دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول

Jundi Shapur

University of Technology-Dezful

فتوگرامتری تحلیلی

اندکی جبرخطی، اندکی سرشکنی

Nurollah Tatar

Analytical photogrammetry

2021-2022

فهرست مطالب

- ماتریس
- وارون های ماتریس
- بردارها و مقادیر ویژه
- دستگاه معادلات جبری
- بحث در مورد دستگاه معادلات
- روش های حل دستگاه معادلات
- اندکی سرشکنی
- منابع

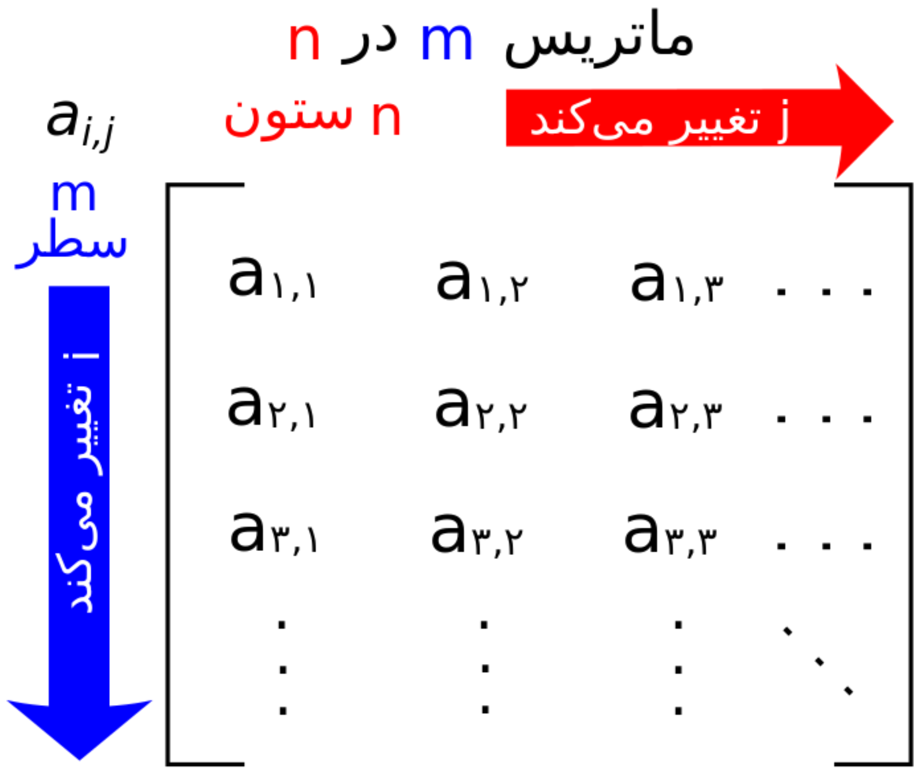
ماتریس (Matrix)

- ماتریس به آرایشی مستطیلی شکل از اعداد یا عبارات ریاضی که به صورت سطر و ستون شکل یافته گفته می‌شود.
- به طوری که می‌توان گفت که هر ستون یا هر سطر یک ماتریس، یک بردار را تشکیل می‌دهد.
- ابعاد یک ماتریس با تعداد سطر و ستون آن تعیین می‌شود. ابعاد ماتریسی با m سطر و n ستون به صورت $m \times n$ نوشته و m در n خوانده می‌شود. برای مثال ماتریسی با ۲ سطر و ۳ ستون به این شکل است:

$$\begin{bmatrix} 1 & 21 & 8 \\ -9 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

ماتریس

- نحوه شمارش سطر و ستونهای یک ماتریس



ماتریس

- ماتریسی که تنها یک سطر دارد بردار سطری و ماتریسی که تنها یک ستون دارد بردار ستونی نامیده می‌شود.
- ماتریسی با تعداد سطر یا ستون (یا هر دو) بی‌نهایت ماتریس بی‌نهایت خوانده می‌شود. ماتریس تهی ماتریسی‌ست که سطر و ستونی ندارد.

نام	ابعاد	مثال	توضیح
بردار سطری	۱ × n	$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$	ماتریسی با یک سطر که گاهی برای نشان دادن بردار موازی با محور طول‌ها استفاده می‌شود
بردار ستونی	n × ۱	$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$	ماتریسی با یک ستون که گاهی برای نشان دادن بردار موازی با محور عرض‌ها استفاده می‌شود
ماتریس مربعی	n × n	$\begin{bmatrix} 9 & 13 & 5 \\ 1 & 11 & 7 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$	ماتریسی با تعداد سطر و ستون برابر که گاهی برای نشان دادن نگاشت خطی از یک فضای بردار به خودش استفاده می‌شود مانند انعکاس و چرخش.

ماتریس

- ماتریس‌ها معمولاً به صورت کروشه یا کمانک نمایش داده می‌شوند.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

کروشه کمانک

- ماتریس یکه یا همانی ماتریسی است که همه جای آن صفر است به غیر از قطر اصلی که همگی یک است.

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

ماتریس

- درایه:
- به هر یک از عناصر که درون ماتریس می‌آیند دَرآیه یا دَرایه می‌گویند.
- برای مشخص کردن هر درایه باید عدد ردیف و ستون آن را به صورت پایین‌نویس حرف کوچک نام ماتریس نوشت.
- برای نمونه اگر نام ماتریسی A باشد، درایه‌ای که در ردیف نخست و ستون دوم قرار دارد به صورت a_{12} نوشته می‌شود و خوانده می‌شود «درایه‌ی یک دو».
- درایه‌های یک ماتریس در حالت کلی می‌توانند حقیقی یا مختلط باشند.

ماتریس

- برخی از قواعد ماتریس:
- ماتریس‌های هم اندازه (با تعداد سطر و ستون برابر) را می‌توان با هم جمع یا از هم تفریق کرد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 21 & 8 \\ -9 & 5 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & 0 & 13 \\ 10 & 41 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 21 & 21 \\ 1 & 46 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 21 \\ 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 21 & 8 \\ -9 & 5 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 0 & 41 \\ 13 & 3 \end{bmatrix} = \varnothing$$

ماتریس

- ضرب دو ماتریس:
- ضرب معمولی ماتریس‌ها رایج‌ترین نوع ضرب در ماتریس‌هاست. این نوع ضرب تنها زمانی تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد. ضرب معمولی به این صورت تعریف می‌شود

$$\overset{3\times 4 \text{ matrix}}{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}} \overset{4\times 5 \text{ matrix}}{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & a & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & d & \cdot \end{bmatrix}} = \overset{3\times 5 \text{ matrix}}{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & x_{3,4} & \cdot \end{bmatrix}}$$

که در آن درایه $x_{3,4}$ برابر است با:

$$x_{3,4} = (1,2,3,4)\cdot(a,b,c,d) = 1\times a + 2\times b + 3\times c + 4\times d.$$

ماتریس

- ضرب دو ماتریس:
- ضرب معمولی ماتریس‌ها در انیمیشن زیر نمایش داده شده است.
- برای راحتی به خاطر بسپارید "**سطر اول در ستون اول میشود درایه اول**"

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 & 64 \\ & \end{bmatrix}$$

matrix-multiplying　　ضرب ماتریس ها

ماتریس

- برخی از قواعد ماتریس:
- ضرب دو ماتریس تنها در صورتی ممکن است که تعداد ستون‌های ماتریس نخست با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 21 & 8 \\ -9 & 5 & 12 \end{bmatrix}_{2\times 3} \times \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 0 & 41 \\ 13 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} -124 & 895 \\ 219 & 151 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 21 & 8 \\ -9 & 5 & 12 \end{bmatrix}_{2\times 3} \times \begin{bmatrix} -7 & 0 & 13 \\ 10 & 41 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \varnothing$$

ماتریس

- دترمینان (Determinant):
- به تابعی گفته می‌شود که هر ماتریس مربعی را به یک عدد نسبت می‌دهد.
- دترمینان بیشتر برای تعیین معکوس ماتریسها استفاده می‌شود، به طوری که اگر دترمینان ماتریسی مخالف صفر باشد، آنگاه آن ماتریس معکوس‌پذیر است.
- دترمینان معمولا به صورت |A| یا det(A) نمایش داده می‌شود.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 21 \\ 4 & 43 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 21 \\ 4 & 43 \end{vmatrix}$$

ماتریس

- برخی خواص دترمینان:

1. جابجا کردن دو سطر (یا دو ستون) ماتریس، مقدار دترمینان را قرینه می‌کند.

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\5\\4\end{matrix}} & \begin{matrix}10\\0\\1\end{matrix} & \begin{matrix}3\\12\\7\end{matrix} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \begin{matrix}10\\0\\1\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}1\\5\\4\end{matrix}} & \begin{matrix}3\\12\\7\end{matrix} \end{vmatrix}$$

2. اگر تمام درایه‌های یک سطر (یا یک ستون) ماتریس در عددی مانند k ضرب شود، حاصل دترمینان نیز k برابر می‌شود

$$\begin{vmatrix} 1 & 40 & 3 \\ 5 & 0 & 12 \\ 4 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 4\times\begin{vmatrix} \begin{matrix}1\\5\\4\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}10\\0\\1\end{matrix}} & \begin{matrix}3\\12\\7\end{matrix} \end{vmatrix}$$

ماتریس

- برخی خواص دترمینان:

3. اگر ضریب ثابتی از درایه‌های یک سطر (یا یک ستون) ماتریس به سطر (یا ستون) دیگری اضافه شود، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند.

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 5 & 0 & 12 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 5 & 0 & 12 \\ 4+4\times5 & 1+4\times0 & 7+4\times12 \end{vmatrix}$$

4. ماتریسی که تمامی درایه‌های یک سطر (یا یک ستون) آن صفر باشد، دترمینان آن نیز صفر خواهد بود

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 12 \\ 4 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 5 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ماتریس

• برخی خواص دترمینان:

5. دترمینان یک ماتریس مثلثی (ماتریسی که تمامی درایه‌های بالای قطر اصلی یا پایین قطر اصلی و یا هر دو صفر باشند) برابر حاصلضرب درایه‌های قطر اصلی آن است

$$\begin{vmatrix} 5 & 10 & 3 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 5 \times 6 \times 8 = 240$$

6. اگر ماتریس A دارای دو سطر یا دو ستون مساوی باشد دترمینان آن صفر است

$$\begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 10 \quad 3} \\ 5 \quad 3 \quad 12 \\ \boxed{1 \quad 10 \quad 3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 10 \quad 3} \\ 5 \quad 3 \quad 12 \\ \boxed{2 \quad 20 \quad 6} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 10 \quad 3} \\ 5 \quad 3 \quad 12 \\ \boxed{1+4\times5 \quad 10+4\times3 \quad 3+4\times12} \end{vmatrix} = 0$$

ماتریس

- محاسبه دترمینان
- دترمینان ماتریس‌های ۱×۱ همان درایه ماتریس است. مانند:

$$A=[a]\Rightarrow \det(A)=a$$

$$A=[5]\Rightarrow \det(A)=5$$

- دتر مینان ماتریس‌های ۲×۲ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\Rightarrow \det(A)=ad-bc$$

مثال

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}\Rightarrow \det(A)=3\times 5-8\times 12=-81$$

- اما برای محاسبه دتر مینان ماتریس‌های با ابعاد بزرگتر چه باید کرد؟

ماتریس

- محاسبه دترمینان (روش تحویل):
- برای محاسبه دترمینان با ابعاد بزرگ روش‌های متعددی ارائه شده است که در این میان روشی به نام روش تحویل توضیح داده می شود.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \quad |A|=\left(\frac{1}{a_{11}}\right)^{n-2} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{Vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

ماتریس

- محاسبه دترمینان (روش تحویل):
- رابطه ارائه شده در اسلاید قبلی به صورت زیر نیز می تواند نوشته شود:

$$|A| = \left(\frac{1}{a_{11}}\right)^{n-2} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1(n-1)} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{(n-1)1} & c_{(n-1)2} & \cdots & c_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix} \quad , \quad c_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1(j+1)} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)(j+1)} \end{vmatrix}$$

- واضح است که برای چنین محاسبه‌ای باید a_{11} غیرصفر باشد. اگر اینچنین نبود، طبق اعمال مقدماتی باید با جابجایی سطرها مقدار آن را (a_{11}) باید غیر صفر کرد و در پایان علامت دترمینان را تغییر داد.

