Теория множеств

Тема 3: Множества и операции над множествами

1. Понятие множества

Основоположником **теории множеств** считается немецкий математик Георг Кантор. В своих трудах, опубликованных в 1874—1884 годах он изложил основные положения и определения теории множеств.

Кантор ввел понятие “**множество**” как “*объединение в одно целое хорошо различаемых объектов нашей интуиции или мысли*”.

Понятие множества оказалось настолько общим и в то же время полезным, что многие сложные конструкции алгебры, геометрии и математического анализа получили ясное теоретико-множественное описание.

Смысл множества интуитивно ясен — множество объединяет некоторые, вполне определенные, элементы в одно целое. Трудно найти объекты, которые не являются множествами.

В теории множеств понятие «множества» является **единственным неопределяемым понятием**.

Неопределяемое понятие — начальное, базовое понятие, *определение которого не даётся*.

Во многих математических теориях существуют первоначальные, или неопределяемые, понятия. Причина, по которой невозможно определить абсолютно все понятия, которые используются, состоит в следующем. Определяя некоторое понятие через другие, необходимо следить за тем, чтобы это понятие не было определено само через себя. Иначе может возникнуть определение, которое в математике называется "порочным кругом" и считается недопустимым.

Основные неопределяемые понятия:

- геометрия: **точка, прямая, плоскость, объем, пространство**.
- физика — **время**.

В математике помимо «**множества**» основным неопределяемым понятием считается **число**.

Понятие множества как и любое другое исходное понятие не имеет строгого математически точного описания.

Используются различные определения, в частности:

«Множество - совокупность предметов (объектов), объединенных в одно целое по некоторому признаку».

«*Множество - это совокупность определенных различаемых объектов, причем таких, что для каждого можно установить, принадлежит этот объект данному множеству или нет*».

Предметы (объекты), составляющие множество, называют его элементами. Множества обозначают заглавными латинскими буквами: A, B, C, X, … их элементы — прописными буквами: a, b, c, x, … или буквами с индексами a_1, a_2, ..., b_1, b_2, …, c_1, c_2, ….

2. <u>Обозначения и определения:</u>

1) Если a является элементом множества A, то это записывается: $a \in A$ (читается: a принадлежит множеству A).

Запись $a \notin A$ означает, что a не является элементом множества A .

2) Множество полностью определяется своими элементами. Это означает, что множества совпадают в том и только в том случае, когда они состоят из одних и тех же элементов.

Символьная запись определения равенства двух множеств такова: $A = B$ (для любого $a \in A \Rightarrow a \in B$ и для любого $b \in B \Rightarrow b \in A$).

Между двумя конечными множествами можно установить взаимно однозначное соответствие тогда и только тогда, когда **оба множества состоят из одного и того же числа элементов.**

3) **Счётное множество** – множество, элементы которого можно пронумеровать. Например, множества натуральных, чётных, нечётных чисел. Счётное множество может быть конечным (множество людей на земле) или бесконечным (множество целых чисел).

4) **Несчётное множество** – множество, элементы которого невозможно пронумеровать. Например, множество действительных чисел, звезд во вселенной. Несчётное множество может быть только бесконечным.

5) Множество не содержащее ни одного элемента называется **пустым** (обозначается: **Ø**). Пустое множество **Ø** является подмножеством всех множеств.

6) Множество, которое содержит все рассматриваемые множества данного типа, называется **универсальным** для этого типа множеством (обозначается: **U**).

7) Способы задания множеств

Существует два основных способа задания множеств.

Первый: Для конечных множеств, содержащих небольшое количество элементов, часто просто перечисляют все входящие в него элементы и заключают их в фигурных скобках. Так, например, A = {a, b, c} — это множество, элементами которого являются только a, b и c. Или A={Бермет, Мээрим, Санжар}.

Второй: С помощью характеристического предиката, который описывает свойство всех элементов, входящих в множество. Характеристический предикат записывается после двоеточия или символа « | », которые читаются как “такие, что” или «таких как».

