ÖRNEK SORULAR VE ÇÖZÜMLERİ

Soru 1: 4 simetrik para bir kez atılsın. X rastgele değişkeni turaların sayısını göstersin. X'in olasılık fonksiyonunu ve dağılım fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: Bir paranın 4 kez atılması halindeki örnek uzayı yazalım

S={TYYY, TYYT,TYTY, TYTT,TTYY,TTYT, TTTT, TTTY, YYYY, YYYT, YYTT, YYTY, YTYY, YTYT, YTTY, YTTT}

X=x	0	1	2	3	4
f(x)= P(X=x)	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16
F(x)=P(X≤x)	1/16	5/16	11/16	15/16	1

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1/16 & 0\leq x<1 \\ 5/16 & 1\leq x<2 \\ 11/16 & 2\leq x<3 \\ 15/16 & 3\leq x<4 \\ 1 & x\geq 4 \end{cases}$$

Soru 2: X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi verilmektedir. C değerini hesaplayınız ve hesaplanan C değerine göre olasılık fonksiyonunu tekrar yazınız.

X=x	0	1	2	3	4	5	6	7
f(x)= P(X=x)	0	C	2C	2C	3C	C^2	$2C^2$	$7C^2 + C$

Çözüm: $0+ C + 2C + 2C + 3C + C^2 + 2C^2 + 7C^2 +C =1$ olmalıdır.

Dolayısıyla $10C^2 + 9C =1$ $C= 1/10$

X=x	0	1	2	3	4	5	6	7
f(x)= P(X=x)	0	1/10	2/10	2/10	3/10	1/100	2/100	17/100

Soru 3: İki tane 6 yüzlü zar atılmaktadır. Üste gelen yüzlerdeki sayıların toplamına ilişkin olasılık fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

Üst yüze gelen sayılar için örnek uzay S={(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1),…., (3,1), …(4,1),…, (5,1), …., (6,1), ……,(6,6)}

X= üst yüze gelen sayıların toplamına eşit olduğu için, X'in alacağı değerler: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

X=x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f(x)= P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Soru 4: Sağlık hizmetleri araştırmacısı tarafından bir kliniğe ailelerin yaptıkları yıllık ziyaretlerin sayısının olasılık dağılımı aşağıdaki gibi verilmiştir.

Ziyaretlerin Sayısı	**f(x), P(X=x)**
0	0.30
1	0.40
2	0.20
3	0.06
4	0.04

a) F(x) dağılım fonksiyonunu bulunuz.
b) E(X) beklenen değerini hesaplayınız.
c) Var(X) değerini bulunuz.

Çözüm: a)

Ziyaretlerin Sayısı	**f(x), P(X=x)**	**F(x), P(X≤x)**
0	0.30	0.30
1	0.40	0.70
2	0.20	0.90
3	0.06	0.96
4	0.04	1.00

b) M = E(X)= 0 x (0.30) + 1 x (0.40) + 2 x (0.20) + 3 x (0.06) + 4 x (0.04) = 1.14

c) $Var(X)= E(X^2) - E(X)^2$

$E(X^2)= 0^2 \text{ x } (0.30) + 1^2 \text{ x } (0.40) + 2^2 \text{ x } (0.20) + 3^2 \text{ x } (0.06) + 4^2 \text{ x } (0.04)$

$Var(X)= E(X^2) - E(X)^2$ 'den =1.084

Soru 5: Bir X rasgele değişkeni için aşağıdaki dağılım fonksiyonu verilmiştir. X değişkeni için olasılık fonksiyonunu bulunuz.

$$F(x)= \begin{cases} 0 & x<-1 \\ 1/3 & -1\leq x<0 \\ 5/6 & 0\leq x<2 \\ 1 & x\geq 2 \end{cases}$$

Çözüm:

$X=-1$ için→ 1/3-0=1/3

$X=0$ için→ 5/6-1/3=3/6=1/2

$X=2$ için→1-5/6=1/6

X=x	-1	0	2
P(X=x)	1/3	1/2	1/6

Soru 6: 1'den 10'a kadar tam sayılar arasından rasgele seçilen bir sayının bölen sayısı X olsun. X'in ve X^2'nin beklenen değerlerini hesaplayınız.

Çözüm:

Tam Sayılar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Bölen Sayısı	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4

X'in olasılık fonksiyonu;

X=x	1	2	3	4
f(x), P(X=x)	1/10	4/10	2/10	3/10

$E(X)= 1 \times 1/10 + 2 \times 4/10 + 3 \times 2/10 + 4 \times 3/10 = 27/10$

$E(X^2)= 1^2 \times 1/10 + 2^2 \times 4/10 + 3^2 \times 2/10 + 4^2 \times 3/10 =83/10$

Soru 7: X, bir paranın birkez atılmasında elde edilen turaların sayısını, Y, iki paranın bir kez atılmasında elde edilen turaların sayısını gösterirse, X ile Y rasgele değişkenlerinin varyaslarını hesaplayınız ve karşılaştırınız.

