

# 眼球運動を理解するための 電気数学

Electrical Engineering Mathematics for Ocular Kinematics



表紙は伝 Leonardo da Vinci 作、Salvator Mundi(1499-1510 年頃)。  
外斜視 (-8.6° ) である [13]。

## はじめに

このノートは、眼球運動を数理的に理解していただくために書きました。

微小斜視による複視や斜視そのものは、眼位が望まざる状態になっていることを反映していると解釈できます。実は解析を進めると、このような眼位異常が起こる前に、眼球がどのような軌跡を描いていたかが重要であることが示されます。こうしたモノの動きを追跡する学問を、たとえばロボット工学などの分野では運動学と呼んでいます。眼球運動の語を本書のタイトルに選んだ理由はここにあります。

そして、このノートでは数理的な理解を目指す理由は、それが私のおすすめだからです。私はエンジニアリングを日々の営みとしていますが、そこでは測定器や工具と並び、数学が強力な道具となっています。眼科領域でも検査と治療はセットなわけですから、斜視学でも同じように数学は役に立つのではないかでしょうか。つまり数学は手術器具や大型弱視鏡などと同様に、使い甲斐のあるツールであると私は確信しています。私は眼球運動学で使えそうな数学に対して多少の専門教育を受けてきましたので、先生方にツールの使い方をお伝えできると思います。そしてそれがお役に立てればと願っています。

それに、もしかすると本書でこれから考えていく内容は新雪の降り積もった平原のような、前人未踏の世界につながっているかもしれません。そうした場所を探検するのは、とても特別で、とても楽しいことです。私にとっては、私を治療していただいたおかげです。もしお付き合いいただけるよう

したら、また出来ましたらちょくちょく、本書のレビューをいただけますと幸いです。ノートは読み手にわかりやすいものになって初めて、意味あるものとなるからです。

本書では眼球運動を理解する上で的一大スタンダードと考えられる [8]、Schor モデルの理解を目指します。Schor モデルは制御工学の一分野である古典制御論を応用したものです。制御工学は、入力と出力を持つシステムについて、システムの中身（モデル）を数理的に把握することを通じて、入出力の関係を自由自在に設計することを目的とした学問です。したがって Schor モデルが理解できれば、より精密な診断や新しい治療ができるかもしれません。

そして古典制御論では、具体的にはラプラス変換という解析学<sup>\*1</sup>のツールを使います。よって本書では先ずラプラス変換の導出までご案内し、眼球運動への魅力へつなげていければと思います。いわゆる、工学部で使う数学・使えばいい数学、の考え方で進めます。ほんとうの数学からすると厳密ではないと思いますが、ご容赦ください。また医学系のカリキュラムは詳しく知らないのですが、工学部のそれに比べると数学が表に出てこないと感じました。そこで本書は高校数学の範囲を思い出しながら、しかしお忙しいこともあると思いますので、軽く読み進められるように編集していきます。ところで、ラプラス変換にたどり着くまでには少々時間がかかります。それでも時間がかかる分、道中にはいくつか面白いことがありますので多少の道草をご用意しました。<sup>\*2</sup>。

最後に非線形システム論を Schor モデルに適用し発展させることで、昨今話題のスマホ内斜視等を絡めて、斜視の発症モデルを議論できればと考えています。

本書は A5 版の印刷に最適化して組版しています

<sup>\*1</sup> 解析学とは乱暴にいってしまって、いわゆる微分、積分のあたりと思っていただければ良いと思います。

<sup>\*2</sup> X 線 CT の原理など

# 目次

はじめに	3
<b>第1章 導入</b>	7
1.1 技術体系図	7
1.2 斜視の歴史	8
1.3 フィードバック機構	12
1.3.1 制御工学とは	12
1.3.2 積分的負帰還システム	12
1.3.3 差分方程式とネイピア数の関係	18
1.3.4 差分方程式と微分方程式	21
1.3.5 $h$ の解、フィードバックの成立	22
1.3.6 風呂桶-バケツモデルの更新	23
1.4 高速神経積分器	25
1.4.1 モデルの詳細化	25
1.4.2 固視ずれの登場	27
1.4.3 厳密解と時定数	27
1.4.4 パラメータの同定	29
<b>第2章 固有関数と直交関数</b>	33
2.1 マクローリン展開	34
2.1.1 導出	34

