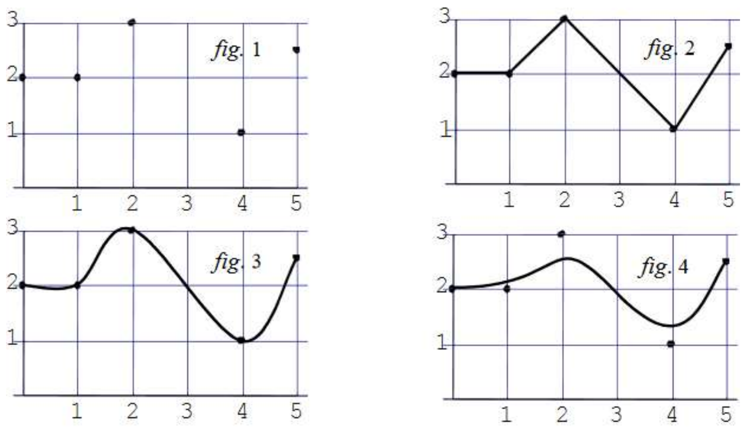
LIFAMI – TD : Interpolation

Objectifs : Notion d'interpolation linéaire, bilinéaire, barycentrique, etc.

Un **système discret** est un ensemble qui introduit une relation entre des variables d'entrée et des variables de sortie, dans lequel ces variables ne peuvent avoir qu'un nombre fini de valeurs, par opposition à un système continu, dans lequel entre deux valeurs de variables, quelles qu'elles soient, on peut toujours supposer une valeur intermédiaire.

En informatique, nous représentons souvent des systèmes continues dans la réalité par un ensemble de valeurs, donc par une représentation discrète. Par exemple, la courbe définissant une température mesurée par un capteur est continue. Pour n'importe quelle valeur de temps donnée il y a une température. En informatique nous n'allons stocker qu'un nombre discret de valeurs, par exemple une température toutes les heures dans le cas d'un capteur de météo. On dit que le signal est échantillonné à une fréquence d'une valeur par heure. Il est souvent important de pouvoir reconstruire une courbe continue à partir des valeurs discrètes.



Interpolation linéaire et fluor

L'extrait ci-dessous est tiré d'un décret français du 3 janvier 1989 concernant la teneur maximale en fluor dans l'eau destinée à la consommation humaine.

« Pour les eaux destinées à la consommation humaine, la teneur en fluor doit être inférieure à 1500 microgrammes par litre pour une température moyenne de l'aire géographique considérée comprise entre 8°C et 12°C et à 700 microgrammes par litre pour une température moyenne de l'aire géographique considérée comprise entre 25 et 30°C.
Pour les températures moyennes comprises entre 12 et 25°C, la teneur limite en fluor est calculée par interpolation linéaire. »

1. Quelle est cette teneur maximale tolérée pour une région pour laquelle la température moyenne est de 17°C ? Il est attendu ici le calcul et non du code.

2. Ecrivez la fonction renvoie la teneur en fluor en fonction de la température.

Interpolation linéaire et température

On a mesuré la température à différents moments de la journée toutes les heures, et reporté ces valeurs dans le tableau ci-dessous.

Heure	9h	10h	11h	12h	13h	14h	15h	16h	17h	18h
Température	11	14	16	17	19	16	16	13	12	11

3. Représenter ces données par un graphique (sur votre feuille).

4. Peut-on interpoler ces données pour obtenir une température à 13h30 et à 10h20 ? Remarque : *t* est donné en heures/minutes, il faut convertir *t* en minutes.

5. Créer une fonction *temperature* qui donne une interpolation de la température pour t∈ [9h00;18h00]. Cette fonction prendra en paramètre le tableau de 10 températures et le temps en heure et minutes.

6. (A faire à la fin du TD) Ecrivez une fonction qui affiche cette courbe à l'aide de la fonction *line* de *Grapic*.

La droite

Soient deux points du plan 2D A et B. La température de A est T_a et celle de B est T_b. La droite passant par A et de vecteur directeur AB peut être représentée par une équation paramétrique qui est très pratique pour faire une interpolation linéaire.

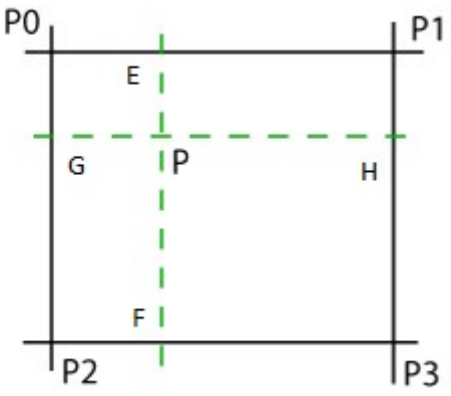
7. Donnez cette équation paramétrique.

   Utilisez cette équation pour calculer la température le long de la droite par interpolation linéaire. La température -30°C est représentée par du bleu (0, 0, 255), la température +40°C est représentée par du rouge (255,0,0).

8. Ecrivez la structure *Color* comportant 3 composantes R,G et B. Vous pouvez écrire les opérateurs +, * :
```
Color operator+(Color a, Color b);
Color operator*(Color a, Color b);
```

9. Ecrivez une procédure affichant une droite en couleur en fonction de sa température. On découpera la droite en N segments, chacun de ces segments aura une couleur unique.