ПРИМЕР 1:

$P(x) = x \in N \wedge x < 8$ - характеристический предикат.

$M = \{x: P(x)\}$ или $M = \{x: x \in N \wedge x < 8\}$.

Множество M можно задать и перечислением его элементов:

$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

ПРИМЕР 2:

$B = \{x \mid x$ - четное натуральное число$\}$;

или $B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$.

7) Мощностью (или кардинальным числом) конечного множества называется количество его элементов. Мощность множества A обозначается $m(A)$ или $|A|$.

Например: если $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, то мощность A равна $m(A) = |A| = 5$, если $B = \{2, 4, 6, 8\}$, то, мощность B равна $m(B)= |B| = 4$.

8) Между двумя конечными множествами можно установить взаимно однозначное соответствие тогда и только тогда, когда оба множества состоят из одного и того же числа элементов.

В теории множеств аналогичные утверждения используются даже когда множества содержат бесконечно много элементов.

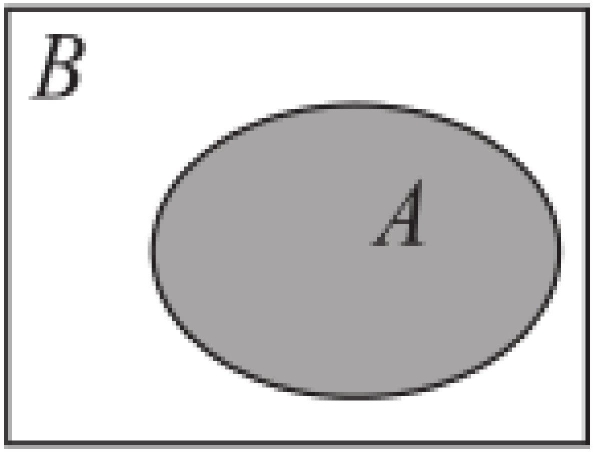
Если между двумя множествами можно установить взаимно однозначное соответствие, то говорят, что они имеют одинаковое количество элементов или равномощны.

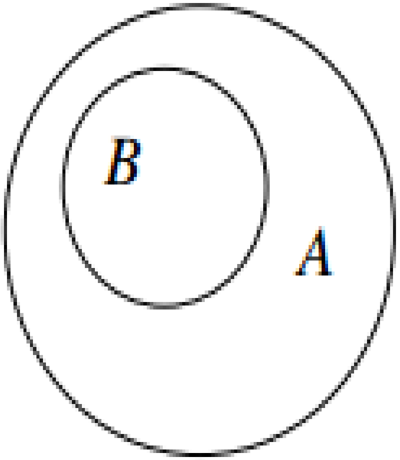
Если же при любом способе образования пар некоторые элементы из первого множества остаются без пары, то говорят, что первое множество содержит больше элементов, чем второе, или, что первое множество имеет большую мощность.

Определение. Множество A содержится во множестве B (обозначается $A \subseteq B$, читается: «A содержится в B»), если каждый элемент множества A является элементом множества B. (Используют также выражение: B надмножество A).

(Диаграммы Эйлера-Венна)

$A \subseteq B$



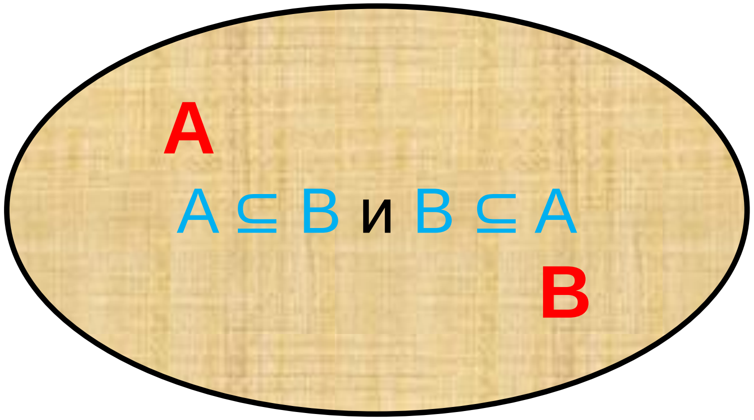


$B \subseteq A$

Теорема 1. $A=B$ тогда и только тогда, когда одновременно $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$ (т.е. $A = B \Longleftrightarrow A \subseteq B$ и $B \subseteq A$).

