دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول

Jundi Shapur

University of Technology

پردازش تصاویر رقومی

فصل هفتم: تبدیل هندسی تصویر

Nurollah Tatar

Digital Image Processing

2021

فهرست مطالب

مقدمه

- مجموعه پردازش‌های که تا پیش از این ارائه شدند، تنها بر روی اطلاعات طیفی تمرکز داشتند.
- یکسری از پردازش‌های هندسی تصاویر وجود دارد که لازم است در این درس آن‌ها را یاد بگیرید.
- هدف اصلی این فصل بررسی اجمالی مجموعه پردازش‌های حوزه تبدیلات هندسی تصاویر از یک فضا (سیستم مختصات) به یک فضای دیگر است.

مقدمه

- در تبدیل هندسی تصویر آنچه بیش از همه چیز مورد استفاده قرار می‌گیرد، مختصات پیکسل‌هاست.
- در این پروسه رابطه بین مختصات یک پیکسل در فضای مبدا با موقعیت نظیرش در سیستم مختصات فضای مقصد با یک مدل ریاضیاتی دو بعدی برقرار می‌شود.

I(x,y) تصویر ورودی

I'(x',y') تصویر خروجی

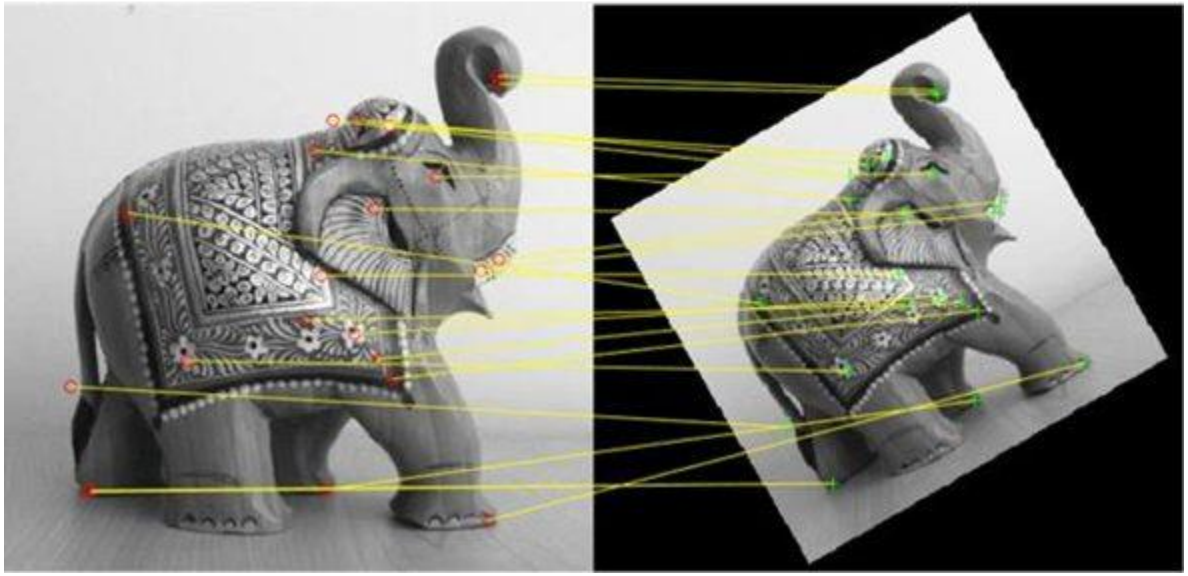
$$x \rightarrow fx(x,y) = x'$$
$$y \rightarrow fy(x,y) = y'$$
$$I(x,y) = I^{'}(x',y') = I^{'}(fx(x,y), fy(x,y))$$

مقدمه

- مجموعه پردازش‌های مربوط به تبدیل هندسی تصویر بیشتر در هم مرجع سازی، تولید موزائیک عکسی، تولید تصاویر پانوراما و ارتوفتو استفاده می‌شود.
- به طور معمول در این پروسه، تصاویر یا با داشتن پارامترهای مدل ریاضیاتی تبدیل می‌شوند یا با استفاده از روش‌های برآورد پایدار برای آنها یک مدل ریاضیاتی برآورد می‌شود.

مقدمه

- تبدیل هندسی تصویر با داشتن پارامترهای مدل ریاضیاتی از پیش تعریف شده



تصویر ورودی تصویر خروجی

مقدمه

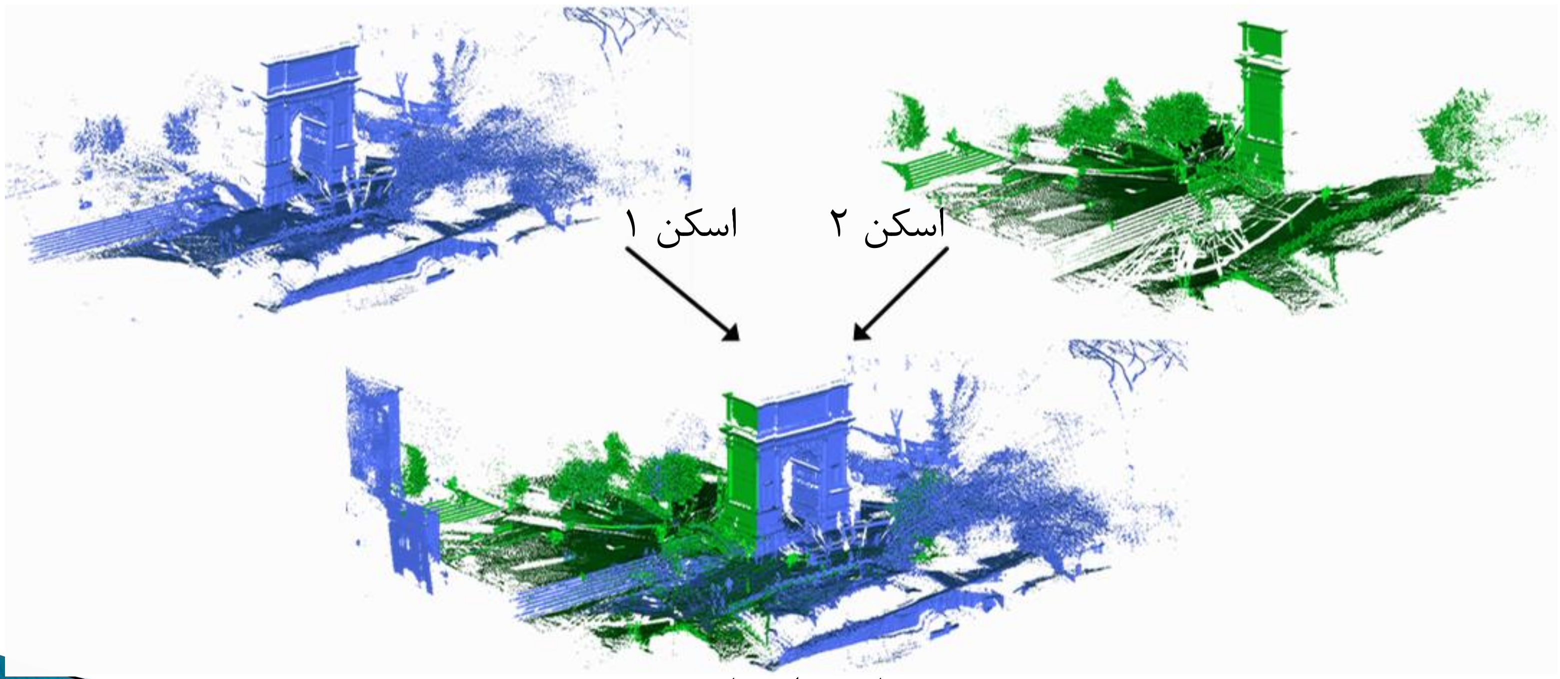
- تبدیل هندسی تصاویر با برآورد مدل ریاضیاتی

تصویر انتقال یافته　　تصویر مرجع　　تصویر ورودی

- معمولا برآورد مدل ریاضیاتی زمانی انجام می‌گیرد که داده مرجع (تصویر، مدل رقومی و …) وجود داشته باشد.

مقدمه

- هم مرجع‌سازی و یا تبدیل هندسی برای داده‌های سه‌بعدی هم به کار می‌رود. اما در این درس به آن پرداخته نمی‌شود.



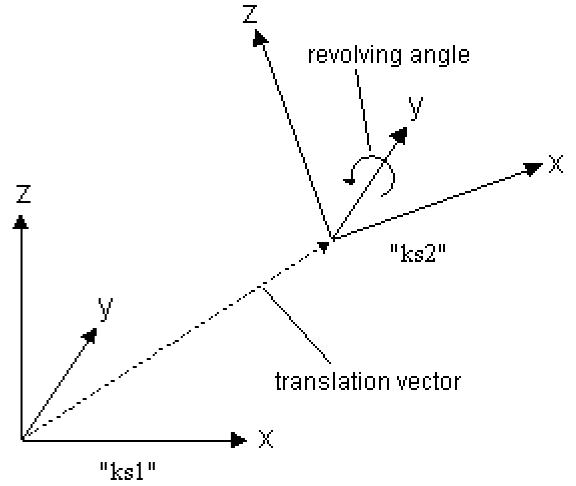
هم مرجع‌سازی داده‌های سه‌بعدی

2D⇒2D Mathematical Models

مدل‌های تبدیل دو بعدی به دو بعدی

- تبدیل بین دو سیستم مختصات عبارتست از جابجایی، دوران و مقیاس بین مختصات آنها.

Transformation = translation + rotation + scale



تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- دوران:

$$x = \overline{OA} = \overline{OP}\cos(\theta+\phi)$$

$$y = \overline{AP} = \overline{OP}\sin(\theta+\phi)$$

$$\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$$

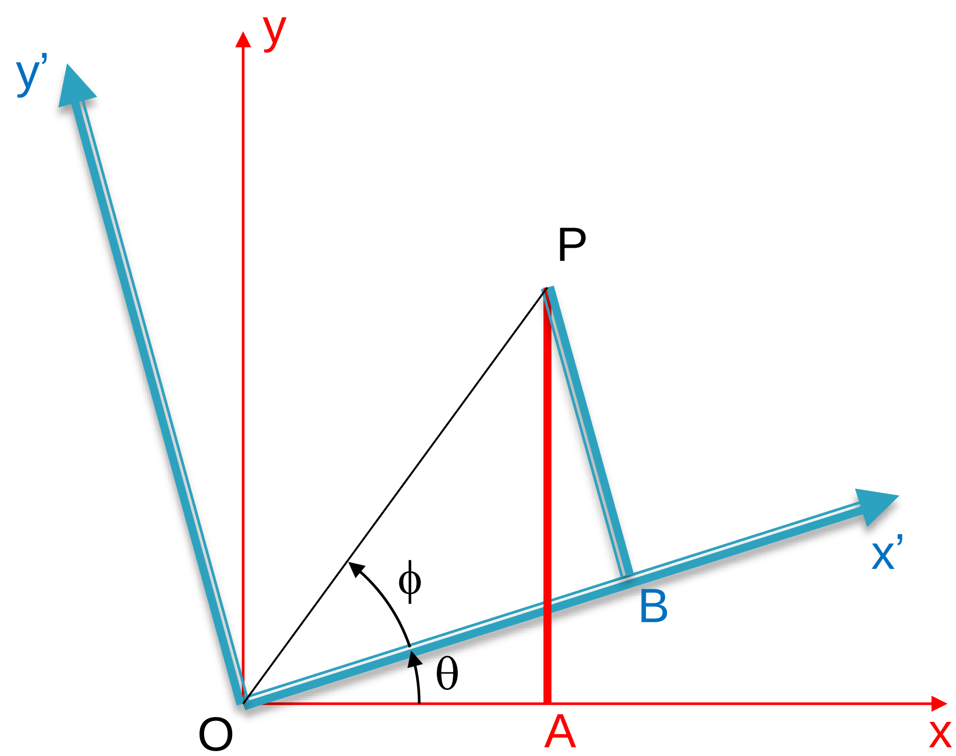
$$\sin(\theta+\phi) = \cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi$$

$$x = \underbrace{\overline{OP}\cos\phi}_{x'}\cos\theta - \underbrace{\overline{OP}\sin\phi}_{y'}\sin\theta$$

$$= x'\cos\theta - y'\sin\theta$$

Similarly, $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$

$$\text{So}\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$



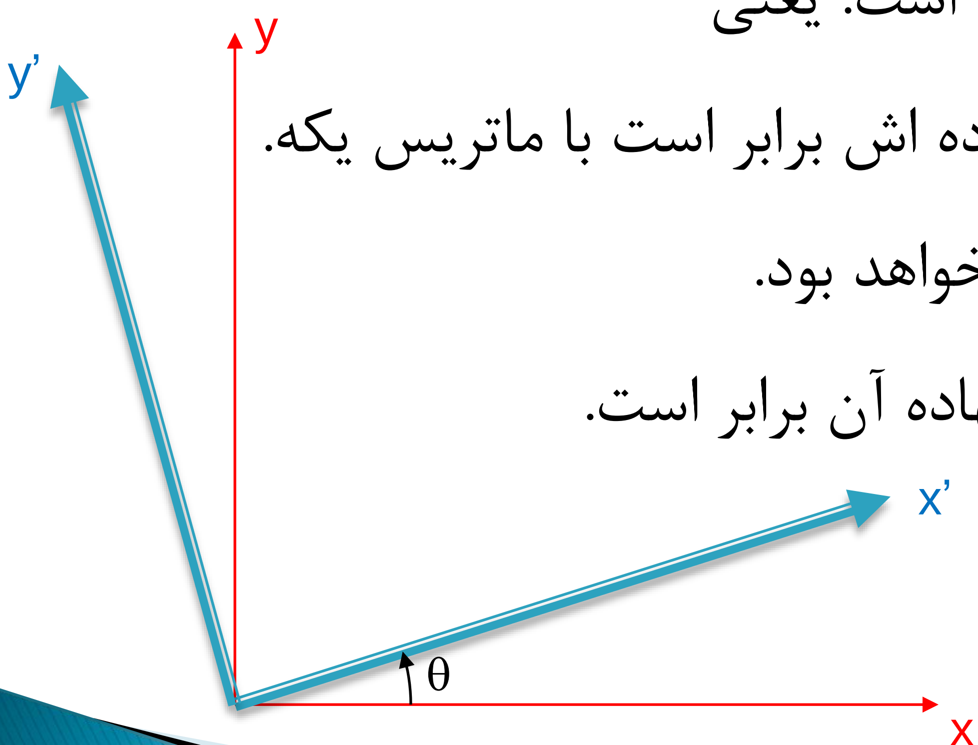
تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- دوران:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{R}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

