İSTATİSTİK VE İHTİMALLER TEORİSİ

PERMÜTASYON VE KOMBİNASYONLAR

Dr. Öğr. Üyesi Fatma Zehra Göğüş

PERMÜTASYONLAR

TANIM-1: 1'den n'ye kadar pozitif tamsayıların çarpımına **n-faktöriyel** denir ve **n!** olarak yazılır.

$$n! = 1*2*3.....(n-1)*n=n*(n-1)!$$

NOT: 0!=1, 1!=1'dir.

Örnek: $\frac{8!}{6!} =? \frac{8*7*6!}{6!}$ = 8*7=56.

Örnek: $12*11*10= \frac{12*11*10*9!}{9!}=\frac{12!}{9!}$

TANIM-2: Nesnelerin kümesinin bir kısmının yada tümünün belli bir sıralamasına veya düzenlenmesine **permütasyon** denir.

Örnek: Bir tiyatro gişesinde bilet almak isteyen üç kişi **kaç farklı şekilde** gişe önünde sıraya girebilir?

Çözüm: İlk yer 3 farklı şekilde doldurulabilir, ikinci yer 2 farklı şekilde ve son yer de 1 yolla doldurulur. O halde, çarpma kuralı ile üç şahsın bir arada $3*2*1=6$ farklı şekilde dizilebileceği söylenir.

PERMÜTASYONLAR

Teorem-1: Tümü birlikte kullanılan n farklı nesnenin permütasyonlarının sayısı n!'dır. Bu sayı ${}_nP_n=n!$ olarak gösterilir.

Örnek: 7 farklı kitap 7 rafa kaç farklı biçimde yerleştirilebilir?

Çözüm: ${}_7P_7 = 7! = 7*6*5*4*3*2*1 = 5040$

Şimdi n farklı nesnenin bir kısmının kullanılması halindeki permütasyonların sayısını düşünelim.

Örnek: 7 farklı kitap arasından seçilen 3 kitap bir kitaplıktaki 3 boş yere kaç farklı şekilde yerleştirilebilir?

Çözüm: İlk boş yer, 7 kitabın herhangi biriyle 7 yolla doldurulabilir. Bu işlemden sonra ikinci boş yer 6 farklı yolla doldurulabilir, üçüncü yer de 5 farklı şekilde doldurulabilir. Çarpma kuralına göre; $7*6*5=210$ farklı şekilde yerleştirilebilir.

$${}_7P_3 = 7*6*5 = \frac{7*6*5*\overbrace{4*3*2*1}^{4!}}{\underbrace{4*3*2*1}} = \frac{7!}{4!}$$

PERMÜTASYONLAR

Teorem-2: Bir defada r tanesi alınarak yinelemeden (kullanılan tekrar kullanılmayacak) n farklı nesnenin permütasyonlarının sayısı (${}_nP_r$; r<n)

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ ile ifade edilir.}$$

Örnek: Bir televizyon sunucusu haber bülteninde okuması gereken 5 farklı haberden ikisini kaç farklı şekilde okuyabilir.

Çözüm: ${}_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5*4*3!}{3!}$=5*4=20.

Teorem-3: Bir çember üzerinde düzenlenecek n farklı nesnenin permütasyonlarının sayısı (n-1)!’dir.

Örnek: Bir yuvarlak masada poker oynayan 4 arkadaşın farklı permütasyonlarının sayısı nedir.

Çözüm: (n-1)!, (4-1)!, 3!=3*2*1=6

PERMÜTASYON ÖRNEKLERİ

ÖRNEK:

6 kız ve 3 erkekten oluşan bir grup için bir sıraya,

a) 3 erkek yan yana olmak koşulu ile kaç farklı sıralama yapılır?

b) Sıranın sonunda kızlardan biri olacak şekilde ve erkekler yan yana gelmeyecek şekilde kaç farklı sıralama yapılır?

