دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول

Jundi Shapur

University of Technology-Dezful

فتوگرامتری تحلیلی

فصل ششم: ترفیع فضایی

Nurollah Tatar

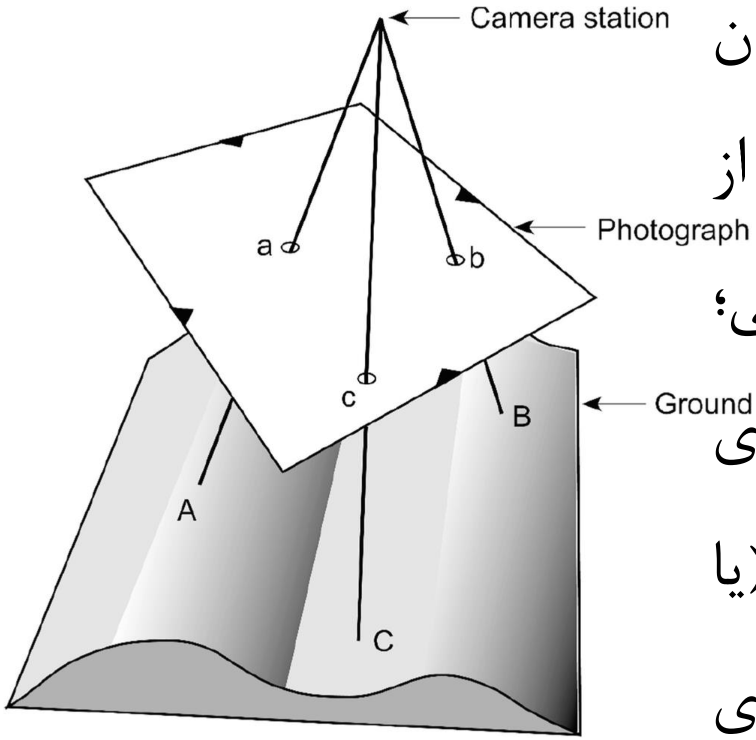
Analytical Photogrammetry

2022

فهرست مطالب

مقدمه

- ترفیع فضایی یعنی پیدا کردن محل تلاقی پرتوهای گذرنده از نقاط کنترل زمینی و نقاط عکسی؛ که به موجب آن پارامترهای وضعیت و موقعیت مرکز تصویر (یا ضرایب پارامتریک تبدیل سه بعدی به دو بعدی) بدست می‌آیند.

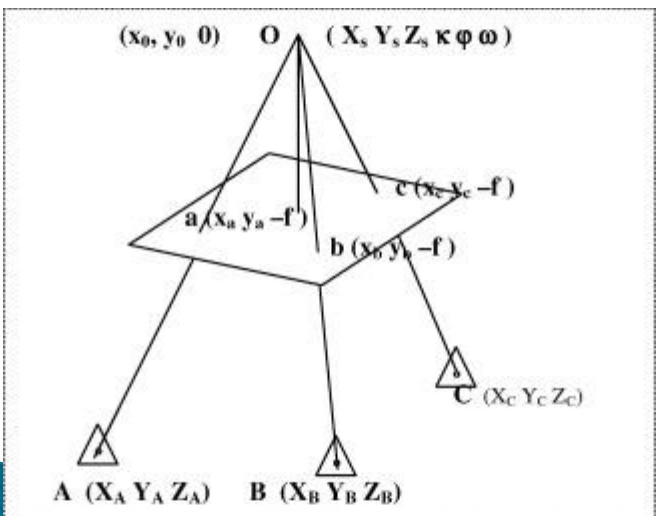


مقدمه

- یا به عبارتی دیگر ترفیع فضایی یعنی محاسبه مختصات مرکز تصویر و پارامترهای دوران با استفاده از نقاط کنترل.
- البته ما در این فصل تنها به برآورد پارامترهای موقعیت و وضعیت اکتفا نمی‌کنیم! بلکه برآورد ضرایب معادلات پارامتریک را نیز در این فصل مد نظر قرار خواهیم داد.
- منطور از معادلات پارامتریک، معادلات افاین هشت پارامتره، DLT و پروژکتیو دو بعدی در ترمیم تحلیلی هستند.

مقدمه

- ترفیع در واقع بدست آوردن پارامترهای توجیه خارجی است. در ترفیع فضایی پارامترهای توجیه خارجی از روی نقاط کنترل (نقاطی که هم مختصات زمینی و عکسی معلومی دارند، محاسبه می‌شوند.

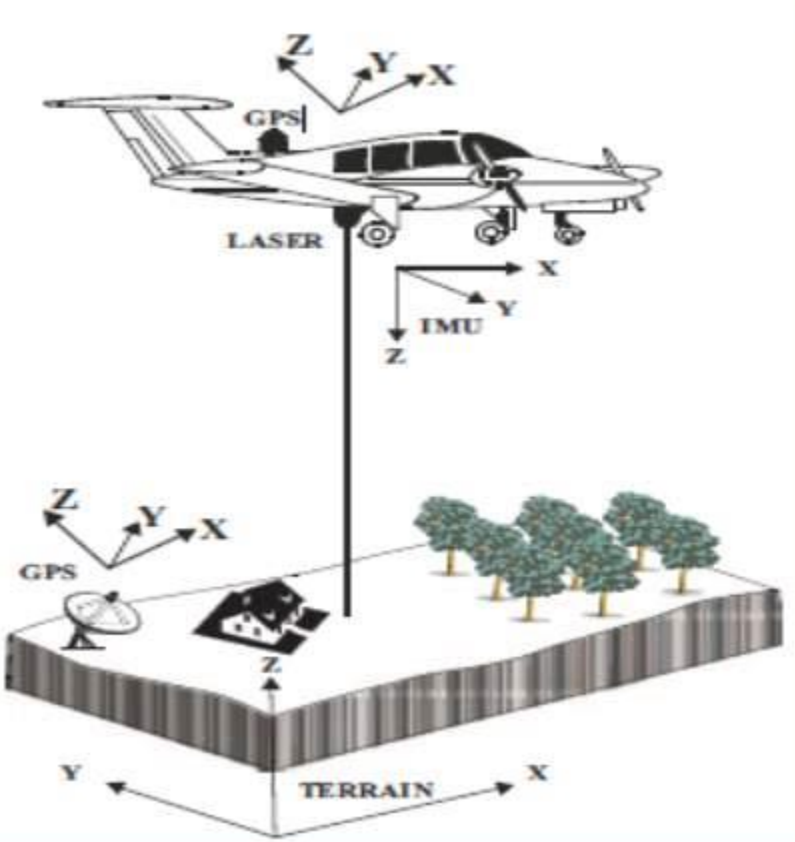


- پیش فرض ترفیع فضایی این است که توجیه داخلی انجام گرفته و اعوجاجات شعاعی و مماسی از روی تصویر برداشته شده اند.

مقدمه

- در ترفیع افزایش تعداد نقاط کنترل به منزله‌ی افزایش تعداد مشاهدات است که موجب افزایش دقت مجهولات می‌شود (البته درصورتی که خطای فاحش و سیستماتیک نداشته باشیم)
- در صورتی که داده‌های موقعیت و وضعیتی که توسط گیرنده‌های ماهوره ای و IMU اندازه‌گیری شده‌اند دارای دقت قابل قبولی باشند؛ می‌توانند به عنوان پارامترهای توجیه خارجی در نظر گرفته شوند؛ در چنین حالتی شاید نیاز به ترفیع نباشد!

مقدمه



- در صورتی که داده‌های موقعیت و وضعیت، دارای دقت قابل قبولی نباشند؛ در ترفیع فضایی از آنها به عنوان مقدار اولیه یا گاهی اوقات به صورت وزندار استفاده می‌شود.

ترفیع فضایی افاین هشت پارامتره

- همانطور که در فصل تبدیلات و توجیهات گفته شد، یکی از تبدیلات سه‌بعدی به دو بعدی، تبدیل افاین هشت پارامتره است؛ که معادلات آن به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{cases} x_a = a_1 X_A + a_2 Y_A + a_3 Z_A + a_4 \\ y_a = b_1 X_A + b_2 Y_A + b_3 Z_A + b_4 \end{cases}$$

- که در آن (x_a, y_a) مختصات عکسی و (X_A, Y_A, Z_A) مختصات زمینی نقاط هستند.

- معمولا این تبدیل برای زمین‌مرجع‌سازی تصاویر با هندسه موازی به کار می‌رود.

ترفیع فضایی افاین هشت پارامتره

- فرم ماتریسی تبدیل افاین هشت پارامتری برای ترفیع فضایی که در آن پارامترهای این تبدیل مجهول‌اند، به صورت زیر نوشته می‌شود. (فرض کنید حداقل چهار نقطه کنترل موجود است).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{bmatrix}_{8\times1}}_{L} = \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_3 & Y_3 & Z_3 & 1 \\ X_4 & Y_4 & Z_4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_4 & Y_4 & Z_4 & 1 \end{bmatrix}_{8\times8}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}_{8\times1}}_{X} \Rightarrow AX = L \Rightarrow X = (A^T A)^{-1} A^T L$$

ترفیع فضایی افاین هشت پارامتره

دانشگاه صنعتی جندی‌شاپور دزفول

- مثال ۱: با استفاده از یک سیستم تصویربرداری با هندسه نگاشت موازی از یک منطقه تصویری اخذ شده است. چنانچه مختصات زمینی و عکسی پنج نقطه کنترل به صورت زیر باشد، با فرض بر اینکه این نگاشت یک افاین هشت پارامتره است؛ پارامترهای این تبدیل را برآورد نمایید؟

مختصات زمینی و عکسی نقاط کنترل					
شماره نقطه	مختصات عکسی (پیکسل)		مختصات زمینی (متر)		
	x (pix)	y (pix)	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	9101	9327	1300	650	169
2	8859	9555	900	1250	120
3	8759	9635	1000	1860	210
4	9195	9220	1800	890	245
5	8756	9648	800	1600	100

ترفیع فضایی افاین هشت پارامتره

دانشگاه صنعتی جندی‌شاپور دزفول

- حل مثال ۱: ابتدا ماتریس‌های شبکه (A) و مشاهدات (L) ایجاد می‌شوند:

$$A=\begin{bmatrix} 1300 & 650 & 169 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1300 & 650 & 169 & 1 \\ 900 & 1250 & 120 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 900 & 1250 & 120 & 1 \\ 1000 & 1860 & 210 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & 1860 & 210 & 1 \\ 1800 & 890 & 245 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1800 & 890 & 245 & 1 \\ 800 & 1600 & 100 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 800 & 1600 & 100 & 1 \end{bmatrix} \qquad L=\begin{bmatrix} 9101 \\ 9327 \\ 8859 \\ 9555 \\ 8759 \\ 9635 \\ 9195 \\ 9220 \\ 8756 \\ 9648 \end{bmatrix}$$

