LIFAMI – TD : Dérivée et intégrale de fonctions discrètes

Objectifs : Notion de dérivation et d'intégration de fonctions discrètes

Les notions abordées dans ce TD sont assez générales et fondamentales. Il est important de comprendre ce qu'est une dérivée, une intégrale car ces notions sont utilisées dans de nombreux domaines des sciences. Essayez de faire le lien avec vos enseignements de mathématiques.

Les loups et les intégrales

Nous nous intéressons ici à la fonction P(t) qui représente le nombre de loup d'une population. Cette fonction évolue au cours du temps. Il est plus commode pour un gardien de noter le nombre de morts et de naissances de loups dans son secteur par mois. En effet, il trouve les cadavres et repère facilement les mères mettant bas. Il range ces valeurs dans deux tableaux N et M. La variation de la population par rapport au temps peut donc s'écrire

$$P'(t) = \frac{dP}{dt} = N_{naissance} - N_{mort}$$

où dP/dt est la dérivée de la fonction Population P(t) par rapport au temps.

1. Cas d'école. Supposons que le nombre de naissances moins le nombre de mort soit toujours égale à une constante, par exemple 2. Il y a toujours 2 naissances de plus que de morts. On a dans cet exemple : dP/dt = 2 ; ici dt = 1 mois.

   Quelle est la taille de la population après t mois. L'intégrale de cette fonction donne la réponse.

$$P(t) = P(t_0) + \int_{t_0}^{t} P'.dt \;\; car \;\; \int_{t_0}^{t} P'.dt = P(t) - P(t_0)$$

2. Dans la pratique, les naissances et les morts sont souvent notées/stockées de manière discrète (c'est à dire « tous les x jours »). En informatique, par exemple ces valeurs peuvent être stockées avec le tableau :

Mois	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Naissance	0	0	0	1	3	2	4	2	1	0	0	0
Mort	2	3	2	1	2	3	0	0	0	1	0	1

L’intégrale se transforme alors en somme :

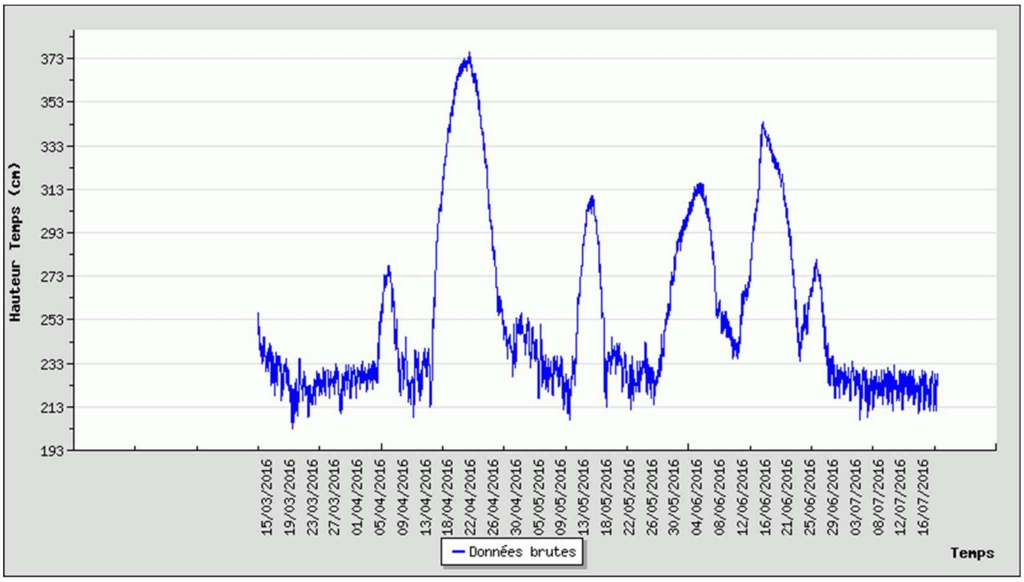
$$\int_{t_0}^{t} P'.dt = \sum_{t0}^{t} P'(t)$$

et en sachant que la population au mois 0 était de 17 individus. Ecrivez une fonction qui calcule le nombre de loups après D mois.

Le niveau d’eau de la Saône et les dérivées

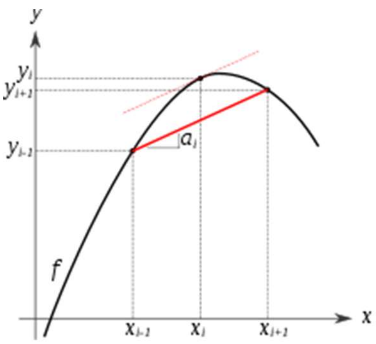
Dans le problème de l’exercice 1 il était commode de produire les données en donnant une variation, puis une intégration permettant de retrouver la fonction à analyser. Dans cet exercice, nous verrons que pour certains problèmes la variations d’une valeur est plus pertinente à analyser.

Sur tous les fleuves de France, il y a des stations de mesure du niveau d’eau. Par exemple la station U4720020 mesure le niveau de la Saône à Lyon (Pont La Feuillée), voici les données entre mars et juillet 2016 :



Nous aimerions avoir une information sur les jours de pluie dans le département à partir de ces valeurs. Connaitre le niveau de la Saône a un instant donné ne vous donne pas des informations très pertinentes. Il est sûrement plus intéressant de regarder comment le niveau a varié. Donc de calculer la dérivée de la fonction :

$$\frac{dH}{dt} = \lim_{dt \to 0} \frac{H(t) - H(t - dt)}{dt}$$



$$f'(x_i) \simeq \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

3. Ecrivez la fonction qui calcule la dérivée discrète de la fonction Hauteur dont les valeurs sont stockées dans un tableau. L'intervalle de mesure des valeurs de hauteurs est constant : une mesure chaque jour, donc dt = 1 jour

Jour	…	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115
Hauteur en cm		233	230	234	240	245	247	248	241	237	243	246

4. Une estimation des jours de pluie peut se faire en comptant le nombre de jours où le niveau d'eau monte, donc où la dérivée est positive. Ecrivez la fonction qui calcule le nombre de jours de pluie.

5. Pour estimer les jours de forte pluie, nous pouvons chercher les jours où l'augmentation du niveau d'eau est plus forte que la moyenne des augmentations journalières.

   a. Ecrivez la fonction qui calcule la moyenne des augmentations sur l'ensemble des données. Indication : il ne faut prendre en compte que les jours où la variation est positive, donc où la dérivée est positive.
   b. Ecrivez la fonction qui calcule le nombre de jours de forte pluie.

6. Avec Grapic vous pouvez affichez un graphique comme ceci :

```
 Plot p;
 float t;
 for(x=0.0; x < 2.0*M_PI; x+=0.1)
    plot_add(p, x, cos(x));
 // ajoute les valeurs de y=cos(x) pour les x entre 0 et 2*PI

 …
 plot_draw( p, 20, 20, 180, 180);
 // dessine la courbe cosinus dans le rectangle définit par les
coordonnées pixel (20,20) (180,180)
```

Ecrivez la fonction qui trace la courbe d'une fonction H dont les valeurs sont rangées dans un tableau, puis qui trace la dérivée de cette fonction.