Çözüm:

a) 3 erkek yan yana gelecekse bu üç kişi bir kişi gibi düşünülür. Bu durumda 6 kız + 1 (üçlü erkek)= 7 kişinin 7! Permütasyonu olur. Aynı zamanda 3 erkek kendi aralarında 3! Farklı yer değiştirmeleri de göz önüne alınırsa istenen yanıt = 7!*3! olacaktır.

b) K K K K K **K** olacak şekilde önce kızlar yerleştirilir. Kızların farklı sıralama sayısı 6!'dir. Sonra Kızlar arasındaki ve baştaki toplam 6 boşluktan üçüne erkekler dağıtılır. Bu işlem 6*5*4=120 farklı şekilde yapılır. O halde istenen yanıt: 120*6!'dir.

PERMÜTASYON ÖRNEKLERİ

ÖRNEK:

1,2,3,4,5 sayılarıyla 4 basamaklı sayı yazılmak isteniyor.

a) Sayılar yinelenmiyorsa

b) Yinelemeye izin veriliyorsa

c) Sayıların herhangi biri yinelenmeden tek sayı olması isteniyorsa

kaç farklı sayı yazılabilir?

Çözüm: — — — —

a) Doldurulabilecek 4 yer var. İlk yer 5 sayıdan herhangi biri ile 5 yolla doldurulur. İkinci yer geriye kalan 4 sayıdan herhangi biri ile 4 farklı yolla, üçüncü yer kalan 3 sayıdan herhangi biri ile 3 farklı yolla ve benzer şekilde dördüncü yer 2 yolla doldurulabilir. **İstenen yanıt: 5*4*3*2=120**

b) Sayıların yinelenmesine izin verildiğinde 4 yerin her biri 5 sayının herhangi biri ile, yani 5 yolla doldurulur. **O halde 4 basamaklı sayıların sayısı= 5*5*5*5= 625**.

c) Dört basamaklı sayı tek sayı olacağından son basamak 1 veya 3 ya da 5 olmak zorundadır. Bu nedenle dördüncü yer 3 yolla doldurulur. Bu işlem yapıldıktan sonra geri kalan yerler yineleme istenmediğinden sırasıyla 4,3,2 yolla doldurulabilir. **O halde istenen yanıt: 4*3*2*3=72 ‘dir.**

PERMÜTASYON ÖRNEKLERİ

ÖRNEK:

Evli olmayan iki bayan ve üç evli çift bir yuvarlak masa etrafında a)Hiçbir koşul olmadan, b) İki bekar bayan yan yana oturmayacak şekilde, c)erkekler yan yana oturmayacak şekilde kaç farklı düzenleme yapılır?

Çözüm:

a) Dairesel permütasyon olduğundan ve koşul olmadığından; (8-1)!=7! farklı şekilde oturulur.

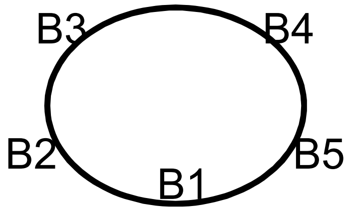
b) Sorunun tümleyenini düşünelim. İki bekar her zaman yan yana oturursa bu iki kişi tek kişi gibi düşünülür. Bu nedenle kişi sayısı 8 yerine 7 alınarak iki kişinin kendi aralarında yer değiştirmesi de düşünülerek, iki bekarın yan yana oturması halinde (7-1)!*2! =6!*2! Farklı oturma şekli bulunur. İstenen yanıt ise 7!-(6!*2!)'dir.

c) B1 B2 B3 B4 B5 , 5 bayanın yuvarlak masadaki permütasyon sayısı (5-1)! Yani 4!'dir.

Üç erkek bayanların yanlarındaki 5 yerden

üçüne 5*4*3 farklı şekilde yerleştirilir. O halde iki işlem

Birlikte 4!*5*4*3 farklı şekilde yapılır.



KOMBİNASYONLAR

TANIM: Bir defada r tanesi alınan n farklı nesnenin bir kombinasyonu, *düzenleme sırasına bakılmaksızın* n nesneden r tanesinin bir seçimidir.

Bir defada r tanesi alınan n nesnenin kombinasyonlarının sayısı $\mathbf{{}_nC_r}$, **C(n,r)** veya $\binom{n}{r}$ ile gösterilir.

