Теория множеств

Тема 4: Алгебра множеств. Тождества. Мощность множества

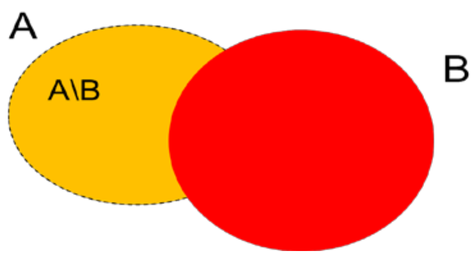
3. Операции над множествами

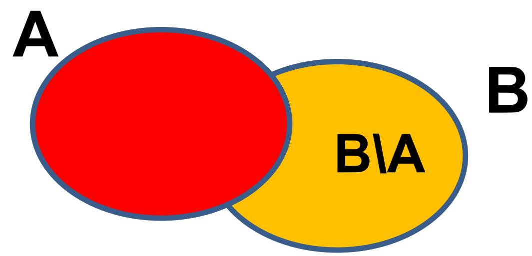
Разностъ множеств

Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов множества A, не принадлежащих множеству B.

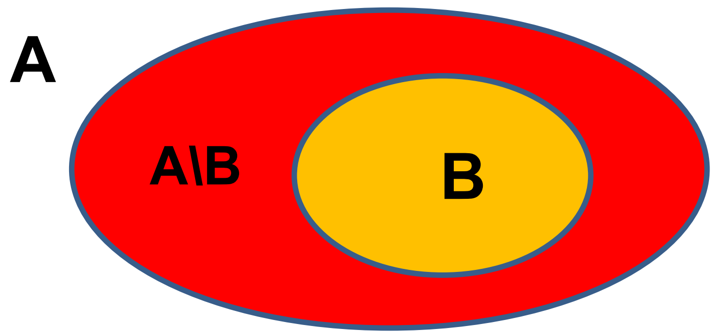
Обозначают разность множеств: $A \setminus B$.

Формальная запись: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

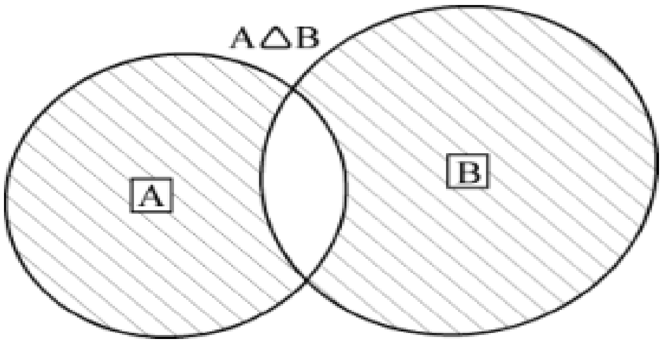




<u>Замечание</u>. Если $B \subseteq A$, то в этом случае разность $A \setminus B$ называют дополнением B до A.

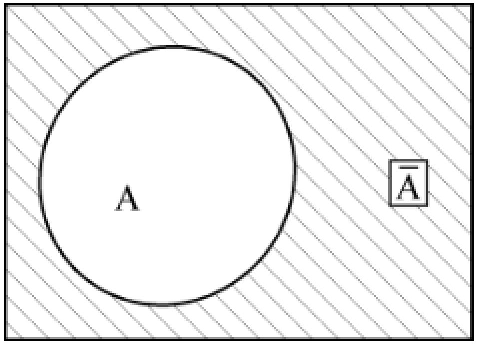


Определение: Симметрической разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих только одному множеству A или B, обозначают $A \Delta B$ (или $A \oplus B$).



Определение. Дополнением $\bar{A}$ (или A′) множества A (до универсума U) называется множество U \ A.

Формальная запись: $\bar{A} = U \setminus A = \{x \mid x \in U \text{ и } x \notin A\}$.



Примеры

1. $A = [-2; 0)$, $B = [-1; 3)$. Тогда $A \setminus B = [-2; -1)$, а $B \setminus A = [0; 3)$.

2. $A = \{2m - 1 \mid m \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{4n + 1 \mid n \in \mathbf{Z}\}$.