- R یک ماتریس متعامد است. یعنی

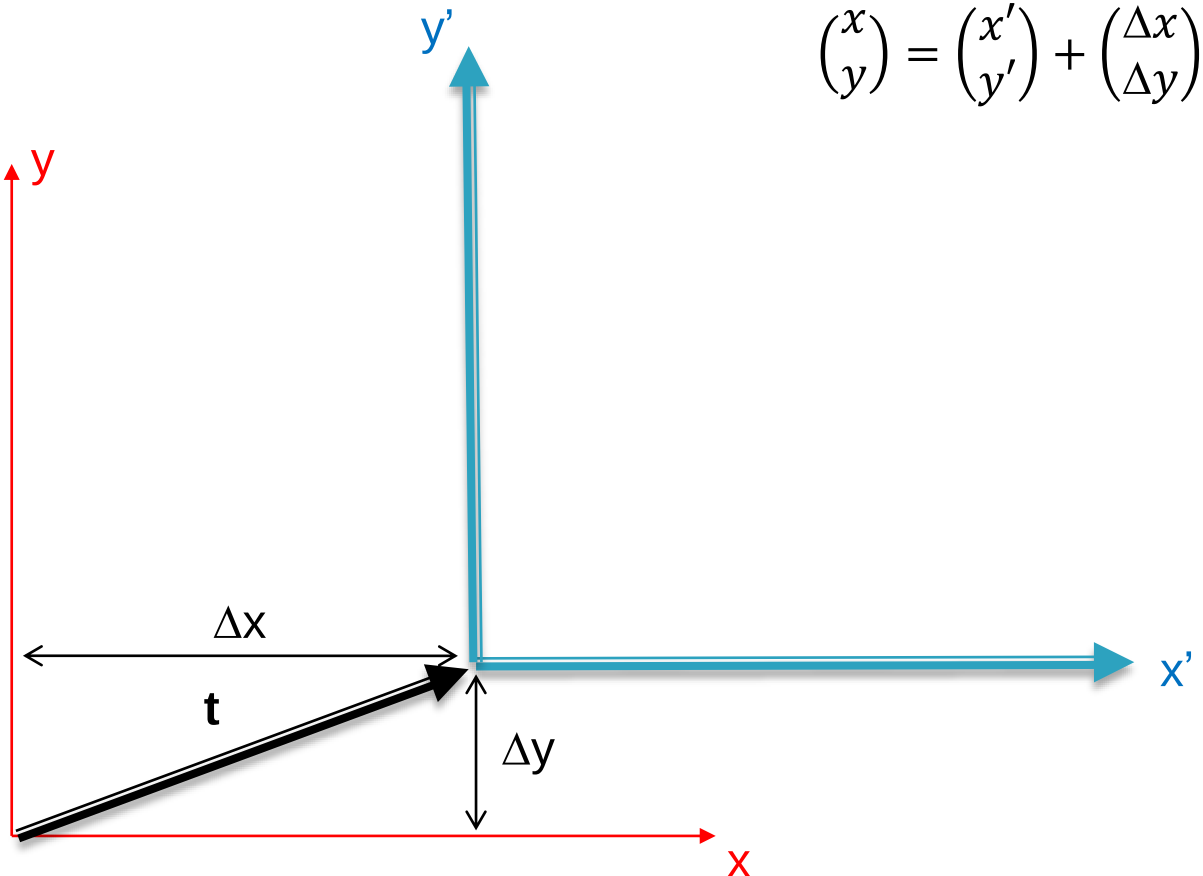
- ضرب R در ترانهاده اش برابر است با ماتریس یکه. $\mathbf{RR}^T = \mathbf{I}$
- دترمینان R یک خواهد بود. $|\mathbf{R}| = 1$
- معکوس R با ترانهاده آن برابر است. $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{R}^T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

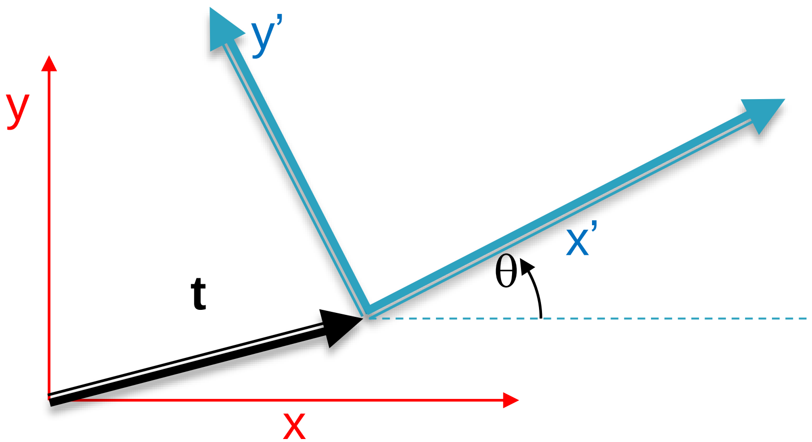
تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- جابجایی: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$



تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- انتقال



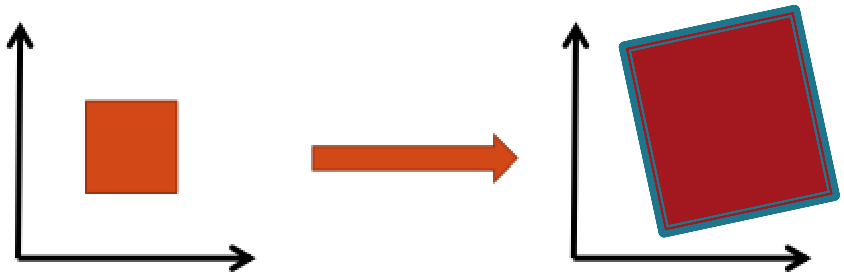
Rotation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

translation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$

Tranformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- انتقال (مدل متشابه یا conformal):
- تغییر شکل نداریم.
- زوایا حفظ می شوند.
- ممکن است تغییر مقیاس داشته باشیم.
- ۴ پارمتر مجهول دارد.



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- انتقال (مدل متشابه یا conformal):
- معادلات متشابه را می‌توان به فرم ریاضیاتی دیگری نوشت که به آن فرم پارامتریک می‌گویند.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = ax' + by' + c \\ y = -bx' + ay' + d \end{matrix}$$

- که در آن

$$a = \lambda \cos\theta$$

$$b = -\lambda \sin\theta$$

$$c = x_0$$

$$d = y_0$$

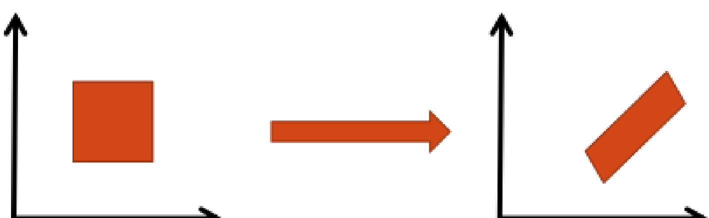
تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- انتقال (مدل متشابه یا conformal):
- نحوه محاسبه مقیاس، جابجایی و دوران از روی ضرایب فرم پارامتریک:

مقیاس	$\lambda = \sqrt{a^2 + b^2}$
دوران	$\theta = \tan^{-1}(-\frac{b}{a})$
جابجایی در راستای x	$x_0 = c$
جابجایی در راستای y	$y_0 = d$

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- انتقال (مدل افاین یا affine):
- تغییر مقیاس در دو جهت یکسان نیست ولی نسبت آنها برای تمامی نقاط ثابت است.
- محورهای مختصات متعامد نیستند.
- خطوط موازی، موازی باقی می‌مانند.
- ۶ پارمتر مجهول دارد.



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\varepsilon \\ 0 & \cos\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- انتقال (مدل افاین یا affine):
- مشابه معادلات متشابه، معادلات افاین را هم می‌توان به فرم ریاضیاتی دیگری نوشت که به آن فرم پارامتریک می‌گویند.

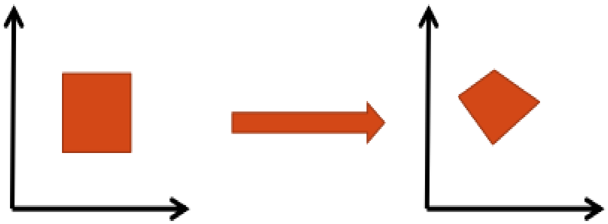
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\varepsilon \\ 0 & \cos\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

- و به طور خلاصه

$$x = a_1 x' + a_2 y' + a_3$$
$$y = b_1 x' + b_2 y' + b_3$$

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- انتقال (مدل پروژکتیو یا projective):
- تغییر مقیاس در دو جهت یکسان نیست. نسبت آنها نیز ثابت باقی نمی‌ماند.
- محورهای مختصات متعامد نیستند.
- خطوط موازی، موازی نخواهند بود.
- ۸ پارمتر مجهول دارد.



$$x = \frac{a_1x' + a_2y' + a_3}{c_1x' + c_2y' + 1}$$

$$y = \frac{b_1x' + b_2y' + b_3}{c_1x' + c_2y' + 1}$$

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- تبدیلات چند جمله ای:
- علاوه بر تبدیلات ارائه شده در اسلایدهای قبل، یکسری تبدیلات چندجمله ای وجود دارد که پیچیدگی‌های بیشتری را مد نظر قرار می‌دهند.

$$x = a_0 + a_1 x' + a_2 y' + a_3 x'^2 + a_4 y'^2 + a_5 x' y' + \ldots$$
$$y = b_0 + b_1 x' + b_2 y' + b_3 x'^2 + b_4 y'^2 + b_5 x' y' + \ldots$$

- مهمترین ضعف این روش یافتن پارامترهای بهینه است.

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- مختصات هموژنی ($\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$):
- در تبدیلات دو بعدی به دو بعدی برای محاسبات سریع‌تر و یکپارچه معمولا از مختصات هموژنی استفاده می‌کنند.
- در این روش توابع متشابه، افاین یا پروژکتیو در یک ماتریس ۳×۳ قرار می‌گیرند که به آن ماتریس هموگرافی می‌گویند.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{مختصات هموژنی}} = \underbrace{\begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_4 & h_5 & h_6 \\ h_7 & h_8 & h_9 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس هموگرافی}} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X = HX' \qquad X' = H^{-1}X$$

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- مدل متشابه در ماتریس هموگرافی:
- معادلات مدل متشابه

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} x = ax' + by' + c \\ y = -bx' + ay' + d \end{array}$$

- ماتریس هموگرافی مدل متشابه

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ -b & a & d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow H = \begin{bmatrix} a & b & c \\ -b & a & d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- مدل افاین در ماتریس هموگرافی:
- معادلات مدل افاین

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = a_1 x' + a_2 y' + a_3 \\ y = b_1 x' + b_2 y' + b_3 \end{matrix}$$

- ماتریس هموگرافی مدل افاین

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow H = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- مدل پروژکتیو در ماتریس هموگرافی:
- معادلات مدل پروژکتیو

$$x = \frac{a_1 x' + a_2 y' + a_3}{c_1 x' + c_2 y' + 1}$$

$$y = \frac{b_1 x' + b_2 y' + b_3}{c_1 x' + c_2 y' + 1}$$

- ماتریس هموگرافی مدل پروژکتیو

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow H = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix}$$

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- چند نکته در مورد ماتریس هوموگرافی:
- ماتریس هوموگرافی یک ماتریس معکوس‌پذیر است. از این رو به راحتی می‌توان بین سیستم‌های مختصات ارتباط یک به یک برقرار کرد. $X = HX'$ $\quad X' = H^{-1}X$
- در فرآیند تبدیل با ماتریس هوموگرافی معمولا پس از تبدیل سطر اول و دوم را بر نتیجه سطر سوم تقسیم می‌کنند تا اگر مدل یک مدل پروژکتیو بود خطای محاسباتی بوجود نیاید.

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- مثال برای ماتریس هوموگرافی:
- چنانچه ماتریس هوموگرافی صورت $H=\begin{bmatrix}0.99 & -0.1 & -80\\ 0.1 & 0.98 & 60\\ 0.001 & 0.003 & 1\end{bmatrix}$ باشد، مطلوبست محاسبه موقعیت متناظر یک پیکسل با مختصات (200, 100) در سیستم مختصات مقصد.

$$X=\begin{bmatrix}0.99 & -0.1 & -80\\ 0.1 & 0.98 & 60\\ 0.001 & 0.003 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}200\\ 100\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}108\\ 178\\ 1.5\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}108/1.5\\ 178/1.5\\ 1.5/1.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}72\\ 118.6667\\ 1\end{bmatrix}$$

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- مثال برای ماتریس هموگرافی:
- چنانچه دوران بین سیستم مختصات ۵ درجه، مقیاس در جهت x و y به ترتیب ۰.۹۸ و ۱.۰۵ باشد، ۱ درجه عدم تعامد بین محورهای مختصات وجود داشته باشد، ماتریس هموگرافی را حساب کنید؟ همچنین فرض کنید شیفت در جهت x و y به ترتیب ۲۰ و ۲۵ پیکسل باشد.

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- مثال برای ماتریس هوموگرافی:

$$\theta = 5^o \qquad \lambda_x = 0.98 \qquad \lambda_y = 1.05$$

$$\varepsilon = 1^o \qquad x_0 = 20 \qquad y_0 = 25$$

- حل مثال اسلاید قبل

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\varepsilon \\ 0 & \cos\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

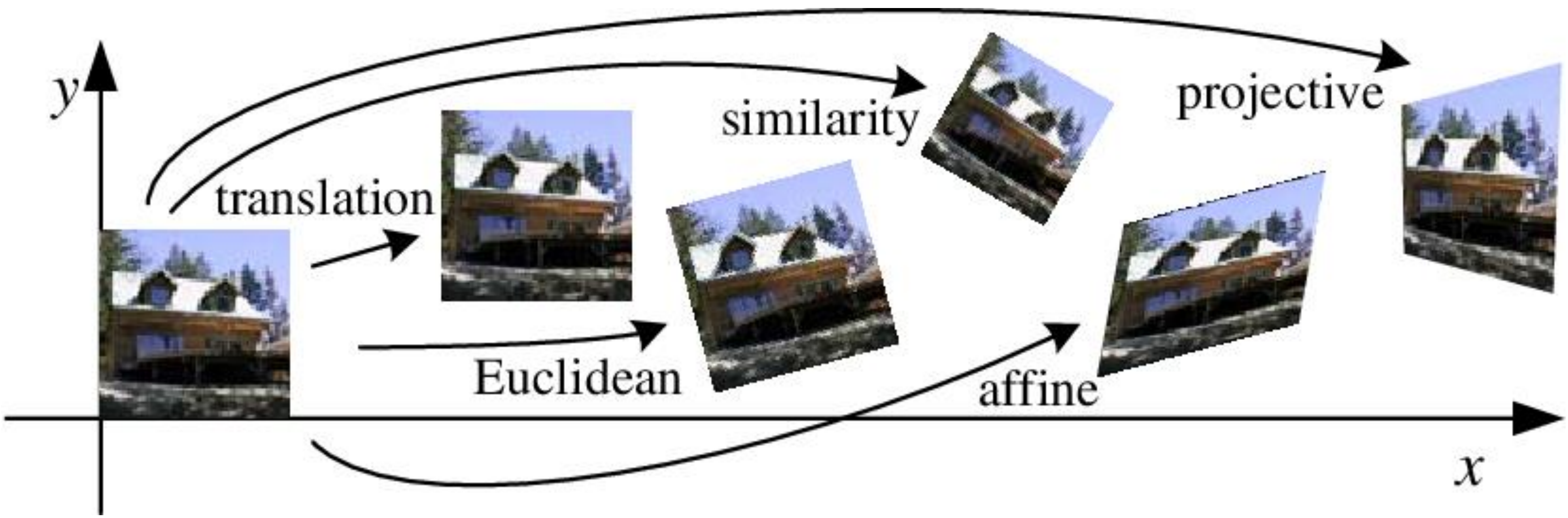
$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin 1^o \\ 0 & \cos 1^o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.98 & 0 \\ 0 & 1.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 5^o & -\sin 5^o \\ \sin 5^o & \cos 5^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9779 & -0.0672 \\ 0.0915 & 1.0458 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9779 & -0.0672 & 20 \\ 0.0915 & 1.0458 & 25 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- تبدیلات دوبعدی تصویر در یک نگاه



Similarity همان تبدیل متشابه است.

Euclidean همان تبدیل متشابه بدون مقیاس است.

Translation تنها شامل انتقال است.