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = {}_nC_r = \boxed{\frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

ÇIKARIM: Bir defada n-r tanesi alınan n farklı nesnenin kombinasyonlarının sayısı, bir defada r tanesi alınan n farklı nesnenin kombinasyonlarının sayısına eşittir.

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r} \qquad \text{Mesela, } \binom{5}{2} = \binom{5}{3}$$

PERMÜTASYONLAR İLE KOMBİNASYONLAR ARASINDAKİ İLİŞKİ

HATIRLATMA; Bir defada r tanesi alınarak yinelemeden n farklı nesnenin permütasyonlarının sayısı: ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

r nesnenin her bir kombinasyonunun permütasyonu r! Yolla düzenlenebileceğinden, yani ${}_n\mathbf{C}_r$ kombinasyonlarının her biri için r! Permutasyonu olduğundan permutasyonların toplam sayısı ${}_nP_r = {}_n\mathbf{C}_r * r!$'dir.

Bu nedenle;

$$ {}_nP_r = {}_nC_r * r! = \frac{n!}{r!(n-r)!} * r! = \frac{n!}{(n-r)!} $$

$$ {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad {}_nC_r = {}_nP_r / r! $$ eşitliği elde edilir.

KOMBİNASYONLAR

Örnek: 4 evli çift arasından 3 kişilik bir kurul

a) Tümü eşit seçilme şansına sahipse

b) Kurulda 2 kadın ve 1 erkek olmak zorundaysa.

c) Eşler aynı kurulda bulunamayacaksa

kaç yolla seçilir?

Çözüm: a) Sıra önemli olmadığından 8 kişi arasından 3'ünün seçimi düşünülür.

$$\binom{8}{3} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \boxed{\frac{8!}{3!5!}} = \frac{8*7*6*\cancel{5!}}{3!\cancel{5!}} = \frac{8*7*\cancel{6}}{\cancel{3*2*1}} = 56$$

Aynı Zamanda $\binom{8}{3} = \frac{8*7*6}{3!}$

b) 2 kadın $\binom{4}{2}$ yani 6 farklı yolla seçilir, bu seçim yapıldıktan sonra 1 erkek $\binom{4}{1}$ yani 4 yolla seçili. Böylece, çarpma kuralıyla 2 kadın ve 1 erkeğin seçilmesinin yollarının sayısı $= \binom{4}{2}\binom{4}{1} = 6*4=24$ olur.

KOMBİNASYONLAR

Çözüm devam: c) Eşler aynı kurulda bulunmayacaklarına göre, kurulda bulunan kişiler eş olmamalıdır. Önce 3 çift, 4 çift arasından $\binom{4}{3}$ yolla seçilir. 3 çift seçildikten sonra, ilk çiftten bir (erkek yada kadın), ikinci çiftten bir, üçüncü çiftten bir seçim yapılabilir. Çarpma kuralıyla, $\binom{4}{3}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}$ =32'dir.

Ya da ikinci bir çözüm yolu ile;

$$\binom{8}{3}\ \text{tüm seçim sayısından} - \overbrace{\binom{4}{1}\ \text{dört çiftten birinin seçimi}}^{\text{Bir çiftten 2 kişi seçilmiş oldu Yani eşler aynı kurulda}} \cdot \overbrace{\binom{6}{1}\ \text{geri kalan 6 kişiden birinin seçimi}}^{\text{Diğer bir kişi geri kalan 6 kişiden seçildi}}$$

$$\binom{8}{3}-\binom{4}{1}\binom{6}{1}=32$$

KOMBİNASYONLAR

Örnek: Bir kutuda bulunan 12 toptan, 5'i siyah, 4'ü beyaz, 3'ü kırmızıdır. Her renkten en az bir topu içinde bulunduran 6 toptan oluşan grupların sayısı nedir?

Yine ters mantık ilerleyelim.