ماتریس

- محاسبه دترمینان (روش تحویل):
- مثال ۱:

$$A=\begin{bmatrix}2&4&1&1\\0&2&1&-1\\-2&1&2&0\\-1&1&0&3\end{bmatrix}$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix}2&4&1&1\\0&2&1&-1\\-2&1&2&0\\-1&1&0&3\end{vmatrix}=\left(\frac{1}{2}\right)^{4-2}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}2&4\\0&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&1\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&1\\0&-1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&4\\-2&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&1\\-2&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&1\\-2&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&4\\-1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&1\\-1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&1\\-1&3\end{vmatrix}\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\det(A)==\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\begin{vmatrix}4&2&-2\\10&6&2\\6&1&7\end{vmatrix}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{3-2}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}4&2\\10&6\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}4&-2\\10&2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}4&2\\6&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}4&-2\\6&7\end{vmatrix}\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{1}\begin{vmatrix}4&28\\-8&40\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times(160+224)=24\Rightarrow\det(A)=24$$

ماتریس

- محاسبه دترمینان (روش تحویل):
- مثال ۲: دتر مینان ماتریس روبرو را حساب کنید.

$$A=\begin{bmatrix}0&5&1\\4&1&2\\1&9&3\end{bmatrix}$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix}0&5&1\\4&1&2\\1&9&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}5&0&1\\1&4&2\\9&1&3\end{vmatrix}=-\left(\frac{1}{5}\right)^{3-2}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}5&0\\1&4\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}5&1\\1&2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}5&0\\9&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}5&1\\9&3\end{vmatrix}\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\det(A)=-\left(\frac{1}{5}\right)^{1}\begin{vmatrix}20&9\\5&6\end{vmatrix}=-\left(\frac{1}{5}\right)(20\times6-5\times9)=-\frac{120-45}{5}=-15$$

تمرین شماره ۳- قسمت اول

- برنامه ای بنویسید که با آن دترمینان یک ماتریس مربعی با ابعاد دلخواه محاسبه کند. نتیجه برنامه نویسی خود را با تابع آماده det در زبان متلب یا پایتون مقایسه کنید.
- نکته: برای نوشتن این برنامه بهتر است با یک حلقه و دو فانکشن آن را بنویسید. چنانچه رایانه شخصی ندارید تمرین صفحه بعد را انجام دهید.
- نتیجه این فعالیت را تا دو هفته آینده به آدرس noorollah.tatar@gmail.com با موضوع "تمرین شماره ۳ درس فتوگرامتری تحلیلی- قسمت اول" ایمیل کنید.

تمرین شماره ۳- قسمت اول

- چنانچه سیستم کامپیوتری برای برنامه نویسی ندارید، با توجه به روش تدریس شده دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید. نوشتن و ارائه ریز جزئیات محاسبات ضروری است.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- نتیجه این فعالیت را تا هفته آینده به آدرس noorollah.tatar@gmail.com با موضوع "تمرین شماره ۳ درس فتوگرامتری تحلیلی- قسمت اول" ایمیل کنید.

ماتریس

- ترانهاده (transpose):
- ترانهاده یک ماتریس مانند A ماتریس دیگری است که با نماد A^T یا به شکل‌های دیگر A'، A^{tr} یا A^t نوشته می‌شود. این ماتریس نسبت به ماتریس A دارای تفاوت‌های زیر است:

$$[A]_{i\times j} = \left[A^T\right]_{j\times i}$$

- به عبارت دیگر باید هنگام نوشتن ترانهاده هر ماتریسی سطرهای ماتریس را به شکل ستون نوشت و ستون‌های ماتریس را به شکل سطر؛
- در واقع یک ماتریس n×m اگر ترانهاده شود یک ماتریس m×n خواهد بود.

ماتریس

- ترانهاده:
- ترانهاده در واقع جابجا کردن جای سطرها با ستونهاست.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 21 & 8 \\ -9 & 5 & 12 \end{bmatrix}_{2\times 3} \quad \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 21 & 5 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

- چنانچه ماتریسی دارای عدد مختلط باشد به ترانهاده آن، ترانهاده مزدوج می گویند.

$$\left[A^*\right]_{i\times j}=\left[\bar{A}\right]_{j\times i} \quad \text{or} \quad A^*=\left(\bar{A}\right)^T$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2-i & 8 \\ i & -5+i & 12 \end{bmatrix}_{2\times 3} \quad \Rightarrow A^*=\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 2+i & -5-i \\ 8 & 12 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

ماتریس

- خواص ترانهاده:
- اگر A و B دو ماتریس قابل ضرب در هم باشند، آنگاه:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

- اگر α یک عدد اسکالر باشد، آنگاه:

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T$$

- اگر A یک ماتریس وارون پذیر باشد (یعنی $AA^{-1} = A^{-1}A = I$)، و یک ماتریس غیر صفر باشد ($A^T \neq 0$)، آنگاه:

$$\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$$

- اگر A و B دو ماتریس قابل جمع باشند، آنگاه:

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

ماتریس

- ماتریس متقارن (Symmetric matrix):
- به ماتریسی متقارن می‌گویند که خودش با ترانهاده‌اش یکسان باشد به عبارت دیگر ماتریس A متقارن است اگر و تنها اگر:

$$A = A^T$$

- به طور مثال ماتریس زیر یک ماتریس متقارن است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

- اگر قطر اصلی ماتریس متقارن صفر باشند به آن پادمتقارن می گویند.

ماتریس

- ماتریس هرمیتی (Hermitian matrix):
- ماتریسی است مربعی که ترانهاده مزدوج مختلط آن با خودش برابر باشد:

$$A = A^{\dagger}$$

- به طور مثال ماتریس زیر یک ماتریس هرمیتی است:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2+i & 3 \\ 2-i & 4 & i \\ 3 & -i & 6 \end{bmatrix}$$

- درآیه‌های قطر اصلی ماتریس هرمیتی حقیقی هستند.
- مقدار ویژه‌های ماتریس هرمیتی، عددهای حقیقی هستند.

ماتریس

- رتبه ماتریس (rank):
- بعد بزرگترین زیرماتریس مربعی از ماتریس اصلی که دترمینانش مخالف صفر باشد را رتبه ماتریس می‌گویند. رتبه‌ی ماتریس تنها در صورتی می‌تواند صفر باشد که آن ماتریس هیچ درایه‌ای نداشته باشد.
- همچنین ماکزیمم تعداد سطرها یا ستون های مستقل خطی یک ماتریس را رتبه ماتریس گویند. ماکزیمم تعداد ستونهای مستقل خطی با ماکزیمم سطرهای مستقل خطی برابرند.
- اگر همه‌ی بردارهای داخل یک ماتریس استقلال خطی داشته باشند، به آن ماتریس مرتبه کامل (فول رنک) می‌گویند.

ماتریس

- رتبه ماتریس:
- مثال ۳: رتبه ماتریس روبرو را محاسبه کنید.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 3\end{bmatrix}$$

- این ماتریس سه تا زیر ماتریس ۲×۲ دارد. که در ابتدا دترمینان آنها را محاسبه می‌کنیم. چنانچه دترمینان هر کدام از این زیر ماتریس ها مخالف صفر باشد رنک این ماتریس ۲ خواهد بود.

$$\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-2+2=0$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3-4=-1\neq 0$$

بنابراین رتبه این ماتریس ۲ است

ماتریس

- برخی از خواص رتبه ماتریس:

1. $r(A_{m\times n}) \le \min(m,n)$

2. $\boxed{r(A) = r(A^T)}$

3. $\boxed{r(AB) \le \min(r(A), r(B))}$

4. $r(A+B) \le r(A) + r(B)$

5. $\boxed{r(A) = r(AA^T) = r(A^T A)}$

- اگر ماتریس های A و B وارونپذیر باشند و C هم یک ماتریس باشد:

6. $r(C) = r(AC) = r(CB) = r(ACB)$

ماتریس

- وابستگی خطی:
- بردارهای یک ماتریس (یا به طور کلی‌تر بردارهای $\overrightarrow{V_i}$ یک فضای برداری) وابسته خطی هستند اگر اسکالرهای α_i حقیقی به گونه‌ای یافت شوند که همگی صفر نباشند و ترکیب خطی زیر برقرار باشد:

$$\alpha_1\vec{V}_1+\alpha_2\vec{V}_2+\ldots+\alpha_n\vec{V}_n=0 \quad \text{if} \quad \forall i\in 1,2,\ldots,n \quad \to \alpha_i\neq 0$$

- به عبارتی وقتی وابستگی وجود داشته باشد، برداری مانند $\overrightarrow{V_i}$ یافت می‌شود که بتوان آن را به صورت ترکیبی خطی از سایر بردارها نوشت.

$$\vec{V}_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\alpha_j\vec{V}_j$$

ماتریس

- استقلال خطی:

- بردارهای یک ماتریس (یا به طور کلی‌تر بردارهای $\overrightarrow{V_i}$ یک فضای برداری) مستقل خطی هستند اگر و تنها اگر اسکالرهای α_i به گونه‌ای یافت شوند که برای برقراری ترکیب خطی زیر همگی صفر باشند:

$$\alpha_1\vec{V}_i+\alpha_2\vec{V}_2+\ldots+\alpha_n\vec{V}_n=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$$

- مثال ۴: دو بردار زیر مستقل خطی اند

$$\vec{V}_1=\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix} \quad , \quad \vec{V}_2=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} \quad \alpha_1\vec{V}_1+\alpha_2\vec{V}_2=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}-\alpha_1+2\alpha_2=0\\-2\alpha_1+3\alpha_2=0\end{cases}\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=0$$

ماتریس

- چند نکته در مورد وابستگی خطی:
- ماتریسی که تمام درایه‌هاش صفر است رتبه آن صفر است.
- یک مجموعه تک عضوی حتما مستقل است مگر اینکه بردار آن صفر باشد.
- اگر بردار صفر در هر مجموعه‌ای وجود داشته باشد آن مجموعه حتما وابسته است.
- اگر بین ستونها یا سطرهای یک ماتریس مربعی وابستگی وجود داشته باشد آن ماتریس معکوس پذیر نخواهد بود.

وارون‌های ماتریس

- وارون‌های مهم یک ماتریس:
- در این درس چهار وارون ماتریس مورد بررسی قرار می‌گیرد که بسته به رتبه ماتریس تعریف می‌شوند:

1. وارون حقیقی
2. وارون چپ
3. وارون راست
4. شبه وارون

وارون‌های ماتریس

- وارون حقیقی:
- اگر رتبه یک ماتریس مانند A مرتبه کامل باشد، آنگاه دارای وارونی خواهد بود به نام وارون حقیقی که با A^{-1} نمایش داده می‌شود و دارای خاصیت زیر است:

$$if\ \ r(A_{n\times m}) = n = m \quad \Rightarrow \quad AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

- واضح است که در چنین حالتی ماتریس A مربعی است و دترمینان آن مخالف صفر است.
- نکته: وارون حقیقی منحصر به فرد است.

وارون‌های ماتریس

- وارون چپ:
- اگر ماتریس A مرتبه کامل ستونی باشد (یعنی $r(A_{n\times m}) = m$)، آنگاه این ماتریس دارای وارونی خواهد بود به نام وارون چپ که با A_l^{-1} نمایش داده می‌شود و دارای خاصیت زیر است:

$$A_l^{-1}A = I$$

- وارون چپ منحصر به فرد نیست. یکی از این وارون‌های چپ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$A_l^{-1} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T$$

با توجه به خاصیت شماره ۵ رتبه ماتریس، رتبه ماتریس $A^T A$ با m برابر می‌شود لذا وارون پذیر خواهد بود.

وارون‌های ماتریس

دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول

- وارون راست:
- اگر ماتریس A مرتبه کامل سطری باشد (یعنی $r(A_{n\times m}) = n$)، آنگاه این ماتریس دارای وارونی خواهد بود به نام وارون راست که با A_r^{-1} نمایش داده می‌شود و دارای خاصیت زیر است:

$$AA_r^{-1} = I$$

- وارون راست منحصر به فرد نیست. یکی از این وارون‌های راست از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$A_r^{-1} = A^T \left(AA^T \right)^{-1}$$

با توجه به خاصیت شماره ۵ رتبه ماتریس، رتبه ماتریس AA^T با n برابر می‌شود لذا وارون پذیر خواهد بود.

وارون‌های ماتریس

- شبه واورن :
- در حالت کلی هر ماتریسی مانند A دارای واورنی خواهد بود به نام شبه‌واورن که با A^+ نمایش داده می‌شود و دارای خواص زیر است:

$$1)\quad A^+AA^+ = A^+$$

$$2)\quad AA^+A = A$$

$$3)\quad (A^+A)^T = A^+A$$

$$4)\quad (AA^+)^T = AA^+$$

- شبه واورن بایستی حتما هر چهار خاصیت بالا را داشته باشد.
- نکته دیگر اینکه شبه واورن منحصر به فرد است.

