

眼球運動を理解するための 電気数学

海老原世親

2025 年 4 月 13 日

目次

第 1 章	導入	4
1.1	はじめに	4
1.2	技術体系図	6
1.3	フィードバック機構	7
1.3.1	積分的負帰還システム	7
1.3.2	差分方程式とネイピア数の関係	9
1.3.3	道草-ネイピア数	11
1.3.4	差分方程式と微分方程式	12
1.3.5	h の解、フィードバックの成立	13
1.4	高速神経積分器	14
1.4.1	モデルの詳細化	14
1.4.2	固視ずれの登場	16
1.4.3	厳密解と時定数	16
1.4.4	パラメータの同定	18
第 2 章	固有関数と直交関数	22
2.1	マクローリン展開	23
2.1.1	導出	23
2.1.2	道草	24
2.2	フーリエ級数展開	25

2.2.1	導出	26
2.2.2	応用	27
2.3	三角関数の直交性	30
2.3.1	導出	30
2.3.2	道草-直交振幅変調	32
2.4	オイラーの定理	35
2.4.1	導出	36
2.4.2	応用	37
2.5	フーリエ変換	37
2.5.1	導出	37
2.5.2	応用	38
2.6	ラプラス変換	42
2.6.1	導出	42
第 3 章	Schor モデル	44
3.1	Schor モデル概観	44
3.2	プリズムアダプテーションの理解	44
3.3	複視の精密理解	44
3.4	静的斜位補正器への応用	44
3.5	動的斜位補正器の検討	44
第 4 章	斜視発症モデル	45
4.1	非線形システム論	45
4.2	45
参考文献		46

第 1 章

導入

1.1 はじめに

このノートは、眼球運動を数理的に理解していただくために書きました。

私はどういうわけか、先天性と思われる斜視を持ってしまいました。しかしそのため、数理的に、かつひょっとすると人跡未踏の世界を探検するという、人間に許された楽しみのうち最良の一つを享受することができました。これは、もちろん私を治療していただいたおかげです。以前は斜位近視や大角度の斜視によって、斜位や複視の理解どころではない状態だったからです。また、このように珍奇な、言い換えれば面倒くさい患者を邪険にせず良くしていただいたおかげでもあります。

私はエンジニアリングを日々の営みとしていますが、そこでは工具や測定器と並び、数学が強力な道具となっています。これは斜視学でも同じだと思います。つまり数学は手術器具や大型弱視鏡と同様に、使い甲斐のあるツールであると私は確信しています。幸い、私は眼球運動学で使えるような数学に対して多少の専門教育を受けてきましたので、先生方に還元できることがあると思います。もしお付き合いいただけるようでしたら、また願わくはちょくちょく、本書のレビューをいただけますと幸いです。ノートは読み手にわかりやすいものになって初めて、意味あるものとなるからです。

本書では眼球運動を理解する上での一大スタンダードと考えられる [9]、Schor モデルの理解を目指します。Schor モデルは制御工学の一分野である古典制御論を応用したものです。制御工学は、入力と出力を持つシステムについて、システムの中身 (モデル) を数理的に把握することを通じて、入出力の関係を自由自在に設計することを目的とした学問です。よって Schor モデルが理解できれば、より精密な診断や新しい視能訓練ができるかもしれません。

そして古典制御論では、具体的にはラプラス変換という解析学のツールを使います。よって本書では先ずラプラス変換の導出までご案内し、眼球運動への魅力へとつなげていければと思います。ほんとうの数学からすると厳密ではないと思いますが、工学で使う数学なので使えればよし、の考え方で進めます。また医学系のカリキュラムは詳しく知らないのですが、工学部のそれに比べると数学が表に出てこないと感じました。お忙しいこともあると思いますので、本書は高校数学の範囲を思い出しながら軽く読み進められるように編集していきます。ところで、ラプラス変換にたどり着くまでには少々時間がかかります。しかし最近の研究によれば時間のかかる道のりにも楽しさはあるようです [1]。加えて、道中にはいくつか面白いことがありますので、多少の道草をご用意しました。^{*1}。

最後に非線形システム論を Schor モデルに適用し発展させることで、昨今話題のスマホ内斜視等を絡めて、斜視の発症モデルを議論できればと考えています。

本書は A5 版の印刷に最適化して組版しています

^{*1} X 線 CT の原理など

1.3 フィードバック機構

1.3.1 積分的負帰還システム

輻輳運動の制御工学的モデルについては、おそらく Cook(1967, 1968) によって、積分要素を主体とした負帰還システムの存在が推定されたのが嚆矢であり、その後 Krishnan[8] や Schor[2] によって詳細な説明が進められることになった。Cook の原著は未入手であるため、これから紹介する負帰還システムはひとまず天下りの提示する。手に入れ次第、追補したい。彼らの思考過程をたどることによって、より自然な理解ができるはずである。

さて、輻輳運動を支配していると信じられている負帰還システムを図 1.2 に示す。

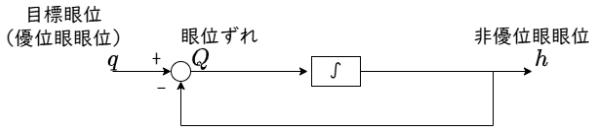


図 1.2 積分的負帰還システム

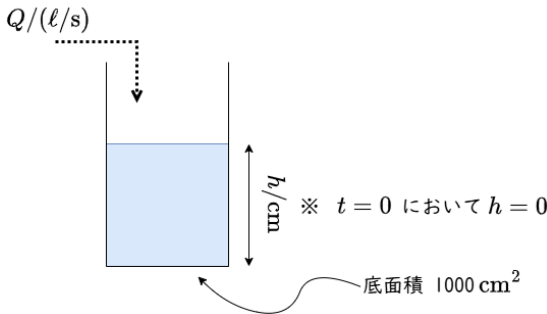


図 1.3 積分要素のモデル

このシステムの役割は、優位眼眼位 q に対して非優位眼眼位 h を、可能な限り精密に追従させることである。

そして、積分要素 \int は図 1.3 に示す容器に相当する。容器には眼位ずれ Q にしたがって水が入れられる。

簡単のため、底面積が 1000 cm^2 であるとし、 q の単位は ℓ/s 、 h の単位は cm であるとした。このように底面積を定めると、例えば $q = 1 \ell/s$ は、 h を 1 秒間に 1 cm 増加させる勢いであるといえる。具体的な数値例を示すことができつつ、適宜に単位を無視できるので説明上都合がよい。

ここで仮に $q = 3 \ell/s$ で固定するとする。優位眼眼位 q が一定値で固定されるという条件だから、これは固視である。このときの非優位眼眼位 h は時間が経つにつれどう変化するか。はじめに時刻 $t = 0$ であるとき、 $h = 0$ であり、したがって $Q = 3 - 0 = 3$ である。ごくわずかの時間が進み、 $t = 0.01$ となったらどうなるだろうか。0.01 秒の間に $3 \times 0.01 \ell$ の水が容器にたまるから、 $h = 0.03 \text{ cm}$ となる。したがって、 $Q = 3 - 0.03 = 0.297$ である。続いて時間を進めて $t = 0.02$ の時点では、先ほど Q の勢いが若干そがれたので $h = 0.03 + 0.297 \times 0.01 = 0.0597$ 、そしてさらに Q は絞られて $Q = 0.297 - 0.0597 = 0.29403$ である。

さらなる h や Q の時間変化について、付録 differentialEquation.xlsx を参照していただきたい。この excel シートが明らかにすることは、 h 、 Q の数値変化ならびに、 h 、 Q が曲線を描いていることである。数値変化はコンピュータで計算しているので、その結果は比較的正確である。つまり定量的な結果を得ることには長けている。しかし、定性的な議論をしようとする、曲線を描いていることがわかるぐらいが精々で、限界は近い。ここに、この限界を突破するために数学を持ち出す意味が出てくる。以降で一般化を試みつつ進める。

