دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول

Jundi Shapur

University of Technology-Dezful

مبانی فتوگرامتری

فصل سوم: اندازه‌گیری بر روی عکس

Nurollah Tatar

Fundamentals of Photogrammetry

Semester 2021-1

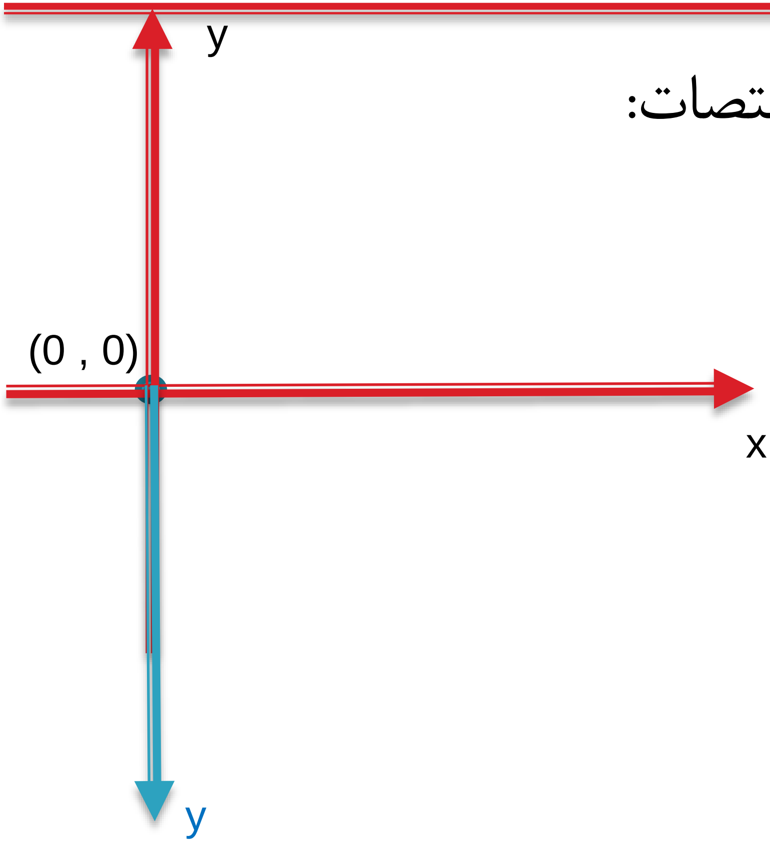
فهرست مطالب

- سیستم‌های مختصات اندازه‌گیری عکسی
- سایر سیستم‌های مختصات
- تبدیلات دو بعدی به دو بعدی
- دستگاه معادلات
- حل دستگاه معادلات
- مثال و تمرین

سیستم‌های مختصات اندازه‌گیری عکسی

- برای تعریف یک سیستم مختصات:

1. ابتدا تعریف مبدا
2. سپس توجیه محورها



- قرمز: سیستم دست راستی
- آبی: سیستم دست چپی

سیستم‌های مختصات اندازه‌گیری عکسی

- سیستم مختصات‌های اندازه‌گیری بر روی عکس:

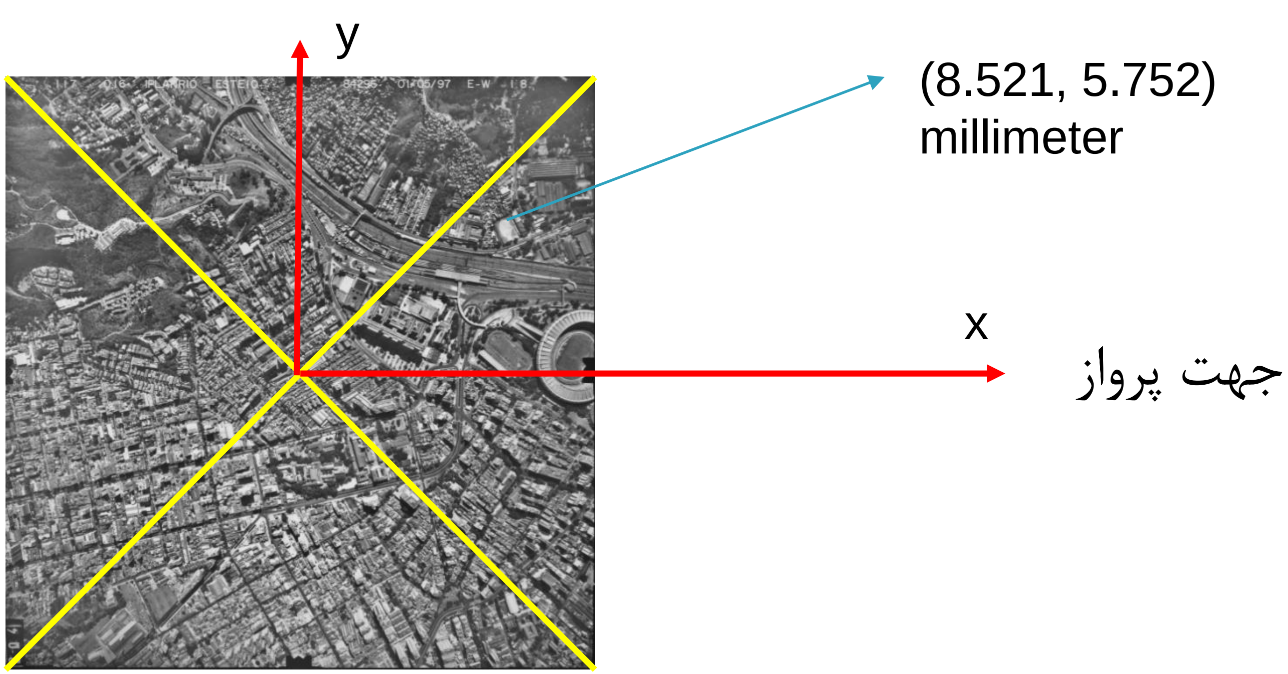
1. سیستم مختصات کمکی عکسی
2. سیستم مختصات اصلی عکسی/ تصویری/ علائم تصویری یا فیدوشل مارکها
3. سیستم مختصات مرکز تصویر
4. سیستم مختصات دستگاهی (کامپراتور یا دیجیتال)

سیستم‌های مختصات اندازه‌گیری عکسی

- سیستم مختصات عکسی/ علائم کناری:
- اگر فیدوشل مارکهای متقابل را به یکدیگر وصل نماییم، همدیگر را در یک نقطه قطع خواهند نمود که مبدا سیستم مختصات عکسی خواهد بود.
- همچنین جهت توجیه محور x در امتداد پرواز و محور y عمود بر آن و به سمت بالا می باشد.
- واحد اندازه گیری معمولا میلی متر و مختصات نقطه به صورت دوبعدی (x,y) خواهد بود.

سیستم‌های مختصات اندازه‌گیری عکسی

- سیستم مختصات عکسی/ علائم کناری:



سیستم‌های مختصات اندازه‌گیری عکسی

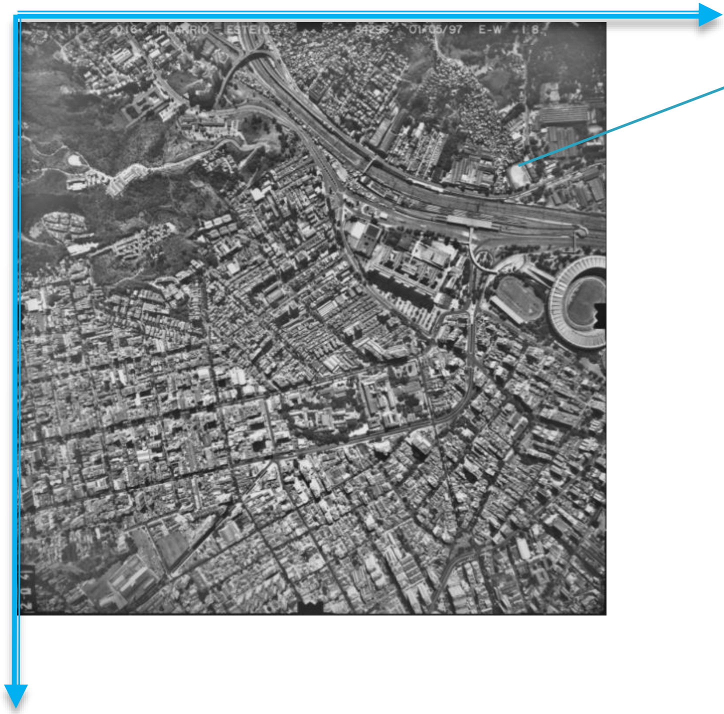
- سیستم مختصات تصویری (دیجیتال):
- مبدا سیستم مختصات منطبق بر گوشه بالای (معمولاً) تصویر می باشد.
- همچنین جهت توجیه محور x و y در امتداد اولین سطر و ستون تصویر است.
- واحد اندازه‌گیری معمولا پیکسل است.

