دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول

Jundi Shapur

University of Technology-Dezful

فتوگرامتری تحلیلی

فصل چهارم: تبدیلات و توجیهات

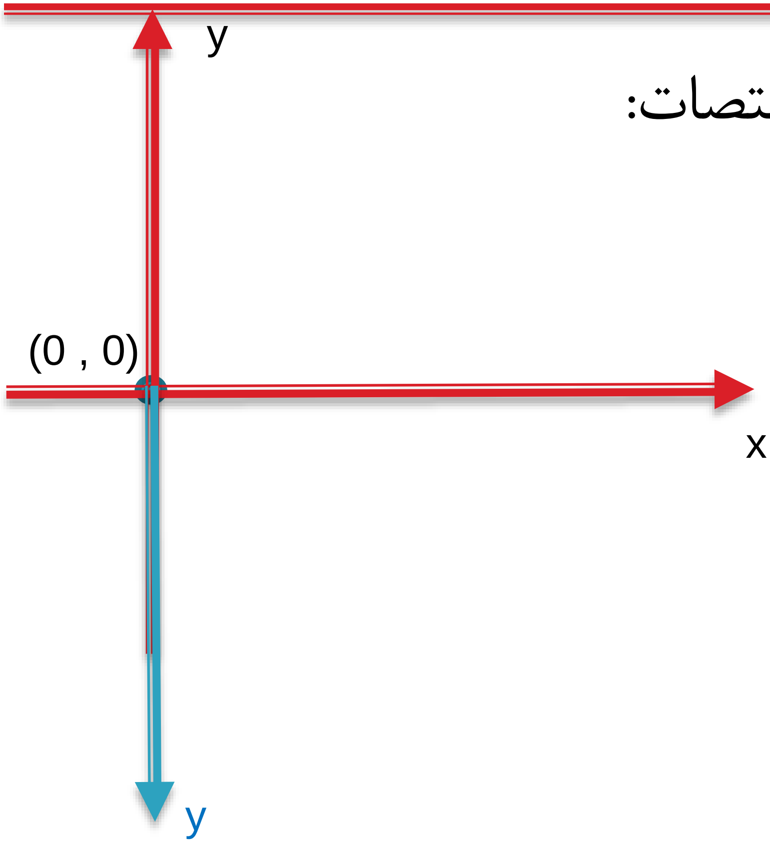
Nurollah Tatar

Analytical Photogrammetry

2022

فهرست مطالب

سیستم‌های مختصات دوبعدی فتوگرامتری



- برای تعریف یک سیستم مختصات:

1. ابتدا تعریف مبدا
2. سپس توجیه محورها

- قرمز: سیستم دست راستی
- آبی: سیستم دست چپی

سیستم‌های مختصات دوبعدی فتوگرامتری

- سیستم مختصات‌های اندازه‌گیری بر روی عکس:

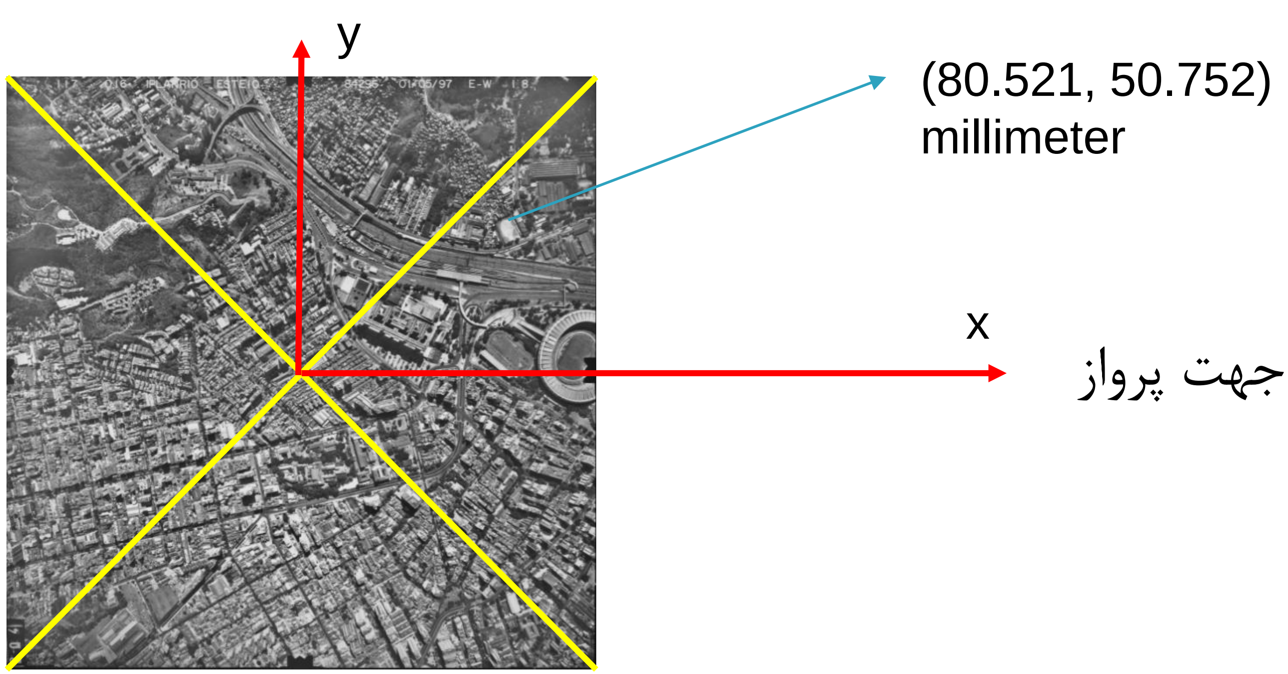
1. سیستم مختصات کمکی عکسی
2. سیستم مختصات اصلی عکسی/ تصویری/ علائم تصویری یا فیدوشل مارکها
3. سیستم مختصات مرکز تصویر
4. سیستم مختصات دستگاهی (کامپراتور یا دیجیتال)

سیستم‌های مختصات دوبعدی فتوگرامتری

- سیستم مختصات عکسی/ علائم کناری:
- اگر فیدوشل مارکهای متقابل را به یکدیگر وصل نماییم، همدیگر را در یک نقطه قطع خواهند نمود که مبدا سیستم مختصات عکسی خواهد بود.
- همچنین جهت توجیه محور x در امتداد پرواز و محور y عمود بر آن و به سمت بالا می باشد.
- واحد اندازه گیری معمولا میلی متر و مختصات نقطه به صورت دوبعدی (x,y) خواهد بود.

سیستم‌های مختصات دوبعدی فتوگرامتری

- سیستم مختصات عکسی/ علائم کناری:



سیستم‌های مختصات دوبعدی فتوگرامتری

- سیستم مختصات تصویری (دیجیتال):
- مبدا سیستم مختصات منطبق بر گوشه بالای (معمولاً) تصویر می باشد.
- همچنین جهت توجیه محور x و y در امتداد اولین سطر و ستون تصویر است.
- واحد اندازه‌گیری معمولا پیکسل است.
- این سیستم مختصات یک سیستم مختصات دست چپی است.

سیستم‌های مختصات دوبعدی فتوگرامتری

- سیستم مختصات تصویری (رقومی):

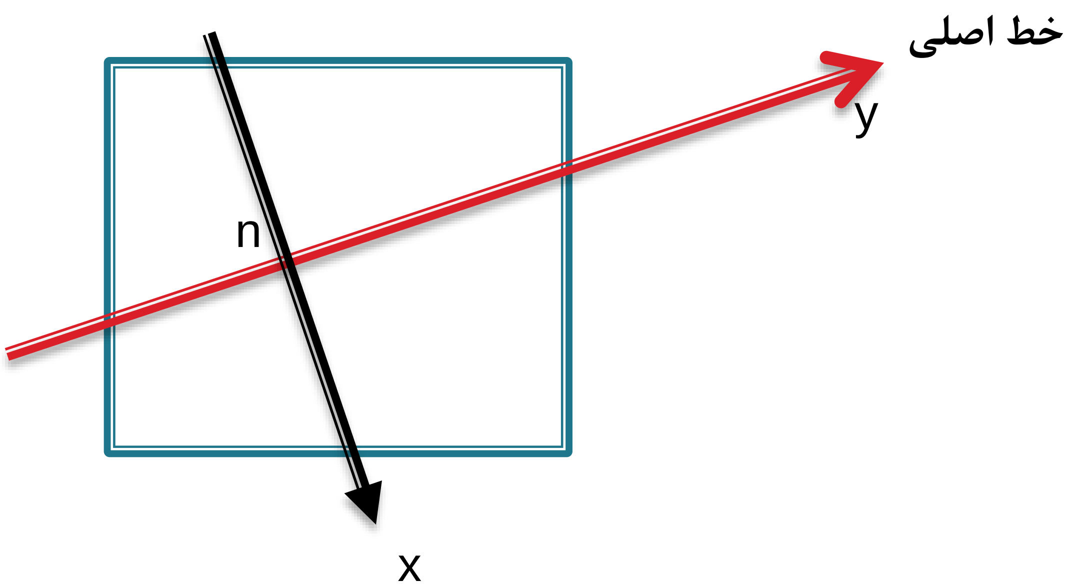
مبدا سیستم مختصات
تصویر رقومی

سیستم‌های مختصات دوبعدی فتوگرامتری

- سیستم مختصات کمکی عکسی:
- مبدا سیستم مختصات کمکی عکسی منطبق بر نقطه نادیر n
- توجیه محور y بر روی خط اصلی محور x عمود بر آن می باشد. دوران های مورد استفاده در این سیستم مختصات تیلت، آزیموت و سوینگ $(t \quad \alpha \quad s)$ هستند.
- برای نقطه i (ایزوسنتر) نیز امکان تعریف چنین سیستمی وجود دارد.

سیستم‌های مختصات دوبعدی فتوگرامتری

- سیستم مختصات کمکی عکسی:



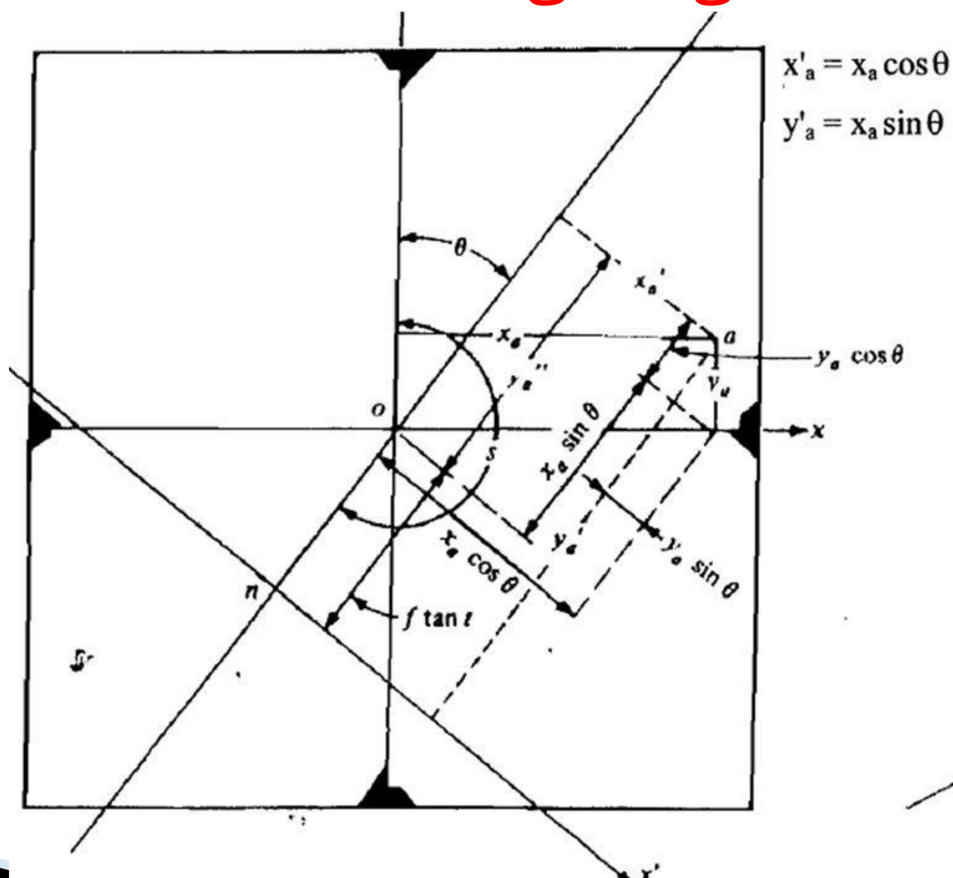
سیستم‌های مختصات دوبعدی فتوگرامتری

دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول

- سیستم مختصات کمکی عکسی:

$$x'_a = x_a \cos\theta - y_a \sin\theta$$

$$y'_a = x_a \sin\theta + y_a \cos\theta + f \tan t$$

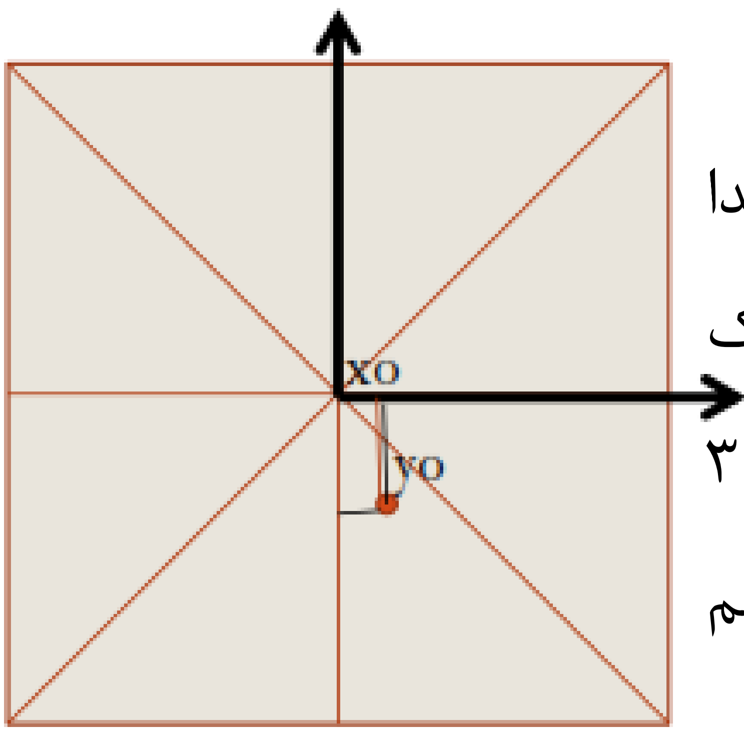


سیستم‌های مختصات دوبعدی فتوگرامتری

- سیستم مختصات مرکز عکس/ تصویر:
- در حالت ایده آل محل تقاطع تقاطع فیدوشل مارکها و نقطه اصلی باید یکسان باشد.
- در واقعیت به دلیل وجود اعوجاجات برهم منطبق نیستند.
- این مقدار اختلاف را با (x_0, y_0) نشان میدهند.
- در این خصوص در زمان بررسی و معرفی توجیه داخلی توضیح بیشتری داده خواهد شد.

سیستم‌های مختصات دوبعدی فتوگرامتری

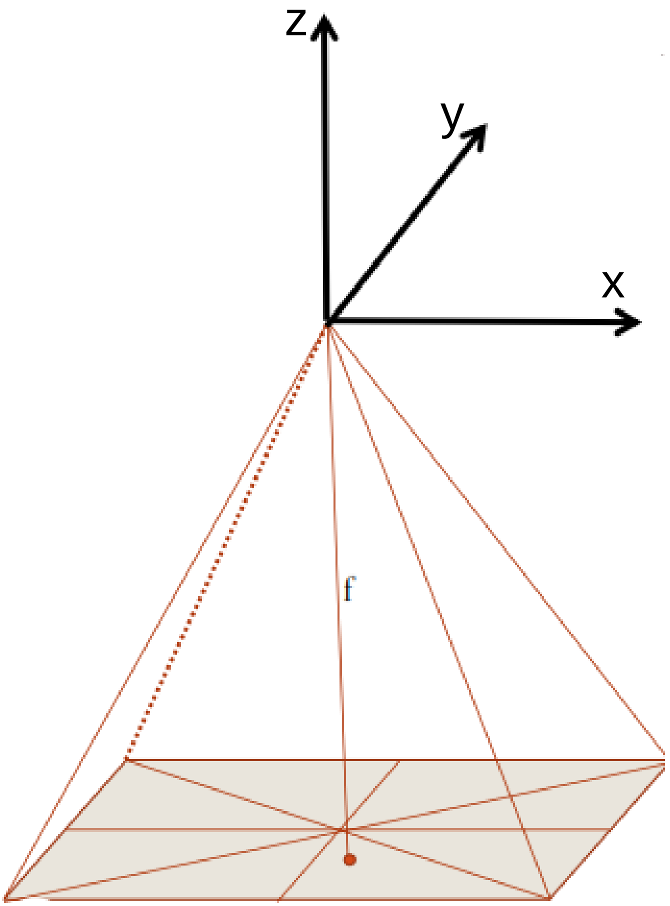
- سیستم مختصات مرکز عکس/ تصویر:
- مبدا این سیستم مختصات به مبدا سیستم مختصات عکسی نزدیک است. شاید در عمل ۲۰ الی ۳۰ پیکسل (یا چند ده میکرون) با هم اختلاف داشته باشند.



سیستم‌های مختصات دوبعدی فتوگرامتری

- سیستم مختصات مرکز عکسی/ تصویری:
- مبدا سیستم مختصات عکسی منطبق بر مرکز عدسی
- توجیه محور x در امتداد پرواز و y عمود برآن و دست راستی می باشد (مشابه سیستم حالت علائم کناری)
- محور z در امتداد محور اپتیکی دوربین است. (مقدار این مولفه برای تمام نقاط روی عکس برابر با f- می باشد).
- مختصات هر نقطه در آن برابراست با: $\left(x-x_0 \quad y-y_0 \quad -f\right)$

سیستم‌های مختصات دوبعدی فتوگرامتری



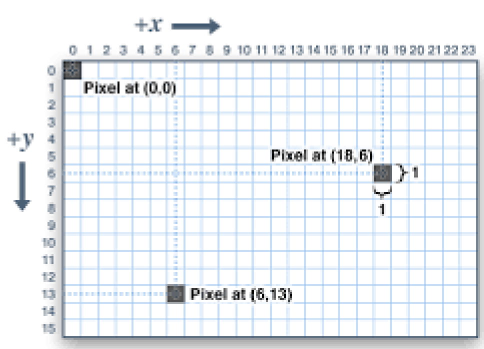
- سیستم مختصات مرکز عکسی/ تصویری:
- تعیین مختصات در این سیستم بیانگر توجیه پرتوهای ورودی نسبت به محور اپتیکی است (توجیه داخلی)

سیستم‌های مختصات دوبعدی فتوگرامتری

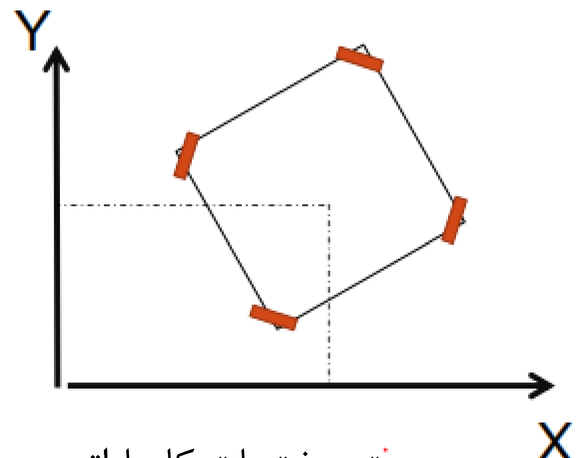
- سیستم مختصات دستگاهی:
- اندازه‌گیری بر روی یک عکس از طریق یک سیستم واسط صورت گرفته و سپس با یک تبدیل ریاضی به سیستم مختصات اصلی عکسی یا سیستم مختصات مرکز تصویر منتقل می‌گردد.
- لذا این سیستم‌های دستگاهی نیز برای خود دارای سیستم مختصات اختصاصی می‌باشند.

سیستم‌های مختصات دوبعدی فتوگرامتری

- سیستم مختصات دستگاهی:
- در فتوگرامتری قدیم از کامپاراتورها
- در فتوگرامتری رقومی از کامپیوتر



سیستم مختصات کامپیوتر



سیستم مختصات کامپاراتور

سیستم‌های مختصات دوبعدی فتوگرامتری

- خلاصه سیستم‌های مختصات:
- اندازه‌گیری در سیستم مختصات دستگاهی انجام می‌گیرد.
- مختصات اندازه‌گیری شده مرحله قبل به سیستم مختصات علائم کناری انتقال می‌یابند.
- و در نهایت مختصات آنها به سیستم مختصات مرکز عکسی/تصویری انتقال می‌یابند. در فتوگرامتری به دنبال تعیین مختصات عوارض در سیستم مختصات مرکز عکسی هستیم.

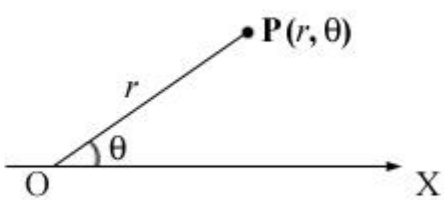
Other coordinate systems

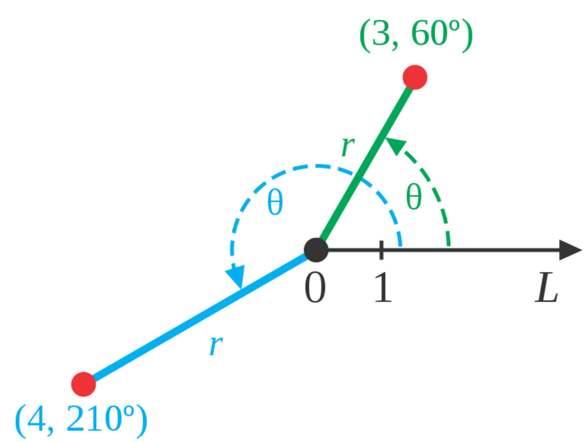
سایر سیستم‌های مختصات

- طبقه بندی سیستم های مختصات:
- **سیستم مختصات قائم الزاویه:** موقعیت نقاط یا اشیاء براساس فاصله از محورهای سیستم مختصات بیان می‌شوند.
- **سیستم مختصات منحنی الخط:** موقعیت نقاط یا اشیاء براساس زوایایی که با امتدادها یا صفحات معلوم می‌سازند، بیان می‌شوند.

سایر سیستم‌های مختصات

- سیستم مختصات قطبی:
- یک سیستم مختصات دوبعدی است که در آن مکان هر نقطه، با فاصله آن تا مرکز مختصات (r) و زاویه بین خط رسم‌شده از مرکز به آن نقطه و محور طول (θ) مشخص می‌شود.



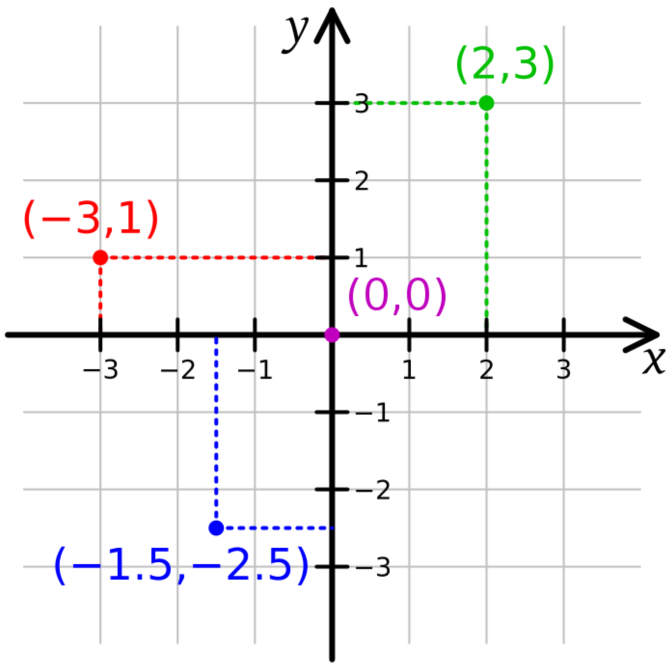


سایر سیستم‌های مختصات

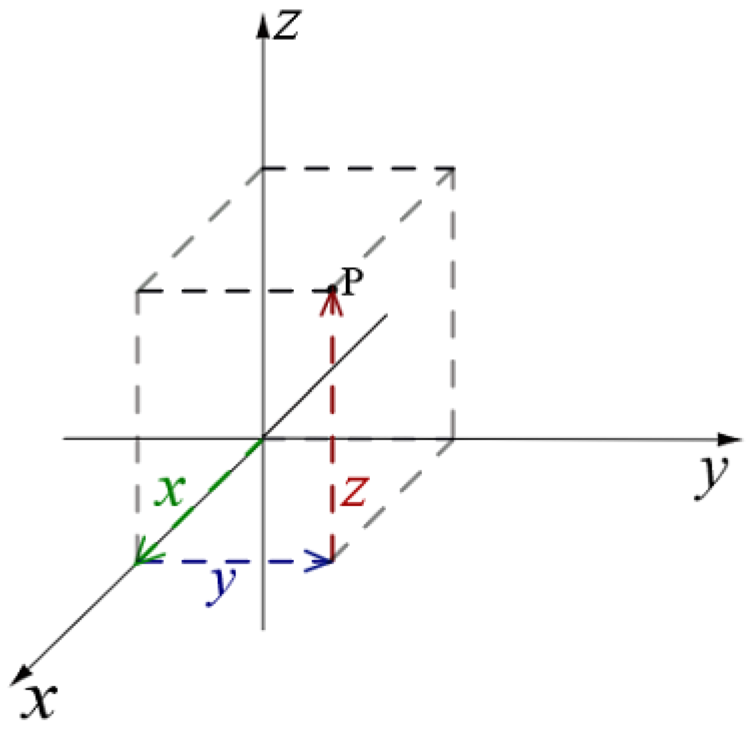
- سیستم مختصات دکارتی (کارتزین):
- در هندسه، به نمایش هر نقطه از صفحه با دو عدد (یک زوج مرتب) گفته می‌شود. این دو عدد را معمولاً به نام‌های مختصه X و مختصه Y می‌خوانند.
- در این سیستم مختصات محورهای X و Y برهم عمودند، از این رو به آن سیستم محورهای متعامد نیز گفته می‌شود.