まず時刻 t を 0.01 秒刻みで進めるものとして、 $t_0 = 0, t_1 = 0.01, t_2 = 0.02$ のように表記すると便利である。さらに一般的な表記を追求して、 $t_n = n \Delta t$ と書く。 $n = 0, 1, 2, \dots, \Delta t = 0.01$ である。すると今までの計算は表 1.1 の

ようにまとめられる*2。表 1.1 から、以下の各式を得ることができた。次節

表 1.1 各パラメータの時間変化

t/s	h/cm	$Q/(\ell/s)$
$t_0 = 0.00$	$h_0 = 0$	$Q_0 = 3$
$t_1 = 0.01$	$h_1 = h_0 + Q_0\Delta t = 0.03$	$Q_1 = Q_0 - h_1 = 0.297$
$t_2 = 0.02$	$h_2 = h_1 + Q_1\Delta t = 0.0597$	$Q_2 = Q_0 - h_2 = 0.29403$
\vdots	\vdots	\vdots
$t_n = n\Delta t$	$h_n = h_{n-1} + Q_{n-1}\Delta t$	$Q_n = Q_0 - h_n$

でこれを解析する。

$$t_n = n\Delta t \quad (1.1)$$

$$h_n = h_{n-1} + Q_{n-1} \quad (1.2)$$

$$Q_n = Q_0 - h_n \quad (1.3)$$

1.3.2 差分方程式とネイピア数の関係

式 1.2、1.3 より、

$$Q_n - Q_{n-1} = Q_0 - h_n - (Q_0 - h_{n-1}) \quad (1.4)$$

$$= h_{n-1} - h_n \quad (1.5)$$

$$= -Q_{n-1}\Delta t \quad (1.6)$$

となる。*3式 1.6 はさらに次のように変形できるはずである。

$$Q_n = Q_{n-1}(1 - \Delta t) \quad (1.7)$$

*2 本書では国際単位系 (SI) の表記法にしたがって表現する。単位を伴う数値は 1000 cm^2 のように書き、式として扱う数値は t/s のように書く。 $1000[\text{cm}^2]$ のように書いても意味は通じるが、多少の嗜好をお許しいただきたい。

*3 左辺をみると、時間的に隣り合った Q 同士の差であることに気づく。このことからこの種の式は差分方程式と呼ばれる。差分方程式をコンピュータで解く方法を有限差分法といい、前述した付録の excel シートはその簡単な例である。

ここから、

$$Q_1 = Q_0(1 - \Delta t) \quad (1.8)$$

$$Q_2 = Q_1(1 - \Delta t) = Q_0(1 - \Delta t)^2 \quad (1.9)$$

$$\vdots$$

$$Q_n = Q_0(1 - \Delta t)^n \quad (1.10)$$

さらに式 1.1 を用いて n を消去して、

$$Q_n = Q_0(1 - \Delta t)^{t/\Delta t} \quad (1.11)$$

を得る。いままで時間は 0.01 秒刻みとしていた。これはもとより恣意的な数値設定である。自然界では時間刻みは無限に小さいものと考えたほうが適切に違いない。つまり刻み n を無限に細かくして、 $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n$ を考えれば、各時刻における Q の値、 $Q(t)$ を求められるはずである。実際に計算を試みる。

$$q(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n \quad (1.12)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} q(1 - \Delta t)^{t/\Delta t} \quad (1.13)$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow \infty} q \left[\left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^{-\tau} \right]^t \quad (1.14)$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow \infty} q \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^\tau} \right]^t \quad (1.15)$$

ただし、見やすさのために $\tau = -\frac{1}{\Delta t}$ とした。実は、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ はとある一定の数 (2.71828182845...) に収束することが知られている^{*4}。これこそは、かつて習ったネイピア数である。一般的には記号 e で表すのだった。元々ネイピア数は複利計算の研究 (貸金において、貸出期間をどのくらいに

^{*4} これは一応電卓でも確かめられる。例えば $n = 100$ とすれば、 $1 + \frac{1}{n} = 1.01$ である。そこでまず 1.01×1.01 を計算し、その後はイコールボタンを 99 回押す。すると近似値が得られる。

設定すれば一番儲かるか?) から出たものであるらしい。ネイピア数を用いて、式 1.15 の解は、

$$q(t) = qe^{-t} \quad (1.16)$$

と表せる。

1.3.3 道草-ネイピア数

複利計算とは生臭い話かもしれないが、かつて次のような思考があったらしい。

例えば 100 万円を年利 10% で 1 年間貸すとする、1 年後には 110 万円となる。よって 10 万円の利益が出る。もし半年ごとに分けて貸したらどうなるか。この場合、上期終了時の金額は $100 + 100 \times 0.1/2 = 105$ 万円となる。下期は 105 万円を元に貸すから、下期終了時の金額は $105 + 105 \times 0.1/2 = 110.25$ 万円となる。通期で貸すよりも、半年ごとに貸し変えた方が利益が出ることになる。

「ということは、もっと貸出期間を分割したらもっと儲かる…?」という問いがネイピア数を生んだ。1 年を s 期に分けて貸しだし、年率を r 、元本を M とすると 1 年後の金額は

$$M \left(1 + \frac{r}{s}\right)^s = M \left[\left(1 + \frac{1}{s/r}\right)^{s/r} \right]^r \quad (1.17)$$

$$= M \left(1 + \frac{1}{m}\right)^r \quad (1.18)$$

となる。ただし、 $m = s/r$ とした。グラフに示すと図 1.4 のようになる。昔の人は、ずる賢く期間を分割することで利益は増え続けると考えたのかもしれない。しかし無限には大きくならず一定値に落ち着くことがわかったのである。

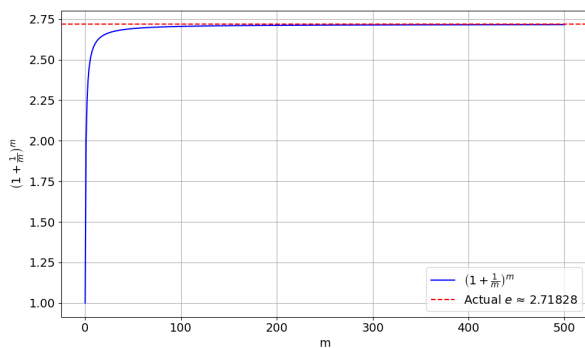


図 1.4 分割数と 1 年後の金額

1.3.4 差分方程式と微分方程式

式 1.6 は、

$$\frac{Q_n - Q_{n-1}}{\Delta t} = -Q_n \quad (1.19)$$

とも変形できる。 Δt が微小であることから、式 1.19 は高校数学では、これを微分

$$\frac{dq}{dt} = -q \quad (1.20)$$

として表しても良いのであった。すなわち微分方程式 1.20 の解が式 1.16 であるともいえる。

この手の式は色々な場面で出てくるので、再利用できるようにかつて暗記を勧められたのが指数関数の微積分の公式である。つまり式 1.20 から、

指数関数の微積分の公式

$$\frac{d}{dt} [e^{-t}] = -e^{-t} \quad (1.21)$$

あるいは表記を改めて、

$$(e^{-t})' = -e^{-t} \quad (1.22)$$

より一般的には

$$(e^a)' = e^a \quad (1.23)$$

また、

$$\int e^a da = e^a \quad (1.24)$$

である (式 1.23 の証明は式 1.19 の右辺の符号を + とすればできる)。これらの公式から、ネイピア数の指数関数は、微分してもその形が変わらないことが読み取れる。この性質は第 2 章で重要になってくる。