وارون‌های ماتریس

- شبه وارون :
- در حالت کلی هر ماتریسی مانند A دارای وارونی خواهد بود به نام A^+ که برای بدست آوردن آن اگر رتبه ماتریس A برابر با u باشد، چنانچه دو ماتریس B و C پیدا شوند که ضرب آنها در هم برابر با A شوند و رتبه هر کدام از آنها هم u باشد، آنگاه شبه وارون از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$if \begin{cases} A_{n\times m} = B_{n\times u} C_{u\times m} \\ \& \\ r(A) = r(C) = r(B) = u \end{cases} \Rightarrow \quad A^+ = C^T (CC^T)^{-1} (B^T B)^{-1} B^T$$

تمرین شماره ۳- قسمت دوم

- شبه وارون ماتریس A را برای حالت‌های خاص زیر بدست آورید:

$$1)\quad r(A_{n\times m}) = n = m$$

$$2)\quad r(A_{n\times m}) = m$$

$$3)\quad r(A_{n\times m}) = n$$

- راهنمایی: از رابطه اسلاید قبل استفاده کنید.
- نتیجه این فعالیت را تا هفته آینده به آدرس

noorollah.tatar@gmail.com با موضوع "تمرین شماره ۳ درس

فتوگرامتری تحلیلی- قسمت دوم" ایمیل کنید.

وارون‌های ماتریس

- روش محاسبه وارون حقیقی:
- اگر A ماتریسی مربعی و وارونپذیر باشد:

1. برای ماتریس‌های ۱×۱ معکوس آن برابر است با عکس آن عدد. مانند:

$$A=[a]\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{a}$$

$$A=[5]\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{5}$$

2. معکوس ماتریس‌های ۲×۲ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\Rightarrow\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{4\times 2-4\times 1}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.5 & -1 \\ -0.25 & 1 \end{pmatrix}$$

وارون‌های ماتریس

- روش محاسبه وارون حقیقی:
- اگر A ماتریسی مربعی و وارونپذیر و ابعاد آن بزرگتر از ۳ باشد:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n} \quad C_{ij}=(-1)^{i+j}\left|M_{ji}\right|$$

- که در آن M_{ji} زیر ماتریسی از ماتریس A است؛ که با حذف سطر j ام و ستون i ام ماتریس A بدست می‌آید.

وارون‌های ماتریس

- روش محاسبه وارون حقیقی :
- مثال ۵: معکوس ماتریس روبرو را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}0&4&1&1\\0&2&1&-1\\-2&1&2&0\\-1&1&0&3\end{bmatrix}$$

$$\det(A)=2$$

$$A=\begin{bmatrix}0&4&1&1\\0&2&1&-1\\-2&1&2&0\\-1&1&0&3\end{bmatrix}\qquad M_{11}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}\Rightarrow|M_{11}|=11\Rightarrow C_{11}=(-1)^{1+1}\times 11=11\qquad A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}11&&&\\&&&\\&&&\\&&&\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}0&4&1&1\\0&2&1&-1\\-2&1&2&0\\-1&1&0&3\end{bmatrix}\qquad M_{12}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-2&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}\Rightarrow|M_{12}|=4\Rightarrow C_{21}=(-1)^{1+2}\times 4=-4\qquad A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}11&&&\\-4&&&\\&&&\\&&&\end{bmatrix}$$

وارون‌های ماتریس

$$A=\begin{bmatrix}0&4&1&1\\0&2&1&-1\\-2&1&2&0\\-1&1&0&3\end{bmatrix}$$

- روش محاسبه وارون حقیقی :
- ادامه حل مثال ۵:

$$A=\begin{bmatrix}0&4&1&1\\0&2&1&-1\\-2&1&2&0\\-1&1&0&3\end{bmatrix}\quad M_{13}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\-2&1&0\\-1&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\left|M_{13}\right|=13\Rightarrow C_{31}=\left(-1\right)^{1+3}\times13=13\qquad A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}11&&&\\-4&&&\\13&&&\\&&&\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}0&4&1&1\\0&2&1&-1\\-2&1&2&0\\-1&1&0&3\end{bmatrix}\quad M_{14}=\begin{pmatrix}0&2&1\\-2&1&2\\-1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\left|M_{14}\right|=-5\Rightarrow C_{41}=-\left(-1\right)^{1+4}\times5=5\qquad A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}11&&&\\-4&&&\\13&&&\\5&&&\end{bmatrix}$$

وارون‌های ماتریس

- روش محاسبه وارون حقیقی :
- ادامه حل مثال ۵:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad M_{21}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |M_{21}|=-19 \Rightarrow C_{12}=-(-1)^{1+2}\times 19=-19 \quad A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 11 & -19 & & \\ -4 & & & \\ 13 & & & \\ 5 & & & \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad M_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |M_{22}|=8 \Rightarrow C_{22}=-(-1)^{2+2}\times 8=8 \quad A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 11 & -19 & & \\ -4 & 8 & & \\ 13 & & & \\ 5 & & & \end{bmatrix}$$

وارون‌های ماتریس

- روش محاسبه وارون حقیقی :
- ادامه حل مثال ۵:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} M_{23}=\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow |M_{23}|=-23 \Rightarrow C_{32}=-(-1)^{2+3}\times 23=-23 \quad A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 11 & -19 & & \\ -4 & 8 & & \\ 13 & -23 & & \\ 5 & & & \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad M_{24}=\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow |M_{24}|=-9 \Rightarrow C_{22}=-(-1)^{2+4}\times 9=-9 \quad A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 11 & -19 & & \\ -4 & 8 & & \\ 13 & -23 & & \\ 5 & -9 & & \end{bmatrix}$$

وارون‌های ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- روش محاسبه وارون حقیقی :
- ادامه حل مثال ۵:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad M_{31}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |M_{31}|=4 \Rightarrow C_{13}=(-1)^{1+3}\times 4=4 \quad A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 11 & -19 & 4 & \\ -4 & 8 & & \\ 13 & -23 & & \\ 5 & -9 & & \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad M_{32}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |M_{32}|=2 \Rightarrow C_{23}=(-1)^{2+3}\times 2=-2 \quad A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 11 & -19 & 4 & \\ -4 & 8 & -2 & \\ 13 & -23 & & \\ 5 & -9 & & \end{bmatrix}$$

وارون‌های ماتریس

$$A=\begin{bmatrix}0&4&1&1\\0&2&1&-1\\-2&1&2&0\\-1&1&0&3\end{bmatrix}$$

- روش محاسبه وارون حقیقی :
- ادامه حل مثال ۵:

$$A=\begin{bmatrix}0&4&1&1\\0&2&1&-1\\-2&1&2&0\\-1&1&0&3\end{bmatrix}\qquad M_{33}=\begin{pmatrix}0&4&1\\0&2&-1\\-1&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow|M_{33}|=6\Rightarrow C_{33}=(-1)^{3+3}\times 6=6\qquad A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}11&-19&4&\\-4&8&-2&\\13&-23&6&\\5&-9&&\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}0&4&1&1\\0&2&1&-1\\-2&1&2&0\\-1&1&0&3\end{bmatrix}\qquad M_{34}=\begin{pmatrix}0&4&1\\0&2&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow|M_{34}|=-2\Rightarrow C_{43}=-(-1)^{4+3}\times 2=2\qquad A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}11&-19&4&\\-4&8&-2&\\13&-23&6&\\5&-9&2&\end{bmatrix}$$

وارون‌های ماتریس

$$A=\begin{bmatrix}0&4&1&1\\0&2&1&-1\\-2&1&2&0\\-1&1&0&3\end{bmatrix}$$

- روش محاسبه وارون حقیقی :
- ادامه حل مثال ۵:

$$A=\begin{bmatrix}0&4&1&1\\0&2&1&-1\\-2&1&2&0\\-1&1&0&3\end{bmatrix} M_{41}=\begin{pmatrix}4&1&1\\2&1&-1\\1&2&0\end{pmatrix}\Rightarrow |M_{41}|=10\Rightarrow C_{14}=(-1)^{1+4}\times 10=-10 \quad A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}11&-19&4&-10\\-4&8&-2&\\13&-23&6&\\5&-9&2&\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}0&4&1&1\\0&2&1&-1\\-2&1&2&0\\-1&1&0&3\end{bmatrix} \quad M_{42}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&-1\\-2&2&0\end{pmatrix}\Rightarrow |M_{42}|=4\Rightarrow C_{24}=(-1)^{2+4}\times 4=4 \quad A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}11&-19&4&-10\\-4&8&-2&4\\13&-23&6&\\5&-9&2&\end{bmatrix}$$

واورن‌های ماتریس

- روش محاسبه وارون حقیقی :
- ادامه حل مثال ۵:

$$A=\begin{bmatrix}0&4&1&1\\0&2&1&-1\\-2&1&2&0\\-1&1&0&3\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}11&-19&4&-10\\-4&8&-2&4\\13&-23&6&-12\\5&-9&2&\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}0&4&1&1\\0&2&1&-1\\-2&1&2&0\\-1&1&0&3\end{bmatrix} M_{43}=\begin{pmatrix}0&4&1\\0&2&-1\\-2&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\left|M_{43}\right|=12\Rightarrow C_{43}=(-1)^{4+3}\times 12=-12$$

$$A=\begin{bmatrix}0&4&1&1\\0&2&1&-1\\-2&1&2&0\\-1&1&0&3\end{bmatrix} \quad M_{44}=\begin{pmatrix}0&4&1\\0&2&1\\-2&1&2\end{pmatrix}\Rightarrow\left|M_{44}\right|=-4\Rightarrow C_{44}=-(-1)^{4+4}\times 4=-4$$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}11&-19&4&-10\\-4&8&-2&4\\13&-23&6&-12\\5&-9&2&-4\end{bmatrix}$$

وارون‌های ماتریس

- روش محاسبه وارون حقیقی :
- ادامه حل مثال ۵:

$$A=\begin{bmatrix}0&4&1&1\\0&2&1&-1\\-2&1&2&0\\-1&1&0&3\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}11&-19&4&-10\\-4&8&-2&4\\13&-23&6&-12\\5&-9&2&-4\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}5.5&-9.5&2&-5\\-2&4&-1&2\\6.5&-11.5&3&-3\\2.5&-4.5&1&-2\end{bmatrix}$$

وارون‌های ماتریس

- روش محاسبه وارون چپ :
- مثال ۶: وارون چپ ماتریس روبرو را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

- در ابتدا رتبه این ماتریس حساب می‌شود.
- باتوجه به اینکه رتبه این ماتریس ۲ است، این ماتریس مرتبه کامل ستونی است؛ لذا دارای وارون چپ است.
- وارون چپ از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$A_l^{-1}=\left(A^T A\right)^{-1} A^T$$

وارون‌های ماتریس

- روش محاسبه وارون چپ :
- ادامه حل مثال ۶:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\left(A^T A\right)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_l^{-1} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_l^{-1} = \begin{bmatrix} 0.16667 & -0.33333 & 0.833333 \\ 0.33333 & 0.33333 & -0.33333 \end{bmatrix}$$

ماتریس معین مثبت

- ماتریس هرمیتین A را معین مثبت می‌گویم هرگاه برداری غیرصفر مانند x (عضو فضای برداری مختلط) پیدا بشود که با ضرب ترانهاده آن بردار در ماتریس A در خودش یک عدد بزرگتر از صفر تولید کند.

$$\forall \quad \mathrm{x}_{n\times 1} \neq 0 \in \mathbb{C}^{n\times 1} \Rightarrow x_{1\times n}^{H} A_{n\times n} x_{n\times 1} > 0$$

- از آنجا که فضای برداری مختلط شامل فضای برداری حقیقی نیز است اگر تمام مقادیر A و x حقیقی باشند و شرایط فوق برقرار باشد به ماتریس A کماکان معین مثبت می‌گویند.

ماتریس نیمه معین مثبت

- ماتریس هرمیتین A را نیمه معین مثبت (شبه معین مثبت) می‌گویم هرگاه برداری غیرصفر مانند x (عضو فضای برداری مختلط) پیدا بشود که با ضرب ترانهاده آن بردار در ماتریس A در خودش یک عدد بزرگتر مساوی صفر تولید کند.

$$\forall \quad x_{n\times1} \neq 0 \in \mathbb{C}^{n\times1} \Rightarrow x^{H}_{1\times n} A_{n\times n} x_{n\times1} \geq 0$$

- از آنجا که فضای برداری مختلط شامل فضای برداری حقیقی نیز است اگر تمام مقادیر A و x حقیقی باشند و شرایط فوق برقرار باشد به ماتریس A کماکان نیمه معین مثبت می‌گویند.

ماتریس معین منفی

- ماتریس هرمیتین A را معین منفی می‌گویم هرگاه برداری غیرصفر مانند x (عضو فضای برداری مختلط) پیدا بشود که با ضرب ترانهاده آن بردار در ماتریس A در خودش یک عدد کوچکتر از صفر تولید کند.

$$\forall \quad \mathrm{x}_{n\times1} \neq 0 \in \mathbb{C}^{n\times1} \Rightarrow x_{1\times n}^{H} A_{n\times n} x_{n\times1} < 0$$

- از آنجا که فضای برداری مختلط شامل فضای برداری حقیقی نیز است اگر تمام مقادیر A و x حقیقی باشند و شرایط فوق برقرار باشد به ماتریس A کماکان معین منفی می‌گویند.