Доказательство: Каждый элемент из множества A является элементом множества B и каждый элемент из множества B является элементом множества A. Следовательно $A = B$.

Если $A \subseteq B$ и $a \in A$, то $a \in B$. Если $B \subseteq A$ и $b \in B$, то $b \in A$. Следовательно $A = B$.



Определение: Множество B строго включено в множество A (читается: A строго включает B), если $B \subseteq A$ и $B \neq A$. В этом случае пишут $B \subset A$. Символ $\subset$ называется знаком строгого включения.

Например:

N – множество натуральных чисел;

N_0 – множество неотрицательных целых чисел;

Z – множество целых чисел;

Q – множество рациональных чисел;

I – множество иррациональных чисел;

R – множество действительных чисел;

C – множество комплексных чисел.

Тогда имеет место следующие строгие включения числовых множеств: $N \subset N_0 \subset Z \subset Q \subset R \subset C$, $I \subset R \subset C$.

Упражнения:

1. Сколько элементов содержит множество людей, знающих определение множества?

2. Доказать, что $\emptyset$ содержится в любом множестве.

3. Доказать, что пустое множество единственно.

4. Принадлежит ли $\emptyset$ множествам $\{\emptyset,1\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$?

5. Равны ли между собой множества $\{\emptyset,1\}$ и $\{1\}$; $\{\emptyset\}$ и $\emptyset$?

6. Доказать, что $\{a, b\} = \{b, a\}$.

7. Доказать, что $\{a,b,c\} = \{a,a,b,b,c,c\}$.

8. Содержится ли множество простых чисел во множестве нечетных чисел?

9. Покажите, что различных бесконечных множеств бесконечно много.

10. Пусть A — множество простых чисел. Укажите номера верных записей:

1) $1 \in A$; 2) $2 \in A$; 3) $0 \in A$; 4) $19 \in A$; 5) $23 \in A$.

11. Сколько элементов в множествах:

а) $\{a, b, c, aa, bc\}$; г) $\{111, 22, 2, 33\}$;

б) $\{a, b, c, a, b, c\}$; д) $\{11, 22, 11, 12\}$;

в) $\{1, 2, 3, 123, 12\}$; е) $\{1, 11, 111, 1\}$?

12. Известно, что $a, b, c \in Q$. Кроме того, известно, что $1, 5, 7 \in Q$. Других элементов в множестве Q нет. Перечислите все элементы множества Q.

13. Укажите все элементы множества, составленного из букв слова ЭЛЕМЕНТ.

14. Укажите все элементы множества, составленного из всех цифр десятичного числа 1274327.

15. Элементами множества $S = \{P, Q, R\}$ являются:

$P = \{a, b, c\}$; $Q = \{1, 2, 3\}$; $R = \{11, 12, 13\}$.

Укажите верные записи:

а) $P \in S$;

б) $a \in S$;

в) $\{a, b, c\} \in \{P, Q, R\}$;

г) $11 \notin S$;

д) $\{1, 2, 3\} \in S$;

е) $\{P, Q\} \in S$.