1.3.5 h の解、フィードバックの成立

今までの議論は、図 1.2 の負帰還システムが、優位眼眼位 q に対して非優位眼眼位 h を、可能な限り精密に追従させられるか否か、ということだった。現時点で分かることについて、まとめに入る。

式 1.2 より、

$$\frac{h_n - h_{n-1}}{\Delta t} = Q_{n-1} \quad (1.25)$$

なので、

$$\frac{dh}{dt} = Q \quad (1.26)$$

と表せる。よって任意の定数 H, C を用いて

$$h = H \int_0^t e^{-t} dt \quad (1.27)$$

$$= H e^{-t} + C \quad (1.28)$$

が成り立つ。式 1.28 で $t = \infty$ とすると、 $h = H$ である。式 1.3 から、

$$Q_{\infty} = q - h_{\infty} \quad (1.29)$$

$$= q - H \quad (1.30)$$

また式 1.16 からは

$$q(\infty) = qe^{-\infty} = 0 \quad (1.31)$$

である。よって、 $H = q$ とわかる。また、 $h(0) = 0$ であるから、式 1.28 からは $0 = -H + C$ であり、したがって $C = q$ である。よって式 1.28 は

$$h(t) = q(1 - e^{-t}) \quad (1.32)$$

となる。これが h の最終的な解である。式 1.32 に $t = \infty$ を代入すれば、 $h(\infty) = Q_0$ である。つまり、 $t = \infty$ で優位眼眼位 q と非優位眼眼位 h は等しくなる。フィードバック機構によって眼位が意図通り制御されることが、ここに示された。

1.4 高速神経積分器

図 1.2 から始めた議論は、そのモデルが単純であるため、実際の症例には適用しづらいことが多々あるはずである。以降では、徐々にモデルを詳細化していく。

1.4.1 モデルの詳細化

輻輳運動では固視ずれが生じることがあるが、図 1.2 に示した制御システムでは固視ずれを説明することができない。 $t = \infty$ で優位眼眼位 q と非優位眼眼位 h は等しくなっていたからである。しかし今や微分方程式を解けるようになったので、より詳細なモデル、具体的には図 1.5 のモデルを扱うことができる。このモデルでは固視ずれを説明できる。図 1.5 は、Schor モデルから輻輳系のみを、さらにいわゆる高速積分器に限って抽出したもので

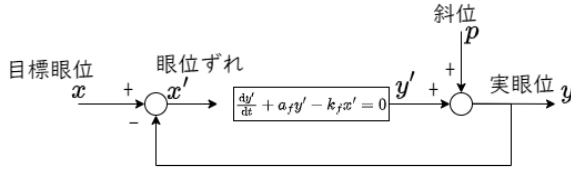


図 1.5 Schor モデル

ある。図 1.5 から、次の連立方程式が導かれる。

$$\frac{dy'}{dt} + a_f y' - k_f x' = 0 \quad (1.33)$$

$$x - y = x' \quad (1.34)$$

$$y' + p = y \quad (1.35)$$

式 1.33 が 1.3.5 項の議論で用いた積分要素に相当し、図 1.5 に書かれている。水を入れる容器でたとえると図 1.6 に相当する。図 1.3 に示した容器と

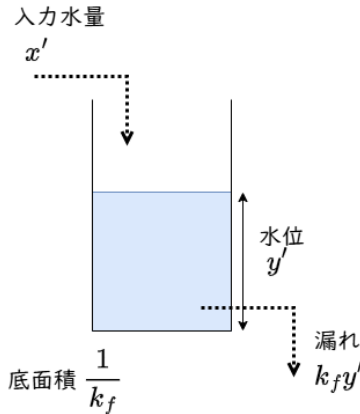


図 1.6 Schor モデル (図 1.5) における積分要素

異なり、水位 y' に比例して水が抜けるようになっている。このことから、

積分要素 1.33 は漏れ積分器 (Leaky integrator) と呼ばれる。ところで、これらの式に対して外から観測できるのはあくまでも x, y 、それに p である。 x', y' は観測することが難しい。そこで式 1.33 に式 1.34, 1.35 を代入すれば x, y だけの式となり取り扱いが楽になる。

$$\frac{dy}{dt} + (a_f + k_f)y = k_fx + a_fp \quad (1.36)$$

1.4.2 固視ずれの登場

得られた式 1.36 の活用を考える。まず、固視の状況とは十分な時間が経過し、非優位眼眼位の変化がなくなったときを指すと考えられるから、言い換えれば $\frac{dy}{dt} = 0$ である。式 1.36 にこれを代入すれば

$$y = \frac{k_fx + a_fp}{a_f + k_f} \quad (1.37)$$

が得られる。式 1.37 が物語ることは、第 1.3.5 項の議論とは打って変わり、固視状況下において非優位眼眼位 y が優位眼眼位 x とは一致しないということである。融像域の異常などを除けば、眼位ずれそのもの $|y - x|$ が複視の原因となるはずだから、この結果は詳しく調べる価値がある。第 1.3.5 項の議論で用いたモデル (図 1.2) を、より精密な図 1.5 のモデルに代えることで興味深い結論を得ることができたのである。

1.4.3 厳密解と時定数

それでは式 1.37 のパラメータ k_f, a_f は何なのか。式 1.36 を解けばその一端が分かる。

まずは図解で考えたい。再び differentialEquation.xlsx を参照していただきたい。そこには式 1.36 の式を数値計算した例を入れている。この例では初期値ゼロから出発していて、時刻 t が充分大きくなると y の値は飽和し、その値は式 1.37 で予測されるものに調和する。この観察結果から、ひとま

ず未定の係数 λ を持ち出して

$$y = \frac{k_f x + a_f p}{a_f + k_f} (1 - e^{-\lambda t}) \quad (1.38)$$

が式 1.36 の解になるのではないかという予想が立つ。実際、 $t = 0$ を代入すれば $y = 0$ となるし、 $t \rightarrow \infty$ とすれば y は式 1.37 に収束する。では本当に解となるか確かめてみたい。式 1.38 を式 1.36 に代入すると、

$$\frac{k_f x + a_f p}{a_f + k_f} \lambda e^{-\lambda t} + (k_f x + a_f p)(1 - e^{-\lambda t}) = k_f x + a_f p \quad (1.39)$$

となる。式 1.39 はあらゆる時刻で成り立つはずだから、 $t = 0$ を代入してみる。すると $e^0 = 1$ である事実を便利に利用できて、

$$\lambda = a_f + k_f \quad (1.40)$$

が得られる。式 1.40 を式 1.38 に代入すれば、

$$y = \frac{k_f x + a_f p}{a_f + k_f} (1 - \exp[-(a_f + k_f)t]) \quad (1.41)$$

が導かれる*5。何となく矛盾がなく、これでよさそうである。

なお、昔習ったことを思い出すと、式 1.41 のような式は、すべての時刻 t に関して y を計算できるので、微分方程式 1.36 の厳密解というのだった。

式 1.41 が示す時系列変化は、至る所が滑らかで、なおかつ 2 次関数などのように最小点なども持たない。グラフからは捉えどころがない。しかし式の形を考えれば、式 1.36 のような微分方程式が元になってさえいれば同じような形に落ち着くはずである。そこで、 $\tau = 1/(a_f + k_f)$ となるような定数を考えると便利である。 $t = \tau$ のとき、

$$y = \frac{k_f x + a_f p}{a_f + k_f} (1 - e^{-1}) \quad (1.42)$$

*5 e^λ の表記と $\exp(\lambda)$ の表記は同じ意味をもつ。式 1.41 は文字が多く並ぶため表記 e^λ では見づらくなるため、 $\exp(\lambda)$ の形で書いた。

となる。 $(1 - e^{-1})$ の項^{*6} は式 1.36 のタイプの微分方程式であれば共通である。そこで式 1.41 の特徴を捉えるために便利な定数 τ を時定数と呼ぶのだった。