$A = \{\ldots; -3; -1; 1; 3; \ldots\}$, $B = \{\ldots; -3; 1; 5; 9; \ldots\}$,

$A \setminus B = \{\ldots; -1; 3; 7; \ldots\}$,

$A \setminus B = \{4k - 1 \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

Упражнения

1. Найдите $A \setminus B$, $B \setminus A$, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$:

а) $A = [-11; 4]$, $B = (2; 8]$;

б) $A = [2; 7]$; $B = [8; 12]$;

в) $A = (-\infty; 5]$; $B = (1; +\infty)$.

2. Найдите $A \setminus B$:

а) $A = \{3k \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{6m \mid m \in \mathbf{Z}\}$;

б) $A = \{2k \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{4m + 2 \mid m \in \mathbf{Z}\}$.

Свойства операций над множествами

Пусть задан универсум U. Тогда ($\forall$ A, B, C) и $A,B,C \subseteq U$ выполняются следующие свойства:

поглощение: $(A \cap B) \cup A = A, \qquad (A \cup B) \cap A = A;$

свойства нуля: $A \cup \varnothing = A, \qquad A \cap \varnothing = \varnothing;$

свойства единицы: $A \cup U = U, \qquad A \cap U = A;$

инволютивность (свойство двойного дополнения): $\overline{\overline{A}} = A;$

законы де Моргана: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B};$

свойства дополнения: $A \cup \overline{A} = U, \qquad A \cap \overline{A} = \varnothing;$

выражение для разности: $A \setminus B = A \cap \overline{B}.$

Доказательство свойств операций над множествами.

Доказать свойств операций над множествами можно следующими способами:

1. Выполнив эквивалентные преобразования над правой и левой частями равенства для приведения их к одному виду;

2. С помощью диаграмм Эйлера- Венна;

3. Путём правильных логических рассуждений.

Доказательство второго равенства *Закона де Моргана* способом эквивалентного преобразования

Второе равенство *Закона де Моргана*: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$

Обозначим через X и Y соответственно левую и правую части этого равенства $\overline{A \cup B}$ $\overline{A} \cap \overline{B}$.

Покажем, что **X ⊆ Y** и **Y ⊆ X**.

Для любого $x \in X \rightarrow x \in \overline{A \cup B} \rightarrow x \notin A \cup B \rightarrow x \notin A$ и $x \notin B \rightarrow x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B} \rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B} \rightarrow x \in Y \rightarrow X \subseteq Y.$

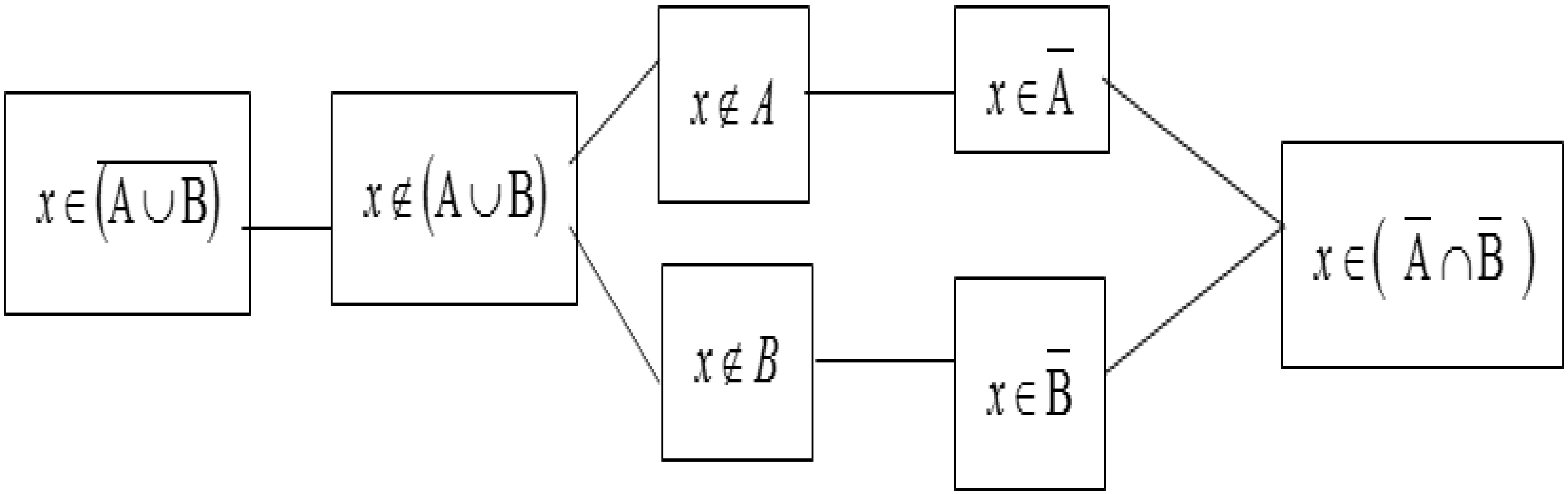
Для любого $y \in Y \rightarrow y \in \overline{A} \cap \overline{B} \rightarrow y \in \overline{A}$ и $y \in \overline{B} \rightarrow$