Estimate Mathematical Models

دستگاه معادلات

- معادلات متشابه:

$$x = ax' + by' + c$$
$$y = -bx' + ay' + d$$

- در صورتی که پارامترهای متشابه مجهول و نقاط متناظر موجود باشند.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix}}_{L} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1' & y_1' & 1 & 0 \\ y_1' & -x_1' & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n' & y_n' & 1 & 0 \\ y_n' & -x_n' & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}}_{X}$$

$$L = AX$$

- در این دستگاه معادلات فرض شده n نقطه متناظر وجود دارد.

- برای حل این دستگاه حداقل ۴ معادله (دو نقطه متناظر) نیاز است.

دستگاه معادلات

- معادلات افاین:

$$x = a_1 x' + a_2 y' + a_3$$
$$y = b_1 x' + b_2 y' + b_3$$

- در صورتی که پارامترهای افاین مجهول و نقاط متناظر اندازه‌گیری شده باشند.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix}}_{L} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1' & y_1' & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1' & y_1' & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n' & y_n' & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_n' & y_n' & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{X}$$

$$L = AX$$

- در این دستگاه معادلات فرض شده n نقطه متناظر وجود دارد.
- برای حل این دستگاه حداقل ۶ معادله (سه نقطه متناظر) نیاز است.

دستگاه معادلات

- معادلات پروژکتیو:
- در صورتی که پارامترهای پروژکتیو مجهول و نقاط متناظر اندازه‌گیری شده باشند.

$$x = \frac{a_1 x' + a_2 y' + a_3}{c_1 x' + c_2 y' + 1} \qquad\qquad x = a_1 x' + a_2 y' + a_3 - c_1 x' x - c_2 y' x$$
$$\Rightarrow$$
$$y = \frac{b_1 x' + b_2 y' + b_3}{c_1 x' + c_2 y' + 1} \qquad\qquad y = b_1 x' + b_2 y' + b_3 - c_1 x' y - c_2 y' y$$

- در این دستگاه معادلات فرض شده n نقطه متناظر وجود دارد.
- برای حل این دستگاه حداقل ۸ معادله (چهار نقطه) نیاز است.

دستگاه معادلات

- معادلات پروژکتیو:

$$x = a_1 x' + a_2 y' + a_3 - c_1 x' x - c_2 y' x$$
$$y = b_1 x' + b_2 y' + b_3 - c_1 x' y - c_2 y' y$$

-

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix}}_{L} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1' & y_1' & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1' x_1 & -y_1' x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1' & y_1' & 1 & -x_1' y_1 & -y_1' y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n' & y_n' & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_n' x_n & -y_n' x_n \\ 0 & 0 & 0 & x_n' & y_n' & 1 & -x_n' y_n & -y_n' y_n \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{X}$$

$$L = AX$$

حل دستگاه معادلات

- برای حل دستگاه معادلات از روشی استفاده می‌شود که به آن روش کمترین مربعات گفته می‌شود.
- در این روش مجهولات (یا همان پارامترهای مدل ریاضیاتی) از رابطه زیر برآورد می‌شوند.

$$X = \left(A^T A\right)^{-1} A^T L$$

- باقیمانده‌ها و RMSE از روابط زیر برآورد می‌شوند.

$$V = AX - L$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Vx_i^2 + Vy_i^2\right)}{n}}$$

حل دستگاه معادلات

- برای توضیح روش کمترین مربعات به مثال زیر توجه کنید.
- مثال: اگر فاصله بین نقاط A و B سه بار اندازه گیری شده باشد، و اندازه ها در دفعه اول تا سوم به ترتیب ۱۰.۰۲، ۱۰.۰۴ و ۱۰.۰۳ متر قرائت شده باشند. آنگاه براساس روش کمترین مربعات مقدار طول ۱۰.۰۳ خواهد بود.

$$X = \left(A^T A\right)^{-1} A^T L$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}10.02\\10.04\\10.03\end{bmatrix}}_{L} = \underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{[l]}_{X} \Rightarrow X = \underbrace{\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)^{-1}}_{\frac{1}{3}}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10.02\\10.04\\10.03\end{bmatrix}}_{10.04+10.02+10.03} \Rightarrow X = \frac{10.04+10.02+10.03}{3} = 10.03$$

حل دستگاه معادلات

- همانطور که در اسلاید قبلی مشاهده شد، روش کمترین مربعات میانگین فواصل اندازه گیری را به عنوان جواب نهایی می‌دهد.
- به مشابه همین مثال، وقتی از این روش برای برآورد ضرایب پارامترهای مدل ریاضی استفاده می‌شود، عادلانه‌ترین مقادیر برآورد می‌شوند.
- برای برآورد پارامترهای مدل ریاضیاتی معمولا از تعدادی نقطه گرهی متناظر صحیح استفاده می‌شود.

حل دستگاه معادلات

- مثال: با توجه به مختصات نقاط متناظر زیر پارامترهای مدل متشابه، افاین و پروژکتیو را برآورد نمایید.
- علاوه بر این تعیین کنید کدام مدل دقت بالاتری دارد.

شماره نقطه	مختصات در عکس اول	
	x (pix)	y (pix)
1	253	64
2	40	389
3	112	383
4	219	195
5	384	321
6	386	57

شماره نقطه	مختصات در عکس دوم	
	x (pix)	y (pix)
1	175	44
2	18	176
3	50	169
4	121	108
5	164	137
6	248	37

حل دستگاه معادلات

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix}}_{L} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1' & y_1' & 1 & 0 \\ y_1' & -x_1' & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n' & y_n' & 1 & 0 \\ y_n' & -x_n' & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}}_{X}$$

- مثال: حل مدل متشابه

$$X = \left(A^T A\right)^{-1} A^T L$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}}_{X} = \begin{bmatrix} 1.86 \\ 0.48 \\ -62.16 \\ 89.33 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1.86 & 0.48 & -62.16 \\ -0.48 & 1.86 & 89.33 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{H}$$

پارامترهای متشابه

ماتریس هموگرافی H

$$\begin{bmatrix} 31.56 & 22.65 \\ 16.29 & 18.91 \\ 0.42 & -3.56 \\ -4.01 & 36.73 \\ -75.05 & -56.11 \\ \underbrace{30.86}_{V_x} & \underbrace{-18.62}_{V_y} \end{bmatrix}$$

باقیمانده‌های نقاط V

RMSE = 41.2096

حل دستگاه معادلات

- مثال: حل مدل افاین

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.62 \\ 1.72 \\ -298.19 \\ 0.31 \\ 2.88 \\ -127.03 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2.62 & 1.72 & -298.19 \\ 0.31 & 2.88 & -127.03 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{H} \qquad \begin{bmatrix} -17.58 & -10.66 \\ 11.06 & -3.35 \\ 10.81 & -7.72 \\ -15.06 & 26.24 \\ -17.72 & -3.03 \\ \underbrace{28.49}_{V_x} & \underbrace{-1.48}_{V_y} \end{bmatrix}$$

پارامترهای افاین

ماتریس هموگرافی H

باقیمانده‌های نقاط V

RMSE = 18.6572

حل دستگاه معادلات

- مثال: حل مدل پروژکتیو

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.975 \\ -0.029 \\ 5.445 \\ -0.015 \\ 0.97 \\ 3.91 \\ -0.001 \\ -0.003 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0.975 & -0.029 & 5.445 \\ -0.015 & 0.97 & 3.91 \\ -0.001 & -0.003 & 1 \end{bmatrix}}_{H} \qquad \begin{bmatrix} 0.18 & 0.059 \\ -0.04 & 0.17 \\ 0.23 & -0.16 \\ -0.4 & -0.15 \\ 0.03 & 0.066 \\ \underbrace{0.004}_{V_x} & \underbrace{0.006}_{V_y} \end{bmatrix}$$

پارامترهای پروژکتیو

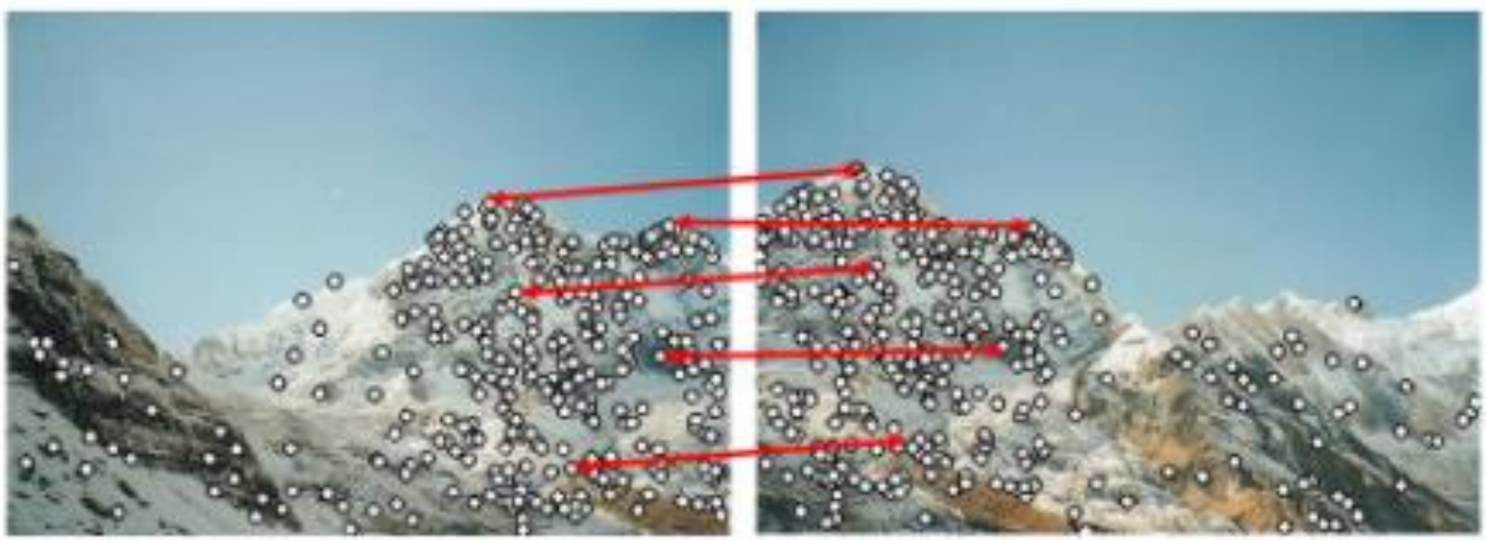
ماتریس هموگرافی H

باقیمانده‌های نقاط V

RMSE = 0.21 بهترین دقت

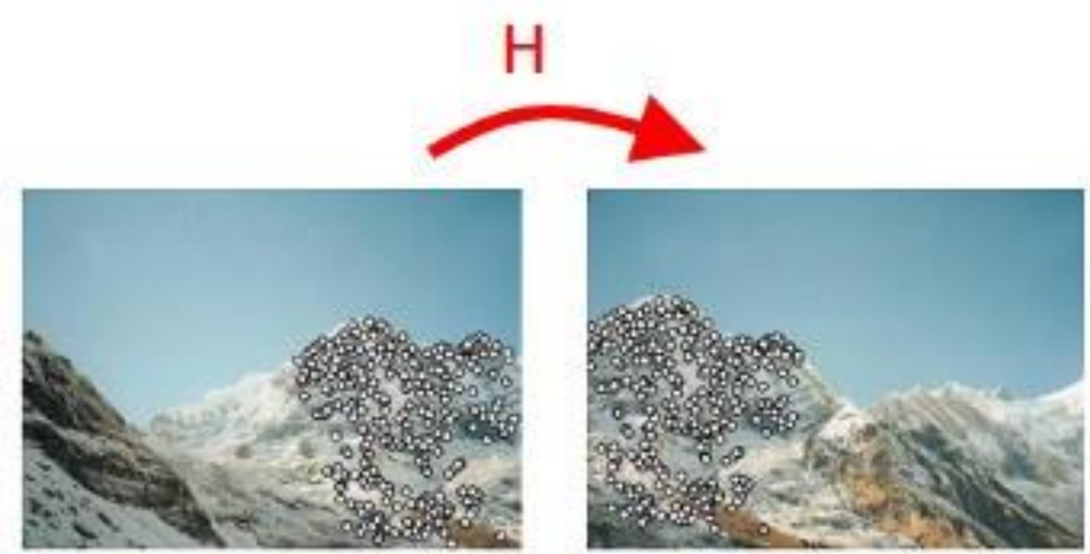
کاربردها – موزاییک عکسی

- الگوریتم‌هایی مانند SIFT ، SURF و ... به صورت اتوماتیک نقاط گرهی بین تصاویر با پوشش مشترک استخراج می‌کنند.



کاربردها – موزاییک عکسی

- ادامه



تصویر اول

تصویر دوم

بعد از چسابندن تصاویر به هم

تمرین شماره ۷- قسمت اول

- با استفاده از تابع نویسی در متلب یا پایتون توابع زیر را پیاده‌سازی کنید:

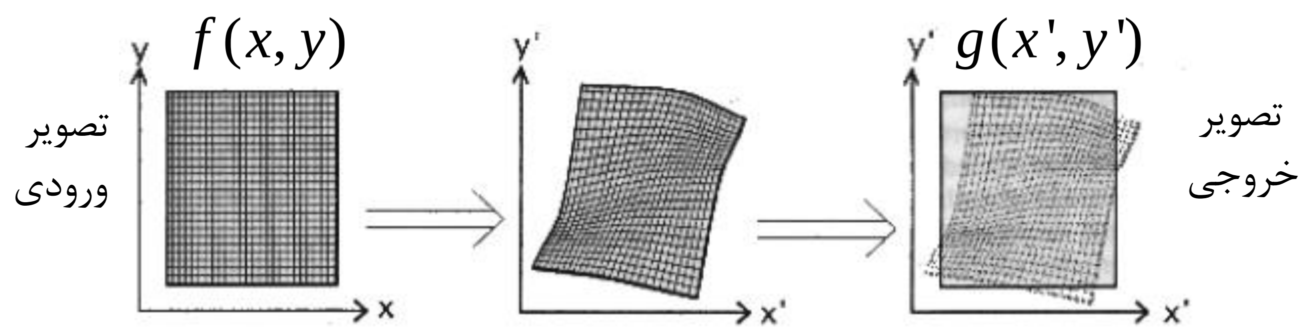
1. تابعی که ورودی آن پارامترهای فیزیکی (مانند دوران، مقیاس و ...) بوده و خروجی آن ماتریس هموگرافی باشد. روابط این تمرین در اسلایدهای ۱۵ تا ۲۰ ارائه شده اند.
2. تابعی بنویسید که ورودی آن ماتریس هموگرافی و مختصات نقاط بوده و خروجی آن مختصات آن نقاط در سیستم مختصات دوم باشد.

- کدها را تا جلسه بعد به آدرس noorollah.tatar@gmail.com با موضوع "تمرین شماره ۷ درس پردازش تصویر – قسمت اول" ایمیل کنید.

Direct Mapping

نگاشت مستقیم

- پس از تعیین مدل ریاضیاتی بین سیستم مختصات مبدا و سیستم مختصات مقصد، اطلاعات رادیومتریکی نگاشت داده می‌شوند.