そして式のタイプが同じであれば、いつも時定数は時刻 0 から出発して約 63% まで変化したときの時間であるから、実際の時系列データを分析してこのときの時刻をみれば実際の時定数が測定できることになる。以下に、時定数を公式としてまとめておく。

時定数

とある関数 $f(t)$ があって

$$f(t) = A(1 - e^{-\lambda t}) \quad (1.43)$$

もしくは

$$f(t) = Ae^{-\lambda t} \quad (1.44)$$

と表されるとき、

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad (1.45)$$

で計算できる τ を時定数と呼ぶ。時定数は、測定された時系列データに対し、その変化量が約 63% となったときの時間に等しい。

1.4.4 パラメータの同定

以上の議論から、まず a_f, k_f が眼位の時系列変化の時定数として現れ、その値は $\tau = 1/(a_f + k_f)$ であることが明らかになった。しかし二つの未知変数 a_f, k_f に対して 1 本の $(a_f + k_f)$ という和の形しか得られていない。これではまだ分かったとはいえない。もう少し辛抱をいただきたい。

和の形 $(a_f + k_f)$ をほどこするためには別の発想が必要である。まず先述の時定数 $\tau = 1/(a_f + k_f)$ を求めた議論の前提は、優位眼眼位 x に対する非優位

^{*6} 数値を具体的に求めると、 $(1 - 1/2.718281828... = 0.63212055...)$

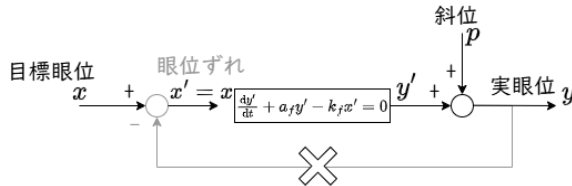


図 1.7 遮閉時のフィードバック系

眼眼位 y の追従、つまり輻輳運動を考えることだった。輻輳運動が必要とされる状況は様々であるが、その一例としては遮閉眼を開放したときがあるだろう。では、逆に両眼視の状態から一眼遮閉をしたらどうか。このときは

1. 今まで輻輳系に入力されていた、視差 x' の情報が失われる
2. 潜在していた斜位 p が顕在化する

から、図 1.3.5 のフィードバック系が図 1.7 のように書き換えられるはずである。眼位ずれ x' の情報はもはや存在しない。依然として健在な漏れ積分器^{*7}(式 1.33) には目標眼位 x がそのまま伝えられる。

ついでに簡単のために第一眼位の固視を考え $x = 0$ とする^{*8}。すなわち図 1.6 の容器でいえば、入る水の流れが止められ、貯まっていた水が次第に抜けていき、水位 y' が最終的にゼロになることに相当する。すると図 1.7 から、充分な時間をおいた後の眼位 y として斜位 p を観測できる。これが、遮閉試験で第一眼位を指示したときに現れる一連の眼球運動である。

以上の考察をもとに遮閉時の眼位変化を支配する方程式を書き下すと、次

^{*7} 融像除去によって眼位ずれの情報 x' が失われるのみならず、漏れ積分器そのものが停止する場合もあるはずである。深い麻酔や死後の状態が考えられる。生理的安静位や絶対安静位と、融像除去眼位との違いについては、低速積分器の関与を考えると自然であると思われる。これについては項を改めて説明したい。

^{*8} 第二、第三眼位 $x \neq 0$ でも成り立つように図 1.7 を描いた。融像除去状態で斜位が顕在化した、もしくは斜視角が最大化したとしてもなお、Hering 則にしたがって両眼は運動するはずだからである。ただ、単純に言って $x \neq 0$ では式の取り扱いが面倒になる。よって本書では $x = 0$ の場合を考えたい。

のようになる。

$$\frac{dy'}{dt} + a_f y' - k_f x' = 0 \quad (1.46)$$

$$y = y' + p \quad (1.47)$$

式 1.46 に式 1.47 を代入すると、解くべき微分方程式

$$\frac{dy}{dt} + a_f y = a_f p + k_f x \quad (1.48)$$

が現れる。ここで遮閉開始直後の眼位を書くには、式 1.41 において $t = 0, x = 0$ を代入すればよくて、

$$y(0) = \frac{a_f}{a_f + k_f} p \quad (1.49)$$

である。よって同じく遮閉開始直後の漏れ積分器の出力は式 1.49 を式 1.47 に代入すればわかり、

$$y'(0) = -\frac{k_f}{a_f + k_f} p \quad (1.50)$$

である。つまり式 1.46 は、初期値 (式 1.50) のもとで次第にゼロに近づく指数関数と対になっている。このことから同じように

$$y' = -\frac{k_f}{a_f + k_f} p e^{-\lambda t} \quad (1.51)$$

とおき式 1.46 に代入すると、

$$\frac{k_f}{a_f + k_f} \lambda e^{-\lambda t} - \frac{a_f k_f p}{a_f + k_f} - 0 = 0 \quad (1.52)$$

を得て ($x = x' = 0$ を使った)、式 1.52 に $t = 0$ を代入すると、

$$\frac{k_f p}{a_f + k_f} \lambda - \frac{a_f k_f p}{a_f + k_f} = 0 \quad (1.53)$$

より、 $\lambda = a_f$ である。したがって厳密解は

$$y'(t) = -\frac{k_f}{a_f + k_f} p e^{-a_f t} \quad (1.54)$$

$$y(t) = \left(1 - \frac{k_f}{a_f + k_f} e^{-a_f t}\right) p \quad (1.55)$$

である。時定数は $\tau = 1/a_f$ である。まとめると、
遮閉⇒開放の場合には

$$\tau_{c \rightarrow o} = 1/(a_f + k_f) \quad (1.56)$$

開放⇒遮閉の場合には

$$\tau_{o \rightarrow c} = 1/a_f \quad (1.57)$$

という時定数で眼球運動がおこる。式 1.57 で a_f を測定し、それを式 1.56 に代入したうえで k_f を求めれば、2つのパラメータ a_f, k_f が明らかとなる。長い説明をご辛抱いただいた。求めたパラメータを式 1.37 に代入すると、患者個々人の固視ずれを推定できるはずである。

式 1.37 から読み取れることとして、複視がなくなる ($y \doteq x$) ための十分条件は $a_f \doteq 0$ である。よって複視患者では a_f が大きな値を示す可能性がある。

第 2 章

固有関数と直交関数

本章では Schor 論文などの制御工学的モデルを読むために不可欠な、ラプラス変換の導出までを行う。

ラプラス変換は微分方程式を解いたり表現したりするために便利なツールである。その導出にいたるには、固有関数と直交関数；

- 少なくとも何回か微分すると同じ関数に戻る特別な関数 (固有関数)
- 似た関数同士を掛け算してから積分するとゼロになる特別な関数 (直交関数)

を活用できないかというアイデアが底流にある。章名を「固有関数と直交関数」としたのはこれが理由である。導出に際し、感じ取っていただければ幸いである。より理解が深まるはずである。

2.1 マクローリン展開

マクローリン展開

$f(t)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(t)$ と書けば

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \frac{f'''(0)}{3!}t^3 + \cdots \quad (2.1)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} \quad (2.2)$$

が成立する。ただし、

$$k! = k \times (k-1) \times (k-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 \quad (2.3)$$

2.1.1 導出

関数 e^t を例に考える。いったん式 2.2 の形式が成立すると信じて、

$$e^t = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \cdots \quad (2.4)$$

とおく。式 2.4 はすべての t について成り立つはずだから、まず $t=0$ として式 2.4 に代入してみる。すると右辺は a_0 しか残らない。つまり $a_0 = e^0 = 1$ であることがわかる。

