İSTATİSTİK VE İHTİMALLER TEORİSİ

OLASILIĞA GİRİŞ
BAZI OLASILIK KURALLARI
BAĞIMSIZ OLAYLAR
BAYES TEOREMİ

Dr. Öğr. Üyesi Fatma Zehra Göğüş

OLASILIĞA GİRİŞ

Şans değişmelerine bağlı hemen hemen bütün gözlemleri (bazı kimseler tümünü söylemektedir); bu şans değişmelerinin doğal özelliklerini incelemek **olasılık kuramıdır**.

Örneğin, 1'den 6'ya kadar numaralandırılmış 6 yüzlü düzgün bir zar atıldığında 3 ile numaralandırılmış yüzün üste gelmesi şansını öğrenmek isteyebiliriz. 52 kartlık bir desteden bir kart çekildiğinde as çekme şansımızı öğrenmek isteyebiliriz. X marka bilgisayarın hiç servis gerektirmeden 100000 saat çalışma ihtimalini bilmek isteyebiliriz. Bir barajın ömrünün 50 yıl olduğu kabul edilirse , bu süre içinde bir taşkın görülmesi ihtimalini bilmek isteyebiliriz. Tüm bu örneklerde ve daha birçok alanda bilmek, öğrenmek istediklerimiz olasılık kuramı ile ilgilidir.

BİR OLAYIN OLASILIĞI

Tanım-1: Bir deney, eşit olasılıklı N farklı sonuç verirse ve bu sonuçların M tanesi bir A olayına uygun ise, A olayının P(A) ile gösterilen gerçekleşme olasılığı;

$$P(A) = \frac{\text{Uygun sonuçların sayısı}}{\text{Örnek uzaydaki tüm sonuçların sayısı}} = \frac{M}{N}$$

Örnek: Bir zar atıldığında çift sayı gelmesi olasılığı nedir?

Çözüm: S={1,2,3,4,5,6}'dır. A="Çift sayı elde edilmesi olayı". A={2,4,6}

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\text{'dir.}$$

BİR OLAYIN OLASILIĞI

Örnek: 1’den 10’a kadar numaralanmış 10 top , bir torbanın içine atılıyor. Topların ikisi rasgele çekiliyor. 3 ve 7 numaralı topların çekilmiş olması olasılığı nedir?

Çözüm: 10 top içerisinden bir defada iki topun seçimlerinin sayısı:

C(10,2)= $\binom{10}{2}$ =45 ‘dir.

İkili seçimlerden her biri eşit olasılıklı olduğundan, P(3 ve 7)= $\frac{1}{45}$’dir.

Eğer soru şu şekilde olsaydı;

Çekilen top yine geri atılacak şekilde seçilen iki topun 3 ve 7 olma olasılığı nedir?

P(3 ve 7)= P(3)*P(7) + P(7)*P(3)= $\frac{1}{10} * \frac{1}{10} + \frac{1}{10} * \frac{1}{10} = \frac{1}{50}$ olurdu.

BİR OLAYIN OLASILIĞI

Örnek: Bir çift zar atılsın. Toplamın 8 gelmesi olasılığı nedir? Bu deneyin örnek uzayında (6*6)= 36 nokta vardır. Burada 8 gelmesi olayı A olsun.

Çözüm: A = {(2,6),(3,5),(5,3),(4,4),(6,2)} uygun sonuçlar kümesi için P(A)= $\frac{5}{36}$

Örnek: **"KARADUT"** sözcüğünün bir permütasyonunda iki "A" nın yan yana gelme olasılığını bulunuz.

Çözüm: Koşul olmadan "KARADUT" sözcüğündeki tüm harflerin permütasyonu N= $\frac{7!}{2!*1!*1!*1!*1!*1!}$ (Tümü birbirinden farklı olmayan nesnelerin permütasyonu).

İki "A" yan yana geldiğinde uygun sonuçların sayısı M=6!'dir. (İki A'nın kendi aralarında yer değiştirmesi kelimeyi değiştirmeyeceği için permütasyonu etkilemez)

P= $\frac{6!}{\frac{\mathbf{7!}}{\mathbf{2!*1!*1!*1!*1!*1!}}} = \frac{2}{7}$

BİR OLAYIN OLASILIĞI

Örnek: : Bir müteahhit iki yapının yapım işini yükleniyor. Her yapım için 3 olasılık vardır.