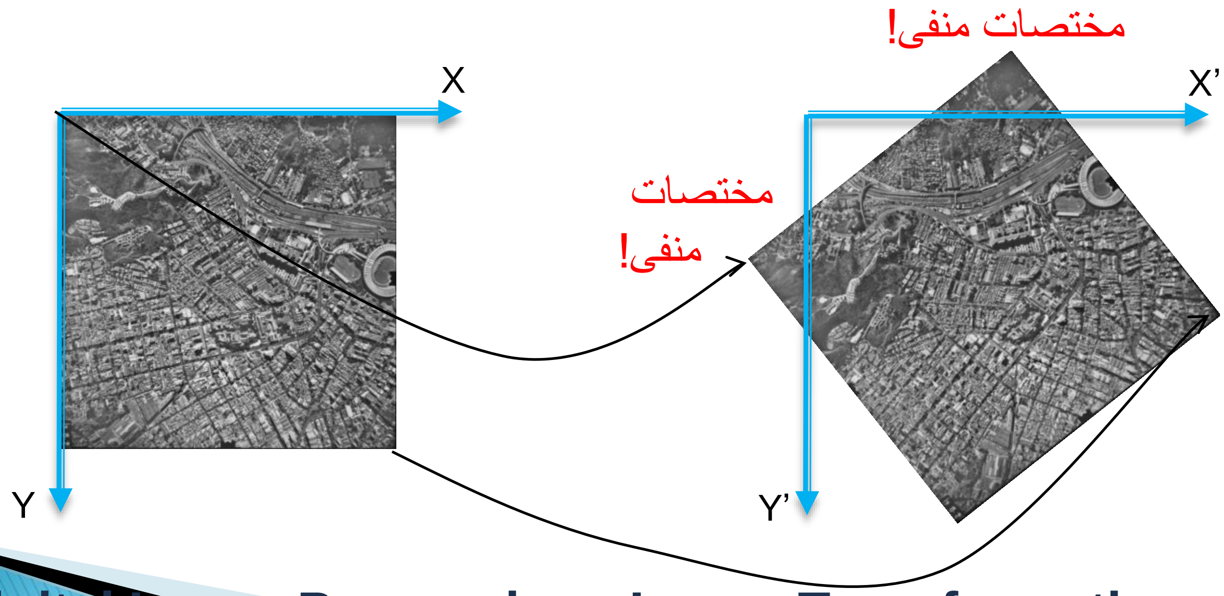
$$[x' \quad y' \quad 1]^T = H[x \quad y \quad 1]^T$$

$$g(x',y') = f(x,y)$$

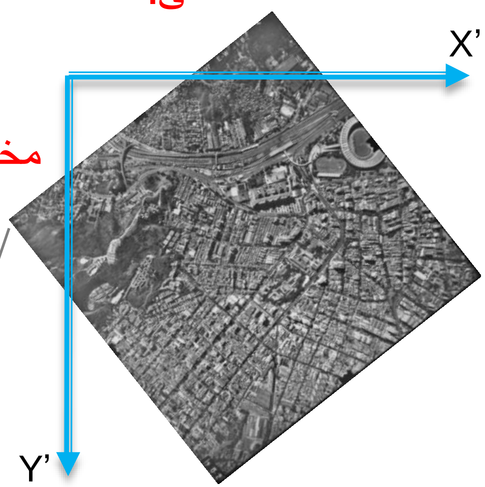
نگاشت مستقیم

- مراحل نگاشت مستقیم:

1. ابتدا مختصات چهارگوشه تصویر ورودی با مدل ریاضیاتی به سیستم مختصات تصویر دوم انتقال می‌یابند.



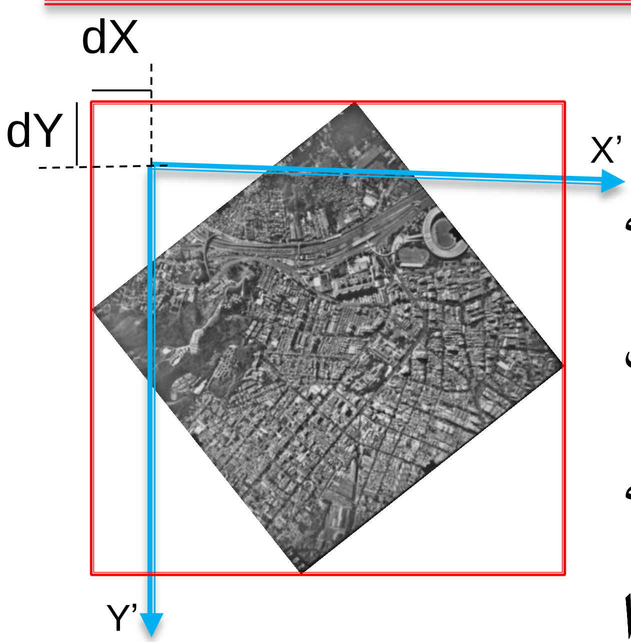
نگاشت مستقیم



Error: Index in position 1 is invalid. Array indices must be positive integers or logical values.

- مراحل نگاشت مستقیم:
- مشکلی که در مختصات منفی وجود دارد این است که در واقعیت همچین چیزی وجود ندارد. به عبارتی شما در برنامه نویسی نمی توانید بگویید در فلان مختصات منفی درجه خاکستری اینقدر است!.

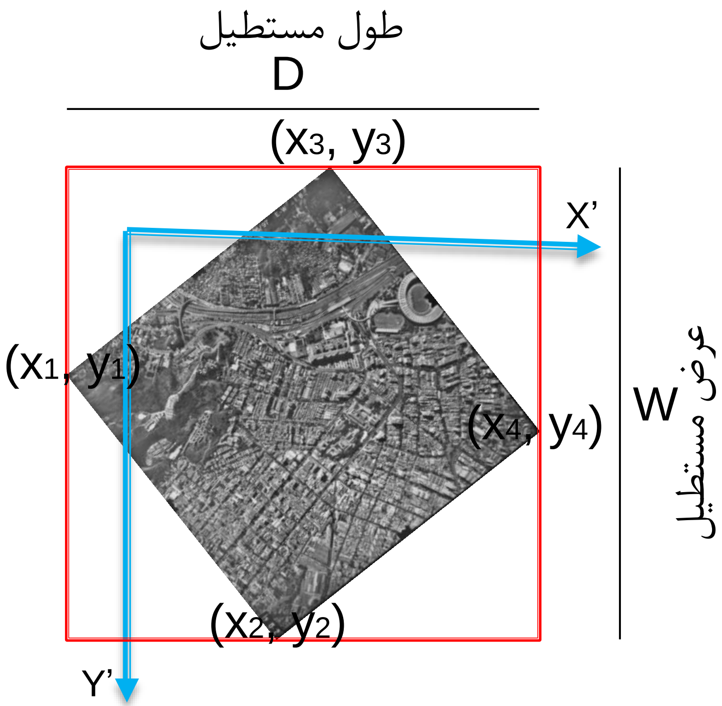
نگاشت مستقیم



- مراحل نگاشت مستقیم:
- راه حلی که برای حل این مشکل به کار گرفته می‌شود، برازش یک مستطیل به مختصات چهار گوشه انتقال یافته تصویر است. مبدا سیستم مختصات را نیز به اندازه dX و dY جابجا می‌کنند.

$$dX = \left|\min(0, X_{\min})\right|$$
$$dY = \left|\min(0, Y_{\min})\right|$$

نگاشت مستقیم



- مراحل نگاشت مستقیم:
- ابعاد مستطیل برابرند با:

$$D = X_{\max} - X_{\min} + 1$$
$$W = Y_{\max} - Y_{\min} + 1$$

- همچنین ,Xmax ,Xmin

وYmin Ymax برابرند با:

$$X_{\min} = \min\{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4\}$$
$$X_{\max} = \max\{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4\}$$
$$Y_{\min} = \min\{y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4\}$$
$$Y_{\max} = \max\{y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4\}$$

نگاشت مستقیم

- مراحل نگاشت مستقیم:

2. در مرحله بعد برای تمامی پیکسل‌های واقع در تصویر اول مختصات نظیرشان در سیستم مختصات مقصد محاسبه می‌شود. $[x' \quad y' \quad 1]^T = H[x \quad y \quad 1]^T$

- مختصات محاسبه شده در مرحله دوم با مقدار dX و dY مرحله ۱ جمع می‌شود.

$$(x'+dX \quad y'+dY)$$

نگاشت مستقیم

- مراحل نگاشت مستقیم:
- چالشی که در مرحله دوم وجود دارد این است که ورودی مختصات صحیح اند (شمارنده سطر و ستون‌های تصویر ورودی) اما خروجی یک مقدار اعشاری است!
- مثال:

$$\begin{pmatrix}100 & 200 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{H} \begin{pmatrix}72 & \underbrace{118.667}_{Floating!} & 1\end{pmatrix}$$

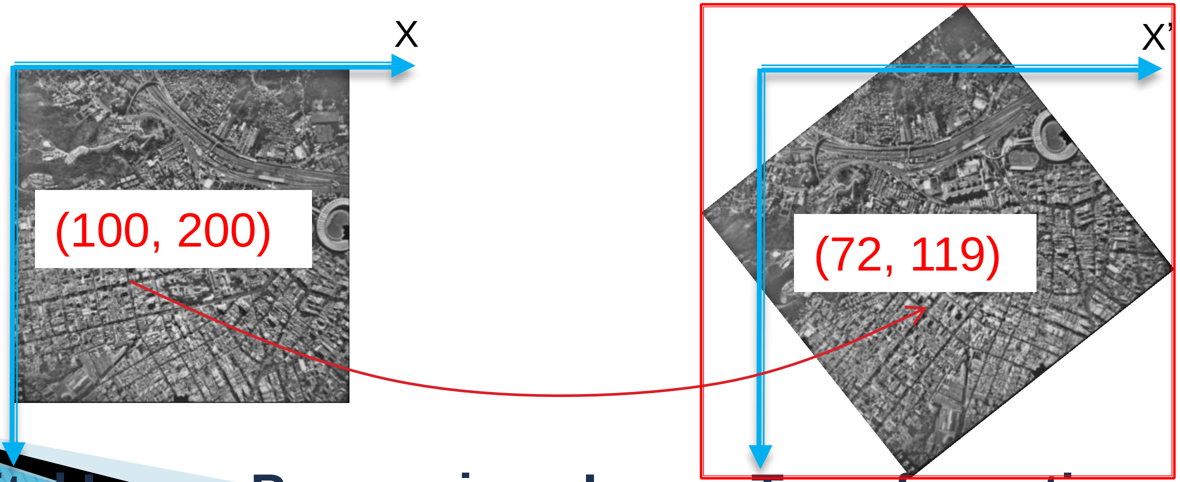
I(72 , 118.67)

Error: Index in position 1 is invalid. Array indices must be positive integers or logical values.

نگاشت مستقیم

- مراحل نگاشت مستقیم:
- یکی از راهکارهایی که برای حل این مشکل اتخاذ می‌شود، گرد کردن اعداد اعشاری است.

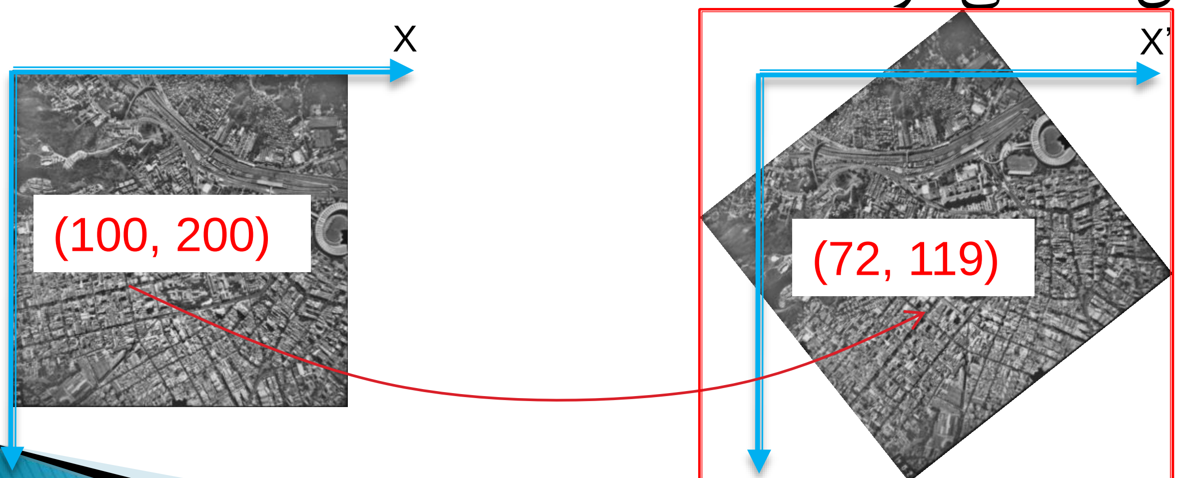
$$(100 \quad 200 \quad 1) \xrightarrow{H} \begin{pmatrix} 72 & \underbrace{118.667}_{Floating!} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{round} (72 \quad 119 \quad 1)$$



نگاشت مستقیم

- مراحل نگاشت مستقیم:

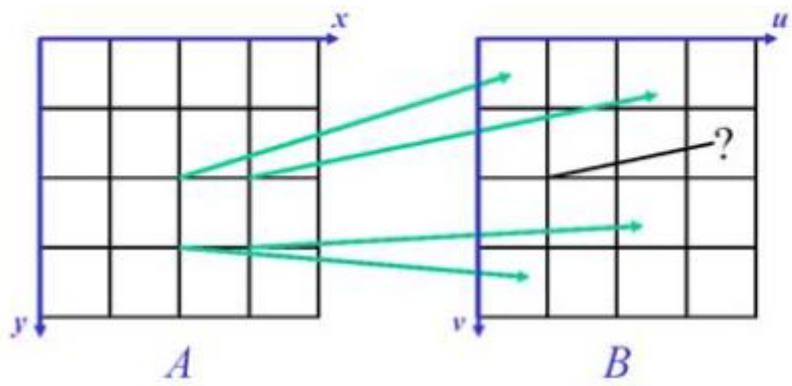
3. در این مرحله برای موقعیت (x’, y’) در تصویر خروجی مقدار درجه خاکستری موقعیت نظیرش (x, y) در تصویر ورودی اختصاص داد می‌شود.

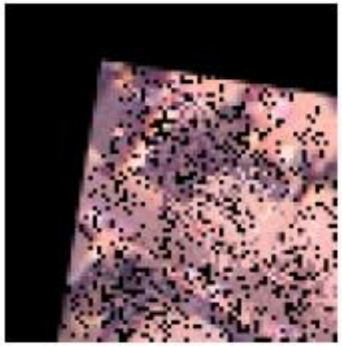


$$I'(72,119) = I(100,200)$$

نگاشت مستقیم

- مراحل نگاشت مستقیم:
- اما در این مرحله نیز یک چالش خیلی اساس وجود دارد. به این صورت که در نگاشت مستقیم تعدادی از پیکسل‌ها خالی از مقدار خواهند بود!