سایر سیستم‌های مختصات

- سیستم مختصات دکارتی (کارتزین):



کارتزین دو بعدی



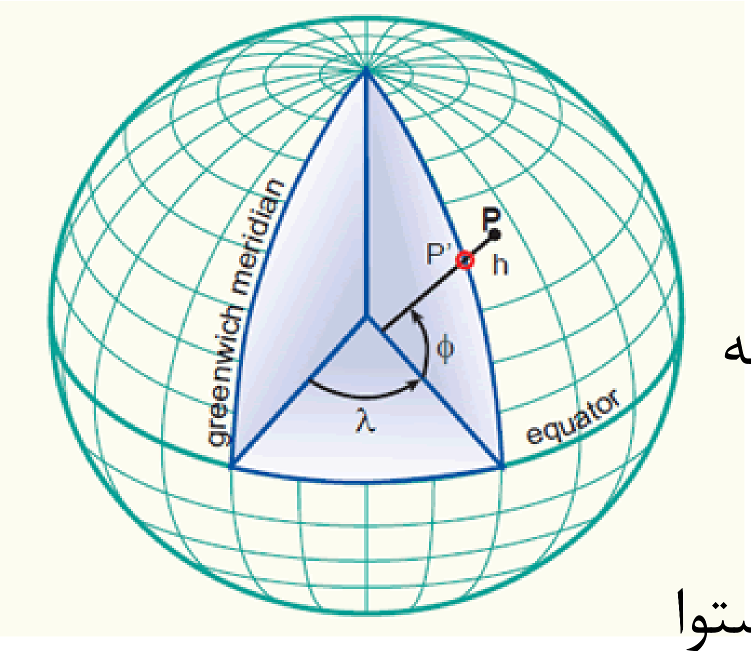
کارتزین سه بعدی

سایر سیستم‌های مختصات

- سیستم مختصات جغرافیایی:
- یک دستگاه مختصات است که با آن می‌توان مکان هر نقطه‌ای بر روی زمین را مشخص کرد.
- در این سیستم مختصات هر موقعیت با طول و عرض جغرافیایی (از جنس زاویه) و یک ارتفاع (فاصله از سطح مشخص) بیان می‌شود.
- طول و عرض جغرافیایی را به ترتیب با (λ, φ) نشان می دهند.

سایر سیستم‌های مختصات

- سیستم مختصات جغرافیایی:



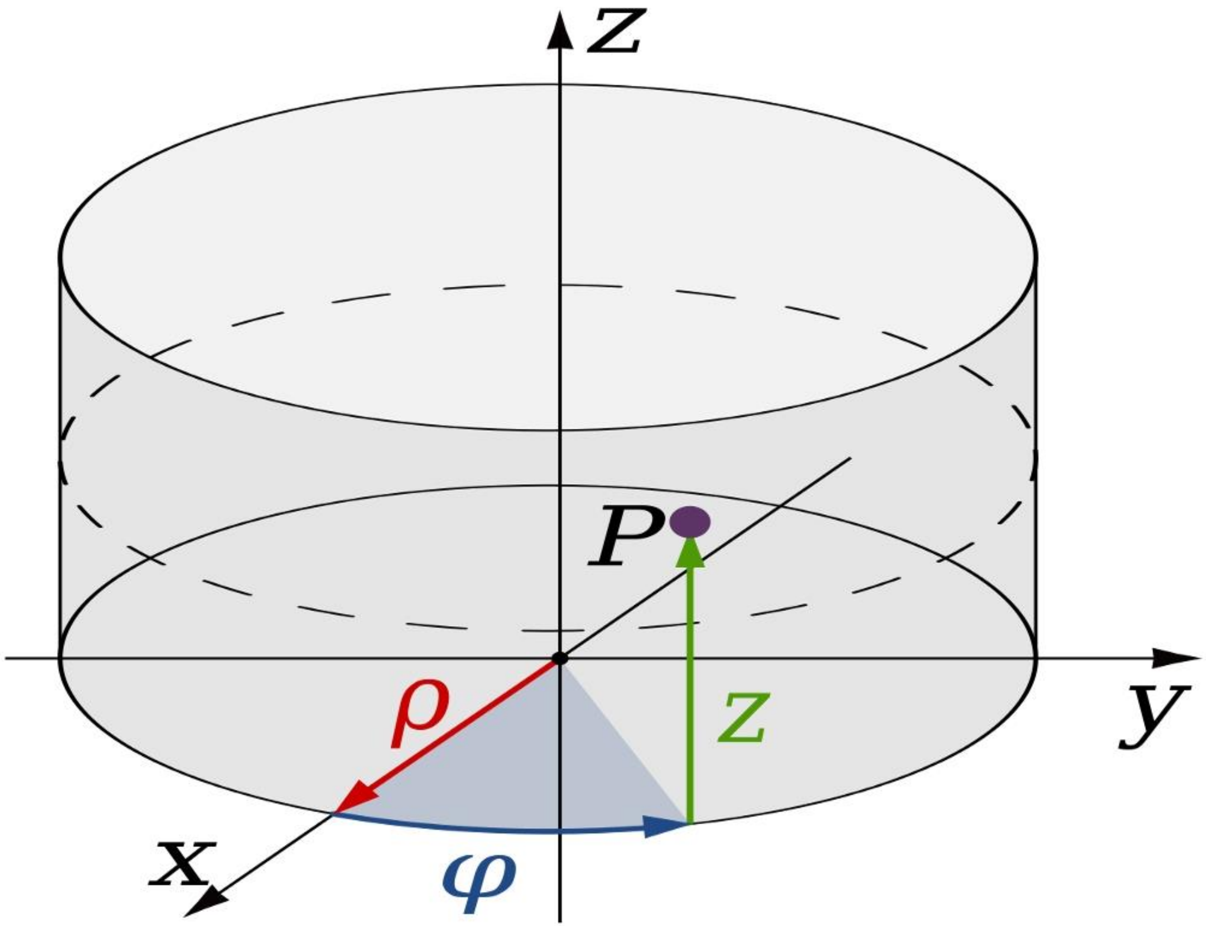
- مبدا: مرکز ثقل زمین
- طول جغرافیایی: زاویه بین نصف النهار گرینویچ تا نصف النهار نقطه
- عرض جغرافیایی: زاویه بین بردار نرمال گذرنده از نقطه و صفحه استوا

سایر سیستم‌های مختصات

- سیستم مختصات استوانه ای:
- مختصات استوانه‌ای یکی از شیوه‌های نمایش یک نقطه در حالت سه بعدی است.
- از روابط بیان شده در مختصات قطبی برای بیان مختصات استوانه‌ای استفاده می‌شود.
- در مقایسه با مختصات قطبی، تنها مختصات Z به این سیستم مختصات اضافه می‌گردد.

سایر سیستم‌های مختصات

- سیستم مختصات استوانه ای:

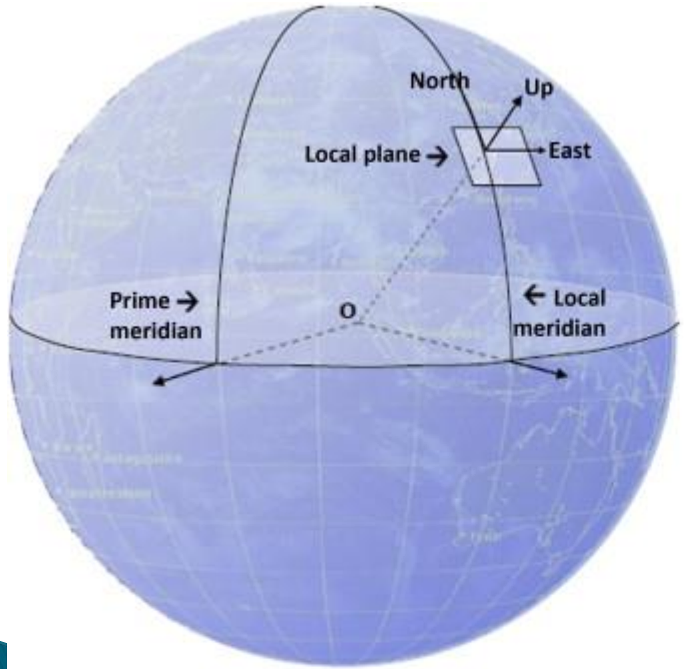


سایر سیستم‌های مختصات

- سیستم مختصات مورد استفاده در فتوگرامتری:
- سیستم مختصات سه بعدی محلی
- سیستم مختصات سه بعدی جهانی
  - مانند WGS84
- سیستم مختصات سه بعدی مدلی
- سیستم مختصات سیستم تصویر
  - مانند UTM

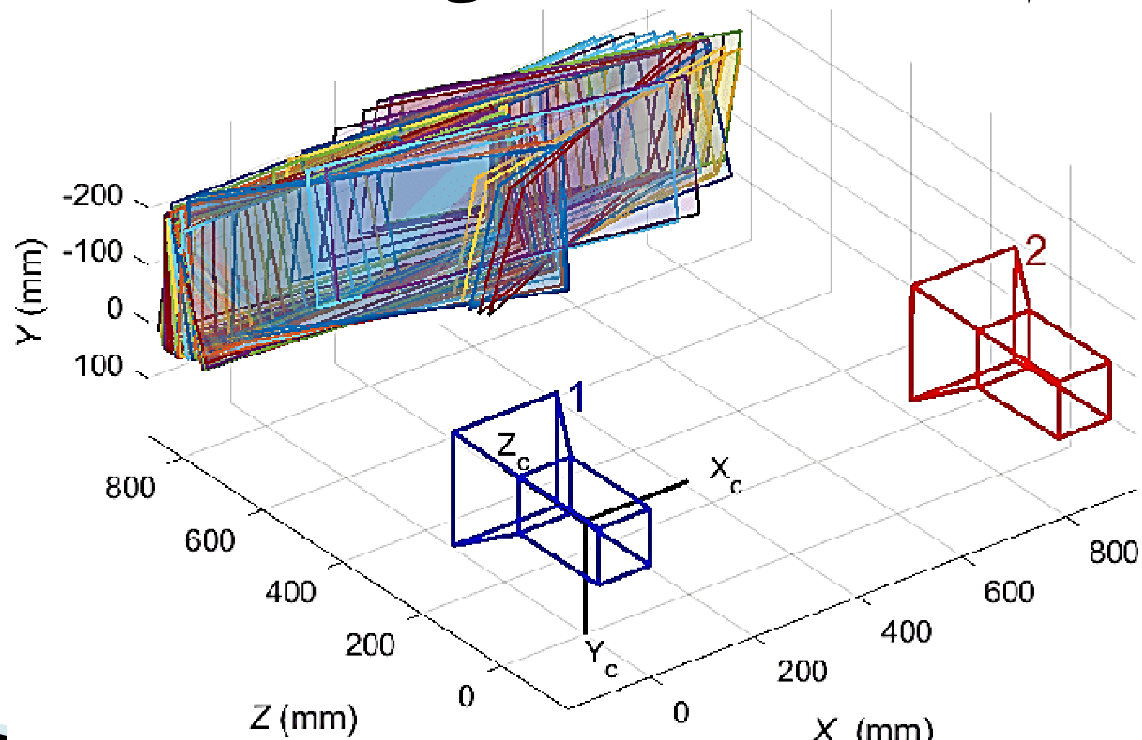
سایر سیستم‌های مختصات

- سیستم مختصات مورد استفاده در فتوگرامتری:
  - سیستم مختصات سه بعدی محلی
  - سیستم مختصات سه بعدی جهانی
    - مانند WGS84



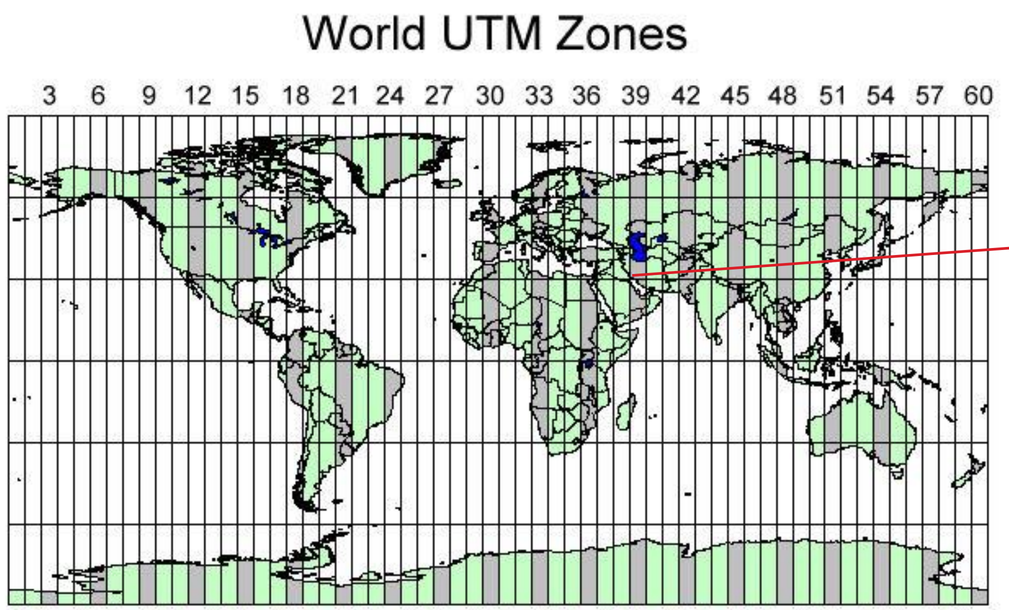
سایر سیستم‌های مختصات

- سیستم مختصات مورد استفاده در فتوگرامتری:
- سیستم مختصات سه بعدی مدلی



سایر سیستم‌های مختصات

- سیستم مختصات مورد استفاده در فتوگرامتری:
- سیستم مختصات سیستم تصویر
- مانند UTM



Zone 39S
E: 257626.0
N: 3585818.0

Transformations

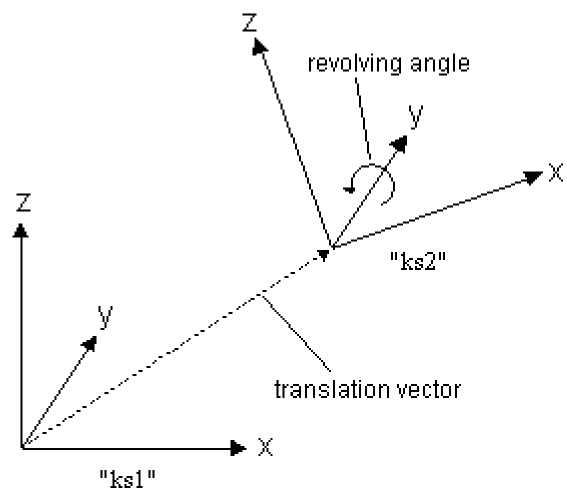
تبدیلات بین سیستمهای مختصات

- منظور از تبدیلات، فرآیندی است که با آن مختصات نقاط از یک سیستم مختصات به سیستم مختصات دیگر بدست می‌آیند.
- به طور مثال اگر مختصات یک نقطه در سیستم مختصات دستگاهی (x, y) باشد؛ آنگاه همین نقطه در سیستم مختصات تصویری (r, c) چقدر خواهد بود.
- در ادامه ابتدا تبدیلات دوبعدی به دو بعدی ارائه می‌شوند.

تبدیلات

- تبدیل بین دو سیستم مختصات عبارتست از جابجایی، دوران و مقیاس بین مختصات آنها.

Transformation = translation + rotation + scale



تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- برای انتقال مختصات از یک سیستم مختصات دو بعدی به یک سیستم مختصات دوبعدی دیگر مدلهای ریاضیاتی متعددی وجود دارد. به طور خلاصه این مدلها عبارتند از:

1. مدل متشابه
2. مدل افاین
3. مدل پروژکتیو
4. چند جمله ای‌ها

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- مدل متشابه شامل یک زاویه دوران، دو جابجایی و یک مقیاس است (چهار پارامتر).
- مدل افاین علاوه بر پارامترهای مدل متشابه شامل یک زاویه عدم تعامد و یک پارامتر مقیاس است (شش پارامتر).
- مدل پروژکتیو نیز شامل پارامترهای افاین و دو پارامتر مربوط به پرسپکتیویتی است (هشت پارامتر).
- در ادامه ابتدا دوران و سپس جابجایی مدل متشابه ارائه می‌شود.

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- دوران:

$$x = \overline{OA} = \overline{OP}\cos(\theta+\phi)$$

$$y = \overline{AP} = \overline{OP}\sin(\theta+\phi)$$

$$\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$$

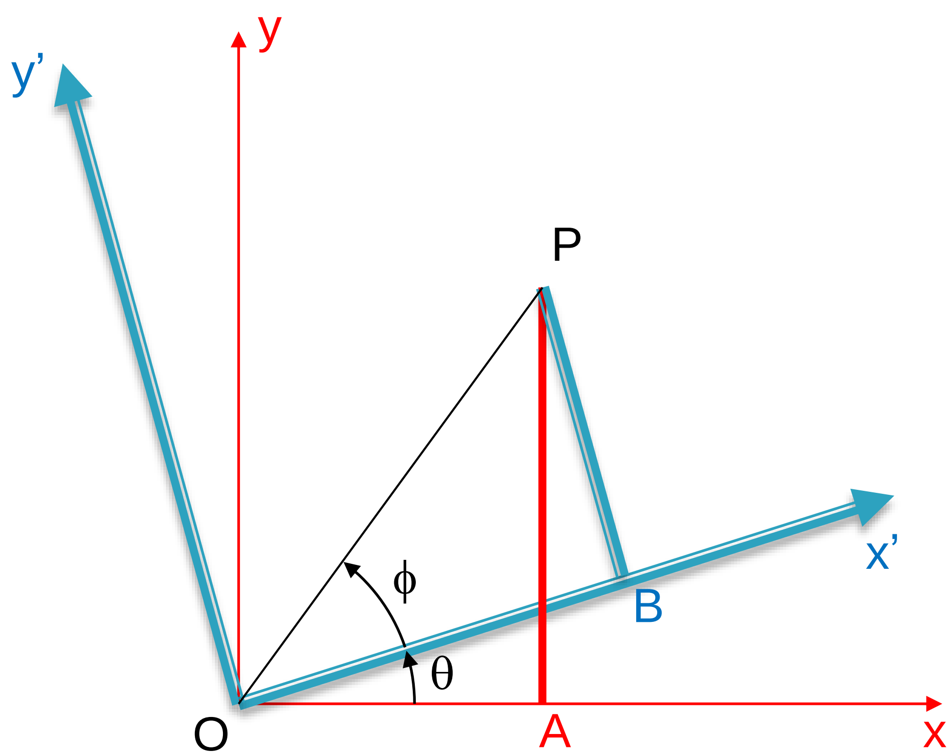
$$\sin(\theta+\phi) = \cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi$$

$$x = \underbrace{\overline{OP}\cos\phi}_{x'}\cos\theta - \underbrace{\overline{OP}\sin\phi}_{y'}\sin\theta$$

$$= x'\cos\theta - y'\sin\theta$$

Similarly, $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$

So $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

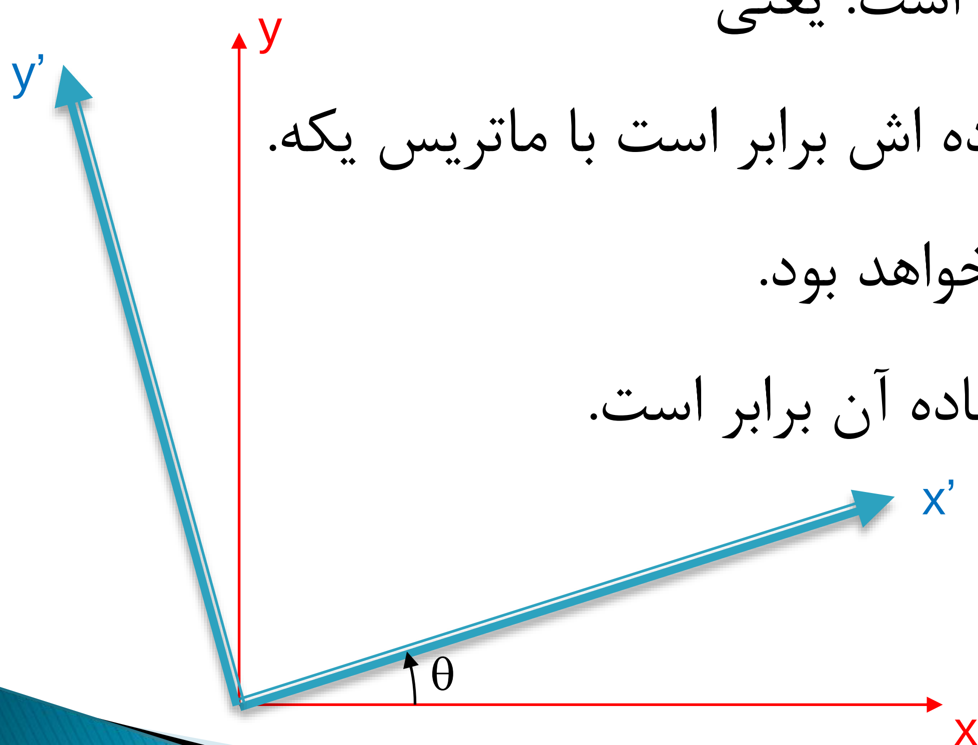


تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- دوران:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{R}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

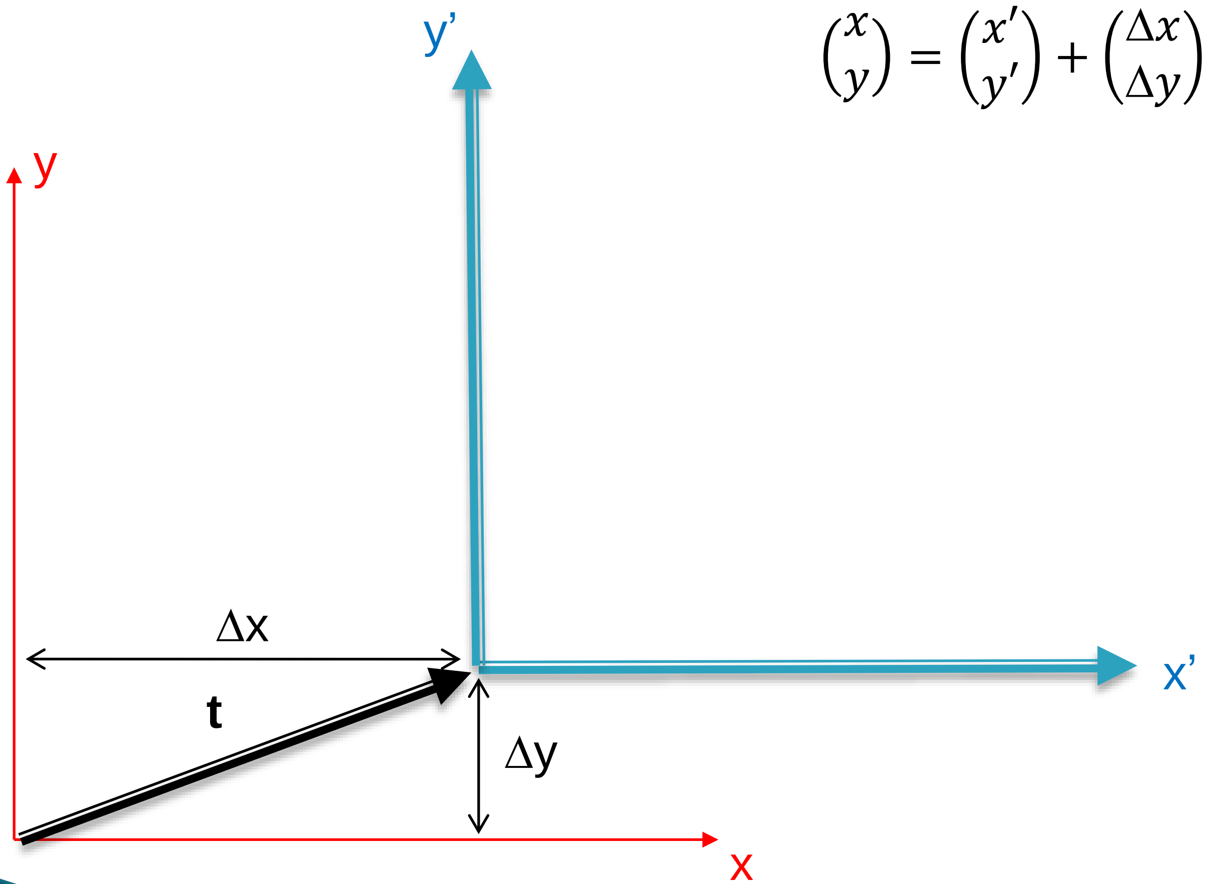
- R یک ماتریس متعامد است. یعنی
- ضرب R در ترانهاده اش برابر است با ماتریس یکه. **$RR^T = I$**
- دترمینان R یک خواهد بود. **$|R| = 1$**
- معکوس R با ترانهاده آن برابر است. **$R^{-1} = R^T$**



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

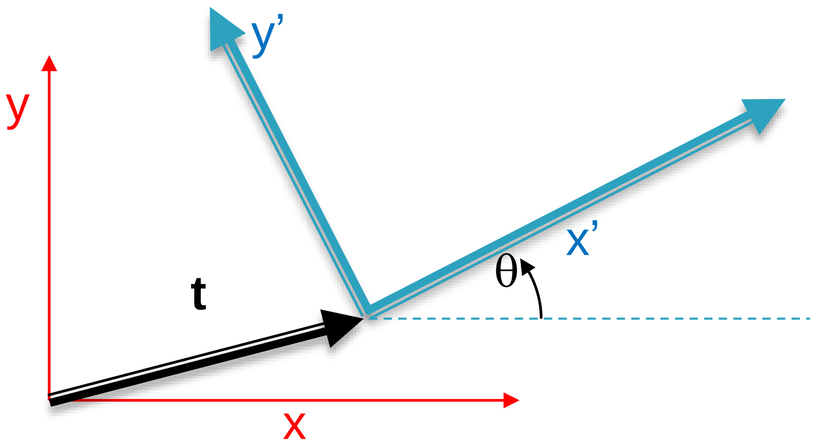
تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- جابجایی: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$



تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- انتقال



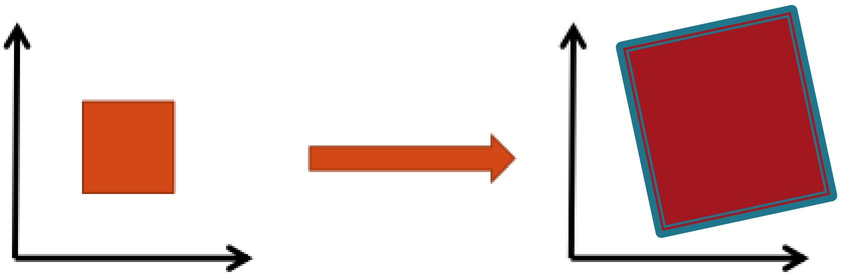
$$\text{Rotation}\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\text{translation}\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

$$\text{Tranformation}\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- انتقال (مدل متشابه یا conformal):
- تغییر شکل نداریم.
- زوایا حفظ می شوند.
- ممکن است تغییر مقیاس داشته باشیم.
- ۴ پارمتر مجهول دارد.



