Cherry-picking
Multiple Testing for Exploratory Research

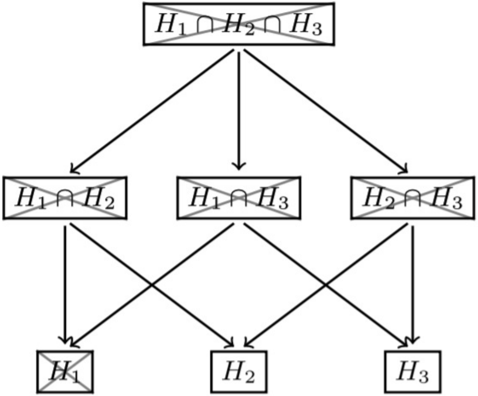
Павел Плюснин

Multiple Testing for Exploratory Research by Jelle J. Goeman and Aldo Solari

Курс: Прикладная статистика 2019

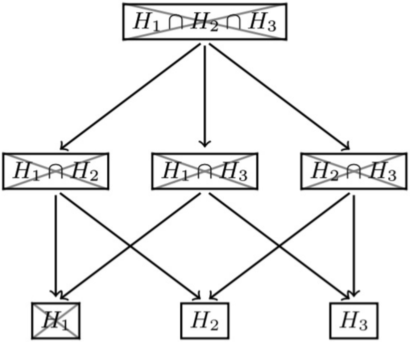
Условные обозначения

Пусть $H_1 \ldots H_n$ - набор элементарных гипотез.
Пусть $T \subseteq \{1 \ldots n\}$ - индексы верных гипотез (неизвестны)
$H_I = \bigcap_{i \in I} H_i$, где $I \subseteq \{1 \ldots n\}$, $I \neq \emptyset$



Условные обозначения

$H_I = \bigcap_{i \in I} H_i$, где $I \subseteq \{1 \dots n\}$, $I \neq \emptyset$
H_I истинна, когда истинны все $H_i, \forall i \in I$
Пусть $\mathbb{C}$ - множество всевозможных подмножеств $\{1 \dots n\}$.
Каждый элемент из $\mathbb{C}$ отвечает за пересечение гипотез с соответствующими индексами. Назовем элементы $\mathbb{C}$ метагипотезами
$\mathbb{H} = \{I \in \mathbb{C} : \# I = 1\}$



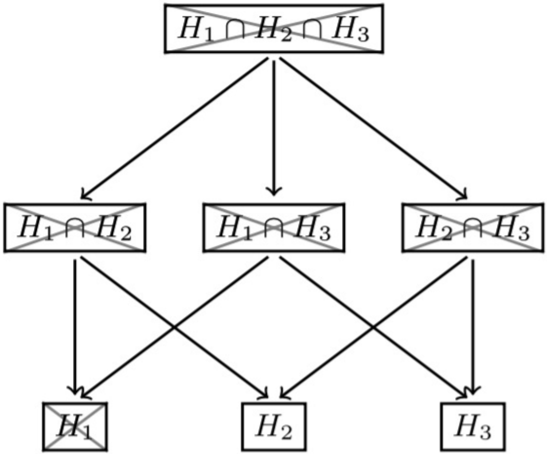
Closed testing procedure

Получение множества отвергаемых метагипотез $\mathbb{X}$

Применяем стат.тест на уровне значимости α для каждого $H_I, I \in \mathbb{C}$. Эти тесты назовем локальными
Пусть $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}$ - множество отвергутых метагипотез: множество подмножеств $U \in \mathbb{C}$, для которых мы отвергли H_U.
Основываясь на этом множестве грубых отвержений $\mathbb{U}$ рассмотрим каждое $I \in \mathbb{C} : J \in \mathbb{U} \quad \forall J \supseteq I$. Все такие I поместим в множество $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{C}$

Marcus, Peritz and Gabriel (1976)

Closed testing prcedure сохраняет FWER для всех H_I на уровне значимости α локальными тестами.



