 , 21.3 , 31.1 , 26.2 , 21.4)

var.test(Poblacion1, Poblacion2, alternative = "two.sided", conf.level = 0.95)
```

```
    F test to compare two variances

data:  Poblacion1 and Poblacion2
F = 0.51989, num df = 11, denom df = 9, p-value = 0.3043
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.1328934 1.8653086
sample estimates:
ratio of variances
         0.5198889
```

El valor deja a la derecha un área igual a 0.3043, por lo tanto no se puede rechazar la hipótesis nula de igualdad de varianzas.

```
t.test(Poblacion1, Poblacion2, alternative = "two.sided", mu = 0, var.equal = TRUE)
```

```
    Two Sample t-test

data:  Poblacion1 and Poblacion2
t = -2.0097, df = 20, p-value = 0.05815
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
```

```
 -5.5398671  0.1032004
sample estimates:
mean of x mean of y
 22.94167  25.66000
```

La salida nos muestra el valor experimental del estadístico de contraste ($t_{exp} = -2.0097$) y el p-valor = **0.05815**, por lo tanto no se puede rechazar la hipótesis nula de igualdad de medias. También, se puede concluir el contraste observando que el intervalo de confianza para la diferencia de medias **(-5.5398, 0.1032)** contiene al cero.

9.3 Ejercicio Propuesto 3

Se realiza un estudio, en el que participan 10 individuos, para investigar el efecto del ejercicio físico en el nivel de colesterol en plasma. Antes del ejercicio se tomaron muestras de sangre para determinar el nivel de colesterol de cada individuo. Después, los participantes fueron sometidos a un programa de ejercicios. Al final de los ejercicios se tomaron nuevamente muestras de sangre y se obtuvo una segunda lectura del nivel de colesterol. Los resultados se muestran a continuación.

Nivel previo: 182; 230; 160; 200; 160; 240; 260; 480; 263; 240

Nivel posterior: 190; 220; 166; 150; 140; 220; 156; 312; 240; 250

Se quiere saber si el ejercicio físico ha reducido el nivel de colesterol para un nivel de confianza del 95%.

Solución

```r
Nivelprevio <- c(182, 230, 160, 200, 160, 240, 260, 480, 263, 240)
Nivelposterior <- c(190, 220, 166, 150, 140, 220, 156, 312, 240, 250)

# contraste de diferencia de medias de dos poblaciones apareadas
t.test(Nivelprevio, Nivelposterior, alternative = 'greater', mu = 0, paired = TRUE)
```

```
    Paired t-test

data:  Nivelprevio and Nivelposterior
t = 2.0525, df = 9, p-value = 0.03516
alternative hypothesis: true mean difference is greater than 0
95 percent confidence interval:
 3.965698      Inf
sample estimates:
mean difference
```

```
37.1
```

El estadístico de contraste **(t = 2.0525)** y el p-value. **0.03516**. es menor que 0.05, y se debe rechazar la hipótesis nula. Por lo tanto, el nivel medio de colesterol se reducirá con el ejercicio físico.

9.4 Ejercicio Propuesto 4

Se ignora la proporción de familias numerosas y con el fin de determinar dicha proporción se toma una muestra de 800 familias siendo la proporción observada de 0.18. Se puede afirmar que la proporción de familias numerosas es 0.20.

Solución

```
prop.test(144,800, p = 0.20, alternative = "two.sided", conf.level = 0.95)
```

```
    1-sample proportions test with continuity correction

data:  144 out of 800, null probability 0.2
X-squared = 1.877, df = 1, p-value = 0.1707
alternative hypothesis: true p is not equal to 0.2
95 percent confidence interval:
 0.1543404 0.2087896
sample estimates:
   p
0.18
```

El p-valor de la prueba (Sig. exacta (unilateral)) es **0.1707** mayor que 0.05. Por lo tanto no se rechaza la Hipótesis nula. Se puede afirmar que la proporción de familias numerosas es **0.20.**

9.5 Ejercicio Propuesto 5

Se sospecha que añadiendo al tratamiento habitual para la curación de una enfermedad un medicamento A, se consigue mayor número de curaciones. Tomamos dos grupos de enfermos de 100 individuos cada uno. A un grupo se le suministra el medicamento A y se curan 60 enfermos y al otro no se le suministra, curándose 55 enfermos. ¿Es efectivo el tratamiento A en la curación de la enfermedad?

Solución

```r
curados <- c(60, 45)
enfermos <- c(100, 100)
prop.test(curados, enfermos, alternative = 'greater', conf.level = 0.95)
```