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- انتقال (مدل متشابه یا conformal):
- معادلات متشابه را می‌توان به فرم ریاضیاتی دیگری نوشت که به آن فرم پارامتریک می‌گویند.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x = ax' + by' + c \\ y = -bx' + ay' + d \end{array}$$

- که در آن

$$a = \lambda \cos\theta$$

$$b = -\lambda \sin\theta$$

$$c = x_0$$

$$d = y_0$$

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- انتقال (مدل متشابه یا conformal):
- نحوه محاسبه مقیاس، جابجایی و دوران از روی ضرایب فرم پارامتریک:

مقیاس $\lambda = \sqrt{a^2 + b^2}$

دوران $\theta = \tan^{-1}(-\frac{b}{a})$

جابجایی در راستای x $x_0 = c$

جابجایی در راستای y $y_0 = d$

مثال

- مثال ۱: در صورتی که دوران بین دو سیستم مختصات ۵ درجه، جابه جایی در راستای محور x و y به ترتیب ۱۲۵ و ۱۳۰ میلیمتر باشد. پارامترهای مدل متشابه را محاسبه کنید.

- پاسخ: پارامترهای مدل متشابه عبارتند از

$$a = \lambda \cos\theta = 1 \times \cos 5 = 0.9962$$
$$b = -\lambda \sin\theta = -1 \times \sin 5 = -0.0872$$
$$c = x_0 = 125$$
$$d = y_0 = 130$$

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- انتقال (مدل افاین یا affine):
- تغییر مقیاس در دو جهت یکسان نیست ولی نسبت آنها برای تمامی نقاط ثابت است.
- محورهای مختصات متعامد نیستند.
- خطوط موازی، موازی باقی می‌مانند.
- ۶ پارمتر مجهول دارد.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\varepsilon \\ 0 & \cos\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- انتقال (مدل افاین یا affine):
- مشابه معادلات متشابه، معادلات افاین را هم می‌توان به فرم ریاضیاتی دیگری نوشت که به آن فرم پارامتریک می‌گویند.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\varepsilon \\ 0 & \cos\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

- و به طور خلاصه

$$x = a_1 x' + a_2 y' + a_3$$
$$y = b_1 x' + b_2 y' + b_3$$

مثال

- مثال ۲: باتوجه به مفروضات مثال ۱، در صورتی که مقیاس در جهت x و y به ترتیب ۰.۹۵ و ۱.۰۳ باشد و حدود ۰.۵ درجه عدم تعامد داشته باشیم. پارامترهای مدل افاین را برآورد کنید.

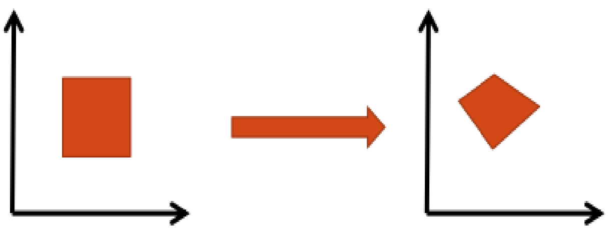
$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\varepsilon \\ 0 & \cos\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin 0.5 \\ 0 & \cos 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.95 & 0 \\ 0 & 1.03 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 5 & -\sin 5 \\ \sin 5 & \cos 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9472 & -0.0738 \\ 0.0898 & 1.0260 \end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = 0.9472 \quad a_2 = -0.0738 \quad b_1 = 0.0898 \quad b_2 = 1.0260$$

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 125 \\ b_3 = 130 \end{cases}$$

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- انتقال (مدل پروژکتیو یا projective):
- تغییر مقیاس در دو جهت یکسان نیست. نسبت آنها نیز ثابت باقی نمی‌ماند.
- محورهای مختصات متعامد نیستند.
- خطوط موازی، موازی نخواهند بود.
- ۸ پارامتر مجهول دارد.



$$x = \frac{a_1 x' + a_2 y' + a_3}{c_1 x' + c_2 y' + 1}$$

$$y = \frac{b_1 x' + b_2 y' + b_3}{c_1 x' + c_2 y' + 1}$$

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- تبدیلات چند جمله ای:
- علاوه بر تبدیلات ارائه شده در اسلایدهای قبل، یکسری تبدیلات چندجمله ای وجود دارد که پیچیدگی‌های بیشتری را مد نظر قرار می‌دهند.

$$x = a_0 + a_1 x' + a_2 y' + a_3 x'^2 + a_4 y'^2 + a_5 x' y' + \ldots$$
$$y = b_0 + b_1 x' + b_2 y' + b_3 x'^2 + b_4 y'^2 + b_5 x' y' + \ldots$$

- مهمترین ضعف این روش یافتن پارامترهای بهینه است.

مثال

• مثال ۳) پارامترهای مدل متشابه، افاین و پروژکتیو برای تبدیل مختصات از یک سیستم مختصات به سیستم مختصات دیگر محاسبه شده است. با استفاده از این مدلها مختصات نقاط زیر را در سیستم مختصات دیگر بیابید.

$$1.\ Conformal: \quad a = 1.0 \quad b = -0.2 \quad c = 130.1 \quad d = 130$$

$$2.\ Affine: \left| \begin{array}{lll} a_1 = 0.94 & a_2 = -0.01 & a_3 = 126 \\ b_1 = 0.05 & b_2 = 1.054 & b_3 = 128.1 \end{array} \right.$$

$$3.\ \text{Projective}: \left| \begin{array}{lll} a_1 = 0.94 & a_2 = -0.01 & a_3 = 126 \\ b_1 = 0.05 & b_2 = 1.054 & b_3 = 128.1 \\ c_1 = 0.003 & c_2 = -0.045 & \end{array} \right.$$

شماره نقطه	مختصات نقطه	
	x (mm)	y (mm)
1	113.02	0.002
2	-112.99	112.99
3	113.01	-113.01

مثال

$1.\ Conformal: \quad a=1.0 \quad b=-0.2 \quad c=130.1 \quad d=130$

شماره نقطه	مختصات نقطه	
	x (mm)	y (mm)
1	113.02	0.002
2	-112.99	112.99
3	113.01	-113.01

- حل مثال ۳)
- انتقال با مدل متشابه

$$Point\,1: \begin{array}{l} x_{new}=ax+by+c \\ y_{new}=-bx+ay+d \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_{new}=1\times113.02-0.2\times0.002+130.1=243.1196 \\ y_{new}=0.2\times113.02+1\times0.002+130=152.6060 \end{array}$$

$$Point\,2: \begin{array}{l} x_{new}=ax+by+c \\ y_{new}=-bx+ay+d \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_{new}=-1\times112.99-0.2\times112.99+130.1=-5.488 \\ y_{new}=-0.2\times112.99+1\times112.99+130=220.3920 \end{array}$$

$$Point\,3: \begin{array}{l} x_{new}=ax+by+c \\ y_{new}=-bx+ay+d \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_{new}=1\times113.01+0.2\times113.01+130.1=265.712 \\ y_{new}=0.2\times113.01-1\times113.01+130=39.5920 \end{array}$$

مثال

$$2.\ Affine: \left| \begin{array}{lll} a_1 = 0.94 & a_2 = -0.01 & a_3 = 126 \\ b_1 = 0.05 & b_2 = 1.054 & b_3 = 128.1 \end{array} \right.$$

- حل مثال ۳)
- انتقال با مدل افاین

شماره نقطه	مختصات نقطه	
	x (mm)	y (mm)
1	113.02	0.002
2	-112.99	112.99
3	113.01	-113.01

$$Point\,1: \begin{array}{l} x_{new} = a_1 x + a_2 y + a_3 \\ y_{new} = b_1 x + b_2 y + b_3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_{new} = 0.94 \times 113.02 - 0.01 \times 0.002 + 126 = 232.2388 \\ y_{new} = 0.05 \times 113.02 + 1.054 \times 0.002 + 128.1 = 133.7531 \end{array}$$

$$Point\,2: \begin{array}{l} x_{new} = a_1 x + a_2 y + a_3 \\ y_{new} = b_1 x + b_2 y + b_3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_{new} = -0.94 \times 112.99 - 0.01 \times 112.99 + 126 = 18.6595 \\ y_{new} = -0.05 \times 112.99 + 1.054 \times 112.99 + 128.1 = 241.5420 \end{array}$$

$$Point\,3: \begin{array}{l} x_{new} = a_1 x + a_2 y + a_3 \\ y_{new} = b_1 x + b_2 y + b_3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_{new} = 0.94 \times 113.01 + 0.01 \times 113.01 + 126 = 233.3595 \\ y_{new} = 0.05 \times 113.01 - 1.054 \times 113.01 + 128.1 = 14.6380 \end{array}$$

مثال

$$3.\ \text{Projective}: \left| \begin{array}{lll} a_1 = 0.94 & a_2 = -0.01 & a_3 = 126 \\ b_1 = 0.05 & b_2 = 1.054 & b_3 = 128.1 \\ c_1 = 0.003 & c_2 = -0.045 & \end{array} \right.$$

شماره نقطه	مختصات نقطه	
	x (mm)	y (mm)
1	113.02	0.002
2	-112.99	112.99
3	113.01	-113.01

- حل مثال ۳)
- انتقال با مدل پروژکتیو

$$Point1: \begin{array}{l} x_{new} = \dfrac{a_1 x + a_2 y + a_3}{c_1 x + c_2 y + 1} \\ y_{new} = \dfrac{b_1 x + b_2 y + b_3}{c_1 x + c_2 y + 1} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_{new} = \dfrac{0.94 \times 113.02 - 0.01 \times 0.002 + 126}{0.003 \times 113.02 - 0.045 \times 0.002 + 1} = 173.4458 \\ y_{new} = \dfrac{0.05 \times 113.02 + 1.054 \times 0.002 + 128.1}{0.003 \times 113.02 - 0.045 \times 0.002 + 1} = 99.8925 \end{array}$$

$$Point2: \begin{array}{l} x_{new} = \dfrac{a_1 x + a_2 y + a_3}{c_1 x + c_2 y + 1} \\ y_{new} = \dfrac{b_1 x + b_2 y + b_3}{c_1 x + c_2 y + 1} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_{new} = \dfrac{-0.94 \times 112.99 - 0.01 \times 112.99 + 126}{-0.003 \times 112.99 - 0.045 \times 112.99 + 1} = -4.2182 \\ y_{new} = \dfrac{-0.05 \times 112.99 + 1.054 \times 112.99 + 128.1}{-0.003 \times 112.99 - 0.045 \times 112.99 + 1} = -54.6040 \end{array}$$

$$Point3: \begin{array}{l} x_{new} = \dfrac{a_1 x + a_2 y + a_3}{c_1 x + c_2 y + 1} \\ y_{new} = \dfrac{b_1 x + b_2 y + b_3}{c_1 x + c_2 y + 1} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_{new} = \dfrac{0.94 \times 113.01 + 0.01 \times 113.01 + 126}{0.003 \times 113.01 + 0.045 \times 113.01 + 1} = 36.3235 \\ y_{new} = \dfrac{0.05 \times 113.01 - 1.054 \times 113.01 + 128.1}{0.003 \times 113.01 + 0.045 \times 113.01 + 1} = 2.2785 \end{array}$$

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- گاهی اوقات بایستی پارامترهای تبدیل دو بعدی را برآورد نمود.
- مراحل محاسبه پارامترهای تبدیل:

1. ابتدا بایستی مدل ریاضیاتی (متشابه، افاین و...) تعیین شود.
2. اندازه‌گیری تعدادی نقطه متناظر در دو سیستم مختصات
3. تشکیل دستگاه معادلات
4. حل دستگاه معادلات به روش کمترین مربعات
5. ارزیابی دقت

دستگاه معادلات

- معادلات متشابه:

$$x = ax' + by' + c$$
$$y = -bx' + ay' + d$$

- در صورتی که پارامترهای متشابه مجهول و نقاط متناظر اندازه‌گیری شده باشند.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix}}_{L} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1' & y_1' & 1 & 0 \\ y_1' & -x_1' & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n' & y_n' & 1 & 0 \\ y_n' & -x_n' & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}}_{X}$$

$$L = AX$$

- در این دستگاه معادلات فرض شده n نقطه متناظر وجود دارد.

- برای حل این دستگاه حداقل ۴ معادله (دو نقطه متناظر) نیاز است.

دستگاه معادلات

- معادلات افاین:

$$x = a_1x' + a_2y' + a_3$$
$$y = b_1x' + b_2y' + b_3$$

- در صورتی که پارامترهای افاین مجهول و نقاط متناظر اندازه‌گیری شده باشند.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix}}_{L} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1' & y_1' & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1' & y_1' & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n' & y_n' & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_n' & y_n' & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{X}$$

$$L = AX$$

- در این دستگاه معادلات فرض شده n نقطه متناظر وجود دارد.

- برای حل این دستگاه حداقل ۶ معادله (سه نقطه متناظر) نیاز است.

دستگاه معادلات

- معادلات پروژکتیو:
- در صورتی که پارامترهای پروژکتیو مجهول و نقاط متناظر اندازه‌گیری شده باشند.

$$x = \frac{a_1 x' + a_2 y' + a_3}{c_1 x' + c_2 y' + 1} \qquad y = \frac{b_1 x' + b_2 y' + b_3}{c_1 x' + c_2 y' + 1} \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= a_1 x' + a_2 y' + a_3 - c_1 x' x - c_2 y' x \\ y &= b_1 x' + b_2 y' + b_3 - c_1 x' y - c_2 y' y \end{aligned}$$

- در این دستگاه معادلات فرض شده n نقطه متناظر وجود دارد.
- برای حل این دستگاه حداقل ۸ معادله (چهار نقطه) نیاز است.

دستگاه معادلات

- معادلات پروژکتیو:

$$x = a_1 x' + a_2 y' + a_3 - c_1 x' x - c_2 y' x$$
$$y = b_1 x' + b_2 y' + b_3 - c_1 x' y - c_2 y' y$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix}}_{L} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1' & y_1' & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1' x_1 & -y_1' x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1' & y_1' & 1 & -x_1' y_1 & -y_1' y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n' & y_n' & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_n' x_n & -y_n' x_n \\ 0 & 0 & 0 & x_n' & y_n' & 1 & -x_n' y_n & -y_n' y_n \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{X}$$

$$L = AX$$

حل دستگاه معادلات

- برای حل دستگاه معادلات از روشی استفاده می‌شود که به آن روش کمترین مربعات گفته می‌شود.
- در این روش مجهولات (یا همان پارامترهای مدل ریاضیاتی) از رابطه زیر برآورد می‌شوند.

$$X = \left(A^T A\right)^{-1} A^T L$$

- باقیمانده و RMSE از رابطه زیر برآورد می‌شوند.

$$V = AX - L \qquad RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Vx_i^2 + Vy_i^2\right)}{n}}$$

دستگاه معادلات

- نکته: از نظر سرشکنی برآورد مجهولات تبدیل دو بعدی پروژکتیو با روش پارامتریک $(X = (A^T A)^{-1} A^T L)$ کار صحیحی نیست!
- زیرا در روش پارامتریک بایستی مشاهدات تنها در یک طرف دستگاه معادلات باشند. پیشنهاد سرشکنی این است که برای برآورد مجهولات تبدیل پروژکتیو از خطی‌سازی استفاده شود و یا اینکه با روش ترکیبی این مجهولات برآورد شوند. اگرچه برای پروژه‌های دانشجویی می‌توانید از روش پارامتریک استفاده کنید.

ارزیابی دقت

- در عمل از بین نقاط متناظر تعدادی را به عنوان نقاط کنترل و تعدادی را به عنوان نقاط چک در نظر می‌گیرند.
- از نقاط کنترل برای تشکیل دستگاه معادلات و برآورد پارامترها استفاده می‌شود.
- اما از نقاط چک برای ارزیابی پارامترهای برآورد شده استفاده می‌شود.
- نقاط چک در دستگاه معادلات وارد نمی‌شوند.

مثال

- مثال ۴: چنانچه مختصات فیدوشل مارکها در سیستم مختصات دستگاهی و سیستم مختصات کالیبره به صورت زیر باشند، پارامترهای مدل متشابه را بدست آورید.

شماره فیدوشل مارک	مختصات دستگاهی	
	x (mm)	y (mm)
1	243.031	130.007
2	17.028	130.009
3	130.017	243.003
4	130.019	16.999
5	243.016	243.001
6	17.017	16.998
7	17.027	242.995
8	243.025	16.999

شماره فیدوشل مارک	مختصات کالیبره	
	x (mm)	y (mm)
1	113.016	0.002
2	-112.977	-0.002
3	0.013	112.99
4	0.008	-113.008
5	113.008	112.995
6	-112.989	-113.006
7	-112.986	112.988
8	113.011	-113.004

مثال

- حل مثال ۴: چنانچه نقاط ۱ تا ۴ نقاط کنترل و نقاط ۵ تا ۸ نقاط چک باشند، دستگاه معادلات برای نقاط کنترل به صورت زیر خواهد بود.

$$A=\begin{bmatrix} 113.016 & 0.002 & 1 & 0 \\ 0.002 & -113.016 & 0 & 1 \\ -112.977 & -0.002 & 1 & 0 \\ -0.002 & 112.977 & 0 & 1 \\ 0.013 & 112.99 & 1 & 0 \\ 112.99 & -0.013 & 0 & 1 \\ 0.008 & -113.008 & 1 & 0 \\ -113.008 & -0.008 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad L=\begin{bmatrix} 243.031 \\ 130.007 \\ 17.028 \\ 130.009 \\ 130.017 \\ 243.003 \\ 130.019 \\ 16.999 \end{bmatrix}$$

مثال

- حل مثال ۴: سرشکنی به روش کمترین مربعات $X = \left(A^T A\right)^{-1} A^T L$

$$X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 113.016 & 0.002 & -112.977 & -0.002 & 0.013 & 112.99 & 0.008 & -113.008 \\ 0.002 & -113.016 & -0.002 & 112.977 & 112.99 & -0.013 & -113.008 & -0.008 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 8} \times \begin{bmatrix} 113.016 & 0.002 & 1 & 0 \\ 0.002 & -113.016 & 0 & 1 \\ -112.977 & -0.002 & 1 & 0 \\ -0.002 & 112.977 & 0 & 1 \\ 0.013 & 112.99 & 1 & 0 \\ 112.99 & -0.013 & 0 & 1 \\ 0.008 & -113.008 & 1 & 0 \\ -113.008 & -0.008 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{8\times 4} \right)^{-1}_{4\times 4} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 113.016 & 0.002 & -112.977 & -0.002 & 0.013 & 112.99 & 0.008 & -113.008 \\ 0.002 & -113.016 & -0.002 & 112.977 & 112.99 & -0.013 & -113.008 & -0.008 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 8} \times \begin{bmatrix} 243.031 \\ 130.007 \\ 17.028 \\ 130.009 \\ 130.017 \\ 243.003 \\ 130.019 \\ 16.999 \end{bmatrix}_{8\times 1}$$

مثال

- حل مثال ۴: چنانچه نقاط ۱ تا ۴ نقاط کنترل و نقاط ۵ تا ۸ نقاط چک باشند، پارامترهای مدل متشابه و مقادیر باقیمانده به صورت زیر خواهند بود.

$$a = 1.0 \qquad b = -0.0000022 \qquad c = 130.0087 \qquad d = 130.009$$

شماره فیدوشل مارک	باقیمانده نقاط کنترل	
	x (mm)	y (mm)
1	-0.00225	0.00425
2	-0.00025	-0.00225
3	0.0045	-1.86E-07
4	-0.002	-0.002

شماره فیدوشل مارک	باقیمانده نقاط چک	
	x (mm)	y (mm)
5	0.0045	0.00725
6	-0.001	0.00075
7	-0.0085	0.00575
8	-0.001	0.00225

حل دستگاه معادلات

- مثال ۵: با توجه به مختصات نقاط متناظر زیر پارامترهای مدل متشابه، افاین و پروژکتیو را برآورد نمایید.
- علاوه بر این تعیین کنید کدام مدل دقت بالاتری دارد.

شماره نقطه	مختصات در عکس اول	
	x (pix)	y (pix)
1	253	64
2	40	389
3	112	383
4	219	195
5	384	321
6	386	57

شماره نقطه	مختصات در عکس دوم	
	x (pix)	y (pix)
1	175	44
2	18	176
3	50	169
4	121	108
5	164	137
6	248	37

حل دستگاه معادلات

- حل مثال ۵: حل مدل متشابه

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix}}_{L} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1' & y_1' & 1 & 0 \\ y_1' & -x_1' & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n' & y_n' & 1 & 0 \\ y_n' & -x_n' & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}}_{X}$$

$$X = \left(A^T A\right)^{-1} A^T L$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}}_{X} = \begin{bmatrix} 1.86 \\ 0.48 \\ -62.16 \\ 89.33 \end{bmatrix}$$

پارامترهای متشابه

$$\begin{bmatrix} 31.56 & 22.65 \\ 16.29 & 18.91 \\ 0.42 & -3.56 \\ -4.01 & 36.73 \\ -75.05 & -56.11 \\ \underbrace{30.86}_{V_x} & \underbrace{-18.62}_{V_y} \end{bmatrix}$$

باقیمانده‌های نقاط

V

RMSE = 41.2096

حل دستگاه معادلات

- حل مثال ۵: حل مدل افاین

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix}}_{L} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1' & y_1' & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1' & y_1' & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n' & y_n' & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_n' & y_n' & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{X}$$

$$X = \left(A^T A\right)^{-1} A^T L$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.62 \\ 1.72 \\ -298.19 \\ 0.31 \\ 2.88 \\ -127.03 \end{bmatrix}$$

پارامترهای افاین

$$\begin{bmatrix} -17.58 & -10.66 \\ 11.06 & -3.35 \\ 10.81 & -7.72 \\ -15.06 & 26.24 \\ -17.72 & -3.03 \\ \underbrace{28.49}_{V_x} & \underbrace{-1.48}_{V_y} \end{bmatrix}$$

باقیمانده‌های نقاط V

RMSE = 18.6572

حل دستگاه معادلات

- حل مثال ۵: حل مدل پروژکتیو

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix}}_{L} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1' & y_1' & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1'x_1 & -y_1'x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1' & y_1' & 1 & -x_1'y_1 & -y_1'y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n' & y_n' & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_n'x_n & -y_n'x_n \\ 0 & 0 & 0 & x_n' & y_n' & 1 & -x_n'y_n & -y_n'y_n \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{X}$$

$$X = \left(A^T A\right)^{-1} A^T L$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.975 \\ -0.029 \\ 5.445 \\ -0.015 \\ 0.97 \\ 3.91 \\ -0.001 \\ -0.003 \end{bmatrix}$$

پارامترهای پروژکتیو

$$\begin{bmatrix} 0.18 & 0.059 \\ -0.04 & 0.17 \\ 0.23 & -0.16 \\ -0.4 & -0.15 \\ 0.03 & 0.066 \\ 0.004 & 0.006 \\ V_x & V_y \end{bmatrix}$$

باقیمانده‌های نقاط V

RMSE = 0.21 بهترین دقت

Orientations

توجيهات

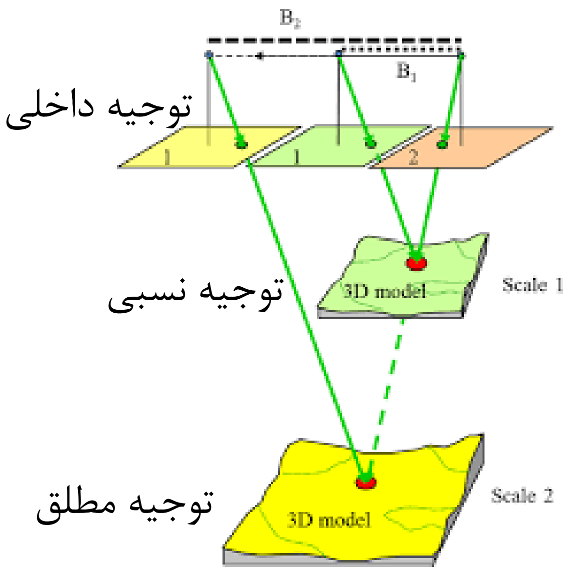
توجیهات در فتوگرامتری

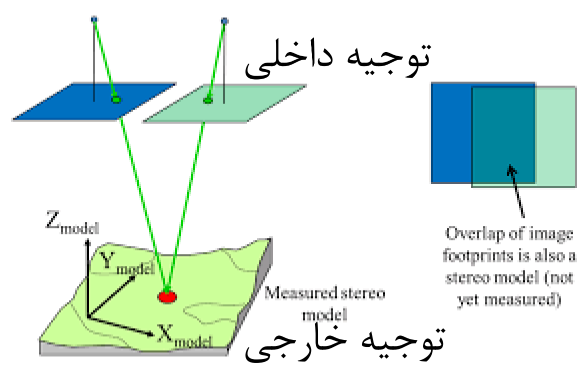
- توجیه در اصطلاح به معنی جهت دار کردن یا سمت و سو دادن است.
- توجیه در فتوگرامتری به معنی پیدا کردن (تعیین) مسیر یک پرتو نسبت به یک سیستم مختصات مشخص است.
- سیستم مختصات می‌تواند سیستم مختصات داخل دوربین، یک سیستم مختصات مطلق یا یک سیستم مختصات نسبی باشد.