次に式 2.4 の両辺を微分してみるとどうか。左辺は $(e^t)' = e^t$ からわかる。右辺は微分の効果で a_0 が消えて、

$$e^t = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + 4a_4t^3 + \cdots \quad (2.5)$$

となる。式 2.5 に、先ほどと同じように $t=0$ を代入する。すると $a_0 = e^0 = 1$ であることがわかる。

同じやり方で式 2.5 の両辺を微分する。

$$e^t = 2a_2 + 3 \times 2a_3t + 4 \times 3a_4t^2 + 5 \times 4a_5t^3 + \cdots \quad (2.6)$$

となるので、 $t = 0$ を代入して $a_2 = \frac{1}{2}$ を得る。

再び式 2.6 の両辺を微分する。

$$e^t = 3 \times 2a_3 + 4 \times 3 \times 2a_4t + 5 \times 4 \times 3a_5t^2 + 6 \times 5 \times 4a_6t^3 + \cdots \quad (2.7)$$

となるので、 $t = 0$ を代入して $a_3 = \frac{1}{3 \times 2} = \frac{1}{3!}$ を得る。

パターンがお判りになったと思う。以下無限に続けると、 $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots$ が求まる。具体的には $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して、 $a_n = \frac{1}{n!}$ であることがわかる。これは式 2.2 に示した $\frac{t^k}{k!}$ に一致している。以上で導出できた。

$f(t)$ には例として e^t を使ったが、他の関数でももちろん成り立つ。 e^t は何回微分しても e^t で形が変わらないので特殊すぎ、インチキくさい。例えば $\cos(t)$ などで試すと、より納得感が増すと思う。

2.1.2 道草

通常、三角関数は関数電卓や Excel などを使って計算する。しかし無人島ではどうするか。もし無人島に何か一つだけ持って行けるなら…と問われたとき、関数電卓と答える人は変わった人だろう。それは実際、マクローリン展開を知っていれば普通の電卓や手計算で三角関数を計算できるから…かもしれない。

ここでは例として $\cos(30^\circ) (= \frac{\sqrt{3}}{2} \doteq 0.866)$ を計算してみる。とりあえず 30° をラジアンに直すと、 $(180^\circ \text{ で } \pi \text{ であることを思い出して}) \pi/6$ である。では、式 2.2 で $f(t) = \cos(t)$ として、

$$\begin{aligned} \cos(t) &= \cos(0) - \sin(0)t - \cos(0)t^2 \frac{1}{2!} + \sin(0)t^3 \frac{1}{3!} + \cos(0)t^4 \frac{1}{4!} + \cdots \\ &= 1 - t^2 \frac{1}{2!} + t^4 \frac{1}{4!} + \cdots \end{aligned} \quad (2.9)$$

とわかる。 $t = \pi/6$ を代入すれば*1、

$$\cos(\pi/6) = 1 - \frac{(3.14/6)^2}{2} + \frac{(3.14/6)^4}{4 \times 3 \times 2} + \cdots \doteq 0.866 \quad (2.10)$$

*1 無人島に行っても $\pi \doteq 3.14$ は覚えているものとする。

となる。計算が大変なので $\frac{(3.14/6)^4}{4 \times 3 \times 2}$ までで打ち切った。もっと頑張れば精度が上がるが、これでもそこそこの精度は出る。

実は、マクローリン展開は電卓芸のためだけのものではなく、もっと実用的な意味を持っている。それは、コンピュータで三角関数を計算することである。コンピュータは特別な回路がない限り、四則演算しかできない。つまり三角関数のようなものは元来計算できない。ところが、式 2.2 は四則演算だけですむ。よってゼロにおける微分係数をプログラムに書いておけば三角関数の値が得られる。式 2.8 に暗黙のうちに書いたように、ゼロにおける微分係数は高々数個あればそこそこの精度が出る。そのくらいの項数であれば簡単にプログラム化できる。我々は、知らず知らずのうちにマクローリン展開の成果を使っているのである。

2.2 フーリエ級数展開

フーリエ級数展開

周期 T で繰り返す関数 $f(t)$ は

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right) \quad (2.11)$$

と書き表せる。ただし、

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi nt}{T} dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2\pi nt}{T} dt$$

前節で説明したマクローリン展開と同じような発想の式だが、周期性がある関数に適用できるものである。

2.2.1 導出

式 2.11 の両辺を積分してみる。すると実は

$$\int_0^T f(t)dt = \frac{a_0}{T} \quad (2.12)$$

となり、これから

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)dt \quad (2.13)$$

となってまずは a_0 が求まる。式 2.12 の関係が成り立つからには

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right) \quad (2.14)$$

でなければならない。

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} \right) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

と書き直せるが、このうち $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \sin \frac{2\pi nt}{T})$ について考えてみる。

$$\begin{aligned} & \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right) \\ &= \int_0^T b_1 \sin \frac{2\pi \times t}{T} \\ &+ \int_0^T b_2 \sin \frac{2\pi \times 2t}{T} \\ &+ \int_0^T b_3 \sin \frac{2\pi \times 3t}{T} \\ &+ \cdots \end{aligned} \quad (2.16)$$

と展開してみる。これをまともに計算すると面倒なので、作図して考える。
図 2.2.1 に示す。

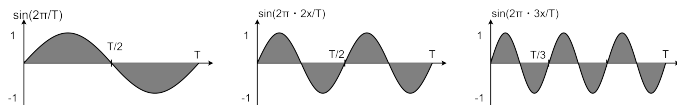


図 2.1 各積分項

今考える積分は図 2.2.1 の灰色部分の面積だが、いずれの積分項も値がゼロになることが見てとれる。このようにすると、式 2.13 が成り立つことがわかる。

次に a_n について考える。式 2.11 の両辺に $\cos \frac{2\pi nt}{T}$ をかけて 0 から T まで積分する。すると最終的に、

$$\int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi nt}{T} dt = \frac{a_n}{2} T \quad (2.17)$$

となり、ここから

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi nt}{T} dt \quad (2.18)$$

となる。

2.2.2 応用

図 2.2 に示すのは何の変哲もないチェックボードパターンである。そして図 2.3 の赤線は、図 2.2 の一行目を横方向に切り取ったときの白黒を 1, -1 で表現したものである。さらに赤線の波形を式 2.11 にあてはめ、 $n = 20$ まで展開したうえでグラフ化したものが青線である。同じく、 $n = 3$ まで展開したものが緑線である。

みると、 n が大きいほうが赤線に対して忠実になる傾向であるといえる。実は、この関係性は画像圧縮技術の核心として使われている。例えば図 2.2 が 500 mm 角のサイズであるとする。3 m 離れたところにあるディスプレイに

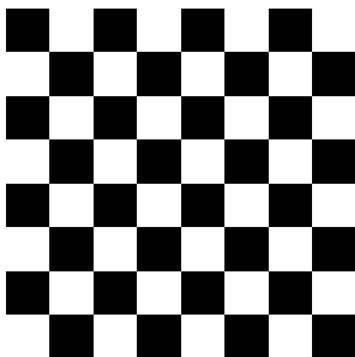


図 2.2 チェッカボードパターン

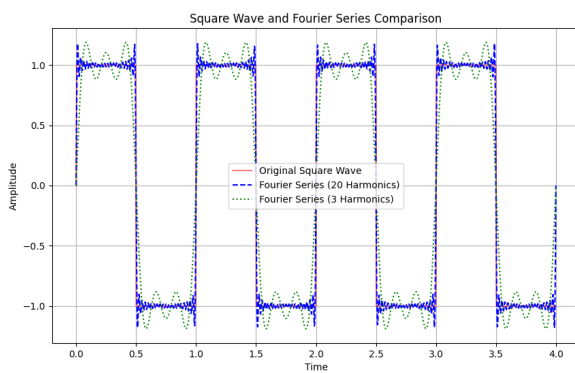


図 2.3 矩形波のフーリエ級数展開

表示させ、視力 1.5 の人に対して綺麗なチェッカボードパターンと認識できるようにするためには、 n はいくつである必要があるだろうか。

まず視力 1.5 の人は $\tan(1^\circ / 60 / 1.5) \times 3000 \doteq 0.6 \text{ mm}$ の細かさまで見える。つまり 3 m 離れた地点で波長 1.2 mm の縞模様までは認識できるが、それ以上細かい模様はその人には見えない。これを踏まえて、チェッカボードパターンを構成する波の波長は 1.2 mm 以上とするのが合理的であると考えられる。チェッカボードパターンは 500 mm 角だったので、一つの白⇒黒のセクションは 125 mm となる。