A: Yapının 1 yıl içinde bitmesi

B: Bitmesinin kuşkulu olması

C: Kesinlikle bitmemesi

Bu olasılıkların eşit olduğunu varsayarak 1 yıl sonunda 2 yapım için örnek uzayımız şöyle olur:

S={AA,AB,AC,BA,BB,BC,CA,CB,CC}→9 örnek noktadan oluşur.

Sadece 1. yapının tamamen bitmesi olasılığı: 2/9 {AB,AC}

Sadece 2. yapının tamamen bitmesi olasılığı: 2/9 {BA,CA}

Sadece herhangi bir yapının tamamen bitmesi olasılığı: 4/9 {AB,AC,BA,CA}

1. Yapının bitme olasılığı: 3/9=1/3 {AA,AB,AC}

OLASILIK AKSİYOMLARI

D bir deney ve S bu deneyin örnek uzayı olsun. O halde S deki bir A olayının P(A) olasılığıyla ilgili aşağıdaki aksiyomlar vardır.

A1. $P(A) \geq 0$

A2. $P(S) = 1$

A3. A1, A2, …, An, … bir S uzayında sonlu ya da sonsuz sayıda ikişerli **ayrık olaylar** dizisi olsun. Bu durumda

$P(A1 \cup A2 \cup ...) = P(A1) + P(A2) + ...$ dir.

OLASILIĞIN FREKANS TANIMI

Tanım-2: Bir deney n kez yapıldığında bir A olayı f kez gerçekleşirse, f/n oranına A olayının relatif frekansı denir. n artarken f/n relatif frekansının bir limite yaklaştığını kabul edersek, bu limite A nın olasılığı denir.

Uygulamada büyük n ler için A nın olasılığı f/n ile hesaplanır.

Örnek: Bir zarın 100 kez atılmasından sonra aşağıdaki sonuçlar bulunmuştur. Zarın 1 gelmesi olasılığı nedir?

Bulunan Sayı	Frekans
1	21
2	18
3	14
4	17
5	10
6	20

n= 21+18+14+17+10+20=100

Çözüm: $\frac{f}{n} = \frac{21}{100}$

BAZI OLASILIK KURALLARI

Teorem-1: A1 ve A2, bir S örnek uzayında A1 ⊂ A2 olacak biçimde iki olay ise P(A1) ⊂ P(A2) dir.

Teorem-2: Herhangi bir A ⊂ S olayı için P(A) ≤1 dir. **NOT:** P(S)=1

Teorem-3: A, bir S örnek uzayında herhangi bir olay olsun.

P (A) = 1 - P (A ') dır

Örnek: Bir para 3 kez atılsın. En az bir kez tura gelmesi olasılığını bulunuz.

S={TTT, YTT, TYT, TTY, YYT, YTY, TYY, YYY}

A olayına uygun 7 örnek noktası vardır. Bu nedenle istenen olasılık; $\frac{7}{8}$ ‘dir.

Bir başka çözüm ise;

P(A)=1-P(A’) olduğundan, A yı düşündüğümüz gibi A’nın tümleyenini de düşünebiliriz. A' ne uygun yalnız bir örnek noktası YYY vardır. Buna göre,

P(A’)= $\frac{1}{8}$

P(A)=1- P(A ')

P(A)=1- $\frac{1}{8}$ = $\frac{7}{8}$ dir.

BAZI OLASILIK KURALLARI

Teorem-4: P(Ø)=0 dır.

Teorem-5: Bir S örnek uzayındaki A ve B olayları için

$$\boxed{P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B') \text{ dir.}}$$

Teorem-6: A ve B, S örnek uzayında iki olay olsun.

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ dir.}}$$

Örnek: İki zarın bir kez atılışında toplamın 7 ya da 10 gelmesi olasılığı nedir?

Çözüm: Toplamın 7 olması olayı A, toplamın 10 olması olayı B olsun.