توجیهات در فتوگرامتری

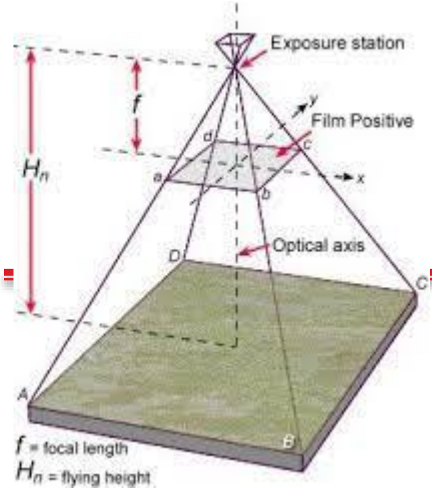
- در فتوگرامتری با چهار نوع توجیه سر و کار داریم:

1. توجیه داخلی
2. توجیه نسبی
3. توجیه مطلق
4. توجیه خارجی

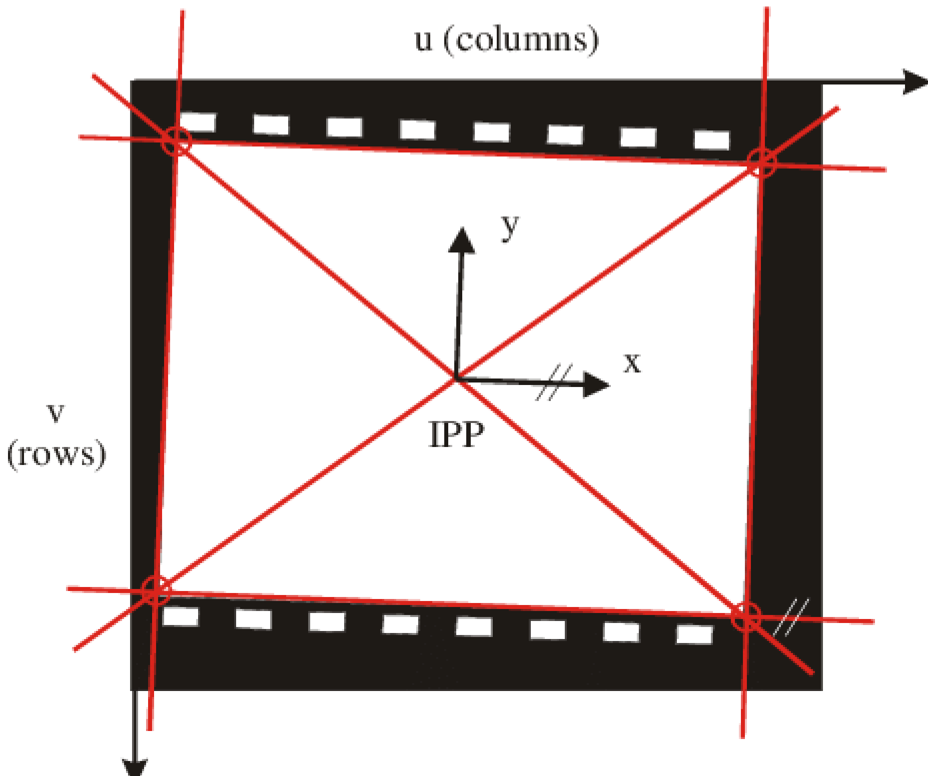


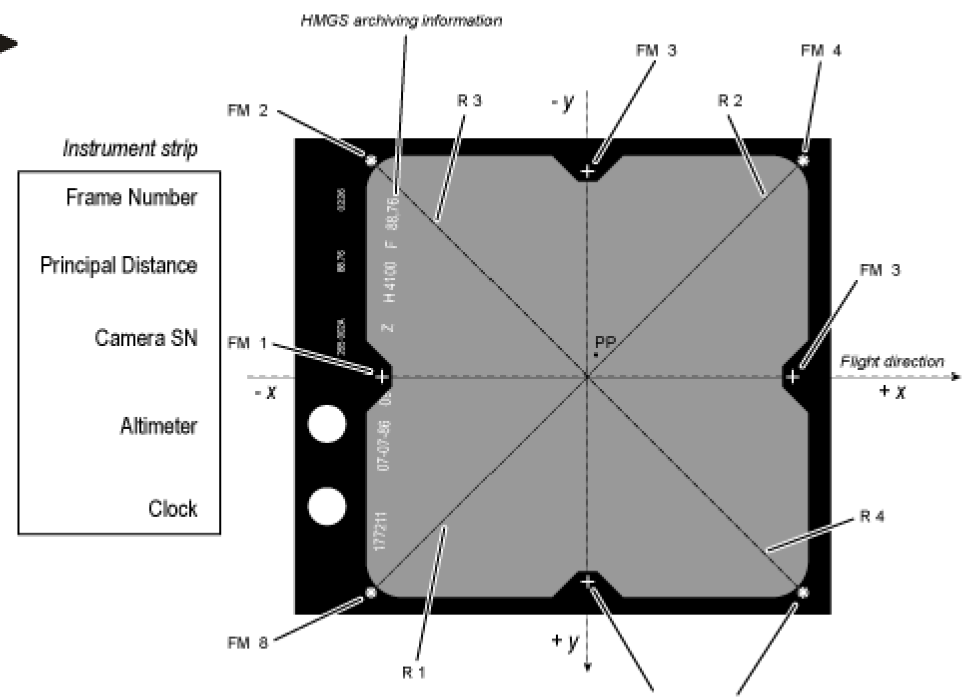


توجیه داخلی



- توجیه داخلی (Interior Orientation):





Camera Zeiss LMK-9 SN: 265-002A

توجیه داخلی

- توجیه داخلی
- توجیه داخلی عبارتست از پیدا کردن مسیر نور نسبت به محور اصلی. یا به عبارتی "بازسازی هرم داخلی دوربین هوایی"
- هدف از توجیه داخلی، بدست آوردن مقادیر زیر میباشد:

1. فاصله کانونی (f)
2. موقعیت نقطه اصلی (xp, yp)

- در دوربین‌های متریک این مقادیر برای عکس‌ها تقریبا ثابتند.

توجیه داخلی

- توجیه داخلی
- در دوربین‌های آنالوگ، سه پارامتر برای توجیه داخلی وجود دارد. $(x_{p.p} \quad y_{p.p} \quad f)$
- در دوربین‌های رقومی چهار پارامتر در نظر گرفته می‌شود. پارامتر اضافه‌تری که در دوربینهای رقومی در نظر گرفته می‌شود، فاصله کانونی متفاوت در راستای x و y است.

$$(x_{p.p} \quad y_{p.p} \quad f_x \quad f_y)$$

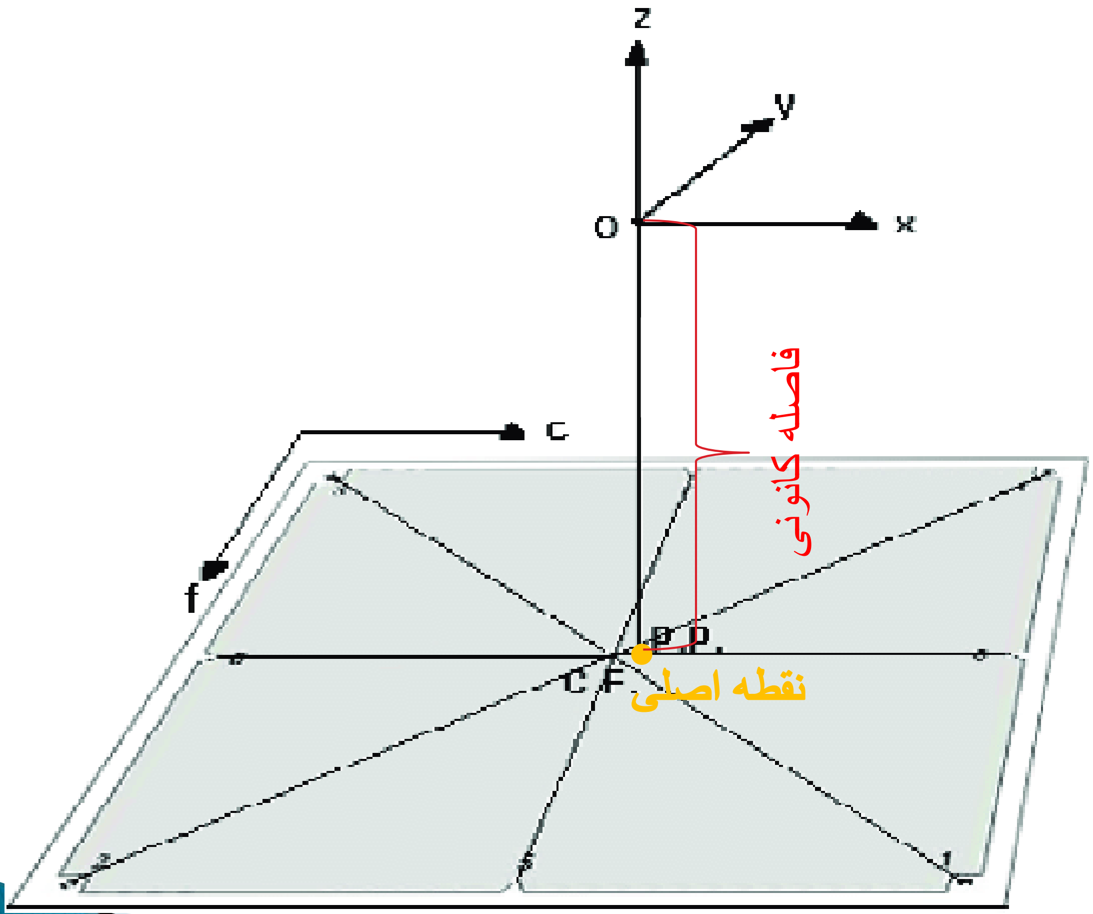
توجیه داخلی

- توجیه داخلی
- پارامترهای

توجیه داخلی

در هرم داخلی

دوربین هوایی



توجیه داخلی

- روش‌های توجیه داخلی:
- به طور کلی روش‌های توجیه داخلی عبارتند از:

1. توجیه داخلی آنالوگ
   - منطبق کردن فیدوشل مارکها به روش مکانیکی
2. توجیه داخلی تحلیلی
   - اندازه‌گیری فیدوشل مارک به صورت دستی بعلاوه محاسبه کامپیوتری مدلهای ریاضیاتی 2D → 2D
3. توجیه داخلی رقومی
   - اندازه‌گیری فیدوشل مارک به صورت اتوماتیک

توجیه داخلی

- توجیه داخلی چگونه انجام می‌گیرد؟
- برای تعیین سیستم مختصات در عکس‌های هوایی آنالوگ، در مخزن دوربین و بر روی صفحه کانونی یکسری علائم ضربدری شکل (یا به علاوه ای شکل) در گوشه‌های یا اطراف آن حک کرده‌اند. زمانی که فیلم بر روی صفحه کانونی قرار می‌گیرد و شاتر باز و بسته می‌شود (به عبارتی وقتی عکس گرفته می‌شود) موقعیت این علائم گوشه‌ای بر روی عکس مشخص می‌شود.

توجیه داخلی

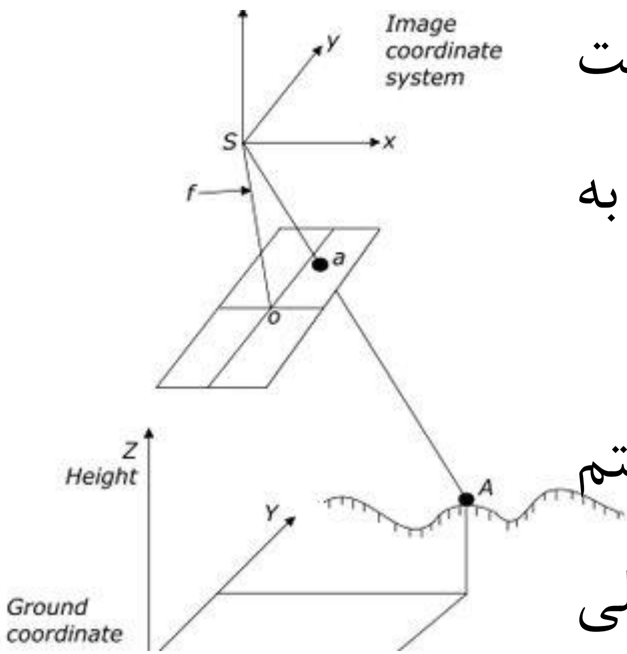
- توجیه داخلی چگونه انجام می‌گیرد؟
- از طرفی موقعیت دقیق این علائم گوشه‌ای قبلا در آزمایشگاه‌ها به صورت خیلی دقیق اندازه‌گیری شده است. لذا برای تعیین سیستم مختصات عکس‌های آنالوگ از آنها استفاده می‌شود.
- اما مسئله‌ای که وجود دارد این است که مبدا و محورهای سیستم مختصات علائم کناری بر روی عکس به صورت گرافیکی ترسیم نمی‌شود! چرا؟

توجیه داخلی

- توجیه داخلی چگونه انجام می‌گیرد؟
- عکس‌های را بر روی یک صفحه ای که اطراف آن خط کش‌های دقیق وجود دارد (سیستم مختصات کامپاراتور)، می توان قرار داد و بعد از اینکه عکس را روی آن صفحه چسباند، موقعیت عوارض را اندازه گرفت. اگرچه با این کار می‌توان موقعیت همه عوارض را و علائم گوشه‌ای را اندازه‌گیری و تعیین موقعیت کرد؛ اما این کار هنوز کافی نیست. چرا؟

توجیه داخلی

- توجیه داخلی چگونه انجام می‌گیرد؟



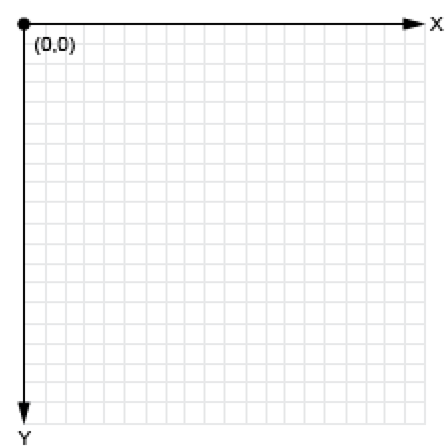
- زیرا برای تهیه نقشه، بایستی موقعیت نقاط نسبت به محور اپتیکی دوربین (و به طور خاص نقطه اصلی) مشخص شوند.
- لذا تعیین موقعیت عوارض در سیستم مختصات علائم‌کناری (و هرم داخلی دوربین) ضرورتی تردید ناپذیر است.

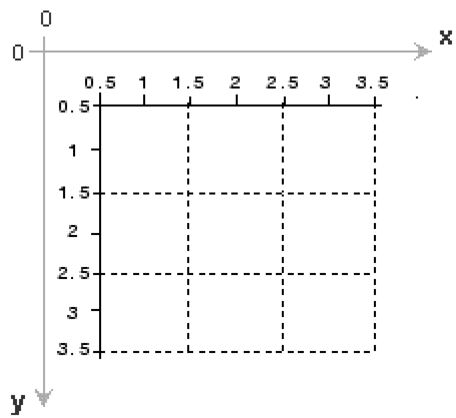
توجیه داخلی

- توجیه داخلی در سیستمهای کامپیوتری
- امروزه با روی کار آمدن کامپیوترها و سیستم های اندازه گیری رقومی کسی دیگر برای اندازه گیری سراغ کامپاراتور نمی رود.
- یکی دیگر از سیستم های مختصات واسط که برای اندازه گیری عوارض واقع در عکس ها به کار می‌رود، سیستم مختصات تصویری است. کامپیوترها عموما از این سیستم مختصات استفاده می کنند.

توجیه داخلی

- توجیه داخلی در سیستمهای کامپیوتری
- سیستم مختصات تصویری یک سیستم مختصات دست چپی است که مبدا آن در گوشه بالای سمت چپ تصویر قرار گرفته و محور ایکس آن به موازات سطرهای تصویر تعریف می‌شود.





توجیه داخلی

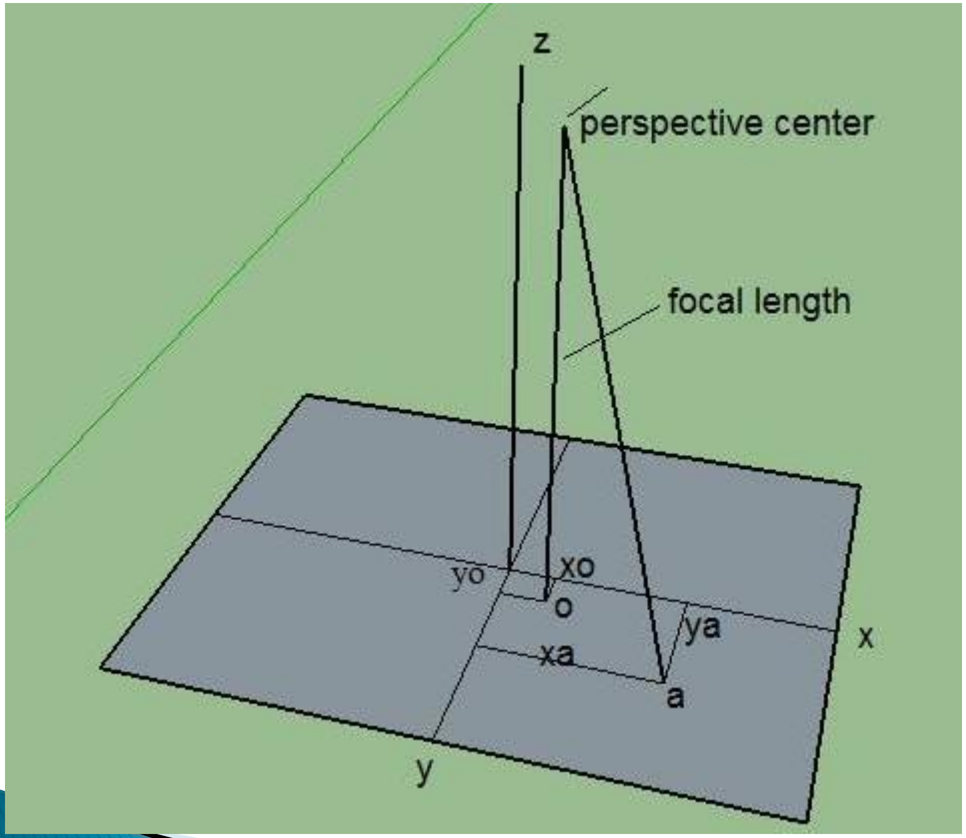
- توجیه داخلی در سیستمهای کامپیوتری
- از آنجا که سیستم مختصات تصویری یک سیستم مختصات دست چپی است محور y آن موازی با ستون‌های تصویر خواهد بود. دانشجویان لازم است به این نکته توجه کنند که معادلاتی که پیشتر در باب تبدیلات دو بعدی به دو بعدی ارائه شد، معادلاتی بودند که بین دو سیستم مختصات دست راستی تعریف شده‌اند.

توجیه داخلی

- توجیه داخلی در سیستمهای کامپیوتری
- از این رو برای بدست آوردن پارامترهای تبدیل بین دو سیستم مختصات ابتدا باید مختصات نقاط واقع در سیستم مختصات تصویری را دست راستی کرد.
- برای تبدیل سیستم مختصات دست چپی به سیستم مختصات دست راستی کافی است مولفه y این مختصاتها را در مقدار منفی یک (۱-) ضرب کرد تا علامتش از مثبت به منفی تغییر کند.

توجیه داخلی

- توجیه داخلی در یک نگاه کلی



مختصات هر نقطه بعد از توجیه داخلی وقتی از سیستم مختصات علائم کناری استفاده می‌شود به صورت زیر است.

$$(x-x_{p.p} \quad y-y_{p.p} \quad -f)$$

نکته: برای عکس‌های آنالوگ اسکن شده نیز از این معادلات استفاده می‌شود.

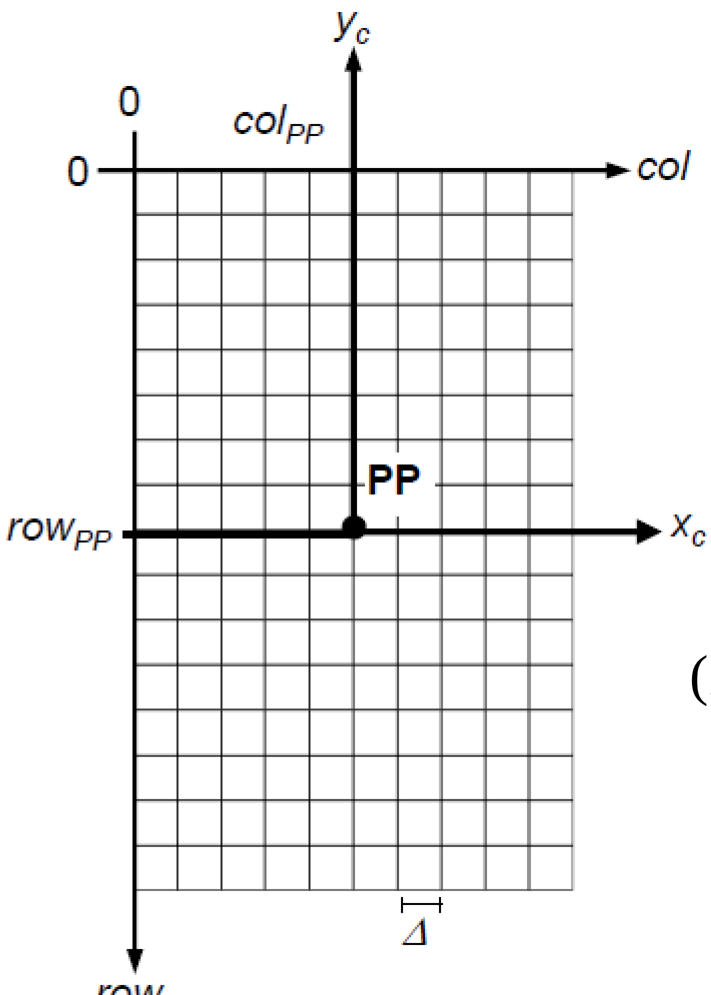
توجیه داخلی

- مثال ۶:
- مختصات نقطه‌ای در یک عکس هوایی آنالوگ که با دوربینی به فاصله کانونی ۱۵۲ میلیمتر در ارتفاع ۱۵۰۰ متری اخذ شده در سیستم مختصات علائم کناری (83.106, 63.466) میلیمتر اندازه‌گیری شده است. در صورتی که مختصات نقطه اصلی (0.012, -0.008) باشد، مختصات این نقطه بعد از توجیه داخلی چقدر است؟

$$(x - x_{p.p} \quad y - y_{p.p} \quad -f) \Rightarrow$$

$$(83.106 - 0.012 \quad 63.466 + 0.008 \quad -152) = (83.94 \quad 63.474 \quad -152)$$

توجیه داخلی



- توجیه داخلی در یک نگاه کلی
- مختصات هر نقطه بعد از توجیه داخلی وقتی مستقیما از سیستم مختصات تصویری استفاده می‌شود به صورت زیر است.

$$(\Delta\times(col-col_{p.p}) \quad -\Delta\times(row-row_{p.p}) \quad -f)$$

Δ پیکسل سایز
col شمارنده ستون
row شمارنده سطر

توجیه داخلی

- مثال ۷:
- مختصات نقطه‌ای در یک تصویر هوایی رقومی که با دوربینی به فاصله کانونی ۱۲۰ میلیمتر اخذ شده در سیستم مختصات تصویری در سطر ۹۵۴۱ ام و ستون ۳۵۶ ام واقع شده است. در صورتی که سطر و ستون نقطه اصلی به ترتیب ۶۹۱۲ و ۳۸۴۰ پیکسل باشد، مختصات این نقطه برحسب میلیمتر بعد از توجیه داخلی چقدر است؟ (پیکسل سایز ۱۲ میکرون)

توجیه داخلی

- حل مثال ۷:

$\Delta = 12 micron = 0.012 mm$ پیکسل سایز

$row = 9541 pixel$ شماره سطر

$col = 356 pixel$ شماره ستون

$row_{p.p} = 6912 pixel$ شماره سطر نقطه اصلی

$col_{p.p} = 3840 pixel$ شماره ستون نقطه اصلی

$$(\Delta \times (col - col_{p.p}) \quad -\Delta \times (row - row_{p.p}) \quad -f) \Rightarrow$$

$$(0.012 \times (356 - 3840) \quad -0.012 \times (9541 - 6912) \quad -120) \Rightarrow$$