---

2.2	フーリエ級数展開 . . . . .	36
2.2.1	導出 . . . . .	37
2.2.2	応用 . . . . .	39
2.3	三角関数の直交性 . . . . .	41
2.3.1	導出 . . . . .	41
2.4	オイラーの定理 . . . . .	46
2.4.1	導出 . . . . .	47
2.4.2	応用 . . . . .	48
2.5	フーリエ変換 . . . . .	48
2.5.1	導出 . . . . .	48
2.6	ラプラス変換 . . . . .	54
2.6.1	導出 . . . . .	54
<b>第3章</b>	<b>Schor モデル</b>	<b>56</b>
3.1	Schor モデル概観 . . . . .	56
3.2	プリズムアダプテーションの理解 . . . . .	56
3.3	複視の精密理解 . . . . .	56
3.4	静的斜位補正器への応用 . . . . .	56
3.5	動的斜位補正器の検討 . . . . .	56
<b>第4章</b>	<b>斜視発症モデル</b>	<b>57</b>
4.1	非線形システム論 . . . . .	57
<b>第5章</b>	<b>眼位の座標表現</b>	<b>58</b>
5.1	極座標 . . . . .	58
5.2	四元数 . . . . .	58
<b>参考文献</b>		<b>59</b>

# 1 導入

## 1.1 技術体系図

図 1.1 に、本書を通じた技術体系の全景を示す。本書では図 1.1 に描いた、各々の数学的技術の獲得を目指す。

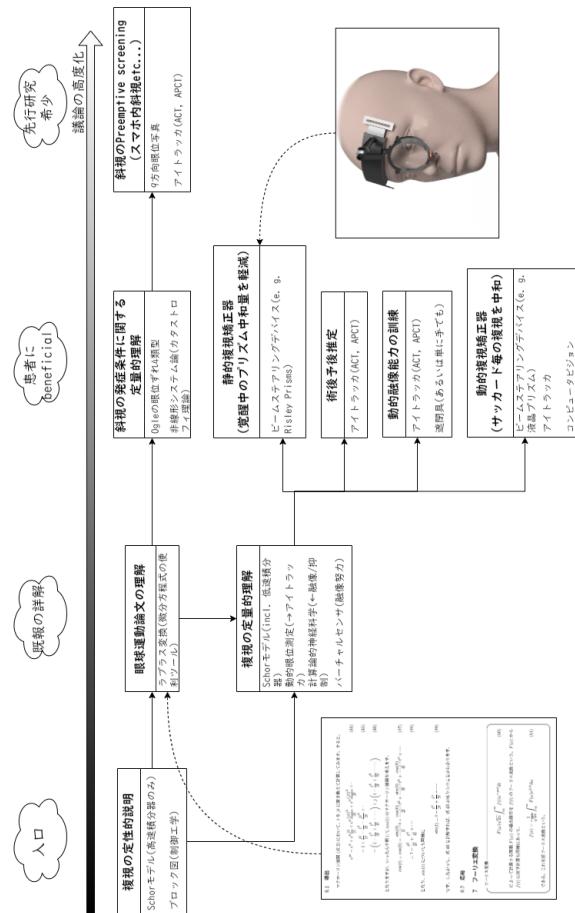


図 1.1: テクノロジツリー

## 1.2 斜視の歴史

斜視は早くは古代エジプトにおいて気づかれていた。例えばセソストリス3世像(図1.3)は外斜視を示しているといわれる[15]。古代エジプトの眼科処置に関しては、例えば図1.2の壁画が発見されている。これをもって、白

内障手術が行われるほど高度であったとする説もあるが、その主張の正否に



図 1.2: 壁画 (イブイの墓・紀元前 1279–1213 年頃)、米メトロポリタン美術館蔵

については議論が分かれるようである [19]。さておき、斜視に関していえばその治療技術は現在の観点からするとかなり異質なものであり (亀の脳を軟膏として用いた [18])、次のブレイクスルーまでにはかなりの年月を待たなければならない。