Çözüm: Hiçbir koşul olmaksızın $\binom{12}{6}$ grup oluşturulur. İstenen durum her renkten en az bir top olacağı için istenmeyen durum; Ya seçilen 6 topun tümü siyah beyaz olacak ve kırmızı bulunmayacak. Ya da 6 topun tümü beyaz, kırmızı olacak siyah bulunmayacak, ya da 6 topun tümü siyah, kırmızı olacak beyaz bulunmayacak. Bu durumda;

5 siyah ve 4 beyazdan $\binom{9}{6}$ grup ya da 4 beyaz ve 3 kırmızıdan $\binom{7}{6}$ grup ya da 5 siyah ve 3 kırmızıdan $\binom{8}{6}$ grup yapılır. Renklerden sadece birini içinde Bulundurmayan grup sayısı $\binom{9}{6} + \binom{8}{6} + \binom{7}{6}$ dır. O halde istenen grup sayısı;

$$\binom{12}{6} - \left[\binom{9}{6} + \binom{7}{6} + \binom{8}{6}\right] \text{dir.}$$

KOMBİNASYONLAR (PASCAL KURALI)

Teorem-1: $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$

Örnek: 6 aday temsilci olmak üzere seçim yarışması yapmaktadırlar. Bir seçmen oyunu bir ya da iki adayın adını işaretleyerek kullanabileceğine göre, seçmen oyunu kaç farklı şekilde kullanabilir.

Çözüm: İki ayrık durum söz konusudur: Seçmen 1 aday için yada iki aday için oy kullanır. Oy veren seçmen 1 aday için oy verirse , oy pusulasını $\binom{6}{1}$ farklı şekilde işaretler; seçmen 2 aday için oy kullanırsa oy pusulasını $\binom{6}{2}$ farklı şekilde işaretler. O halde toplama kuralı ve pascal kuralı gereği seçmen $\binom{6}{1} + \binom{6}{2} = \binom{7}{2}$ farklı şekilde oy kullanır.

KOMBİNASYONLAR

Örnek: A={1,2,…,9} kümesinin

a) 5 elemanlı alt kümelerinin kaçında 6 sayısı bulunmaz?

b) 5 elemanlı alt kümelerinin kaçında 1 ve 2 birlikte bulunmaz?

Çözüm: 9 elemanlı kümenin 5 elemanlı alt kümelerinin sayısı 9'un 5'li kombinasyonudur.

a) 6 sayısının bulunduğu 5 elemanlı alt kümelerinin sayısı 8'in 4'lü kombinasyonudur. Zaten 5 elemandan 1'i 6 olacağı için geriye kalan 4 eleman 8 sayı arasından seçilir.

$$\binom{9}{5} - \binom{8}{4}$$

b) 1 ve 2'nin birlikte bulunduğu alt kümelerinin sayısı 7'nin 3'lüsüdür. 5 sayıdan 2'si 1 ve 2 olacağı için geriye kalan 3'ü 7 sayı arasından seçilecektir.

$$\binom{9}{5} - \binom{7}{3}$$

TEKRARLI KOMBİNASYONLAR

Teorem-2: ÖZDEŞ NESNE DURUMLARI:

1. Durum: $r \leq n$ olmak üzere r özdeş nesne n tane kutuya, her bir kutuya herhangi bir sayıda nesne koymak üzere C((n-1+r),r) sayıda dağıtılabilir.

Örnek: Özdeş 4 kalem bir öğrenciye istenildiği kadar kalem verilmek şartıyla 6 öğrenciye kaç farklı şekilde dağıtılabilir

$$\binom{n-1+r}{r} = \binom{6-1+4}{4} = \binom{9}{4} = 126$$

2. Durum: $r \geq n$ olmak üzere r özdeş nesne n tane kutuya her kutuda en az bir nesne olacak şekilde C((r-1),(n-1)) sayıda dağıtılabilir.

Örnek: 7 özdeş kalem 5 çocuğa her çocuğa en az bir kalem vermek koşulu ile kaç farklı biçimde dağıtılabilir? C(7-1,5-1), $\binom{6}{4}$

3. Durum: $r \geq n$ olmak üzere r özdeş nesne n tane kutuya her hangi bir şart olmaksızın C(n-1+r , n-1) sayıda dağıtılabilir.