$(-41.808 \quad -31.548 \quad -120)$ مختصات بعد از توجیه داخلی

تمرین شماره ۴ – قسمت اول

- تمرین شماره ۴ را که در یک فایل جداگانه تهیه شده است را از سایت دانشگاه دانلود نموده و پس از مطالعه دقیق آن، آن را انجام داده و تا دو هفته آینده به آدرس noorollah.tatar@gmail.com با موضوع "تمرین شماره ۴ – قسمت اول درس فتوگرامتری تحلیلی" ایمیل کنید.
- دانشجویانی که سیستم کامپیوتری ندارند، ضرب ماتریسی را به صورت دستی انجام دهند و برای معکوس گیری ماتریس هایشان می‌توانند به یکی از سایت های زیر مراجعه کنند.
- https://matrixcalc.org/fa/
- https://doza.pro/art/math/matrix/fa/calcs

3D to 3D Transformations

تبدیلات بین سه بعدی به سه بعدی

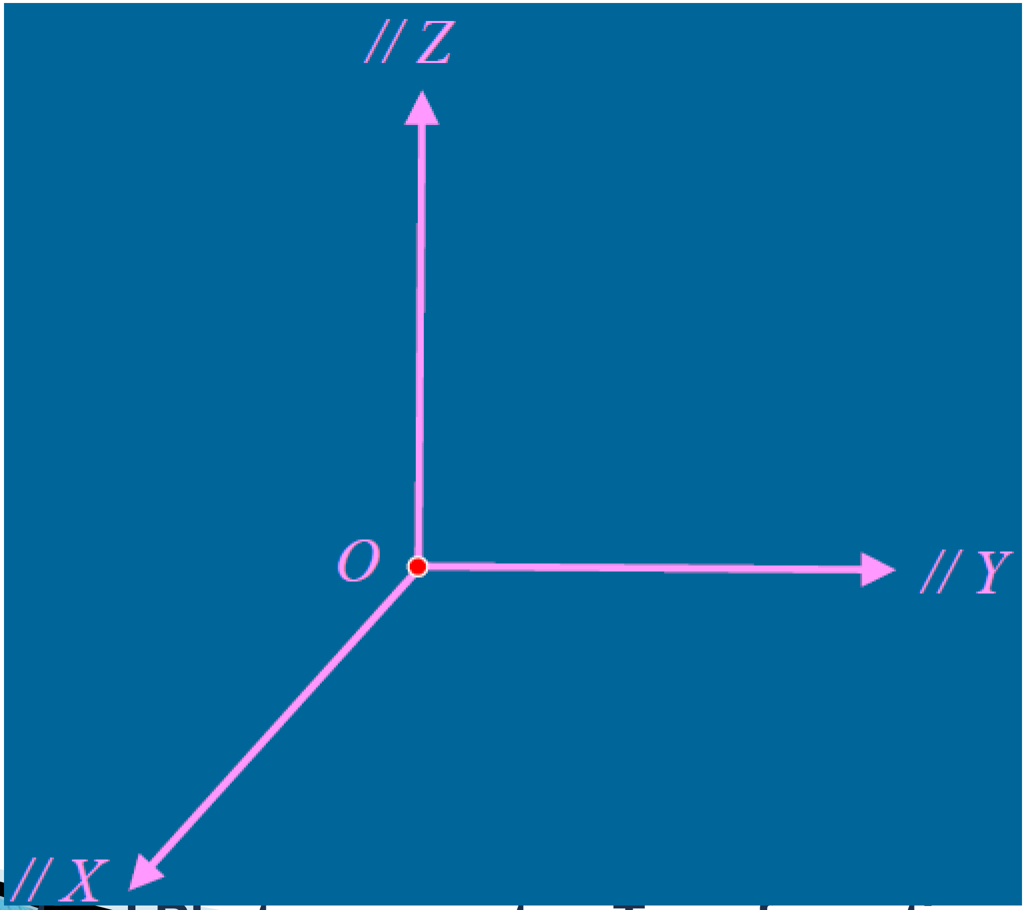
- مشابه تبدیلات دوبعدی به دو بعدی یکسری تبدیلات سه بعدی به سه بعدی داریم.
- در این تبدیلات مختصات نقاط در سیستم مختصات سه بعدی مانند (X, Y, Z) به یک مختصات سه بعدی دیگر مانند (U, V, W) در یک سیستم مختصات دیگر تبدیل می‌شود.

$$WGS84 \rightleftarrows ED1950$$
$$Local \rightleftarrows Global$$
$$and\ldots$$

- در ادامه ماتریس دوران و سپس انتقال ارائه می شوند

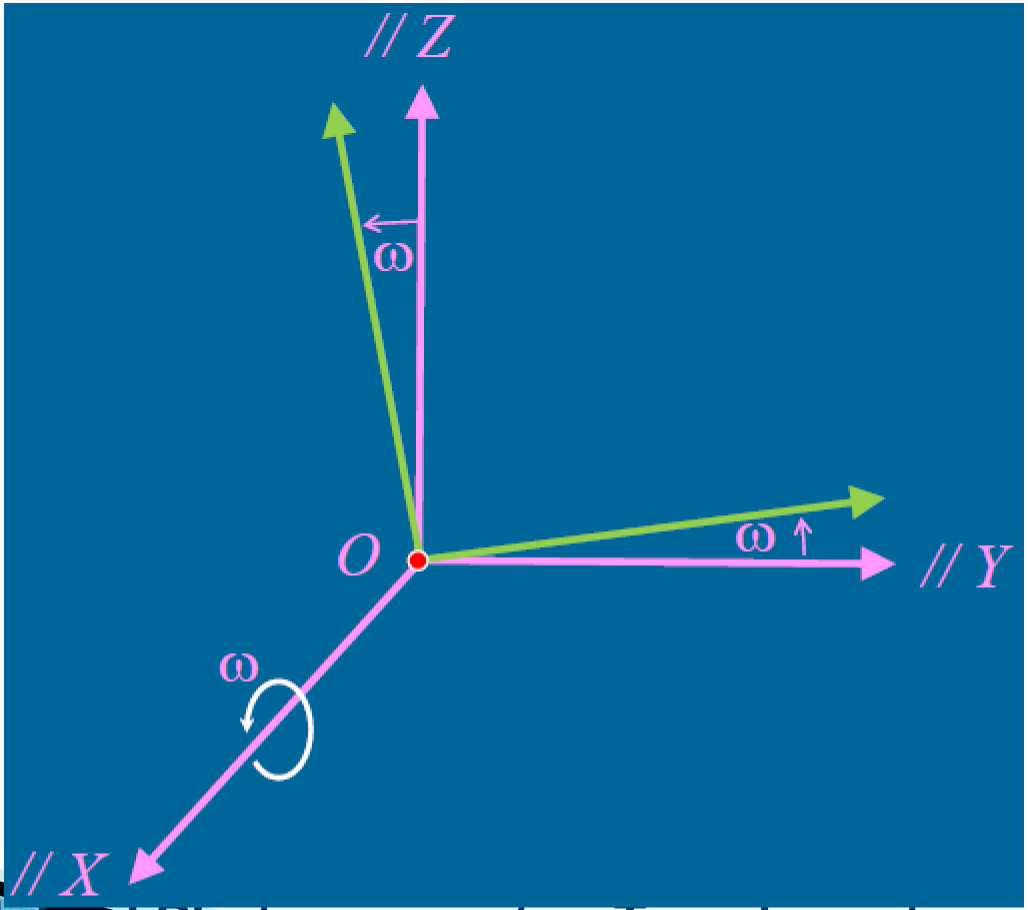
ماتریس دوران

- دو سیستم مختصات سه بعدی هم مبدا و منطبق برهم در نظر بگیرید



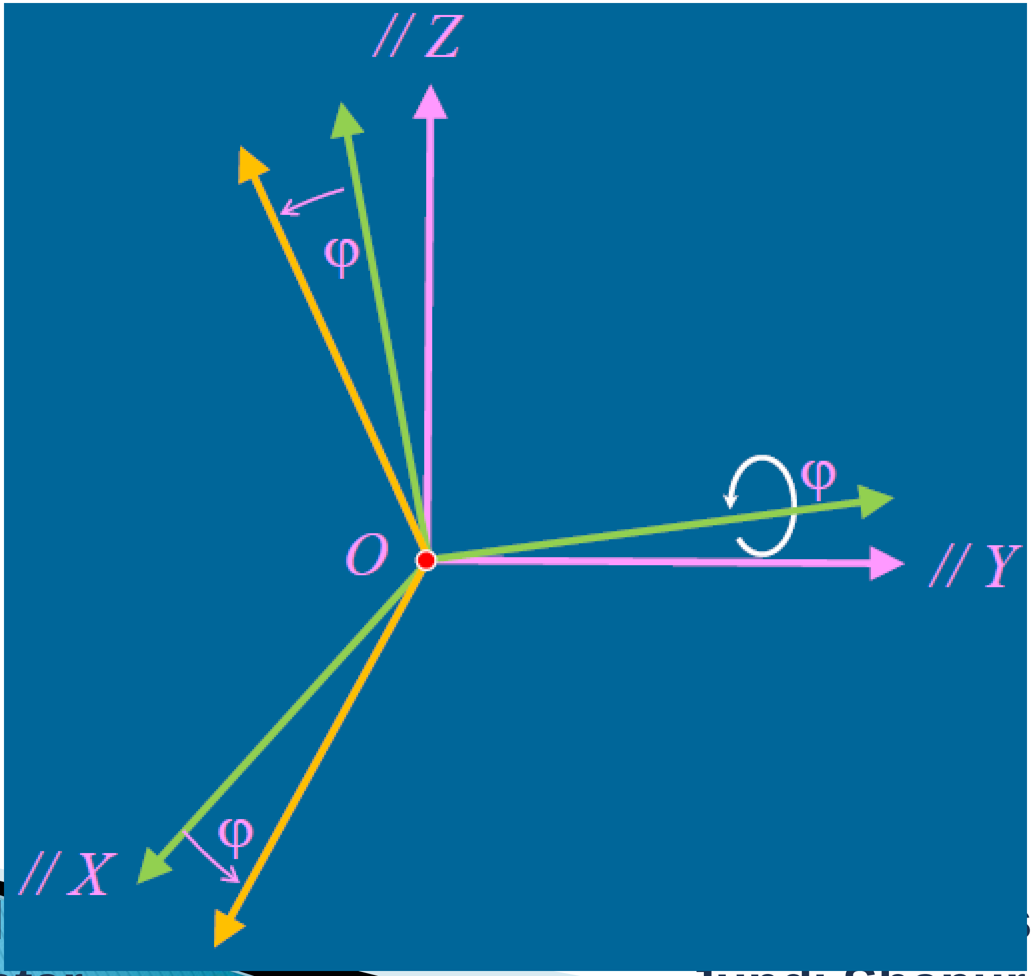
ماتریس دوران

- اگر یکی از این سیستم مختصات‌ها به اندازه ω حول محور X بچرخد



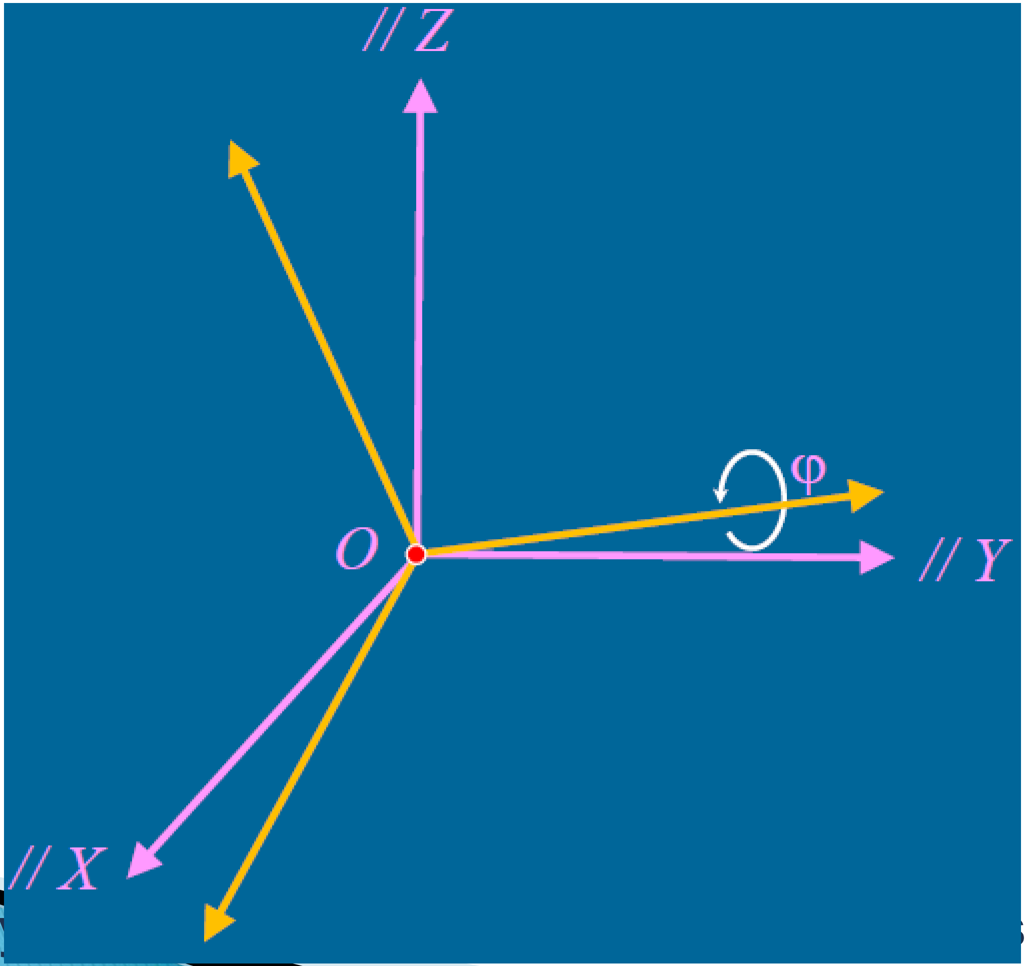
ماتریس دوران

- اگر سیستم مختصات چرخیده باز به اندازه φ حول محور Y بچرخد



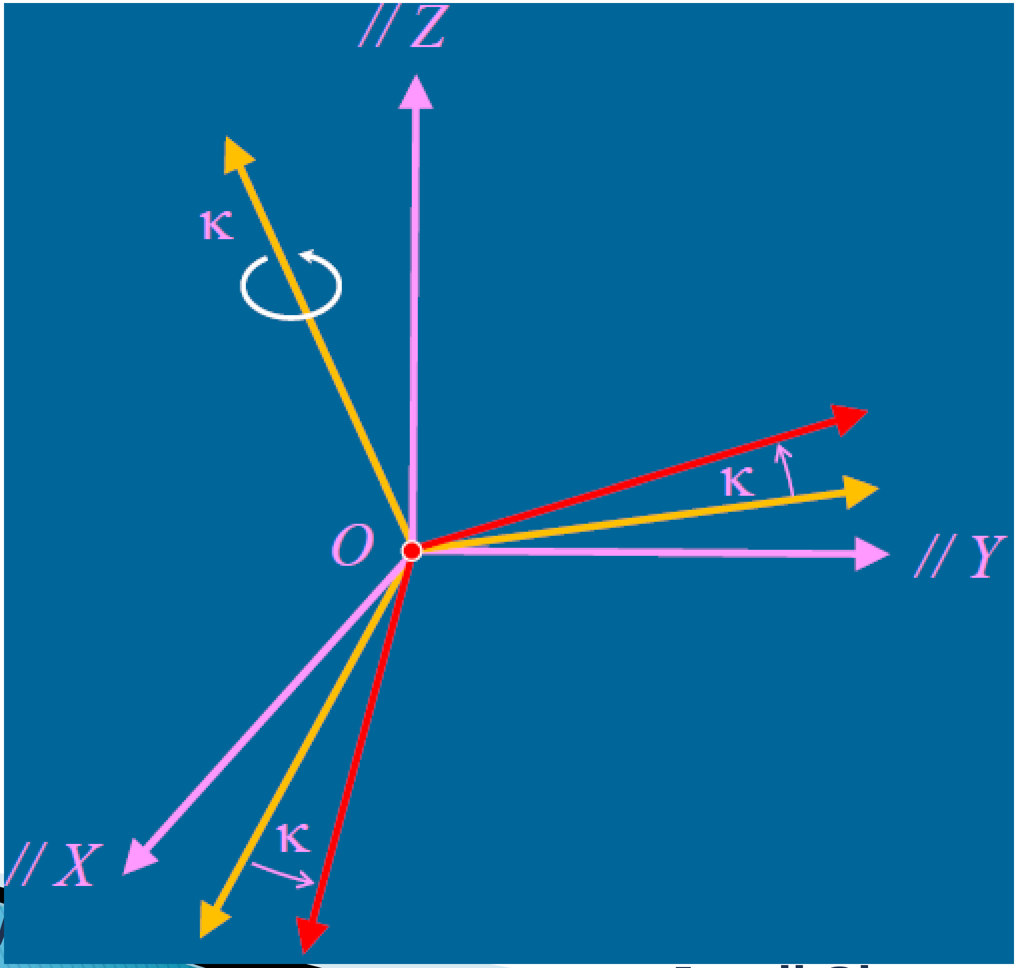
ماتریس دوران

- اگر سیستم مختصات چرخیده باز به اندازه φ حول محور Y بچرخد



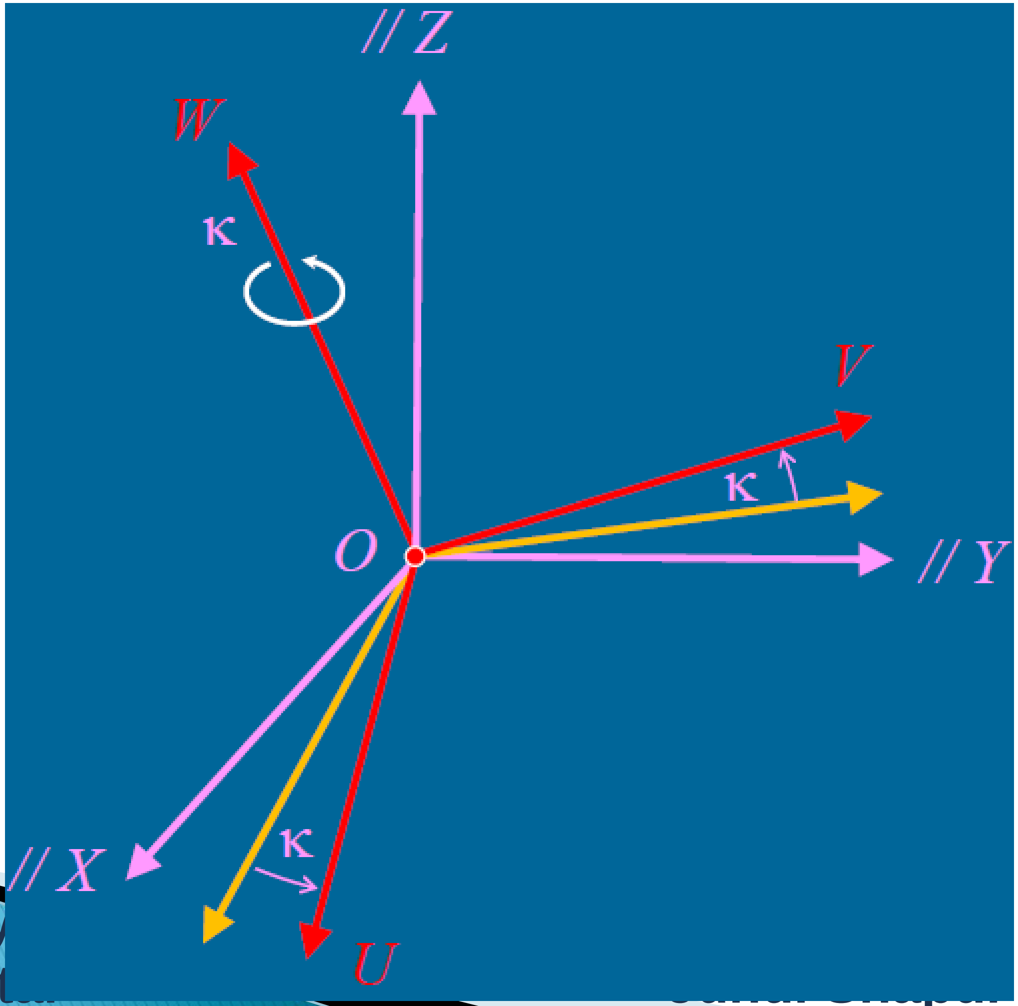
ماتریس دوران

- اگر سیستم مختصات چرخیده باز به اندازه κ حول محور Z بچرخد



ماتریس دوران

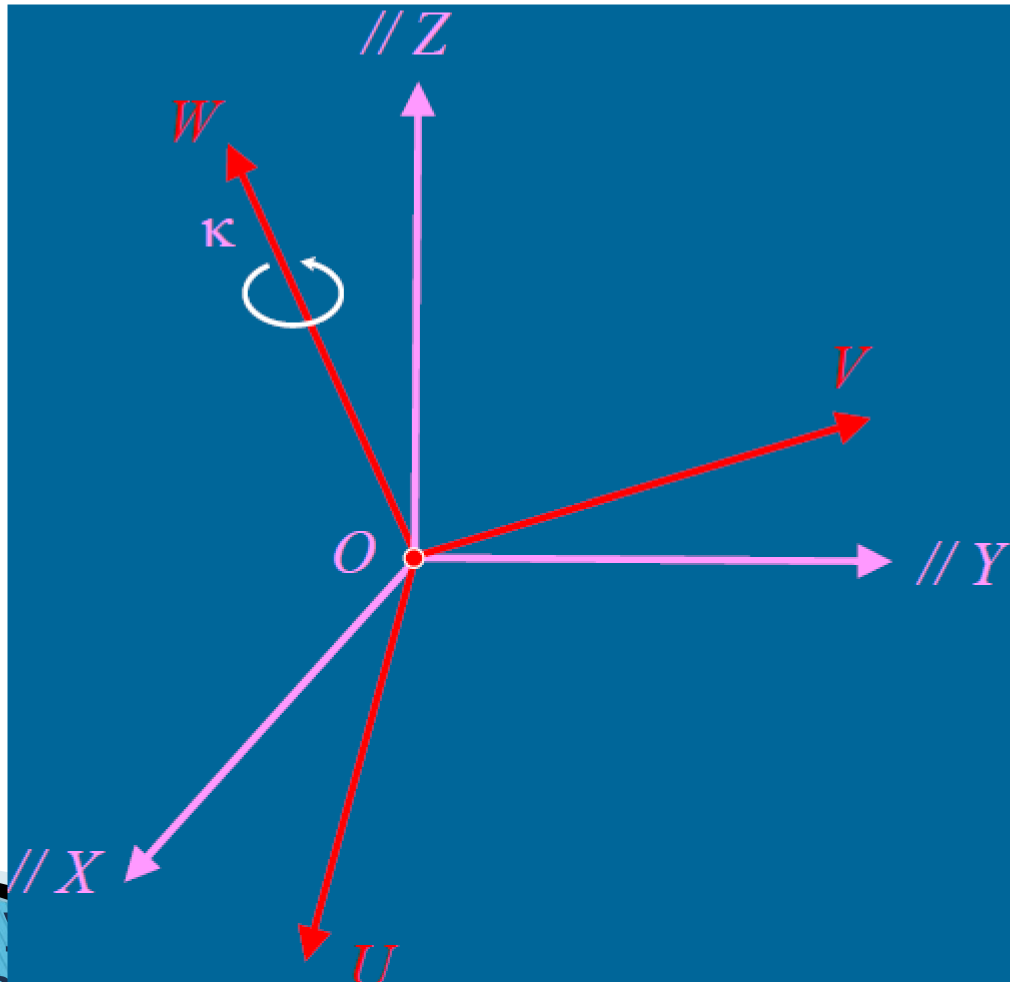
- اگر سیستم مختصات چرخیده باز به اندازه κ حول محور Z بچرخد