سیستم‌های مختصات اندازه‌گیری عکسی

دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول

- سیستم مختصات تصویری (رقومی):

مبدا سیستم مختصات
تصویر رقومی



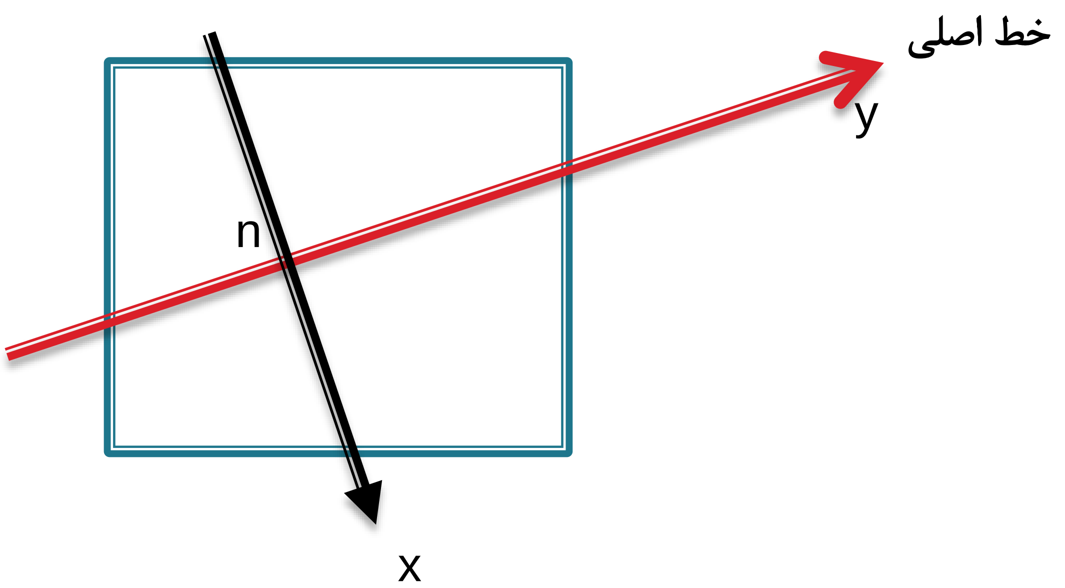
(1785 , 6347)
pixel

سیستم‌های مختصات اندازه‌گیری عکسی

- سیستم مختصات کمکی عکسی/ علائم کناری:
- مبدا سیستم مختصات کمکی عکسی منطبق بر نقطه نادیر n
- توجیه محور y بر روی خط اصلی محور x عمود بر آن می باشد.
- برای نقطه i (ایزوسنتر) نیز امکان تعریف چنین سیستمی وجود دارد.

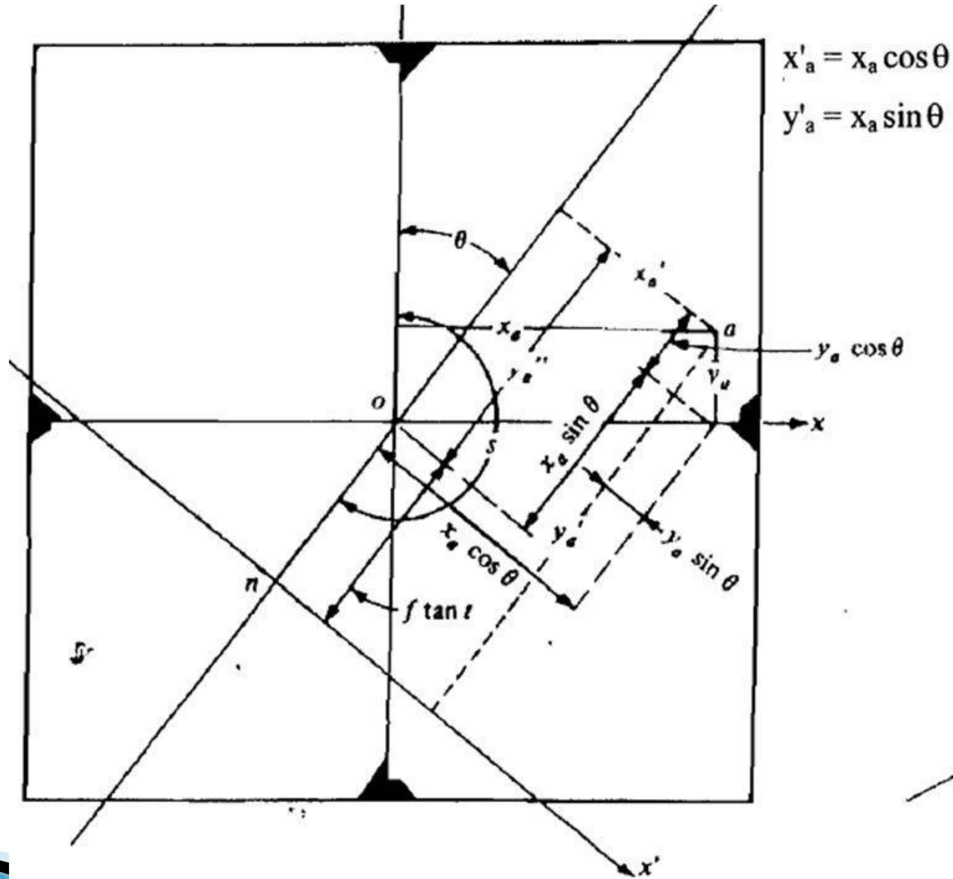
سیستم‌های مختصات اندازه‌گیری عکسی

- سیستم مختصات کمکی عکسی/ علائم کناری:



سیستم‌های مختصات اندازه‌گیری عکسی

- سیستم مختصات کمکی عکسی/ علائم کناری:



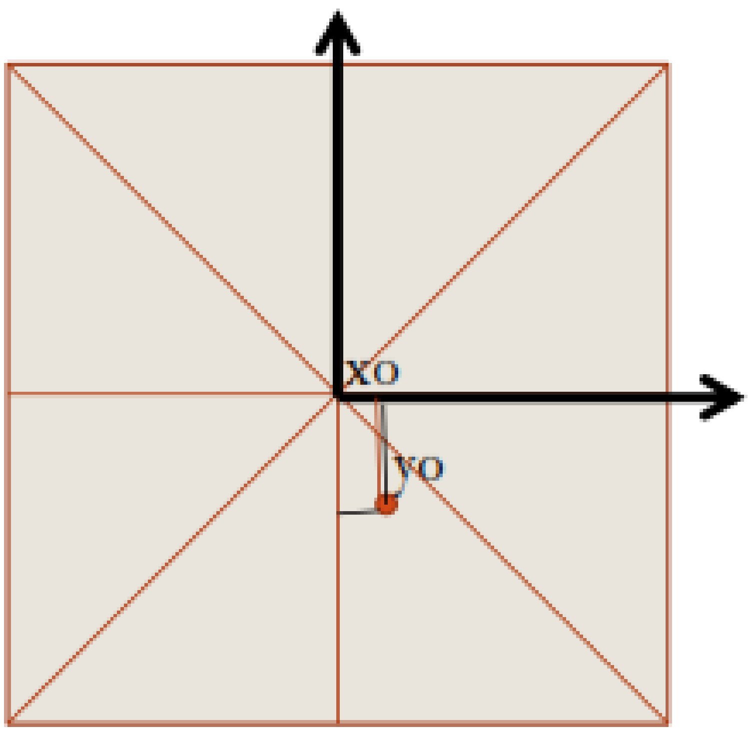
$$x'_a = x_a \cos\theta - y_a \sin\theta$$

$$y'_a = x_a \sin\theta + y_a \cos\theta + f\tan t$$

سیستم‌های مختصات اندازه‌گیری عکسی

- سیستم مختصات مرکز عکس/ تصویر:
- در حالت ایده آل محل تقاطع تقاطع فیدوشل مارکها و نقطه اصلی باید یکسان باشد.
- در واقعیت به دلیل وجود اعوجاجات برهم منطبق نیستند.
- این مقدار اختلاف را با (x_0, y_0) نشان میدهند.
- در این خصوص در زمان بررسی و معرفی توجیه داخلی توضیح داده خواهد شد.

