Теория множеств
Тема 5 Упорядоченные множества. Кортеж. Декартово произведение множеств

Упорядоченные множества. Кортеж

Если специально не оговаривается, то для множества неважен порядок следования элементов.

Пусть имеется множество {1, 2, 3}. Из элементов этого множества можно составить набор чисел:

11 12 13
21 22 23
31 32 33

Запись каждого числа состоит из двух цифр, причем существенен порядок их следования. Например, из цифр 1 и 2 образованы числа 12 и 21.

В том случае, когда важен порядок следования элементов множества, в математике говорят об упорядоченных наборах элементов. В приведенном примере – упорядоченные пары (a; b), образованные из элементов a, b и c. Это (1; 2), (1; 3), (2; 1) и т.д.

Обобщением понятия упорядоченной пары является понятие *кортежа (вектора)* – упорядоченного набора произвольных, не обязательно различных n объектов.

Кортеж, состоящий из элементов x_1, x_2, …, x_n, обозначается $(x_1,\ x_2, \ldots, x_n)$ или $<x_1,\ x_2, \ldots, x_n>$.

Элементы x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ называются координатами или компонентами кортежа. Число координат называется длиной кортежа (размерностью вектора).

Определение: Упорядоченной парой называется множество $(a;\ b)=\{\{a\};\{a,\ b\}\}$. при этом **a** называется первым элементом упорядоченной пары, **b** — вторым.

Кортежи длины 2 называют также упорядоченными парами, кортежи длины 3 – упорядоченными тройками и т.д., кортежи длины n – упорядоченными n-ми («энками»).

Пример 1: Пусть имеется кортеж длины 3: T = (a, {a}, <a>). Его 1-ая компонента - это некоторый элемент a, 2-ая компонента – одноэлементное множество {a}, 3-ья компонента – кортеж <a> длины 1. Все три компоненты являются разными объектами.

Пример 2. Пусть A={1, 2, 3}, B={4, 5}. Образуем всевозможные пары (a; b) так, что $a \in A$, $b \in B$. Получим некоторое новое множество {(1; 5), (1; 4), (2; 4), (2; 5), (3; 4), (3; 5)}, элементами которого являются упорядоченные пары чисел.

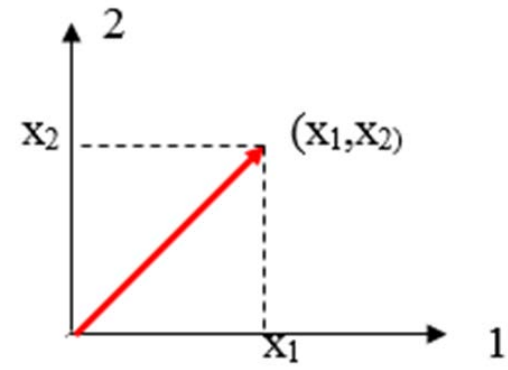
Отличие кортежа и обыкновенного множества: в кортеже могут быть одинаковые элементы. Например, в прямоугольной системе координат координаты точек являются кортежами.

Кортеж из нулей и единиц можно рассматривать как двоичное представление натурального числа.

Кортеж, состоящий из единиц и нулей, описывает состояние памяти вычислительных машин, причём память может содержать числа, тексты, команды и т.д.

Упорядоченные множества, элементами которых являются вещественные числа, будем называть векторами или точками пространства.

Так, кортеж $<x1, x2>$ может рассматриваться как точка на плоскости или 2-х мерный вектор, проведенный из начала координат в заданную точку. Тогда компоненты x1, x2 — проекции вектора на оси 1 и 2.