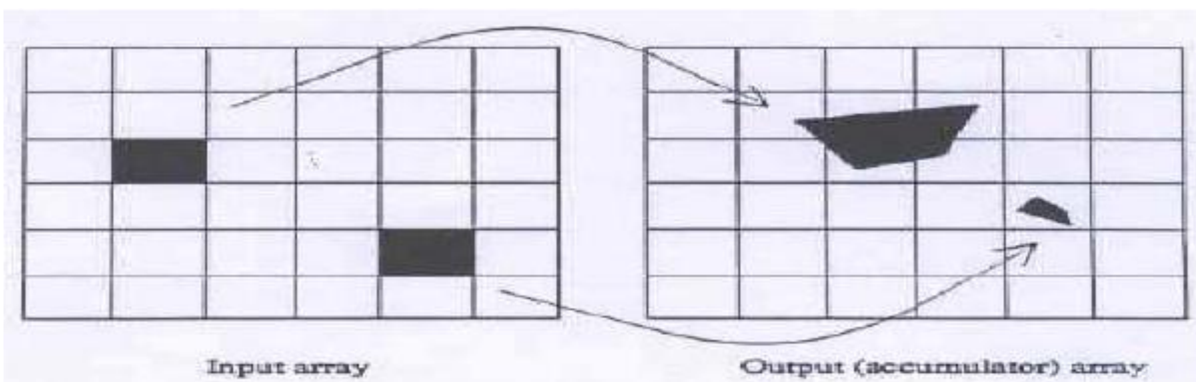
نگاشت مستقیم

- برای حل مشکل خالی بودن پیکسل‌ها در نگاشت مستقیم، سه راه حل وجود دارد:

1. درونیابی درجات خاکستری با مثلث بندی Delaunay
   - درونیابی درجات خاکستری در تصویر خروجی باتوجه به موقعیت پیکسل‌های خالی و پیکسل‌های پر
2. نگاشت چهار گوشه
   - انتقال چهارگوشه پیکسل (نه مرکز) و سپس درونیابی
3. نگاشت معکوس

نگاشت مستقیم

• از جمله معایب روش‌های درونیابی و روش چهار نقطه می‌توان به حجم محاسبات بالا، اثرات ناشی از عدم منظم بودن پیکسل‌ها بر کیفیت تصویر خروجی و پیچیدگی‌های پیاده سازی اشاره کرد.



تصویر ورودی　　روش چهار نقطه　　تصویر خروجی

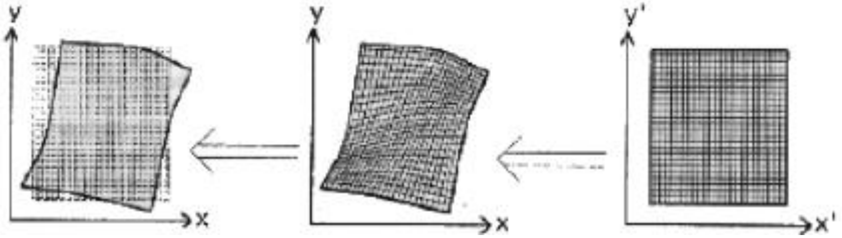
Indirect Mapping

نگاشت معکوس

- در روش نگاشت معکوس با برقراری رابطه معکوس ماتریس هموگرافی، برای هر پیکسل در تصویر خروجی موقعیت نظیرش در تصویر ورودی مشخص می‌شود.
- با این تکنیک هیچ پیکسلی از تصویر خروجی بدون متناظر باقی نخواهد ماند! مگر پیکسل‌های خارج از محدوده تصویر

$$[x \quad y \quad 1]^T = H^{-1}[x' \quad y' \quad 1]^T$$

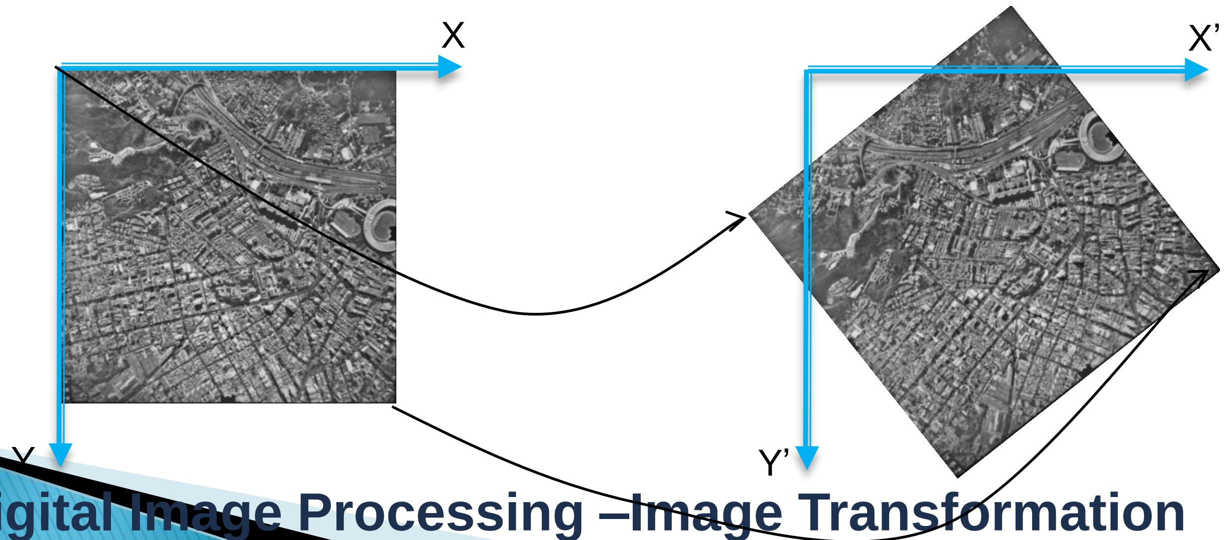
$$\underbrace{g(x',y')}_{Output} = \underbrace{f(x,y)}_{Input}$$



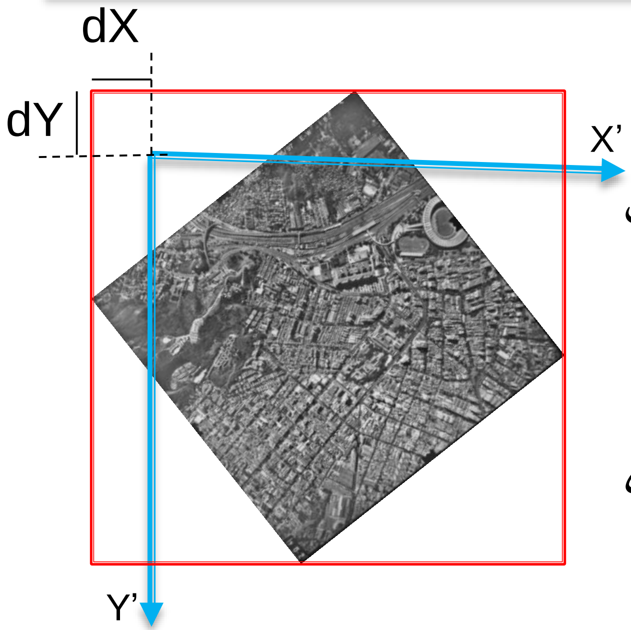
نگاشت معکوس

- مراحل نگاشت معکوس

1. ابتدا مختصات چهارگوشه تصویر ورودی با مدل ریاضیاتی به سیستم مختصات تصویر دوم انتقال می‌یابند. (به روش نگاشت مستقیم)



نگاشت معکوس



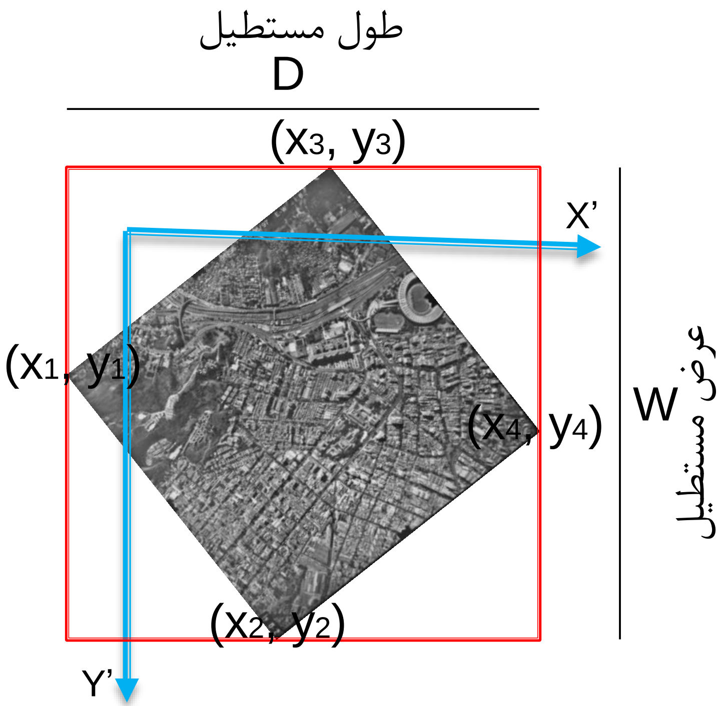
- مراحل نگاشت معکوس:

2. برازش یک مستطیل به مختصات چهار گوشه انتقال یافته تصویر

- مبدا سیستم مختصات نیز به اندازه dX و dY جابجا شود.

$$dX = \left|\min(0, X_{\min})\right|$$
$$dY = \left|\min(0, Y_{\min})\right|$$

نگاشت معکوس



- مراحل نگاشت معکوس:
- ابعاد مستطیل برابرند با:

$$D = X_{\max} - X_{\min} + 1$$
$$W = Y_{\max} - Y_{\min} + 1$$

- همچنین Xmin, Xmax, Ymin و Ymax برابرند با:

$$X_{\min} = \min\{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4\}$$
$$X_{\max} = \max\{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4\}$$
$$Y_{\min} = \min\{y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4\}$$
$$Y_{\max} = \max\{y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4\}$$

نگاشت معکوس

- مراحل نگاشت معکوس:

3. به ازای هر پیکسل در مستطیل مقصد (تصویر خروجی) مختصات نظیرش در تصویر اول محاسبه می‌شود.

- نکته: برای هر پیکسل در مستطیل مقصد بایستی مختصات‌شان از مقدار dX و dY مرحله ۱ کم شوند.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = H^{-1} \begin{bmatrix} x' - dX \\ y' - dY \\ 1 \end{bmatrix}$$

نگاشت معکوس

- مراحل نگاشت معکوس:
- در این مرحله نیز ورودی مختصات صحیح اند (شمارنده سطر و ستون‌های تصویر خروجی) اما بعد از اعمال ماتریس هموگرافی یک مقدار اعشاری بدست می‌آید!

$$\begin{pmatrix}72 & 119 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{H^{-1}} \begin{pmatrix}200.28 & 100.81 & 1\end{pmatrix}$$

- برای حل مشکل اعشاری بودن خروجی ماتریس هموگرافی، تکنیک‌های درونیابی به کار گرفته می‌شوند.

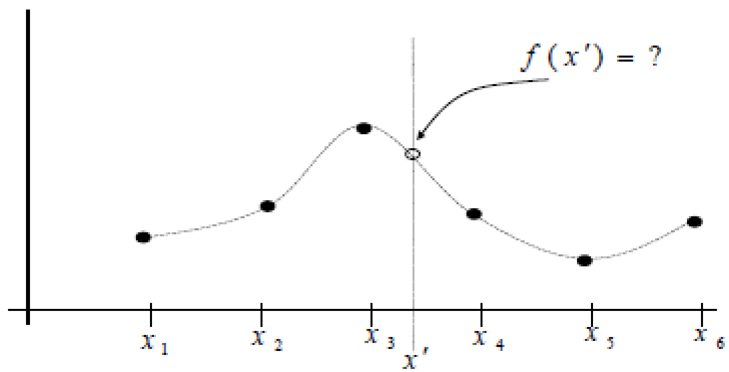
نگاشت معکوس

- مراحل نگاشت معکوس:
- برای نمونه‌برداری اطلاعات رادیومتریکی سه تکنیک درونیابی مورد استفاده قرار می‌گیرد:

1. نزدیکترین فاصله (Nearest Neighbor)
2. خطی دوگانه (bi-linear)
3. مکعبی دو گانه (bi-cubic)

نگاشت معکوس

- مراحل نگاشت معکوس (نمونه برداری):
- ساده‌ترین روش برای مقداردهی یک تابع ((f(x)) در موقعیت خاصی مانند X روش نزدیکترین فاصله است.

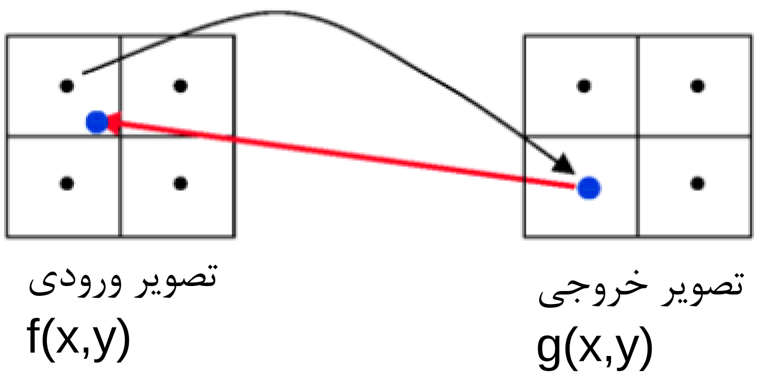


در شکل بالا مقدار تابع در نقاط تو پر معلوم است.
هدف تعیین مقدار تابع در نقطه تو خالی است.
همچنین گراف تابع با درونیابی ترسیم شده است!

نگاشت معکوس

- مراحل نگاشت معکوس (نمونه برداری):
- روش نزدیکترین فاصله بسیار سریع است و برای کاربردهای آنی مناسب است.
- معادله ریاضیاتی این روش به صورت زیر است:

$$x = [x]$$
$$y = [y]$$
$$g(x', y') = f(x, y)$$



نگاشت معکوس

- مراحل نگاشت معکوس (نمونه برداری):
- مثال: فرض کنید با توجه ماتریس هموگرافی نتیجه یک نگاشت معکوس به صورت زیر باشد.

$$\begin{pmatrix}72 & 119 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{H^{-1}} \begin{pmatrix}200.28 & 100.81 & 1\end{pmatrix}$$

- در صورتی که مقدار تصویر ورودی در موقعیت‌های (200, 100) و (200, 101) به ترتیب برابر با ۱۵۲ و ۱۵۶ باشد؛ مقدار تصویر خروجی با روش درونیابی نزدیکترین فاصله در موقعیت (72, 119) چه مقداری خواهد داشت؟

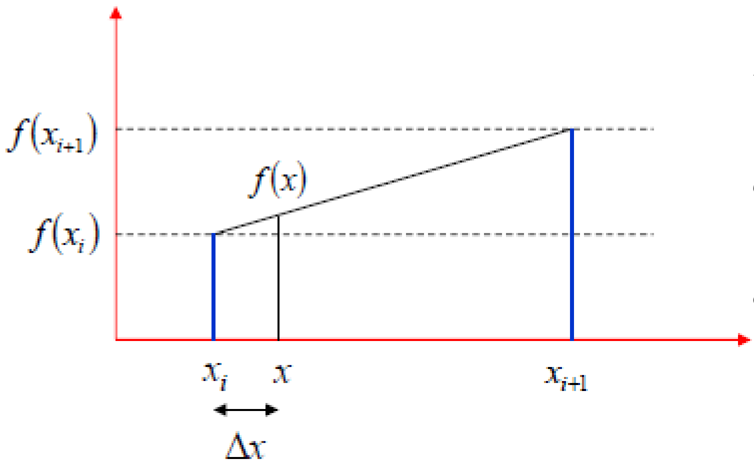
جواب

$$\begin{pmatrix}200.28 & 100.81 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{NN\_method} \begin{pmatrix}200 & 101 & 1\end{pmatrix}$$

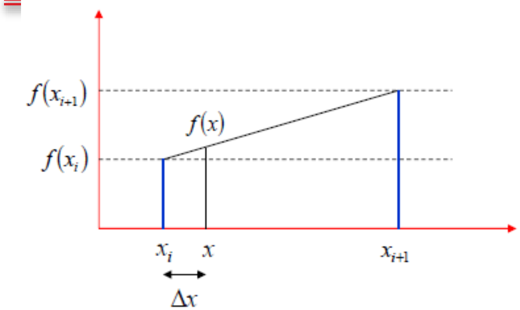
$$g(72,119) = f(200,101) \Rightarrow g(72,119) = 156$$

نگاشت معکوس

- مراحل نگاشت معکوس (نمونه برداری):
- درونیابی خطی:
- پیش از ورود به درونیابی خطی دوگانه، ابتدا به درونیابی خطی می‌پردازیم.
- فرض کنید مقدار تابع f در نقاط Xi و Xi+1 معلوم است و هدف برآورد مقدار این تابع در موقعیت X به روش خطی باشد



نگاشت معکوس



- مراحل نگاشت معکوس (نمونه برداری):
- درونیابی خطی:
- درونیابی خطی یک میانگین گیری وزندار انجام می‌دهد که رابطه آن به صورت زیر است.

