

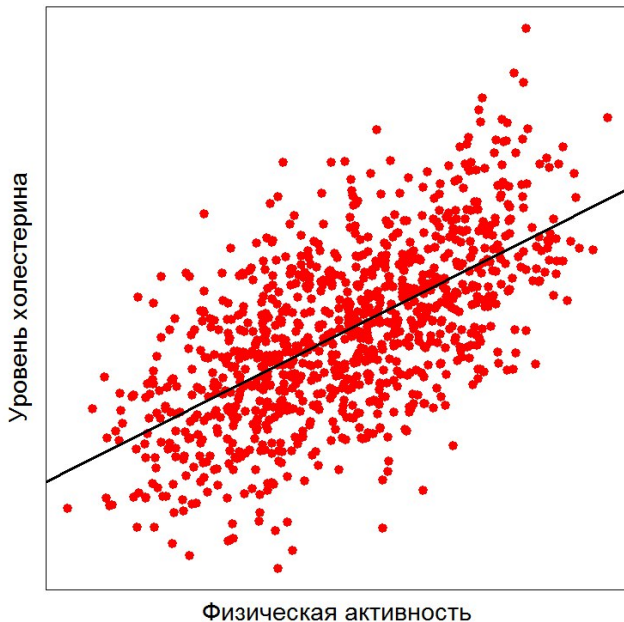
Прикладной статистический анализ данных

10. Причинно-следственные связи

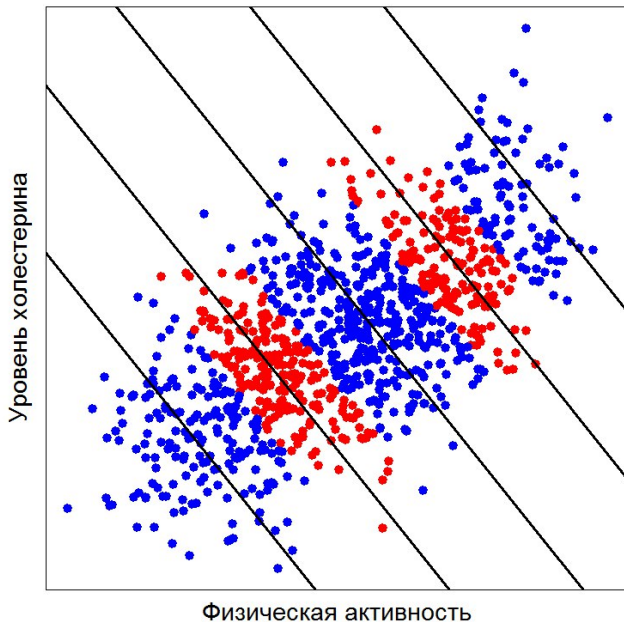
Бахтеев Олег
mipt.psad19@gmail.com

2019

Исследование уровня холестерина



Исследование уровня холестерина



Парадокс Симпсона

Пример 1:

Σ	лекарство	плацебо
выздоровели	273	289
не выздоровели	77	61
	78%	83%

плацебо на 5%
эффективнее

мужчины	лекарство	плацебо
выздоровели	81	234
не выздоровели	6	36
	93%	87%

лекарство на 5%
эффективнее

женщины	лекарство	плацебо
выздоровели	192	55
не выздоровели	71	25
	73%	69%

лекарство на 4%
эффективнее

Парадокс Симпсона

Какой из двух выводов верен?

Предположение: верны выводы по отдельным подгруппам, потому что они основаны на более детальной информации.

Это предположение неверно — всё зависит от того, как признак, по которому происходит разбиение на подгруппы, связан с остальными анализируемыми признаками.

Парадокс Симпсона

Пример 2:

Σ	лекарство	плацебо
выздоровели	273	289
не выздоровели	77	61
	78%	83%

плацебо на 5%
эффективнее

низкое давление в конце лечения	лекарство	плацебо
выздоровели	81	234
не выздоровели	6	36
	93%	87%

лекарство на 5%
эффективнее

низкое давление в конце лечения	лекарство	плацебо
выздоровели	192	55
не выздоровели	71	25
	73%	69%

лекарство на 4%
эффективнее

Причинные графы

Отношения причинности могут быть представлены в виде направленного графа, вершины которого соответствуют признакам, а наличие пути говорит о существовании причинно-следственной связи.

Путь — последовательность вершин, где каждая вершина соединена со следующей ребром.

Направленный путь — путь, в котором все ребра имеют одинаковое направление.