$y \notin A$ и $y \notin B \rightarrow y \notin A \cup B \rightarrow y \in \overline{A \cup B} \rightarrow y \in X \rightarrow Y \subseteq X.$

Тогда, согласно Теореме1: **X=Y тогда и только тогда, когда одновременно X⊆Y и Y⊆X (т.е. X=Y ⟸⟹ X⊆Y и Y⊆X).**

Следовательно: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$ Что и требовалось доказать.

Доказательство закона де Моргана с помощью логического рассуждения:



Доказательство второго равенства закона де Моргана с помощью диаграмм Эйлера- Венна

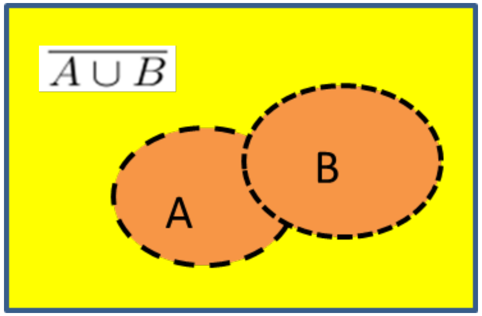


Рис. 1

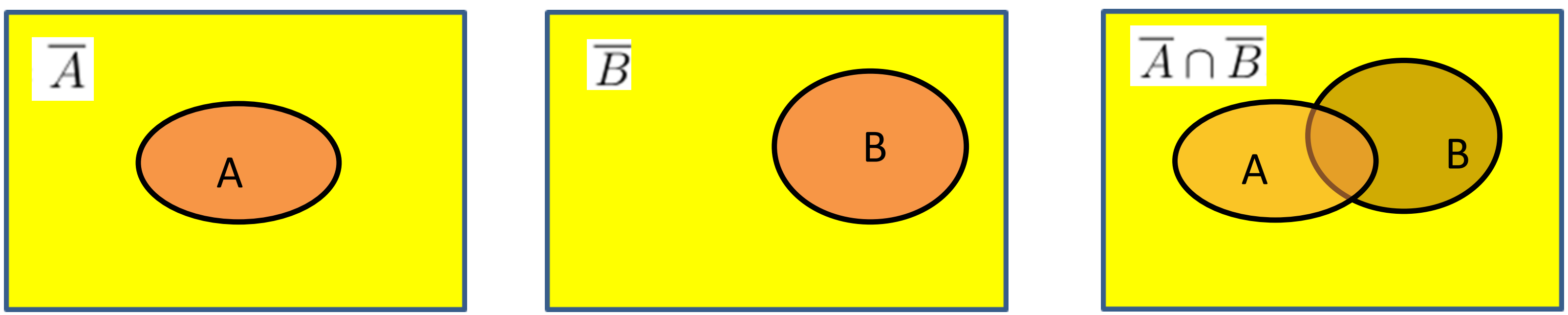
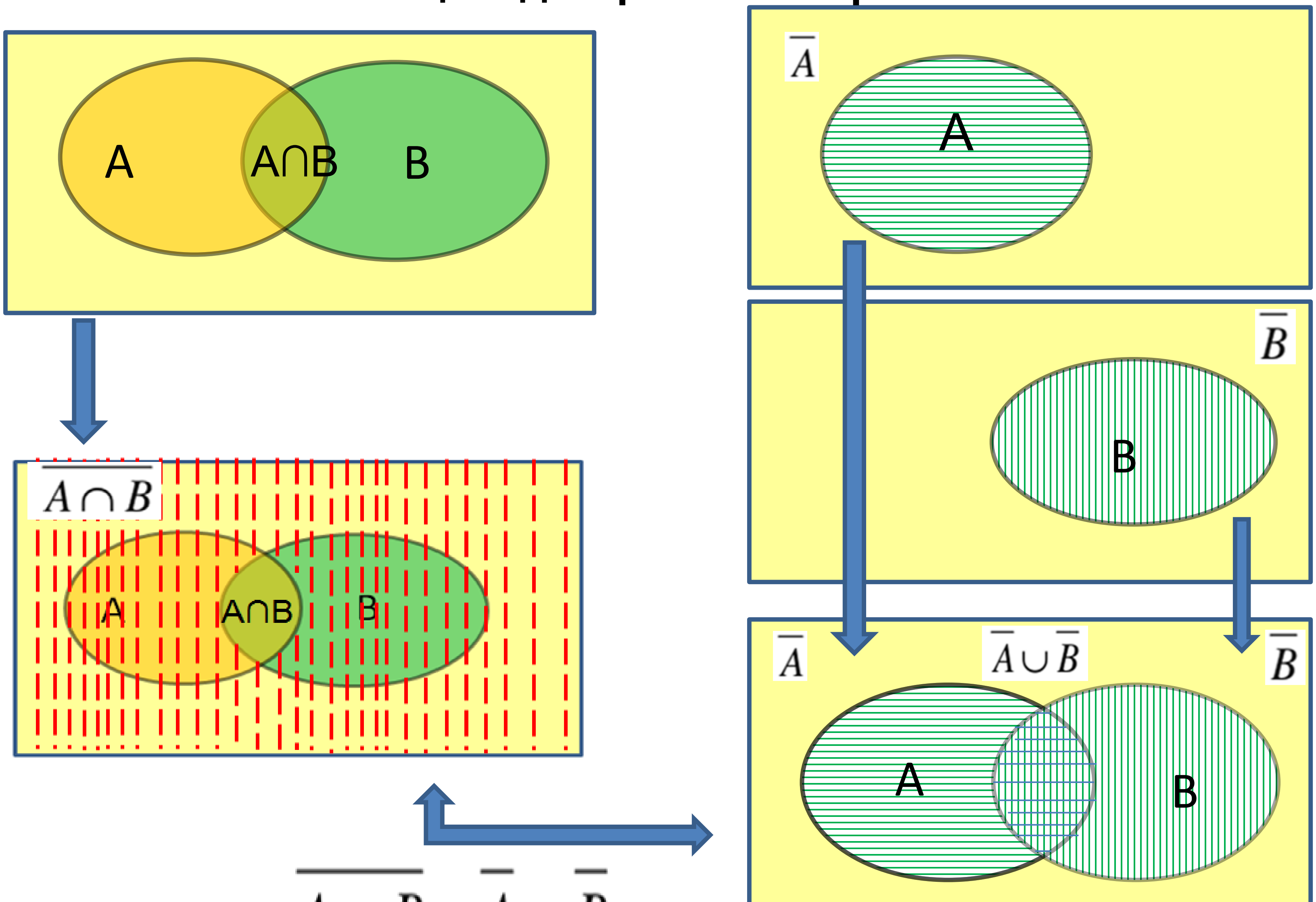


Рис. 2

Доказательство первого равенства закона де Моргана

с помощью диаграмм Эйлера- Венна $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Доказательство первого равенства *Закона де Моргана* способом эквивалентного преобразования

Из диаграмм Эйлера-Венна очевидно:

$x \in \overline{A \cap B} \Rightarrow x \in (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$

Используя свойство идемпотентности ($\bar{A} \cap \bar{B} \cup \bar{A} \cap \bar{B} = \bar{A} \cap \bar{B}$), получим:

$x \in (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$

Используя свойство коммутативности $X \cup Y = X \cup Y$ и ассоциативности $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$, получим:

$x \in ((\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})) \cup ((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}))$

На основе свойства дистрибутивности $(Z \cap X) \cup (Z \cap Y) = Z \cap (X \cup Y)$ получим :

$x \in (\bar{A} \cap (B \cup \bar{B})) \cup (\bar{B} \cap (A \cup \bar{A})) \Rightarrow x \in (\bar{A} \cap U) \cup (\bar{B} \cap U)$

С учетом $\bar{A} \cap U = \bar{A}$, $\bar{B} \cap U = \bar{B}$ получим: $x \in \bar{A} \cup \bar{B} \Rightarrow \overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

Аналогично доказывается включение в обратную сторону:

$x \in \bar{A} \cup \bar{B} \Rightarrow x \in \overline{U \cap A \cap B} \Rightarrow x \in \overline{U \cap A \cap U \cap B} \Rightarrow x \in \overline{A \cap B}$.

