Лабораторная работа №2

Тема: Основы теории множеств. Операции над множествами

Цель работы: изучение базовых понятий теории множеств и операций над множествами.

1. Краткие теоретические положения

Определение. Множество – это собрание объектов любой природы.

Например, множество всех станций метро, множество всех букв алфавита, множество всех чисел, множество всех книг, которые когда-то были написаны и т.д.

Множества обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: A, B, F, и т.д. Множество может быть задано двумя способами: перечислением своих элементов и характерным свойством.

Пример 2.1. *Задание множеств***.** Определим следующие множества: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, B = {«Иван», «Андрей»}, $C = \{5, 10, 15\}$. Данные множества заданы перечислением своих элементов.

Про каждый объект x всегда можно сказать, принадлежит он данному множеству A или нет. В первом случае записывается $x \in A$ и читается как «x принадлежит A», то есть x является элементом множества A. Во втором случае используется запись $x \notin A$, которая, таким образом означает, что объект x не является элементом множества A.

Например, пусть $A = \{10, 15\}$ и $x = 10$. Тогда имеем $x \in A$. Если же $x = 12$, то выполняется соотношение $x \notin A$.

При выяснении вопроса принадлежит или нет данный объект некоторому множеству, может оказаться, что множество задано характерным свойством. Тогда нужно проверить, выполняется или нет свойство для данного объекта.

Пусть, например, $A = \{x$: x – четно и $1 < x < 12\}$, а $x = 17$. Тогда $x \notin A$, так как 17 – нечетно. Если x = 18, то также $x \notin A$, так как $x = 18 > 12$, хотя и x является четным числом. Наконец, при $x = 10$ будем иметь, что $x \in A$, так как все условия в данном случае выполняются.

Для удобства рассмотрений вводится одно специальное множество, называемое **пустым и обозначаемое символом** $\varnothing$. Оно не содержит ни одного элемента.

Между двумя множествами A и B может выполняться ***отношение включени****я* $\subseteq$:

$A \subseteq B$ тогда и только тогда, когда каждый элемент множества A является в то же время элементом множества В, то есть. является истинной следующая импликация: $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$, а множество A называется ***подмножеством множества*** B.

Множества считаются ***равными***, если они состоят из одних и тех же элементов, то есть одновременно $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. В этом случае является истинной следующая равносильность $(x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)$.

Наряду со знаком включения « $\subseteq$ » используется также знак « $\subset$ **»** ***строгого включения***, который означает «включено, но не совпадает». Если $A \subset B$, то множество A называется ***собственным подмножеством множества*** B.

Пусть, например, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{4, 5, 6\}$, $D = \{3, 2, 1\}$. Тогда $B \subseteq A$, причем, также и $B \subset A$. Утверждение, что $C \subseteq A$ является неверным. Выполняется отношение $D \subseteq A$, но отношение $D \subset A$ уже не выполняется.

Множество всех подмножеств множества X имеет специальное обозначение: $P(X)$ и называется ***Булеан*** (степень множества, показательное множество, экспонентой множества, множество частей) $\boldsymbol{X}$, в связи с чем используется также обозначение 2^X.

Например, если $X = \{1, 2 ,3\}$, то $P(X) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

Важнейшей характеристикой множества является его ***мощность***, то есть ***количество элементов*** в нем.

Мощность множества X обозначается одним из двух возможных способов: как $|X|$ или как $\mathrm{card}(X)$.

Например, для множества A из примера 1 имеем $|A| = 4$, что также можно записать в виде $\mathrm{card}(A) = 4$, для множества B имеем $|B| = 2$.

Интересным является тот факт, что для любого множества A выполняется равенство: $|P(A)| = 2^{|A|}$.

Например, для множества $A = \{1\ 2, 3\}$, для которого $|A| = 3$, множество $P(A)$ уже было выписано нами ранее и, легко видеть, что $|P(A)| = 8 = 2^3$.

Мощность пустого множества равна 0: $|\varnothing| = 0$.

Если $B \subseteq A$, то $|B| \le |A|$, если же включение строгое: $B \subset A$, то и неравенство строгое $|B| < |A|$.

Над множествами можно выполнять различные операции. К важнейшим из их относятся объединение, пересечение, дополнение, разность и симметрическая разность.

Определение. Пусть даны два множества *A* и *B*.