Путь через заднюю дверь (ПЗД) от X к Y — такой путь, который начинается с $X \leftarrow$, а заканчивается $\rightarrow Y$.

Элементы причинного графа

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \text{ — цепочка}$$

Пример:

- X — бюджет школы
- Y — средний балл учеников
- Z — доля поступающих в ВУЗы

Свойства:

- 1 X и Y , Y и Z — зависимы:
 $\exists x, y : \mathbf{P}(Y = y | X = x) \neq \mathbf{P}(Y = y)$
 $\exists y, z : \mathbf{P}(Z = z | Y = y) \neq \mathbf{P}(Z = z)$
- 2 Z и X — скорее всего, зависимы
- 3 $Z \perp X | Y$ — условно независимы: $\forall x, y, z$

$$\mathbf{P}(Z = z | X = x, Y = y) = \mathbf{P}(Z = z | Y = y)$$

(если Y фиксировано, то X и Z независимы)

Элементы причинного графа

$$Y \leftarrow X \rightarrow Z \text{ — вилка}$$

Пример:

- X — продажи мороженого
- Y — средняя дневная температура воздуха
- Z — число преступлений

Свойства:

- ① X и Y , X и Z — зависимы
- ② Y и Z — скорее всего, зависимы
- ③ $Y \perp Z | X$ — условно независимы

Элементы причинного графа

$$Y \rightarrow X \leftarrow Z \text{ — коллайдер}$$

Пример (парадокс Монти-Холла):

- X — выбор ведущего
- Y — выбор игрока
- Z — положение приза

Свойства:

- ① Y и X , Z и X — зависимы
- ② Y и Z — независимы
- ③ $Y \not\perp Z|X$ — условно зависимы

d-разделимость

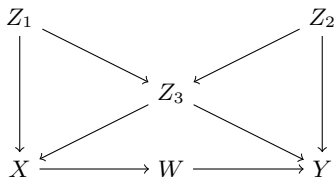
Путь P **блокируется** переменной Z , если:

- ① P содержит $A \rightarrow B \rightarrow C$, $A \leftarrow B \rightarrow C$, $B \in Z$
- ② P содержит $A \rightarrow B \leftarrow C$, $B \notin Z$ и все потомки $B \notin Z$

Если Z блокирует все пути из X в Y , то X и Y **d-разделимы**.

d-разделимость

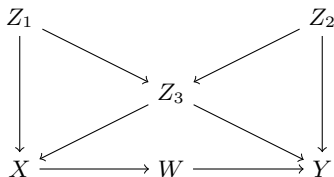
Пример:



Упорядоченная пара вершин	d-разделяющее множество
(Z_1, W)	X
(Z_1, Y)	$\{Z_3, X, Z_2\}, \{Z_3, W, Z_2\}$
(X, Y)	$\{W, Z_3, Z_1\}$

d-разделимость

Пример:



Упорядоченная пара вершин	d-разделяющее множество
(Z_1, W)	X
(Z_1, Y)	$\{Z_3, X, Z_2\}, \{Z_3, W, Z_2\}$
(X, Y)	$\{W, Z_3, Z_1\}$

Алгоритм индуктивной причинности

Вход: множество вершин V

- ① $\forall A, B \in V$ ищем множество $S_{AB} : A \perp B | S_{AB}, A, B \notin S_{AB}$. Если такого S_{AB} не существует, соединяем A и B ребром.
- ② $\forall A, B$, не связанных ребром и имеющих общего соседа C , проверяем: $C \in S_{AB}$? Если нет, то заменяем пару рёбер $A - C, C - B$ на пару ориентированных рёбер $A \rightarrow C, C \leftarrow B$
- ③ Рекурсивно применяем следующие два правила:
 - ▶ если из A в B есть ориентированный путь $A \rightarrow \dots \rightarrow B$, то $A - B$ заменяем на $A \rightarrow B$;
 - ▶ если A и B не соединены, $A \rightarrow C, C - B$, то $C - B$ заменяем на $C \rightarrow B$.

Выход: ориентированный (возможно, частично) граф G .

Алгоритм индуктивной причинности

Правила (1) и (2) применять в чистом виде невозможно — числа перебираемых множеств экспоненциально растёт с числом вершин графа. Поэтому используются сокращающие перебор эвристики.