ماتریس نیمه معین منفی

- ماتریس هرمیتین A را نیمه معین منفی (شبه معین منفی) می‌گوییم هرگاه برداری غیرصفر مانند x (عضو فضای برداری مختلط) پیدا بشود که با ضرب ترانهاده آن بردار در ماتریس A در خودش یک عدد کوچکتر مساوی صفر تولید کند.

$$\forall \quad x_{n\times1} \neq 0 \in \mathbb{C}^{n\times1} \Rightarrow x_{1\times n}^{H} A_{n\times n} x_{n\times1} \leq 0$$

- از آنجا که فضای برداری مختلط شامل فضای برداری حقیقی نیز است اگر تمام مقادیر A و x حقیقی باشند و شرایط فوق برقرار باشد به ماتریس A کماکان نیمه معین منفی می‌گویند.

راه تشخیص معین مثبت و منفی بودن

- ماتریس هرمیتین A را در نظر بگیرید.

$$A_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- دترمینان‌های زیر را حساب کنید.

$$H_1=a_{11},\quad H_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad H_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad H_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

راه تشخیص معین مثبت و منفی بودن

- اگر همه H ها بزرگتر از صفر بودند ماتریس A معین مثبت است.

$$if \quad H_i > 0 \Rightarrow A \text{ is positive definite}$$

- اگر علامت H های با اندکس فرد منفی و H های با اندکس زوج مثبت بود، ماتریس A معین منفی است.

$$if \quad \operatorname{sign}(H_i)\big|_{i=1,3,5,\dots} < 0 \Rightarrow A \text{ is negetive definite}$$

- یعنی علامت $\{H_1, H_3, H_5, \dots\}$ منفی و علامت $\{H_2, H_4, H_6, \dots\}$ مثبت باشد

چند قضیه در باب معین مثبت و منفی

1. اگر ماتریسی معین مثبت باشد حتما وارونپذیر است و وارون آن هم معین مثبت می‌باشد.
2. اگر ماتریسی معین منفی باشد حتما وارونپذیر است و وارون آن هم معین منفی می‌باشد.
3. در صورتی که ماتریس‌های M و N معین مثبت (یا منفی) باشند، آنگاه به ازای هر ماتریس دلخواه مانند A قضیه زیر در باب رتبه ماتریس‌های زیر برقرار است:

$$r(A) = r(A^T M A) = r(A N A^T)$$

چند قضیه در باب معین مثبت و منفی

4. اگر ماتریس M معین مثبت (یا معین منفی) باشد، به ازای هر ماتریس مرتبه کامل ستونی A ماتریس A^TMA حتما معین مثبت (یا معین منفی) است. در صورتی که A مرتبه کامل ستونی نباشد، ماتریس A^TMA حتما نیمه معین مثبت (نیمه معین منفی) است.

5. اگر ماتریس N معین مثبت (یا معین منفی) باشد، به ازای هر ماتریس مرتبه کامل سطری A ماتریس ANA^T حتما معین مثبت (یا معین منفی) است. در صورتی که A مرتبه کامل سطری نباشد، ماتریس ANA^T حتما نیمه معین مثبت (نیمه معین منفی) است.

بردارهای پایه، بردارهای ویژه و مقادیر ویژه

بردارهای پایه

- هر فضای برداری دارای یکسری بردار پایه است که با استفاده از آن بردارها می‌توان هر بردار دیگری از این فضای برداری را با ترکیب خطی از آنها بیان کرد.
- بردارهای پایه حتما دارای خواص زیرند:
- هیچ‌کدام از بردارهای پایه را نمی‌توان به صورت ترکیب خطی از روی سایر بردارهای پایه نوشت، یا به زبان ساده‌تر، بردارها به طور خطی از هم مستقل اند.
- هر بردار دیگری در این فضای برداری را بتوان از ترکیب خطی این بردارها به دست آورد.

بردارهای پایه

- به عنوان مثال وقتی با بسط سری تیلور یک تابع مانند f(x)را بسط می دهیم در واقع توابع $\{1, x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}, \ldots\}$ را می‌توان توابع پایه تابع f(x) اند که این توابع پایه هم مستقل خطی اند و هم هر عضو از تابع اصلی را می توان از روی ترکیب خطی آنها نوشت.

$$f(x)\big|_{x=0} = f(0) + \frac{f^{'}(0)}{1!}x + \frac{f^{''}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{'''}(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

- یا در بسط سری فوریه نیز توابع سینوس و کسینوس توابع پایه بودند.

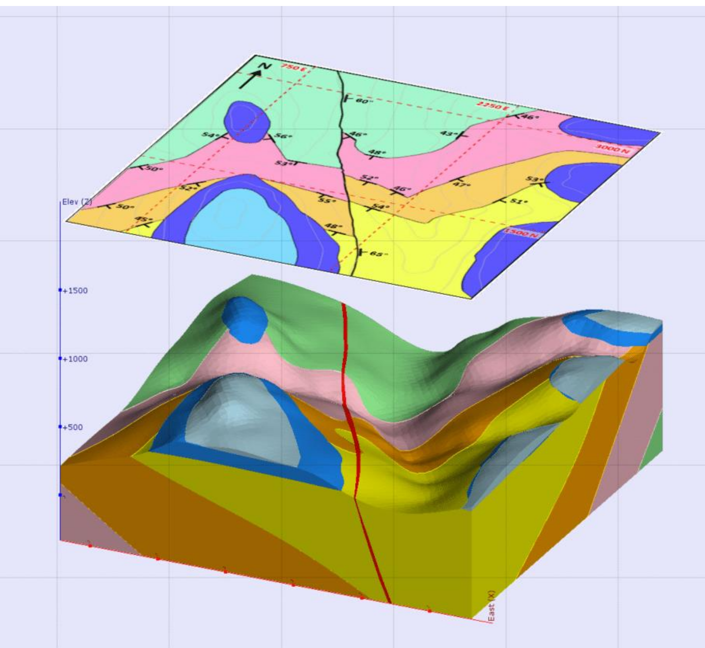
$$f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos\omega_i x + b_i \sin\omega_i x$$

بردارهای پایه

- وقتی یک تابع را به صورت ترکیب خطی بی نهایت بردار مستقل می‌نویسیم پس بعد فضا (رتبه) در اینجا بی نهایت است. یکسری پدیدهها وجود دارند که بی نهایت بردار پایه دارند ولی چون برای ما ناشناخته اند نمی توانیم یک پدیده را به درستی مدلسازی کنیم. مثل ژئوئید یا حرکت قطب
- وقتی یک تابع مانند f(x) را با بسط سری تیلور با بی‌نهایت تابع پایه مدلسازی می‌کنیم یعنی این تابع بینهایت بعدی است.
- ماکزیمم ترین بعد قابل تجسم فضای سه بعدی است.

بردارهای پایه

- اگر یک تابع را با تعداد بردار پایه کمتری مدلسازی کنیم در واقع به نوعی تصویر آن تابع در آن زیرفضا بدست آمده است.



- به عنوان مثال اگر در سیستم مختصات سه بعدی (مانند مسطحاتی ارتفاعی) یک نقطه یا یک عارضه را با دو مولفه بیان کنیم به این معناست که تصویری از آن را نگاشت داده ایم.

بردار ویژه، مقدار ویژه

- مشابه بردارها و توابع پایه، هر ماتریس را می‌توان با ترکیب خطی از بردارهای پایه بیان کرد که به آنها بردارهای ویژه می‌گویند.
- برای تعریف بردارهای ویژه یک ماتریس فرض کنید یک تبدیل خطی از یک فضای حقیقی n بعدی به یک فضای حقیقی n بعدی دیگر را با یک ماتریس بیان کرده ایم. در اینصورت بردار غیر صفر x یک بردار ویژه برای ماتریس A است اگر ثابت λ وجود داشته باشد که رابطه زیر را برقرار کند.

$$Ax = \lambda x$$

- در اینصورت λ یک مقدار ویژه و x یک بردار ویژه برای ماتریس A است

بردار ویژه، مقدار ویژه

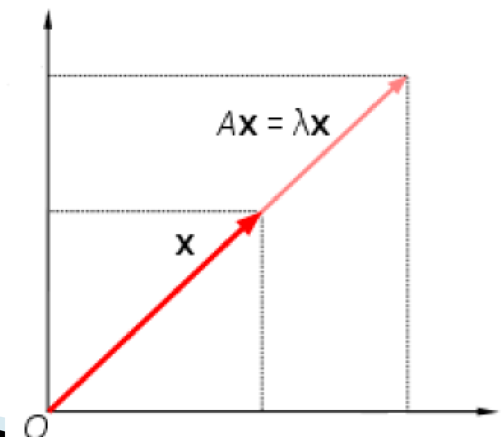
- برای درک بهتر تبدیل خطی به مثال زیر توجه کنید.
- به عنوان مثال فرض کنید برای تبدیل مختصات یک نقطه در سیستم مختصات دستگاهی به سیستم مختصات عکسی (در فتوگرامتری) از یک تابع کانفورمال استفاده شود.

$$\begin{aligned} x &= ax' + by' + c \\ y &= -bx' + ay' + d \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ -b & a & d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

- در اینجا ماتریس A در واقع یک نوع تبدیل خطی است که دارای یکسری بردار ویژه است.

بردار ویژه، مقدار ویژه

- بردارهای ویژه یک ماتریس در واقع بردارهای مستقل خطی آن ماتریس را به صورت ساده تری بیان می‌کنند.
- اگر یک ماتریس $n \times n$ رتبه ای کمتر از n داشته باشد، بردارهای ویژه آن ماتریس به تعداد رتبه آن خواهند بود.
- مقدار ویژه ممکن است باعث تغییر مقیاس، یا تغییر اندازه بردار بشود، ولی جهت آن را تغییر نمی‌دهد.



محاسبه مقادیر و بردارهای ویژه

- از آنجا که معادله $Ax = \lambda x$ یک معادله غیرخطی است، نمی‌توان با روش‌های معمول مجهول‌های آن را پیدا کرد. باید از طریقی λ و x را از هم جدا کنیم. برای حل معادله به صورت زیر عمل می‌شود:

$$Ax = \lambda I x \Rightarrow (A - \lambda I)x = 0$$

- در اینجا I ماتریس یکه است.
- برای اینکه این معادله جواب غیرصفر داشته باشد، باید ماتریس $A - \lambda I$ وارون پذیر نباشد. به عبارتی

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

محاسبه مقادیر و بردارهای ویژه

- معادله فوق تنها یک مجهول دارد. باید لاندهایی را پیدا کنیم که باعث شوند ماتریس $A-\lambda I$ منفرد شود (به بیان دیگر دترمینانش صفر شود). ریشه‌های این معادله مقادیر ویژه A خواهند بود.
- به معادله $A-\lambda I=0$ معادله سرشت نمای ماتریس A (یا معادلات همگن) هم می‌گویند.
- با پیدا کردن مقادیر ویژه، حال می‌توانیم معادله $Ax=\lambda Ix$ را حل کرده و همه بردارهای ویژه را پیدا کنیم.
- روش فوق، روش کلی محاسبه مقادیر و بردارهای ویژه است.

محاسبه مقادیر و بردارهای ویژه

- مثال ۷: بردارهای ویژه ماتریس روبرو را بیابید؟ $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$
- برای حل ابتدا معادله سرشت نما را تشکیل می‌دهیم.

$$|A-\lambda I|=0\Rightarrow\left|\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}3-\lambda & 1\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-1=0$$

- ریشه‌های معادله فوق، مقادیر ویژه این ماتریس هستند. لذا

$$\lambda_1=2 \qquad \lambda_2=4$$

- برای محاسبه بردارهای ویژه، باید فضای پوچ ماتریسهای $A-\lambda_1 I$ و $A-\lambda_2 I$ را محاسبه کنیم.

$$\begin{vmatrix}3-\lambda_1 & 1\\ 1 & 3-\lambda_1\end{vmatrix}x=0, \qquad \begin{vmatrix}3-\lambda_2 & 1\\ 1 & 3-\lambda_2\end{vmatrix}x=0$$

محاسبه مقادیر و بردارهای ویژه

- ادامه حل مثال ۷:
- هر برداری در فضای پوچ این ماتریسها، یک بردار ویژه است. می‌توانیم همان جوابهای مخصوص را به عنوان جوابهای ویژه انتخاب کنیم. مانند

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda_2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 3-\lambda_1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda_1 \end{vmatrix}\begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix} = 0$$

- لذا بردارهای ویژه زیر یکی از جوابهای معادلات بالا هستند.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- آیا بردارهای فوق از هم مستقل اند؟

چند قضیه در باب مقادیر ویژه

1. یک ماتریس مربعی n×n حداکثر n مقدار ویژه متمایز دارد.
2. بردارهای ویژه متناظر مقادیر ویژه مستقل خطی هستند.
3. مقادیر ویژه یک ماتریس هرمیتین حقیقی هستند.
4. بردارهای ویژه نظیر مقادیر ویژه متمایز در یک ماتریس هرمیتین بر هم عمودند. به عبارتی ضرب داخلی آنها در هم نتیجه اش صفر است.
5. دترمینان یک ماتریس با حاصلضرب مقادیر ویژه آن برابر است.

$$\det(A_{n\times n}) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \ldots \times \lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

چند قضیه در باب مقادیر ویژه

- به حاصلجمع عناصر روی قطر اصلی یک ماتریس مربعی، اثر (trace) ماتریس گفته می‌شود.