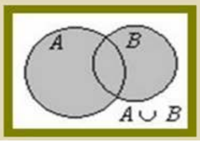
Их ***объединение A∪B*** определяется согласно правилу A∪B **=** {*x*: *x*∈*A* или *x*∈*B*};

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

ПРИМЕР

A={К, А, Т, Я}, B={К, О, С, Т, Я},

A∪B={К,А,Т,Я,О,С}

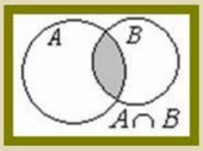


Пересечение A∩B – по правилу A∩B **=** {*x*: *x*∈*A* и *x*∈*B*};

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

ПРИМЕР

A={К, А, Т, Я}, B={К, О, С, Т, Я}, ***A∩B***={К, Т, Я}.

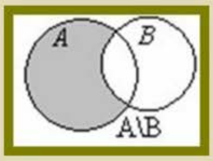


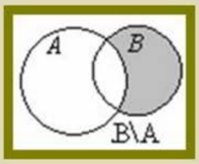
Разность A\B по правилу – *A**B* = {*x*: *x*∈A и *x*∉*B*};

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

ПРИМЕР

A={К, А, Т, Я}, B={К, О, С, Т, Я}, A \ B={А}, B \ A ={О, С}.



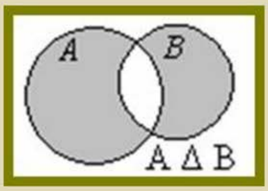


Симметрическая разность A⊕B = {*x*: ((*x*∈*A*) и (*x*∉*B*)) или: ((*x*∉*A*) и (*x*∈*B*))}.

$$A \Delta B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$$

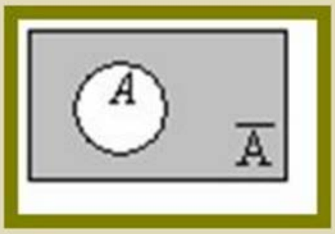
ПРИМЕР

A={К, А, Т, Я}, B={К, О, С, Т, Я}, A Δ B={А,О,С}.



Дополнением (дополнением до универсального множества) множества А называется множество, состоящее из всех элементов универсального множества не содержащихся в А.

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$



Прямым или декартовым произведением множеств А и В, называется множество всех упорядоченных пар (a, b), где первый элемент a из множества А, а второй элемент b из множества В.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

ПРИМЕР

$A = \{4,5,3\}$, $B = \{8,15,1,7\}$

$$A \times B = \{(4,8), (4,15), (4,1), (4,7), (5,8), (5,15), (5,1), (5,7), (3,8), (3,15), (3,1), (3,7)\}$$

Степенью множества называется декартовое произведение множества А само на себя n раз.

$$A^n = \underbrace{A \times A \times A \times \ldots \times A}_{n}$$

ПРИМЕР

$A = \{3,1\}$, $A^2 = \{(3,3), (3,1), (1,3), (1,1)\}$.

Таким образом, объединение включает все элементы обоих множеств, пересечение – элементы, которые входят в оба множества одновременно, разность – элементы, входящие в первое множество и не входящие во второе, симметрическая разность – элементы, которые не входят одновременно в оба множества.

Свойства операций над множествами

1) Коммутативность.

$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup B = B \cup A$$

2) Ассоциативность.

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

3) Дистрибутивность.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4) Закон поглощения.

$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$

5) Идемпотентность.

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

6) Инволютивность.

$$\overline{\overline{A}} = A$$

7) Свойство нуля.

$$A \cup \varnothing = A$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

8) Свойство единицы.

$$A \cup U = U$$
$$A \cap U = A$$

9) Закон де Моргана

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

2. Задание на лабораторную работу №2 *(номер варианта это номер студента в журнале)*

Во всех последующих задачах универсум имеет состав:

U = {1, 2, 3, 4, *a*, *b*, *c*, *d*, *ee*, *tt*, *ww*}.

Опираясь на определение базовых операций на множествах найти:

а) – объединение двух множеств;	$C = A \cup B$
б) – пересечение двух множеств;	$C = A \cap B$
в) – разность первого и второго множества;	$C = A \setminus B$
г) – разность второго и первого множества;	$C = B \setminus A$
д) – симметрическая разность двух множеств;	$C = A \oplus B$
е) – дополнение первого множества;	$C = \overline{A}$
ж) – дополнение второго множества;	$C = \overline{B}$
з) – декартово произведение первого множества на второе;	$C = A \times B$
е) – декартово произведение второго множества на первое;	$C = B \times A$
и) Множество C задано указанной формулой	$F(A, B)$