ترفیع فضایی افاین هشت پارامتره

- حل مثال ۱: در مرحله بعد با به کارگیری روش کمترین مربعات مجهولات افاین هشت پارامتره برآورد می‌شوند:

$$X=(A^TA)^{-1}A^TL \Rightarrow X=\begin{bmatrix}0.2891\\-0.211\\-0.00029\\8862.4\\-0.3009\\0.1798\\0.004\\9600\end{bmatrix} \Rightarrow residuals = AX-L=\begin{bmatrix}0.082 & -0.018\\-0.154 & 0.033\\0.014 & -0.003\\-0.028 & 0.006\\0.087 & -0.019\end{bmatrix}$$

ترفیع فضایی برای معادلات DLT

ترفیع فضایی برای معادلات DLT

دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول

- همانطور که در فصل پیش توضیح داده شد، یکی از تبدیلات سه‌بعدی به دو بعدی، تبدیل DLT است؛ که معادلات آن به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{cases} x_a = \dfrac{L_1X_A + L_2Y_A + L_3Z_A + L_4}{L_9X_A + L_{10}Y + L_{11}Z + 1} \\ y_a = \dfrac{L_5X_A + L_6Y_A + L_7Z_A + L_8}{L_9X_A + L_{10}Y_A + L_{11}Z_A + 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_a = L_1X_A + L_2Y_A + L_3Z_A + L_4 - (L_9X_A + L_{10}Y_A + L_{11}Z_A)x_a \\ y_a = L_5X_A + L_6Y_A + L_7Z_A + L_8 - (L_9X + L_{10}Y_A + L_{11}Z_A)y_a \end{cases}$$

- که در آن (x_a,y_a) مختصات عکسی و (X_A,Y_A,Z_A) مختصات زمینی نقاط هستند.

ترفیع فضایی برای معادلات DLT

- فرم ماتریسی تبدیل DLT برای ترفیع فضایی که در آن پارامترهای این تبدیل مجهول‌اند، به صورت زیر نوشته می‌شود. (فرض کنید حداقل شش نقطه کنترل موجود است).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \\ x_5 \\ y_5 \\ x_6 \\ y_6 \end{bmatrix}_{12\times1}}_{L} = \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1X_1 & -x_1Y_1 & -x_1Z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & -y_1X_1 & -y_1Y_1 & -y_1Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2X_2 & -x_2Y_2 & -x_2Z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 & -y_2X_2 & -y_2Y_2 & -y_2Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_3X_3 & -x_3Y_3 & -x_3Z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_3 & Y_3 & Z_3 & 1 & -y_3X_3 & -y_3Y_3 & -y_3Z_3 \\ X_4 & Y_4 & Z_4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_4X_4 & -x_4Y_4 & -x_4Z_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_4 & Y_4 & Z_4 & 1 & -y_4X_4 & -y_4Y_4 & -y_4Z_4 \\ X_5 & Y_5 & Z_5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_5X_5 & -x_5Y_5 & -x_5Z_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_5 & Y_5 & Z_5 & 1 & -y_5X_5 & -y_5Y_5 & -y_5Z_5 \\ X_6 & Y_6 & Z_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_6X_6 & -x_6Y_6 & -x_6Z_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_6 & Y_6 & Z_6 & 1 & -y_6X_6 & -y_6Y_6 & -y_6Z_6 \end{bmatrix}_{12\times11}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \\ L_6 \\ L_7 \\ L_8 \\ L_9 \\ L_{10} \\ L_{11} \end{bmatrix}_{11\times1}}_{X} \Rightarrow AX = L \Rightarrow X = (A^TA)^{-1}A^TL$$

ترفیع فضایی برای معادلات DLT

- مثال ۲: چنانچه مختصات زمینی و عکسی شش نقطه کنترل به صورت زیر باشد، با فرض بر اینکه این نگاشت یک تبدیل DLT است؛ پارامترهای این تبدیل را مستقیما برآورد نمایید؟

مختصات زمینی و عکسی نقاط کنترل					
شماره نقطه	مختصات عکسی (میلیمتر)		مختصات زمینی (متر)		
	x (mm)	y (mm)	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	23.864	-33.065	1300	650	169
2	-13.199	32.091	900	1250	120
3	1.228	97.145	1000	1860	210
4	84.288	-11.415	1800	890	245
5	-19.962	66.036	800	1600	100
6	6.080	5.390	1100	987	251

ترفیع فضایی برای معادلات DLT

- حل مثال ۲: ابتدا ماتریس‌های شبکه (A) و مشاهدات (L) ایجاد می‌شوند:

$$A=\begin{bmatrix}
1300 & 650 & 169 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -31023.46 & -15511.73 & -4033.05 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1300 & 650 & 169 & 1 & 42984.89 & 21492.445 & 5588.036 \\
900 & 1250 & 120 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11879.19 & 16498.875 & 1583.892 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 900 & 1250 & 120 & 1 & -28882.17 & -40114.125 & -3850.956 \\
1000 & 1860 & 210 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1227.9 & -2283.894 & -257.859 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & 1860 & 210 & 1 & -97144.5 & -180688.77 & -20400.35 \\
1800 & 890 & 245 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -151717.5 & -75015.875 & -20650.44 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1800 & 890 & 245 & 1 & 20547 & 10159.35 & 2796.675 \\
800 & 1600 & 100 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15969.28 & 31938.56 & 1996.16 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 800 & 1600 & 100 & 1 & -52829.12 & -105658.24 & -6603.64 \\
1100 & 987 & 251 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6749.133 & -6001.256 & -1526.155 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1100 & 987 & 251 & 1 & -5983.344 & -5320.325 & -1352.99
\end{bmatrix}$$

ترفیع فضایی برای معادلات DLT

- حل مثال ۲: ابتدا ماتریس‌های شبکه (A) و مشاهدات (L) ایجاد می‌شوند:
- در مرحله بعد با به کارگیری روش کمترین مربعات مجهولات افاین هشت پارامتره برآورد می‌شوند:

$$L = \begin{bmatrix} 23.8642 \\ -33.0653 \\ -13.1991 \\ 32.0913 \\ 1.2279 \\ 97.1445 \\ 84.2875 \\ -11.415 \\ -19.9616 \\ 66.0364 \\ 6.0803 \\ 5.3904 \end{bmatrix} \quad X = (A^T A)^{-1} A^T L \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 0.0951 \\ 0.0072 \\ -0.0034 \\ 106.6099 \\ -0.007 \\ 0.095 \\ 0.0054 \\ -82.8095 \\ -0.0000252 \\ 0.00003389 \\ -0.0006257 \end{bmatrix} \Rightarrow residuals = AX - L = \begin{bmatrix} -2\times10^{-7} & 2\times10^{-7} \\ -6\times10^{-7} & -7\times10^{-7} \\ -5\times10^{-7} & -4\times10^{-8} \\ 1\times10^{-7} & -8\times10^{-8} \\ 9\times10^{-7} & 5\times10^{-7} \\ 4\times10^{-7} & 7\times10^{-8} \end{bmatrix}$$

ترفیع فضایی برای معادلات DLT

- چند نکته در مورد ترفیع برای معادلات DLT
- برای حل این دستگاه معادلات نیازی به مقدار اولیه نیست. زیرا با یک دستگاه معادلات خطی روبرو هستیم که به صورت مستقیم می‌توان مجهولات را برآورد نمود.
- از نقطه نظر سرشکنی برآورد پارامترهای تبدیل DLT با روش پارامتریک کمترین مربعات صحیح نیست! زیرا مشاهدات تنها باید در یک طرف دستگاه معادلات باشند. در حالی که در این روش مشاهدات در هر دو طرف معادله مشاهده شدند.

ترفیع فضایی برای معادلات DLT

- چند نکته در مورد ترفیع با معادلات DLT
- تحقیقات نشان می دهد برای استفاده از این دستگاه معادلات، بهتر است نرمالیزاسیون انجام گیرد و ضرایب DLT در حالت نرمالیزه برآورد شوند.
- در حالتی که هندسی تصاویر نسبت به هم از نقطه نظر فتوگرامتری دارای دقت پایینی است و یا توزیع نقاط کنترل منظم و پراکنده نیست، توصیه می‌شود از این روش استفاده نشود.
- از این روش تنها برای برآورد مقادیر اولیه پارامترهای وضعیت و موقعیت استفاده کنید.

تمرین شماره ۶ – قسمت اول

- با توجه به مختصات نقاط کنترل در اسلاید بعد، در محیط متلب برنامه ای بنویسید که با استفاده از معادلات ترفیع برای معادلات DLT ، ضرایب تبدیل DLT را برآورد شوند.

- نتیجه این تمرین را تا هفته آینده به آدرس noorollah.tatar@gmail.com با موضوع "تمرین شماره ۶ – قسمت اول درس فتوگرامتری تحلیلی" ایمیل کنید.
- راهنمایی: مشابه مثال ۲ عمل شود.

تمرین شماره ۶ – قسمت اول

- مختصات زمینی و عکسی نقاط کنترل

مختصات زمینی و عکسی نقاط کنترل					
شماره نقطه	مختصات عکسی (میلیمتر)		مختصات زمینی (متر)		
	x (mm)	y (mm)	X (m)	Y (m)	Z (m)
7	24.6668	-40.7165	1300	650	169
8	-11.3672	28.8014	900	1250	120
9	5.9012	97.3638	1000	1860	210
10	89.094	-21.4565	1800	890	245
11	-17.2908	65.0336	800	1600	100
12	7.5623	-0.8258	1100	987	251

ترفیع فضایی با معادلات شرط هم خطی

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- یکی از روش‌هایی که برای ترفیع فضایی به کار می‌رود، استفاده از معادلات شرط هم خطی است. این روش مرسوم‌ترین و دقیق ترین روش برای برآورد پارامترهای توجیه خارجی است.
- همانطور که به خاطر دارید معادلات شرط هم خطی به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{cases} x_a - x_o = -f \dfrac{[m_{11}(X_A - X_C) + m_{12}(Y_A - Y_C) + m_{13}(Z_A - Z_C)]}{[m_{31}(X_A - X_C) + m_{32}(Y_A - Y_C) + m_{33}(Z_A - Z_C)]} \\ y_a - y_o = -f \dfrac{[m_{21}(X_A - X_C) + m_{22}(Y_A - Y_0) + m_{23}(Z_A - Z_C)]}{[m_{31}(X_A - X_C) + m_{32}(Y_A - Y_C) + m_{33}(Z_A - Z_C)]} \end{cases}$$