سیستم‌های مختصات اندازه‌گیری عکسی



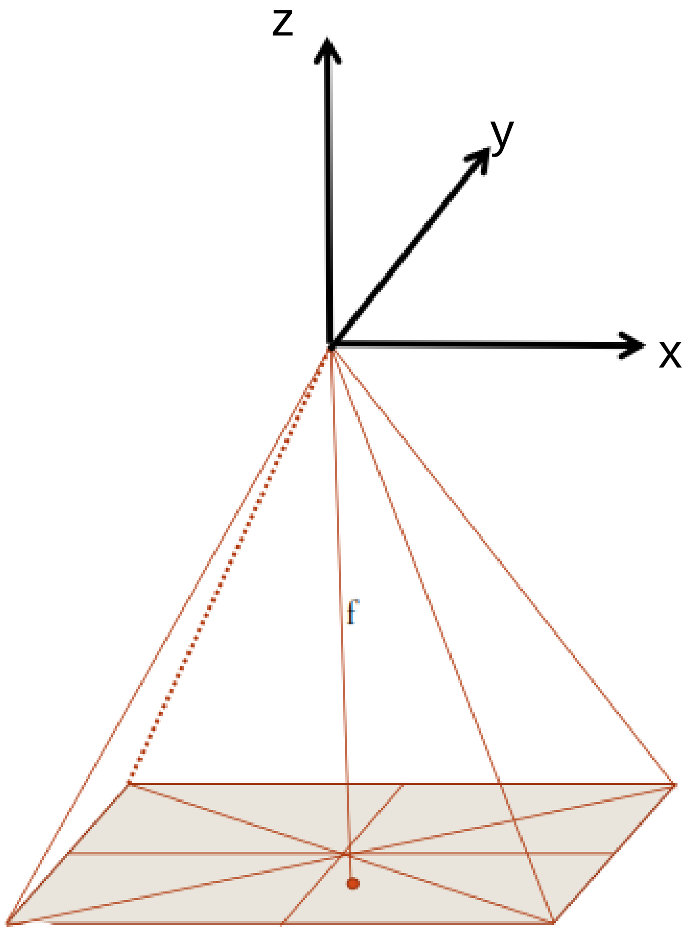
- سیستم مختصات مرکز عکس/ تصویر:
- مبدا این سیستم مختصات به مبدا سیستم مختصات عکسی نزدیک است. شاید در عمل ۲۰ الی ۳۰ پیکسل با هم اختلاف داشته باشند.

سیستم‌های مختصات اندازه‌گیری عکسی

- سیستم مختصات مرکز عکسی/ تصویری:
- مبدا سیستم مختصات عکسی منطبق بر مرکز عدسی
- توجیه محور x در امتداد پرواز و y عمود برآن و دست راستی می باشد (مشابه سیستم حالت علائم کناری)
- محور z در امتداد محور اپتیکی دوربین است. (مقدار این مولفه برای تمام نقاط روی عکس برابر با f- می باشد).
- مختصات هر نقطه در آن برابراست با: $\begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 & -f \end{pmatrix}$

سیستم‌های مختصات اندازه‌گیری عکسی

- سیستم مختصات مرکز عکسی/ تصویری:

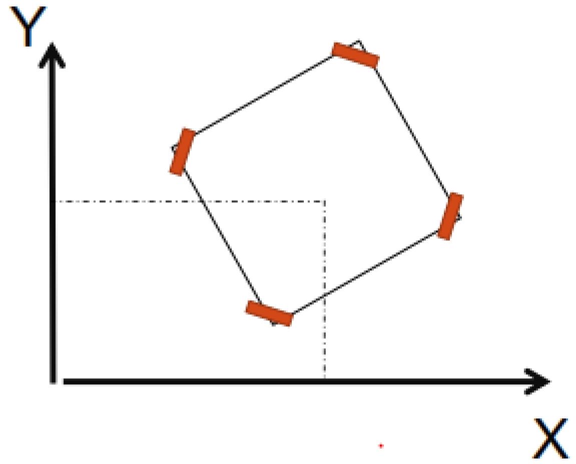


سیستم‌های مختصات اندازه‌گیری عکسی

- سیستم مختصات دستگاهی:
- اندازه‌گیری بر روی یک عکس از طریق یک سیستم واسط صورت گرفته و سپس با یک تبدیل ریاضی به سیستم مختصات اصلی عکسی یا سیستم مختصات مرکز تصویر منتقل می‌گردد.
- لذا این سیستم‌های دستگاهی نیز برای خود دارای سیستم مختصات اختصاصی می‌باشند.

سیستم‌های مختصات اندازه‌گیری عکسی

- سیستم مختصات دستگاهی:
- در فتوگرامتری قدیم از کامپاراتورها
- در فتوگرامتری رقومی از کامپیوتر



سیستم‌های مختصات اندازه‌گیری عکسی

- خلاصه سیستم‌های مختصات:
- اندازه‌گیری در سیستم مختصات دستگاهی انجام می‌گیرد.
- مختصات اندازه‌گیری شده مرحله قبل به سیستم مختصات علائم کناری انتقال می‌یابند.
- و در نهایت مختصات آنها به سیستم مختصات مرکز عکسی/تصویری انتقال می‌یابند.

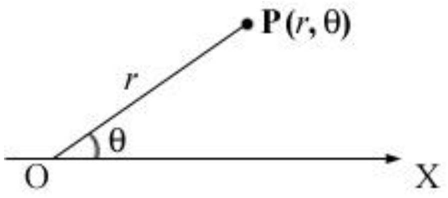
Other coordinate systems

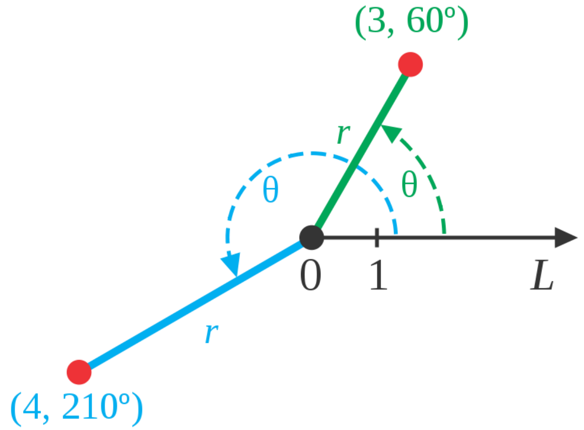
سایر سیستم‌های مختصات

- طبقه بندی سیستم های مختصات:
- **سیستم مختصات قائم الزاویه:** موقعیت نقاط یا اشیاء براساس فاصله از محورهای سیستم مختصات بیان می‌شوند.
- **سیستم مختصات منحنی الخط:** موقعیت نقاط یا اشیاء براساس زوایایی که با امتدادها یا صفحات معلوم می‌سازند، بیان می‌شوند.

سایر سیستم‌های مختصات

- سیستم مختصات قطبی:
- یک سیستم مختصات دوبعدی است که در آن مکان هر نقطه، با فاصله آن تا مرکز مختصات (r) و زاویه بین خط رسم‌شده از مرکز به آن نقطه و محور طول (θ) مشخص می‌شود.