1. Список вариантов индивидуальных заданий

1	$A=\{1,a,d\},\ B=\{a,ee,4,d\},\ F=((A\oplus B)\cap(A\setminus B))$
2	$A=\{ee,a,d\},\ B=\{a,ee,4,2\},\ F=((A\cup B)\cap(A\setminus B))$
3	$A=\{1,2,ee,a,d\},\ B=\{a,ee,4,2\},\ F=((A\cap B)\cap(A\setminus B))$
4	$A=\{1,2,ee,a,d\},\ B=\{d,ee,4,3\},\ F=((A\oplus B)\cap(A\cup B))$
5	$A=\{1,2,ee,a,d\},\ B=\{1,d,ee,4,3\},\ F=((A\oplus B)\cap(A\cap B))$
6	$A=\{1,2,ee,ww,a,d\},\ B=\{1,d,tt,4,3\},\ F=((A\cup B)\setminus(A\setminus B))$
7	$A=\{1,2,ee,ww,a,d\},\ B=\{1,a,c,tt,4,3\},\ F=((A\setminus B)\cap(A\oplus B))$
8	$A=\{1,2,ee,a,d\},\ B=\{1,d,tt,4,3\},\ F=((A\cup B)\cap(A\setminus B))$
9	$A=\{1,2,ee,ww,a,d\},\ B=\{2,a,c,tt,4,3\},\ F=((A\cap B)\cup(A\setminus B))$
10	$A=\{1,2,ee,ww,a,d\},\ B=\{2,a,b,tt,4,3\},\ F=((A\cup B)\setminus(A\setminus B))$
11	$A=\{1,2,ee,ww,a,d\},\ B=\{2,a,b,tt,4,3\},\ F=((A\oplus B)\cup(A\setminus B))$
12	$A=\{1,2,ee,ww,a,d\},\ B=\{2,a,b,tt,1,3\},\ F=((A\oplus B)\cap(B\setminus A))$
13	$A=\{1,2,ee,ww,c,d\},\ B=\{2,a,b,tt,1,3\},\ F=((A\oplus B)\cap(A\setminus B))$
14	$A=\{1,2,ee,ww,c,d\},\ B=\{4,a,b,tt,1,3\},\ F=((A\oplus B)\cap(A\setminus B))$
15	$A=\{1,a,ee,ww,c,d\},\ B=\{4,a,b,tt,1,3\},\ F=((A\setminus B)\setminus(A\cap B))$
16	$A=\{1,a,ee,ww,c,d\},\ B=\{4,a,b,ee,1,3\},\ F=((A\oplus B)\cup(A\setminus B))$
17	$A=\{1,a,ee,ww,c,d\},\ B=\{c,a,b,ee,1,3\},\ F=((A\cup B)\cap(A\setminus B))$
18	$A=\{1,a,b,ww,c,d\},\ B=\{c,a,b,ee,1,3\},\ F=((A\oplus B)\cap(\neg B))$
19	$A=\{1,a,b,ww,2,d\},\ B=\{tt,a,b,ee,1,3\},\ F=((\neg B)\cap(A\setminus B))$
20	$A=\{1,a,b,ww,2,d\},\ B=\{c,a,b,ee,1,3\},\ F=((A\oplus B)\cap(\neg B))$
21	$A=\{1,a,b,ww,2,d\},\ B=\{2,a,b,ee,1,3\},\ F=((A\cup B)\cap(\neg A))$
22	$A=\{1,a,b,ww,tt,d\},\ B=\{2,a,b,ee,1,3\},\ F=((A\oplus B)\cap(A\cup B))$
23	$A=\{1,a,b,ww,d\},\ B=\{2,a,b,ee,1,3\},\ F=((A\oplus B)\cap(A\cap B))$
24	$A=\{1,a,b,ww,d\},\ B=\{2,a,c,ee,1,3\},\ F=((A\setminus B)\cup(A\cap B))$
25	$A=\{1,a,b,ww,d\},\ B=\{1,a,c,ee,4,3\},\ F=((A\oplus B)\cap(A\setminus B))$

3. Контрольные вопросы

1. Дать определение объединения двух множеств.
2. Дать определение пересечения двух множеств.
3. Привести определение разности двух множеств.
4. Привести определение симметрической разности двух множеств.
5. Привести определение дополнения множества.

6. Дать определение декартового произведения двух множеств.

4. Литература

4.1. Маслов А.В. Дискретная математика: учебное пособие / А.В. Маслов – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2008. – 148 с.

4.2. Хаггард Г. Дискретная математика для программистов : учебное пособие / Г. Хаггард, Дж. Шлипф, С. Уайтсайдс ; пер. с англ. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. — 627 с. : ил.

4.3. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов: Учебник для вузов. 3-е изд. — СПб.: Питер, 2009. — 384 с.: ил.