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- همانطور که پیشتر نیز گفته شد، فرض اولیه در ترفیع فضایی این است که پارامترهای توجیه داخلی محاسبه شده باشند. چنانچه خطای ترفیع بیش از حد مجاز داشته باشیم، این خطا ناشی از دقت پایین (یا خطای پارامترهای توجیه داخلی یا پارامترهای کالیبراسیون یا خطای ناشی از اندازه‌گیری نقاط کنترل است.
- همچنین مجهول معاونات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} r = m_{11}(X_A - X_C) + m_{12}(Y_A - Y_C) + m_{13}(Z_A - Z_C) \\ s = m_{21}(X_A - X_C) + m_{22}(Y_A - Y_C) + m_{23}(Z_A - Z_C) \\ q = m_{31}(X_A - X_C) + m_{32}(Y_A - Y_C) + m_{33}(Z_A - Z_C) \end{cases}$$

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- در ترفیع فضایی با معادلات شرط هم خطی، با معادلاتی غیرخطی سر و کار داریم که بایستی خطی شوند.
- برای خط سازی از بسط سری تیلور استفاده می‌شود. پیش از خطی سازی معادلات شرط هم خطی، معادلات مربوط به مختصات عکسی x و y به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\begin{cases} F = x_a = x_o - f\dfrac{[m_{11}(X_A - X_C) + m_{12}(Y_A - Y_C) + m_{13}(Z_A - Z_C)]}{[m_{31}(X_A - X_C) + m_{32}(Y_A - Y_C) + m_{33}(Z_A - Z_C)]} \\ G = y_a = y_o - f\dfrac{[m_{21}(X_A - X_C) + m_{22}(Y_A - Y_C) + m_{23}(Z_A - Z_C)]}{[m_{31}(X_A - X_C) + m_{32}(Y_A - Y_C) + m_{33}(Z_A - Z_C)]} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F = x_a = x_o - f\dfrac{r}{q} \\ G = y_a = y_o - f\dfrac{s}{q} \end{cases}$$

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- خط سازی با بسط سری تیلور:

$$\Delta X = \left(X_A - X_C \right)$$
$$\Delta Y = (Y_A - Y_C)$$
$$\Delta Z = (Z_A - Z_C)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \omega} = \frac{f}{q^2}\left[r(-m_{33}\Delta Y + m_{32}\Delta Z) - q(-m_{13}\Delta Y + m_{12}\Delta Z) \right]$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{f}{q^2}\left[\begin{array}{l} r(\Delta X \cos\varphi + \Delta Y \sin\omega \sin\varphi - \Delta Z \cos\omega \sin\varphi)... \\ -q(-\Delta X \sin\varphi \cos\kappa + \Delta Y \sin\omega \cos\varphi \cos\kappa - \Delta Z \cos\omega \cos\varphi \cos\kappa) \end{array} \right]$$

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa} = \frac{-f}{q}\left[m_{21}\Delta X + m_{22}\Delta Y + m_{23}\Delta Z \right]$$

$$\frac{\partial F}{\partial X_C} = \frac{-f}{q^2}\left[r m_{31} - q m_{11} \right]$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y_C} = \frac{-f}{q^2}\left[r m_{32} - q m_{12} \right]$$

$$\frac{\partial F}{\partial Z_C} = \frac{-f}{q^2}\left[r m_{33} - q m_{13} \right]$$

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- خط سازی با بسط سری تیلور:

$$\Delta X = (X_A - X_C)$$
$$\Delta Y = (Y_A - Y_C)$$
$$\Delta Z = (Z_A - Z_C)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \omega} = \frac{f}{q^2}\left[s(-m_{33}\Delta Y + m_{32}\Delta Z) - q(-m_{23}\Delta Y + m_{22}\Delta Z)\right]$$

$$\frac{\partial G}{\partial \varphi} = \frac{f}{q^2}\begin{bmatrix} s(\Delta X\cos\varphi + \Delta Y\sin\omega\sin\varphi - \Delta Z\cos\omega\sin\varphi)... \\ -q(\Delta X\sin\varphi\sin\kappa - \Delta Y\sin\omega\cos\varphi\sin\kappa + \Delta Z\cos\omega\cos\varphi\sin\kappa) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \kappa} = \frac{f}{q}\left[m_{11}\Delta X + m_{12}\Delta Y + m_{13}\Delta Z\right]$$

$$\frac{\partial G}{\partial X_C} = \frac{-f}{q^2}\left[sm_{31} - qm_{21}\right]$$

$$\frac{\partial G}{\partial Y_C} = \frac{-f}{q^2}\left[sm_{32} - qm_{22}\right]$$

$$\frac{\partial G}{\partial Z_C} = \frac{-f}{q^2}\left[sm_{33} - qm_{23}\right]$$

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول

- باتوجه به مشتقات اسلایدهای قبل، دستگاه معادلات خطی سازی شده برای ترفیع فضایی یک نقطه کنترل، به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{cases} x_a \simeq F_1(X0) + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \omega}\omega + \frac{\partial F_1}{\partial \varphi}\varphi + \frac{\partial F_1}{\partial \kappa}\kappa + \frac{\partial F_1}{\partial X_C}X_C + \frac{\partial F_1}{\partial Y_C}Y_C + \frac{\partial F_1}{\partial Z_C}Z_C - \ldots \\ -\frac{\partial F_1}{\partial \omega}\omega_0 - \frac{\partial F_1}{\partial \varphi}\varphi_0 - \frac{\partial F_1}{\partial \kappa}\kappa_0 - \frac{\partial F_1}{\partial X_C}X_{C0} - \frac{\partial F_1}{\partial Y_C}Y_{C0} - \frac{\partial F_1}{\partial Z_C}Z_{C0} \end{bmatrix} \\ y_a \simeq G_1(X0) + \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial \omega}\omega + \frac{\partial G_1}{\partial \varphi}\varphi + \frac{\partial G_1}{\partial \kappa}\kappa + \frac{\partial G_1}{\partial X_C}X_C + \frac{\partial G_1}{\partial Y_C}Y_C + \frac{\partial G_1}{\partial Z_C}Z_C - \ldots \\ -\frac{\partial G_1}{\partial \omega}\omega_0 - \frac{\partial G_1}{\partial \varphi}\varphi_0 - \frac{\partial G_1}{\partial \kappa}\kappa_0 - \frac{\partial G_1}{\partial X_C}X_{C0} - \frac{\partial G_1}{\partial Y_C}Y_{C0} - \frac{\partial G_1}{\partial Z_C}Z_{C0} \end{bmatrix} \end{cases}$$

- که در آن (X_{C0}, Y_{C0}, Z_{C0}) مقدار اولیه مختصات مرکز تصویر و $(\omega_0, \varphi_0, k_0)$ مقداراولیه دورانها بر حسب رادیان هستند.

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- باتوجه به مشتقات اسلایدهای قبل، دستگاه معادلات خطی سازی شده برای ترفیع فضایی یک نقطه کنترل، به صورت زیر نوشته می‌شوند:

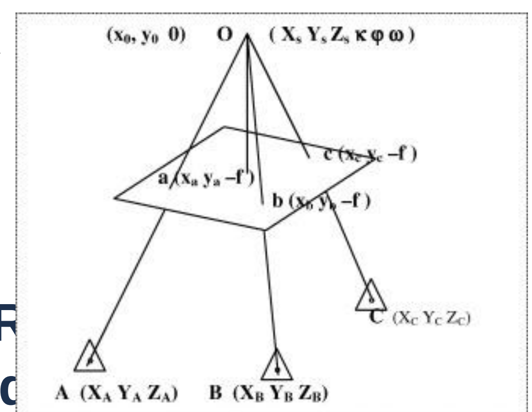
$$\begin{cases}
\begin{bmatrix} x_a - F_1(X0) + \dfrac{\partial F_1}{\partial \omega}\omega_0 + \dfrac{\partial F_1}{\partial \varphi}\varphi_0 + \dfrac{\partial F_1}{\partial \kappa}\kappa_0 + \dots \\ + \dfrac{\partial F_1}{\partial X_C} X_{C0} + \dfrac{\partial F_1}{\partial Y_C} Y_{C0} + \dfrac{\partial F_1}{\partial Z_C} Z_{C0} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial \omega}\omega + \dfrac{\partial F_1}{\partial \varphi}\varphi + \dfrac{\partial F_1}{\partial \kappa}\kappa + \dots \\ + \dfrac{\partial F_1}{\partial X_C} X_C + \dfrac{\partial F_1}{\partial Y_C} Y_C + \dfrac{\partial F_1}{\partial Z_C} Z_C \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} y_a - G_1(X0) + \dfrac{\partial G_1}{\partial \omega}\omega_0 + \dfrac{\partial G_1}{\partial \varphi}\varphi_0 + \dfrac{\partial G_1}{\partial \kappa}\kappa_0 + \dots \\ + \dfrac{\partial G_1}{\partial X_C} X_{C0} + \dfrac{\partial G_1}{\partial Y_C} Y_{C0} + \dfrac{\partial G_1}{\partial Z_C} Z_{C0} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial \omega}\omega + \dfrac{\partial G_1}{\partial \varphi}\varphi + \dfrac{\partial G_1}{\partial \kappa}\kappa + \dots \\ + \dfrac{\partial G_1}{\partial X_C} X_C + \dfrac{\partial G_1}{\partial Y_C} Y_C + \dfrac{\partial G_1}{\partial Z_C} Z_C \end{bmatrix}
\end{cases}$$

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- همچنین فرم ماتریسی دستگاه معادلات فوق برای حداقل سه نقطه به صورت زیر خواهد بود:

$$A=\begin{bmatrix}
\frac{\partial F_1}{\partial \omega} & \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_1}{\partial \kappa} & \frac{\partial F_1}{\partial X_C} & \frac{\partial F_1}{\partial Y_C} & \frac{\partial F_1}{\partial Z_C} \\
\frac{\partial G_1}{\partial \omega} & \frac{\partial G_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial G_1}{\partial \kappa} & \frac{\partial G_1}{\partial X_C} & \frac{\partial G_1}{\partial Y_C} & \frac{\partial G_1}{\partial Z_C} \\
\frac{\partial F_2}{\partial \omega} & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_2}{\partial \kappa} & \frac{\partial F_2}{\partial X_C} & \frac{\partial F_2}{\partial Y_C} & \frac{\partial F_2}{\partial Z_C} \\
\frac{\partial G_2}{\partial \omega} & \frac{\partial G_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial G_2}{\partial \kappa} & \frac{\partial G_2}{\partial X_C} & \frac{\partial G_2}{\partial Y_C} & \frac{\partial G_2}{\partial Z_C} \\
\frac{\partial F_3}{\partial \omega} & \frac{\partial F_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_3}{\partial \kappa} & \frac{\partial F_3}{\partial X_C} & \frac{\partial F_3}{\partial Y_C} & \frac{\partial F_3}{\partial Z_C} \\
\frac{\partial G_3}{\partial \omega} & \frac{\partial G_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial G_3}{\partial \kappa} & \frac{\partial G_3}{\partial X_C} & \frac{\partial G_3}{\partial Y_C} & \frac{\partial G_3}{\partial Z_C}
\end{bmatrix}_{6\times 6}
\quad
X=\begin{bmatrix}\omega\\ \varphi\\ \kappa\\ X_C\\ Y_C\\ Z_C\end{bmatrix}_{6\times 1}$$

- در این دستگاه معادلات به ازای هر نقطه کنترل در هر عکس دو معادله ایجاد می‌شود.



ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- همچنین فرم ماتریسی دستگاه معادلات فوق برای حداقل سه نقطه به صورت زیر خواهد بود:

$$L=\begin{bmatrix}
x_1-F_1(X0)+\frac{\partial F_1}{\partial\omega}\omega_0+\frac{\partial F_1}{\partial\varphi}\varphi_0+\frac{\partial F_1}{\partial\kappa}\kappa_0+\frac{\partial F_1}{\partial X_C}X_{C0}+\frac{\partial F_1}{\partial Y_C}Y_{C0}+\frac{\partial F_1}{\partial Z_C}Z_{C0}\\
y_1-G_1(X0)+\frac{\partial G_1}{\partial\omega}\omega_0+\frac{\partial G_1}{\partial\varphi}\varphi_0+\frac{\partial G_1}{\partial\kappa}\kappa_0+\frac{\partial G_1}{\partial X_C}X_{C0}+\frac{\partial G_1}{\partial Y_C}Y_{C0}+\frac{\partial G_1}{\partial Z_C}Z_{C0}\\
x_2-F_2(X0)+\frac{\partial F_2}{\partial\omega}\omega_0+\frac{\partial F_2}{\partial\varphi}\varphi_0+\frac{\partial F_2}{\partial\kappa}\kappa_0+\frac{\partial F_2}{\partial X_C}X_{C0}+\frac{\partial F_2}{\partial Y_C}Y_{C0}+\frac{\partial F_2}{\partial Z_C}Z_{C0}\\
y_2-G_2(X0)+\frac{\partial G_2}{\partial\omega}\omega_0+\frac{\partial G_2}{\partial\varphi}\varphi_0+\frac{\partial G_2}{\partial\kappa}\kappa_0+\frac{\partial G_2}{\partial X_C}X_{C0}+\frac{\partial G_2}{\partial Y_C}Y_{C0}+\frac{\partial G_2}{\partial Z_C}Z_{C0}\\
x_3-F_3(X0)+\frac{\partial F_3}{\partial\omega}\omega_0+\frac{\partial F_3}{\partial\varphi}\varphi_0+\frac{\partial F_3}{\partial\kappa}\kappa_0+\frac{\partial F_3}{\partial X_C}X_{C0}+\frac{\partial F_3}{\partial Y_C}Y_{C0}+\frac{\partial F_3}{\partial Z_C}Z_{C0}\\
y_3-G_3(X0)+\frac{\partial G_3}{\partial\omega}\omega_0+\frac{\partial G_3}{\partial\varphi}\varphi_0+\frac{\partial G_3}{\partial\kappa}\kappa_0+\frac{\partial G_3}{\partial X_C}X_{C0}+\frac{\partial G_3}{\partial Y_C}Y_{C0}+\frac{\partial G_3}{\partial Z_C}Z_{C0}
\end{bmatrix}_{6\times1}$$

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

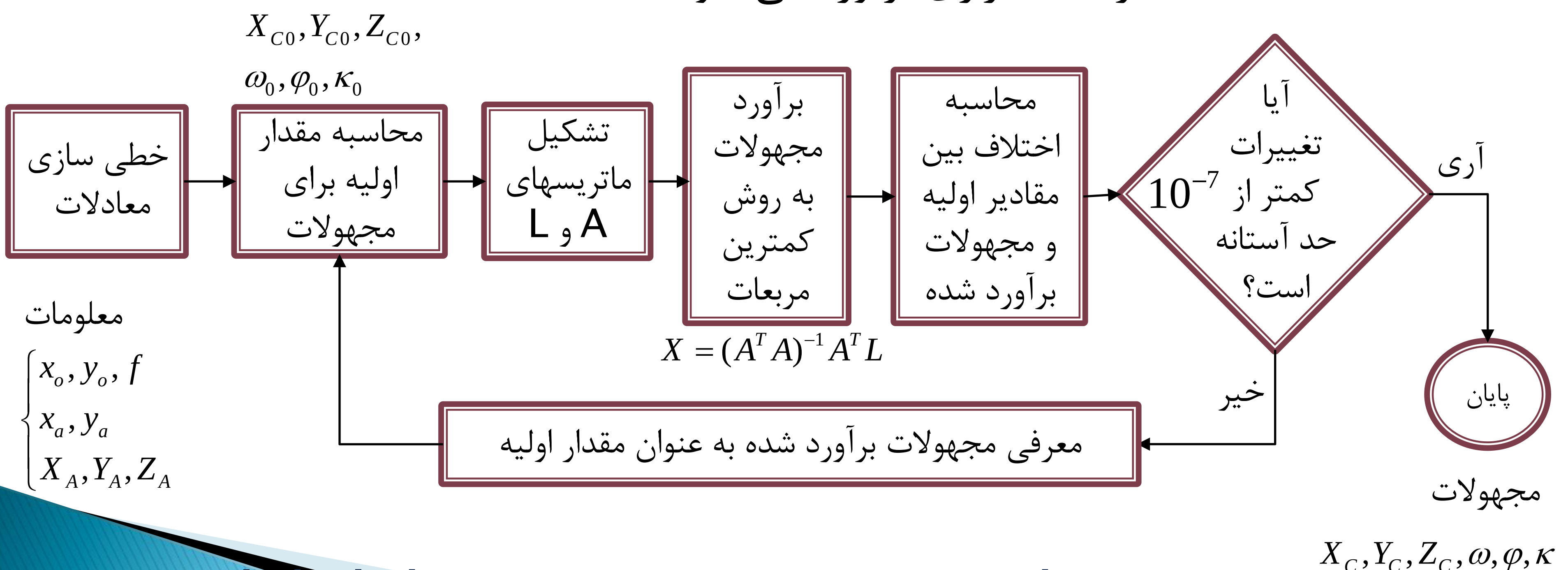
- مجهولات دستگاه معادله فوق طی یک فرآیند تکراری به روش کمترین مربعات برآورد می‌شوند.

$$X = (A^T A)^{-1} A^T L$$

- سعی کنید معادلات مربوط به زاوایای دوران بر اساس رادیان نوشته شده و این زوایا براساس رادیان برآورد شوند.
- حدآستانه برای اتمام تکرار را ۰.۰۰۰۰۰۰۱ در نظر بگیرید.
- سعی کنید نقاط کنترل در گوشه های مدل باشند. نزدیکی نقاط کنترل به مرکز تصویر باعث حساسیت و کاهش دقت مجهولات می شود.

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- همانطور که پیشتر در سرشکنی گفته شد برای حل دستگاه معادلات خطی شده، پس از تشکیل ماتریس‌های دستگاه معادلات، مجهولات طی یک فرآیند تکراری برآورد می شوند:



ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- برای تعیین مقادیر اولیه ترفیع فضایی فرض می‌شود رابطه بین مختصات عکسی و مختصات مسطحاتی نقاط کنترل از یک مدل متشابه پیروی می‌کند.
- با بدست آوردن ضرایب مدل متشابه بین مختصات مسطحاتی زمینی نقاط کنترل و مختصات عکسی، مقدار اولیه مولفه های X و Y مرکز تصویر و دوران کاپا و مقیاس بدست می‌آید.
- همچنین از روی مقیاس و ارتفاع متوسط منطقه هم مولفه Z مرکز تصویر تخمین زده می شود.

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- محاسبه مقادیر اولیه
- (فرض کنید حداقل سه نقطه کنترل داریم)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{bmatrix}}_{L} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 \\ y_1 & -x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 \\ y_2 & -x_2 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 \\ y_3 & -x_3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}}_{X} \Rightarrow X = \left(A^T A\right)^{-1} A^T L$$

مختصات زمینی (L)، مختصات عکسی (A)

- لازم است مختصات عکسی نیز بر حسب متر وارد شود.

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- محاسبه مقادیر اولیه
- پس از محاسبه ضرایب مدل متشابه مقادیر اولیه مجهولات ترفیع به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$\kappa_0 \simeq \arctan(\frac{-b}{a})$$

$$\lambda \simeq \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\omega_0 \simeq 0$$

$$\varphi_0 \simeq 0$$

$$X_{C0} \simeq c$$

$$Y_{C0} \simeq d$$

$$Z_{C0} \simeq \lambda f + Z_{avg}$$

- که در آن
- f فاصله کانونی بر حسب متر
- Z_{avg} میانگین ارتفاع نقاط کنترل است

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول

- مثال ۳: چنانچه مختصات زمینی و عکسی چهار نقطه کنترل به صورت زیر باشد، پارامترهای توجیه خارجی این عکس را برآورد نمایید؟

مختصات زمینی و عکسی نقاط کنترل					
شماره نقطه	مختصات عکسی (میلیمتر)		مختصات زمینی (متر)		
	x (mm)	y (mm)	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	29.518	51.4376	1260	1410	210
2	4.3188	75.6828	1000	1650	150
3	84.1512	-10.51069	1850	900	100
4	-11.5718	29.7386	900	1180	180

پارامترهای توجیه داخلی (میلیمتر)		
xo	y0	f
0.008	-0.012	152.14

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- حل مثال ۳:
- ابتدا مقادیر اولیه محاسبه می‌شوند:
- برای اینکار ماتریس های A و L مدل متشابه ایجاد می شوند

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1260 \\ 1410 \\ 1000 \\ 1650 \\ 1850 \\ 900 \\ 900 \\ 1180 \end{bmatrix}}_{L} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.0295 & 0.0514 & 1 & 0 \\ 0.0514 & -0.0295 & 0 & 1 \\ 0.0043 & 0.0757 & 1 & 0 \\ 0.0757 & -0.0043 & 0 & 1 \\ 0.0842 & -0.0105 & 1 & 0 \\ -0.0105 & -0.0842 & 0 & 1 \\ -0.0116 & 0.0297 & 1 & 0 \\ 0.0297 & 0.0116 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}}_{X} \Rightarrow X = (A^T A)^{-1} A^T L \Rightarrow X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9524.691 \\ -1030.336 \\ 1036.801 \\ 909.1083 \end{bmatrix}$$