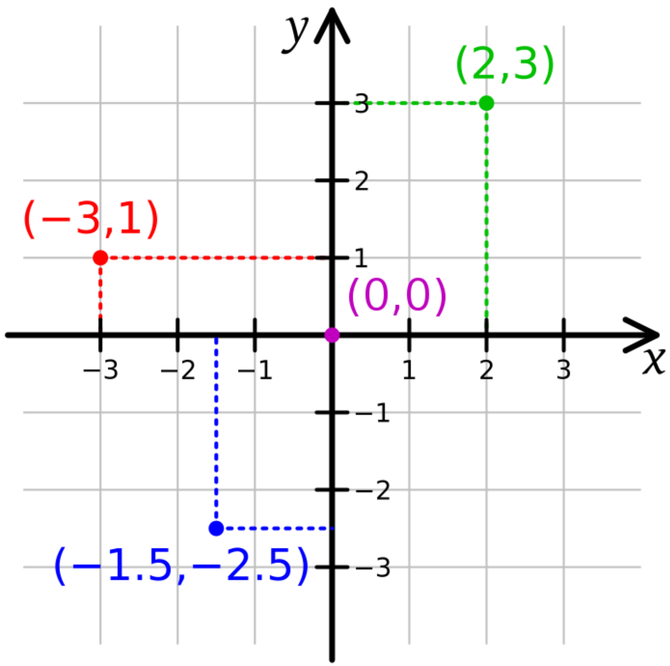


سایر سیستم‌های مختصات

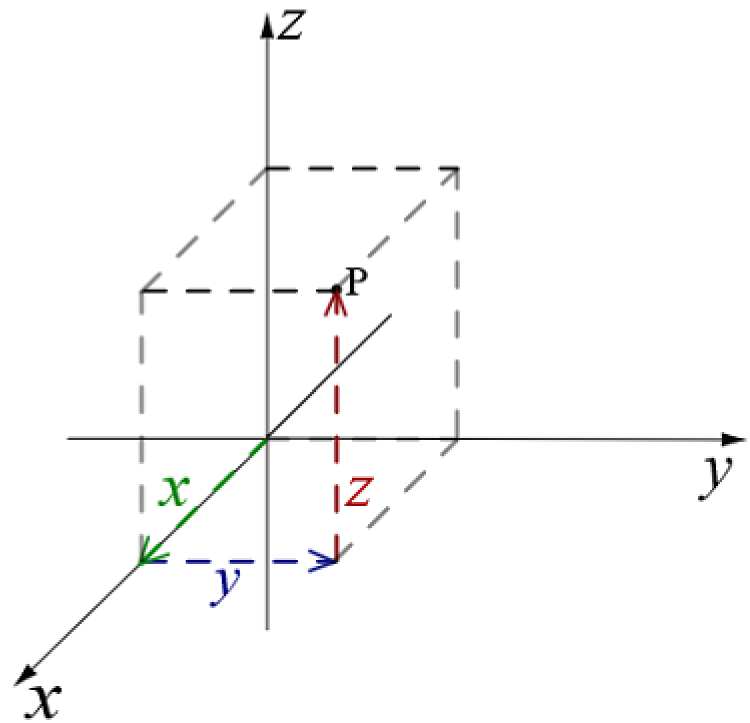
- سیستم مختصات دکارتی (کارتزین):
- در هندسه، به نمایش هر نقطه از صفحه با دو عدد (یک زوج مرتب) گفته می‌شود. این دو عدد را معمولاً به نام‌های مختصه X و مختصه Y می‌خوانند.
- در این سیستم مختصات محورهای X و Y برهم عمودند، از این رو به آن سیستم محورهای متعامد نیز گفته می‌شود.

سایر سیستم‌های مختصات

- سیستم مختصات دکارتی (کارتزین):



کارتزین دو بعدی



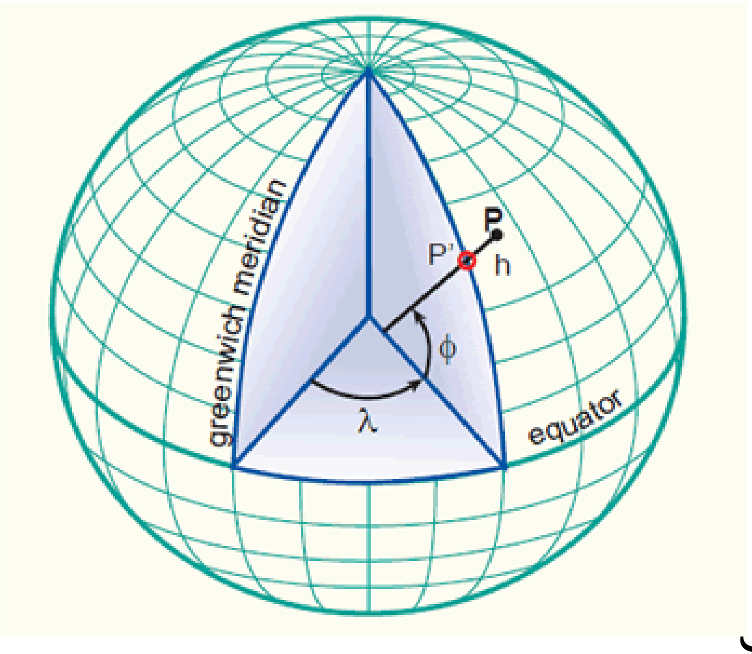
کارتزین سه بعدی

سایر سیستم‌های مختصات

- سیستم مختصات جغرافیایی:
- یک دستگاه مختصات است که با آن می‌توان مکان هر نقطه‌ای بر روی زمین را مشخص کرد.
- در این سیستم مختصات هر موقعیت با طول و عرض جغرافیایی (از جنس زاویه) و یک ارتفاع (فاصله از سطح مشخص) بیان می‌شود.
- طول و عرض جغرافیایی را به ترتیب با (λ, φ) نشان می دهند.

سایر سیستم‌های مختصات

- سیستم مختصات جغرافیایی:
- مبدا: مرکز ثقل زمین
- مبنای طول جغرافیایی زاویه بین نصف النهار گرینویچ تا نصف النهار نقطه بر روی صفح استوا
- مبنای عرض جغرافیایی زاویه بین مدار نقطه و صفحه استوا

