

İSTATİSTİK VE İHTİMALLER TEORİSİ

İSTATİSTİĞE GİRİŞ VE TEMEL KAVRAMLAR

DR. ÖĞR. Üyesi Fatma Zehra Göğüş

İSTATİSTİK

İstatistik, gözlem sonucunda bulunan verilerin incelenmesinde matematiğin uygulanması ile ilgilenen bir disiplindir.

İstatistik, belirsizlik durumundan en iyi sonucu çıkarmaya veya kararı vermeye yarayan yöntemlerin özetidir.

İstatistik, gözlemler sonucu elde edilen sayısal verileri inceleyen ve bunlar arasındaki bağıntıları ortaya çıkararak sonuçların grafik veya çizelgeler halinde sunulmasını sağlayan bir inceleme yöntemidir.

İstatistik, veriden bilgiye uzanan bir köprüdür. Veri kümlesinin içinde ve verilerin arasında «saklı» bulunan bilgiyi süzerek, onları veri kalabalığı içinden ayırıştırıp, görünür hale getirerek, bizim o değerli bilgilere ulaşmamızı mümkün kılar.

İstatistik, bir belirsizlik bilimidir, bir veri bilimidir.

İSTATİSTİK

Bu tanımlar ışığında istatistiği yeniden tarif edecek olursak, İstatistik;

- ✓ verilerin toplanması,
- ✓ organize edilmesi,
- ✓ özetlenmesi,
- ✓ sunulması,
- ✓ tahlil, analiz edilmesi ve
- ✓ bu verilerin anlaşılabilir bir şekilde düzenlenerek problemlerin çözümü için kullanılabilmesi ve nihai bir sonuca varılabilmesi

için kullanılan bilimsel metotlar topluluğudur.

Peki Neden Bu Veri Bilimine İhtiyaç Duyarız, Neden Veri Analizi?

- ☐ Bilgi toplayarak gözlem yapmak.
- ☐ Sorgulanmaya rakamlar ile yanıt vermek.
- ☐ Mevcut durum hakkında yorum yapmak.
- ☐ Neler olduğu hakkında kestirim yapmak ya da tahmin etmek
- ☐ Gelecek için öngöründe bulunmak.

İSTATİSTİK TÜRLERİ

Tanımlayıcı (betimleyici) istatistik: Sayısal verileri sınıflama ve özetlemede kullanılan yordamlardır. Verileri tablo, grafik veya sayısal olarak anlamlı bir biçimde özetler. Bazı veriler frekans dağılımı olarak düzenlenebilir. Verilerden ortalama değer ve bazı özel orta değerler hesaplanabilir. Örneğin, medyan bir grup sayısal veriyi ikiye bölen (%50 - %50) orta noktadaki değerdir.

Öngörüye dayalı (tahminleyici) istatistik: Gözlem yapılarak (ölçülmüş) elde edilmiş verilerden, gelecekteki durumlar için sonuç çıkarır.

MÜHENDİSLİKTE İSTATİSTİK

!!! Mühendislik uygulamalarının birçoğu da veri toplama, analiz etme ve çözüm için kullanma yaklaşımına sahiptir. Dolayısıyla, istatistik bilgisi mühendisler için diğer mühendislik bilgileri kadar önemlidir.

!!! İstatistiksel yöntemler; modellerin doğrulanması, yeni ürün ve sistemlerin tasarlanması, mevcut tasarımların geliştirilmesi ve üretim süreçlerinin tasarımı, geliştirilmesi ve iyileştirilmesi çalışmalarında güçlü destek sağlamaktadır.

TARİHSEL GELİŞİM

Günümüz istatistiğinin kökleri ancak 15. yy'a kadar uzanmaktadır. Metafiziğe karşı pozitif düşüncenin üstünlük sağlaması modern istatistiğin gelişmesine de ivme kazandırmıştır. Bunun da esas kaynağı sohbet matematiği, şans oyunları (kumar), yani insanın yine ileriye kestirme veya önceden bilme merakı olmuştur. Bugün de istatistik bu alanların temel dayanağı olmaya devam etmektedir (loto ve toto gibi).

