ANalysis Of VAriance (ANOVA). Sphericity

Viktor Shipitsin

22 апреля 2019 г.

Overview

1. Introduction
2. Testing for Sphericity
3. Estimating Sphericity (ϵ) and How Corrections Work
4. Corrections
5. Stepwise Strategy for sphericity

Introduction

Дисперсионный анализ с повторными измерениями особенно подвержен нарушению предположения **сферичности**. rm-ANOVA является эквивалентом однофакторного дисперсионного анализа, но для связанных, а не независимых выборок (групп).

Сферичность - это состояние, при котором дисперсии различий между всеми комбинациями связанных выборок (групп) равны.

When to use a Repeated Measures ANOVA

Мы можем анализировать данные, используя повторные измерения для исследований, в которых анализируются изменения в средних за три или более временных моментов или при трех или более различных условиях.

Например, можно исследовать влияние 6-месячной программы тренировок на артериальное давление: по измерениям артериального давления в 3 отдельных временных точках (до, на полпути и после тренировки), что позволит разработать курс упражнений.

An Example of Sphericity

Исследуется аэробная ёмкость в трёх временных точках.

Subject	Time 1	Time 2	Time 3	Time 1 – Time 2	Time 1 – Time 3	Time 2 – Time 3
1	45	50	55	-5	-10	-5
2	42	42	45	0	-3	-3
3	36	41	43	-5	-7	-2
4	39	35	40	4	-1	-5
5	51	55	59	-4	-8	-4
6	44	49	56	-5	-12	-7
			Variance:	**13.9**	**17.4**	**3.1**

Дисперсия разницы между временем Time 2 и временем Time 3 намного меньше, чем две другие комбинации. Это может привести нас к выводу о том, что наши данные нарушают допущение сферичности.

Мы можем, однако, проверить наши данные на сферичность, используя формальный тест под названием Mauchly's Test of Sphericity (Тест сферичности Мокли).

Mauchly's Test of Sphericity

Тест сферичности Мокли проверяет нулевую гипотезу о том, что дисперсии разностей равны.

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$
H_A : at least two means are significantly different

Хотя этот тест подвергался серьезной критике, **часто не обнаруживая отклонения от сферичности в небольших выборках и переобнаруживая их в больших выборках**, он, тем не менее, часто используется.

В данном случае p-value = 0.188, а значит тест говорит, что допущение о сферичности не нарушено - так проявляется одна из проблем теста Мокли при работе с небольшими размерами выборки.

Mauchly's Test of Sphericity

Мокли (1940) построил тест, основанный на следующей статистике, которая использует собственные значения выборочной матрицы ковариаций

$$W = \frac{\prod \lambda_j}{\left[\frac{1}{k-1}\sum \lambda_j\right]^{k-1}}$$

Эта статистика варьируется от 0 до 1 и достигает 1, когда матрица сферическая.

Существует также более мощный John, Nagao, Sugiura's test for sphericity

Non-sphericity effect

Если ваши данные не нарушают допущение сферичности, вам не нужно изменять свои степени свободы.
Ненарушение этого предположения **означает, что рассчитанная вами F-статистика действительна** и может использоваться для определения статистической значимости.

Однако, **если допущение сферичности нарушается, F-статистика имеет положительное смещение**. При этом увеличивается ошибка I рода. Чтобы преодолеть эту проблему, необходимо применить **поправки к степеням свободы** (degrees of freedom, df), чтобы можно было получить действительное значение F.

Следует отметить, что весьма часто обнаруживается нарушение сферичности.

ϵ-statistic

Степень, в которой присутствует сферичность или нет, представлена ϵ-статистикой. $\epsilon = 1$ указывает, что условие сферичности точно выполнено. Чем дальше эпсилон уменьшается, тем больше нарушение сферичности.

Наименьшее значение, которое может принимать ϵ, называется **оценкой нижней границы** (lower-bound estimate).

Есть следующие процедуры, которые помогают оценить ϵ и сделать соответствующие поправки на степени свободы:

- Lower-Bound Estimate
- Greenhouse-Geisser Correction
- Huynd-Feldt Correction

Degrees of freedom (df)

$df_{time/condition} = k - 1$
$df_{error} = (k-1)(n-1)$, где k - количество повторных измерений, n - количество наблюдений.