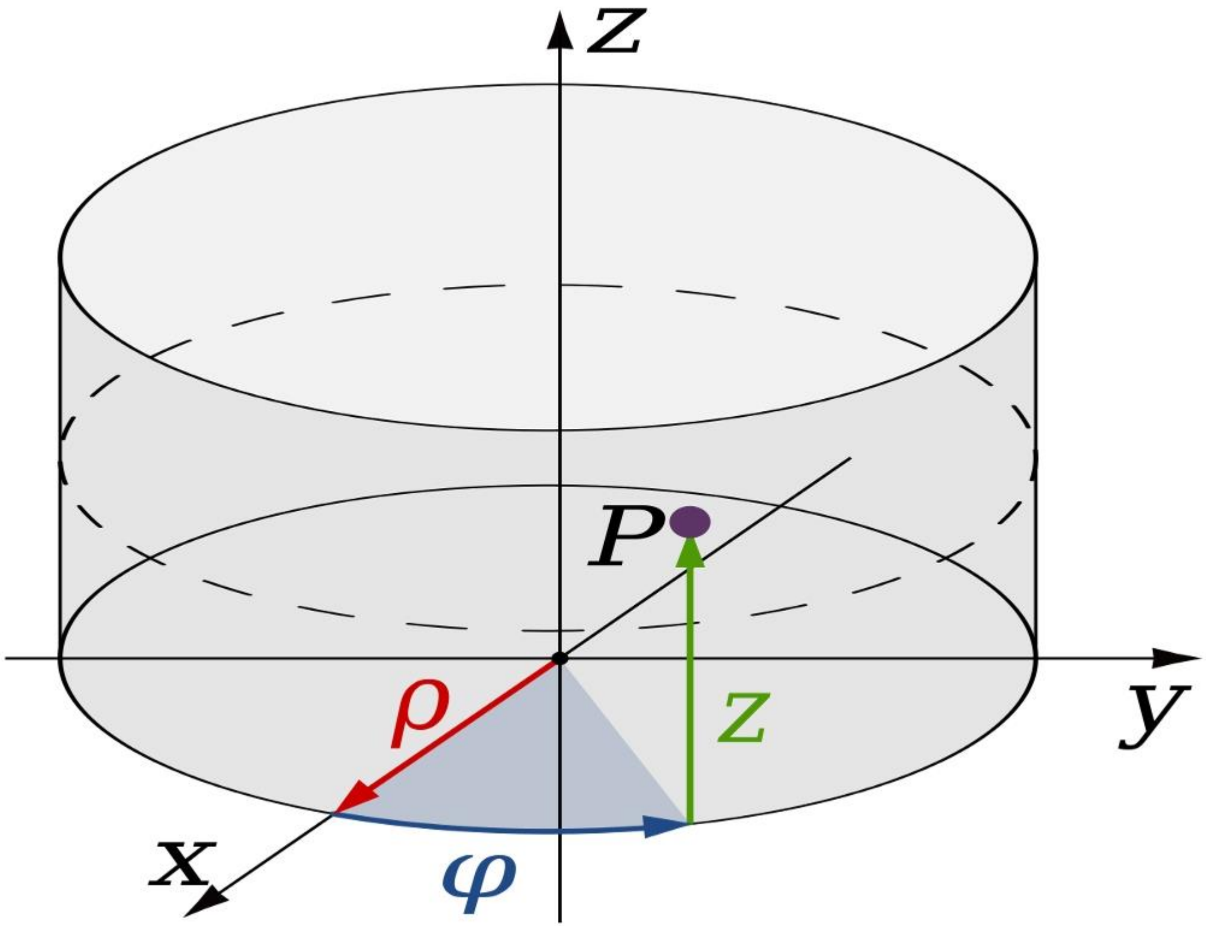


سایر سیستم‌های مختصات

- سیستم مختصات استوانه ای:
- مختصات استوانه‌ای یکی از شیوه‌های نمایش یک نقطه در حالت سه بعدی است.
- از روابط بیان شده در مختصات قطبی برای بیان مختصات استوانه‌ای استفاده می‌شود.
- در مقایسه با مختصات قطبی، تنها مختصات Z به این سیستم مختصات اضافه می‌گردد.

سایر سیستم‌های مختصات

- سیستم مختصات استوانه ای:

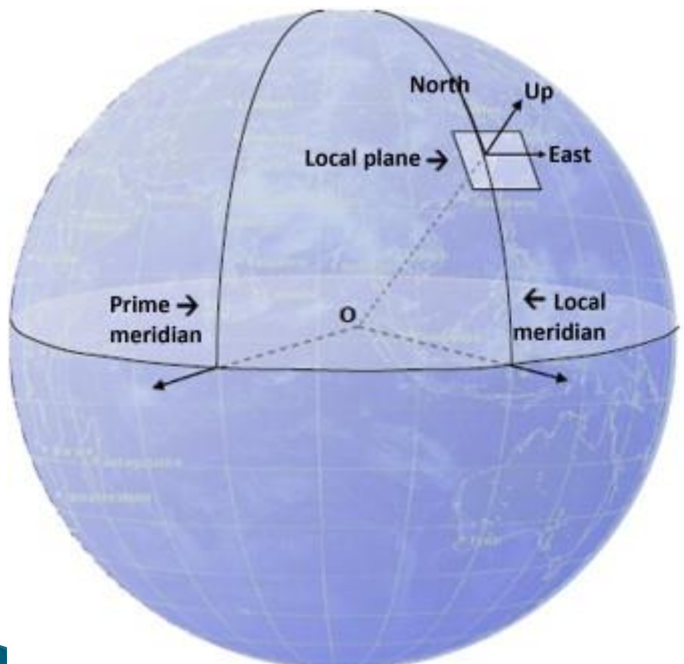


سایر سیستم‌های مختصات

- سیستم مختصات مورد استفاده در فتوگرامتری:
- سیستم مختصات سه بعدی محلی
- سیستم مختصات سه بعدی جهانی
  - مانند WGS84
- سیستم مختصات سه بعدی مدلی
- سیستم مختصات سیستم تصویر
  - مانند UTM

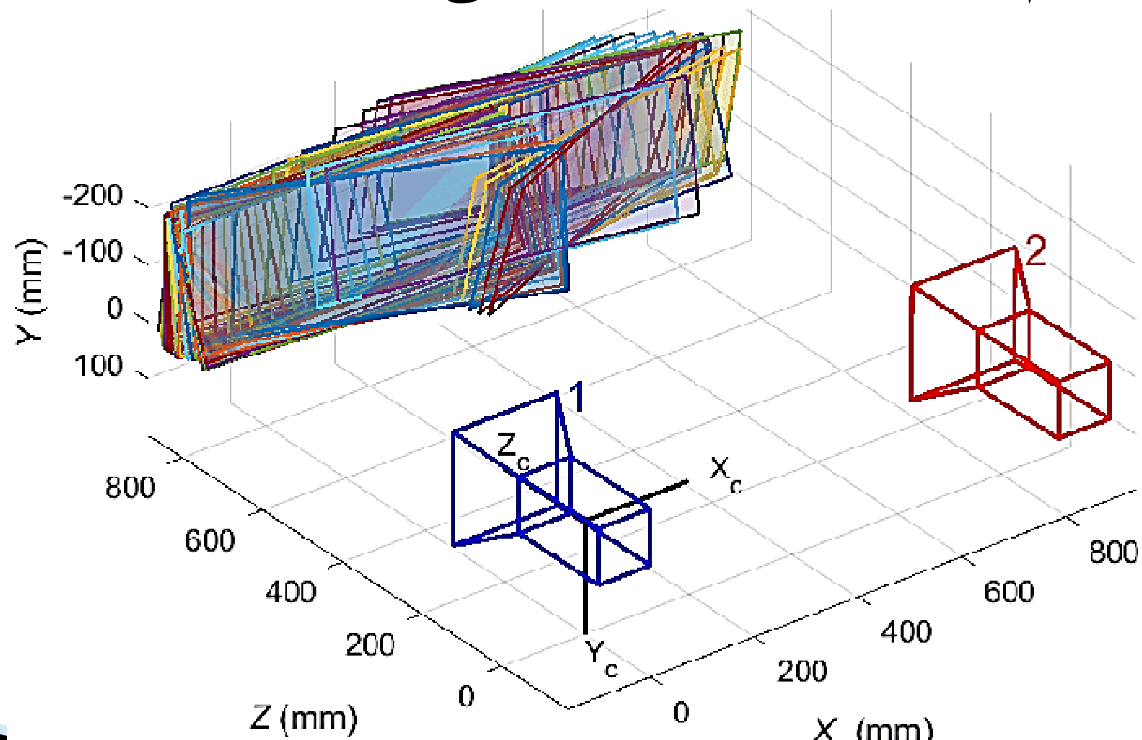
سایر سیستم‌های مختصات

- سیستم مختصات مورد استفاده در فتوگرامتری:
- سیستم مختصات سه بعدی محلی
- سیستم مختصات سه بعدی جهانی
  - مانند WGS84



سایر سیستم‌های مختصات

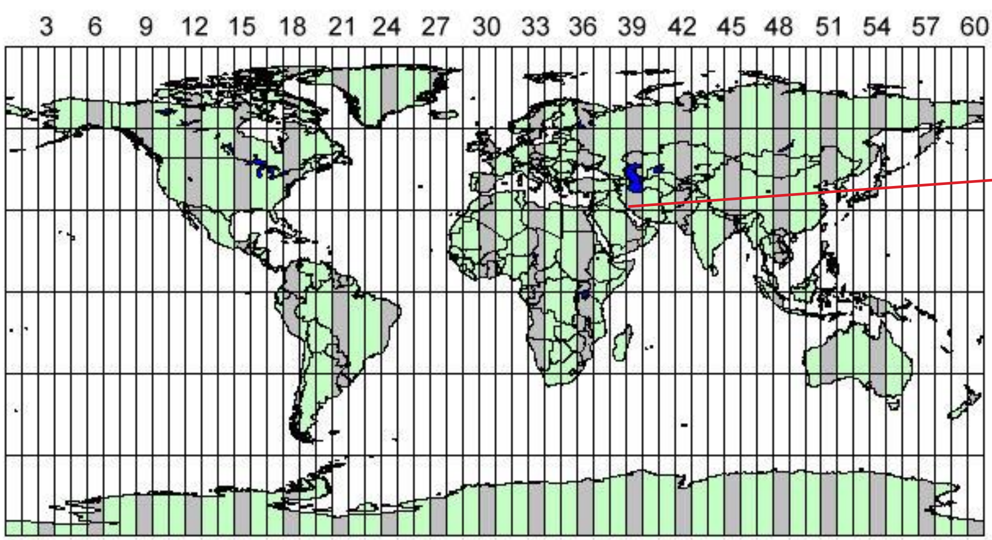
- سیستم مختصات مورد استفاده در فتوگرامتری:
- سیستم مختصات سه بعدی مدلی



سایر سیستم‌های مختصات

- سیستم مختصات مورد استفاده در فتوگرامتری:
- سیستم مختصات سیستم تصویر
- مانند UTM