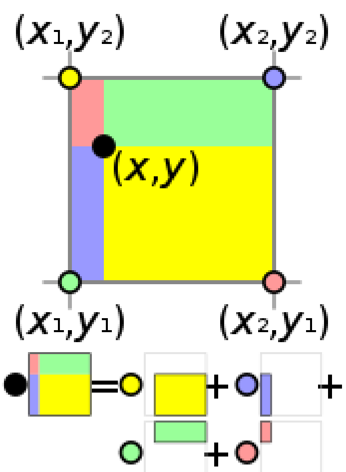
$$f(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f(x_{i+1}) + \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} f(x_i)$$

- اگر فاصله بین نقاط ۱ باشد (مثل ۱ پیکسل) آنگاه نتیجه این درونیابی برابر است با:

$$f(x) = \Delta x \cdot f(x_{i+1}) + (1 - \Delta x) \cdot f(x_i)$$

نگاشت معکوس

- مراحل نگاشت معکوس (نمونه برداری):
- درونیابی خطی دوگانه:
- این روش همان روش درونیابی خطی اما در حالت دو بعدی است. به عبارتی نقاط نزدیکتر وزن بالاتر دارند.

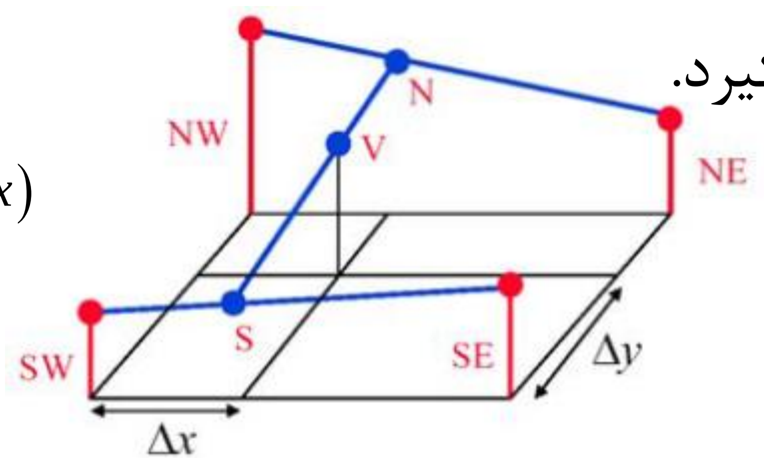


- مثال: برای تعیین مقدار نقطه سیاه رنگ از روی سایر نقاط، چون فاصله این نقطه تا نقط زرد رنگ کمتر است وزن زرد نیز بیشتر در نظر گرفته شده است. به همین مانند برای سایر نقاط

نگاشت معکوس

- مراحل نگاشت معکوس (نمونه برداری):
- درونیابی خطی دوگانه:
- در این روش یک درونیابی خطی در راستای محور افقی و سپس یک درونیابی خطی در راستای محور عمودی انجام می‌گیرد.

$$S = SE \cdot \Delta x + SW \cdot (1 - \Delta x)$$
$$N = NE \cdot \Delta x + NW \cdot (1 - \Delta x)$$
$$V = N \cdot \Delta y + S \cdot (1 - \Delta y)$$



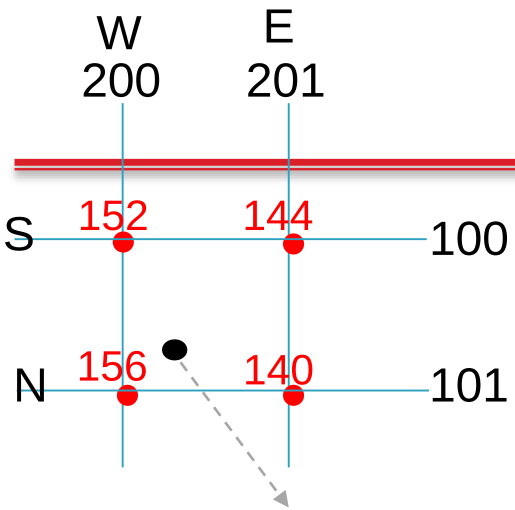
نگاشت معکوس

- مراحل نگاشت معکوس (نمونه برداری):
- مثال: فرض کنید با توجه ماتریس هوموگرافی نتیجه یک نگاشت معکوس به صورت زیر باشد.

$$\begin{pmatrix}72 & 119 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{H^{-1}} \begin{pmatrix}200.28 & 100.81 & 1\end{pmatrix}$$

- در صورتی که مقدار تصویر ورودی در موقعیت‌های (200, 100)، (200, 101)، (201, 100) و (201, 101) به ترتیب برابر با ۱۵۲، ۱۵۶، ۱۴۴ و ۱۴۰ باشد؛ مقدار تصویر خروجی با روش درونیابی خطی دوگانه در موقعیت (72, 119) چه مقداری خواهد داشت؟

نگاشت معکوس



- جواب: به شکل روبرو توجه کنید
- ابتدا Δx و Δy محاسبه می‌شوند:

$$\Delta x = 200.28 - 200 = 0.28$$

$$\Delta y = 100.81 - 100 = 0.81$$

- سپس S و N محاسبه می‌شوند:

$$SE = 144 \quad SW = 152 \quad NE = 140 \quad NW = 156$$

$$S = SE \cdot \Delta x + SW \cdot (1 - \Delta x) = 144 \times 0.28 + 152 \times 0.72 = 149.76$$

$$N = NE \cdot \Delta x + NW \cdot (1 - \Delta x) = 140 \times 0.28 + 156 \times 0.72 = 151.52$$

$$V = N \cdot \Delta y + S \cdot (1 - \Delta y) = 151.52 \times 0.81 + 149.76 \times 0.19 = 151.19$$

$$\Rightarrow g(72,119) = 151$$

نگاشت معکوس

- مراحل نگاشت معکوس (نمونه برداری):
- درونیابی مکعبی دوگانه:
- در این روش درونیابی بر مبنای فرکانس تابع sinc انجام می‌گیرد.

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

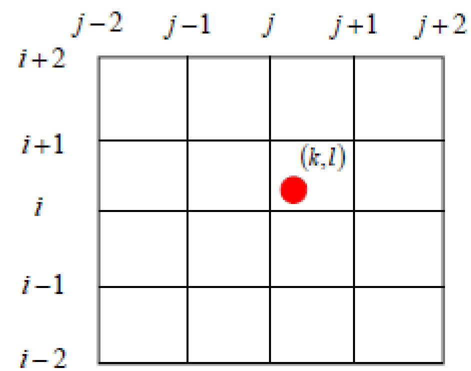
- براساس تئوری نمونه برداری این روش ایده آل ترین روش برای درونیابی است. با این اوصاف نتاج نشان داده است بسته به کاربرد و هدف این روش همیشه بهینه‌ترین روش نیست.

نگاشت معکوس

- درونیابی مکعبی دوگانه:
- الگوریتم درونیابی مکعبی دوگانه به صورت زیر است.

$$m = k - floor(k)$$
$$n = l - floor(l)$$

$$\begin{aligned}
&for \quad (tmp = (k-1) \quad to \quad (k+2)) \\
&\qquad Val(s) = -n(1-n)^2.f(tmp, l-1) + (1-2n^2+n^3).f(tmp, l) \\
&\qquad\qquad + n(1+n-n^2).f(tmp, l+1) - n^2(1-n).f(tmp, l+2) \\
&endfor
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
f(k,l) = &-m(1-m)^2.Val(s) + (1-2m^2+m^3)Val(s+1) \\
&+ m(1+m-m^2)Val(s+2) - m^2(1-m).Val(s+3)
\end{aligned}$$

نگاشت معکوس

- درونیابی مکعبی دوگانه:
- مثال: فرض کنید پس از نگاشت معکوس مختصات موقعیت متناظر در سیستم مختصات اول (x=10.25, y=106.48) باشد، با توجه به مقادیر همسایه، مقدار درونیابی با روش مکعبی دوگانه برای این نقطه چقدر است؟

	9	10	11	12
105	100	105	106	170
106	109	110	171	168
107	105	111	117	165
108	108	112	164	163

$$k = 10.25$$
$$l = 106.48$$

اعداد نارنجی رنگ، شمارنده سطرها و ستونهاست

اعدا سیاه رنگ مقدار درجه خاکستری تصویر ورودی اند.

نگاشت معکوس

- درونیابی مکعبی دوگانه:
- حل: مرحله اول محاسبه تابع sinc

$$n = 10.25 - 10 = 0.25$$

$$m = 106.48 - 106 = 0.48$$

در هر سطر

100	105	106	170
109	110	171	168
105	111	117	165
108	112	164	163

$$Val(1) = -0.25\times(1-0.25)^2\times100 + (1-2\times0.25^2+0.25^3)\times105 + 0.25\times(1+0.25-0.25^2)\times106 - 0.25^2\times(1-0.25)\times170 = 102.95$$

$$Val(2) = -0.25\times(1-0.25)^2\times109 + (1-2\times0.25^2+0.25^3)\times110 + 0.25\times(1+0.25-0.25^2)\times171 - 0.25^2\times(1-0.25)\times168 = 125.53$$

$$Val(3) = -0.25\times(1-0.25)^2\times105 + (1-2\times0.25^2+0.25^3)\times111 + 0.25\times(1+0.25-0.25^2)\times117 - 0.25^2\times(1-0.25)\times165 = 111.09$$

$$Val(4) = -0.25\times(1-0.25)^2\times108 + (1-2\times0.25^2+0.25^3)\times112 + 0.25\times(1+0.25-0.25^2)\times164 - 0.25^2\times(1-0.25)\times163 = 125.61$$

نگاشت معکوس

- درونیابی مکعبی دوگانه:
- حل: مرحله دوم محاسبه تابع sinc برای نتیجه تمام سطرها

$$n = 10.25 - 10 = 0.25$$
$$m = 106.48 - 106 = 0.48$$

$$f(10.25,106.48) = -0.48 \times (1-0.48)^2 \times 102.95$$
$$+ (1 - 2\times 0.48^2 + 0.48^3) \times 125.53$$
$$+ 0.48 \times (1 + 0.48 - 0.48^2) \times 111.09$$
$$- 0.48^2 \times (1-0.48) \times 125.61 = 119.79$$
$$f(10.25,106.48) = 119.79 \xrightarrow{round} f(10.25,106.48) = 120$$