Örnek: 7 özdeş kalem, 5 farklı kalem kutusuna kaç farklı şekilde yerleştirilebilir ?

$$C(5-1+7 , 5-1)= C(11 , 4) = \binom{11}{4} = 330$$

TEKRARLI KOMBİNASYONLAR

Teorem-3: FARKLI NESNELERİN DAĞILIM DURUMLARI:

1. Durum: r farklı nesneyi n farklı kutuya diziliş (sıra) şartı olmadan "n*r" sayıda dağıtabiliriz.

Örnek: 4 farklı kalem, 5 farklı kalem kutusuna kaç farklı şekilde yerleştirilebilir? 4*5=20

2. Durum: r farklı nesneyi n farklı kutuya herhangi bir sayıda diziliş önemli olmak şartıyla; P(n-1+r , r) sayıda dağıtılabilir.

TÜMÜ BİRBİRİNDEN FARKLI OLMAYAN NESNELERIN PERMÜTASYONU

Teorem-4: n nesne verilmiş olsun. Bu n nesnenin r_1 tanesi birinci çeşit, r_2 tanesi ikinci çeşit, …, r_k tanesi k-ıncı çeşit olsun. $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$ olmak üzere, tümü birlikte alınan bu n nesnenin farklı permütasyonlarının sayısı;

$$\frac{n!}{r1! * r2! * \ldots * rk!} \text{ dir.}$$

Örnek: 52 kartlık standart bir deste 4 oyuncu arasında kaç farklı şekilde dağıtılır.

Çözüm: Oyuncuların her birine 13 kart verileceğinden, olanaklı dağıtımlar

$$\frac{52!}{13! * 13! * 13! * 13!}$$

TÜMÜ BİRBİRİNDEN FARKLI OLMAYAN NESNELERIN PERMÜTASYONU

Örnek: İki kırmızı, üç siyah ve beş beyaz boncuk bir ipe dizilecektir. Aynı renkte olan boncuklar, eşit büyüklükte ve benzer biçimdedirler. Bu 10 boncuk bir ipe kaç farklı şekilde dizilebilir.

$$\frac{10!}{5! * 3! * 2!} = 2520$$

Örnek: “Mississippi” sözcüğünün harfleriyle kaç farklı düzenleme yapılabilir.

11 harften biri m, dördü s, ikisi p, dördü i dir.

Böylece r1=1, r2=4, r3=2 ve r4=4 tür. 11 harfin permütasyonlarının sayısı,

$$\frac{11!}{1! * 4! * 4! * 2!} = 34650\text{'dir.}$$

TÜMÜ BİRBİRİNDEN FARKLI OLMAYAN NESNELERIN PERMÜTASYONU

Örnek: "KARACAKÖK" sözcüğünün iki A harfi yan yana gelmeyecek şekilde kaç permütasyon vardır?

Çözüm: Önce A harfleri dışındaki harfleri düzenlersek buradaki harflerin tümü birbirinden farklı değildir. Bu nedenle tümü birbirinden farklı olmayan nesnelerin permütasyonu düşünülür. K=3 tane, R=1 tane, C=1 tane, Ö=1 tane

Altı harfin permütasyon sayısı = $\dfrac{6!}{3! * 1! * 1! * 1!}$

$\boxed{A}$ K $\boxed{}$ K $\boxed{}$ K $\boxed{}$ R $\boxed{A}$ C $\boxed{A}$ Ö $\boxed{}$

Yan yana dizilen bu 6 harfin aralarında, başında ve sonunda 7 boş yer vardır. 7 boş yerin 3 A harfi için 3'ünü seçmemiz gerekir.

İki işlem birlikte düşünüleceğinden $\dfrac{6!}{3!.1!.1!.1!}.\dbinom{7}{3}$

TÜMÜ BİRBİRİNDEN FARKLI OLMAYAN NESNELERIN PERMÜTASYONU

Örnek: 4 nokta ve 10 tireden 7 tanesi kullanılarak kaç tane 7 basamaklı sembol oluşturulabilir?