World UTM Zones



Zone 39S
E: 257626.0
N: 3585818.0

Transformations

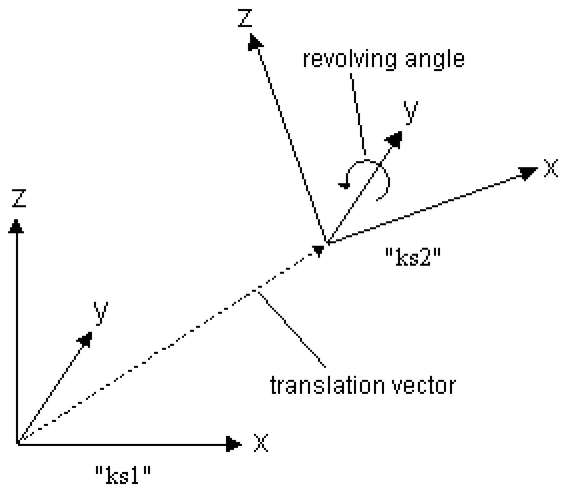
تبدیلات بین سیستمهای مختصات

- منظور از تبدیلات، فرآیندی است که با آن مختصات نقاط از یک سیستم مختصات به سیستم مختصات دیگر بدست می‌آیند.
- به طور مثال اگر مختصات یک نقطه در سیستم مختصات دستگاهی (x, y) باشد؛ آنگاه همین نقطه در سیستم مختصات تصویری (r, c) چقدر خواهد بود.
- در این درس فعلا تبدیلات دوبعدی به دو بعدی ارائه می‌شوند.

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- تبدیل بین دو سیستم مختصات عبارتست از جابجایی، دوران و مقیاس بین مختصات آنها.

Transformation = translation + rotation + scale



تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- دوران:

$$x = \overline{OA} = \overline{OP}\cos(\theta+\phi)$$

$$y = \overline{AP} = \overline{OP}\sin(\theta+\phi)$$

$$\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$$

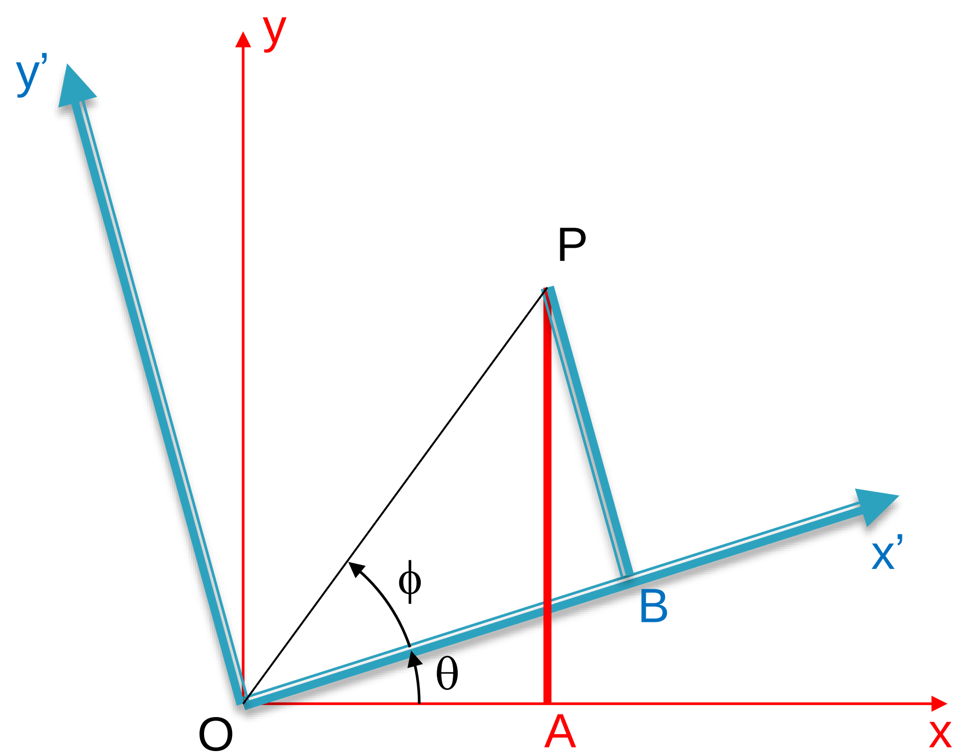
$$\sin(\theta+\phi) = \cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi$$

$$x = \underbrace{\overline{OP}\cos\phi}_{x'}\cos\theta - \underbrace{\overline{OP}\sin\phi}_{y'}\sin\theta$$

$$= x'\cos\theta - y'\sin\theta$$

Similarly, $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$

So $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

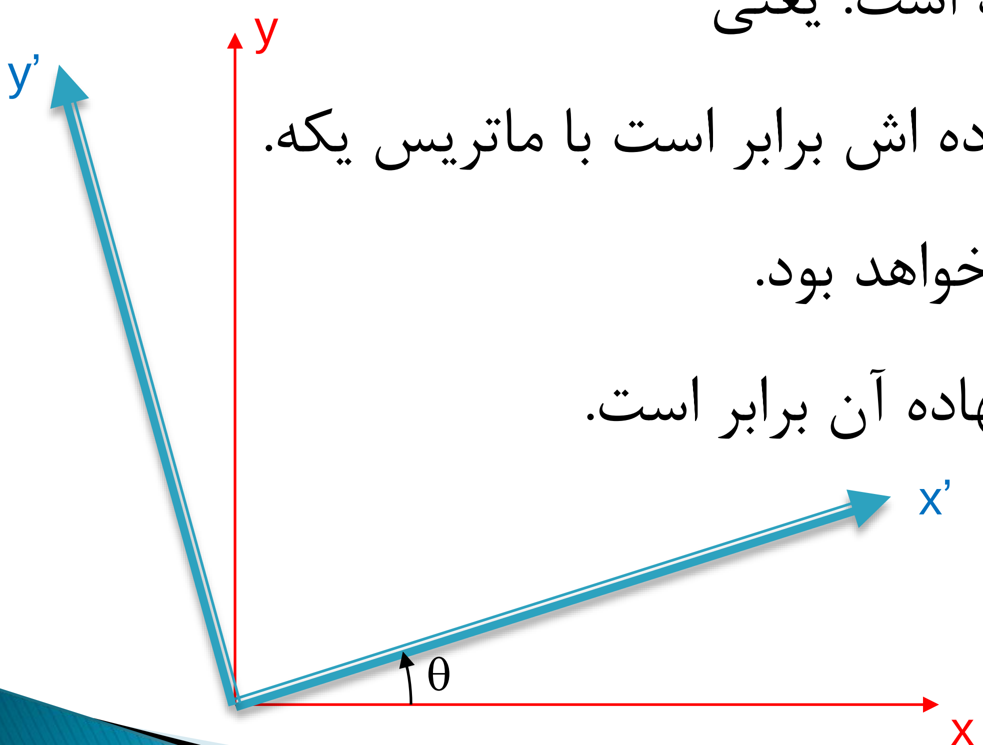


تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- دوران:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{R}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