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- ادامه حل مثال ۳:
- پس از برآورد ضرایب مدل متشابه، مقادیر اولیه به صورت زیر محاسبه می شوند

$$\kappa_0 \simeq \arctan(\frac{-b}{a}) \simeq \arctan(\frac{1030.336}{9524.691}) \simeq 6.17^o$$

$$\lambda \simeq \sqrt{a^2+b^2} = 9580.3$$

$$\omega_0 \simeq 0$$

$$\varphi_0 \simeq 0$$

$$X_{C0} \simeq c = 1036.8m$$

$$Y_{C0} \simeq d = 909.108m$$

$$\begin{cases} f = 0.15214m \\ Z_{avg} = \dfrac{210+150+100+180}{4} = 160 \end{cases} \Rightarrow Z_{C0} \simeq \lambda f + Z_{avg} = 9580.3 \times 0.15214 + 160 = 1617.5m$$

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- ادامه حل مثال ۳:
- بعد از تخمین مقادیر اولیه، مقدار توابع و مشتقات توابع به ازای مقادیر اولیه برای نقطه شماره ۱ به صورت زیر محاسبه میشوند:

$$\Delta X_1 = 233.1986 \quad \Delta Y_1 = 500.8917 \quad \Delta Z_1 = -1407.5$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \omega} = -26.97 \quad \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} = 155.9844 \quad \frac{\partial F_1}{\partial \kappa} = 51.2334$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial X_C} = -0.1075 \quad \frac{\partial F_1}{\partial Y_C} = -0.0116 \quad \frac{\partial F_1}{\partial Z_C} = -0.0212$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial \omega} = -169.4893 \quad \frac{\partial G_1}{\partial \varphi} = -8.2382 \quad \frac{\partial G_1}{\partial \kappa} = -29.8082$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial X_C} = 0.0116 \quad \frac{\partial G_1}{\partial Y_C} = -0.1075 \quad \frac{\partial G_1}{\partial Z_C} = -0.0364$$

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- ادامه حل مثال ۳:
- بعد از تخمین مقادیر اولیه، مقدار توابع و مشتقات توابع به ازای مقادیر اولیه برای نقطه شماره ۲ به صورت زیر محاسبه میشوند:

$$\Delta X_2 = -36.8014 \qquad \Delta Y_2 = 740.8917 \qquad \Delta Z_2 = -1467.5$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \omega} = -18.6177 \qquad \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} = 151.1455 \qquad \frac{\partial F_2}{\partial \kappa} = 76.7731$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial X_C} = -0.1031 \qquad \frac{\partial F_2}{\partial Y_C} = -0.0111 \qquad \frac{\partial F_2}{\partial Z_C} = -0.0030$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial \omega} = -190.0167 \qquad \frac{\partial G_2}{\partial \varphi} = -18.2876 \qquad \frac{\partial G_2}{\partial \kappa} = -4.4675$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial X_C} = 0.0111 \qquad \frac{\partial G_2}{\partial Y_C} = -0.1031 \qquad \frac{\partial G_2}{\partial Z_C} = -0.0523$$

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- ادامه حل مثال ۳:
- بعد از تخمین مقادیر اولیه، مقدار توابع و مشتقات توابع به ازای مقادیر اولیه برای نقطه شماره ۳ به صورت زیر محاسبه میشوند:

$$\Delta X_3 = 813.1986 \quad \Delta Y_3 = -9.1083 \quad \Delta Z_3 = -1517.5$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \omega} = -15.8764 \quad \frac{\partial F_3}{\partial \varphi} = 194.639 \quad \frac{\partial F_3}{\partial \kappa} = -9.6759$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial X_C} = -0.0997 \quad \frac{\partial F_3}{\partial Y_C} = -0.0108 \quad \frac{\partial F_3}{\partial Z_C} = -0.0533$$

$$\frac{\partial G_3}{\partial \omega} = -151.3156 \quad \frac{\partial G_3}{\partial \varphi} = -21.5473 \quad \frac{\partial G_3}{\partial \kappa} = -80.9556$$

$$\frac{\partial G_3}{\partial X_C} = 0.0108 \quad \frac{\partial G_3}{\partial Y_C} = -0.0997 \quad \frac{\partial G_3}{\partial Z_C} = 0.0064$$

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- ادامه حل مثال ۳:
- بعد از تخمین مقادیر اولیه، مقدار توابع و مشتقات توابع به ازای مقادیر اولیه برای نقطه شماره ۴ به صورت زیر محاسبه میشوند:

$$\Delta X_4 = -136.8014 \quad \Delta Y_4 = 270.8917 \quad \Delta Z_4 = -1437.5$$

$$\left|\frac{\partial F_4}{\partial \omega} = -14.2309 \quad \frac{\partial F_4}{\partial \varphi} = 152.334 \quad \frac{\partial F_4}{\partial \kappa} = 30.0602\right.$$

$$\left|\frac{\partial F_4}{\partial X_C} = -0.1052 \quad \frac{\partial F_4}{\partial Y_C} = -0.0114 \quad \frac{\partial F_4}{\partial Z_C} = 0.0079\right.$$

$$\left|\frac{\partial G_4}{\partial \omega} = -156.9222 \quad \frac{\partial G_4}{\partial \varphi} = -19.2230 \quad \frac{\partial G_4}{\partial \kappa} = 11.3109\right.$$

$$\left|\frac{\partial G_4}{\partial X_C} = 0.0114 \quad \frac{\partial G_4}{\partial Y_C} = -0.1052 \quad \frac{\partial G_4}{\partial Z_C} = -0.0209\right.$$

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- ادامه حل مثال ۳:
- پس از محاسبه مشتقات توابع به ازای مقادیر اولیه، ماتریس A تشکیل می شود

$$A = \begin{bmatrix} -26.97 & 155.9844 & 51.2324 & -0.1075 & -0.0116 & -0.0212 \\ -169.4893 & -8.2382 & -29.8082 & 0.0116 & -0.1075 & -0.0364 \\ -18.6177 & 151.1455 & 76.7731 & -0.1031 & -0.0111 & -0.003 \\ -190.0167 & -18.2876 & -4.4675 & 0.0111 & -0.1031 & -0.0523 \\ -15.8764 & 194.639 & -9.6759 & -0.0997 & -0.0108 & -0.0533 \\ -151.3156 & -21.5473 & -80.9556 & 0.0108 & -0.0997 & 0.0064 \\ -14.2309 & 152.334 & 30.0602 & -0.1052 & -0.0114 & 0.0079 \\ -156.9222 & -19.223 & 11.3109 & 0.0114 & -0.1052 & -0.0209 \end{bmatrix}$$

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- ادامه حل مثال ۳:
- در مرحله بعد مقدار توابع به ازای مقادیر اولیه محاسبه و سپس ماتریس L تشکیل می‌شود

$$
\begin{cases}
F_1(X0) = 29.8162 \\
G_1(X0) = 51.2204 \\
F_2(X0) = 4.4755 \\
G_2(X0) = 76.7611 \\
F_3(X0) = 80.9636 \\
G_3(X0) = -9.6879 \\
F_4(X0) = -11.3029 \\
G_4(X0) = 30.0482
\end{cases}
\Rightarrow \qquad
L = \begin{bmatrix}
-151.0182 \\
-147.5132 \\
-113.8060 \\
-168.3208 \\
-197.2884 \\
-78.6673 \\
-103.7422 \\
-116.7701
\end{bmatrix}
$$

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- ادامه حل مثال ۳ (تکرار اول):
- پس از تشکیل ماتریس‌های A و L با روش کمترین مربعات مجهولات دستگاه معادلات فوق که در واقع همان پارامترهای توجیه خارجی اند برآورد می‌شوند.

$$X = (A^T A)^{-1} A^T L \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 0.0318 \\ 0.0562 \\ 0.1076 \\ 1120.1 \\ 865.4048 \\ 1606.6 \end{bmatrix}$$

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- ادامه حل مثال ۳ (تکرار اول):
- در مرحله بعد قدر مطلق اختلاف مقادیر اولیه با مقادیر برآورد شده محاسبه می‌شود:

$$|X - X_0| = \begin{bmatrix} 0.0318 \\ 0.0562 \\ 0.00014 \\ 83.294 \\ 43.703 \\ 10.917 \end{bmatrix}$$

- از آنجا که بزرگترین قدر مطلق این اختلافات بیش از حدآستانه ۰.۰۰۰۰۰۰۱ است، مقادیر برآورد شده به عنوان مقدار اولیه در نظر گرفته می‌شوند و ماتریس‌های A و L دوباره تشکیل می‌شوند.

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- ادامه حل مثال ۳ (تکرار دوم):
- با توجه به ماتریس‌های A و L ای که از روی مقادیر اولیه جدید تشکیل شده، به روش کمترین مربعات مجهولات برآورد می‌شوند.

$$X_0^1=\begin{bmatrix}0.0318\\0.0562\\0.1076\\1120.1\\865.4048\\1606.6\end{bmatrix}\Rightarrow compute: A\,\&\,L\Rightarrow\qquad X=(A^TA)^{-1}A^TL\Rightarrow X=\begin{bmatrix}0.0349\\0.0524\\0.1065\\1114\\861.967\\1600.0\end{bmatrix}$$

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- ادامه حل مثال ۳ (تکرار دوم):
- در مرحله بعد قدر مطلق اختلاف مقادیر اولیه با مقادیر برآورد شده محاسبه می‌شود:

$$\left|X - X_0^1\right| = \begin{bmatrix} 0.0031 \\ 0.0039 \\ 0.0012 \\ 6.1318 \\ 3.4379 \\ 6.6225 \end{bmatrix}$$

- از آنجا که بزرگترین قدر مطلق این اختلافات بیش از حدآستانه ۰.۰۰۰۰۰۰۱ است، مقادیر برآورد شده به عنوان مقدار اولیه در نظر گرفته می‌شوند و ماتریس‌های A و L دوباره تشکیل می‌شوند.

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- ادامه حل مثال ۳ (تکرار سوم):
- با توجه به ماتریس‌های A و L ای که از روی مقادیر اولیه جدید تشکیل شده، به روش کمترین مربعات مجهولات برآورد می‌شوند.

$$X_0^2 = \begin{bmatrix} 0.0349 \\ 0.0524 \\ 0.1065 \\ 1114 \\ 861.967 \\ 1600.0 \end{bmatrix} \Rightarrow compute : A \,\&\, L \Rightarrow \qquad X = (A^T A)^{-1} A^T L \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 0.0349 \\ 0.0524 \\ 0.1065 \\ 1114 \\ 862.0019 \\ 1600.0 \end{bmatrix}$$

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- ادامه حل مثال ۳ (تکرار سوم):
- در مرحله بعد قدر مطلق اختلاف مقادیر اولیه با مقادیر برآورد شده محاسبه می‌شود:

$$\left|X - X_0^2\right| = \begin{bmatrix} 0.000012 \\ 0.000012 \\ 0.000006 \\ 0.0401 \\ 0.0350 \\ 0.00031 \end{bmatrix}$$

- از آنجا که بزرگترین قدر مطلق این اختلافات بیش از حدآستانه ۰.۰۰۰۰۰۰۱ است، مقادیر برآورد شده به عنوان مقدار اولیه در نظر گرفته می‌شوند و ماتریس‌های A و L دوباره تشکیل می‌شوند.