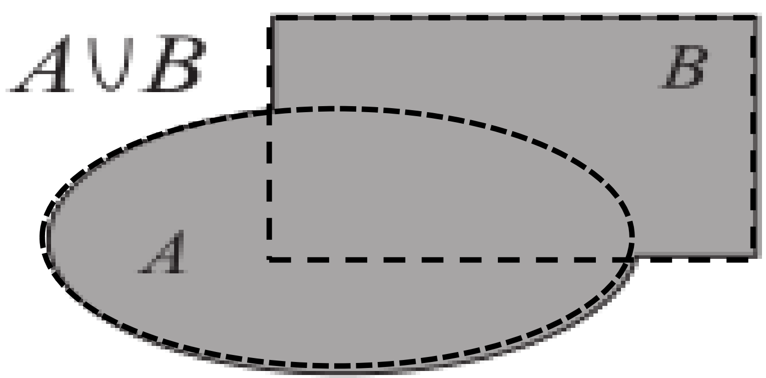
3. Операции над множествами

Определим операции над множествами, с помощью которых можно получать из любых имеющихся множеств новые множества.

<u>Определение:</u> Объединением (суммой) $A \cup B$ (или $A+B$) множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B.

Таким образом, по определению, $A \cup B = \{x{:}\ x \in A$ или $x \in B\}$.

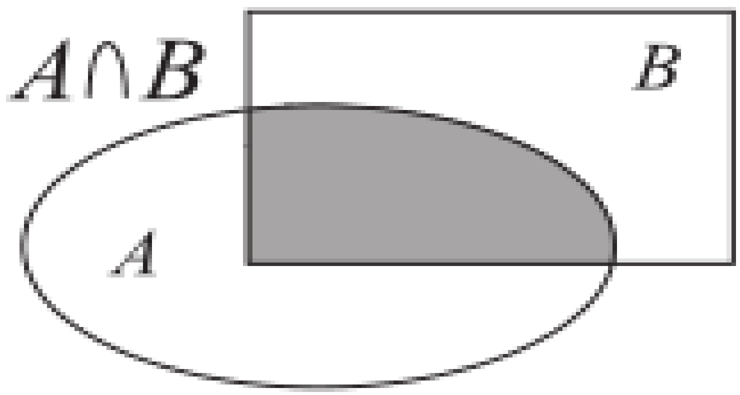
Следовательно, $(\forall\ A, B)\ A \subseteq A \cup B$ и $B \subseteq A \cup B$.



Определение: Пересечением (произведением) $A \cap B$ (или $A \cdot B$, или AB) множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат обоим множествам A и B одновременно. Таким образом, по определению, $A \cap B = \{x: x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Из определения пересечения следует, что

$$(\forall A, B)\ A \cap B \subseteq A \text{ и } A \cap B \subseteq B.$$



Замечание. Если $A \cap B \neq \emptyset$, то говорят, что множества A и B пересекаются. Если $A \cap B = \emptyset$, то в этом случае множества A и B называются непересекающимися.

Теорема 2: Пусть A, B и C — произвольные множества. Тогда справедливы следующие равенства:

1. Идемпотентность (свойство сохранения): для любого множества A верно равенства:
$A \cup A = A$.
$A \cap A = A$.
2. Коммутативность (свойство перестановки): для любых множеств A и B верны равенства:
$A \cup B = B \cup A$.
$A \cap B = B \cap A$.
3. Ассоциативность (свойство сочетательности): для любых множеств A, B, C верны равенства:
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
4. Дистрибутивность (свойство согласованности): для любых множеств A, B и C справедливы равенства:
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

А) Доказательство дистрибутивности: $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

Обозначим через X и Y левую и правую части в равенстве: $X = (A\cup B)\cap C$ и $Y = (A\cap C)\cup(B\cap C)$.

1. Докажем сначала, что $X\subseteq Y$. Для этого выберем произвольный элемент $x\in X$. Тогда x одновременно принадлежит $A\cup B$ и C. Из условия $x\in A\cup B$ следует, что $x\in A$ или $x\in B$.