Признаки	дискретные	непрерывные
Распределение	мультиномиальное	нормальное
Критерий условной независимости	хи-квадрат для трёхмерных таблиц сопряжённости	Стьюдента для частной корреляции
Критерий качества графа	<i>BIC</i>	

Причинность по Грейнджеру

Между рядами x_1, \dots, x_T и y_1, \dots, y_T существует **причинная связь Грейнджера** $x_t \rightarrow y_t$, если дисперсия ошибки оптимального прогноза \hat{y}_{t+1} по $y_1, \dots, y_t, x_1, \dots, x_t$ меньше, чем только по y_1, \dots, y_t .

Причинность по Грейнджеру

- может следовать из причинно-следственной связи;
- не является достаточным условием причинно-следственной связи.

x_1, \dots, x_T и y_1, \dots, y_T **взаимосвязаны**, если $x_t \rightarrow y_t$ и $y_t \rightarrow x_t$.

Критерий Грейнджера

$$y_t = \alpha + \sum_{i=1}^{k_1} \phi_{1i} y_{t-i} + \sum_{i=1}^{k_2} \phi_{2i} x_{t-i} + \varepsilon_t.$$

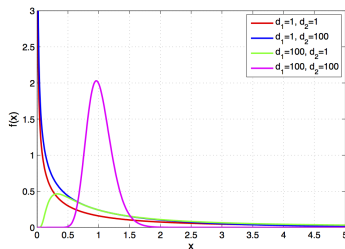
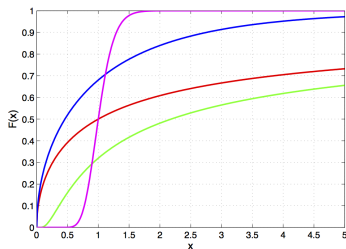
k_1 и k_2 выбирается по информационному критерию.

$$x_t \rightarrow y_t \Rightarrow \exists \phi_{2i} \neq 0.$$

нулевая гипотеза: $H_0: \phi_{21} = \dots = \phi_{2k_2} = 0;$

альтернатива: $H_1: H_0$ неверна;

статистика: $F = \frac{(RSS_r - RSS_{ur})/k_2}{RSS_{ur}/(T - k_1 - k_2 - 1)};$
 $F \sim F(k_1, T - k_1 - k_2 - 1)$ при H_0 .



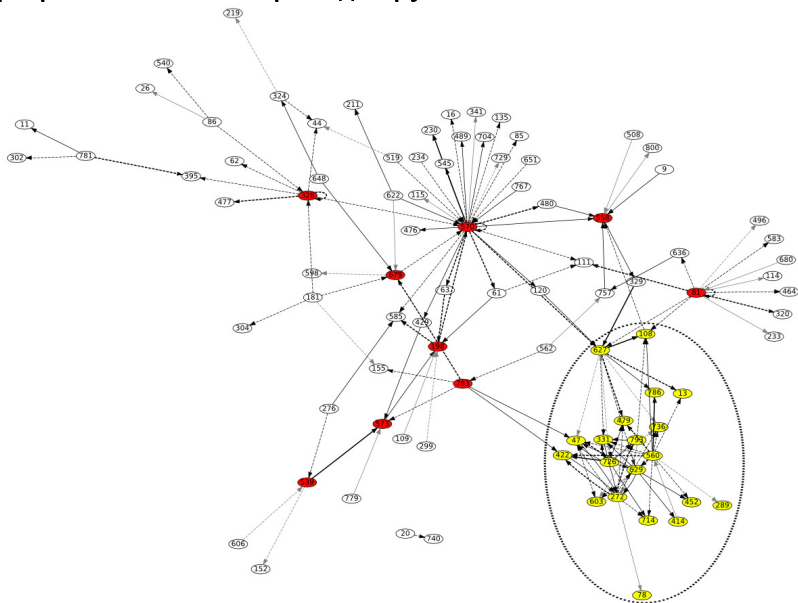
Многомерный критерий Грейнджера

Зависимость между признаками x и y может оцениваться с учётом возможной зависимости от всех остальных признаков:

$$y_t = \alpha + \sum_{i=1}^{k_1} \phi_{1i} y_{t-i} + \sum_{i=1}^{k_2} \phi_{2i} x_{t-i} + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{k_{j+2}} \phi_{(j+2)i} z_{t-i}^j + \varepsilon_t.$$

Для задач с большим количеством признаков могут использоваться регуляризаторы (лассо, ридж).

Граф причинности по Грейнджеру



Критерий Грейнджера + поправка на множественную проверку гипотез

Интервенция

X коррелировано с Y \nRightarrow X влияет на Y .