Все три поправки (оценка нижней границы, поправка Гринхауса-Гейссера и Хайнда-Фельдта) изменяют степени свободы путем умножения этих степеней свободы на их оцененный $\hat{\epsilon}$

$$F_{ratio} = \frac{\dfrac{SS_{time/condition}}{\hat{\epsilon}(k-1)}}{\dfrac{SS_{error}}{\hat{\epsilon}(k-1)(n-1)}} = \frac{\dfrac{SS_{time/condition}}{df_{time/condition}}}{\dfrac{SS_{error}}{df_{error}}} = \frac{MS_{time/condition}}{MS_{error}}$$

Lower-Bound Estimate

Наименьшее значение, которое может принимать эпсилон ϵ, называется оценкой нижней границы (или корректировкой нижней границы) и рассчитывается как:

$$LowerBoundEstimate(\epsilon) = \frac{1}{k-1},$$

где k - количество повторных измерений.

Это представляет собой **максимально возможное нарушение сферичности**.

- обеспечивает слишком консервативную коррекцию;
- не является рекомендуемой поправкой.

Greenhouse-Geisser Correction

Выборочная матрица ковариаций

	a_1	a_2	a_3	a_4		
a_1	294	258	8	−8		
a_2	258	94	8	−8		
a_3	8	8	34	6		
a_4	−8	−8	6	2		
$\bar{t}_{a.}$	138	138	14	−2	$\bar{t}_{..} =$	72
$\bar{t}_{a.} - \bar{t}_{..}$	66	66	−8	−74		

$$s_{a,a'} = t_{a,a'} - \bar{t}_{a,.} - \bar{t}_{a',.} + \bar{t}_{.,.}$$

$\hat{\epsilon} = \dfrac{(\sum_a s_{a,a})^2}{(k-1)\sum_{a,a'} s^2_{a,a}}$, где k - количество повторных измерений.

Ковариационные матрицы принадлежат к классу положительно-полуопределённых матриц и поэтому всегда имеют неотрицательные собственные значения.

Условие сферичности эквивалентно

$$\lambda_j = const \ \forall j$$

Определим $V = \frac{(\sum \lambda_j)^2}{\sum \lambda_j^2}$. Тогда $\hat{\epsilon} = \frac{1}{k-1} V$

Huynв-Feldt correction

Huynh и Feldt (1976) предложили лучшее (более мощное) приближение для ϵ:

$$\tilde{\epsilon} = \frac{n(k-1)\hat{\epsilon} - 2}{(k-1)[n-1-(k-1)\hat{\epsilon}]},$$

где k - количество повторных измерений, n - количество наблюдений, $\hat{\epsilon}$ - оценка Гринхауса-Гейссера

Поправка Гринхауса-Гейссера имеет тенденцию недооценивать ϵ, когда ϵ близок к 1, в то время как поправка Гюйнд-Фельдта имеет тенденцию переоценивать ϵ.

Stepwise Strategy for sphericity

Greenhouse и Geisser (1959) предлагают использовать следующую пошаговую стратегию для осуществления коррекции на отсутствие сферичности

1. Если F-статистика не является значимой со стандартными степенями свободы, нет необходимости применять коррекцию (потому что это сделает её еще менее значимой);
2. Если F-статистика является значимой с экстремальной коррекцией [то есть при степенях свободы $(k - 1) = 1$ и $(k - 1)(n - 1) = n - 1$], то нет необходимости применять коррекцию, потому что исправление сделает её более значимой;
3. Иначе использовать ϵ-коррекцию, причём предпочтительнее использовать $\tilde{\epsilon}$-оценку.

Useful Resources

- Herve Abdi «The Greenhouse-Geisser Correction», Encyclopedia of Research Design. Thousand Oaks, CA: Sage. 2010
- https://statistics.laerd.com/statistical-guides/sphericity-statistical-guide.php
- https://statistics.laerd.com/statistical-guides/repeated-measures-anova-statistical-guide.php