Пр1 $<x1, x2> = x1$

Пр2 $<x1, x2> = x2$

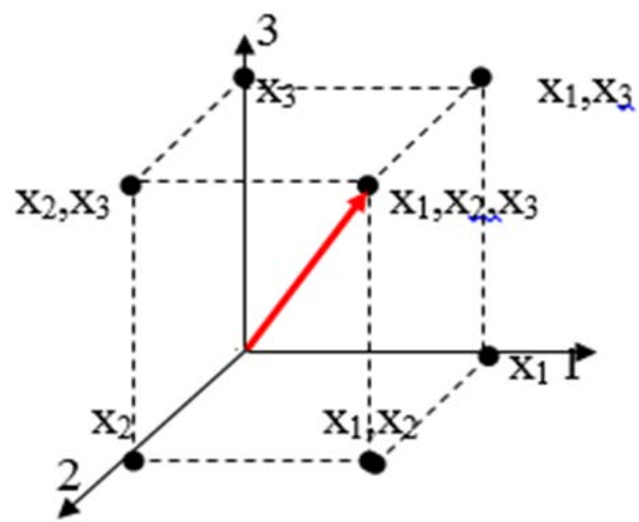
Кортеж $<x1, x2, x3>$ рассматривается как точка в трехмерном пространстве, или как 3-х мерный вектор:

Прi $<x1, x2, x3>= xi$, i=1,2,3.

$Пр_{12}<x_1,x_2,x_3>=x_1,x_2$;

$Пр_{23}<x_1,x_2,x_3>=x_2,x_3$;

$Пр_{13}<x_1,x_2,x_3>=x_1,x_3$.



Проекция кортежа на пустое множество осей — пустой кортеж.

Обобщая эти понятия, будем рассматривать упорядоченное n-элементное множество вещественных чисел (x_1, ..., x_n) как точку в воображаемом n–мерном пространстве (иногда называемом гиперпространством), или как n-мерный вектор. При этом компоненты n-элементного кортежа x_i будем рассматривать как проекции этого кортежа на соответствующие оси.

Соединение кортежей

Операция, с помощью которой из двух кортежей длиной k и m можно составить новый кортеж длиной $k + m$, в котором сначала идут подряд элементы первого кортежа, а затем – элементы второго кортежа, называется **соединением кортежей**.

Определение. Два кортежа (x_1, x_2, …, x_n) и (y_1, y_2, …, y_m) называются равными, если:

1) $n = m$ (кортежи имеют равную длину);
2) $x_i = y_i$ (i = 1, 2, …, n) (компоненты с одинаковыми номерами попарно равны).

Тогда можно записать: (x_1, x_2, …, x_n) = (y_1, y_2, …, y_m).

Декартово произведение множеств

Декартовым произведением множеств A и B называется множество пар, первая компонента которых принадлежит множеству A, вторая множеству B. Обозначают AxB. Таким образом, $A x B = \{(a; b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Точно так же определяется декартово произведение множеств B×A:

$B \times A = \{(b, a) / b \in B \wedge a \in A\}$.

Как правило: $A \times B \neq B \times A$ (некоммутативность).

Операцию нахождения декартового произведения множеств A и B называют декартовым умножением этих множеств.

В случае A×A результирующее множество обозначают через A^2 и называют квадратом (декартовым квадратом) множества A.

Понятие декартово произведение может быть обобщено на любое конечное число *n* множеств, $n \geq 2$, следующим образом:

$A_1 x A_2 x \ldots x A_{n+1} = (A_1 x A_2 x \ldots x A_n) x A_{n+1}$.

Можно убедиться по индукции, что

$A_1 x A_2 x \ldots x A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1$ и ... и $a_n \in A_n\}$.

Употребляется также обозначение A^n для множества

$$\underbrace{A \times \ldots \times A}_{n \text{ раз}},$$

для $n \geq 1$. При этом считается, что $A^1 = A$.

<u>Пример 1:</u>

Пусть даны множества $A_1 = \{2, 3\}$; $A_2 = \{3, 4, 5\}$; $A_3 = \{7, 8\}$. Декартово произведение $A_1 x A_2 x A_3 = \{(2, 3, 7), (2, 3, 8), (2, 4, 7), (2, 4, 8), (2, 5, 7), (2, 5, 8), (3, 3, 7), (3, 3, 8), (3, 4, 7), (3, 4, 8), (3, 5, 7), (3, 5, 8)\}$.