Çözüm: 7 basamaklı semboller, 4 nokta ve 3 tire yada 3 nokta ve 4 tire yada 2 nokta ve 5 tire yada 1 nokta ve 6 tire yada 0 nokta ve 7 tire biçiminde olabilir. Buna göre sonuç sayısı ;

$$\frac{7!}{4!*3!}+\frac{7!}{3!*4!}+\frac{7!}{2!*5!}+\frac{7!}{1!*6!}+\frac{7!}{0!*7!}$$

İKİ FARKLI CİNSTEKİ ÖĞELERIN PERMÜTASYONU

Teorem-5: n öğenin r tanesi birinci çeşit (r tanesi aynı), geri kalan n-r tanesi ikinci çeşit (geri kalan n-r tanesi aynı) ise bu n öğenin permütasyonlarının sayısı, bir defada r tanesi alınan n farklı nesnenin kombinasyonlarının sayısına eşittir.

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}=\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r} \text{ dir.}$$

Örnek: Bir sınıfta 12 kız ve 10 erkek öğrenci vardır. Sınıf, kızlar ve erkekler kendi aralarında artan boy uzunluklarına göre sıralanacak biçimde, kaç farklı şekilde düzenlenebilir?

Kızlar kendi aralarında permütasyona tabi olamayacağından (çünkü boy sırası var kendi içlerinde yer değiştiremezler) problemin amacı için kızlar benzer olarak düşünülebilir. Aynı nedenle erkeklerde birbirinin benzeri olarak düşünülür. O halde 12'si bir çeşit, 10'u bir çeşit 22 öğrencinin permütasyonu düşünülür. Böylece

sadece $\binom{22}{10}$ 'u veya $\binom{22}{12}$ 'si alınır. $\binom{22}{10}=\dfrac{22!}{10!(22-10)!}$

SIRALI PARÇALANMALAR

Teorem-6: Bir A kümesinde n farklı öğe bulunsun. A'nın (A1,A2, …, Ak) formunda farklı sıralı parçalanmalarının sayısı (A1 de r1, A2 de r2, …, Ak da rk öğe ve r1+r2+…+rk=n olmak üzere):

$$\frac{n!}{r_1! * r_2! * \ldots * r_k!} \quad \text{dir.}$$

Örnek: 9 farklı oyuncak, 4 kardeş arasında en küçüğü 3 ünü diğerleri eşit sayıda olmak üzere kaç farklı şekilde paylaştırılır?

Çözüm: 9 oyuncağın sırasıyla 3, 2, 2, 2 oyuncağı içinde bulunduran 4

göze içine sıralı parçalanmalarının sayısını bulmak istiyoruz.

$$\frac{n!}{r_1! * r_2! * \ldots * r_n!} = \frac{9!}{3! * 2! * 2! * 2!} = 7560 \text{ dır.}$$

SIRASIZ PARÇALANMALAR

Örnek: Bir sınıfta 12 öğrenci vardır. Her takımda 4 öğrenci olacak şekilde 12 öğrenci A1, A2, A3 gibi üç takıma kaç farklı şekilde parçalanır?

Çözüm: $\dfrac{12!}{4! * 4! * 4! * 3!}$ =7560 dır.

Öğrencilerin her bir {A1, A2, A3} takımına parçalanması 3!=6 farklı şekilde gerçekleşir. Mesela A1'dekilerin takımı A3 veya A2 olabilir, A2'dekilerin takımı A1 veya A3 olabilir benzer şekilde A3'tekilerin takımı A1 veya A2 olabilir .

KAYNAKLAR

- Prof. Dr. Fikri AKDENİZ, Olasılık ve İstatistik, 22. Baskı, Akademisyen Kitabevi
- Montgomery, Runger, Hubele, Mühendislik İstatistiği, Çeviri Editörü: Prof. Dr. Çoşkun ÖZKAN
- Prof. Dr. Hüseyin Çelebi, Mühendisler İçin İstatistik Yöntemler Ve Uygulamalar, Ders Notları
- D. C. Montgomery and G.C. Runger, (1999). Applied Statistics and Probability for Engineers, 2nd Edition. John Wiley and Sons, USA.