Если $x\in A$, то $x\in A\cap C$. Если $x\in B$, то $x\in B\cap C$. Следовательно, в любом случае $x\in A\cap C$ или $x\in B\cap C$. Значит, $x\in Y$. Тогда $X\subseteq Y$.

2. Докажем, что выполняется и обратное включение ($Y\subseteq X$). Возьмем произвольный элемент $y\in Y$, тогда $y\in(A\cap C)\cup(B\cap C) \Rightarrow y\in A\cap C$ или $y\in B\cap C$. Если $y\in A\cap C \Rightarrow y\in A$ и $y\in C \Rightarrow y\in A\cup B$ и $y\in C \Rightarrow y\in(A\cup B)\cap C \Rightarrow Y\subseteq X$. Если $y\in B\cap C \Rightarrow y\in B$ и $y\in C \Rightarrow y\in A\cup B$ и $y\in C \Rightarrow y\in(A\cup B)\cap C \Rightarrow y\in X$. Итак, $y\in X$. Тогда $Y\subseteq X$.

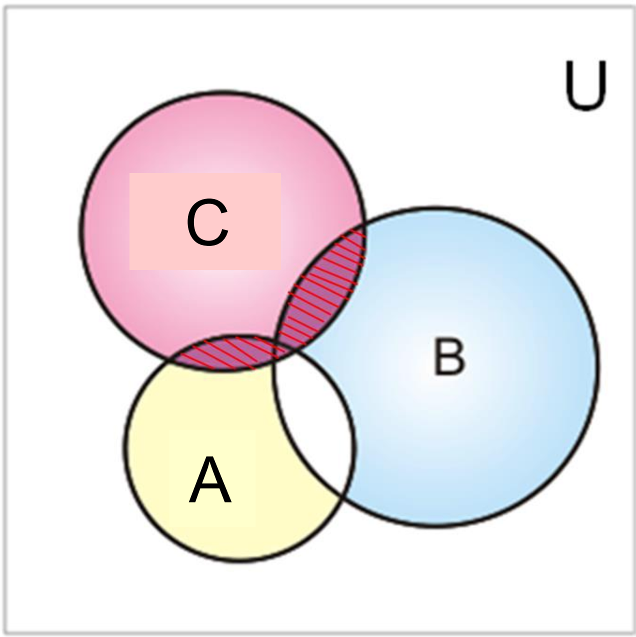
Поскольку из теоремы 1 следует, что $X=Y$ тогда и только тогда когда $X\subseteq Y$ и $X\subseteq Y$, то $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

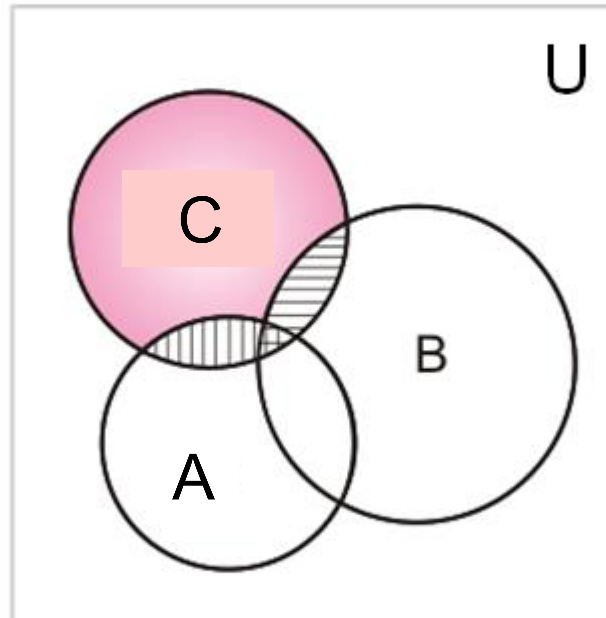
Доказательство дистрибутивности с помощью диаграмм Эйлера-Венна

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cup B) \cap C$

$(A \cap C) \cup (B \cap C)$





В) Доказательство дистрибутивности: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.