A olayına uygun örnek noktalar: A= {(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)}

B olayına uygun örnek noktalar: B= {(4,6), (5,5), (6,4)}

$$A \cap B = \emptyset, \ P(A \cap B) = 0$$

A ve B olayları için: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{6}{36} + \frac{3}{36} - 0 = \frac{1}{4} \text{ 'tür.}$$

Veya A ve B olayları zaten ayrık olduğu için doğrudan $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ yazabiliriz.

$$P(A \cup B) = \frac{6}{36} + \frac{3}{36} = \frac{1}{4} \text{ 'tür.}$$

BAZI OLASILIK KURALLARI

Örnek: 52 kartlık standart bir desteden rasgele bir kart çekildiğinde, bu kartın bir birli (As) veya karo olması olasılığı nedir?

“Karo çekilmesi” olayı A, “Birli (As) çekilmesi” olayı B olsun. Bu örnek uzayda 52 örnek nokta vardır

Not: 52’lik bir destede 13 adet Karo bulunur. Üzerinde 1 sayısı olan kartlara "as" denmektedir ve 52’lik bir destede 4 adet As bulunmaktadır. Karo olup üzerinde 1 yazan yani hem karo hem as olan 1 adet kart vardır.

Çözüm: $P(A) = \frac{13}{52}$, $P(B) = \frac{4}{52}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$ dir.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52}$$ ‘dir.

BAZI OLASILIK KURALLARI

Sonuç: E1, E2, E3, bir S örnek uzayında 3 olay ise,

$$\boxed{\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = {} & P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) \\ & - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \end{aligned}}$$

Teorem-7: Aj ler (j=1, 2, …, n) bir S örnek uzayında olaylarsa

$$\boxed{P\left(\bigcup_{j=1}^{n} Aj\right) \leq \sum_{j=1}^{n} P(Aj)}$$

KOŞULLU OLASILIK

Tanım-3: A ve B, bir S örnek uzayında iki olay olsun. B verilmişken, A olayının koşullu olasılığı P(A/B) aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$ (B verilmişken, A olayının koşullu olasılığı, P(B) ≠ 0)

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$ (A verilmişken, B olayının koşullu olasılığı, P(A) ≠ 0)

$$P(A\cap B) = P(B)*P(A/B),$$

$P(A\cap B)= P(B\cap A)$olduğundan dolayı;

$$P(A\cap B) = P(A)*(B/A)$$

Bu kuralı genellersek, A1, A2, …, An olayları bir deneyin S örnek uzayında ise;

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n) = P(A_1).P(A_2/A_1).P(A_3/A_1\cap A_2)\ldots .P(A_n/A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}) \quad \text{dir.}$$

Örnek: Bir fabrikada üretilen parçalardan kusursuz 40 tanesi ve kusurlu 10 tanesi bir depoya konuyor. Çekilen yine yerine koyulmaksızın sırayla rasgele iki parça seçildiğinde her iki parçanın da kusurlu olması olasılığı nedir?

Çözüm: A olayı: İlk parça kusurludur, B olayı: İkinci parça kusurludur.

$P(A)=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}$ ve $P(B/A)=\frac{9}{49}$, $\quad P(A\cap B) = P(A)*(B/A) = \frac{1}{5}*\frac{9}{49}=\frac{9}{245}$

KOŞULLU OLASILIK

Örnek: 52 kartlık bir desteden yerine koymaksızın 3 kart çekiliyor. Bu üç kartında as olması olasılığı nedir? (52'lik bir destede 4 tane As vardır)

Çözüm: Aşağıdaki olaylar tanımlansın

A1: İlk kart bir astır.

A2: İkinci kart bir astır.

A3: Üçüncü kart bir astır.

P(A1)= $\frac{4}{52}$, P(A2/A1)= $\frac{3}{51}$ ve P(A3/A1∩A2)= $\frac{2}{50}$ dir

A1∩A2∩A3 olayının olasılığı; ilk çekilişte as bulma olasılığı; ilk çekilişte as bulunduğu verilmişken ikinci çekilişte as bulunması olasılığı; birinci ve ikinci çekilişlerde as bulunduğu verilmiş üçüncü çekilişte as bulunması olasılığının çarpımlarına eşittir.