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- ادامه حل مثال ۳ (تکرار چهارم):
- با توجه به ماتریس‌های A و L ای که از روی مقادیر اولیه جدید تشکیل شده، به روش کمترین مربعات مجهولات برآورد می‌شوند.

$$X_0^3 = \begin{bmatrix} 0.0349 \\ 0.0524 \\ 0.1065 \\ 1114 \\ 862.0019 \\ 1600.0 \end{bmatrix} \Rightarrow compute: A \& L \Rightarrow \qquad X = (A^T A)^{-1} A^T L \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 0.0349 \\ 0.0524 \\ 0.1065 \\ 1114.0 \\ 862.0019 \\ 1600.0 \end{bmatrix}$$

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- ادامه حل مثال ۳ (تکرار چهارم):
- در مرحله بعد قدر مطلق اختلاف مقادیر اولیه با مقادیر برآورد شده محاسبه می‌شود:

$$\left|X - X_0^3\right| = \begin{bmatrix} 6\times10^{-10} \\ 6\times10^{-10} \\ 8\times10^{-11} \\ 7\times10^{-7} \\ 9\times10^{-7} \\ 3\times10^{-7} \end{bmatrix}$$

- از آنجا که بزرگترین قدر مطلق این اختلافات بیش از حدآستانه ۰.۰۰۰۰۰۰۱ است، مقادیر برآورد شده به عنوان مقدار اولیه در نظر گرفته می‌شوند و ماتریس‌های A و L دوباره تشکیل می‌شوند.

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- ادامه حل مثال ۳ (تکرار پنجم):
- با توجه به ماتریس‌های A و L ای که از روی مقادیر اولیه جدید تشکیل شده، به روش کمترین مربعات مجهولات برآورد می‌شوند.

$$X_0^4 = \begin{bmatrix} 0.0349 \\ 0.0524 \\ 0.1065 \\ 1114.0 \\ 862.0019 \\ 1600.0 \end{bmatrix} \Rightarrow compute: A \& L \Rightarrow \quad X = (A^T A)^{-1} A^T L \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 0.0349 \\ 0.0524 \\ 0.1065 \\ 1114.0 \\ 862.0019 \\ 1600.0 \end{bmatrix}$$

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- ادامه حل مثال ۳ (تکرار پنجم):
- در مرحله بعد قدر مطلق اختلاف مقادیر اولیه با مقادیر برآورد شده محاسبه می‌شود:

$$\left|X - X_0^4\right| = \begin{bmatrix} 3\times10^{-13} \\ 4\times10^{-13} \\ 3\times10^{-14} \\ 8\times10^{-10} \\ 2\times10^{-10} \\ 5\times10^{-11} \end{bmatrix}$$

- از آنجا که بزرگترین قدر مطلق این اختلافات کمتر از حدآستانه ۰.۰۰۰۰۰۰۱ است، مقادیر برآورد شده به عنوان مقدار نهایی مجهولات در نظر گرفته می‌شوند.

ترفیع فضایی با شرط هم خطی

- ادامه حل مثال ۳ (جواب نهایی):
- همانطور که مشاهده کردید فرآیند حل دستگاه معادلات غیرخطی ترفیع فضایی با معادلات شرط هم خطی طی پنج تکرار توانست به یک جواب نهایی همگرا شود. از آنجا که مقدار دورانهای اومگا، فی و کاپا برحسب رادیان برنامه نویسی شده بودند؛ لازم است به درجه تبدیل شوند.

$$X=\begin{bmatrix}0.0349^{rad}\\0.0524^{rad}\\0.1065^{rad}\\1114.0\\862.0019\\1600.0\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}1.99999^{o}\\3.00001^{o}\\6.1^{o}\\1114.0\\862.0019\\1600.0\end{bmatrix}$$

سوال

- همانطور که در مثال قبل (مثال شماره ۳) مشاهده کردید، مقدار اولیه پارامترهای توجیه خارجی با یک روش تقریبی و براساس مدل متشابه بدست آمدند؛ این در حالی است که پیشتر گفته بودیم که می‌توان از تبدیل DLT برای برآورد مقادیر اولیه مجهولات ترفیع استفاده کرد. به نظر شما چرا از تبدیل DLT برای برآورد مقدار اولیه مجهوات ترفیع در مثال ۳ استفاده نشد؟

تمرین شماره ۶ – قسمت دوم

- با توجه به مختصات نقاط کنترل در اسلاید بعد و پارامترهای توجیه داخلی، در محیط متلب یا پایتون برنامه ای بنویسید که با استفاده از معادلات ترفیع با شرط هم خطی، پارامترهای توجیه خارجی عکس هوایی را برآورد نماید.
- نتیجه این تمرین را تا دو هفته آینده به آدرس noorollah.tatar@gmail.com با موضوع "تمرین شماره ۶ – قسمت دوم درس فتوگرامتری تحلیلی" ایمیل کنید.
- راهنمایی: مشابه مثال ۳ عمل شود.

تمرین شماره ۶ – قسمت دوم

- مختصات زمینی و عکسی نقاط کنترل و پارامترهای توجیه داخلی

مختصات زمینی و عکسی نقاط کنترل					
شماره نقطه	مختصات عکسی (میلیمتر)		مختصات زمینی (متر)		
	x (mm)	y (mm)	X (m)	Y (m)	Z (m)
8	-11.3672	28.8014	900	1250	120
9	5.9012	97.3638	1000	1860	210
10	89.094	-21.4565	1800	890	245
11	-17.2908	65.0336	800	1600	100

پارامترهای توجیه داخلی (میلیمتر)		
xo	y0	f
0.008	-0.012	152.14

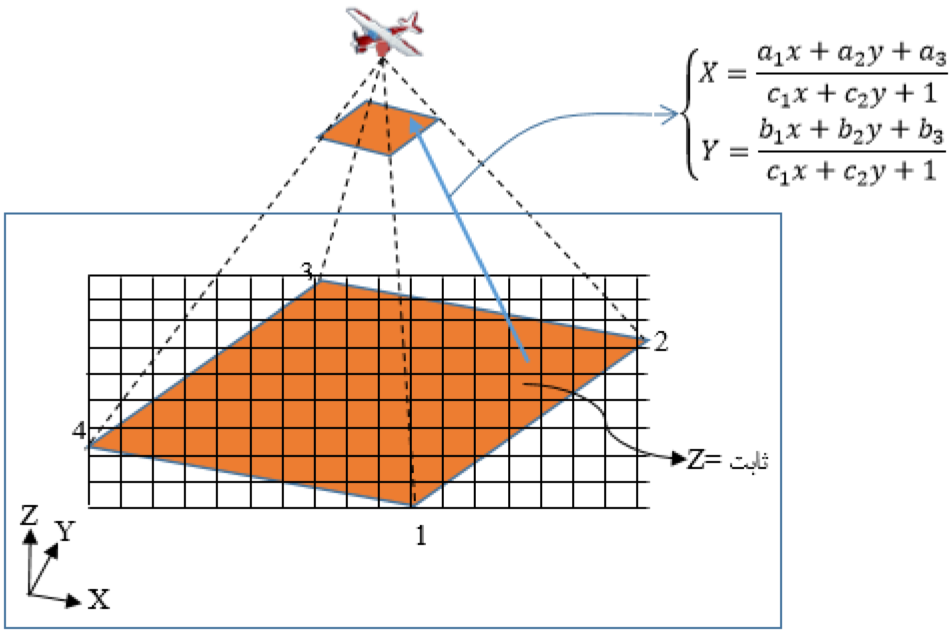
ترفیع فضایی برای ترمیم تحلیلی

ترفیع فضایی برای ترمیم تحلیلی

- پیشتر در فصل تقاطع فضایی در مورد ترمیم تحلیلی مباحثی ارائه شد.
- همانطور که به یاد دارید، ترمیم تحلیلی در واقع حذف جابجایی ناشی از تیلت از روی عکس‌هاست.
- اما در آنجا پارامترهای توجیه داخلی و خارجی دوربین در لحظه عکسبرداری معلوم بودند، در حالی که در واقعیت ممکن است پارامترهای توجیه خارجی مجهول باشند.
- یکی از راههایی که برای ترمیم تحلیلی بدون داشتن پارامترهای توجیه خارجی به کار می رود، محاسبه مستقیم پارامترهای یک تبدیل پروژکتیو است.

ترفیع فضایی برای ترمیم تحلیلی

- در چنین مواردی معمولا حداقل مختصات چهارنقطه کنترل داده می‌شود و از شما میخواهند پارامترهای یک پروژکتیو دو بعدی برای ترمیم تحلیلی را محاسبه کنید.



ترفیع فضایی برای ترمیم تحلیلی

- برای برآورد ضرایب پارامتریک تبدیل پروژکتیو در ترمیم تحلیلی حداقل به چهار نقطه کنترل نیاز است.

1. در این روش میانگین ارتفاع نقاط کنترل به عنوان ارتفاع صفحه ای که قرار است تصویر به آن نگاشت داده شود، در نظر گرفته می‌شود.
2. سپس پارامترهای مدل پروژکتیو بین مختصات مسطحاتی نقاط کنترل و مختصات عکسی محاسبه می‌شود.

- همچنین برای برآورد پارامترهای مدل پروژکتیو از روش کمترین مربعات پارامتریک استفاده میشود.

ترفیع فضایی برای ترمیم تحلیلی

- دستگاه معادلات مدل پروژکتیو برای ترمیم تحلیلی با حداقل چهارنقطه کنترل به صورت زیر خواهند بود

$$x = \frac{a_1X + a_2Y + a_3}{c_1X + c_2Y + 1} \qquad y = \frac{b_1X + b_2Y + b_3}{c_1X + c_2Y + 1} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = a_1X_1 + a_2Y_1 + a_3 - c_1X_1x_1 - c_2Y_1x_1 \\ y_1 = b_1X_1 + b_2Y_1 + b_3 - c_1X_1y_1 - c_2Y_1y_1 \\ x_2 = a_1X_2 + a_2Y_2 + a_3 - c_1X_2x_2 - c_2Y_2x_2 \\ y_2 = b_1X_2 + b_2Y_2 + b_3 - c_1X_2y_2 - c_2Y_2y_2 \\ x_3 = a_1X_3 + a_2Y_3 + a_3 - c_1X_3x_3 - c_2Y_3x_3 \\ y_3 = b_1X_3 + b_2Y_3 + b_3 - c_1X_3y_3 - c_2Y_3y_3 \\ x_4 = a_1X_4 + a_2Y_4 + a_3 - c_1X_4x_4 - c_2Y_4x_4 \\ y_4 = b_1X_4 + b_2Y_4 + b_3 - c_1X_4y_4 - c_2Y_4y_4 \end{cases}$$

- که در آن (x,y) مختصات عکسی و (X,Y) مختصات زمینی نقاط هستند.