H_1 отвергается closed testing procedure, так как все метагипотезы, в которые входит H_1, были отвергнуты.

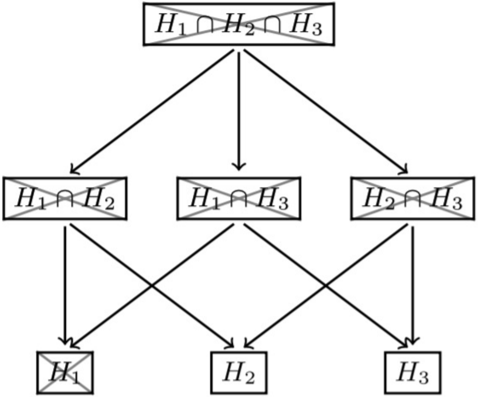
В этом конкретном случае $\mathbb{X} = \mathbb{U}$

Заметим, что на деле нам интересно не все $\mathbb{X}$, а $\mathbb{X} \cap \mathbb{H}$. С точки зрения FWER, отвержение $I \in \mathbb{X}$, для которой нет $J \in \mathbb{X} \cap \mathbb{H} : J \subseteq I$, – бесполезно

Согласованная процедура (consonent)

CTP называется согласованной (Consonent), если локальные тесты для каждого $I \in \mathbb{C}$ выбраны таким образом, что отвержение I влечет отвержение хотя бы одной $J \in \mathbb{H}$

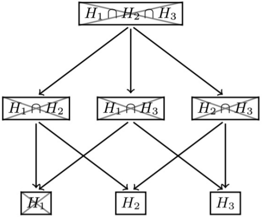
Очевидно, что для любой non-consonent процедуры существует consonent процедура, которая отвергает не меньшее количество $J \in \mathbb{X} \cap \mathbb{H}$



В этом примере согласованных отвержения:
$H_1 \cap H_2, H_1 \cap H_3, H_1 \cap H_2 \cap H_3$, несогласованное: $H_2 \cap H_3$
FWER предписывает отклонить нам H_1, ее и только ее

Пусть R - некоторое множество элементарных гипотез (именно их мы хотим отвергнуть),
тогда за $\tau(R) = \#(R \cap T)$ обозначим количество ошибок первого рода.
$\mathbb{C}_R = \{I \in \mathbb{C} : I \subseteq R\}$ - доверительное множество
$t_\alpha = \max(\#I : I \in \mathbb{C}_R, I \notin \mathbb{X})$ – размер максимального подмножества из R, для которого соответствующее объединение гипотез (метагипотеза) не было отвергнуто локальным тестом.
Множество $\{0 \dots t_\alpha(R)\}$ и является (1-α) доверительным множеством для R

Пример



Confidence sets for the numbers of incorrect rejections $\tau(R)$ and correct rejections $\phi(R)$ incurred with various choices of the rejected set, based on the closed testing result of Figure 1

R	Confidence set for $\tau(R)$	Confidence set for $\phi(R)$
{1}	{0}	{1}
{2}	{0, 1}	{0, 1}
{3}	{0, 1}	{0, 1}
{1,2}	{0, 1}	{1, 2}
{1,3}	{0, 1}	{1, 2}
{2,3}	{0, 1}	{1, 2}
{1,2,3}	{0, 1}	{2, 3}

$$\tau(R) = \{0 \ldots t_\alpha(R)\}$$

$$\phi(R) = \#R - \tau(R)$$

Итог: достоинства метода

- **Безграничные возможности** аналитика выбора множества отвергаемых гипотез
- **Гибкость**: не предписывает никакие отверженея, оставляет выбор за человеком
- **Гибкость**: можно управлять уровнем значимости α
- **post hoc**: можно выбирать любой набор отвергаемых гипотез без опасности переобучения
- **Реализовано в R**