برای جلوگیری از تشابه اسمی اسم محورهای این سیستم مختصات را UVW در نظر بگیرید

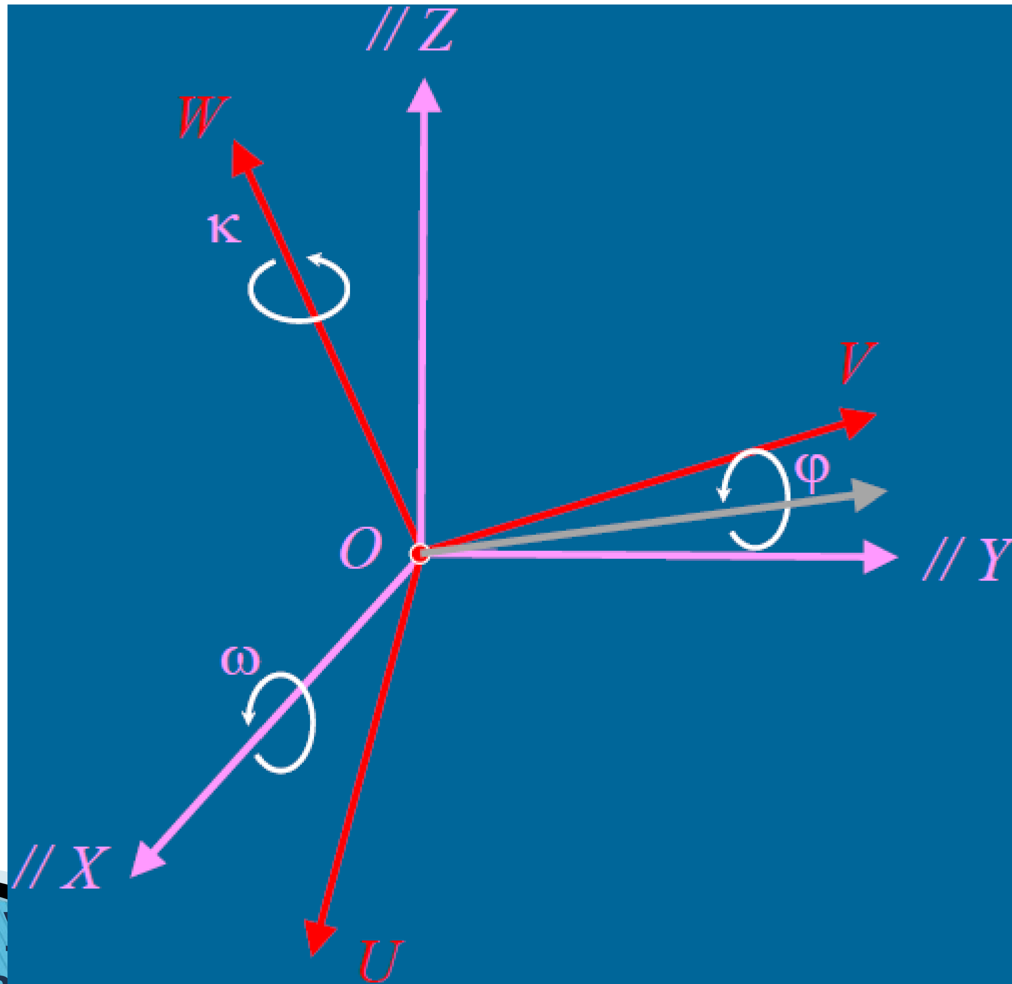
ماتریس دوران

- اگر سیستم مختصات چرخیده باز به اندازه κ حول محور Z بچرخد



ماتریس دوران

- دو سیستم مختصات با در نظر گرفتن هر سه دوران ω, φ, κ



ماتریس دوران

$$x = \overline{OA} = \overline{OP}\cos(k+\alpha)$$
$$y = \overline{AP} = \overline{OP}\sin(k+\alpha)$$

$$\cos(k+\alpha) = \cos k \cos\alpha - \sin k \sin\alpha$$
$$\sin(k+\alpha) = \cos k \sin\alpha + \sin k \cos\alpha$$

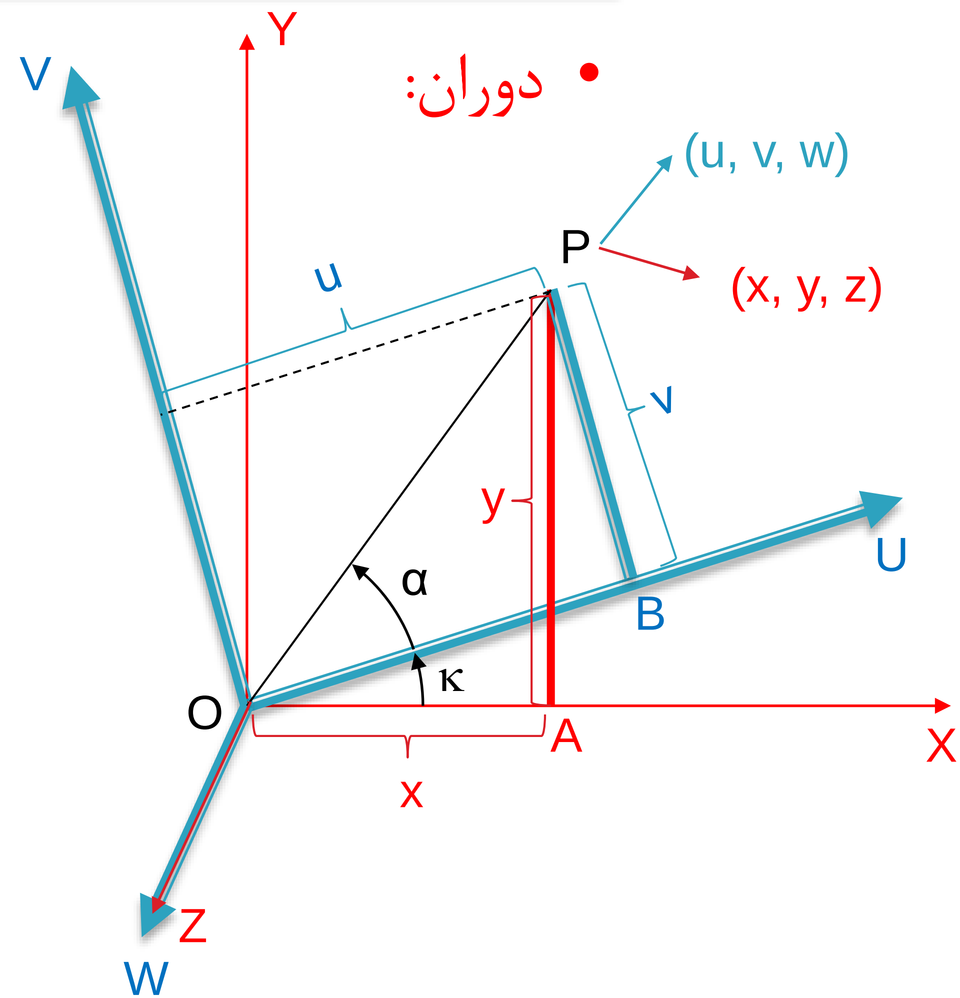
$$x = \underbrace{\overline{OP}\cos\alpha}_{u}\cos k - \underbrace{\overline{OP}\sin\alpha}_{v}\sin k$$

$$\Rightarrow x = u\cos k - v\sin k$$

Similarly, $y = u\sin k + v\cos k$

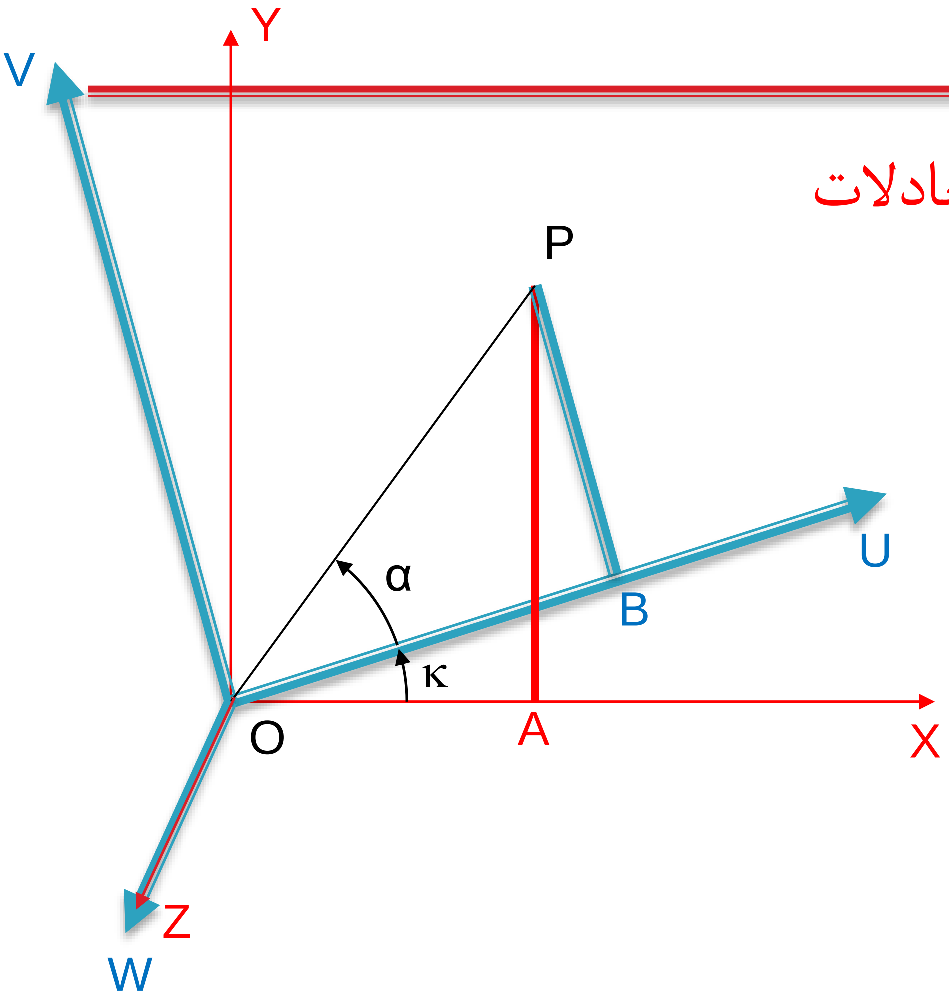
$$z = w$$

- دوران:



ماتریس دوران

- فرم ماتریسی دستگاه معادلات



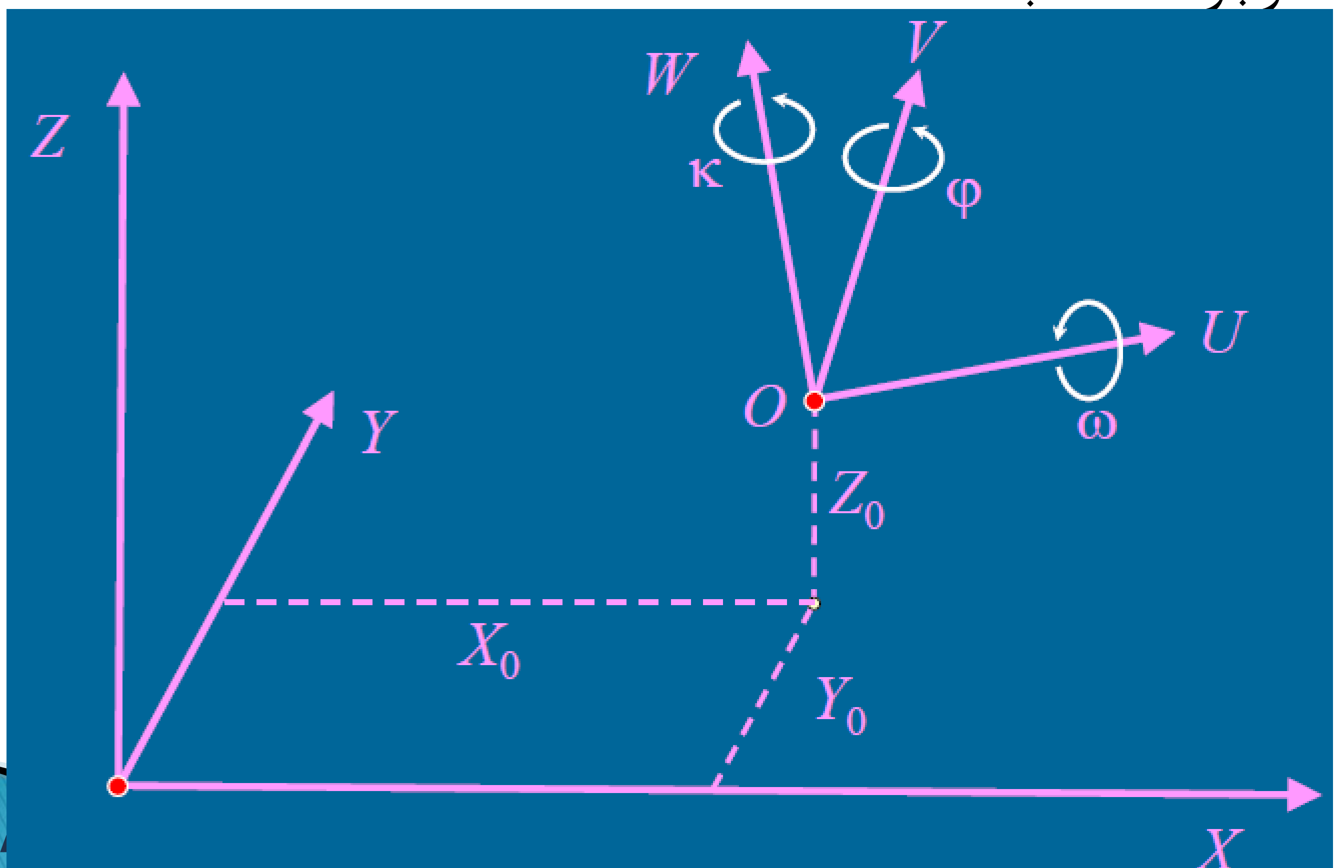
$$\begin{cases} x = u\cos k - v\sin k \\ y = u\sin k + v\cos k \Rightarrow \\ z = w \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos k & -\sin k & 0 \\ \sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos k & \sin k & 0 \\ -\sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

جابجایی

- اگر بین دو سیستم مختصات علاوه بر دوران ها، سه پارامتر انتقال هم وجود داشته باشد



جابجایی و دوران

- از نظر ریاضی رابطه بین دو سیستم مختصات فوق با فرض بر وجود دورانها و انتقال به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = M_3(k)M_2(\varphi)M_1(\omega)\begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix} = M\begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix}$$

- که در آن M ماتریس دوران حول محورهای مختصات و (X0, Y0, Z0) بردار انتقال است

$$M = M_3(k)M_2(\varphi)M_1(\omega) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

$$M_1(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \quad M_2(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad M_3(k) = \begin{bmatrix} \cos k & \sin k & 0 \\ -\sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

جابجایی و دوران

- ماتریس دوران M یک ماتریس ارتوگونال است که از ضرب سه ماتریس دوران دیگر حول محورهای سه گانه سیستم مختصات بوجود آمده است.

$$M = \begin{bmatrix} \cos k \cos\varphi & \cos k \sin\varphi \sin\omega + \sin k \cos\omega & -\cos k \sin\varphi \cos\omega + \sin k \sin\omega \\ -\sin k \cos\varphi & -\sin k \sin\varphi \sin\omega + \cos k \cos\omega & \sin k \sin\varphi \cos\omega + \cos k \sin\omega \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \sin\omega & \cos\varphi \cos\omega \end{bmatrix}$$

- همانطور که از جبر خطی به یاد دارید، ماتریس ارتوگونال دارای خواص زیر است

$$MM^T = I$$

$$|M| = 1$$

$$M^{-1} = M^T$$

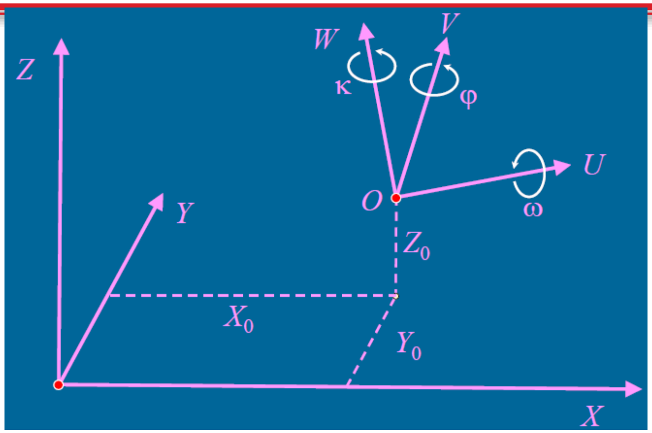
تبدیل سه بعدی هفت پارامتره (هلمرت)

- یکی از تبدیلات سه‌بعدی به سه‌بعدی که در فتوگرامتری نیز کاربرد زیادی دارد، تبدیل هلمرت است.
- این تبدیل شامل هفت پارامتر: سه مولفه دوران، سه انتقال و یک مقیاس (درصورتی که مقیاس وجود نداشته باشد به آن انتقال صلب می گویند).

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \lambda M^{-1} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{bmatrix}$$

- که در آن λ مقیاس، M ماتریس دوران (شامل سه پارامتر دورانی) و $(X_o \quad Y_o \quad Z_o)$ پارامترهای انتقال بین دو سیستم مختصات‌اند.

تبدیل سه بعدی هفت پارامتره (هلمرت)



$$M=\begin{bmatrix} \cos k\cos\varphi & \cos k\sin\varphi\sin\omega+\sin k\cos\omega & -\cos k\sin\varphi\cos\omega+\sin k\sin\omega \\ -\sin k\cos\varphi & -\sin k\sin\varphi\sin\omega+\cos k\cos\omega & \sin k\sin\varphi\cos\omega+\cos k\sin\omega \\ \sin\varphi & -\cos\varphi\sin\omega & \cos\varphi\cos\omega \end{bmatrix}$$

- برای اختصار از این به بعد ترانهاده (وارون) ماتریس دوران با R نشان داده می‌شود.

$$R=M^{-1}=M^{T}\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}=\lambda R\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{bmatrix}$$

تبدیل سه بعدی هفت پارامتره (هلمرت)

- مثال ۸:
- فرض کنید محورهای اول، دوم و سوم سیستم مختصاتی نسبت به محورهای X ، Y و Z سیستم مختصات رفرنس به ترتیب ۱۰ ، ۱۵ و ۵۰ درجه باشد. همچنین فرض کنید جابجایی سیستم مختصات هدف نسبت به سیستم مختصات رفرنس نسبت به مولفه‌های X ، Y و Z به ترتیب ۲۰۰- ، ۱۳۶ و ۱۸۹ است. چنانچه مختصات نقطه ای در سیستم مختصات هدف (1354, 547, 135) باشد، مختصات این نقطه در سیستم مختصات رفرنس چقدر است؟ (مقیاس ۱ در نظر گرفته شود).

تبدیل سه بعدی هفت پارامتره (هلمرت)

- حل مثال ۸:

$$\lambda = 1$$

$$\omega = 10^o \qquad X_0 = -200$$

$$\varphi = 15^o \qquad Y_0 = 136$$

$$\kappa = 50^o \qquad Z_0 = 189$$

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1354 \\ 547 \\ 135 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0.620885 & 0.7832956 & -0.030816 \\ -0.739942 & 0.5985935 & 0.306874 \\ 0.258819 & -0.1677312 & 0.951251 \end{bmatrix} \qquad R = M^T = \begin{bmatrix} 0.620885 & -0.739942 & 0.258819 \\ 0.7832956 & 0.5985935 & -0.1677312 \\ -0.030816 & 0.306874 & 0.951251 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \lambda R \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.620885 & -0.739942 & 0.258819 \\ 0.7832956 & 0.5985935 & -0.1677312 \\ -0.030816 & 0.306874 & 0.951251 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1354 \\ 547 \\ 135 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -200 \\ 136 \\ 189 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 270.8707 \\ 1501.3692 \\ 443.5540 \end{bmatrix}$$

تمرین شماره ۴ – قسمت دوم

- اطلاعات ارائه شده در مثال اسلاید قبل را در نظر بگیرید. سپس یک مختصات سه بعدی دلخواه در سیستم مختصات رفرنس ایجاد کنید. مختصات فوق را با توجه به اطلاعات ارائه شده در مثال اسلاید قبل به سیستم مختصات هدف تبدیل کنید.
- برنامه تمرین فوق را در محیط متلب نوشته و نتیجه آن را تا دو هفته آینده به آدرس noorollah.tatar@gmail.com با موضوع "تمرین شماره ۴ – قسمت دوم درس فتوگرامتری تحلیلی" ایمیل کنید.
- دانشجویانی که سیستم کامپیوتری ندارند، این تمرین را به صورت دستی انجام دهند (همراه با ارائه با ریز جزئیات محاسباتی)

تبدیل افاین سه بعدی

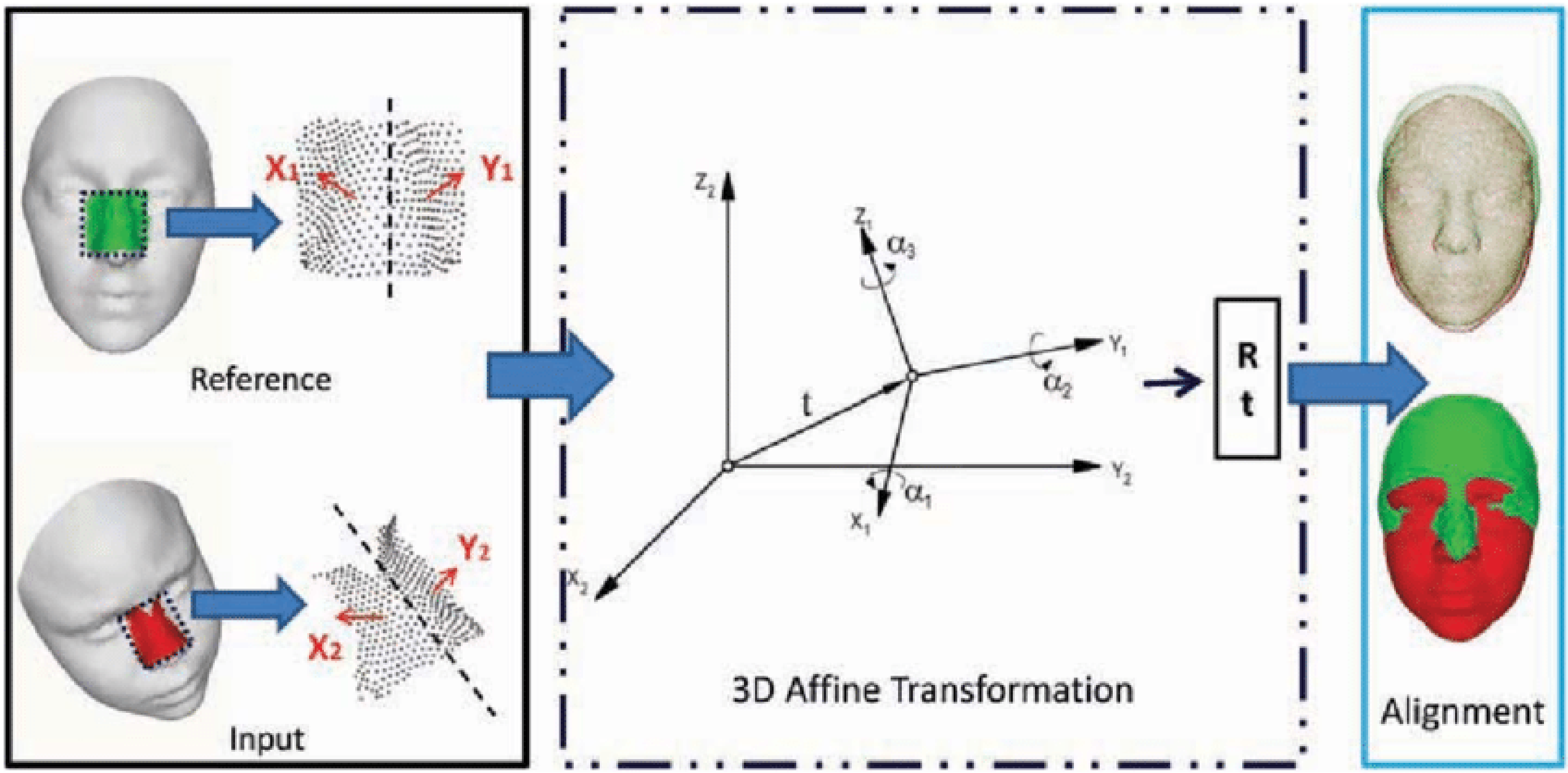
- یکی دیگر از تبدیلات سه‌بعدی، تبدیل افاین سه بعدی است که در واقع تعمیم یافته تبدیل هفت پارامتره است.
- این تبدیل شامل ۱۲ پارامتر: سه پارامتر انتقال، سه پارامتر دوران، سه پارامتر مقیاس، سه پارامتر عدم تعامد محورهای مختصات است.

$$\begin{cases} X = a_1U + a_2V + a_3W + a_4 \\ Y = b_1U + b_2V + b_3W + b_4 \\ Z = c_1U + c_2V + c_3W + c_4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_4 \\ b_4 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ 1 \end{bmatrix}$$

تبدیل افاین سه بعدی

- نمونه ای از کاربرد تبدیل افاین سه بعدی برای هم مرجع سازی ابرنقاط



تبدیل افاین سه بعدی

- نکاتی در مورد تبدیل افاین سه بعدی $X_{3\times1} = A_{3\times3}x_{3\times1} + T_{3\times1}$
- ماتریس زیر که از روی ضرایب تبدیل افاین سه بعدی ایجاد شده است را در نظر بگیرید

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

1. اگر دترمینان A برابر با ۱ باشد، الزاما شکل حفظ نمی شود، ولی مساحت ها حفظ می‌شوند. $|A| = 1$
2. اگر دترمینان A بیشتر از ۱ باشد، شکل بزرگتر می‌شود. $|A| \succ 1$
3. اگر دترمینان A کمتر از ۱ باشد، شکل کوچکتر می‌شود. $|A| \prec 1$

تبدیل افاین سه بعدی

- نکاتی در مورد تبدیل افاین سه بعدی $X_{3\times1} = A_{3\times3}x_{3\times1} + T_{3\times1}$
- ماتریس زیر که از روی ضرایب تبدیل افاین سه بعدی ایجاد شده است را در نظر بگیرید

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

4. اگر ضرب ماتریس $A^T A$ برابر با ضرب یک اسکالر در ماتریس یکه باشد، با تبدیل هلمرت هفت پارامتره روبرو هستیم.

$$A^T A = \alpha I = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

5. اگر ضرب ماتریس $A^T A$ برابر با ماتریس یکه باشد، با یک نوع تبدیل هلمرت شش پارامتره بدون مقیاس روبرو هستیم (انتقال صلب). $A^T A = I$

تبدیل افاین سه بعدی

- مثال ۹:
- برای تبدیل مختصات نقاط در سیستم مختصات هدف به سیستم مختصات رفرنس ، پارامترهای تبدیل افاین سه بعدی به صورت زیر ارائه شده اند.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.7 & 0.3 & -200 \\ 0.8 & 0.6 & 0.2 & 136 \\ -0.1 & 0.3 & 0.9 & 189 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- چنانچه مختصات نقطه ای در سیستم مختصات دوم به صورت (1354, 547, 135) باشد، مختصات این نقطه در سیستم مختصات رفرنس چقدر است؟

تبدیل افاین سه بعدی

- حل مثال ۹:
- با توجه به معادلات مربوط به تبدیل افاین سه بعدی مختصات سیستم مختصات هدف می‌توانند با ضرب ماتریسی زیر به مختصات سیستم مختصات رفرنس تبدیل شوند.