ترفیع فضایی برای ترمیم تحلیلی

- فرم ماتریسی دستگاه معادلات فوق (برای حداقل ۴ نقطه کنترل) به صورت زیر خواهد بود

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{bmatrix}}_{L} = \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -X_1x_1 & -Y_1x_1 \\ 0 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 & 1 & -X_1y_1 & -Y_1y_1 \\ X_2 & Y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -X_2x_2 & -Y_2x_2 \\ 0 & 0 & 0 & X_2 & Y_2 & 1 & -X_2y_2 & -Y_2y_2 \\ X_3 & Y_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -X_3x_3 & -Y_3x_3 \\ 0 & 0 & 0 & X_3 & Y_3 & 1 & -X_3y_3 & -Y_3y_3 \\ X_4 & Y_4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -X_4x_4 & -Y_4x_4 \\ 0 & 0 & 0 & X_4 & Y_4 & 1 & -X_4y_4 & -Y_4y_4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{X}$$

- که با روش کمترین مربعات قابل حل است

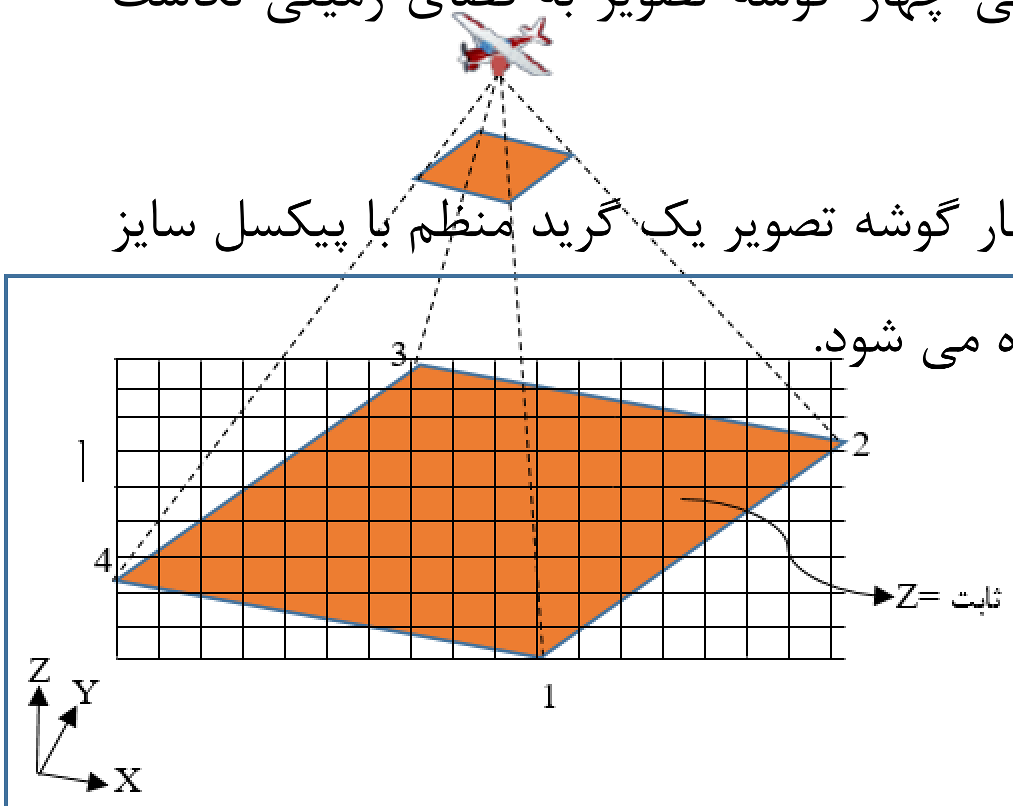
$$X = (A^T A)^{-1} A^T L$$

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow H^{-1}$$

ترفیع فضایی برای ترمیم تحلیلی

3. بعد از برآورد پارامترهای تبدیل پروژکتیو، با استفاده از معکوس مدل پروژکتیو مختصات زمینی چهار گوشه تصویر به فضای زمینی نگاشت داده می شود.

4. در مرحله بعد به این چهار گوشه تصویر یک گرید منظم با پیکسل سایز برابر با GSD برازش داده می شود.



$$x=\frac{a_1X+a_2Y+a_3}{c_1X+c_2Y+1}$$

$$y=\frac{b_1X+b_2Y+b_3}{c_1X+c_2Y+1}$$

ترفیع فضایی برای ترمیم تحلیلی

5. در مرحله بعد به ازای هر سلول زمینی که دارای X,Y مشخص است به کمک مدل پروژکتیو، مختصات عکسی آن نقطه تعیین می‌گردد.
6. سپس با استفاده از تکنیک‌های نمونه برداری (نزدیکترین همسایه، خطی دوگانه یا مکعبی دوگانه) مقدار درجه خاکستری مربوط به نقطه عکسی محاسبه می‌شود.
7. در مرحله بعد، مقدار درجه خاکستری مختصات عکسی به سلول زمینی داده می‌شود.

- برای توضیح بیشتر به مباحث نگاشت معکوس در پردازش تصویر مراجعه کنید.

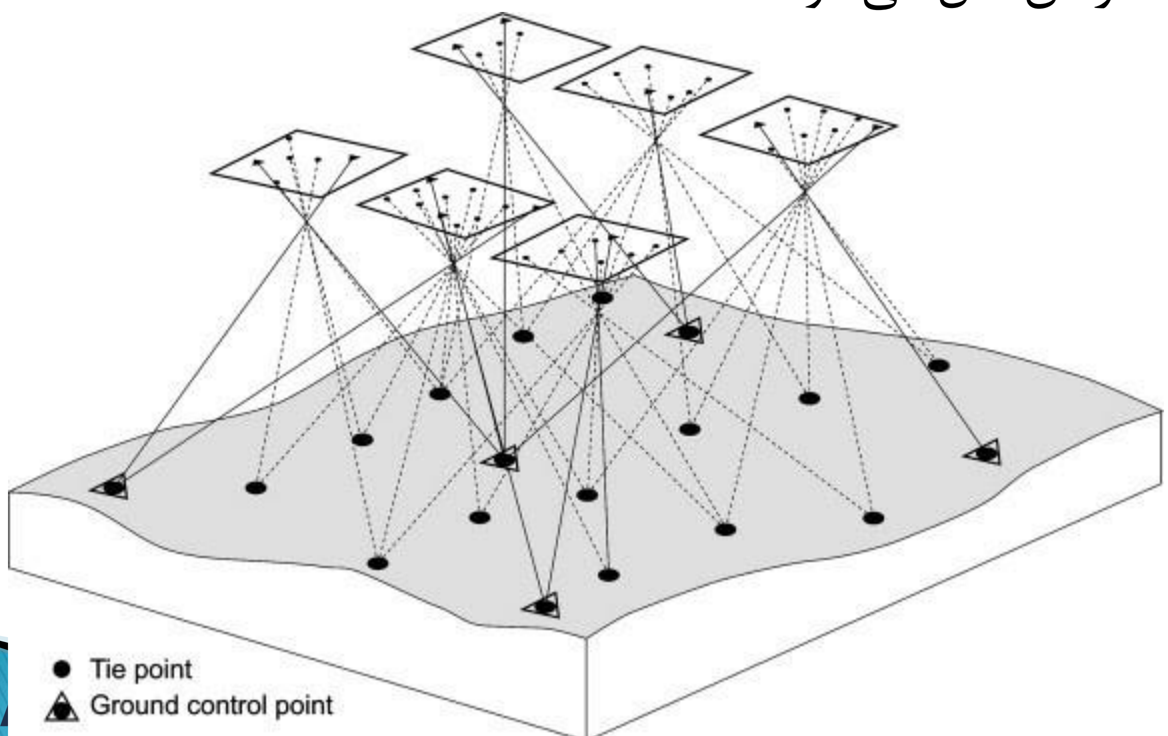
ترفیع و تقاطع همزمان

ترفیع و تقاطع همزمان

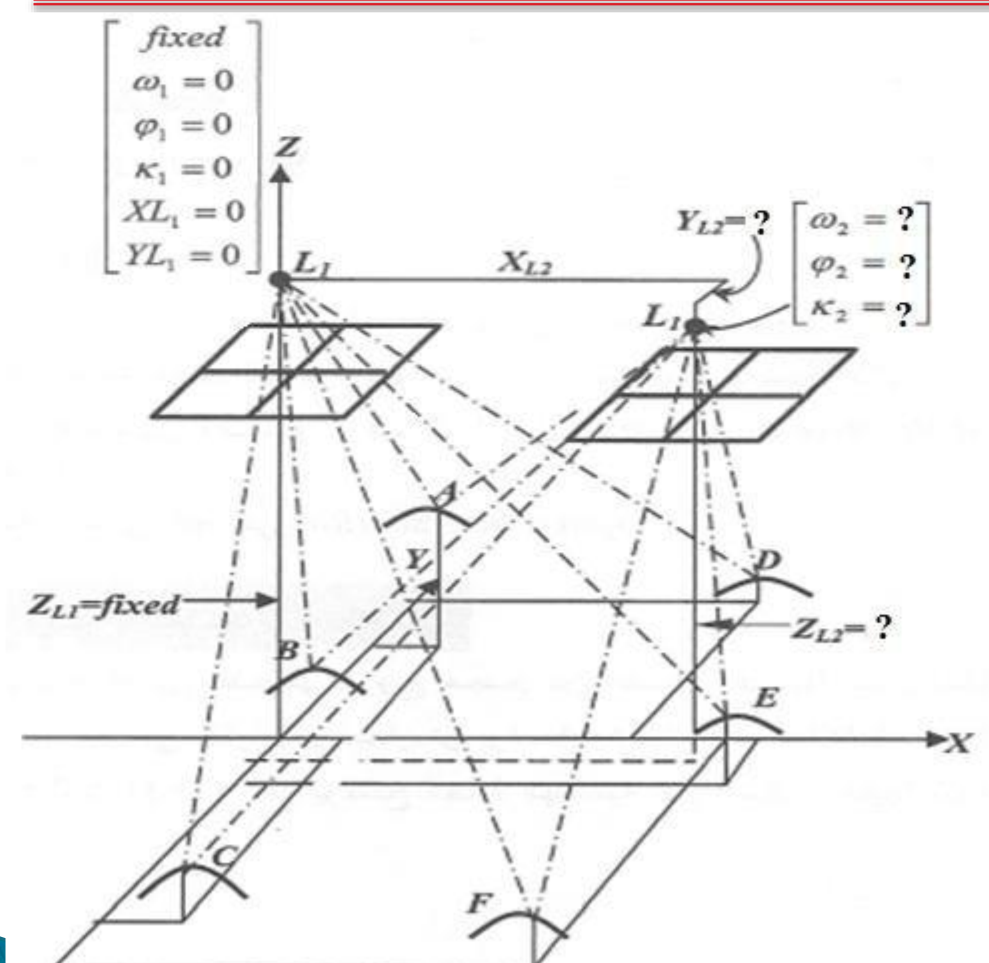
- در اغلب به تعداد کافی در یک عکس نقطه کنترل وجود ندارد. زیرا تهیه حداقل سه نقطه کنترل به ازای هر عکس کاری بسیار زمانبر و پر هزینه است.
- برای کاهش تعداد نقاط کنترل، معمولا در اطراف بلوک فتوگرامتری تعدادی نقاط کنترل در نظر گرفته می‌شود و در محدوده مشترک بین عکس‌ها از نقاط گرهی استفاده می‌شود.
- نقاط گرهی، نقاطی هستند که مختصات شان در دو یا چند عکس اندازه گیری شده ولی مختصات سه بعدی زمینی شان مجهول است.