P(A1∩A2∩A3)=P(A1)*P(A2/A1)*P(A3/A1∩A2)= $\frac{4}{52}*\frac{3}{51}*\frac{2}{50}=\frac{24}{132600}$

= 0,000181

KOŞULLU OLASILIK

Örnek: Bir çerçeve iki temel üzerine oturmaktadır. Temellerden her birinin çökme olasılığı 0.1 dir. Temellerden biri çöktüğünde diğerinin çökme olasılığı 0.8 dir. Çerçevelerin iki temelinin de aynı anda çökme olması olasılığını hesaplayınız.

Çözüm: $P(A) = P(B) = 0.1$

$P(A/B) = P(B/A) = 0.8$

Çerçevenin temellerinde çökme olasılığı; $P(AUB)= ?$

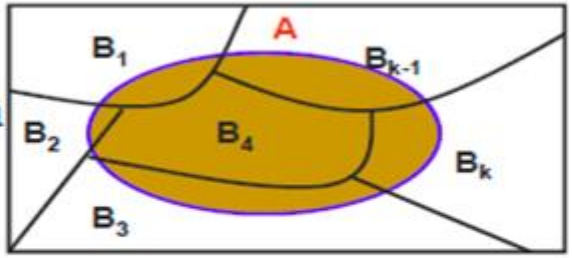
$P(AUB) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = P(A/B) \,.\, P(B) = 0.8 * 0.1 = 0.08$

$P(AUB) = 0.1 + 0.1 – 0.08 = 0.12$

ÖRNEK UZAYIN PARÇALANIŞI VE TOPLAM OLASILIK FORMÜLÜ

Tanım-4



$a)\ B_i \cap B_j = \varnothing$ tüm i ≠ j'ler için

$b)\ \bigcup_{i=1}^{k} B_i = S$

$c)\ P(B_i) > 0$ tüm i'ler için

ise $B_1, B_2, \ldots, B_k$ olaylarına S örnek uzayının bir parçalanışı denir.

Bir parçalanış altında olasılıklar: B1, B2, …, Bk sonlu bir S örnek uzayının bir parçalanışı ise;

P(B1)+P(B2)+….+P(Bk)=1 olur.

Teorem-8: $B_1, B_2, \ldots, B_k$ olayları bir S örnek uzayının bir parçalanışı ise S'deki herhangi bir A olayı için

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A/B_i)}$$ dir.

ÖRNEK UZAYIN PARÇALANIŞI VE TOPLAM OLASILIK FORMÜLÜ

Örnek: Bir depoda 20 kusurlu 80 kusursuz elektrik ampulü bulunsun. Yerine koymaksızın 2 ampul seçelim. İkinci seçilen ampulün kusurlu olması olasılığını bulunuz. (ilk seçilen ampul ile ilgili herhangi bir durum belirtmiyor (kusurlu veya kusursuz olarak belirtilmiyor)). Bu durumda;

Çözüm: B1= {İlk seçilen kusurludur} $(\frac{20}{100}) = \frac{1}{5}$

B2= {İlk seçilen kusursuzdur} $(\frac{80}{100}) = \frac{4}{5}$

A= {İkinci seçilen kusurludur}

P(istenen_olay)= P(A∩B1)+ P(A∩B2)

P(A) olasılığı; P (A) = P (B1) P (A/B1) + P (B2) P (A/ B2)

$$= \frac{1}{5} * \frac{19}{99} + \frac{4}{5} * \frac{20}{99} = \frac{1}{5}$$

ÖRNEK UZAYIN PARÇALANIŞI VE TOPLAM OLASILIK FORMÜLÜ

Örnek: Belli bir alet 3 fabrika tarafından üretilmektedir. 1 no'lu fabrikada hem 2 hem de 3 no'lu fabrikalardaki üretimin 2 katı kadar alet üretildiği bilinmektedir. Yine bilinenlere göre 1 ve 2 no'lu fabrikalardaki üretimin 0,02'si, 3 no'lu fabrikadaki üretimin 0.04'ü kusurludur. Üretilen aletlerin tümü bir depoya konuyor, sonra rasgele bir alet seçiliyor. Bu aletin kusurlu bir alet olması olasılığı nedir?