Теорема. Мощность декартового произведения $A_1 x A_2 x \ldots x A_n$ равна произведению мощностей множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$|A_1 x A_2 x \ldots x A_n| = |A_1| x |A_2| x \ldots x |A_n|.$$

Следствие: $|A^n| = |A|^n$, или мощность степени *n* декартового произведения равно мощности множества в степени *n.*

Пример 2. Пусть A={a,b,c,d,e,f,g,h}, B={1,2,3,4,5,6,7,8}. Образуем всевозможные пары (a; b) так, что a∈A, b∈B. Получим некоторое новое множество {(a;1), (a;2), …, (b;1), (b;2), …, (h;1), (h;2)}, элементами которого являются упорядоченные пары чисел.

Пример 3. Элементы множества A^n называют кортежами длины n.

Пусть, например, A = {a, b, c}, тогда

A^1 = {(a), (b), (c)};

A^2 = {(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)};

A^3 = {(a, a, a), (a, a, b), (a, a, c), (a, b, a), …, (c, c, c)};

A^4 = {(a, a, a, a), (a, a, a, b), (a, a, a, c),…, (c, c, c, c)}

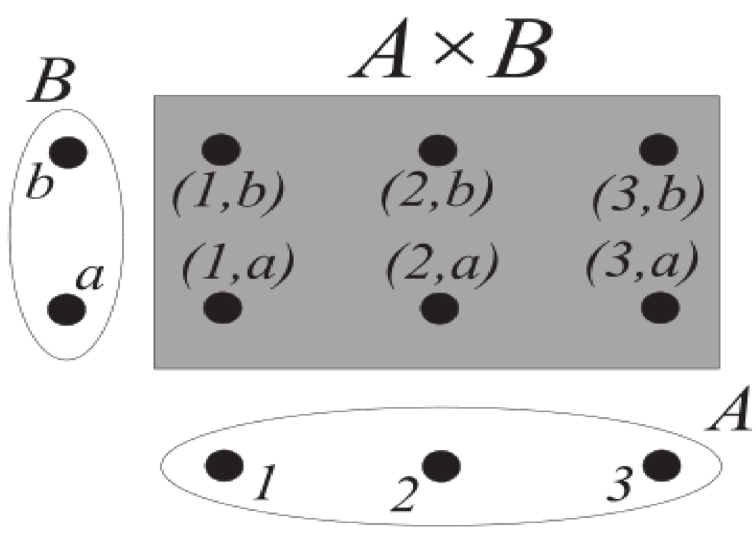
и т. д.

Пример 4: $A = \{0,1\}$

$$A^2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

Пример умножения множеств

8	a8	b8	c8	d8	e8	f8	g8	h8
7	a7	b7	c7	d7	e7	f7	g7	h7
6	a6	b6	c6	d6	e6	f6	g6	h6
5	a5	b5	c5	d5	e5	f5	g5	h5
4	a4	b4	c4	d4	e4	f4	g4	h4
3	a3	b3	c3	d3	e3	f3	g3	h3
2	a2	b2	c2	d2	e2	f2	g2	h2
1	a1	b1	c1	d1	e1	f1	g1	h1
	a	b	c	d	e	f	g	h



Примеры:

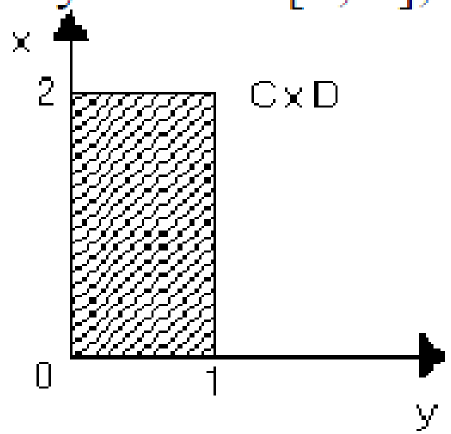
1) Пусть A = {2, 3}, B = {4, 6} – дискретные множества.