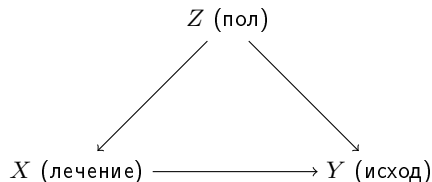
Влияние обычно оценивают в эксперименте, когда объектам искусственно назначают разные уровни X , но эксперимент можно провести не всегда:

- погода \rightarrow лесные пожары — не можем управлять X
- теленасилие \rightarrow жестокость — тяжело фиксировать уровень X и создать условия для измерения Y
- потребление алкоголя \rightarrow успеваемость школьников — неэтично

В таких случаях мы вынуждены использовать обсервационные данные, по которым мы хотим оценить эффект **интервенции**: что будет с Y , если мы установим значение X равным x ?

Обозначение: $do(X = x)$.

Интервенция



Оценку эффективности лекарства можно сформулировать в терминах интервенций:

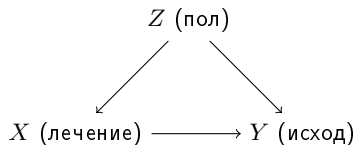
$$ACE = \mathbf{P}(Y = \text{выздоровление} | do(X = \text{лекарство})) - \\ - \mathbf{P}(Y = \text{выздоровление} | do(X = \text{плацебо})).$$

(average conditional effect).

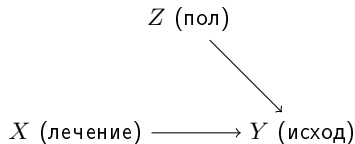
Хирургия графа

Хирургия графа — удаление всех ребер, входящих в X .

Пример 1, исходный граф G :



Оперированный граф G_m :



$$\mathbf{P}(Y = y | do(X = x)) = \mathbf{P}_m(Y = y | X = x)$$

Хирургия графа

В оперированном графе:

$$\mathbf{P}_m(Z = z) = \mathbf{P}(Z = z),$$

$$\mathbf{P}_m(Y = y | X = x, Z = z) = \mathbf{P}(Y = y | X = x, Z = z),$$

так как рёбра, входящие в Z и Y , не изменились \Rightarrow

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y = y | do(X = x)) &= \mathbf{P}_m(Y = y | X = x) = \\ &= \sum_z \mathbf{P}_m(Y = y | X = x, Z = z) \mathbf{P}_m(Z = z) = \\ &= \sum_z \mathbf{P}(Y = y | X = x, Z = z) \mathbf{P}(Z = z).\end{aligned}$$

Хирургия графа

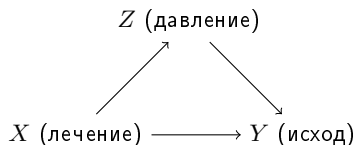
В примере 1 по полученной формуле:

$$\mathbf{P}(Y = \text{выздоровление} | do(X = \text{лекарство})) = 0.832,$$

$$\mathbf{P}(Y = \text{выздоровление} | do(X = \text{плацебо})) = 0.7818$$

$$\Rightarrow ACE = 0.05.$$

В примере 2 $G = G_m$:



Значит,

$$\mathbf{P}(Y = y | do(X = x)) = \mathbf{P}_m(Y = y | X = x) = \mathbf{P}(Y = y | X = x)$$

$$\mathbf{P}(Y = \text{выздоровление} | do(X = \text{лекарство})) = 0.78,$$

$$\mathbf{P}(Y = \text{выздоровление} | do(X = \text{плацебо})) = 0.83$$

$$\Rightarrow ACE = -0.05.$$

Поправочная формула

Поправочная формула позволяет вычислить эффект интервенции обуславливанием по вершинам Z :

$$\mathbf{P}(Y = y | do(X = x)) = \sum_z \mathbf{P}(Y = y | X = x, Z = z) \mathbf{P}(Z = z).$$

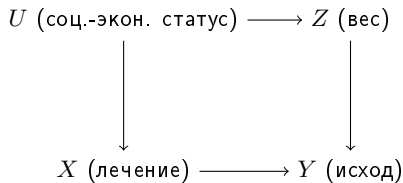
Что это за вершины?

Формула причинного эффекта:

$$\mathbf{P}(Y = y | do(X = x)) = \sum_z \mathbf{P}(Y = y | X = x, PA = z) \mathbf{P}(PA = z),$$

где PA — родители вершины X .

Неизвестные родители



Социоэкономический статус — ненаблюдаемая величина; как оценить эффект интервенции по X ?