```
    2-sample test for equality of proportions with continuity correction

data:  curados out of enfermos
X-squared = 3.9298, df = 1, p-value = 0.02372
alternative hypothesis: greater
95 percent confidence interval:
 0.02515435 1.00000000
sample estimates:
prop 1 prop 2
  0.60   0.45
```

El valor del estadístico Chi-Cuadrado es **3.9298*** y el p-valor asociado es **0.02372** por lo tanto se debe rechazar la Hipótesis nula. Podemos afirmar que el medicamento A consigue un mayor número de curaciones

9.6 Ejercicio Propuesto 6

En 5 zonas de la provincia de Granada (Ladihonda y Fazares, zonas muy secas y Cortijuela, Molinillo y Fardes, zonas húmedas) se hacen una serie de mediciones sobre las hojas de las encinas a lo largo de 3 años consecutivos: 1995, muy seco y 1996 y 1997, muy lluviosos.

El objetivo es medir la simetría fluctuante en dichas hojas como indicador de stress en la planta. Bajo condiciones de stress (sequía, herbivoría, limitación por nutrientes…), la hipótesis es que la asimetría aumente. Contamos con la siguiente información:

- Localización árboles: 5 zonas, dos en zonas muy secas (Hoya Guadix-Baza, Ladihonda y Fazares) y tres en zonas con mayor precipitación (Cortijuela, Molinillo, Fardes). En esta última, Fardes, son árboles situados en la ladera de un río (presumiblemente poco afectados por años más o menos secos).
- Años de climatología diferente: 1995 año muy seco y años 1996 y 1997, años muy lluviosos.
- Situación de la hoja: Canopy (copa de los árboles) y Sprouts (rebrotes, hojas nuevas que salen desde la parte inferior del tronco).

Zona	*Parte*	*Año*	*Longitud*	*Asimetría*
Cortijuela	*Canopy*	1995	26.51	0.028
Cortijuela	*Canopy*	1996	30.17	0.010
Molinillo	*Canopy*	1995	34.24	0.080
Molinillo	*Canopy*	1996	31.04	0.340
Molinillo	*Canopy*	1996	34.99	0.087
Fardes	*Canopy*	1995	30.48	0.040
Fardes	*Canopy*	1996	25.07	0.010
Ladihonda	*Canopy*	1995	25.04	0.021
Ladihonda	*Canopy*	1996	29.16	0.135
Fazares	*Canopy*	1995	35.12	0.010
Fazares	*Canopy*	1996	25.41	0.094
Fazares	*Canopy*	1996	27.02	0.153
Cortijuela	*Sprouts*	1995	23.04	0.156
Fazares	*Sprouts*	1995	27.69	0.172
Fazares	*Sprouts*	1996	34.71	0.077

Tabla 8; Datos del Ejercicio Propuesto 6

Disponemos de un total de 2101 casos, cedidos por el Departamento de Ecología de la Universidad de Granada (España), de los que hemos seleccionado aleatoriamente una muestra de tamaño 15 que se presenta en la siguiente tabla:

Se pide:

1. ¿Se puede admitir que la longitud de las hojas de encina se distribuye normalmente?
2. ¿Se puede admitir que la longitud media de las hojas es igual a 30 cm a un nivel de significación del 5%? (Suponiendo que la varianza es conocida)
3. Suponiendo que la asimetría de las hojas sigan una distribución Normal; comprobar mediante un contraste de hipótesis si existen diferencias significativas en la asimetría de las hojas teniendo en cuenta la situación de la hoja en el árbol.
4. A un nivel de significación del 5%, ¿es representativo el ajuste lineal entre la longitud y la asimetría? ¿Cuál sería la expresión del modelo? ¿Cuánto explica el modelo?

Solución

1. ¿Se puede admitir que la longitud de las hojas de encina se distribuye normalmente?

```
longitud <- c(26.51,30.17, 34.24, 31.04, 34.99, 30.48, 25.07, 25.04, 29.16,35.12,
              25.41, 27.02, 23.04, 27.69, 34.71)

# Media y Desv.
mean(longitud)
```

```
[1] 29.31267
```

```
sd(longitud)
```

```
[1] 4.062451
```

Contraste de Kolmogorov-Smirnov

```
ks.test(longitud, y = pnorm, 29.31267,  4.062451, alternative = "two.sided")
```