したがって式 2.11 を念頭に考えると、 $n = 125 / 1.2 \doteq 100$ としておけば足りる。要するに横方向のデータを 100 個持っておけば、視力 1.5 の人にとっては綺麗なチェッカボードパターンになるはずである。縦方向についても同様のことがいえる。実は図 2.2 は 400x400 画素のデータで描いたのだが、以上の議論からデータ数を 1/4 にすることができたことになる。

このように、縦横それぞれの方向でフーリエ級数展開を行ってデータ数を節約する画像圧縮アルゴリズムがある。有名どころでは JPEG などである。当然、視力 2.0 の人には粗目立ちする。つまり画像の情報は一部失われていることになるが、その反面、データを非常に小さくできるという大きな利点がある。もしフーリエ級数展開による画像圧縮アルゴリズムがなければ、今のようにインターネットが普及することは難しかった*2のかもしれない。

*2 例えば FAX は全く異なる圧縮方式を使っている。ランレングス符号化という。FAX は白黒画像を送るものであり、なおかつ白または黒の連続が多いことを利用したアルゴリズムである。つまりネットで汎用されるような画像を送るのには全く適していない。

2.3 三角関数の直交性

三角関数の直交性

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n) \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n) \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0 \quad (2.21)$$

ただし m, n は自然数とする。以上の性質から、 $\sin(x), \cos(x)$ は互いに直交しているという。

式 2.21 から、 $\sin \times \cos$ を一周期で積分するとゼロになることがわかる。また、同じ \sin, \cos 同士でも、2つの関数の周期が同じ場合のみ、一周期で積分してゼロにならなくなるということもわかる。

2.3.1 導出

式 2.20 を代表として導出していく。まず $m \neq n$ のとき、

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) \, dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \cos[(m-n)x] - \frac{1}{2} \cos[(m+n)x] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{m-n} [\sin(m-n)x]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \frac{1}{m+n} [\sin(m+n)x]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

次に $m = n$ のとき、

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{1 - \cos(2mx)\} dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[x \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \frac{1}{2m} \left[\sin(2mx) \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \pi
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

となり、式 2.20 が成り立つことがわかる。式 2.19 は同様の計算で証明できる。

次に式 2.21 について計算してみる。三角関数の積の公式を使うと、

三角関数の積の公式

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)] \tag{2.24}$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)] \tag{2.25}$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A + B) + \sin(A - B)] \tag{2.26}$$

$$\sin(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\sin((m + n)x) + \sin((m - n)x)] \tag{2.27}$$

したがって積分は、

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x)] dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \sin((m+n)x) dx \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \sin((m-n)x) dx \right]
\end{aligned} \tag{2.28}$$

となる。ここで図 2.2.1 と同様の考え方をすると、任意の定数 k について

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx = 0 \tag{2.29}$$

となるから、式 2.21 が成り立つことがわかる。

2.3.2 道草-直交振幅変調

Keep out; shut up, I'm working Cape Race

- Jack Phillips, Titanic

これはタイタニック号の沈没事故が起きる直前の無線通信記録である。当時近くにいた汽船カリフォルニアン号から氷山の警告が発せられていたが、邪魔な混信として片付けられてしまった。草創期の船舶無線機は周波数を精密に選ぶことができなかった。言い換えれば一つの糸電話をあらゆる船が共有している状態であったため、混信が起こってしまったらしい。事故後に様々な対策が進むことになるが、いかに大量の情報を限られた周波数帯域に詰め込むかという問題は、今なお無線通信技術の中核的な関心事項でありつづけている。

では糸電話を改良してみる。ここでは2つの信号 $I(t), Q(t)$ を1つの糸にのせ(変調)、受信側で再び2つの信号に戻し(復調)てみる。まず送信側では $I(t), Q(t)$ をもとに、

$$s(t) = \sin(2\pi f_c t)I(t) + \cos(2\pi f_c t)Q(t) \tag{2.30}$$

なる信号 $s(t)$ をつくる。この操作が変調である。 $s(t)$ の中で I, Q を足し算することによって、1 つの信号として 1 つの系に情報をのせることができた。ここで、 \sin, \cos で示す波のことを搬送波という。すなわち、 f_c は搬送波の周波数に相当する。

若干なじみ深いところでいえば、普段、RADIO BERRY なら 74.6MHz、NHK 東京ラジオ第 1 放送なら 594kHz に合わせる。これらは搬送波の周波数を指しているのである。

さて受信側で復調をする。ここで再び三角関数を掛け算する。

$$r(t) = I(t) \sin(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t) + Q(t) \cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t) \quad (2.31)$$

なる信号 $r(t)$ を作る。 $r(t) = s(t) \cos(2\pi f_c t)$ としたわけである。三角関数の倍角公式をつかって、式 2.31 を少し変形しておく。

$$r(t) = I(t) \sin(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t) + \frac{Q(t)}{2} [1 + \cos(4\pi f_c t)] \quad (2.32)$$

三角関数の直交性の性質から、 \sin と \cos の積を周期で積分すると、その値は常にゼロになることが以前の議論でわかっている。この性質を使うと、 $r(t)$ から $Q(t)$ のみを漉しとることができそうである。

実際、そういった操作が回路もしくはソフトウェアで行える。なぜなら、FM・AM 放送の搬送波は先ほどの議論の通り、数十 MHz 数百 kHz のオーダーであるからである。一方、復調すべき信号は音声周波数、言い換えれば可聴周波数域の信号であり、高々 20 kHz 未満の周波数に分布している。

つまり、測定量 I, Q は時間で変化する信号であるものの、 $r(t)$ の周期程度では、ほぼ定数であるとみなすことができる^{*3}。そのように考えると、復調

^{*3} 一般的なパソコンのディスプレイは 60 Hz で表示内容を逐次入れ替えているが、普通はそのちらつきを感じないのに似ている。錐体細胞が高々 0.1-0.2 秒の応答速度をもっていて [5]、いいかえればそれより速い 60 Hz の変動は、定数として積分されるからである。

した信号 $\hat{Q}(t)$ が得られることが以下の式でわかる。

$$\begin{aligned}
 \hat{Q}(t) &= \int_0^{\frac{1}{T_c}} r(t) dt \\
 &= 0 + \frac{Q(t)}{2} \left[t \right]_0^{\frac{1}{T_c}} + \frac{Q(t)}{2} \int_0^{\frac{1}{2T_c}} \cos(4\pi f_c t) dt \\
 &\quad + \frac{Q(t)}{2} \int_{\frac{1}{2T_c}}^{\frac{1}{T_c}} \cos(4\pi f_c t) dt \\
 &= \frac{Q(t)}{2f_c}
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

$r(t)$ を \sin によって別途同様に作ると、もうひとつの信号、 $I(t)$ を復調できる。以上の一連の操作を直交振幅変調 (Quadrature Amplitude Modulation) という。1つの糸で2つの信号を扱うことができた。