1.Fab → 2k ürün üretilsin, 2. Fab→k ürün üretilsin, 3. Fab→k ürün üretilsin

Çözüm: A ={Alet kusurludur}

B1={Alet 1 no'lu fabrikadan alındı} $\frac{2k}{4k}$

B2={Alet 2 no'lu fabrikadan alındı} $\frac{k}{4k}$

B3={Alet 3 no'lu fabrikadan alındı} $\frac{k}{4k}$

$$P(B_1) = \frac{1}{2}, \qquad P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{4}$$

$$P(A/B_1) = 0.02, \qquad P(A/B_2) = 0.02, \qquad P(A/B_3) = 0.04$$

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_3)P(A/B_3)$$
$$= 0.025$$

BAĞIMSIZ OLAYLAR

Tanım-5: Bir olayın vuku bulması bir başka olayın gerçekleşme şansına bağlı değilse, böyle olaylara bağımsız olaylar denir. Başka bir ifadeyle bir olayın elde edilmesi, diğerinin elde edilmesi olasılığını etkilemiyorsa böyle olaylara bağımsızdırlar denir.

A ve B olayları bağımsız ise;

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A).P(B)\text{' dir.}}$$

Bir başka ifadeyle söylenebilir ki;

A ve B olaylarının bağımsız olması için gerek ve yeter koşul

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A).P(B)\text{' dir.}}$$

Teorem-9: A ve B ($P(A) \neq 0$ ve $P(B) \neq 0$) bağımsız olaylarsa A ve B kümelerinin en az bir ortak örnek noktası vardır. Yani $A \cap B \neq \emptyset$'dir.

BAĞIMSIZ OLAYLAR

Örnek: Bir para iki kez atılsın ve aşağıdaki olayları tanımlansın.

A= {İlk atışta tura gelmesi}

B= {İkinci atışta tura gelmesi}

Bu iki olay bağımsız mıdır?

Çözüm:

Burada, S={TT,TY,YT,YY}

A = {TT,TY} ve B={TT,YT}, $A \cap B$ ={TT} ≠ ∅ dir.

P(A)=2/4=1/2, P(B)=2/4=1/2, $P(A \cap B)=1/4$

$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$ midir?

$= 1/2 * 1/2 = 1/4$

İki olay bağımsız olaylardır.

NOT: Bağımsız olaylar ile ayrık olaylar karıştırılmamalıdır. Bağımsız olaylarda $A \cap B \neq \emptyset$'dır. Ayrık olaylarda ise $A \cap B = \emptyset$'dir.

BAĞIMSIZ OLAYLAR

Örnek: Aynı anda iki zar atalım (r,b), zarların yüzlerindeki sayılar toplamının 11 (r+b=11) ve aynı anda $r \neq 5$ olması olasılığı nedir?

İki zar deneyi için örnek uzay

(r , b)	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Çözüm: Örnek uzayda r+b=11 olan örnek noktaları: (5,6) ve (6,5)

Bu iki elemanlı kümeyi E ={(5,6), (6,5)} ile gösterirsek,

$$P(E) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$r \neq 5$ ile tanımlanan olay F olsun. F içinde 30 örnek nokta vardır.

$$P(F) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} \text{ dır.}$$

E ve F olayları aynı anda gerçekleşecek olaylar olduğundan ve yalnız (6,5) noktası ortak olduğu için;

$$P(E \cap F) = \frac{1}{36} \text{ dır.}$$

Bağımsız olay tanımına uyuyor mu test edelim.

$P(E \cap F) = P(E) * P(F)$ midir? $\frac{1}{18} * \frac{5}{6} \neq \frac{1}{36}$ dır. Bundan dolayı E ve F bağımlı olaylardır.

BAĞIMSIZ OLAYLAR

Sonuç: Üç ya da daha çok olay bağımsız olduklarında, onların aynı anda elde edilmelerinin olasılığı, olasılıklarının çarpımına eşittir. Örneğin E,F ve G bağımsızsa,

$$P(E \cap F \cap G) = P(E) * P(F) * P(G)$$

Eşitliği yazılır.