ترفیع و تقاطع همزمان

- در مسائلی اینچنینی که هم پارامترهای توجیه خارجی و هم مختصات سه بعدی تعدادی نقطه گرهی مجهول اند، ترفیع و تقاطع فضایی به صورت همزمان حل می‌شود.



ترفیع و تقاطع همزمان



- یکی دیگر از مسائلی که در آن ترفیع و تقاطع فضایی به صورت همزمان حل می‌شود، توجیه نسبی با شرط هم خطی است.

ترفیع و تقاطع همزمان

- در ترفیع و تقاطع همزمان از معادلات شرط هم خطی استفاده می‌شود.
- در این حالت به ازای هر مشاهده عکسی معادلات شرط هم خطی به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{cases} x_a \simeq F_1(X0) + \left[\begin{array}{l} \frac{\partial F_1}{\partial \omega}(\omega-\omega_0) + \frac{\partial F_1}{\partial \varphi}(\varphi-\varphi_0) + \frac{\partial F_1}{\partial \kappa}(\kappa-\kappa_0) + \frac{\partial F_1}{\partial X_C}(X_C - X_{C0}) + \frac{\partial F_1}{\partial Y_C}(Y_C - Y_{C0}) + \ldots \\ + \frac{\partial F_1}{\partial Z_C}(Z_C - Z_{C0}) - \frac{\partial F_1}{\partial X_C}(X_A - X_{A0}) - \frac{\partial F_1}{\partial Y_C}(Y_A - Y_{A0}) - \frac{\partial F_1}{\partial Z_C}(Z_A - Z_{A0}) \end{array} \right] \\ y_a \simeq G_1(X0) + \left[\begin{array}{l} \frac{\partial G_1}{\partial \omega}(\omega-\omega_0) + \frac{\partial G_1}{\partial \varphi}(\varphi-\varphi_0) + \frac{\partial G_1}{\partial \kappa}(\kappa-\kappa_0) + \frac{\partial G_1}{\partial X_C}(X_C - X_{C0}) + \frac{\partial G_1}{\partial Y_C}(Y_C - Y_{C0}) + \ldots \\ + \frac{\partial G_1}{\partial Z_C}(Z_C - Z_{C0}) - \frac{\partial G_1}{\partial X_C}(X_A - X_{A0}) - \frac{\partial G_1}{\partial Y_C}(Y_A - Y_{A0}) - \frac{\partial G_1}{\partial Z_C}(Z_A - Z_{A0}) \end{array} \right] \end{cases}$$

ترفیع و تقاطع همزمان

- فرم ماتریسی دستگاه معادلات در حالت ترفیع و تقاطع همزمان به صورت زیر است.

معادلات مربوط به ترفیع نقاط کنترل

معادلات مربوط به ترفیع نقاط کنترل

معادلات مربوط به ترفیع و تقاطع نقاط گرهی

$$L = \underbrace{\begin{bmatrix} [\ \ ]_{6\times2} & & \\ & [\ \ ]_{6\times2} & \\ [\ \ ]_{6\times2} & & [\ \ ]_{3\times2} \\ & [\ \ ]_{6\times2} & [\ \ ]_{3\times2} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} [\ \ ]_{6\times1} \\ [\ \ ]_{6\times1} \\ [\ \ ]_{3\times1} \end{bmatrix}}_{X}$$

مجهولات توجیه خارجی عکس اول

مجهولات توجیه خارجی عکس دوم

مجهولات تقاطع نقاط گرهی

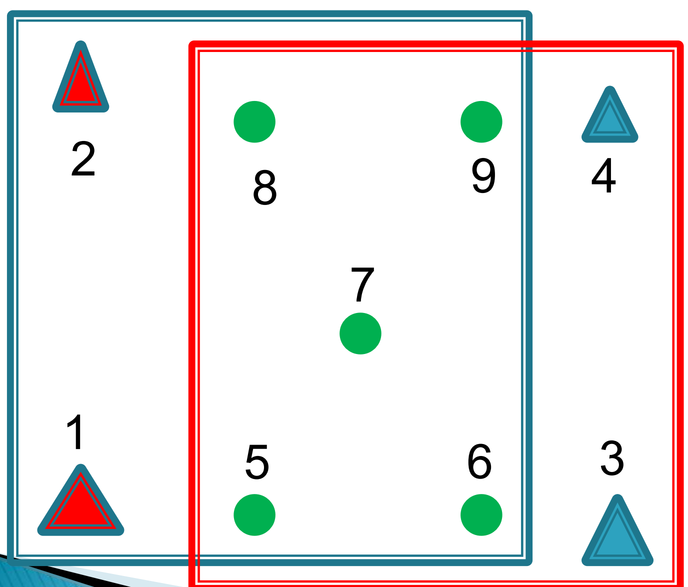
ترفیع و تقاطع همزمان

- از آنجا که در ترفیع و تقاطع فضایی خطی سازی صورت می‌گیرد، بایستی برای مجهولات مقدار اولیه محاسبه شود.
- برای محاسبه مقدار اولیه اینگونه مسائل روش های مختلفی وجود دارد که ما در اینجا به یکی از آنها می‌پردازیم.
- برای محاسبه مقدار اولیه، ابتدا مقدار اولیه مجهولات ترفیع فضایی تخمین زده می‌شود؛ سپس با توجه به مقدار اولیه پارامترهای توجیه خارجی، مقدار اولیه مجهولات تقاطع فضایی محاسبه می‌شوند.

$$Compute \quad \omega_0, \varphi_0, \kappa_0, X_{C0}, Y_{C0}, Z_{C0} \Rightarrow Px \,\&\, B \Rightarrow Z_{A0} \Rightarrow X_{A0}, Y_{A0}$$

ترفیع و تقاطع همزمان

- مثال ۴:
- با توجه به شکل زیر، برای حل ترفیع و تقاطع فضایی به صورت همزمان ماتریس A دستگاه معادلات به چه صورت خواهد بود؟



- نقاط ۱ تا ۴ نقاط کنترل
- نقاط ۵ تا ۹ هم نقاط گرهی
- کادر آبی عکس سمت چپ
- کادر قرمز عکس سمت راست

ترفیع و تقاطع همزمان

- حل مثال ۴: ماتریس A این دستگاه معادلات به صورت روبرو است.

$$A=\begin{bmatrix}
[\;]_{4\times6} & & & & & & \\
 & [\;]_{4\times6} & & & & & \\
[\;]_{2\times6} & & [\;]_{2\times3} & & & & \\
 & [\;]_{2\times6} & [\;]_{2\times3} & & & & \\
[\;]_{2\times6} & & & [\;]_{2\times3} & & & \\
 & [\;]_{2\times6} & & [\;]_{2\times3} & & & \\
[\;]_{2\times6} & & & & [\;]_{2\times3} & & \\
 & [\;]_{2\times6} & & & [\;]_{2\times3} & & \\
[\;]_{2\times6} & & & & & [\;]_{2\times3} & \\
 & [\;]_{2\times6} & & & & [\;]_{2\times3} & \\
[\;]_{2\times6} & & & & & & [\;]_{2\times3} \\
 & [\;]_{2\times6} & & & & & [\;]_{2\times3}
\end{bmatrix}_{28\times27}$$

معادلات مربوط به نقاط کنترل 1 و 2

معادلات مربوط به نقاط کنترل 3 و 4

معادلات مربوط به نقطه گرهی 5

معادلات مربوط به نقطه گرهی 6

معادلات مربوط به نقطه گرهی 7

معادلات مربوط به نقطه گرهی 8

معادلات مربوط به نقطه گرهی 9

ترفیع و تقاطع همزمان

- ادامه حل مثال ۴: همچنین بردار مجهولات X این دستگاه معادلات به صورت زیر است.

$$
\begin{array}{r c}
\text{مجهولات عکس اول} & \\
\text{مجهولات عکس دوم} & \\
\text{مجهولات نقطه گرهی 5} & \\
\text{مجهولات نقطه گرهی 6} & X = \\
\text{مجهولات نقطه گرهی 7} & \\
\text{مجهولات نقطه گرهی 8} & \\
\text{مجهولات نقطه گرهی 9} &
\end{array}
\begin{bmatrix} [\;\;]_{6\times1} \\ [\;\;]_{6\times1} \\ [\;\;]_{3\times1} \\ [\;\;]_{3\times1} \\ [\;\;]_{3\times1} \\ [\;\;]_{3\times1} \\ [\;\;]_{3\times1} \end{bmatrix}_{27\times1}
$$

- که در آن ۶ پارامتر توجیه خارجی عکس اول
- ۶ پارامتر توجیه خارجی عکس دوم
- به ازای هر نقطه گرهی هم ۳ مجهول داریم.
- در کل ۲۷ مجهول و ۲۸ معادله
- که با روش کمترین مربعات قابل حل است

سوال؟

منابع این فصل

- دکتر جلال امینی. کتاب فتوگرامتری تحلیلی. چاپ دانشگاه تهران.
- دکتر حیدر راستی ویس. جزوه کلاسی فتوگرامتری تحلیلی. دانشگاه تهران
- Ayman Habib. Analytical photogrammetry lecture note. Purdue University.