- ✓ Tarihte istatistiği bilimsel olarak ilk irdeleyen ve kuramlara bağlamaya çalışan matematikçi İtalyan **Pacioli (1445-1514)** ve **Cardano'dur (1501-1576)**. Bunlar zar atma üzerine çalışmışlardır.
- ✓ Ancak bugünkü istatistiğin kuramlarının temelleri **Pascal (1623-1662)** ve **Bernoulli (1654-1705, Bernoulli dağılımı)** tarafından atılmıştır. Geliştirdikleri yöntemler, olasılık, şans ve risk oranlarının hesaplanmasını kolaylaştırmıştır.
- ✓ Bernoulli'yi olasılıkları hipotez modellerine dayandıran **Bayes (1702-1761, Bayes teoremi)** ve **Laplace (1749-1827, Laplace teoremi)**, **Poisson (1781-1840, Poisson dağılımı)** ve **Alman Gauss (1774-1855, çan eğrisi)** daha ileriye götürmüştür.
- ✓ 20. yy istatistikçileri arasında **Galton (1822-1911, logaritmik dağılım)**, **Pearson (1857-1936, Pearson bağıntısı)** ve **Fisher (1890-1962, varyans analizi)** önemli yer tutmaktadırlar. İstatistiğin geleceği ile ilgili olarak **Tukey, Kendall, Watts** ve **Bradley** açıklamalarda bulunmaktadırlar.

İstatistik sürekli geliştirilmekte ve yaygın kullanım alanı bulmaktadır. Örneğin, istatistiğin yerbilimlerdeki adı **jeoistatistiktir**. 20. yy'ın ikinci yarısından itibaren bu alanda kullanılmaya başlamıştır. Jeoloji, madencilik, zemin etütleri, coğrafya, çevre, tarım, ormancılık ve hidroloji bu alanların sadece birkaçıdır. Jeoistatistik bugün güvenilen ve kendine özgü **bölgesel** veya **yere bağlı değişkenler** gibi teorik esasa ve **varyogram** gibi araçlara sahip bulunmaktadır.

TEMEL KAVRAMLAR

- ✓ **Popülasyon (Küme, Yığın, Ana Kütle/Ana Kitle, Kitle) :** Hakkında veri toplanan nesnelerin veya çıktıların tamamıdır. Belirlenmiş bir evrendeki nesnelerin iyi tanımlanmış koleksiyonudur.
- ✓ Üzerinde çalışılan tüm gruba ya da istatistiksel sonuçların genelleştirileceği gruba popülasyon denir.

Popülasyonun büyüklüğü araştırmanın özelliğine göre değişir. Nüfus sayımı için popülasyon Türkiye'dir. Esenyurt'daki üniversite öğrencilerinin giderleri için popülasyon Üniversitesi öğrencileridir.

- ✓ **Örnek Uzay (Örnekleme):** Popülasyonun bir alt kümesidir yani popülasyondaki belirli yöntemlerle belirli kurallara göre seçilmiş bir kısım veridir.

Bir araştırmada popülasyonun tümünü gözlem altına alma ya da popülasyonu tam olarak sayma yerine, popülasyonu nitelik ve nicelik yönünden temsil eden örneklerin alınması yoluna gidilir. Böylece örneklerden elde edilen bilgilerin, belirli olasılık kademelerinde popülasyon için de geçerli olduğu kabul edilebilir ve zaman ve maliyetten tasarruf sağlanır. Amaç: örnek uzayı kullanarak popülasyon hakkında bilgi edinmek ve karar vermektir. Bu bağlamda örnek uzay; popülasyonu nitelik ve nicelik yönünden temsil edebilecek bir alt kümenin oluşturulması işlemidir.

→ Örneğin, bir çuval dolusu pirinç içinden alınacak bir avuç pirincin incelenmesiyle tüm çuval dolusu pirinç hakkında çeşitli özellikleri itibariyle genelleme yapılabilir. Burada, çuvaldaki toplam pirinç miktarı popülasyon'dur. İncelemek amacıyla aldığımız bir avuç dolusu pirinç ise örnek uzaydır.

→ Bir üniversitedeki tüm öğrenciler popülasyon, bu öğrenciler arasından seçilen 100 kişilik grup örnek uzaydır. Eğer araştırma fakülte için yapılıyorsa, fakültedeki bütün öğrenciler popülasyon, bu öğrenciler içerisinde alınan 30 kişilik grup örnek uzaydır.

TEMEL KAVRAMLAR

Başka bir tanımla; Bir deneyin tüm olası sonuçlar kümesi, örnek uzay olarak tanımlanır. Örnek uzay genellikle (S) ile gösterilir. Bir örnek uzaydaki her bir elemana da **örnek nokta (gözlem, denek)** denir.

✓ **Olay: S** örnek uzayının herhangi bir alt kümesidir.

ÖRNEKLER

*Bir zarın atılmasıyla elde edeceğimiz sayı 1, 2, 3, 4, 5, 6 dan biri olacaktır:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dir.

Örnek Noktaları: 1, 2, 3, 4, 5, 6'dan her biri örnek noktadır.