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\Rightarrow trace(A)=3+3=6$$

6. حاصل جمع مقادیر ویژه با اثر یک ماتریس برابر است.

$$trace(A_{n\times n})=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=\sum_{i=1}^{n}\lambda$$

7. در ماتریس‌های بالا مثلثی یا پایین مثلثی مقادیر ویژه همان عناصر روی قطر اصلی هستند.

چند قضیه در باب مقادیر ویژه

- فرض کنید A یک ماتریس هرمیتین باشد. ماتریس A معین مثبت است اگر و تنها اگر تمامی مقادیر ویژه مثبت باشند. $\lambda_i > 0$
- فرض کنید A یک ماتریس هرمیتین باشد. ماتریس A نیمه معین مثبت است اگر و تنها اگر مقادیر ویژه آن بزرگتر مساوی صفر باشند. $\lambda_i \geq 0$
- فرض کنید A یک ماتریس هرمیتین باشد. ماتریس A معین منفی است اگر و تنها اگر تمامی مقادیر ویژه منفی باشند. $\lambda_i < 0$
- فرض کنید A یک ماتریس هرمیتین باشد. ماتریس A نیمه معین منفی است اگر و تنها اگر مقادیر ویژه آن کوچکتر مساوی صفر باشند. $\lambda_i \leq 0$

تمرین شماره ۳- قسمت سوم

- مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس روبرو را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix} w & -1 \\ 6 & d \end{bmatrix}$$

- در ماتریس فوق w وزن و d روز تولد شماست. به عنوان مثال کسی که در روز بیستم یک ماه به دنیا آمده و وزنش ۸۰ کیلوگرم است ماتریس A اش به صورت روبرو خواهد بود.

$$A=\begin{bmatrix} 80 & -1 \\ 6 & 20 \end{bmatrix}$$

- نتیجه این فعالیت را تا هفته آینده به آدرس noorollah.tatar@gmail.com با موضوع "تمرین شماره ۳ درس فتوگرامتری تحلیلی- قسمت سوم" ایمیل کنید. ارائه محاسبات ضروریست.

دستگاه معادلات جبری

معرفی دستگاه معادلات جبری

- صورت کلی دستگاه معادلات جبری خطی با m معادله و n مجهول به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

- این دستگاه معادلات معرف یک سیستم $m \times n$ است که در آن a_{ij} ها و b_i ها مقادیر ثابت معین و x_j ها مجهولاتی هستند که باید تعیین شوند.

معرفی دستگاه معادلات جبری

- دستگاه معادلات اسلاید قبل را می توان با صرفنظر کردن مجهولات و فقط با در نظر گرفتن ضرایب به صورت زیر نمایش داد،

$$D=\left[A\middle|b\right]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \big| b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \big| b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \big| \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \big| b_m \end{bmatrix}_{m\times(n+1)}$$

- ماتریس فوق (D) را ماتریس افزوده سیستم می‌نامند، که هر سطر آن بیان کننده یکی از معادلات خطی است.
- از ماتریس افزوده برای بحث در مورد جوابهای دستگاه معادلات استفاده می شود.

معرفی دستگاه معادلات جبری

- دستگاه معادلات اسلایدهای قبل را می توان به صورت $Ax = b$ نیز نمایش داد که در آن A یک ماتریس $m \times n$، b یک بردار $m \times 1$ و x یک بردار $n \times 1$ است.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \; \mathrm{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- به طور معمول در این درس سعی می‌شود دستگاه معادلات به فرم بالا نوشته شوند.

معرفی دستگاه معادلات جبری

- مثال ۸: با توجه به دستگاه معادلات خطی زیر، ماتریس‌های A، X ، b و D را تعیین کنید؟

$$x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 10$$
$$7x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 6$$
$$8x_2 + x_3 = 7$$

- جواب:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 7 & -3 & 9 \\ 0 & 8 & 1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -6 & 10 \\ 7 & -3 & 9 & 6 \\ 0 & 8 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

به نظر شما رتبه ماتریس افزوده فوق چند است؟

بحث در مورد دستگاه معادلات

- در رابطه با دستگاه معادلات خطی بالا پرسشی که مطرح می گردد این است که آیا جوابی برای این مجموعه معادلات وجود دارد یا نه؟ اگر جوابی وجود دارد آیا جواب منحصر به فرد است یا خیر؟
- در باب جواب دستگاه معادلات معمولا سه حالت زیر وجود دارد:

1. حالتی که دستگاه معادلات بدون جواب است.

$$r(A_{m\times n}) \neq r(D_{m\times(n+1)})$$

2. حالتی که دستگاه معادلات سازگار و فقط یک جواب منحصر به فرد دارد.

$$r(A_{n\times n}) = r(D_{n\times(n+1)}) = n$$

3. حالتی که دستگاه معادلات بیشمار جواب دارد

$$r(A_{m\times n}) = r(D_{m\times(n+1)}) \neq n$$

بحث در مورد دستگاه معادلات

- در صورتی که دستگاه معادلات جواب داشته باشد به آن دستگاه معادلات سازگار می گویند.
- اگر تعداد معادلات بیش از تعداد مجهولات باشد، به آن دستگاه فرامعین (over determined) می‌گویند. در چنین حالتی دستگاه بی شمار جواب دارد. m>n
- به عنوان مثال اگر برای محاسبه اختلاف ارتفاع هم اطلاعات ترازیابی موجود باشد و هم زاویه ارتفاعی و فاصله طولی. در چنین حالتی برای مجهولی به نام اختلاف ارتفاع حداقل دو معادله موجود است (دو معادله ولی یک مجهول)

بحث در مورد دستگاه معادلات

- اگر تعداد معادلات مستقل با تعداد مجهولات برابر باشد، به آن دستگاه معین (determined) می‌گویند.

  m=n

- به عنوان مثال اگر برای محاسبه اختلاف ارتفاع فقط زاویه ارتفاعی و فاصله طولی موجود باشد. در چنین حالتی برای مجهولی به نام اختلاف ارتفاع تنها یک معادله وجود دارد.
- در چنین حالتی رتبه ماتریس افزوده با رتبه ماتریس A برابر است و دستگاه معادلات یک جواب سازگار دارد.

بحث در مورد دستگاه معادلات

- اگر تعداد معادلات از تعداد مجهولات کمتر باشد، به آن دستگاه فرو معین (under determined) می‌گویند.

  m<n

- به عنوان مثال اگر برای محاسبه اختلاف ارتفاع فقط فاصله طولی موجود باشد. در چنین حالتی برای مجهولی به نام اختلاف ارتفاع هیچ معادله ای نمی توان تشکیل داد.
- در چنین حالتی رتبه ماتریس افزوده با رتبه ماتریس A برابر نیست و دستگاه معادلات جواب ندارد.

بحث در مورد دستگاه معادلات

- مثال ۹: در مورد جواب دستگاه معادلات زیر بحث کنید؟

$$2x_1 - x_2 = 6$$
$$x_1 + 3x_2 = 10$$

- ابتدا ماتریس‌های A، X ، b و D تعیین می‌شوند

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

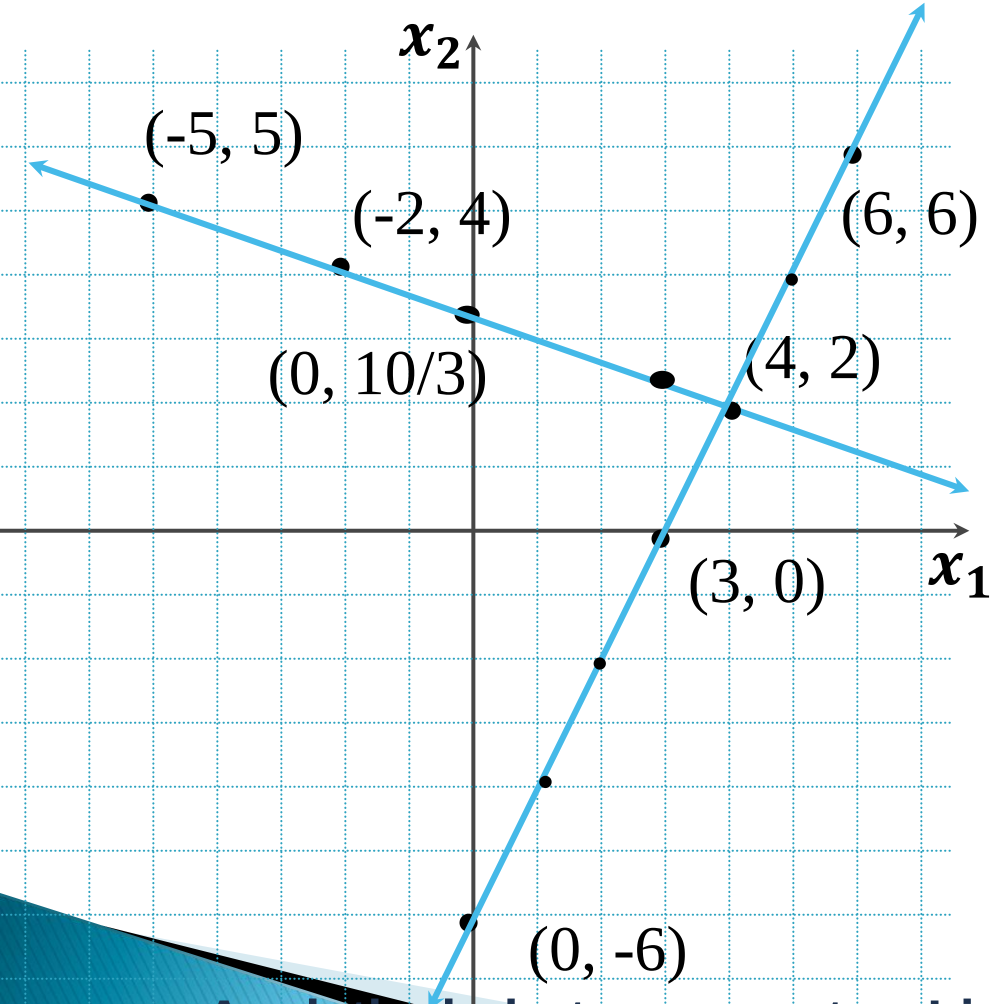
- در مرحله بعد رتبه ماتریس‌های A و D محاسبه می‌شوند.
- اگر دترمینان یک ماتریس مربعی مخالف صفر باشد، رتبه آن ماتریس با ابعاد آن برابر است.

بحث در مورد دستگاه معادلات

- ادامه جواب مثال ۹: برای محاسبه رتبه ماتریس A تعداد بردارهای مستقل خطی آن شمرده می شوند. از آنجا که دترمینان این ماتریس مخالف صفر است پس این ماتریس یک ماتریس مرتبه کامل بوده و رتبه آن ۲ می باشد. $\det(A)=2\times3-(-1)\times1=7 \Rightarrow r(A)=2$
- از آنجا که ابعاد ماتریس D ۲ در ۳ می باشد، پس رتبه این ماتریس در بهترین حالت ۲ می باشد. از طرفی باتوجه به اینکه رتبه ماتریس A برابر با ۲ می باشد بنابراین رتبه ماتریس D نیز ۲ خواهد بود. (براساس قضایای ۱ و ۶ رتبه ماتریس) $r(A)=r(D)=2$

باتوجه به شرط روبرو دستگاه معادله مثال ۹ یک دستگاه معین است و تنها یک جواب دارد.

بحث در مورد دستگاه معادلات



- ادامه جواب مثال ۹: برای تشریح بیشتر این مساله از نظر گرافیکی نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد.
- دستگاه دو معادله دو مجهولی فوق بیانگر دو خط متقاطع هستند. که محل تقاطع جواب مجهولات است.

بحث در مورد دستگاه معادلات

- مثال ۱۰: در مورد جواب دستگاه معادلات زیر بحث کنید؟

$$-x_1 + 3x_2 = 6$$
$$3x_1 - 9x_2 = 9$$

- ابتدا ماتریس‌های A، X ، b و D تعیین می‌شوند

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 3 & -9 & 9 \end{bmatrix}$$

- در مرحله بعد رتبه ماتریس‌های A و D محاسبه می‌شوند.
- اگر دترمینان یک ماتریس مربعی ۲×۲ صفر باشد، رتبه آن ماتریس از ابعاد ۲ کوچکتر است.