Критерий задней двери (КЗД)

Для упорядоченной пары вершин (X, Y) в ациклическом графе G множество вершин Z удовлетворяет **критерию задней двери**, если:

- Z не содержит потомков X
- Z блокирует все пути между X и Y , содержащие $X \leftarrow$.

Если Z удовлетворяет КЗД для (X, Y) , то

$$\mathbf{P}(Y = y | do(X = x)) = \sum_z \mathbf{P}(Y = y | X = x, Z = z) \mathbf{P}(Z = z)$$

(формула задней двери).

Критерий задней двери (КЗД)

Чтобы вычислять меньше условных вероятностей, ФЗД можно упростить:

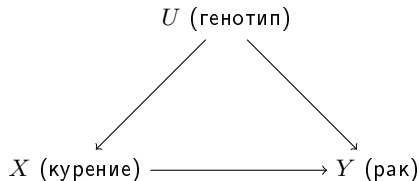
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y = y | do(X = x)) &= \sum_z \mathbf{P}(Y = y | X = x, Z = z) \mathbf{P}(Z = z) = \\ &= \sum_z \frac{\mathbf{P}(X = x, Y = y, Z = z)}{\mathbf{P}(X = x | Z = z)}\end{aligned}$$

В таком виде

- метод называется **обратное вероятностное взвешивание**
- знаменатель $\mathbf{P}(X = x | Z = z)$ — propensity score.

Неизвестные родители

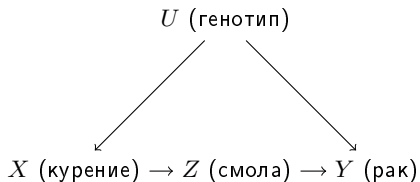
Вызывает ли курение рак?



Σ	курильщики	некурящие
нет рака	341	59
есть рак	39	361
	15%	90.25%

курильщики болеют
на 75.25% реже

Курение



смола	курильщики	некурящие
нет рака	323	1
есть рак	57	19
	15%	95%

курильщики болеют
на 80% реже

нет смолы	курильщики	некурящие
нет рака	18	38
есть рак	2	342
	10%	90%

курильщики болеют
на 80% реже

Курить полезно?

Курение

У курильщиков смола в 95% случаев вместо 5%; у курильщиков смола увеличивает риск рака с 10% до 15%; у некурящих — с 90% до 95%.

Курить вредно?

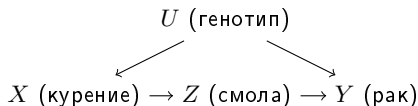
Поможет граф!

Курение

Поправочная формула (КЗД для пустого множества и для X):

$$\mathbf{P}(Z = z | do(X = x)) = \mathbf{P}(Z = z | X = x),$$

$$\mathbf{P}(Y = y | do(Z = z)) = \sum_{x'} \mathbf{P}(Y = y | Z = z, X = x') \mathbf{P}(X = x')$$



$$\mathbf{P}(Y = y | do(X = x)) =$$

$$= \sum_z \mathbf{P}(Y = y | do(Z = z)) \mathbf{P}(Z = z | do(X = x)) =$$

$$= \sum_z \sum_{x'} \mathbf{P}(Y = y | Z = z, X = x') \mathbf{P}(Z = z | X = x) \mathbf{P}(X = x').$$

Критерий передней двери (КПД)

Для упорядоченной пары вершин (X, Y) в ациклическом графе G множество вершин Z удовлетворяет **критерию передней двери**, если:

- Z перекрывает все направленные пути из X в Y
- нет незакрытых путей через заднюю дверь из X в Z
- все пути через заднюю дверь из Z в Y блокируются X

Если Z удовлетворяет КПД для (X, Y) , то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y = y | do(X = x)) &= \\ &= \sum_z \mathbf{P}(Z = z | X = x) \sum_{x'} \mathbf{P}(Y = y | X = x', Z = z) \mathbf{P}(X = x') \end{aligned}$$

(формула передней двери).

Литература

- причинные графы и выводы по ним — Pearl
- восстановление графов по статическим данным — Nagarajan, глава 2
- причинность по Грейнджеру — Kirchgassner, глава 3

Kirchgassner G., Wolters J., Hassler U. *Introduction to modern time series analysis*, 2013.

Nagarajan R., Scutari M., Lebre S. *Bayesian Networks in R with Applications in Systems Biology*, 2013.

Pearl J., Glymour M., Jewell N.P. *Causal Inference in Statistics: A Primer*, 2016.