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1354 \\ 547 \\ 135 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.7 & 0.3 & -200 \\ 0.8 & 0.6 & 0.2 & 136 \\ -0.1 & 0.3 & 0.9 & 189 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1354 \\ 547 \\ 135 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 270 \\ 1574.4 \\ 339.2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

تمرین شماره ۴ – قسمت سوم

- اطلاعات ارائه شده در مثال اسلاید قبل را در نظر بگیرید. سپس یک مختصات سه بعدی دلخواه در سیستم مختصات رفرنس ایجاد کنید. مختصات فوق را با توجه به اطلاعات ارائه شده در مثال اسلاید قبل به سیستم مختصات هدف تبدیل کنید.
- برنامه تمرین فوق را در محیط متلب نوشته و نتیجه آن را تا هفته آینده به آدرس noorollah.tatar@gmail.com با موضوع "تمرین شماره ۴ – قسمت سوم درس فتوگرامتری تحلیلی" ایمیل کنید.
- دانشجویانی که سیستم کامپیوتری ندارند، این تمرین را به صورت دستی انجام دهند (همراه با ارائه با ریز جزئیات محاسباتی)

تبدیل پروژکتیو سه بعدی

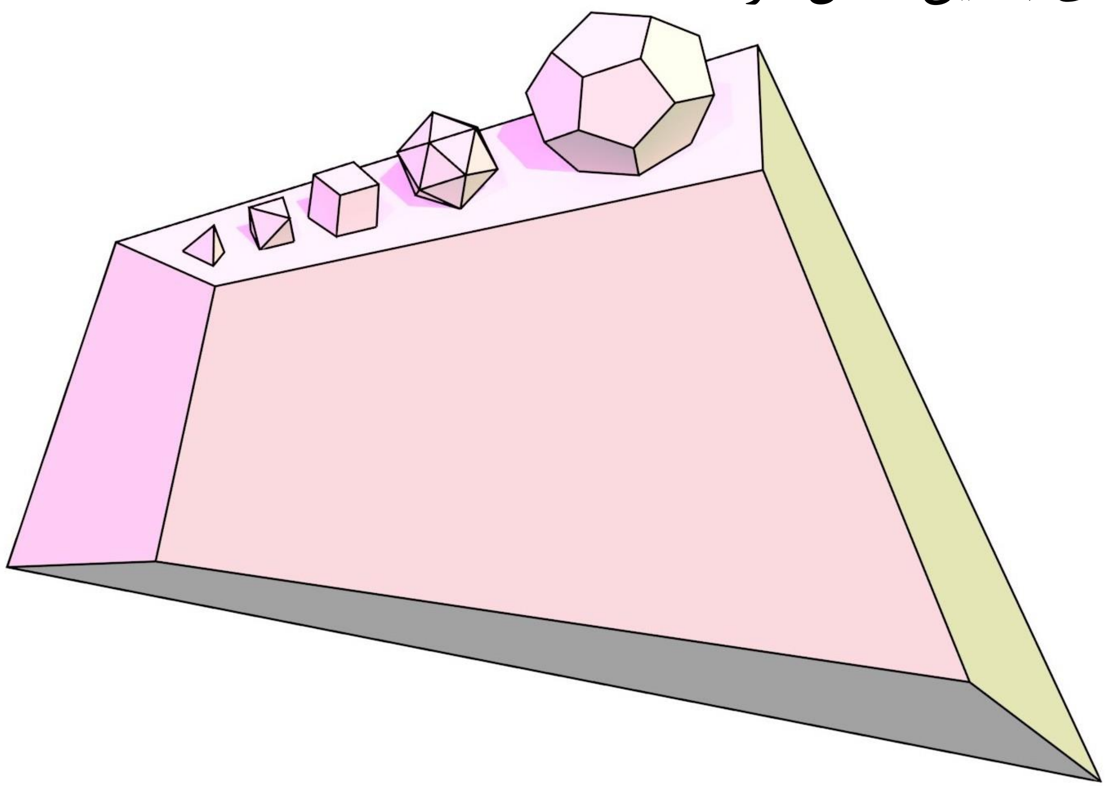
- یکی دیگر از تبدیلات سه‌بعدی، تبدیل پرویکتیو سه بعدی است که حالت کلی‌تری از افاین سه بعدی است.
- این تبدیل شامل ۱۵ پارامتر: سه پارامتر انتقال، سه پارامتر دوران، سه پارامتر مقیاس، سه پارامتر عدم تعامد محورهای مختصات و سه پارامتر پرسپکتیویتی در سه جهت مختلف است.

$$\begin{cases} X = \dfrac{a_1U + a_2V + a_3W + a_4}{d_1U + d_2V + d_3W + 1} \\ Y = \dfrac{b_1U + b_2V + b_3W + b_4}{d_1U + d_2V + d_3W + 1} \\ Z = \dfrac{c_1U + c_2V + c_3W + c_4}{d_1U + d_2V + d_3W + 1} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ 1 \end{bmatrix}$$

تبدیل پروژکتیو سه بعدی

- مثال: یک مکعب مستطیل را در نظر بگیرید که بعد از تبدیل پروژکتیو سه بعدی به این شکل در آمده است.



تبدیل پروژکتیو سه بعدی

- مثال ۱۰:
- برای تبدیل مختصات نقاط در سیستم مختصات هدف به سیستم مختصات رفرنس ، پارامترهای تبدیل پروژکتیو سه بعدی به صورت زیر ارائه شده اند.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.7 & 0.3 & -200 \\ 0.8 & 0.6 & 0.2 & 136 \\ -0.1 & 0.3 & 0.9 & 189 \\ 0.01 & 0.02 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- چنانچه مختصات نقطه ای در سیستم مختصات دوم به صورت (1354, 547, 135) باشد، مختصات این نقطه در سیستم مختصات رفرنس چقدر است؟

تبدیل پروژکتیو سه بعدی

- حل مثال ۱۰:
- با توجه به معادلات مربوط به تبدیل پروژکتیو سه بعدی مختصات سیستم مختصات هدف می‌توانند با ضرب ماتریسی زیر به مختصات سیستم مختصات رفرنس تبدیل شوند.

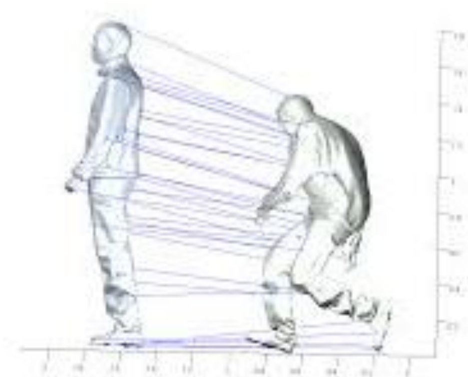
$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1354 \\ 547 \\ 135 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.7 & 0.3 & -200 \\ 0.8 & 0.6 & 0.2 & 136 \\ -0.1 & 0.3 & 0.9 & 189 \\ 0.01 & 0.02 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1354 \\ 547 \\ 135 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 270 \\ 1574.4 \\ 339.2 \\ 25.48 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{25.48} \begin{bmatrix} 270 \\ 1574.4 \\ 339.2 \\ 25.48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.5965 \\ 61.7896 \\ 13.3124 \\ 1 \end{bmatrix}$$

تبدیل چندجمله‌ای سه بعدی

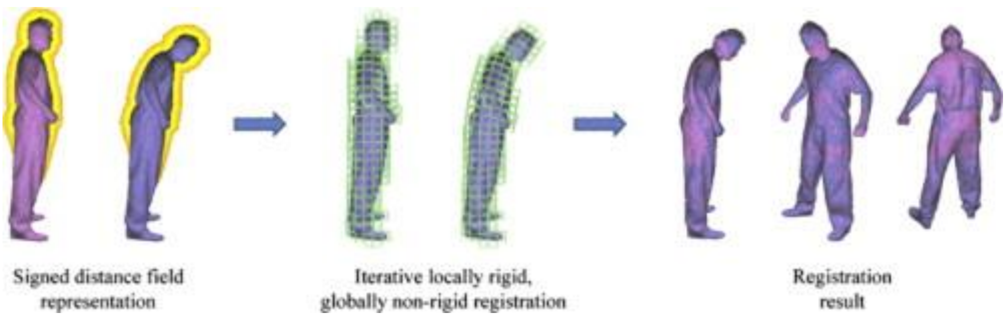
- این نوع تبدیلات بیشتر در گرافیک کامپیوتری که دارای پیچیدگی‌های زیادی است کاربرد دارد. به عنوان مثال هم مرجع سازی ابرنقطه مربوط به یک بازیکن فوتبال که در زمانهای مختلف اخذ شده است. در این حالت رابطه بین مختصات سه بعدی اعضای بدن بازیکن در زمانهای مختلف دارای پیچیدگی‌های زیادی است.

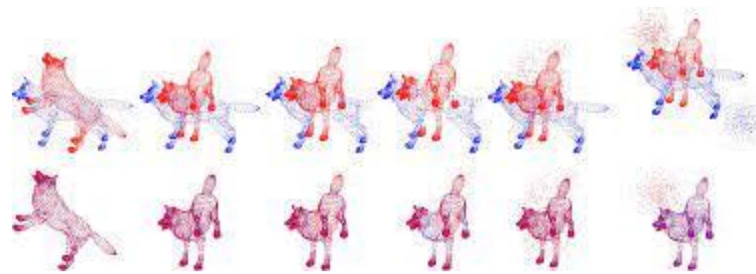
$$\begin{cases} X = a_0 + a_1U + a_2V + a_3W + a_4U^2 + a_5V^2 + a_6W^2 + a_7UV + \dots \\ Y = b_0 + b_1U + b_2V + b_3W + b_4U^2 + b_5V^2 + b_6W^2 + b_7UV + \dots \\ Z = c_0 + c_1U + c_2V + c_3W + c_4U^2 + c_5V^2 + c_6W^2 + c_7UV + \dots \end{cases}$$

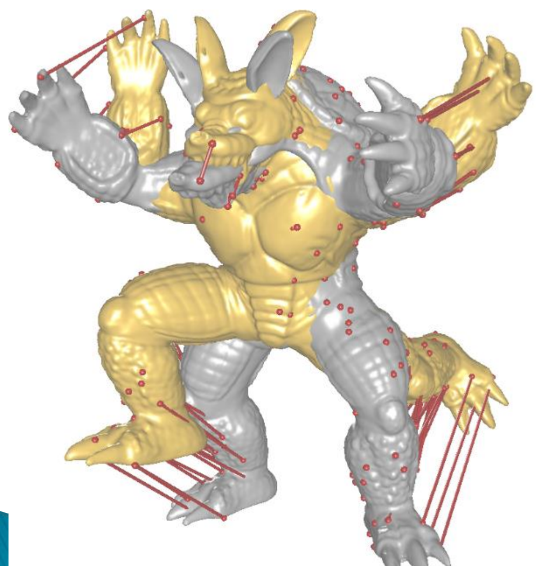


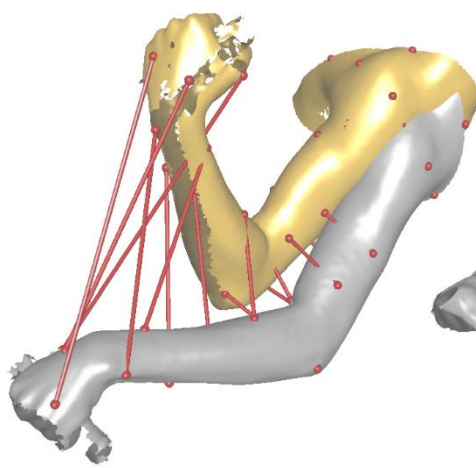
تبدیل چندجمله‌ای سه بعدی

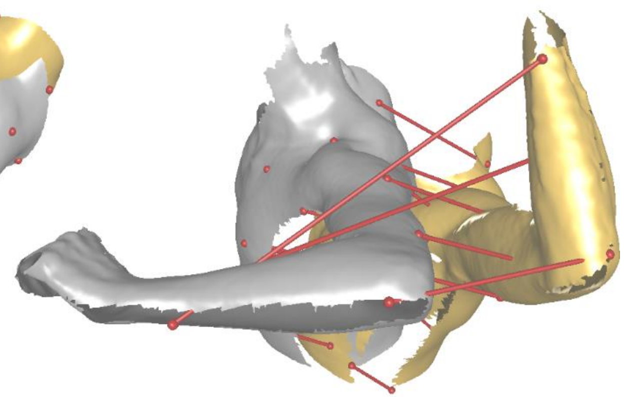
- چند مثال











3D to 2D Transformations

تبدیلات سه بعدی به دو بعدی

- مشابه تبدیلات که پیشتر با آنها آشنا شدیم، یکسری تبدیلات سه بعدی به دو بعدی وجود دارد که اساس محاسبات فتوگرامتری بر آن استوار است.
- تصویربرداری در واقع یک نگاشت سه بعدی به صفحه دو بعدی است.
- برای این تبدیل مدلهای ریاضیاتی متعددی وجود دارد از جمله:
  - افاین هشت پارامتری
  - شرط هم خطی
  - تبدیل DLT
  - توابع رشنال

تبدیل افاین هشت پارامتری

- یکی از تبدیلات سه‌بعدی به دو بعدی که در تصاویر با هندسه موازی به کار می رود، تبدیل افاین هشت پارامتری است.

$$\begin{cases} x = a_1X + a_2Y + a_3Z + a_4 \\ y = b_1X + b_2Y + b_3Z + b_4 \end{cases}$$

- که در آن x و y مختصات عکسی و X,Y,Z مختصات زمینی است و ضرایب a و b ضرایب افاین هشت پارامتری هستند.
- این تبدیل برای زمین‌مرجع‌سازی برخی تصاویر ماهواره‌ای که اثر پرسپکتیویتی در آنها قابل چشم پوشی است نیز به کار می رود.

تبدیل افاین هشت پارامتری

- فرم ماتریسی تبدیل افاین هشت پارامتری در حالتی که پارامترهای آن مجهول و مختصات زمینی و عکسی اندازه‌گیری شده اند، به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{L} = \underbrace{\begin{bmatrix} X & Y & Z & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & Y & Z & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}}_{X} \Rightarrow AX = L$$

- برای حل این دستگاه معادله حداقل به چهار نقطه کنترل که در یک صفحه سه‌بعدی قرار نگرفته باشند نیاز است.

تبدیل افاین هشت پارامتری

- مثال ۱۱:
- برای تبدیل مختصات نقاط از سیستم مختصات زمینی به سیستم مختصات عکسی ، پارامترهای تبدیل افاین هشت پارامتره به صورت زیر ارائه شده اند. (ورودی بر حسب متر و خروجی بر حسب پیکسل است)

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.2 & 0.0004 & 8060 \\ -0.29 & 0.18 & 0.0005 & 9600 \end{bmatrix}$$

- چنانچه مختصات نقطه ای در سیستم مختصات زمینی به صورت (1300, 650, 169) باشد، مختصات این نقطه در سیستم مختصات عکسی چقدر است؟

تبدیل افاین هشت پارامتری

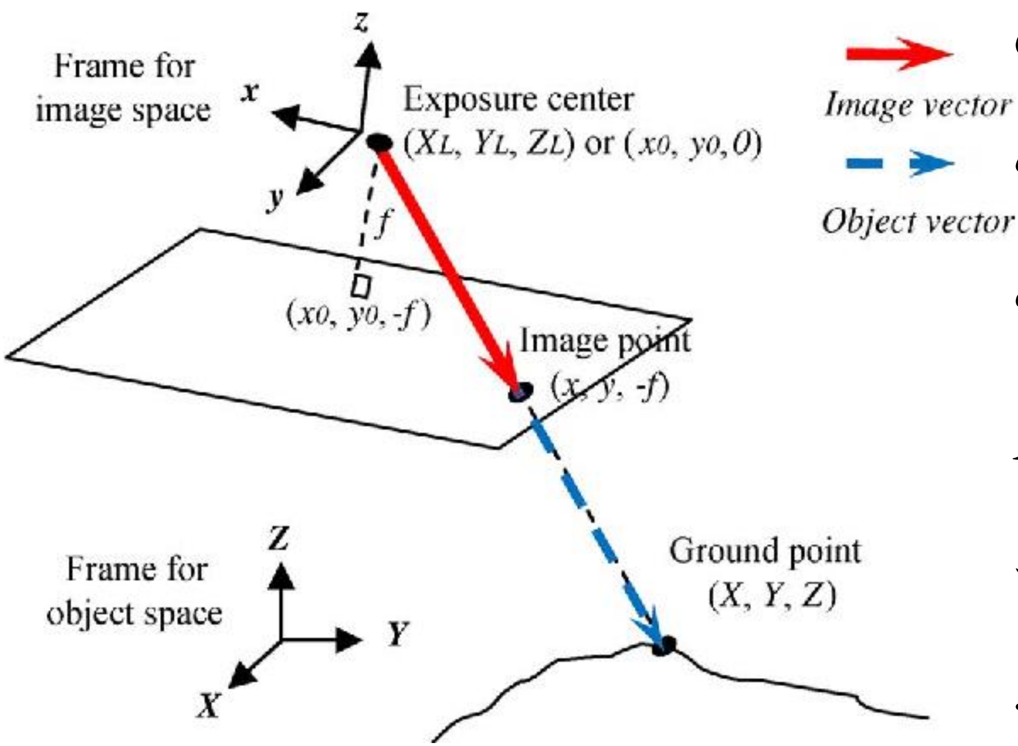
- حل مثال ۱۱:
- با توجه به معادلات مربوط به تبدیل افاین هشت پارامتری مختصات زمینی می‌توانند با ضرب ماتریسی زیر به مختصات عکسی تبدیل شوند.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1300 \\ 650 \\ 169 \end{bmatrix} \text{ برحسب متر}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.2 & 0.0004 & 8060 \\ -0.29 & 0.18 & 0.0005 & 9600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1300 \\ 650 \\ 169 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8320.0676 \\ 9340.0845 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 8320 \\ 9340 \end{bmatrix}$$

برحسب پیکسل

شرط هم خطی



- در فتوگرامتری فرض می‌شود پرتو گذرنده از نقطه زمینی، عکسی و مرکز تصویر بر روی یک خط مستقیم قرار دارد. (فرض نبود اعوجاج)

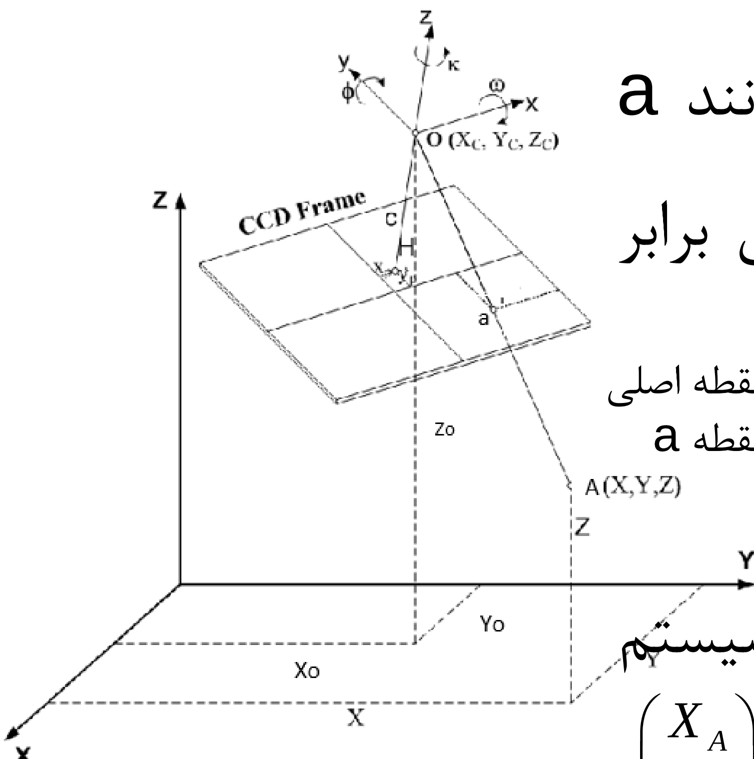
شرط هم خطی

- شرط هم خطی:

- فرض کنید مختصات هر نقطه مانند a در سیستم مختصات مرکز عکسی برابر باشد با:

$$\begin{pmatrix} x_a - x_o \\ y_a - y_o \\ -f \end{pmatrix}$$

xo, yo مختصات نقطه اصلی
xa, ya مختصات نقطه a
f فاصله کانونی



- مختصات زمینی نقطه A در سیستم مختصات زمینی نیز برابر است با:

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix}$$

شرط هم خطی

- شرط هم خطی:
- چنانچه مختصات مرکز تصویر در سیستم مختصات زمینی برابر $\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}$ باشد با:
- آنگاه طبق شرط هم خطی رابطه هر نقطه زمینی با متناظر عکسی‌اش برابر است با:

$$\begin{pmatrix} x_a - x_o \\ y_a - y_o \\ -f \end{pmatrix} = \lambda M \begin{pmatrix} X_A - X_0 \\ Y_A - Y_0 \\ Z_A - Z_0 \end{pmatrix}$$

- که در آن M ماتریس دوران و λ یک مقیاس کلی است.

شرط هم خطی

- شرط هم خطی:

- با ساده سازی فرم برداری فوق شرط هم خطی برابر است با:

$$\begin{pmatrix} x_a - x_o \\ y_a - y_o \\ -f \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_A - X_0 \\ Y_A - Y_0 \\ Z_A - Z_0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x_a - x_o = \lambda \left[m_{11}(X_A - X_0) + m_{12}(Y_A - Y_0) + m_{13}(Z_A - Z_0) \right]$$

$$y_a - y_o = \lambda \left[m_{21}(X_A - X_0) + m_{22}(Y_A - Y_0) + m_{23}(Z_A - Z_0) \right]$$

$$-f = \lambda \left[m_{31}(X_A - X_0) + m_{32}(Y_A - Y_0) + m_{33}(Z_A - Z_0) \right]$$

شرط هم خطی

- شرط هم خطی:
- با تقسیم جمله اول و دوم بر جمله سوم (برای حذف λ از معادلات) معادلات شرط هم خطی برابر خواهند بود با:

$$x_a - x_o = -f\,\frac{[m_{11}(X_A - X_0) + m_{12}(Y_A - Y_0) + m_{13}(Z_A - Z_0)]}{[m_{31}(X_A - X_0) + m_{32}(Y_A - Y_0) + m_{33}(Z_A - Z_0)]}$$

$$y_a - y_o = -f\,\frac{[m_{21}(X_A - X_0) + m_{22}(Y_A - Y_0) + m_{23}(Z_A - Z_0)]}{[m_{31}(X_A - X_0) + m_{32}(Y_A - Y_0) + m_{33}(Z_A - Z_0)]}$$

شرط هم خطی

- مثال ۱۲:
- فرض کنید یک عکس هوایی با پارامترهای توجیه خارجی و داخلی زیر اخذ شده است.

پارامترهای توجیه داخلی (میلیمتر)		
xo	y0	f
0.008	-0.12	152.14

پارامترهای توجیه خارجی (موقعیت و وضعیت)					
ω (deg)	Φ (deg)	K (deg)	X0 (m)	Y0 (m)	Z0 (m)
2	3	10	1114	862	1600

- چنانچه مختصات نقطه ای در سیستم مختصات زمینی برحسب متر به صورت (1300, 650, 169) باشد، مختصات این نقطه در سیستم مختصات عکسی چقدر است؟ (سیستم مختصات علائم کناری)

شرط هم خطی

- حل مثال ۱۲:
- با توجه به معادلات مربوط به شرط هم خطی ابتدا ماتریس دوران محاسبه می شود

$$\begin{bmatrix} \omega \\ \varphi \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^o \\ 3^o \\ 10^o \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \cos k \cos\varphi & \cos k \sin\varphi \sin\omega + \sin k \cos\omega & -\cos k \sin\varphi \cos\omega + \sin k \sin\omega \\ -\sin k \cos\varphi & -\sin k \sin\varphi \sin\omega + \cos k \cos\omega & \sin k \sin\varphi \cos\omega + \cos k \sin\omega \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \sin\omega & \cos\varphi \cos\omega \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0.9835 & 0.1753 & -0.0454 \\ -0.1734 & 0.9839 & 0.0435 \\ 0.0523 & -0.0349 & 0.9980 \end{bmatrix}$$

شرط هم خطی

- حل مثال ۱۲:
- سپس مختصات زمینی می‌توانند در معادلات شرط هم خطی قرار گرفته و به مختصات عکسی تبدیل شوند.

$$\begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1300 \\ 650 \\ 169 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1114 \\ 862 \\ 1600 \end{bmatrix}$$

$$x_a = 0.008 - 152.14 \frac{[0.9835 \times (1300-1114) + 0.1753 \times (650-862) - 0.0454 \times (169-1600)]}{[0.0523 \times (1300-1114) - 0.0349 \times (650-862) + 0.9980 \times (169-1600)]} = 22.7354mm$$

$$y_a = -0.12 - 152.14 \frac{[-0.1734 \times (1300-1114) + 0.9839 \times (650-862) + 0.0435 \times (169-1600)]}{[0.0523 \times (1300-1114) - 0.0349 \times (650-862) + 0.9980 \times (169-1600)]} = -32.7917mm$$

شرط هم خطی

- مثال ۱۳:
- فرض کنید یک تصویر رقومی هوایی با پیکسل سایز ۱۲ میکرون و با پارامترهای توجیه خارجی و داخلی زیر اخذ شده است.