- R یک ماتریس متعامد است. یعنی

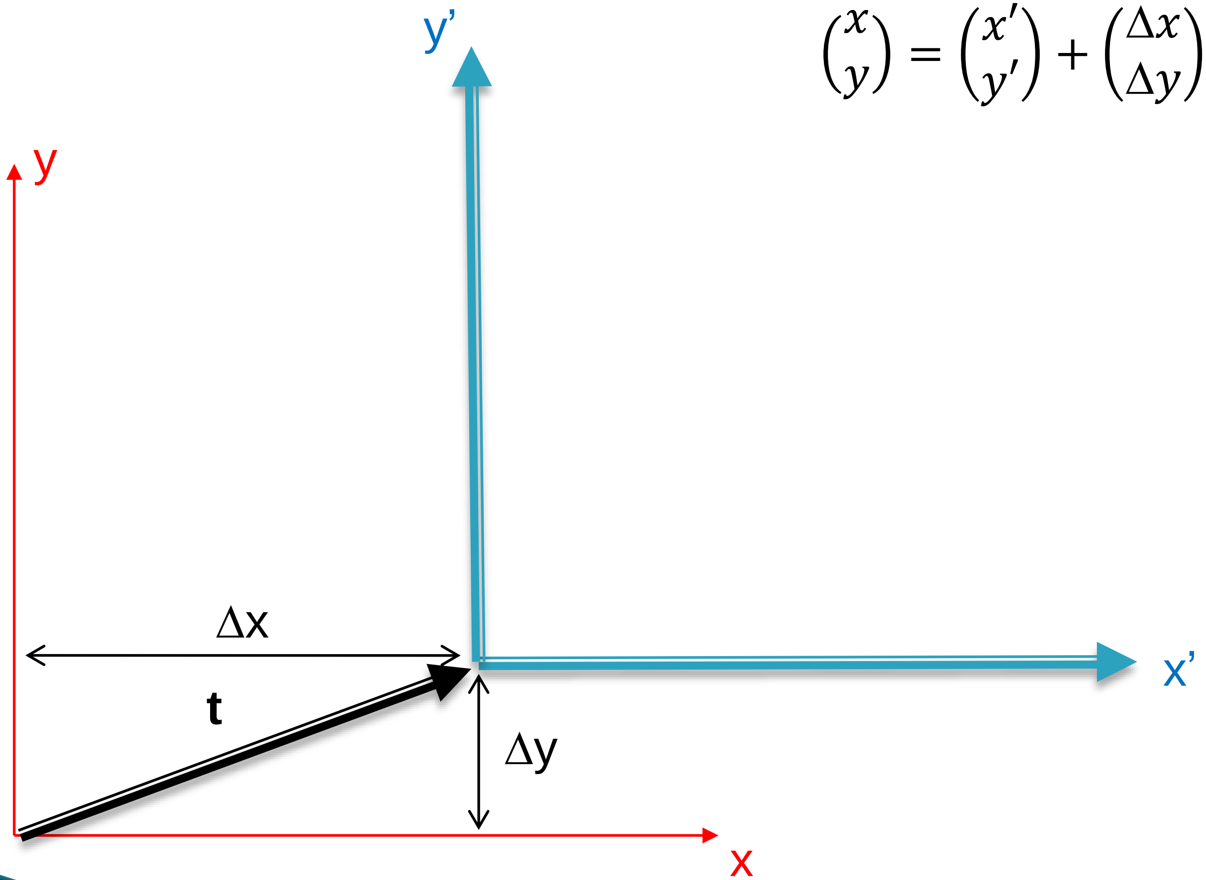


- ضرب R در ترانهاده اش برابر است با ماتریس یکه. **$RR^T = I$**
- دترمینان R یک خواهد بود. **$|R| = 1$**
- معکوس R با ترانهاده آن برابر است. **$R^{-1} = R^T$**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

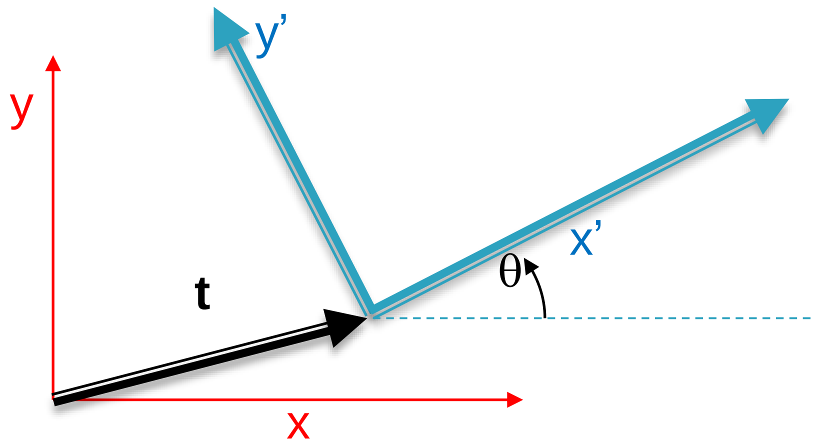
تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- جابجایی: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$



تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- انتقال



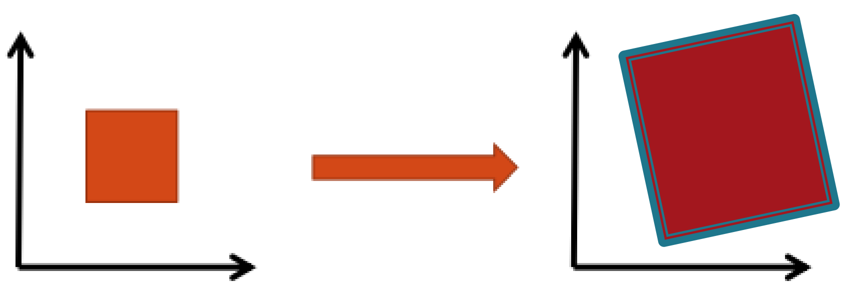
Rotation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

translation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$

Tranformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- انتقال (مدل متشابه یا conformal):
- تغییر شکل نداریم.
- زوایا حفظ می شوند.
- ممکن است تغییر مقیاس داشته باشیم.
- ۴ پارمتر مجهول دارد.



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- انتقال (مدل متشابه یا conformal):
- معادلات متشابه را می‌توان به فرم ریاضیاتی دیگری نوشت که به آن فرم پارامتریک می‌گویند.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = ax' + by' + c \\ y = -bx' + ay' + d \end{matrix}$$

- که در آن

$$a = \lambda \cos\theta$$

$$b = -\lambda \sin\theta$$

$$c = x_0$$

$$d = y_0$$

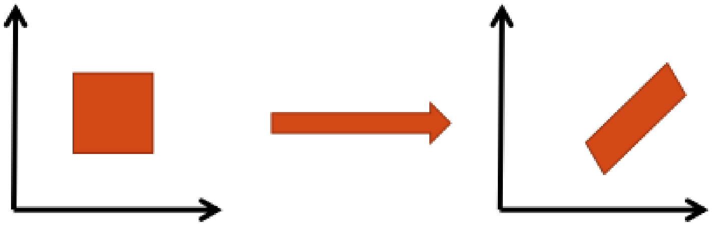
تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- انتقال (مدل متشابه یا conformal):
- نحوه محاسبه مقیاس، جابجایی و دوران از روی ضرایب فرم پارامتریک:

مقیاس	$\lambda = \sqrt{a^2 + b^2}$
دوران	$\theta = \tan^{-1}(-\frac{b}{a})$
جابجایی در راستای x	$x_0 = c$
جابجایی در راستای y	$y_0 = d$

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- انتقال (مدل افاین یا affine):
- تغییر مقیاس در دو جهت یکسان نیست ولی نسبت آنها برای تمامی نقاط ثابت است.
- محورهای مختصات متعامد نیستند.
- خطوط موازی، موازی باقی می‌مانند.
- ۶ پارمتر مجهول دارد.



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\varepsilon \\ 0 & \cos\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- انتقال (مدل افاین یا affine):
- مشابه معادلات متشابه، معادلات افاین را هم می‌توان به فرم ریاضیاتی دیگری نوشت که به آن فرم پارامتریک می‌گویند.

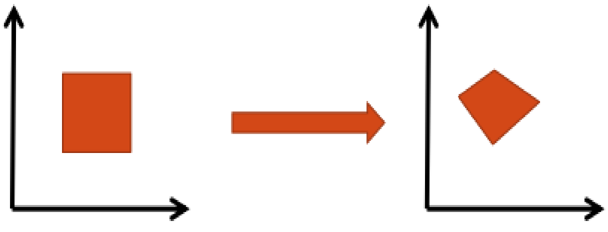
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\varepsilon \\ 0 & \cos\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

- و به طور خلاصه

$$x = a_1 x' + a_2 y' + a_3$$
$$y = b_1 x' + b_2 y' + b_3$$

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- انتقال (مدل پروژکتیو یا projective):
- تغییر مقیاس در دو جهت یکسان نیست. نسبت آنها نیز ثابت باقی نمی‌ماند.
- محورهای مختصات متعامد نیستند.
- خطوط موازی، موازی نخواهند بود.
- ۸ پارمتر مجهول دارد.



$$x = \frac{a_1 x' + a_2 y' + a_3}{c_1 x' + c_2 y' + 1}$$

$$y = \frac{b_1 x' + b_2 y' + b_3}{c_1 x' + c_2 y' + 1}$$

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- تبدیلات چند جمله ای:
- علاوه بر تبدیلات ارائه شده در اسلایدهای قبل، یکسری تبدیلات چندجمله ای وجود دارد که پیچیدگی‌های بیشتری را مد نظر قرار می‌دهند.

$$x = a_0 + a_1 x' + a_2 y' + a_3 x'^2 + a_4 y'^2 + a_5 x' y' + \ldots$$
$$y = b_0 + b_1 x' + b_2 y' + b_3 x'^2 + b_4 y'^2 + b_5 x' y' + \ldots$$

- مهمترین ضعف این روش یافتن پارامترهای بهینه است.