ここで直交振幅変調という用語の意味について触れておく。変調や復調をするときに、 $I(t)$ には \sin 、 $Q(t)$ には \cos を使った。先述の議論から \sin , \cos は直交していることがわかっている。直交の語はここから来ている。なお、 $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta)$ 、 $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\theta)$ であるから、直角の角度 $\frac{\pi}{2}$ を保って \sin と \cos の間を相互に変換できるわけで、このことから直交の言葉を使う、としてもよいような気がする。

いずれにしても、直交した2関数を使うという QAM の発想は現代社会で重要なものとなっている。デジタル信号を QAM で扱うと、さらに多数の信号を詰め込めるからである [6]。例として、図 2.4 は 16QAM といい、16個の信号を1つの信号に変調していることを示す。5G 通信では 1024QAM を使うらしい。QAM が、1つの周波数帯を多数の端末で共有するために欠かせない技術であろうことがわかる。

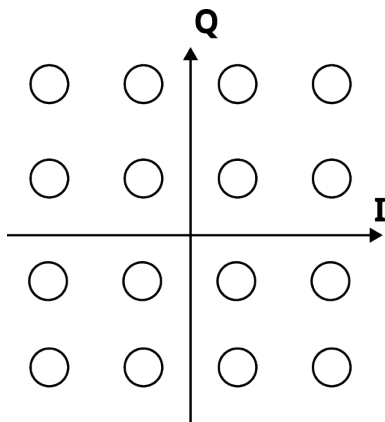


図 2.4 16QAM。I, Q という 2 つの直交した軸を用いていることが「みそ」

2.4 オイラーの定理

オイラーの公式

$$e^{jt} = \cos(t) + j \sin(t) \quad (2.34)$$

j は虚数単位である^a。

^a 電気数学特有の事情を持ち込むことになり恐縮だが、虚数単位を j で書く。 i は電流を表すために予約しておくのが慣習だからである。

2.4.1 導出

マクローリン展開 (式 2.2) において、 t を jt に置き換えて計算してみる。
すると、

$$e^{jt} = e^0 + e^0 \frac{jt}{1!} + e^0 \frac{(jt)^2}{2!} + e^0 \frac{(jt)^3}{3!} + \cdots \quad (2.35)$$

$$= 1 + \frac{jt}{1!} - \frac{t^2}{2!} - \frac{jt^3}{3!} + \cdots \quad (2.36)$$

$$= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots\right) + j \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots\right) \quad (2.37)$$

となる*4が、いったん中断して $\cos(t)$ のマクローリン展開を考える。

$$\cos(t) = \cos(0) - \frac{\sin(0)}{1!}t - \frac{\cos(0)}{2!}t^2 + \frac{\sin(0)}{3!}t^3 + \frac{\cos(0)}{4!}t^4 + \cdots \quad (2.38)$$

$$= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots \quad (2.39)$$

となり、 $\sin(t)$ についても同様に

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots \quad (2.40)$$

となる。したがって、式 2.37 と比較すれば、式 2.34 が成り立つことがわかる。

*4 ここで高校数学の復習をしたい。式 2.35 から式 2.36 への変形には、 $j^2 = -1$ とする約束を使った。

2.4.2 応用

2.5 フーリエ変換

フーリエ変換

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.41)$$

によって計算する関数 $F(\omega)$ の導出操作を $f(t)$ のフーリエ変換という。
 $F(\omega)$ から $f(t)$ に戻す計算も同様にあって、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.42)$$

である。これを逆フーリエ変換という。

2.5.1 導出

三角関数の直交性 (式 2.20～2.21) を使って、直交振幅変調の項で道草した通り、あらゆる波の中から狙った波だけを抽出できるようになった。では、試しに図 2.5 に示すような波形について試してみたいと思う。少し脱線

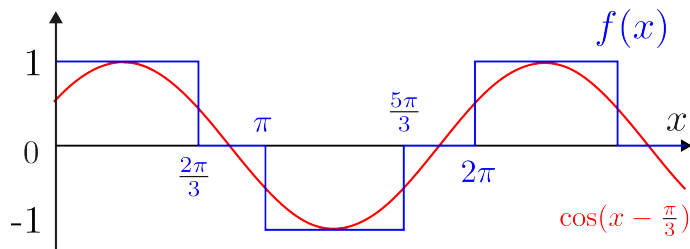


図 2.5 修正正弦波

するが、自動車の 12V 電源を交流 100V に変換し、車内で家電を使えるよ

うにする製品として、いわゆるカーインバータと呼ばれるものがある。一般住宅などに供給されている交流 100V は図 2.5 の赤線に示すような正弦波であるのに対し、一部の安価なカーインバータでは、内部回路を簡略化するために波形も簡単なものが採用されている。同図青線に示すもので、修正正弦波と呼ばれている。その名の通り、本来の正弦波に似ているようにみえる。何となく解析が簡単そうである。

2.5.2 応用

逆フーリエ変換を使うと、X 線 CT や MRI などに用いられる Computed Tomography の原理を導出することができる。

そのためには、まず Radon 変換という別の計算を考えなければならない。1917 年にオーストリアの数学者 Johann Radon によって純粋数学として生まれた Radon 変換は、約 60 年後の 1979 年にノーベル医学生理学賞”for the development of computer assisted tomography”として結実することとなった。

では、Radon 変換から CT をつくっていく。

まず、図 2.6 のように、平行光線の X 線を被写体にあてることを考える。被写体は適宜回転させるものとし、その角度を θ で表す。X 線は被写体を透過して検出器に到達する。その量を $g(s, \theta)$ として書く。手始めに $g(0, \theta)$ を考える。これは図 2.6 において、被写体の X 線吸収率 $f(x, y)$ を、 L_0 に沿って積分することに相当する。 L_0 上の点について、 x, y は

$$\frac{y}{x} = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta} \quad (2.43)$$

を満たす。よって、

$$g(0, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta) dx dy \quad (2.44)$$

であるといえる。

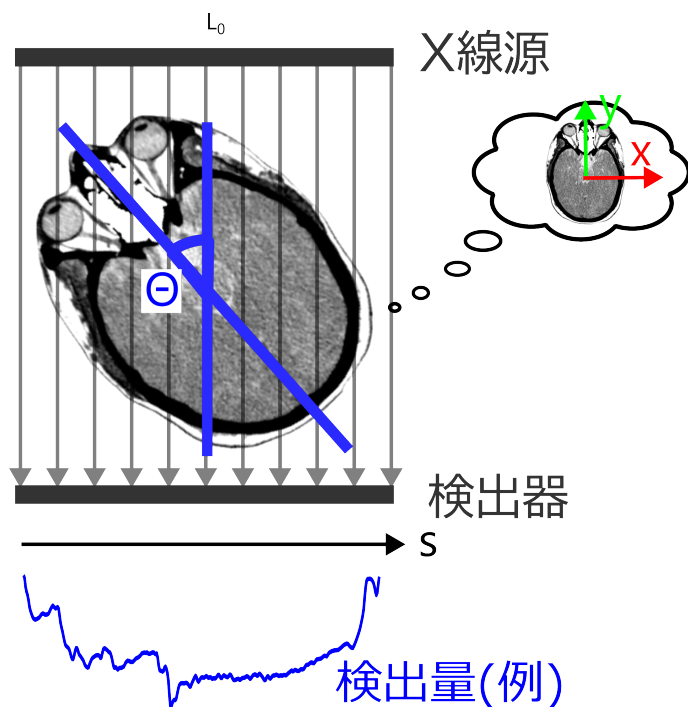


図 2.6 X 線 CT 装置による透視撮影。頭部像は引用元 [7] をネガポジ反転した。

ここで、 $\delta()$ はディラックのデルタ関数というものである。デルタ関数は

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) \quad (2.45)$$

となる性質をもっている。デルタ関数を使うことで、 $x = 0$ での f の値を拾ってくる操作を積分の形式に書き直せる。これによって、式 2.44 は x, y についての積分という書き方をしつつ、 g についての答えを示すことができる。