Çözüm:

S={Y, T} →X ya hiç tura gelmemesi durumunu yani X=0 durumunu 1/2 olasılıkla ya da bir kez tura gelmesi durumunu yani X=1 durumunu 1/2 olasılıkla alır.

X=x	0	1
P(X=x)	1/2	1/2
E(X)= $E(X^2)$=	$0 \times 1/2 + 1 \times 1/2 = 1/2$ $0^2 \times 1/2 + 1^2 \times 1/2 = 1/2$	

S={YY, YT,TY, TT} → Y ya hiç tura gelmemesi durumunu yani X=0 durumunu 1/4 olasılıkla , ya bir kez tura gelmesi durumunu yani X=1 durumunu 2/4=1/2 olasılıkla ya da iki kez tura gelmesi durumunu yani X=2 durumunu 1/4 olasılıkla alır.

Y=y	0	1	2

P(X=x)	1/4	1/2	1/4
E(X)=	0 x 1/4 + 1 x 1/2 + 2 x 1/4= 1		
$E(X^2)$=	0^2 x 1/4 + 1^2 x 1/2 + 2^2 x 1/4= 3/2		

$Var(X)= E(X^2) - E(X)^2$ 'den = 1/4

$Var(Y)= E(Y^2) - E(Y)^2$ 'den = 1/2

2 x Var(X)=Var(Y)'dir.

Soru 8: X ve Y sürekli rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu f(x,y)= 3y, 0<x<y<1 olsun. X'in ve Y'nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm:

X'in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu ;

$f(x)=\int_x^1 3y\, dy = \frac{3y^2}{2} \mid {}_x^1 = \frac{3}{2} - \frac{3x^2}{2} = \frac{3}{2}(1-x^2)$

Y'nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu ;

$g(y)=\int_0^y 3y dx = 3y \mid {}_0^y = 3y^2 - 0 = 3y^2$

Soru 9: X sürekli rasgele değişkeni için aşağıdaki fonksiyon tanımlanmıştır. Fonksiyonun olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için c değeri kaç olmalıdır?

$$f(x)= \begin{cases} cx & 0< x \leq 1 \\ 0 & \text{diğer x değerleri için} \end{cases}$$

Çözüm:

X'in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu ;

$f(x)=\int_0^1 cx\, dx = 1\, olmalıdır. \int_0^1 cx\, dx = \frac{cx^2}{2} \mid {}_0^1 = \frac{c}{2} - 0 = 1'den\; c = 2\, olmalıdır.$

Soru 10: Aşağıdaki gibi olasılık yoğunluk fonksiyonu verilen X sürekli rasgele değişkeni için Dağılım fonksiyonununu (F(x)) bulunuz ve F(5)'i hesaplayınız.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{27}x^2, & 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & diğer\ x\ değerleri\ için \end{cases}$$

Çözüm:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{0}^{x} \frac{3}{27}x^2 dx = = \frac{3}{27}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^x = \frac{3}{27}\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{27}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{x^3}{27} & 0\leq x<3 \\ 1 & x>3 \end{cases}$$

$$F(5)=\frac{5^3}{27} = 4.62$$

Soru 11: Aşağıdaki gibi olasılık yoğunluk fonksiyonu verilen X sürekli rasgele değişkeni için P(1≤ x ≤ 2) olasılığını bulunuz.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{27}x^2, & 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & \textit{diğer x değerleri için} \end{cases}$$

Çözüm:

$$p\,(1 \leq x \leq 2) = \int_{1}^{2} \frac{3}{27}x^2 dx = \frac{3}{27}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{3}{27}\left(\frac{2^3}{3}\right) - \frac{3}{27}\left(\frac{1^3}{3}\right) = \frac{8}{27} - \frac{1}{27} = \frac{7}{27} = 0.26$$

Soru 12: Olasılık yoğunluk fonksiyonu f(x)= $\frac{3}{8}x^2$, $0 \leq x \leq 2$ olan X sürekli rasgele değişkeni için beklenen değeri E(X) ve $E(X^2)$'yi bulunuz.