نتیجه درونیابی تمام سطرها

$Val(1) = 102.95$ درونیابی سطر اول

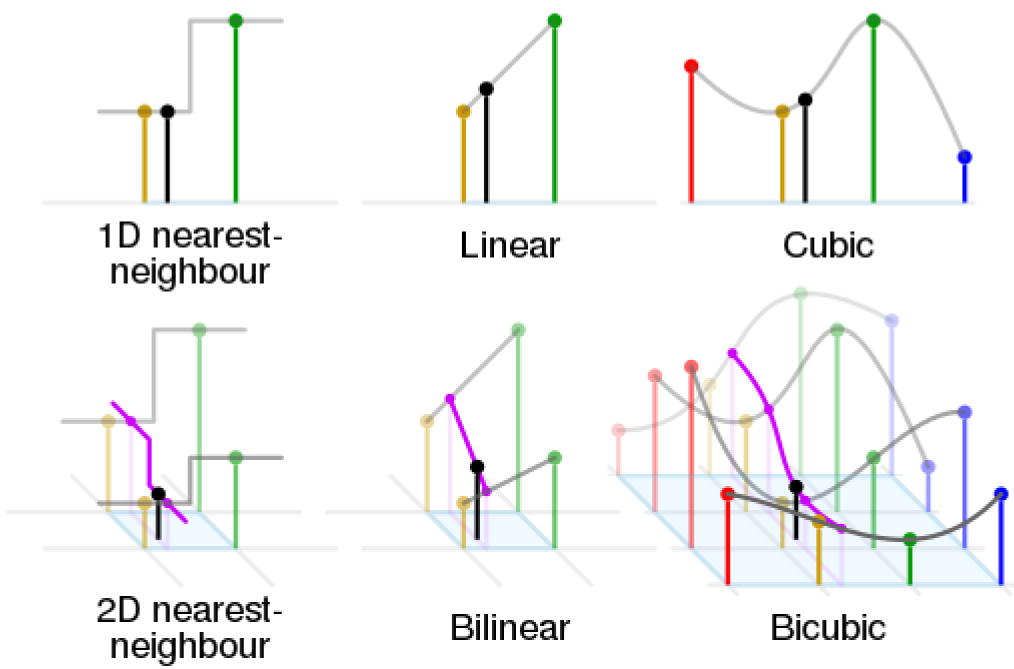
$Val(2) = 125.53$ درونیابی سطر دوم

$Val(3) = 111.09$ درونیابی سطر سوم

$Val(4) = 125.61$ درونیابی سطر چهارم

نگاشت معکوس

- مراحل نگاشت معکوس (نمونه برداری):
- همه روش‌های درونیابی در یک نگاه



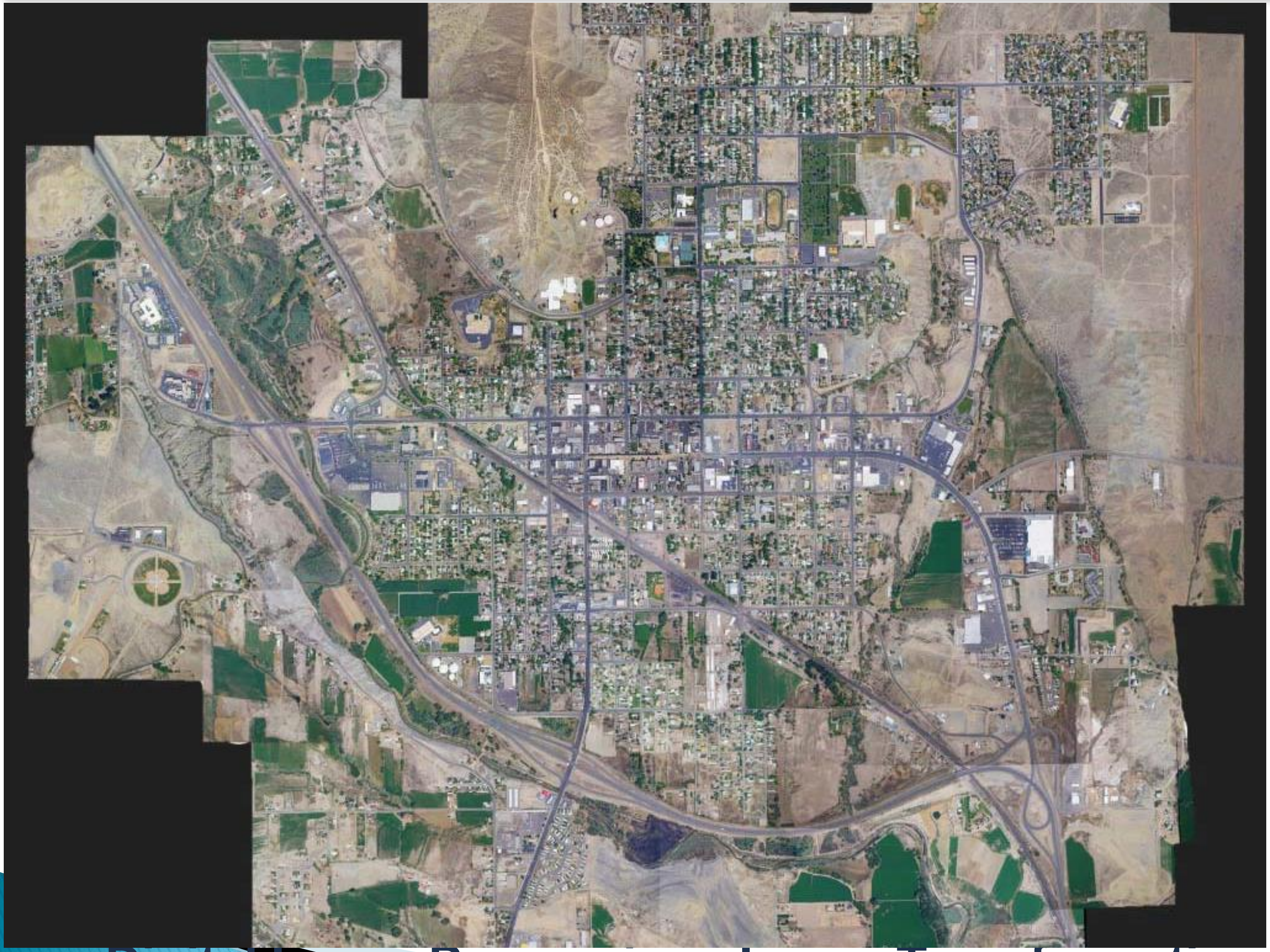
نگاشت معکوس

- مراحل نگاشت معکوس (نمونه برداری):
- مزایا و معایب همه روش‌های درونیابی

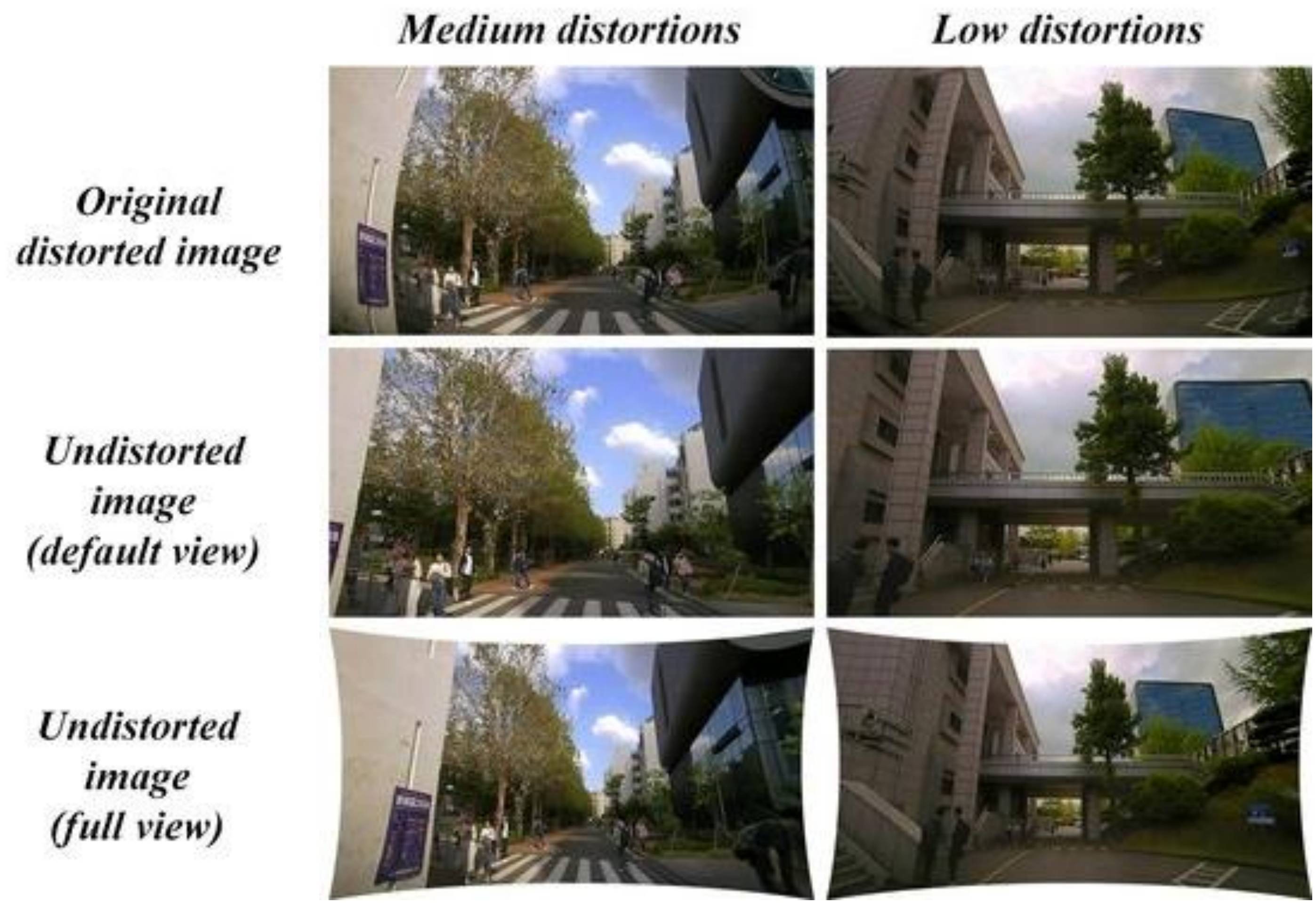
مکعبی دو گانه	خطی دوگانه	نزدیکترین همسایه	روش مزایا
سنگین	متوسط	سریع	سرعت / پیچیدگی پیاده سازی
کم	متوسط	زیاد	پله ای شدن لبه‌ها

Applications

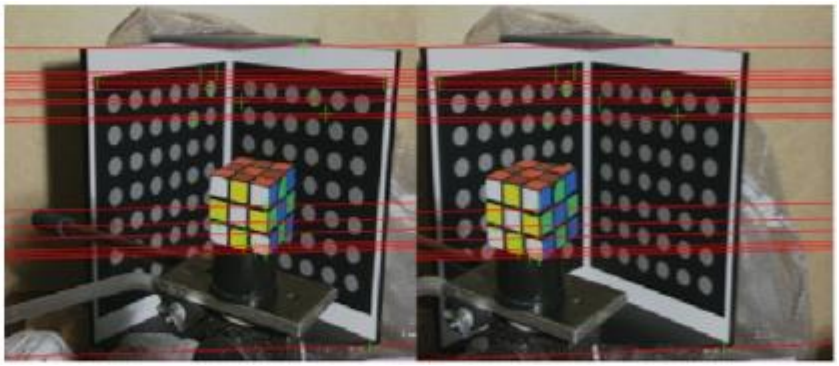
کاربردها - تهیه ارتوفتو

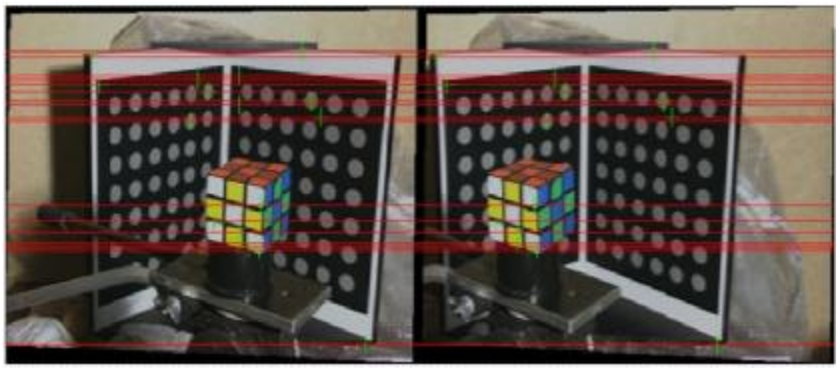


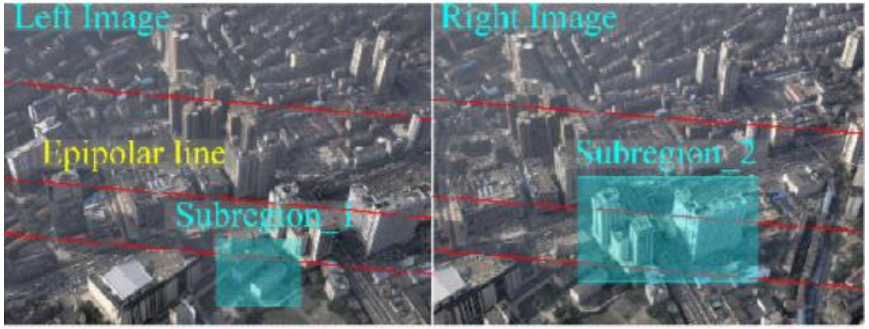
کاربردها – تصحیح اعوجاجات عدسی‌ها



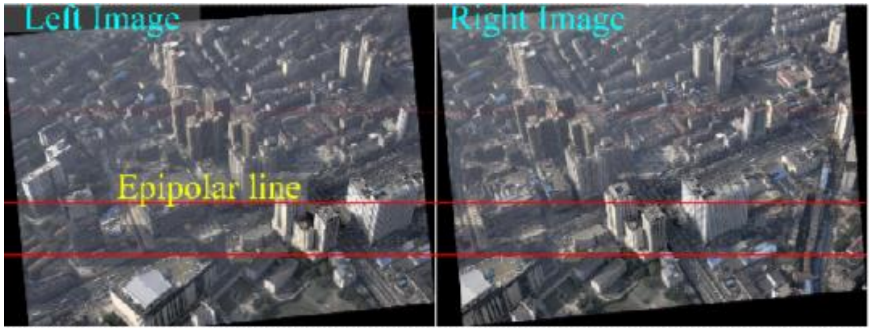
کاربردها – تولید تصاویر اپی پولار





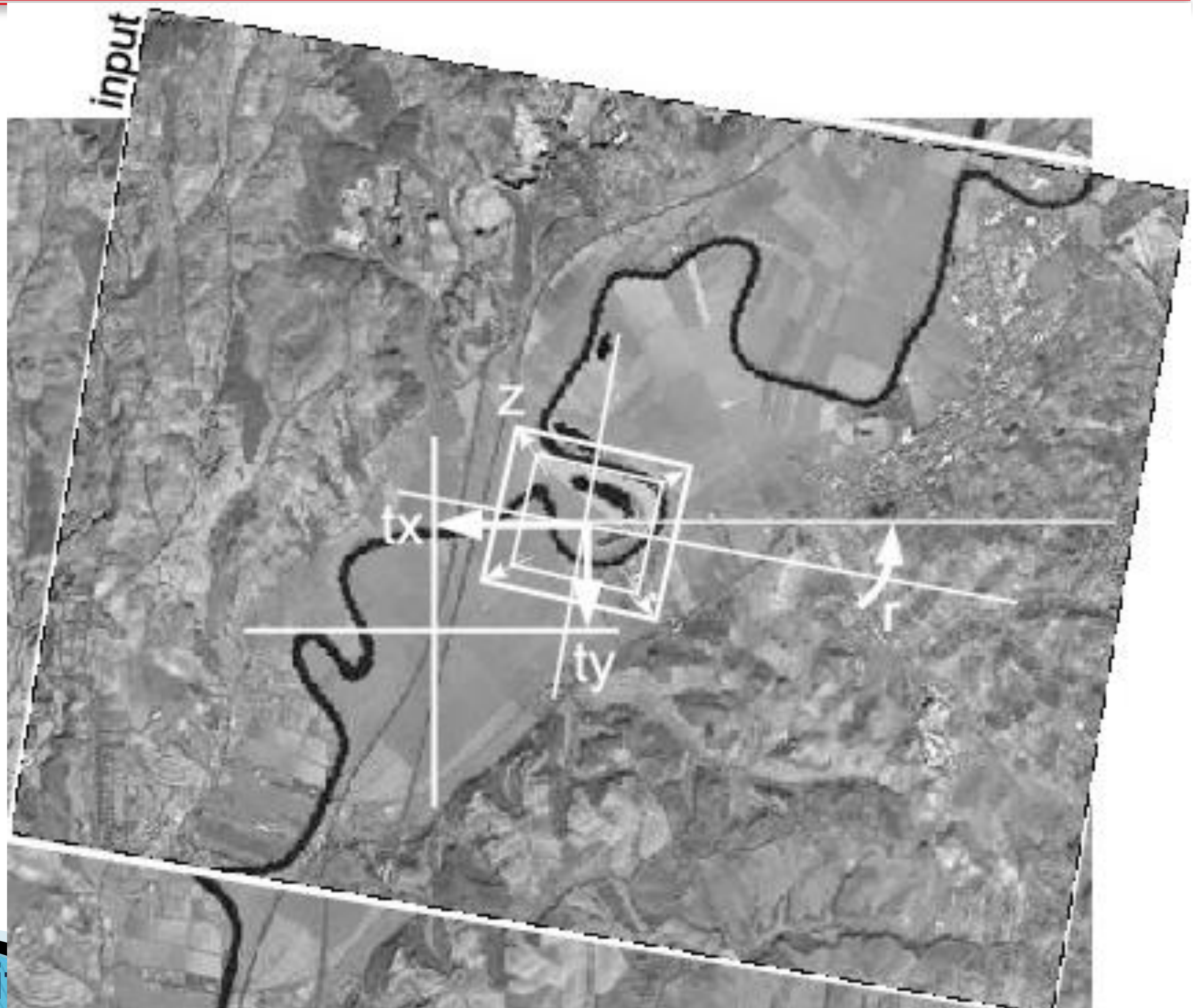


Raw stereo images



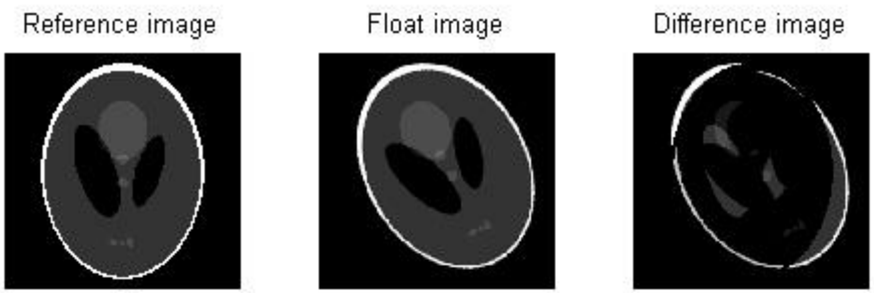
After Epipolar resampling

کاربردها – هم مرجع سازی تصاویر



کاربردها – هم مرجع سازی تصاویر

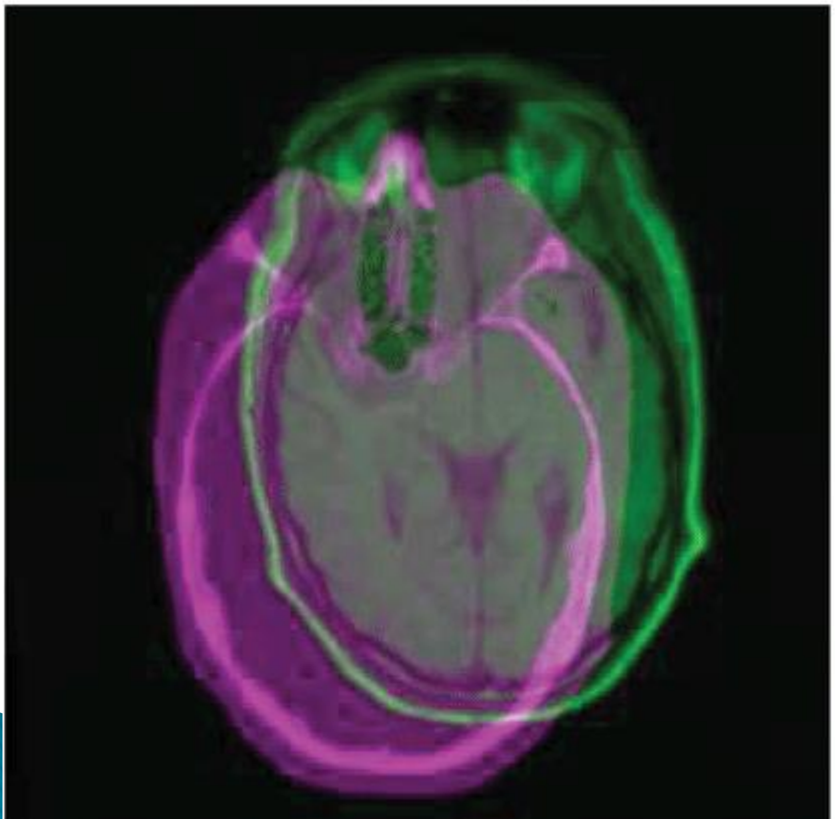
- اولین گام در پایش یک عارضه در تصاویر اخذ شده در زمانهای مختلف، هم مرجع سازی آنهاست.