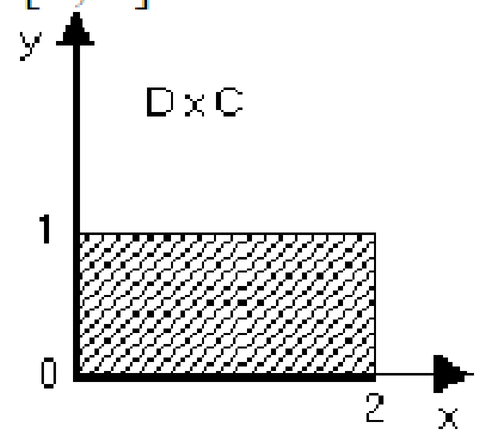
$A\times B = \{<2, 4>, <2, 6>, <3, 4>, <3, 6>\}$

$B\times A = \{<4, 2>, <4, 3>, <6, 2>, <6, 3>\}$

$\rho=\{<a, b>, a\in A, b\in B \mid b=2a\}=\{<2, 4>, <3, 6>\}\subset A\times B.$

2) Пусть C = [0, 1], D = [0, 2] – бесконечные множества.





Упражнение:

1. Составить кортежи из множеств:

a) {a}, {b};

b) {a}, {b, c};

c) {a, b}, {c, d};

d) {a1, a2, …, an}, {b1,b2, …, bn};

Свойства операций декартова произведения

Операция декартова произведения множеств ассоциативна:

$$(A\times B)\times C = A\times(B\times C) = A\times B\times C,$$

благодаря чему при записи декартова произведения нескольких множеств скобки можно не использовать.

Для декартова произведения множеств справедливы следующие законы дистрибутивности:

$$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C);$$

$$A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C);$$

$$A\times(B\setminus C) = (A\times B)\setminus(A\times C),$$

что позволяет раскрывать скобки в выражениях, содержащих операцию декартова произведения и операции объединения либо разности множеств.

Теорема 2. Пусть A, B и C — произвольные множества, тогда выполняются следующие свойства дистрибутивности:

1. $(A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$,

1'. $(A\cap B)\times C= (A\times C)\cap(B\times C)$.

1". $(A\setminus B)\times C= (A\times C)\setminus(B\times C)$.

Доказательство. Обозначим через X и Y левую и правую части равенства 1: $X = (A\cup B)\times C$ и $Y= (A\times C)\cup(B\times C)$.

А: Докажем, что $X\subseteq Y$. Если $x \in X \Rightarrow x = (d, c)$, где $d \in A\cup B$, $c\in C$. Если $d \in A\cup B$, то $d \in A$ или $d \in B$.

а) Если $d \in A \Rightarrow x \in A\times C$.

б) Если $d \in B \Rightarrow x \in B\times C$. Следовательно, $x \in Y \Rightarrow X\subseteq Y$.

Б: Докажем, что $Y\subseteq X$. Если $y\in Y$, $y\in(A xC)\cup(BxC) \Rightarrow y = (d, c)$, тогда $(d,c) \in (AxC)$ или $(d,c) \in (BxC)$.

а) Если $(d,c) \in AxC \Rightarrow d \in A$, $c \in C$.

б) Если $(d,c) \in (BxC) \Rightarrow d \in B$, $c \in C$.

Тогда, в любом случае, $d \in A$ или $d \in B$, $c\in C \Rightarrow d\in(A\cup B)$, $c\in C$ => $(d, c) \in (A\cup B)xC \Rightarrow y \in(A\cup B)xC \Rightarrow y \in X\Rightarrow Y\subseteq X$

Согласно теоремы 1 множества X и Y совпадают.

Свойство 1' и 1"доказывается аналогично. (Самостоятельно)