Çözüm:

$$E(X) = \int_0^2 x f(x)\, dx = \int_0^2 \frac{3}{8}x^3\, dx = \left.\frac{3x^4}{32}\right|_0^2 = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{3}{8}x^4 = \frac{3x^5}{40}\Big|_0^2 = 2.4$$

Soru 13: Klima üniteleri için rezidanslarda ve ofis bloklarında hizmet veren bir firma, teknisyenlerini en verimli şekilde nasıl programlayabilecekleriyle ilgileniyor. Servis süresi (X) kesikli rasgele değişkeni, 1,2,3 and 4, değerlerini almakta ve Klimadaki ünite sayısı (Y) rasgele değişkeni de 1,2 and 3 değerlerini almaktadır. f(x,y) aşağıdaki gibi verilmiş olsun. P(X=2), P(Y=3) ve E(XY)'yi hesaplayınız.

Y=Ünite Sayısı	X= Servis Zamanı			
	1	2	3	4
1	0.12	0.08	0.07	0.05
2	0.08	0.15	0.21	0.13
3	0.01	0.01	0.02	0.07

Çözüm:

P(X=2)=0.08+0.15+0.01=0.24

P(Y=3)= 0.01 + 0.01 + 0.02 + 0.07 =0.11

E(XY)= 1 x 1 x 0.12 + 1 x 2 x 0.08 + 1 x 3 x 0.07 + 1 x 4 x 0.05+ 2 x 1 x 0.08 + 2 x 2 x 0.15 + 2 x 3 x 0.21 + 2 x 4 x 0.13 + 3 x 1 x 0.01 + 3 x 2 x 0.01 + 3 x 3 x 0.02 + 3 x 4 x 0.07

= 0.12 + 0.16 + 0.21 + 0.2 + 0.16 + 0.6 + 1.26 + 1.04 + 0.03 + 0.06 + 0.18 + 0.84

= 4.86

Soru 14:

$$f(x,y) = \begin{cases} k(6-x-y), & 0 \le x \le 2, 2 < y \le 4 \\ 0, & diğer \end{cases}$$

f(x,y) nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu olması için k ne olmalıdır? Buna göre P(X+Y≤3) olasılığını hesaplayınız.

Çözüm

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 0 \quad \text{olmalı. Buradan;}$$

$$\int_{0}^{2}\int_{2}^{4} k(6-x-y)dydx = 1 \Rightarrow k\int_{0}^{2}(6-x^2)dx = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{8}$$

P(X+Y≤3) =

$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=2}^{3-x} \frac{1}{8}(6-x-y)dydx = \frac{5}{24}$$

Soru 15: f(x,y) = $\begin{cases} 1/18xy, & x = 0,1,2 \text{ ve } y=0,1,2,3 \\ 0, & \text{diğer x değerleri için} \end{cases}$

X ve Y kesikli rasgele değişkenleri için f(x,y) ortak olasılık fonksiyonları yukarıda görüldüğü gibi verilmiştir. X ve Y kesikli rassal değişkenlerinin marjinal olasılık fonksiyonlarını ve P(1 ≤ X ≤ 2, 1 ≤ Y ≤ 2) olasılık değerini bulunuz.

Çözüm:

$$g(x) = \sum_{y=0}^{3} \frac{1}{18}xy = \frac{1}{18}x(0+1+2+3) = \frac{1}{3}x \quad x = 0,1,2$$

$$\Rightarrow)\ g(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x & x = 0,1,2 \\ 0 & diğer \end{cases}$$

$$h(y) = \sum_{x=0}^{2} \frac{1}{18}xy = \frac{1}{18}y(0+1+2) = \frac{1}{6}y \quad y = 0,1,2,3$$

$$\Rightarrow h(y) = \begin{cases} \frac{1}{6}y & y = 0,1,2,3 \\ 0 & diğer \end{cases}$$

$$P(1 \le x \le 2, 1 \le y \le 2) = \sum_{x=1}^{2}\sum_{y=1}^{2} \frac{1}{18}\mathrm{xy} = \frac{1}{18}\sum_{x=1}^{2} \mathrm{x}(1+2) = \frac{3}{18}\sum_{x=1}^{2} \mathrm{x} = \frac{3}{18}(1+2) = \frac{1}{2}$$

Soru 16:

X ve Y rassal değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & diğer \end{cases}$$

veriliyor.

i) X rassal değişkeninin marginal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz

ii) Y rassal değişkeninin marginal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz

Çözüm:

$$\boldsymbol{i})\ g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{0}^{\infty} xe^{-(x+y)}\,dy = xe^{-x}\int_{0}^{\infty} e^{-y}\,dy = xe^{-x}$$

$$g(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & diğer \end{cases}$$

$$\boldsymbol{ii})\ h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{0}^{\infty} xe^{-(x+y)}\,dx = e^{-y}\int_{0}^{\infty} xe^{-x}\,dx = e^{-y}$$

$$h(y) = \begin{cases} e^{-y} & y > 0 \\ 0 & diğer \end{cases}$$

Soru 17:

(X,Y) ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(6-x-y), & 0<x\le 2,\ 2\le y\le 4\\ 0, & diğer\end{cases}$$

veriliyor. Aşağıdakileri bulunuz

i) E(X) **ii)** E(Y) **iii)**E(X+Y) **iV)** E(XY)

Çözüm:

$$\boldsymbol{i})\ E(X)=\int_{x=0}^{2}\int_{y=2}^{4} x\frac{1}{8}(6-x-y)\,dxdy=\frac{1}{8}\int_{x=0}^{2} xdx\left(6y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_2^4=\frac{1}{8}\int_{x=0}^{2} x(6-2x)dx$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{6x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^2=\frac{5}{6}$$

$$\boldsymbol{ii})\ E(Y)=\int_{x=0}^{2}\int_{y=2}^{4} y\frac{1}{8}(6-x-y)\,dxdy=\frac{1}{8}\int_{x=0}^{2}\int_{y=2}^{4}(6y-xy-y^2)dxdy$$

$$=\frac{1}{8}\int_{x=0}^{2}\left(6\frac{y^2}{2}-x\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{2}\right)\Big|_2^4 dx=\frac{1}{8}\int_{x=0}^{2}\left(\frac{52}{3}-6x\right)dx=\frac{1}{8}\left(\frac{52}{3}x-6\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2=\frac{17}{6}$$

$$\boldsymbol{iii})\ E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{5}{6}+\frac{17}{6}=\frac{11}{3}$$

$$\boldsymbol{iv})\ E(XY)=\int_{x=0}^{2}\int_{y=2}^{4} xy\frac{1}{8}(6-x-y)=\frac{1}{8}\int_{x=0}^{2}\int_{y=2}^{4}(6xy-x^2y-xy^2)dydx=\frac{7}{3}$$

Soru 18:

X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} cx & , \quad x = 1,2,3,4 \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

olmak üzere,

a) c değerini hesaplayınız.

b) $E(X) = ?$

c) $Var(X) = ?$

d) $P(X = 1) = ?$

e) $P(2 < X \leq 4) = ?$

f) $P(X \leq 3) = ?$

Çözüm:

a) f fonksiyonunun olasılık fonksiyonu olması için,

$$\sum_x f_X(x) = 1$$

şartını sağlaması gerekir. Buna göre,

$\sum_{x=1}^{4} cx = 1$ olmalıdır. Yani,

$c.1 + c.2 + c.3 + c.4 = 1$

$10.c = 1$

$c = \frac{1}{10}$

olmalıdır. Buna göre,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x & , \quad x = 1,2,3,4 \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

X	1	2	3	4
$P(X = x)$	0.1	0.2	0.3	0.4

biçiminde yazılabilir.

b) $E(X) = \sum_{x=1}^{4} xf(x)$

$= 1 \times 0.1 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.4$

$= 0.1 + 0.4 + 0.9 + 1.6$

$= 3$

c) $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{4} x^2 f(x)$$

$$= 1 \times 0.1 + 2^2 \times 0.2 + 3^2 \times 0.3 + 4^2 \times 0.4$$

$$= 0.1 + 0.8 + 2.7 + 6.4$$

$$= 10$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= 10 - 3^2$$

$$= 1$$

d) $P(X = 1) = 0.1$

e) $P(2 < X \leq 4) = P(X = 3) + P(X = 4)$

$$= 0.3 + 0.4 = 0.7$$

f) $P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$$= 0.1 + 0.2 + 0.2 = 0.6$$

Soru 19:

$Y = 3X - 5,\ E(X) = 4,\ Var(X) = 2$ olmak üzere Y rasgele değişkeninin beklenen değer ve varyansını bulunuz.

Çözüm:

$$E(Y) = E(3X - 5)$$

$$= 3E(X) - 5$$

$$= 3.4 - 5 = 12 - 5 = 7$$

$$Var(Y) = Var(3X - 5)$$

$$= 9Var(X) = 9 \times 2 = 18$$

Soru 20:

$Y = X^2 + 3X$ ve $E(X) = 10, Var(X) = 6$ olmak üzere $E(Y) =?$

Çözüm:

$$\mathrm{E(Y)} = \mathrm{E}(X^2 + 3X)$$

$$Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

$$6 = E(X^2) - 100$$

$$E(X^2) = 106$$

$$\mathrm{E}(X^2 + 3X) = E(X^2) + 3E(X)$$

$$= 106 + 3 \times 10 = 136$$