پارامترهای توجیه داخلی (پیکسل)		
Col p.p	Row p.p	f
3840	6912	10000

پارامترهای توجیه خارجی (موقعیت و وضعیت)					
ω (deg)	Φ (deg)	K (deg)	X0 (m)	Y0 (m)	Z0 (m)
1.5	2	4	1160	792	1500

- چنانچه مختصات نقطه ای در سیستم مختصات زمینی برحسب متر به صورت (1300, 650, 169) باشد، مختصات این نقطه در سیستم مختصات تصویری چقدر است؟ (بر حسب پیکسل)

شرط هم خطی

- حل مثال ۱۳:
- با توجه به معادلات مربوط به شرط هم خطی ابتدا ماتریس دوران محاسبه می شود

$$\begin{bmatrix} \omega \\ \varphi \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5^o \\ 2^o \\ 4^o \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \cos k \cos \varphi & \cos k \sin \varphi \sin \omega + \sin k \cos \omega & -\cos k \sin \varphi \cos \omega + \sin k \sin \omega \\ -\sin k \cos \varphi & -\sin k \sin \varphi \sin \omega + \cos k \cos \omega & \sin k \sin \varphi \cos \omega + \cos k \sin \omega \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \sin \omega & \cos \varphi \cos \omega \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0.9970 & 0.0706 & -0.0330 \\ -0.0697 & 0.9972 & 0.0285 \\ 0.0349 & -0.0262 & 0.9990 \end{bmatrix}$$

شرط هم خطی

- حل مثال ۱۳:
- در مرحله بعد فاصله کانونی بر حسب میلیمتر محاسبه می‌شود.

$$f = 10000\,pixel = 10000 \times 0.000012 = 0.12m = 120mm$$

- همچنین موقعیت نقطه اصلی صفر فرض می‌شود.

$$x_{p.p} = 0 \qquad y_{p.p} = 0$$

- البته توجه داشته باشید نقطه اصلی لزوما در مرکز ماتریس تشکیل دهنده تصویر قرار ندارد! این بدان سبب است که محور اپتیکی دوربین از مرکز CCD عبور نمی کند. ممکن است چند پیکسل اختلاف باشد.

شرط هم خطی

- حل مثال ۱۳:
- در مرحله بعد مختصات زمینی می‌توانند در معادلات شرط هم خطی قرار گرفته و به مختصات عکسی تبدیل شوند.

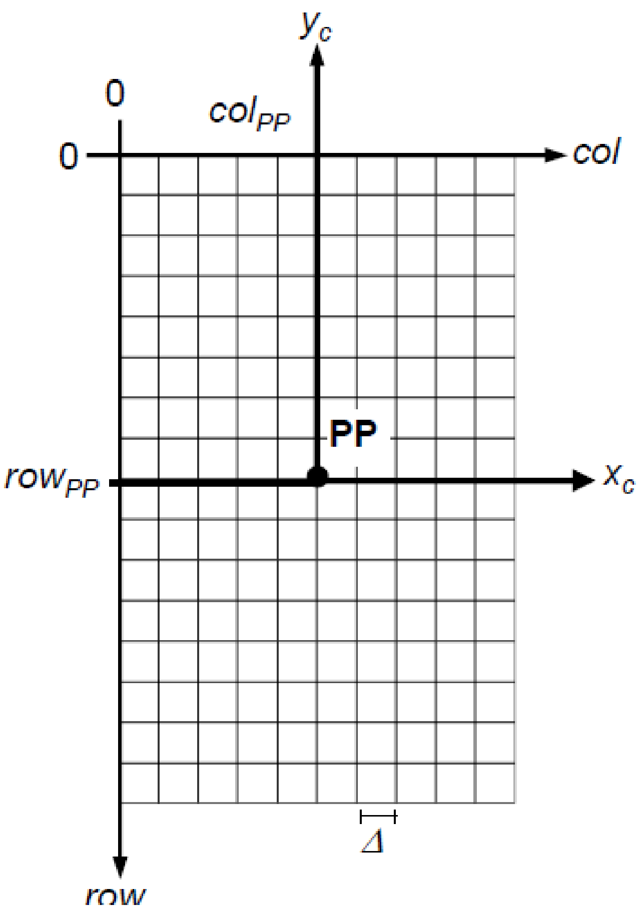
$$\begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1300 \\ 650 \\ 169 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1162 \\ 792 \\ 1500 \end{bmatrix}$$

$$x_a = -120 \times \frac{[0.9970 \times (1300-1162) + 0.0706 \times (650-792) - 0.0330 \times (169-1500)]}{[0.0349 \times (1300-1162) - 0.0262 \times (650-792) + 0.9990 \times (169-1500)]} = 15.7532 mm$$

$$y_a = -120 \times \frac{[-0.0697 \times (1300-1162) + 0.9972 \times (650-792) + 0.0285 \times (169-1500)]}{[0.0349 \times (1300-1162) - 0.0262 \times (650-792) + 0.9990 \times (169-1500)]} = -17.1991 mm$$

شرط هم خطی

$$\Delta = 12micron = 0.012mm$$



- حل مثال ۱۳:
- از طرفی همانطور که می دانید برای تبدیل مختصات مرکز تصویر به مختصات تصویری به صورت زیر عمل می شود.

$$x_a = \Delta \times (col - col_{p.p}) \Rightarrow col = col_{p.p} + \frac{x_a}{\Delta}$$

$$y_a = -\Delta \times (row - row_{p.p}) \Rightarrow row = row_{p.p} - \frac{y_a}{\Delta}$$

$$col = col_{p.p} + \frac{x_a}{\Delta} = 3840 + \frac{15.7532}{0.012} = 5152.8\,pixel$$

$$row = row_{p.p} - \frac{y_a}{\Delta} = 6912 - \frac{-17.1991}{0.012} = 8345.3\,pixel$$

تبدیل DLT

- یکی دیگر از تبدیلات سه‌بعدی به دو بعدی، تبدیل DLT است که در واقع حالت پارامتریک شرط هم خطی است. این تبدیل شامل ۱۱ پارامتر است.

$$x_a - x_o = -f\frac{[m_{11}(X_A - X_0) + m_{12}(Y_A - Y_0) + m_{13}(Z_A - Z_0)]}{[m_{31}(X_A - X_0) + m_{32}(Y_A - Y_0) + m_{33}(Z_A - Z_0)]}$$

$$y_a - y_o = -f\frac{[m_{21}(X_A - X_0) + m_{22}(Y_A - Y_0) + m_{23}(Z_A - Z_0)]}{[m_{31}(X_A - X_0) + m_{32}(Y_A - Y_0) + m_{33}(Z_A - Z_0)]}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{L_1X + L_2Y + L_3Z + L_4}{L_9X + L_{10}Y + L_{11}Z + 1} \\ y = \dfrac{L_5X + L_6Y + L_7Z + L_8}{L_9X + L_{10}Y + L_{11}Z + 1} \end{cases}$$

- پارامترهای DLT همان پارامترهای معادله شرط هم خطی اند با این تفاوت که دستگاه معادلات مربوط به آن را می‌توان به صورت خطی نوشت. البته دارای تفاوت هایی هستند که در ادامه به آنها اشاره می‌شود.

تبدیل DLT

- معادلات DLT در سال ۱۹۷۱ توسط عبدل عزیز و کارارا توسعه یافتند. هدف اصلی از ارائه این تبدیل برقراری ارتباط مستقیم بین مختصات کامپاراتور یا مختصات تصویری با مختصات زمینی بود.
- معادلات DLT اگرچه خطی اند ولی این پارامترها زمانی که مستقیما برآورد می‌شوند از استحکام پایینی برخوردارند.
- دلیل اینکه این تبدیل استحکام پایینی دارد به دو عامل بستگی دارد.
- یکی اینکه تعامد ماتریس دوران را ندارند و بین پارامترها وابستگی وجود دارد که اثر خطای اندازه گیری بر آن بسیار زیاد است.

تبدیل DLT

- دلیل دیگری که باعث شده در نظر گرفتن دو فاصله کانونی در جهت‌های مختلف و ادغام پارامترهای توجیه داخلی در توجیه خارجی است.
- چنانچه پارامترهای توجیه خارجی و داخلی موجود باشند، پارامترهای DLT از روابط زیر قابل محاسبه اند:

$$Q = \frac{-1}{m_{31}X_0 + m_{32}Y_0 + m_{33}Z_0}$$

$$L_1 = (x_0 m_{31} - c_x m_{11})Q$$
$$L_2 = (x_0 m_{32} - c_x m_{12})Q$$
$$L_3 = (x_0 m_{33} - c_x m_{13})Q$$
$$L_4 = x_0 + (m_{11}X_0 + m_{12}Y_0 + m_{13}Z_0)Qc_x$$
$$L_5 = (y_0 m_{31} - c_y m_{21})Q$$
$$L_6 = (y_0 m_{32} - c_y m_{22})Q$$
$$L_7 = (y_0 m_{33} - c_y m_{23})Q$$
$$L_8 = y_0 + (m_{21}X_0 + m_{22}Y_0 + m_{23}Z_0)Qc_y$$
$$L_9 = m_{31}Q$$
$$L_{10} = m_{32}Q$$
$$L_{11} = m_{33}Q$$

تبدیل DLT

- مثال ۱۴:
- فرض کنید یک عکس هوایی با پارامترهای توجیه خارجی و داخلی زیر اخذ شده است.

پارامترهای توجیه داخلی (میلیمتر)		
xo	y0	f
0.008	-0.12	152.14

پارامترهای توجیه خارجی (موقعیت و وضعیت)					
ω (deg)	Φ (deg)	K (deg)	X0 (m)	Y0 (m)	Z0 (m)
2	3	10	1114	862	1600

- چنانچه بخواهیم پارامترهای توجیه داخلی و خارجی را به ضرایب معادلات DLT تبدیل کنیم، این ضرایب چه مقداری خواهند داشت؟

تبدیل DLT

- حل مثال ۱۴:
- ابتدا ماتریس دوران محاسبه می‌شود

$$\begin{bmatrix} \omega \\ \varphi \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^o \\ 3^o \\ 10^o \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \cos k \cos\varphi & \cos k \sin\varphi \sin\omega + \sin k \cos\omega & -\cos k \sin\varphi \cos\omega + \sin k \sin\omega \\ -\sin k \cos\varphi & -\sin k \sin\varphi \sin\omega + \cos k \cos\omega & \sin k \sin\varphi \cos\omega + \cos k \sin\omega \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \sin\omega & \cos\varphi \cos\omega \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0.9835 & 0.1753 & -0.0454 \\ -0.1734 & 0.9839 & 0.0435 \\ 0.0523 & -0.0349 & 0.9980 \end{bmatrix}$$

تبدیل DLT

$$M=\begin{bmatrix}0.9835 & 0.1753 & -0.0454\\ -0.1734 & 0.9839 & 0.0435\\ 0.0523 & -0.0349 & 0.9980\end{bmatrix}$$

- ادامه حل مثال ۱۴:
- سپس ضرایب معادلات DLT محاسبه می‌شوند.

$$X_0=1114 \quad Y_0=862 \quad Z_0=1600 \quad c_x=c_y=152.14 \quad xo=0.008 \quad yo=-0.012$$

$$Q=\frac{-1}{m_{31}X_0+m_{32}Y_0+m_{33}Z_0}=\frac{-1}{0.0523\times1114-0.0349\times862+0.998\times1600}=-0.00061535$$

$$L_1=(x_0m_{31}-c_xm_{11})Q=-(0.008\times0.0523-152.14\times0.9835)\times0.00061535=0.0921$$

$$L_2=(x_0m_{32}-c_xm_{12})Q=-(-0.008\times0.0349-152.14\times0.1753)\times0.00061535=0.0164$$

$$L_3=(x_0m_{33}-c_xm_{13})Q=-(0.008\times0.998+152.14\times0.0454)\times0.00061535=-0.0043$$

$$L_4=x_0+(m_{11}X_0+m_{12}Y_0+m_{13}Z_0)Qc_x\Rightarrow$$

$$L_4=0.008-(0.9835\times1114+0.1753\times862-0.0454\times1600)\times0.00061535\times152.14=-109.9007$$

تبدیل DLT

$$M=\begin{bmatrix} 0.9835 & 0.1753 & -0.0454 \\ -0.1734 & 0.9839 & 0.0435 \\ 0.0523 & -0.0349 & 0.9980 \end{bmatrix}$$

- ادامه حل مثال ۱۴:
- سپس ضرایب معادلات DLT محاسبه می‌شوند.

$$X_0=1114 \quad Y_0=862 \quad Z_0=1600 \quad c_x=c_y=152.14 \quad xo=0.008 \quad yo=-0.012$$

$$Q=\frac{-1}{m_{31}X_0+m_{32}Y_0+m_{33}Z_0}=\frac{-1}{0.0523\times1114-0.0349\times862+0.998\times1600}=-0.00061535$$

$$L_5=(y_0m_{31}-c_ym_{21})Q=-(-0.012\times0.0523+152.14\times0.1734)\times0.00061535=-0.0162$$

$$L_6=(y_0m_{32}-c_ym_{22})Q=-(0.012\times0.0349-152.14\times0.9839)\times0.00061535=0.0921$$

$$L_7=(y_0m_{33}-c_ym_{23})Q=-(-0.012\times0.998-152.14\times0.0435)\times0.00061535=0.0041$$

$$L_8=y_0+(m_{21}X_0+m_{22}Y_0+m_{23}Z_0)Qc_y \Rightarrow$$

$$L_8=-0.012+(-0.1734\times1114+0.9839\times862+0.0435\times1600)\times0.00061535\times152.14=-67.9431$$

تبدیل DLT

$$M=\begin{bmatrix}0.9835 & 0.1753 & -0.0454\\ -0.1734 & 0.9839 & 0.0435\\ 0.0523 & -0.0349 & 0.9980\end{bmatrix}$$

- ادامه حل مثال ۱۴:
- سپس ضرایب معادلات DLT محاسبه می‌شوند.

$$X_0=1114 \quad Y_0=862 \quad Z_0=1600 \quad c_x=c_y=152.14 \quad xo=0.008 \quad yo=-0.012$$

$$Q=\frac{-1}{m_{31}X_0+m_{32}Y_0+m_{33}Z_0}=\frac{-1}{0.0523\times1114-0.0349\times862+0.998\times1600}=-0.00061535$$

$$L_9=m_{31}Q=-0.0523\times0.00061535=-0.000032205$$
$$L_{10}=m_{32}Q=0.0349\times0.00061535=0.000021446$$
$$L_{11}=m_{33}Q=-0.998\times0.00061535=-0.00061413$$

تبدیل DLT

- ادامه حل مثال ۱۴:
- فرم ماتریسی ضرایب DLT به صورت زیر خواهد بود

$$x = PX \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.0921 & 0.0164 & -0.0043 & -109.9007 \\ -0.0162 & 0.0921 & 0.0041 & -67.9431 \\ -0.000032205 & 0.000021446 & -0.00061413 & 1 \end{bmatrix}_{3\times4}}_{Camera\_Matrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}_{4\times1}$$

- در جامعه بینایی ماشین و رباتیک به ماتریس فوق که شامل ضرایب DLT است، ماتریس دوربین نیز گفته می‌شود.

تبدیل DLT

- همچنین چنانچه پارامترهای DLT موجود باشند، پارامترهای توجیه خارجی و داخلی از روابط زیر قابل محاسبه اند:

$$L^2 = L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2$$

$$x_0 = \frac{L_1 L_9 + L_2 L_{10} + L_3 L_{11}}{L^2}$$

$$y_0 = \frac{L_5 L_9 + L_6 L_{10} + L_7 L_{11}}{L^2}$$

$$c_x^2 = \frac{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2}{L^2} - x_0^2$$

$$c_y^2 = \frac{L_5^2 + L_6^2 + L_7^2}{L^2} - y_0^2$$

$$m_{31} = \frac{L_9}{L} \quad m_{32} = \frac{L_{10}}{L} \quad m_{33} = \frac{L_{11}}{L}$$

$$m_{11} = \frac{x_0 m_{31} - \frac{L_1}{L}}{c_x} \quad m_{12} = \frac{x_0 m_{32} - \frac{L_2}{L}}{c_x} \quad m_{13} = \frac{x_0 m_{33} - \frac{L_3}{L}}{c_x}$$

$$m_{21} = \frac{y_0 m_{31} - \frac{L_5}{L}}{c_y} \quad m_{22} = \frac{y_0 m_{32} - \frac{L_6}{L}}{c_y} \quad m_{23} = \frac{y_0 m_{33} - \frac{L_7}{L}}{c_y}$$

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ L_5 & L_6 & L_7 \\ L_9 & L_{10} & L_{11} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L_4 \\ L_8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

تبدیل DLT

- معادلات DLT دارای یازده پارامتر هستند در حالی که برای تبدیل مختصات سه بعدی به مختصات عکسی تنها به نه پارامتر (سه پارامتر توجیه داخلی و شش پارامتر توجیه خارجی) نیاز است! دو پارامتر اضافی تبدیل DLT چه پارامترهایی هستند؟
- این پارامترها کشیدگی خطی غیریکنواخت در راستای x و y هستند. این دو پارامتر را می‌توان پیکسل سایز غیریکسان هم در نظر گرفت.
- در دوربین‌هایی که استحکام هندسی بالاست می‌توان با اضافه کردن قید تعامد ماتریس دوران، اثر این دو پارامتر اضافی غیر ضرور را کاهش داد.

تبدیل DLT

- قیودی که از تعامد ماتریس دوران به دست می‌آیند به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\left(L_1^2+L_2^2+L_3^2\right)-\left(L_5^2+L_6^2+L_7^2\right)+\frac{\left(L_5L_9+L_6L_{10}+L_7L_{11}\right)^2-\left(L_1L_9+L_2L_{10}+L_3L_{11}\right)^2}{L_9^2+L_{10}^2+L_{11}^2}=0$$

$$L_1L_5+L_2L_6+L_3L_7-\frac{\left(L_5L_9+L_6L_{10}+L_7L_{11}\right)\left(L_1L_9+L_2L_{10}+L_3L_{11}\right)}{L_9^2+L_{10}^2+L_{11}^2}=0$$

- به کارگیری این قیود برای برآورد پایدار پارامترهای تبدیل DLT باعث غیر خطی شدن معادلات می‌شود! که تنها مزیت این تبدیل را از بین می‌برد.

تبدیل DLT

- در حالت کلی برای برآورد مستقیم پارامترهای معادلات DLT به ۶ نقطه کنترل زمینی که بر روی یک صفحه نباشند، نیاز است. زیرا با ۶ نقطه کنترل می‌توان ۱۲ معادله مستقل نوشت و ۱۱ مجهول معادلات DLT را برآورد نمود.
- در صورتی که از معادلات قید تعامد استفاده شود می‌توان با ۵ نقطه که بر روی یک صفحه نباشند، پارامترهای این تبدیل را برآورد نمود.
- چنانچه همه نقاط کنترل بر روی یک صفحه سه بعدی قرار گرفته باشند، بین معادلات وابستگی بوجود می‌آید و سرشکنی دچار مشکل می‌شود.

تبدیل DLT

- چند نکته در مورد معادلات DLT
- معمولا از این معادلات برای برآورد مقدار اولیه پارامترهای توجیه خارجی یا کالیبراسیون استفاده می‌شود و در عمل برای برآورد دقیق پارامترهای توجیه خارجی از معادلات شرط هم خطی که استحکام هندسی و دقت بالاتری برخوردارند استفاده می‌شود.
- در تقاطع فضایی که هدف محاسبه مختصات زمینی نقاط متناظر عکسی است، در صورتی که پارامترهای DLT از روی پارامترهای توجیه خارجی محاسبه شده باشند، استفاده از معادلات این تبدیل مشکلی ندارد!

تبدیل DLT

- چند نکته در مورد معادلات DLT
- در حالت زوج عکس استریو امکان توجیه نسبی با معادلات DLT وجود ندارد، حتی اگر تصاویر توسط یک دوربین متریک اخذ شده باشند و قیود تعامد هم به کار گرفته شده باشند امکان توجیه نسبی وجود ندارد. زیرا برای توجیه نسبی با معادلات DLT بایستی توجیه داخلی، ترفیع و تقاطع فضایی را همزمان حل کرد! که این باعث نوسان در جوابهای سرشکنی در تکرارهای متوالی می‌شود. به عبارتی دستگاه معادلات به یک جواب نهایی همگرا نمی‌شود. اما با داشتن پارامترهای توجیه داخلی می‌شود.

تمرین شماره ۴ – قسمت چهارم

- اطلاعات ارائه شده در مثال شماره ۱۴ را در نظر بگیرید. سپس یک مختصات سه بعدی دلخواه در سیستم مختصات رفرنس ایجاد کنید. مختصات دلخواه را هم با معادلات DLT و هم با روابط شرط هم خطی به سیستم مختصات عکسی تبدیل کنید.
- برای اینکه جواب هایتان منطقی باشد، سعی کنید مختصات سه بعدی نقطه دلخواه در محدوده زیر قرار گرفته باشد.

$$
\begin{aligned}
800 &< X_A < 1400 \\
600 &< Y_A < 1000 \\
100 &< Z_A < 300
\end{aligned}
$$

تمرین شماره ۴ – قسمت سوم

- علاوه بر ارسال نتیجه نهایی که شامل ورودی و خروجی است؛ برنامه تمرین فوق را در محیط متلب نوشته و نتیجه آن را تا دو هفته آینده به آدرس noorollah.tatar@gmail.com با موضوع "تمرین شماره ۴ – قسمت چهارم درس فتوگرامتری تحلیلی" ایمیل کنید.

- دانشجویانی که سیستم کامپیوتری ندارند، می توانند این تمرین را به صورت دستی انجام دهند (همراه با ارائه ریز جزئیات محاسباتی)

توابع رشنال

- توابع رشنال در حقیقت توابع ریاضی هستند که؛ ارتباط بین مختصات زمینی و عکسی را برقرار می‌کنند
- توابع رشنال حالت کلی‌تری از DLT هستند که پارامترهای ناشناخته‌ی بیشتری را مد نظر قرار می‌دهند.
- امروزه در تصاویر ماهواره‌ای برای زمین‌مرجع سازی، انجام تقاط فضایی و بازسازی سه‌بعدی از توابع رشنال استفاده می‌شود.
- دلیل اصلی استفاده از توابع رشنال را می‌توان سادگی استفاده از این توابع و کاهش سطح دسترسی کاربر به پارامترهای فیزیکی سنجنده‌ها دانست.

توابع رشنال

- انتقال مختصات سه‌بعدی نقاط زمینی به مختصات دوبعدی عکسی با توابع رشنال به کمک روابط زیر صورت می‌گیرد.

$$l = \left[\frac{ua^T}{ub^T} \right] l_s + l_0$$

$$S = \left[\frac{uc^T}{ud^T} \right] S_s + S_0$$

- متغییرهای روابط فوق عبارتند از:

$$u = [1\ V\ U\ W\ VU\ VW\ UW\ V^2\ U^2\ W^2\ UVW\ V^3\ VU^2\ VW^2 V^2U\ U^3\ UW^2\ V^2W\ U^2W\ W^3]$$

- U برداری است شامل بیست متغییر و a,b,c,d نیز بردار ضرایب توابع رشنال اند که هر کدام دارای بیست درایه اند.

توابع رشنال

- بردار ضرایب توابع رشنال

$$a=[a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{20}]$$
$$b=[1 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{19}]$$
$$c=[c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_{20}]$$
$$d=[1 \quad d_1 \quad \dots \quad d_{19}]$$

$$V=\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_s}$$
$$U=\frac{\varphi-\varphi_0}{\varphi_s}$$
$$W=\frac{h-h_0}{h_s}$$

که در آن‌ها؛

W ، V، U: مختصات نرمالیزه شده‌ی نقطه‌ی زمینی.

φ ، λ، h: به ترتیب عرض جغرافیایی، طول جغرافیایی و ارتفاع از روی دیتوم.

s، l: مختصات عکسی (سطر و ستون).

توابع رشنال

- همچنین

$l_0, S_0, h_0, \lambda_0, \varphi_0$ به ترتیب شیفت عرض جغرافیایی، طول جغرافیایی، ارتفاع از روی دیتوم، سطر تصویر و ستون تصویر.

$l_s, S_s, h_s, \lambda_s, \varphi_s$ به ترتیب مقیاس عرض جغرافیایی، طول جغرافیایی، ارتفاع از روی دیتوم، سطر تصویر و ستون تصویر.

به همراه توابع رشنال زمین مستقل، علاوه بر ۷۸ ضرایب a، b، c و d؛ پارامترهای نرمالیزاسیون $l_s, S_s, h_s, \lambda_s, \varphi_s$ $l_0, S_0, h_0, \lambda_0, \varphi_0$ نیز در اختیار کاربر قرار داده می‌شوند

توابع رشنال

- همچنین توابع رشنال را می توان به این فرم هم نوشت:

$$l = \frac{a_0 + a_1 V + a_2 U + a_3 W + a_4 VU + ... + a_{19} W^3}{1 + b_1 V + b_2 U + b_3 W + b_4 VU + ... + b_{19} W^3} l_s + l_0$$

$$S = \frac{c_0 + c_1 V + c_2 U + c_3 W + c_4 VU + ... + c_{19} W^3}{1 + d_1 V + d_2 U + d_3 W + d_4 VU + ... + d_{19} W^3} S_s + S_0$$

- این فرم در واقع همان ضرب برداری ضرایب در جملات توابع رشنال است که به این شکل نوشته می‌شود.
- توابع رشنالی که از روی نقاط کنترل زمینی ایجاد نشده‌اند، معمولا دارای خطاهایی هستند که باعث عدم زمین مرجع سازی دقیق می‌شوند

سوال؟

منابع این فصل

- دکتر جلال امینی. کتاب فتوگرامتری تحلیلی. چاپ دانشگاه تهران.
- نوراله تتر. رساله دکتری. دانشکده مهندسی نقشه برداری، دانشگاه تهران.