Teorem-10: E ve F bir S örnek uzayında bağımsız olaylar olsun. O halde, E ve F′, E′ ve F; E′ ve F′ bağımsızdırlar.

Tanım-6: (Olayların Tam Bağımsızlığı): m olayın tam bağımsız (karşılıklı bağımsız) olabilmeleri için gerek ve yeter koşul bir defada alınan herhangi bir sayıdaki olayın her bir kombinasyonunun bağımsız olmasıdır.

m=3 alındığında E_1, E_2, E_3 ‘ün tam bağımsızlığı için aşağıdaki denklemler sağlanmalıdır.

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1).P(E_2).P(E_3)$$

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1).P(E_2)$$

$$P(E_1 \cap E_3) = P(E_1).P(E_3)$$

$$P(E_2 \cap E_3) = P(E_2).P(E_3)$$

BAĞIMSIZ OLAYLAR

Uyarı: E1, E2, E3 olaylarını düşünelim. İkişer ikişer bağımsız olsunlar. Aşağıdaki örnekte görülebileceği gibi böyle ikişer ikişer bağımsızlık üç olayın bağımsızlığını gerektirmez.

Örnek: İki para atılsın. E1={İlk paranın tura gelmesi} olayı, E2={İkinci paranın tura gelmesi} olayı ve E3={Her ikisi de tura veya her ikisi de yazı} olayı olsun. E1 , E2 ve E3 olayları tam bağımsız mıdır?

Çözüm: S ={YT, TY, YY, TT}

E1={TT, TY}

E2={TT, YT}

E3={TT, YY}

E1∩E2∩E3= {TT}

$$P(E1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},\ P\ (E2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},\ P\ (E3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(E1\cap E2)=P(E1\cap E3)=P(E2\cap E3) = \frac{1}{4}$$

Görüldüğü üzere olaylar çifter çifter bağımsızdır. Ancak

$P(E1\cap E2\cap E3)= \frac{1}{4} \neq P(E1)*P(E2)*P(E3) \neq \frac{1}{2}*\frac{1}{2}*\frac{1}{2}$ olduğundan üç olay tam bağımsız değildir.

BAĞIMSIZ OLAYLAR

Örnek: İki zar atalım. S={ (x,y)| x=1,2,….,6; y=1,2,….,6} tüm sıralı çiftlerin örnek uzayı olsun. Aşağıdaki olayları tanımlayalım:

A={ ilk zar=1,2 veya 3}, B={ilk zar=3,4 veya 5}, C={ iki zar yüzeyindeki sayılar toplamı=9}.

A∩B, A∩C, B∩C, A∩B∩C olaylarının olasılıklarını bulunuz.

İki zar deneyi için örnek uzay

k\s	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Bu olayların bağımsızlık durumunu inceleyiniz.

Çözüm: A={(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)} → 18 örnek nokta var

B={(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)} → 18 örnek nokta var

C={(4,5),(5,4),(3,6),(6,3)} → 4 örnek nokta var

A∩B= {(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)} → 6 örnek nokta var

A∩C={(3,6)}, B∩C={(3,6), (4,5), (5,4)}, A∩B∩C={(3,6)} olarak yazılır.

BAĞIMSIZ OLAYLAR

Çözüm Devam: A∩B= {(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)}, A∩C={(3,6)}, B∩C={(3,6), (4,5), (5,4)}, A∩B∩C={(3,6)} olarak yazılır.

$$P(A\cap B)=\frac{6}{36}\neq P(A)P(B)=\frac{18}{36}*\frac{18}{36}=\frac{1}{2}*\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$P(A\cap C)=\frac{1}{36}\neq P(A)P(C)=\frac{18}{36}*\frac{4}{36}=\frac{1}{2}*\frac{1}{9}=\frac{1}{18}$$

$$P(B\cap C)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}\neq P(B)P(C)=\frac{18}{36}*\frac{4}{36}=\frac{1}{2}*\frac{1}{9}=\frac{1}{18}$$

elde edilir. Fakat

$P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{36}=P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*\frac{1}{9}=\frac{1}{36}$ dır. Görüldüğü gibi üç olay ikişer ikişer bağımsız değiller. Fakat üç olay için bağımsızlık eşitliği sağlanmaktadır. Tüm bu sonuçlara göre söylenebilir ki olaylar tam bağımsız değillerdir.