بحث در مورد دستگاه معادلات

- ادامه جواب مثال ۱۰: از آنجا که دترمینان ماتریس A صفر است پس رتبه این ماتریس از ۲ کمتر است. از طرفی چون یک ماتریس غیر صفر است پس رتبه آن صفر نیست. با این تفاسیر رتبه این ماتریس ۱ است.

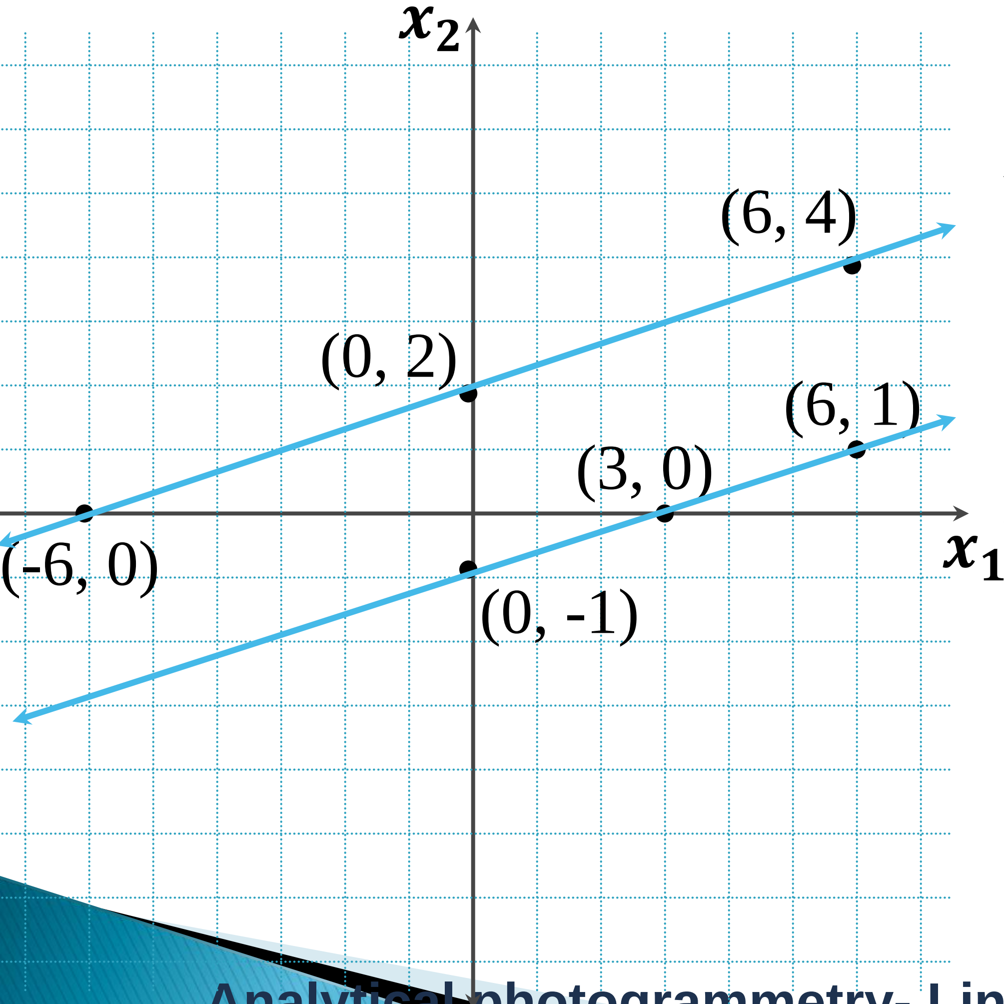
$$\det(A) = (-9)\times(-1) - 3\times 3 = 0 \Rightarrow r(A) = 1$$

- برای محاسبه رتبه ماتریس D ماکزیمم تعداد بردارهای مستقل خطی آن شمرده می شوند. باتوجه به استقلال بردار مربوط به ستون اول با ستون سوم رتبه ماتریس D برابر با ۲ می باشد.

$$\left\{\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\9\end{bmatrix}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix}-1 & 6\\3 & 9\end{vmatrix} = -9-18 = -27 \Rightarrow r(D) = 2 \Rightarrow r(A) \neq r(D)$$

باتوجه به شرط فوق دستگاه معادله مثال ۱۰ یک دستگاه فرامعین است و جواب ندارد.

بحث در مورد دستگاه معادلات



- ادامه جواب مثال ۱۰: برای تشریح بیشتر این مساله از نظر گرافیکی نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد.
- دستگاه دو معادله دو مجهولی فوق بیانگر دو خط موازی هستند که هیچگاه همدیگر را قطع نمی‌کنند. (دستگاه جواب ندارد)

بحث در مورد دستگاه معادلات

- مثال ۱۱: در مورد جواب دستگاه معادلات زیر بحث کنید؟

$$x_1 - 3x_2 = -1$$
$$2x_1 - 6x_2 = -2$$

- ابتدا ماتریس‌های A، X ، b و D تعیین می‌شوند

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

- در مرحله بعد رتبه ماتریس‌های A و D محاسبه می‌شوند.
- اگر دترمینان یک ماتریس مربعی ۲×۲ صفر باشد، رتبه آن ماتریس از ابعاد ۲ کوچکتر است.

بحث در مورد دستگاه معادلات

- ادامه جواب مثال ۱۱: از آنجا که دترمینان ماتریس A صفر است پس رتبه این ماتریس از ۲ کمتر است. از طرفی چون یک ماتریس غیر صفر است پس رتبه آن صفر نیست. با این تفاسیر رتبه این ماتریس ۱ است.

$$\det(A) = (-6)\times 1 - (-2)\times 3 = 0 \Rightarrow r(A) = 1$$

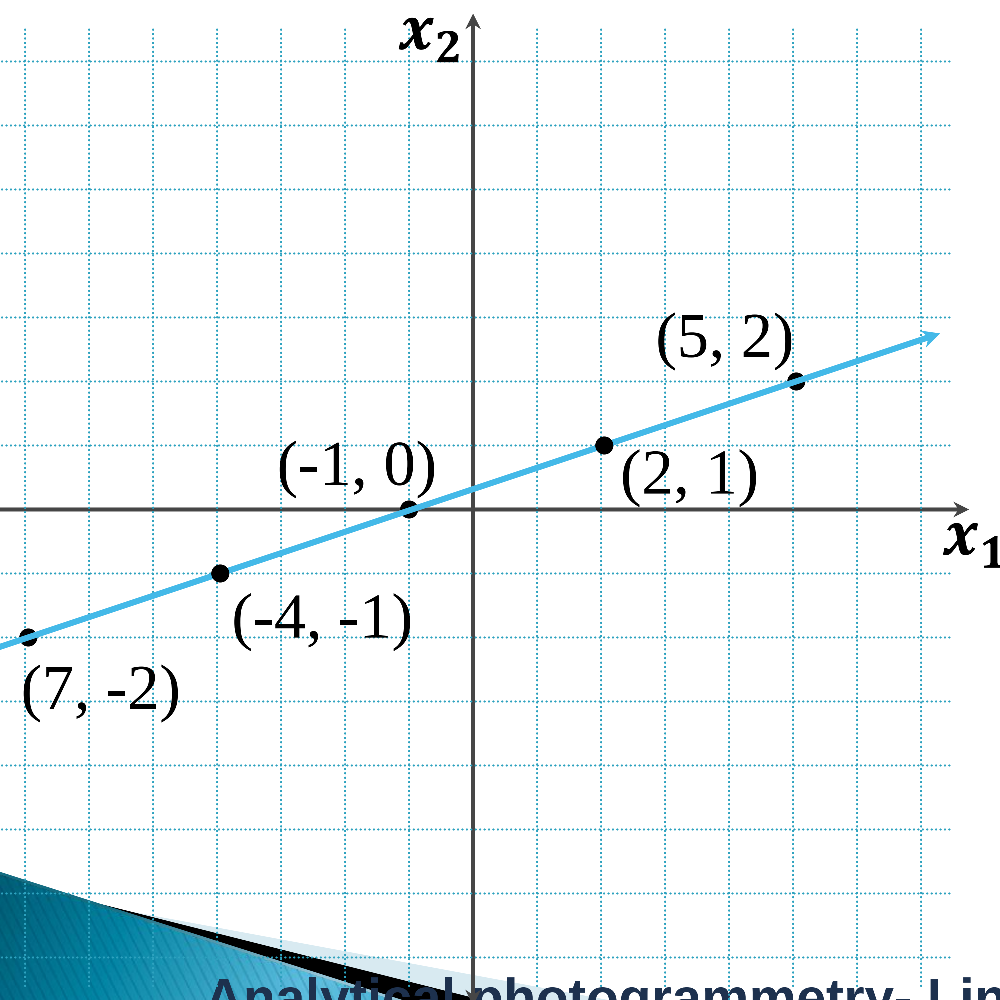
- برای محاسبه رتبه ماتریس D ماکزیمم تعداد بردارهای مستقل خطی آن شمرده می شوند. باتوجه به وابستگی همه بردارها رتبه ماتریس D از ۲ کمتر و باتوجه به غیر صفر بودنش رتبه آن ۱ می باشد.

$$r(D) = r(A) = 1 < m$$

$$m = 2$$

باتوجه به شرط فوق دستگاه معادله مثال ۱۱ یک دستگاه فرومعین است که بیشمار جواب دارد.

بحث در مورد دستگاه معادلات



- ادامه جواب مثال ۱۱: برای تشریح بیشتر این مساله از نظر گرافیکی نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد.
- دستگاه دو معادله دو مجهولی فوق بیانگر دو خط موازی و منطبق بر هم هستند. (دستگاه بیشمار جواب دارد)

بحث در مورد دستگاه معادلات

- همانطور که در اسلایدهای قبل مشاهده شد، با بررسی استقلال ماتریس A نمی توان در مورد جوابهای دستگاه معادلات صحبت کرد. در این مثالها ضرورت به کارگیری رتبه ماتریس افزوده به خوبی نمایان شد.

- البته لازم به ذکر است اگر تعداد معادلات مستقل بیش از تعداد مجهولات باشد، آنگاه نیز با دستگاه معادلاتی سر و کار داریم که بیشمار جواب دارد. در مورد حل این دستگاه معادلات که در مهندسی نقشه برداری نیز با آن‌ها زیاد سر و کار داریم در ادامه صحبت خواهد شد.

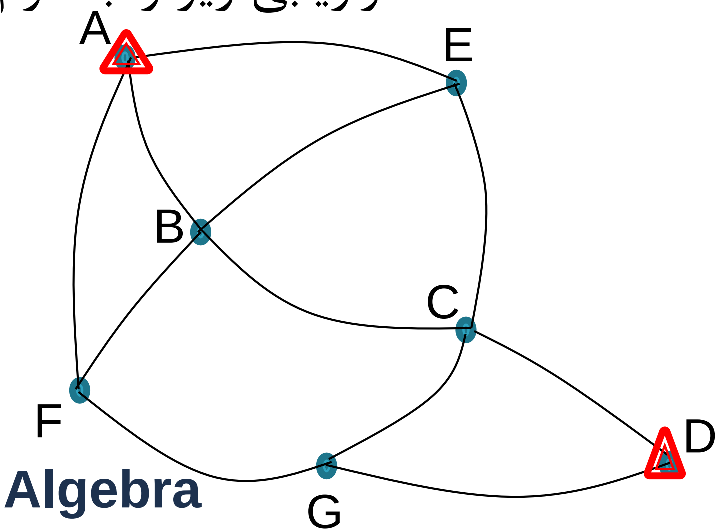
دستگاه معادلات خطی

- مثال ۱۲: باتوجه به شکل زیر فرض کنید نقاط A و D ایستگاههای مبنایی ترازیابی باشند (یعنی با ارتفاع معلوم). دستگاه معادلات مربوط به شبکه ترازیابی زیر را به فرم ماتریسی بنویسید.

$$\Delta h_{12} = h_2 - h_1$$

ایستگاه 1	ایستگاه 2	اختلاف ارتفاع بین ایستگاه 1 و 2
A	B	2.644 m
A	E	-0.151 m
A	F	1.516 m
B	E	-2.803 m
B	C	4.691 m
B	F	-1.135 m
C	E	-7.478 m
C	D	2.663 m
C	G	-3.799 m
G	D	6.466 m
G	F	-2.033 m

$$h_A = 100\ m$$
$$h_D = 110\ m$$



دستگاه معادلات خطی

- حل مثال ۱۲: در ابتدا معادلات نوشته می شود

$$\begin{aligned}
\Delta h_{AB} &= h_B - h_A = 2.644 \\
\Delta h_{AE} &= h_E - h_A = -0.151 \\
\Delta h_{AF} &= h_F - h_A = 1.516 \\
\Delta h_{BE} &= h_E - h_B = -2.803 \\
\Delta h_{BC} &= h_C - h_B = 4.691 \\
\Delta h_{BF} &= h_F - h_B = -1.135 \\
\Delta h_{CE} &= h_E - h_C = -7.478 \\
\Delta h_{CD} &= h_D - h_C = 2.663 \\
\Delta h_{CG} &= h_G - h_C = -3.799 \\
\Delta h_{GD} &= h_D - h_G = 6.466 \\
\Delta h_{GF} &= h_F - h_G = -2.033
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
h_B - 100 &= 2.644 \\
h_E - 100 &= -0.151 \\
h_F - 100 &= 1.516 \\
h_E - h_B &= -2.803 \\
h_C - h_B &= 4.691 \\
h_F - h_B &= -1.135 \\
h_E - h_C &= -7.478 \\
110 - h_C &= 2.663 \\
h_G - h_C &= -3.799 \\
110 - h_G &= 6.466 \\
h_F - h_G &= -2.033
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
h_B &= 102.644 \\
h_E &= 99.849 \\
h_F &= 101.516 \\
h_E - h_B &= -2.803 \\
h_C - h_B &= 4.691 \\
h_F - h_B &= -1.135 \\
h_E - h_C &= -7.478 \\
-h_C &= -107.337 \\
h_G - h_C &= -3.799 \\
-h_G &= -103.534 \\
h_F - h_G &= -2.033
\end{aligned}$$

دستگاه معادلات خطی

- ادامه حل مثال ۱۲: سپس دستگاه معادلات اسلاید قبل به فرم ماتریسی نوشته می شود.