تبدیلات دو بعدی به دو بعدی

- مراحل محاسبه پارامترهای تبدیل:

1. ابتدا بایستی مدل ریاضیاتی (متشابه، افاین و...) تعیین شود.
2. اندازه‌گیری تعدادی نقطه متناظر در دو سیستم مختصات
3. تشکیل دستگاه معادلات
4. حل دستگاه معادلات به روش کمترین مربعات
5. ارزیابی دقت

دستگاه معادلات

- معادلات متشابه:
- در صورتی که پارامترهای متشابه مجهول و نقاط متناظر اندازه‌گیری شده باشند.
- در این دستگاه معادلات فرض شده n نقطه متناظر وجود دارد.

$$x = ax' + by' + c$$

$$y = -bx' + ay' + d$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix}}_{L} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1' & y_1' & 1 & 0 \\ y_1' & -x_1' & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n' & y_n' & 1 & 0 \\ y_n' & -x_n' & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}}_{X}$$

$$L = AX$$

- برای حل این دستگاه حداقل ۴ معادله (دو نقطه متناظر) نیاز است.

دستگاه معادلات

- معادلات افاین:

$$x = a_1 x' + a_2 y' + a_3$$
$$y = b_1 x' + b_2 y' + b_3$$

- در صورتی که پارامترهای افاین مجهول و نقاط متناظر اندازه‌گیری شده باشند.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix}}_{L} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^{'} & y_1^{'} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1^{'} & y_1^{'} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^{'} & y_n^{'} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_n^{'} & y_n^{'} & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{X}$$

$$L = AX$$

- در این دستگاه معادلات فرض شده n نقطه متناظر وجود دارد.
- برای حل این دستگاه حداقل ۶ معادله (سه نقطه متناظر) نیاز است.

دستگاه معادلات

- معادلات پروژکتیو:
- در صورتی که پارامترهای پروژکتیو مجهول و نقاط متناظر اندازه‌گیری شده باشند.

$$x = \frac{a_1 x' + a_2 y' + a_3}{c_1 x' + c_2 y' + 1}$$
$$y = \frac{b_1 x' + b_2 y' + b_3}{c_1 x' + c_2 y' + 1} \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= a_1 x' + a_2 y' + a_3 - c_1 x' x - c_2 y' x \\ y &= b_1 x' + b_2 y' + b_3 - c_1 x' y - c_2 y' y \end{aligned}$$

- در این دستگاه معادلات فرض شده n نقطه متناظر وجود دارد.
- برای حل این دستگاه حداقل ۸ معادله (چهار نقطه) نیاز است.

دستگاه معادلات

- معادلات پروژکتیو:
-

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix}}_{L} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1' & y_1' & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1'x_1 & -y_1'x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1' & y_1' & 1 & -x_1'y_1 & -y_1'y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n' & y_n' & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_n'x_n & -y_n'x_n \\ 0 & 0 & 0 & x_n' & y_n' & 1 & -x_n'y_n & -y_n'y_n \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{X}$$

$$L = AX$$

حل دستگاه معادلات

- برای حل دستگاه معادلات از روشی استفاده می‌شود که به آن روش کمترین مربعات گفته می‌شود.
- در این روش مجهولات (یا همان پارامترهای مدل ریاضیاتی) از رابطه زیر برآورد می‌شوند.

$$X = \left(A^T A\right)^{-1} A^T L$$

- باقیمانده از رابطه زیر برآورد می‌شوند.

$$V = AX - L$$

حل دستگاه معادلات

- برای توضیح روش کمترین مربعات به مثال زیر توجه کنید.
- مثال: اگر فاصله بین نقاط A و B سه بار اندازه گیری شده باشد، و اندازه ها در دفعه اول تا سوم به ترتیب ۱۰.۰۲، ۱۰.۰۴ و ۱۰.۰۳ متر قرائت شده باشند. آنگاه براساس روش کمترین مربعات مقدار طول ۱۰.۰۳ خواهد بود.

$$\underbrace{\begin{bmatrix}10.02\\10.04\\10.03\end{bmatrix}}_{L}=\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{[l]}_{X}\Rightarrow X=\underbrace{\left(\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)^{-1}}_{\frac{1}{3}}\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10.02\\10.04\\10.03\end{bmatrix}}_{10.04+10.02+10.03}\Rightarrow X=\frac{10.04+10.02+10.03}{3}=10.03$$

حل دستگاه معادلات

- همانطور که در اسلاید قبلی مشاهده شد، روش کمترین مربعات میانگین فواصل اندازه گیری را به عنوان جواب نهایی می‌دهد.
- به مشابه همین مثال، وقتی از این روش برای برآورد ضرایب پارامترهای مدل ریاضی استفاده می‌شود، عادلانه‌ترین مقادیر برآورد می‌شوند.

ارزیابی دقت

- در عمل از بین نقاط متناظر تعدادی را به عنوان نقاط کنترل و تعدادی را به عنوان نقاط چک در نظر می‌گیرند.
- از نقاط کنترل برای تشکیل دستگاه معادلات و برآورد پارامترها استفاده می‌شود.
- اما از نقاط چک برای ارزیابی پارامترهای برآورد شده استفاده می‌شود.
- نقاط چک در دستگاه معادلات وارد نمی‌شوند.

مثال

- مثال ۲: چنانچه مختصات فیدوشل مارکها در سیستم مختصات دستگاهی و سیستم مختصات کالیبره به صورت زیر باشند، پارامترهای مدل متشابه را بدست آورید.

شماره فیدوشل مارک	مختصات کالیبره x (mm)	مختصات کالیبره y (mm)
1	113.016	0.002
2	-112.977	-0.002
3	0.013	112.99
4	0.008	-113.008
5	113.008	112.995
6	-112.989	-113.006
7	-112.986	112.988
8	113.011	-113.004

شماره فیدوشل مارک	مختصات دستگاهی x (mm)	مختصات دستگاهی y (mm)
1	243.031	130.007
2	17.028	130.009
3	130.017	243.003
4	130.019	16.999
5	243.016	243.001
6	17.017	16.998
7	17.027	242.995
8	243.025	16.999

netı

مثال

• مثال ۲: چنانچه نقاط ۱ تا ۴ نقاط کنترل و نقاط ۵ تا ۸ نقاط چک باشند، دستگاه معادلات به شرح زیر است.

113.016	0.002	1	0
0.002	-113.016	0	1
-112.977	-0.002	1	0
-0.002	112.977	0	1
0.013	112.99	1	0
112.99	-0.013	0	1
0.008	-113.008	1	0
-113.008	-0.008	0	1

A

243.031
130.007
17.028
130.009
130.017
243.003
130.019
16.999

L

مثال

- مثال ۲: چنانچه نقاط ۱ تا ۴ نقاط کنترل و نقاط ۵ تا ۸ نقاط چک باشند، پارامترهای مدل متشابه و مقادیر باقیمانده به شرح زیر اند.

$$a = 1.0 \qquad b = -0.0000022 \qquad c = 130.0087 \qquad d = 130.009$$

شماره فیدوشل مارک	باقیمانده نقاط کنترل	
	x (mm)	y (mm)
1	-0.00225	0.00425
2	-0.00025	-0.00225
3	0.0045	-1.86E-07
4	-0.002	-0.002

شماره فیدوشل مارک	باقیمانده نقاط چک	
	x (mm)	y (mm)
5	0.0045	0.00725
6	-0.001	0.00075
7	-0.0085	0.00575
8	-0.001	0.00225

تمرین شماره ۳

- با توجه به مثال اسلایدهای قبل چنانچه از مدل افاین و پروژکتیو استفاده کنیم، مقادیر باقیمانده روی نقاط چک و کنترل را بیابید. همچنین برنامه های نوشته شده برای برآورد پارامترهای مدل افاین و پروژکتیو را به همراه نتایج ارائه دهید.
- نتایج را تا ۲۶ اسفند به آدرس noorollah.tatar@gmail.com با موضوع "تمرین شماره ۳ درس مبانی فتوگرامتری" ایمیل کنید.

سوال؟