Aynı zamanda; A olayı $= \{1\}$, B Olayı $= \{2\}$, C Olayı $= \{1, 2\}$,

D Olayı $= \{1, 3, 5\}$, E Olayı $= \{2, 4, 6\}$

*Alfabemizden rasgele bir harf seçersek; $S = \{A, B, C, \dots, Z\}$ dir.

*Bir paranın tek atılışı için örnek uzayı ise; $S = \{Y, T\}$

*Bir paranın iki kez atılması deneyini düşünelim. Bu deneyin örnek uzayı:

$S = \{TT, TY, YT, YY\}$

Her atışta aynı yüzün elde edilmesi olayı, $A = \{YY, TT\}$

TEMEL KAVRAMLAR

ÖRNEKLER

*Beş, on ve yirmi beş kuruş atılması deneyi için;

$$S=\{TTT, TYT, YTT, TTY, YYT, YTY, TYY, YYY\}$$

“üç tura elde edilmesi” bir olay, “üç yazı elde edilmesi” diğer bir olaydır.

*Rasgele bir erkek seçip boyunun 150 ve 200 cm arasında olması için;

$$S=\{x; 150 < x < 200\} \text{ elde ederiz.}$$

*Kırmızı ve siyah renkli iki zarın atılmasından oluşan bir deneyde kırmızı zar için elde edilen sonuç k , siyah zar için elde edilen sonuç s olsun. Bu durumda S örnek uzayı, her biri 1, 2, 3, 4, 5, 6 değerini alabilen (k,s) çiftlerinin kümesidir.

$$S= \{(k,s) \mid 1 \leq k \leq 6 \text{ ve } 1 \leq s \leq 6\}$$

iki zar
deneyi için
örnek uzay

k\s	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

TEMEL KAVRAMLAR

HATIRLATMA: Bir “olay”, herhangi bir deney için S örnek uzayın bir alt kümesidir.

Bir olay, S örnek uzayın bir alt kümesi olduğundan S 'nin kendisi ve \emptyset (boş küme) de birer olaydır

- ✓ Olay örnek uzayın kendisi ise **kesin olay**
- ✓ \emptyset 'ye **olanaksız olay** (Boş Küme)

denir.

Rasgele (Rassal) Olay: Gerçekleşmesi raslantıya bağlı olan olaydır.

ÖRNEKLER

Bir desteden bir oyun kartı seçildiğinde maça ikilisinin gelmesi, Bir zar atıldığında 4 gelmesi, Gelecek yıl buğday üretiminin verilmiş iki sınır arasında bulunması olayları kesin değildir ve rastlantıya bağlıdır.

TEMEL KAVRAMLAR

KURAL-1: A ve B olayları S örnek uzayının her hangi iki rasgele olayı olsun. $A \cap B$, $A \cup B$ de rastlantıya bağlıdır. A rasgele olay ise A'nın gerçekleşmemesi de (A') rasgele olaydır.

KURAL-2: $A \cap B = \emptyset$ ise A ve B olayları ayrıktyrlar; yani A ve B'nin kesişimi boş kümedir.

Bir paranın atılması deneyini düşünelim; $S = \{Y, T\}$ kümesi bu deneyin örnek uzayıdır.

A olayı: “ tura gelmesi ” $A = \{T\}$
B olayı: “ yazı gelmesi ” $B = \{Y\}$ } $A \cap B = \emptyset$

A ve B olaylarının kesişimi, ortak noktaları olmadığından $A \cap B = \emptyset$ 'dir yani A ve B ayrık olaylardır.

ÖRNEK NOKTALARINI SAYMA KURALLARI

Toplama Kuralı: İki işlem düşünelim. İki işlem ayırık olsunlar. İlk işlem N_1 farklı şekilde ikincisi N_2 farklı şekilde yapılabiliyorsa, işlemlerin biri veya diğeri N_1+N_2 farklı şekilde yapılabilir.

Örnek: Bir zar atalım. Kaç farklı şekilde çift yada tek sayı elde ederiz?

Çözüm: Üçü tek sayıları, diğer üçü çift sayıları göstermek üzere 6 yol vardır. Böylece tek yada çift sayı görünmesi yollarının sayısı $3+3=6$ dır.

$$S=\{2,4,6,1,3,5\}$$

Genelleştirilmiş Toplama Kuralı: K işlem olsun. İlk işlem N_1 farklı şekilde, ikinci işlem N_2 farklı şekilde,...., K -ıncı işlem N_k farklı şekilde yapılsın. Bu takdirde, herhangi iki işlemin birlikte yapılmadığını kabul ederek, K işleminden birini $N_1+N_2+....+N_k$ farklı şekilde yapabiliriz.