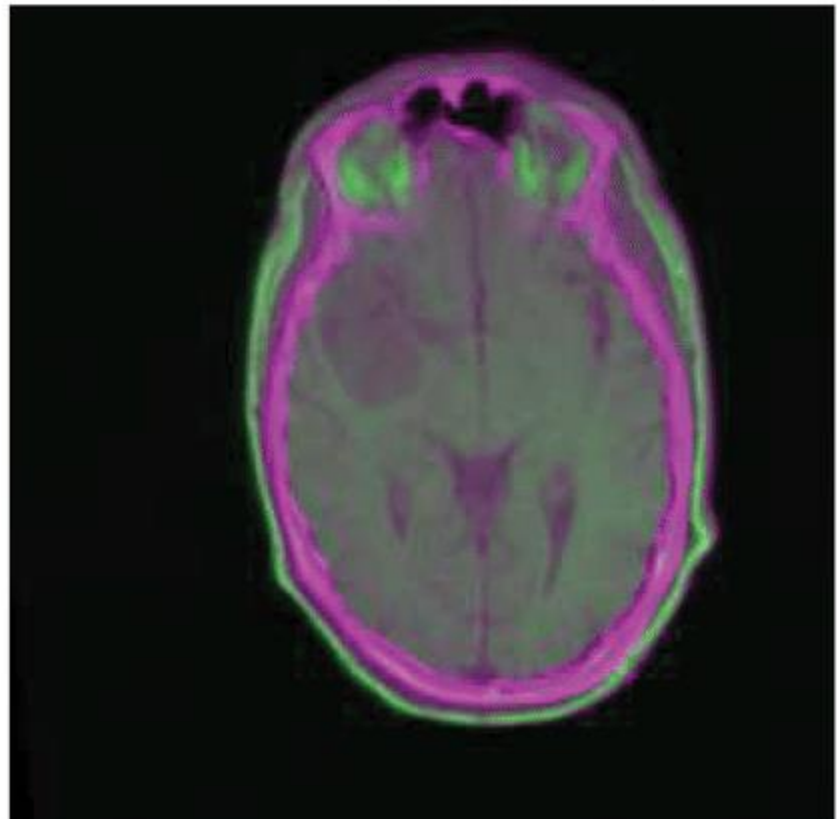
کاربردها – هم مرجع سازی تصاویر

- هم مرجع سازی تصاویر سری زمانی CT جهت پایش بیماری

Transversal (Before registration)

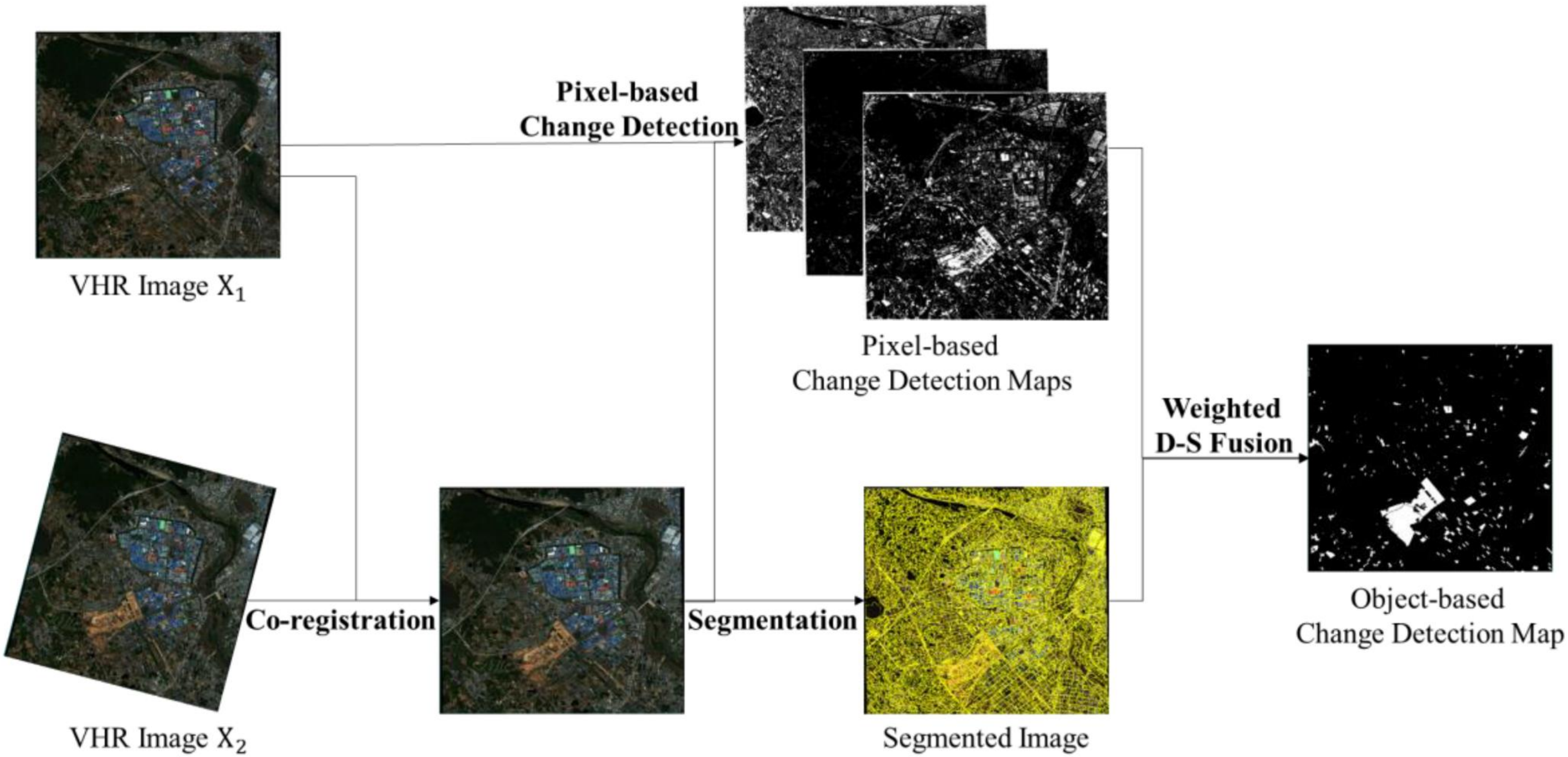


Transversal (After registration)



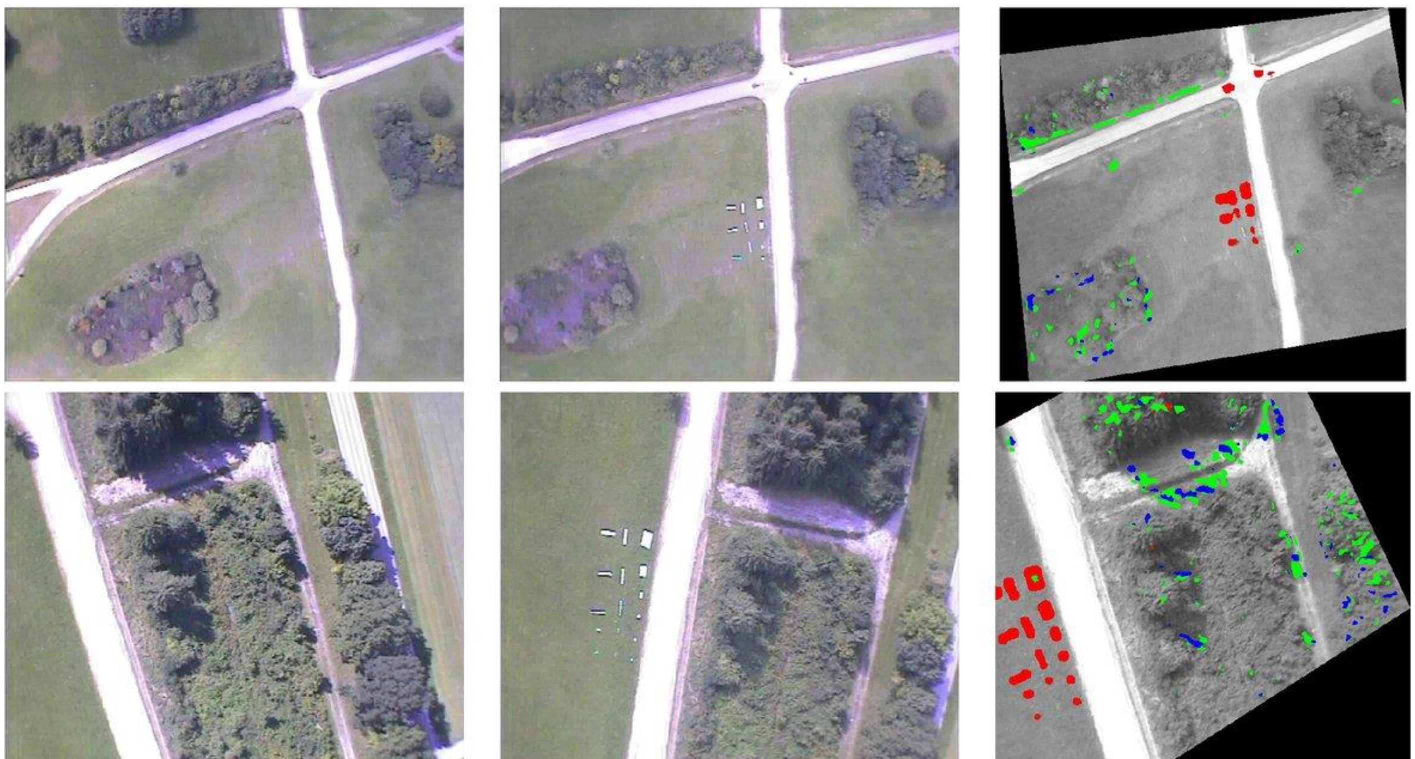
کاربردها – هم مرجع سازی تصاویر

- آشکارسازی تغییرات از روی تصاویر ماهواره‌ای



کاربردها – هم مرجع سازی تصاویر

- آشکارسازی تغییرات از روی تصاویر پهپاد

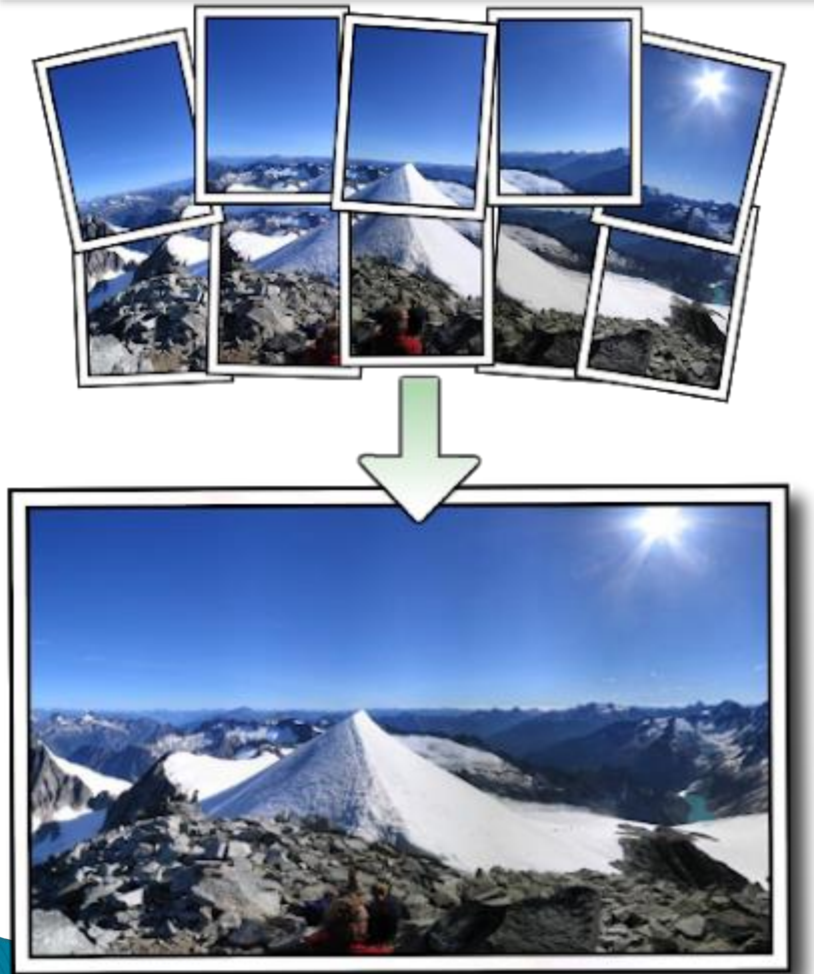


تصاویر زمان اول | تصاویر زمان دوم | تصاویر زمان دوم بعد از هم مرجع سازی و آشکارسازی تغییرات

کاربردها – تولید تصاویر پانوراما

- مرکز تصویر تا انتهای تصویر برداری جابجایی ندارد (فقط دوران)

کاربردها – تهیه موزاییک عکسی



- مشابه تولید تصاویر پانوراما در اینجا نیز، مرکز تصویر تا انتهای تصویر برداری جابجایی ندارد (به عبارتی دوربین فقط دوران دارد).

تمرین شماره ۷- قسمت دوم

- روش‌های نگاشت مستقیم و معکوس را در محیط متلب (یا پایتون) پیاده سازی کنید. برای نگاشت معکوس، روش‌های درونیابی خطی دوگانه و نزدیکترین همسایه پیاده‌سازی شود.
- نکته ۲: ماتریس هموگرافی را با توجه به پارامترهای فیزیکی یک مدل افاین تشکیل دهید. مقیاس بین ۰.۹ تا ۱.۱ بیشتر نباشد!
- نتیجه این فعالیت را در سیستم خود اجرا کرده و از اجرای آن عکس بگیرید. کدها و عکس را تا دو هفته بعد به آدرس noorollah.tatar@gmail.com با موضوع "تمرین شماره ۷ درس پردازش تصویر- قسمت دوم" ایمیل کنید.

سوال؟