さて、 $s = 0$ の特殊ケースから離れて、一般の $g(s, \theta)$ を考えてみる。先ほどは、積分経路が図 2.6 での L_0 だった。今度は図 2.7 における L_s が相

当する経路になる。 L_0 を x 方向に $s \cos \theta$ 、 y 方向に $s \sin \theta$ だけ移動すれば

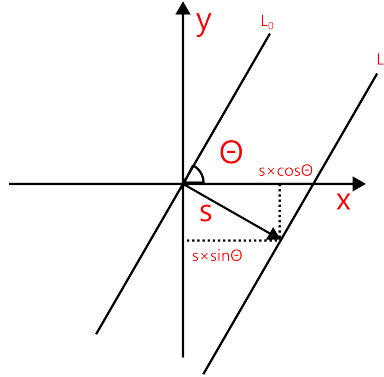


図 2.7 x, y から s への変換

L_s になることがわかるので、式 2.43 と併せて、

$$(x - s \cos \theta) \cos \theta + (y - s \sin \theta) \sin \theta = 0 \quad (2.46)$$

であることがわかる。さらに式 2.44 と比較すれば、

$$g(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy \quad (2.47)$$

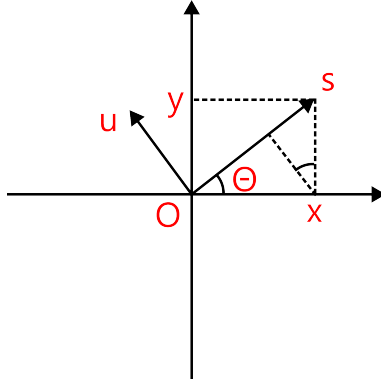
となる。式 2.47 を、 $f(x, y)$ から $g(s, \theta)$ への Radon 変換と呼ぶ。X 線 CT 装置は線源と検出器を被写体の周りでぐるぐる回しながら 2 次元分布を撮る、すなわち θ を走査しながら s 軸に沿った検出量を測定し、 $g(s, \theta)$ として記録する装置にほかならない。よって、検出量 $g(s, \theta)$ から $f(x, y)$ を推定する、逆 Radon 変換ができれば断層写真を得られることになる。

座標系 (x, y) と (s, u) の変換をする。図 2.8 をみると、

$$s = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (2.48)$$

であることがわかる。同様に、

$$\begin{aligned} s &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ u &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned} \quad (2.49)$$

図 2.8 (x, y) 座標系から (s, u) 座標系への変換

$$\begin{aligned} x &= s \cos \theta - u \sin \theta \\ y &= s \sin \theta + u \cos \theta \end{aligned} \quad (2.50)$$

という関係で相互に変換できることがわかる。よって、

$$\begin{aligned} g(s, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta) du \end{aligned} \quad (2.51)$$

と書き表せる。式 2.51 は ray-sum と呼ばれる。図 2.47 に描いたように、X 線の光線に沿って被写体を素直に積分した形になっているからである。続いて Radon 変換 $g(s, \theta)$ のフーリエ変換を s についておこなってみる。

$$G_{\theta}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s, \theta) \exp(-j2\pi ks) ds \quad (2.52)$$

式 2.52 に式 2.51 を代入すると、

$$G_{\theta}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta) \exp(-j2\pi ks) ds du \quad (2.53)$$

となる。式 2.49, 2.50 から $dx dy = ds du$ だから^{*5}、

$$\begin{aligned} G_\theta(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-j2\pi k(x \cos \theta + y \sin \theta)) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-j2\pi((k \cos \theta)x + (k \sin \theta)y)) dx dy \quad (2.54) \\ &= F(k \cos \theta, k \sin \theta) \end{aligned}$$

となることが明らかとなった。ここに $F(k \cos \theta, k \sin \theta)$ は被写体 $f(x, y)$ をフーリエ変換したものである。同様にして $G_\theta(k)$ は、式 2.47 にしたがって CT 装置から得られる測定量 G_θ をフーリエ変換したものであるから、式 2.54 の両辺をフーリエ逆変換すれば、元の被写体 $f(x, y)$ を推定できる。

2.6 ラプラス変換

ラプラス変換

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (2.55)$$

で定義される $F(s)$ の計算操作を関数 $f(t)$ のラプラス変換という。ここで s は2つの実数 σ, ω を用いて $s = \sigma + j\omega$ とする。なおラプラス変換では表記の簡素化のため、とくに $\mathcal{L}[f(t)]$ と表すことがある。

2.6.1 導出

まず始めに、工学上で扱う問題は $t \geq 0$ であることを確認しておく。制御工学には因果性システムという概念がある。世の中のあらゆる制御システムは、過去の値をもとに未来の値を計算する。では「過去」の値はいつから存在するのか。例えば車のエンジン制御システムを考える。エンジンが掛かっ

^{*5} 例えば式 2.49 から $\frac{du}{dx} = -\sin \theta$ 、式 2.50 からは $\frac{dx}{du} = -\sin \theta (= \frac{du}{dx})$ となる。よって $du \neq 0, dx \neq 0$ を念頭におけば、 $du = dx$ であることがわかる。

ていない状態でアクセルを踏んでもエンジンには何の変化も生じないし、また、掛かった後のエンジンに影響を与えないことも明らかである。つまり、制御が開始される以前の情報は意味を持たないわけである。

制御工学では、因果性システムの考え方から時刻 $t < 0$ では $f(t) = 0$ としている。つまり $t = 0$ で制御が始まるとするわけである。このことは、以下で説明する、ラプラス変換の導出に深くかかわってくる。→ここから複そふーりえ変換のマイナス積分区間を 0 にしてラプラス変換に持ち込む

第 3 章

Schor モデル

- 3.1 Schor モデル概観
- 3.2 プリズムアダプテーションの理解
- 3.3 複視の精密理解
- 3.4 静的斜位補正器への応用
- 3.5 動的斜位補正器の検討

第 4 章

斜視発症モデル

4.1 非線形システム論

4.2

参考文献

- [1] Seiya Ishino et. al, Dopamine error signal to actively cope with lack of expected reward, Science Advances, 9(10), 2023.
- [2] THE RELATIONSHIP BETWEEN FUSIONAL VERGENCE EYE MOVEMENTS AND FIXATION DISPARITY, Clifton M. Schor, Vis. Res, 19, pp. 1359-1367, 1979.
- [3] 東大塾長の理系ラボ, <https://rikeilabo.com/>
- [4] 浅野 晃, 第4部・CTスキャナー投影からの画像の再構成 / Radon変換と投影定理, http://racco.mikeneko.jp/Kougi/2012s/IPPR/2012s_ippr12.pdf.
- [5] 橋本 修志, 二種類の視細胞 (錐体と桿体) の応答特性を決める分子メカニズム, 生産と技術, 72(3), 2020.
- [6] Dave's space, Quadrature Amplitude Modulation (QAM): Explained, <https://youtu.be/1asY7-NZ93g?feature=shared>.
- [7] Mikael Häggström, Scrollable computed tomography images of a normal brain (case 1), https://commons.wikimedia.org/wiki/Scrollable_computed_tomography_images.
- [8] V.V.Krishnan, A Heuristic Model for the Human Vergence Eye Movement System, IEEE Trans. Biomed. Engr, BME-24(1), 1977.
- [9] 長谷部 聡, Cliff Schor の調節と輻湊の制御モデルと眼科診療, 日本視能訓練士協会誌, 48, 2019.

- [10] Steven H. Strogatz, 田中ほか訳, ストロガッツ 非線形ダイナミクスとカオス, 丸善出版, 2015.