```
    Exact one-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  longitud
D = 0.15408, p-value = 0.8173
alternative hypothesis: two-sided
```

Mediante la prueba de Kolmogorov-Smirnov obtenemos que el p-valor es 0.8173, mayor que el nivel de significación 0.05, por lo tanto no se puede rechazar la hipótesis nula y admitimos que la longitud de las hojas sigue una distribución Normal

2. ¿Se puede admitir que la longitud media de las hojas es igual a 30 cm a un nivel de significación del 5%? (Suponiendo que la varianza es conocida)

```
t.test(longitud, alternative = "two.sided", mu = 30, conf.level = 0.95)
```

```
    One Sample t-test

data:  longitud
t = -0.65528, df = 14, p-value = 0.5229
alternative hypothesis: true mean is not equal to 30
95 percent confidence interval:
 27.06296 31.56238
sample estimates:
mean of x
 29.31267
```

El valor del nivel crítico o p-valo es 0.5229, mayor que el nivel de significación 0.05, por lo que no se rechaza la hipótesis nula y admitimos que la longitud media de las hojas de encina es igual a 30 cm.

3. Suponiendo que la asimetría de las hojas sigan una distribución Normal; comprobar mediante un contraste de hipótesis si existen diferencias significativas en la asimetría de las hojas teniendo en cuenta la situación de la hoja en el árbol.

```
asimeCanopy<- c(0.028, 0.010, 0.080, 0.340, 0.087, 0.040, 0.010, 0.021, 0.135,
                0.010, 0.094, 0.153)
asimeSprouts<- c(0.156, 0.172, 0.077)

# igualdad de varianzas
var.test(asimeCanopy, asimeSprouts, alternative = "two.sided", conf.level = 0.95)
```

```
    F test to compare two variances

data:  asimeCanopy and asimeSprouts
F = 3.4611, num df = 11, denom df = 2, p-value = 0.4908
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
```

```
  0.08782899 18.19106196
sample estimates:
ratio of variances
          3.461082
```

El valor del estadístico de contraste es 3.4611. La distribución F de Snedecor que sigue el estadístico de contraste tiene 11 grados de libertad en el numerador y 2 en el denominador. El p-valor asociado al contraste es 0.4908. Como este valor es superior al nivel de significación (que para este ejemplo es 0.05), no podemos rechazar la hipótesis nula que hemos planteado. Es decir, se puede considerar que la varianza de ambas poblaciones son iguales

```
t.test(asimeCanopy, asimeSprouts, alternative = "two.sided", mu = 0,
       var.equal = TRUE)
```

```
    Two Sample t-test

data:  asimeCanopy and asimeSprouts
t = -0.88477, df = 13, p-value = 0.3924
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.1755285  0.0735285
sample estimates:
mean of x mean of y
    0.084     0.135
```

El valor del estadístico de contraste (-0.88477), los grados de libertad de la distribución t de Student que sigue el estadístico de contraste (13) y el p-valor (0.3924). Como el p-valor es mayor que el nivel de significación fijado (0.05), no rechazamos la hipótesis nula y se deduce que las partes de la planta (Canopy y Sprouts) no influyen en la asimetría de las hojas.

3. A un nivel de significación del 5%, ¿es representativo el ajuste lineal entre la longitud y la asimetría? ¿Cuál sería la expresión del modelo? ¿Cuánto explica el modelo?

```
asimetria<- c(0.028, 0.010, 0.080, 0.340, 0.087, 0.040, 0.010, 0.021, 0.135, 0.010,
              0.094, 0.153, 0.156, 0.172, 0.077)

mod <- lm(asimetria ~ longitud);mod
```

```
Call:
lm(formula = asimetria ~ longitud)
```

```
Coefficients:
(Intercept)     longitud
   0.119847    -0.000875
```

```
summary(mod)
```

```
Call:
lm(formula = asimetria ~ longitud)

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max
-0.087912 -0.072795 -0.009889  0.048489  0.247311

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.119847   0.178754   0.670    0.514
longitud    -0.000875   0.006044  -0.145    0.887

Residual standard error: 0.09187 on 13 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.001609,  Adjusted R-squared:  -0.07519
F-statistic: 0.02096 on 1 and 13 DF,  p-value: 0.8871
```

asimetría = 0.119847 – 0.000875 * longitud

En nuestro ejemplo, los p-valores que nos ayudan a resolver estos contrastes son 0.514 y 0.887, ambos mayores que 0.05. Así, considerando un nivel del significación del 5%, no rechazamos la hipótesis nula en ambos contrastes, de manera que podemos suponer ambos parámetros no son significativamente distintos de 0. Por lo tanto que concluimos que longitud no es válida para predecir la asimetría según un modelo lineal.