Следовательно, $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B} \Rightarrow \boldsymbol{\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}}$

Нахождение мощности объединения множеств

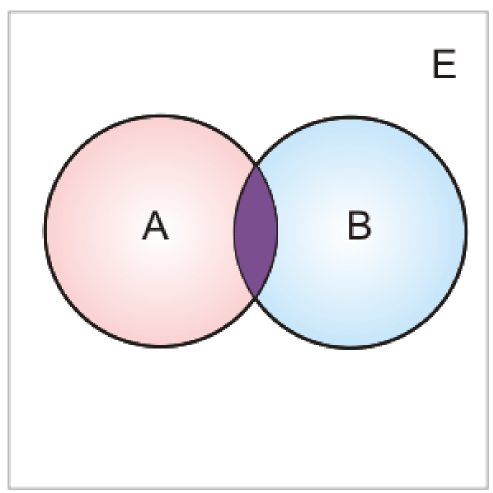
Формула включений и исключений

1. Мощность объединения двух множеств:

Основная формула нахождения числа элементов суммы двух множеств

m(A∪B) = m(A) + m(B) – m(A∩B).

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



2. Мощность объединения трех множеств:

Основная формула нахождения числа элементов объединения трех множеств

$m(A \cup B \cup C) = m(A \cup (B \cup C)) =$

$= m(A) + m(B \cup C) - m(A \cap (B \cup C)) =$

$= m(A) + m(B) + m(C) - m(B \cap C) - m((A \cap B) \cup (A \cap C)) =$

$= m(A) + m(B) + m(C) - m(B \cap C) - (m(A \cap B) + m(A \cap C) -$

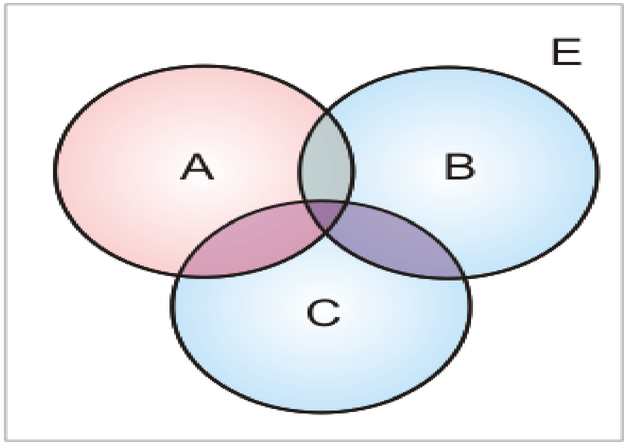
$- m((A \cap B) \cap (A \cap C))) = m(A) + m(B) + m(C) - m(B \cap C) -$

$- m(A \cap B) - m(A \cap C) + m(A \cap B \cap C).$

Таким образом:

$m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) -$

$- m(B \cap C) - m(A \cap C) + m(A \cap B \cap C).$



Задача 1. Из 100 студентов знают:

- английский 48,
- немецкий — 28,
- французский — 26,
- английский и немецкий — 8,
- английский и французский — 8,
- немецкий и французский — 13,
- английский, немецкий и французский — 3 студента.

Сколько студентов не знают ни одного языка?

Решение.

Обозначим через:

A — множество студентов, знающих английский язык;

N — множество студентов, знающих немецкий язык;

F — множество студентов, знающих французский язык.

Тогда: $m(A) = 48$, $m(N) = 38$, $m(F) = 26$, $m(A \cap N) = 8$, $m(A \cap F) = 8$, $m(N \cap F) = 13$, $m(A \cap N \cap F) = 3$.

Найдем с помощью формулы включений и исключений количество студентов, знающих хотя бы один из перечисленных иностранных языков.

$m(A \cup N \cup F) = m(A) + m(N) + m(F) -$

$- m(A \cap N) – m(A \cap F) – m(N \cap F) + m(A \cap N \cap F) =$

$= 48 + 26 + 28 – 8 – 8 – 13 + 3 = 76.$

Следовательно, не знают ни одного иностранного языка:

100 – 76 = 24 студентов.

3. Мощность объединения *n* множеств:

Теорема. A_1, A_2, ... A_n - некоторые множества, тогда мощность объединения *n* множеств определяется по формуле:

$$|A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + ...+$$
$$+ |A_n| - [|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + ... + |A_{n-1} \cap A_n|] +$$
$$[|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + ... + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|] - ...$$
$$+(-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap ....A_n| .$$