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\-1&0&1&0&0\\-1&1&0&0&0\\-1&0&0&1&0\\0&-1&1&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&-1&0&0&1\\0&0&0&0&-1\\0&0&0&1&-1\end{bmatrix}\quad x=\begin{bmatrix}h_B\\h_C\\h_E\\h_F\\h_G\end{bmatrix}\quad y=\begin{bmatrix}102.644\\99.849\\101.516\\-2.803\\4.691\\-1.135\\-7.478\\-107.337\\-3.799\\-103.534\\-2.033\end{bmatrix}$$

$$y = Ax$$

دستگاه معادلات غیرخطی

- صورت کلی دستگاه معادلات غیر خطی با m معادله و n مجهول به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= y_1 \\
f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= y_2 \\
&\vdots \\
f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= y_m
\end{aligned}
$$

- این دستگاه معادلات شامل m معادله غیر خطی و n متغییر است، که در آن معادلات مستقل از هم می‌باشند.
- اولین سوالی که پیش می آید این است که این دستگاه معادلات را چگونه به فرم ماتریسی بنویسیم؟

دستگاه معادلات غیرخطی

- برای نوشتن دستگاه معادلات غیرخطی به فرم دستگاه معادلات خطی از بسط سری تیلور استفاده می شود.
- همانطور که از بسط سری تیلور به یاد دارید، یک تابع مانند f(x) را می توان حول مقدار x0 به صورت زیر بسط داد:

$$f(x)\Big|_{x=x_0} = f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{'''}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots$$

- که تصویر این تابع در پایه خطی اش به صورت زیر قابل تعریف بود:

$$f(x)\Big|_{x=x_0} = f(x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0}(x-x_0)$$

دستگاه معادلات غیرخطی

- در حالتی که دستگاه معادلات شامل m معادله غیر خطی و n متغییر است، ترم خطی بسط تیلور معادلات فوق به صورت زیر خواهند بود:

$$y_1 \simeq f_1(x_0) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1 - x_0) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_2 - x_0) + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_n - x_0)$$

$$y_2 \simeq f_2(x_0) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1 - x_0) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_2 - x_0) + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_n - x_0)$$

$$\vdots$$

$$y_m \simeq f_m(x_0) + \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_1 - x_0) + \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_2 - x_0) + \ldots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_n - x_0)$$

دستگاه معادلات غیرخطی

- باتوجه به دستگاه معادلات اسلایدهای قبل، دستگاه معادلات فوق را می توان به صورت فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$y = Ax$$

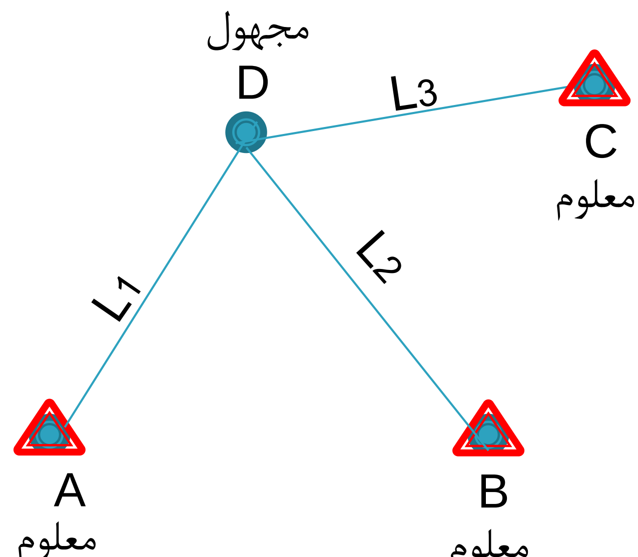
$$\mathrm{y} = \begin{bmatrix} y_1 - f_1(x_0) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} x_0 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} x_0 + \dots \\ y_2 - f_2(x_0) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} x_0 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} x_0 + \dots \\ \vdots \\ y_m - f_m(x_0) + \frac{\partial f_m}{\partial x_1} x_0 + \frac{\partial f_m}{\partial x_2} x_0 + \dots \end{bmatrix} \qquad A = J_{yx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad \mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ماتریس ژاکوبین

دستگاه معادلات غیرخطی

- مثال ۱۳: فرض کنید از روی مختصات نقاط معلوم A ، B و C بخواهیم مختصات نقطه D را محاسبه کنیم. برای این کار طولهای افقی L1 ، L2 و L3 اندازه‌گیری شده است. دستگاه معادلات برای محاسبه مختصات نقطه D را بنویسید.

	x	y
A	1000	1000
B	1200	990
C	1280	1180
L1	180.287 m	
L2	188.668 m	
L3	182.482 m	



دستگاه معادلات غیرخطی

- حل مثال ۱۳: در ابتدا معادلاتی که به کار می روند را نوشته.

$$L_1 = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2}$$
$$L_2 = \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2}$$
$$L_3 = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2}$$

- و سپس مشتق اول آنها را محاسبه می‌کنیم

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_D} = \frac{-(x_A - x_D)}{\sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2}} \quad \frac{\partial L_2}{\partial x_D} = \frac{-(x_B - x_D)}{\sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2}} \quad \frac{\partial L_3}{\partial x_D} = \frac{-(x_C - x_D)}{\sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2}}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial y_D} = \frac{-(y_A - y_D)}{\sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2}} \quad \frac{\partial L_2}{\partial y_D} = \frac{-(y_B - y_D)}{\sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2}} \quad \frac{\partial L_3}{\partial y_D} = \frac{-(y_C - y_D)}{\sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2}}$$

دستگاه معادلات غیرخطی

- ادامه حل مثال ۱۳: فرض کنید مختصات اولیه نقطه D به مقدار ($x_0=1100,\ y_0=1150$) تعیین شده باشد. در مرحله بعد مقدار مشتقات جزئی به ازای مقادیر اولیه محاسبه می شود.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=\frac{\partial L_1}{\partial x_D}=\frac{-\left(x_A-x_D\right)}{L_1}=\frac{-(1000-1100)}{180.287}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}=\frac{\partial L_1}{\partial y_D}=\frac{-\left(y_A-y_D\right)}{L_1}=\frac{-(1000-1150)}{180.287}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}=\frac{\partial L_2}{\partial x_D}=\frac{-\left(x_B-x_D\right)}{L_2}=\frac{-(1200-1100)}{188.668}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}=\frac{\partial L_2}{\partial y_D}=\frac{-\left(y_B-y_D\right)}{L_2}=\frac{-(990-1150)}{188.668}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1}=\frac{\partial L_3}{\partial x_D}=\frac{-\left(x_C-x_D\right)}{L_3}=\frac{-(1280-1100)}{182.482}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2}=\frac{\partial L_3}{\partial y_D}=\frac{-\left(y_C-y_D\right)}{L_3}=\frac{-(1180-1150)}{182.482}$$

دستگاه معادلات غیرخطی

- ادامه حل مثال ۱۳: با توجه به مفروضات اسلایدهای قبل ماتریس A تشکیل داده می‌شود.

$$A=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{100}{180.287} & \frac{150}{180.287} \\ \frac{-100}{188.668} & \frac{160}{188.287} \\ \frac{-180}{182.482} & \frac{-30}{182.482} \end{bmatrix}$$

- همچنین ماتریس مجهولات به صورت زیر است

$$x=\begin{bmatrix} x_D \\ y_D \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات غیرخطی

- ادامه حل مثال ۱۳: با توجه به مفروضات اسلایدهای قبل ماتریس y نیز به صورت زیر تشکیل داده می‌شود.

$$f_1(x_0)=\sqrt{(1000-1100)^2+(1000-1150)^2}=180.278$$

$$f_2(x_0)=\sqrt{(1200-1100)^2+(990-1150)^2}=188.680$$

$$f_3(x_0)=\sqrt{(1280-1100)^2+(1180-1150)^2}=182.483$$

$$y=\begin{bmatrix} L_1-f_1(x_0)+\dfrac{\partial f_1}{\partial x_D}x_0+\dfrac{\partial f_1}{\partial y_D}y_0 \\ L_2-f_2(x_0)+\dfrac{\partial f_2}{\partial x_D}x_0+\dfrac{\partial f_2}{\partial y_D}y_0 \\ L_3-f_3(x_0)+\dfrac{\partial f_3}{\partial x_D}x_0+\dfrac{\partial f_3}{\partial y_D}y_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 180.287-180.278+\dfrac{100}{180.287}1100+\dfrac{150}{180.287}1150 \\ 188.668-188.680+\dfrac{-100}{188.668}1100+\dfrac{160}{188.668}1150 \\ 182.483-182.482+\dfrac{-180}{182.482}1100+\dfrac{-30}{182.482}1150 \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات غیرخطی

- ادامه حل مثال ۱۳: به طور کلی با توجه به مفروضات اسلایدهای قبل ماتریسهای A، x و y به صورت زیر تشکیل داده می‌شوند.

$$A=\begin{bmatrix}0.5547 & 0.832\\ -0.530 & 0.8498\\ -0.9864 & -0.1644\end{bmatrix}\quad x=\begin{bmatrix}x_D\\ y_D\end{bmatrix}\quad \mathrm{y}=\begin{bmatrix}1566.955\\ 392.211\\ -1274.099\end{bmatrix}\quad \begin{cases}0.5547x_D+0.832y_D=1566.955\\ -0.53x_D+0.8498y_D=392.211\\ -0.9864x_D-0.1644y_D=-1274.099\end{cases}$$

- توجه بفرمایید که تمامی محاسبات و ماتریس های فوق برای یک تکرار نوشته شده اند.
- مجهولات به ازای مقادیر اولیه جدید با تکرار محاسبات فوق به دست می آیند.

اندکی سرشکنی

اندکی سرشکنی

- منظور از سرشکنی برآورد مجهولات به عادلانه ترین نحو ممکن
- اگر به خاطر داشته باشید اگر یک کمیت را چندین بار اندازه گیری می کردیم در نهایت میانگین آن مقادیر اندازه گیری شده را به عنوان مقدار برآوردی آن کمیت معرفی می کردیم. میانگین گیری در واقع یک نوع سرشکنی است که توازن بین مشاهدات مختلف را برقرار می کند.
- برای سرشکنی روش‌های مختلفی وجود دارد اما به طور خلاصه در این درس از روش کمترین مربعات و در بین مدلهای کمترین مربعات معمولا از مدل پارامتریک و در بعضی اوقات مدل ترکیبی استفاده می شود.

روش کمترین مربعات

- در سرشکنی کمترین مربعات ابتدا دستگاه معادلاتی که قبلا در مورد آن صحبت کردیم و به فرم زیر آن را می نوشتیم، اصلاح می‌شود.

$$y = Ax$$

- دلیل اصلاح دستگاه معادلات فوق اینست که یک طرف معادله فضای ریاضی و یک طرف دیگر آن فضای فیزیکی است که در واقعیت همچین تعادلی برقرار نیست.