Le carré coloré



Soit le quadrilatère P_0 P_1 P_2 P_3 dont les côtés sont alignés sur les axes. La température de P_0 est T_0 , celle de P1 est T_1, celle de P2 est T_2 et celle de P3 est T_3 . Comme pour l'exercice précédent nous souhaitons colorier ce quadrilatère en fonction de sa température. Pour cela nous allons introduire la notion d'interpolation bilinéaire qui n'est autre qu'une interpolation linéaire faite deux fois : une fois suivant l'axe des X et une fois suivant l'axe des Y. Soit P un point interne au quadrilatère. En fonction des longueur GP, PH, EP et PF nous allons trouver une manière d'interpoler la température.

10. Nous allons définir le point E projection de P sur P_0P_1 et F projection de P sur P_2P_3. Par interpolation linéaire calculez la température de E et de F. Puis par une 2^e interpolation linéaire calculez la température de P. Cette manière d'interpoler est appelé interpolation bilinéaire.

11. Ecrivez le sous-programme *draw_quad_bilineaire* qui remplit le quadrilatère avec la couleur correspondant à sa température. On utilisera la procédure de Grapic :

    ```
    void put_pixel(int x, int y, unsigned char r, unsigned char
    g,unsigned char b) ;
    ```
    qui affiche donne la couleur (r,g,b) au pixel (x,y)

Le triangle de feu

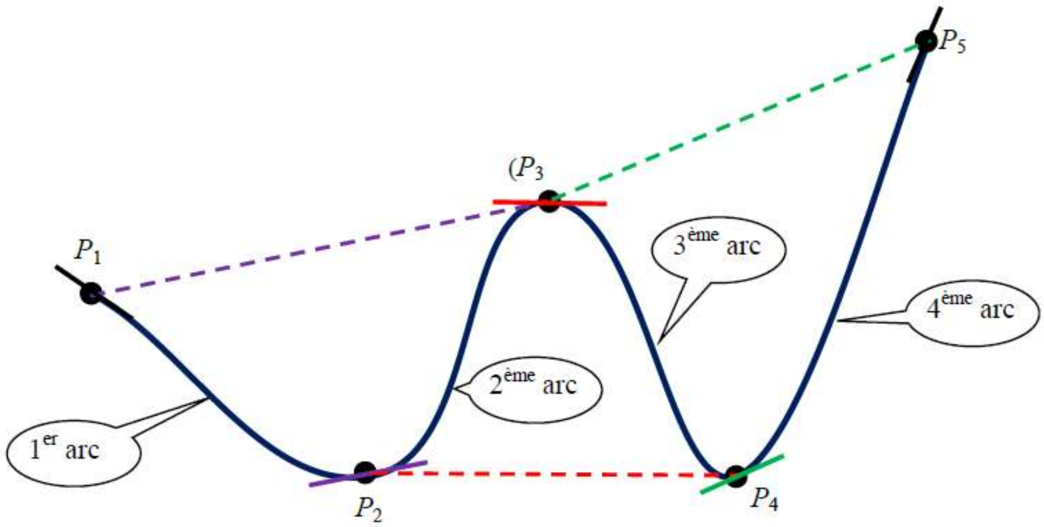
Soit le triangle ABC. La température de A est T_a , celle de B est T_b et celle de C est T_c. Comme pour l'exercice précédent nous souhaitons colorier ce triangle en fonction de sa température. Pour cela nous allons utiliser les coordonnées barycentriques.

12. Soit G(x,y) un point du triangle, trouver les coordonnées barycentrique de G en fonction des coordonnées de A,B et C.

13. Ecrivez la fonction *draw_triangle* qui remplit un triangle avec la couleur correspondant à sa température. Indication : vous pouvez faire une boucle sur les pixels du rectangle englobant.

Interpolation cubique (Pour aller plus loin)

Étant donné n points du plan, P_1, P_2, ..., P_n, on cherche à construire une courbe formée de n–1 arcs de parabole. Le premier de ces arcs est d'extrémités P_1 et P_2, le deuxième d'extrémités P_2 et P_3, le n–1 ème d'extrémités P_{n-1} et P_n. Chacun de ces arcs est le graphe d'une fonction $f(x) = ax^3+ bx^2+ cx +d$. Ces arcs doivent être reliés sans rupture de pente, la dérivée à la fin d'un arc doit donc être égale à la dérivée à l'origine de l'arc suivant.



14. Trouver les coefficients a, b c et d d'une fonction $f(x)= ax^3+ bx^2+ cx + d$ telle que $f(0) = 0$, $f(x1) = y1$ et $f'(0) = p0$ et $f'(x1) = p1$ (x1, y1, p0 et p1 sont donnés).
    Indice : vous devez trouver ceci
$$d = 0,\ c = p_0,\ b = \frac{3y_1 - x_1(2p_0 + p_1)}{x_1^{\ 2}} \ \text{ et } \ a = \frac{(p_1 - p_0 - 2bx_1)}{3x_1^{\ 2}}$$

15. La tangente en P_i sera la droite allant du point précédent P_{i-1} au point P_{i+1}. Ecrivez la fonction qui trace la courbe.