Örnek: Bir çantada 4 tane beyaz, 6 tane siyah ve 8 tane kırmızı top vardır. Kaç yoldan 1 beyaz veya siyah ya da kırmızı top çekilebilir?

Çözüm: Beyaz top 4, siyah top 6 ve kırmızı top 8 farklı şekilde çekilebileceğinden, bir beyaz veya bir kırmızı ya da bir siyah top çekmek için toplam yol sayısı $4+6+8=18$ 'dir.

ÖRNEK NOKTALARINI SAYMA KURALLARI

Çarpma Kuralı: İki işlem düşünelim. İlk işlem $N1$ farklı şekilde yapılabiliyorsa ve ilk işlem bu yolların herhangi biri ile yapıldıktan sonra ikinci işlem $N2$ farklı şekilde yapılabilirse, bu iki işlem birlikte $N1*N2$ farklı şekilde yapılabilir.

Örnek: Bir zarı iki kez atalım. Bu deneyin örnek uzayındaki örnek noktalarını belirtiniz?

Çözüm: $N1=6$ ve $N2=6$ olduğundan örnek noktalarının sayısı $6*6=36$ 'dır.

kıs	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Genelleştirilmiş Çarpma Kuralı: K işlem sayısı olsun. İlk işlem $N1$ farklı şekilde yapılırsa ve ilk işlemin nasıl yapıldığı önemli değilse, ikinci işlem $N2$ farklı şekilde yapılırsa ve nasıl yapıldığı önemli değilse, böylece K işlem için devam edildiğinde; K işlem birlikte $N1*N2*N3*...*Nk$ farklı şekilde yapılır.

ÖRNEK NOKTALARINI SAYMA KURALLARI

Örnek: Bir para 3 kez atıldığında, bu deney için örnek uzaydaki örnek noktaların sayısını belirtiniz.

Çözüm: $N_1=2$, $N_2=2$, $N_3=2$ olduğundan örnek noktalarının sayısı $2*2*2=8$ 'dir.

Örnek: Bir para atılıyor, bir zar yuvarlanıyor ve iyice karıştırılmış bir 52'lik desteden bir oyun kartı çekiliyor. Bu deneyin örnek uzaydaki örnek noktalarının sayısını belirtiniz.

Çözüm: $N_1=2$, $N_2=6$ ve $N_3=52$ olduğundan Örnek noktalarının sayısı $2*6*52=624$ 'tür.

MÜHENDİSLİKTE POPÜLASYON, ÖRNEK UZAY, OLAY

Mühendislik ortamı içerisinde de, veriler neredeyse her zaman bir popülasyondan seçilmiş örnek uzaylardan oluşur.

Genellikle mühendislik verisi şu üç yoldan biriyle elde edilir.

- ✓ Geçmişe dönük araştırma
- ✓ Gözlemsel araştırma
- ✓ Deney tasarımı

ÖRNEKLER

*Bir elektrik kontrol panelinde 3 anahtar bulunmaktadır. Bu anahtarlar herhangi bir anda 'on'(n) veya 'off'(f) durumunda olabilmektedir.

$S = \{nnn, nfn, fnn, nnf, ffn, fnf, nff, fff\}$: A Olayı = $\{nnn, fff\}$, B Olayı = $\{fnn, ffn, fff\}, \dots$

En az bir anahtar 'on', durumundayken oluşan

$$S = \{nnn, nfn, fnn, nnf, ffn, fnf, nff\}$$

MÜHENDİSLİKTE POPÜLASYON, ÖRNEK UZAY, OLAY

ÖRNEKLER

*Bir şantiyede üretilen betondan silindir biçiminde alınan belirli sayıda numune de bir örnek uzayı oluşturur.

*Fırat nehri üzerindeki Keban istasyonundan 1937-1967 yılları arasında ölçülmüş olan yıllık ortalama akım hacimleri de bir örnek uzayı oluşturur. Bu örnek uzay kullanılarak gelecek yıllar için tahminlerde bulunulabilir.

*Yarı iletken levha üretiminde belirli bir parti levha içerisinde bazılarının öz direnci ölçülmek isteniyorsa; parti popülasyonu oluşturmaktadır, öz dirençleri ölçülmek üzere seçilen levhalar örnek uzayı oluşturur.

*Bir mühendisin kurduğu damıtma düzeneğinin ardışık 24 saat boyunca çalıştırdığı ve bu süre zarfında her saat sonunda kolonun aseton yoğunluğunu ölçtüğü varsayılırsa; Tüm saatlik yoğunluk ölçümleri popülasyonu oluşturur. Bazı saatler belirlenir ve bu saatler arasındaki saatlik yoğunluk ortalamaları alınarak popülasyonun bir bir alt kümesi yani örnek uzayı oluşturulur.