- در سرشکنی به طرف مشاهدات مقدار باقیمانده (V) اضافه می‌شود تا این تعادل معنی دار باشد

$$Ax = y + v$$

روش کمترین مربعات

- روش کمترین مربعات می‌گوید اگر با استفاده از روش زیر مقدار مجهولات برآورد شوند، مقدار باقیمانده ها به کمترین مقدار خود می رسد و مقدار مجهولات نزدیکترین مقدار به مقدار واقعی را دارند.

$$x = (A^T PA)^{-1} A^T Py$$

- که در آن P وزن مشاهدات است. چنانچه وزن همه مشاهدات یکسان باشد آنگاه

$$x = (A^T A)^{-1} A^T y$$

- همچنین پس از برآورد مجهولات، باقیمانده ها از رابطه زیر بدست می‌آیند.

$$v = Ax - y$$

روش کمترین مربعات

دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول

- برای توضیح روش کمترین مربعات به مثال زیر توجه کنید.
- مثال ۱۴: اگر فاصله بین نقاط A و B سه بار اندازه گیری شده باشد، و اندازه ها در دفعه اول تا سوم به ترتیب ۱۰.۰۲، ۱۰.۰۴ و ۱۰.۰۳ متر قرائت شده باشند. آنگاه براساس روش کمترین مربعات مقدار چقدر خواهد بود؟

$$x = (A^T A)^{-1} A^T y$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 10.02 \\ 10.04 \\ 10.03 \end{bmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{[l]}_{X} \Rightarrow X = \underbrace{\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1}}_{\frac{1}{3}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10.02 \\ 10.04 \\ 10.03 \end{bmatrix}}_{10.04+10.02+10.03} \Rightarrow X = \frac{10.04+10.02+10.03}{3} = 10.03$$

براساس روش کمترین مربعات مقدار طول ۱۰.۰۳ خواهد بود. لذا کمترین مربعات همان میانگیری است.

حل دستگاه معادلات خطی

- برای حل دستگاه معادلات خطی همان روش ساده کمترین مربعات مورد استفاده قرار می‌گیرد که در آن پس از تشکیل دستگاه معادلات به فرم ماتریس، مجهولات به صورت زیر برآورد می‌شوند:

$$x = (A^T PA)^{-1} A^T Py$$

- که در آن P وزن مشاهدات است. چنانچه وزن همه مشاهدات یکسان باشد آنگاه

$$x = (A^T A)^{-1} A^T y$$

- همچنین پس از برآورد مجهولات، باقیمانده ها از رابطه زیر بدست می‌آیند.

$$v = Ax - y$$

حل دستگاه معادلات خطی

- مثال ۱۵: مجهولات دستگاه معادلات شبکه ترازیابی ارائه شده در مثال ۱۲ را با روش کمترین مربعات برآورد نمایید.
- همانطور که به خاطر دارید ماتریس های A و Y در این مثال عبارت بودند از:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} y=\begin{bmatrix} 102.644 \\ 99.849 \\ 101.516 \\ -2.803 \\ 4.691 \\ -1.135 \\ -7.478 \\ -107.337 \\ -3.799 \\ -103.534 \\ -2.033 \end{bmatrix}$$

حل دستگاه معادلات خطی

- حل مثال ۱۵: با توجه به روش کمترین مربعات، مجهولات به صورت زیر برآورد می‌شوند.

$$x=(A^T A)^{-1}A^T y$$

$$x=\left(\begin{bmatrix}1&0&0&-1&-1&-1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&-1&-1&-1&0&0\\0&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&-1&-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\-1&0&1&0&0\\-1&1&0&0&0\\-1&0&0&1&0\\0&-1&1&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&-1&0&0&1\\0&0&0&0&-1\\0&0&0&1&-1\end{bmatrix}\right)^{-1}\times\begin{bmatrix}1&0&0&-1&-1&-1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&-1&-1&-1&0&0\\0&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&-1&-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}102.644\\99.849\\101.516\\-2.803\\4.691\\-1.135\\-7.478\\-107.337\\-3.799\\-103.534\\-2.033\end{bmatrix}$$

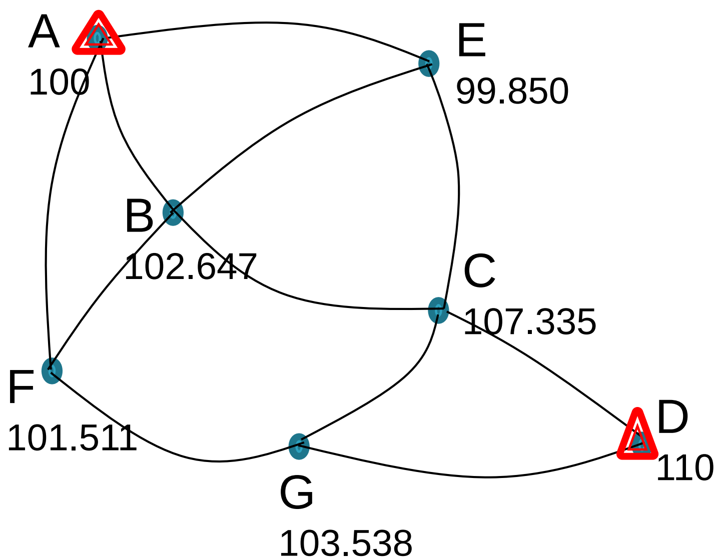
حل دستگاه معادلات خطی

- حل مثال ۱۵: با توجه به روش کمترین مربعات، مجهولات به صورت زیر برآورد می‌شوند.

$$x=(A^TA)^{-1}A^Ty$$

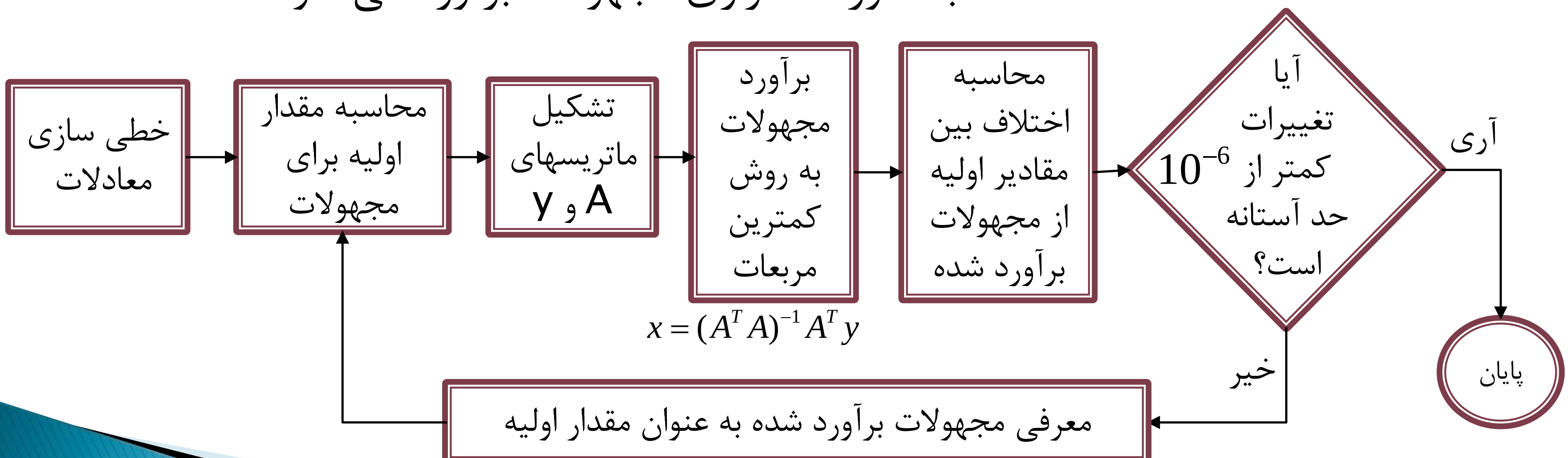
$$x=\begin{bmatrix}h_B\\h_C\\h_E\\h_F\\h_G\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}102.6466\\107.3348\\99.8498\\101.5108\\103.5379\end{bmatrix}$$

$$v=Ax-y=\begin{bmatrix}+0.0026\\+0.0008\\-0.0052\\+0.0062\\-0.0028\\-0.0008\\-0.0070\\+0.0022\\+0.0021\\-0.0039\\+0.0059\end{bmatrix}$$



حل دستگاه معادلات غیرخطی

- تا کنون با روش حل دستگاه معادلات خطی آشنا شدیم. اما برای دستگاه معادلات غیر خطی چکار باید کرد؟
- برای حل دستگاه معادلات غیر خطی پس از تشکیل ماتریس های دستگاه معادلات به صورت تکراری مجهولات برآورد می شوند



حل دستگاه معادلات غیرخطی

- مثال ۱۶: مجهولات دستگاه معادلات مشاهدات طولی ارائه شده در مثال ۱۳ را با روش کمترین مربعات برآورد نمایید.
- همانطور که به خاطر دارید ماتریس های A و Y در این مثال عبارت بودند از:

$$A=\begin{bmatrix}0.5547 & 0.832\\ -0.530 & 0.8498\\ -0.9864 & -0.1644\end{bmatrix}\qquad x=\begin{bmatrix}x_D\\ y_D\end{bmatrix}\qquad \mathrm{y}=\begin{bmatrix}1566.955\\ 392.211\\ -1274.099\end{bmatrix}$$

حل دستگاه معادلات غیرخطی

- حل مثال ۱۶: با توجه به روش کمترین مربعات، مجهولات به صورت زیر برآورد می‌شوند.

$$x = (A^T A)^{-1} A^T y$$

$$x = \left(\begin{bmatrix} 0.5547 & -0.530 & -0.9864 \\ 0.8320 & 0.8498 & -0.1644 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.5547 & 0.832 \\ -0.530 & 0.8498 \\ -0.9864 & -0.1644 \end{bmatrix} \right)^{-1} \times \begin{bmatrix} 0.5547 & -0.530 & -0.9864 \\ 0.8320 & 0.8498 & -0.1644 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1566.955 \\ 392.211 \\ -1274.099 \end{bmatrix}$$

- جواب معادله فوق به صورت زیر بدست می آید

$$x = \begin{bmatrix} 1100.008 \\ 1149.998 \end{bmatrix}$$

- در مرحله اختلاف بین مقادیر برآورد شده و مقادیر اولیه محاسبه می شود

$$dx = \begin{bmatrix} 1100.008 - 1100 \\ 1149.998 - 1150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.008 \\ -0.002 \end{bmatrix}$$

حل دستگاه معادلات غیرخطی

- حل مثال ۱۶: اگر حدآستانه را ۰.۰۰۰۰۰۰۱ را در نظر بگیریم، بایستی محاسبات تکرار شوند. در تکرار بعدی به جای مقادیر اولیه از مقادیر برآورده شده مجهولات اسلاید قبل استفاده می‌شود.
- با توجه به روش کمترین مربعات، مجهولات به صورت زیر برآورد می‌شوند.

$$x = \begin{bmatrix} 1100.008 \\ 1149.998 \end{bmatrix}$$

- در مرحله اختلاف بین مقادیر برآورد شده و مقادیر اولیه محاسبه می شود و می‌بینیم که تغییر معناداری در مقادیر اولیه بوجود نیامده است. لذا جواب فوق به عنوان جواب نهایی سرشکنی انتخاب می‌شود.

تمرین شماره ۳- قسمت چهارم

x	y
2	-1.932
3	0.076
6	6.074
11	16.039
13	20.066
17	28.017
19	32.071
25	44.003

- با استفاده از سرشکنی به مقادیر زیر یک خط برازش دهید. $y = ax + b$
- ماتریس های مربوط به دستگاه معادلات را نیز ارائه دهید.
- نتیجه این فعالیت را تا هفته آینده به آدرس noorollah.tatar@gmail.com با موضوع "تمرین شماره ۳ درس فتوگرامتری تحلیلی- قسمت چهارم" ایمیل کنید.

تمرین شماره ۳- قسمت چهارم

- به جای تمرین ارائه شده در اسلاید قبل می‌توانید تمرین زیر را تحویل دهید.
- با توجه به مثال شماره ۱۵، چنانچه مشاهدات مربوط به نقطه B حذف شود، دستگاه معادلات را تشکیل داده و ارتفاع سایر نقاط را بیابید. ارائه ریز جزئیات محاسبات ضروری است (به صورت دستی هم می‌توان آن را انجام داد).
- نکته: در این حالت ۷ معادله و ۴ مجهول خواهیم داشت.
- نتیجه این فعالیت را تا ده روز دیگر به آدرس noorollah.tatar@gmail.com با موضوع "تمرین شماره ۳ درس فتوگرامتری تحلیلی- قسمت چهارم" ایمیل کنید.

سوال؟

منابع این فصل

- صدقی زاده. دستگاه معادلات جبری خطی. دپارتمان سیستم ها و کنترل، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی.
- دکتر روح اله کریمی. جزوه درس سرشکنی. گروه مهندسی نقشه برداری، دانشگاه تفرش.