BAYES TEOREMİ

B1, B2, …, Bn'lar bir S örnek uzayının parçalanışı olsun. A, S içinde P(A) ≠ 0 olan bir olay ise;

$$P(Br/A) = \frac{P(A \cap Br)}{\sum_{i=1}^{k} P(A \cap Bi)} =$$

$$\boxed{P(B_r / A) = \frac{P(B_r)P(A / B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A / B_i)}}$$

BAYES TEOREMİ

Örnek: Cıvata üreten bir fabrikada toplam üretimin % 30'u A, % 30'u B, % 40'ı C makineleri tarafından yapılmaktadır. Bu makinelerin, sırasıyla üretimlerinin 1/100, 3/100 ve 2/100 ü kusurlu cıvatalardır. Bir günlük üretim sonunda bir cıvata seçiliyor ve kusurlu olduğu görülüyor. Bu cıvatanın A makinesi, B makinesi, C makinesinde üretilmiş olma olasılığı nedir?

Çözüm: E: Kusurlu cıvata

B1: Cıvata A makinesinde yapıldı

B2: Cıvata B makinesinde yapıldı

B3: Cıvata C makinesinde yapıldı.

Örnek uzayın parçalanışları

O halde;

P(B1)=0.30, P(B2)=0.30, P(B3)=0.40

P(E/B1)=0.01, P(E/B2)=0.03, P(E/B3)=0.02

$P(E \cap B1)=P(B1) * P(E/B1)=(0.30) * (0.01)=0.003$

$P(E \cap B2)=P(B2) * P(E/B2)=(0.30) * (0.03)=0.009$

$P(E \cap B3)=P(B3) * P(E/B3)=(0.40) * (0.02)=0.008$

Bayes Teoremi Kullanarak

$$P(B1/E)=\frac{P(E \cap B1)}{P(E \cap B1)+P(E \cap B2)+P(E \cap B3)}$$

$$=\frac{0.003}{0.003+0.009+0.008}=\frac{3}{20}$$

Benzer şekilde

$$P(B2/E)=\frac{0.009}{0.020}=\frac{9}{20}$$

$$P(B3/E)=\frac{0.008}{0.020}=\frac{8}{20}$$

BAYES TEOREMİ

Örnek: Kabul edelim ki iki kavanoz K1 ve K2 olarak numaralanmıştır. K1 de bir beyaz iki siyah top vardır; K2 de iki beyaz, üç siyah top vardır. I. kavanozdan bir top çekiliyor ve II.'ye atılıyor. II. Kavanozdan çekilen top siyah olduğuna göre I. Kavanozdan çekilen topun beyaz olması olasılığı nedir?

Çözüm: Aşağıdaki olaylar tanımlanabilir.

B1= K1'den beyaz top çekilmesi olayı

B2= K1'den siyah top çekilmesi olayı

A= K2'den siyah top çekilmesi olayı

K1	K2
1B 2S	2B 3S

$$P(B1/A)=\frac{P(B1)P(A/B1)}{P(B1)P(A/B1)+P(B2)P(A/B2)} = \frac{\frac{1}{3}*\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}*\frac{1}{2}+\frac{2}{3}*\frac{2}{3}} = \frac{3}{11}$$

$P(B1)=\frac{1}{3}$, $P(B2)=\frac{2}{3}$, $P(A/B1)= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (K1'den beyaz çekildiği bilindiğine göre, K1'den çekilen beyaz K2'ye atılınca K2'de 3B, 3S oldu)

$P(A/B2)= \frac{4}{6}= \frac{2}{3}$ (K1'den siyah çekildiği bilindiğine göre, K1'den çekilen siyah K2'ye atılınca K2'de 2B, 4S oldu)

KAYNAKLAR

Prof. Dr. Fikri AKDENİZ, Olasılık ve İstatistik, 22. Baskı, Akademisyen Kitabevi