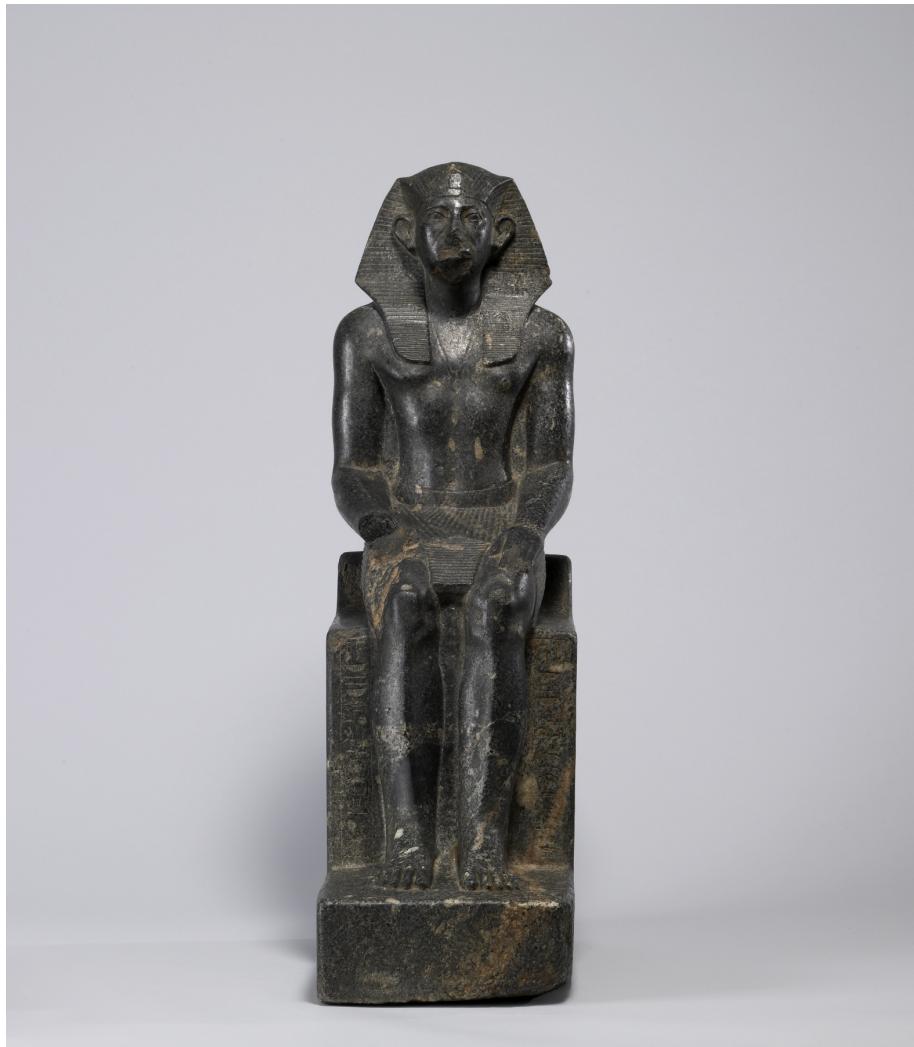


図 1.3: セソストリス 3 世像、紀元前 1850 年頃 (エジプト第 12 王朝)、米国  
ウォルターズ美術館蔵

そしてさらに時代が進み、アッバース朝時代のバグダードで活躍した天文

学者・數学者であるサービト・イブン・クッラ (836-901 年) が著した書「視覚と知覚」では、次のことが述べられている。「斜視は正常な眼に眼帯を施すことでの治療できる見込みがある。ひとたび遮閉を始めたならば、偏位眼の視力が完全となり、その眼の視覚は正常になる。斜視眼の視覚が完全に正常になるまで、健側眼の遮閉は解除してはならない。」すなわち遮閉療法の始まりである [14]。

しかし今日のカバーテストのような、遮閉によって斜視が顕在化することへの気づきを得るまでにはさらに時間がかかった。1722 年のフランス、シャルル・ドゥ・サン・イヴの著書「眼疾患に関する新しい論文」で彼は次のようにつづっている [14]。「非斜視眼を遮閉すると、斜視眼が正面に向く。そして遮閉を解除すると、正面を向いていた斜視眼に斜視が生じることがわかる。」

その後もマドックスなどの大家が現れ、斜視学の研究が進むことになるが、よくよく考えれば斜視や斜位、複視などは総合していえば眼球運動の異常である。眼球運動の問題を正確に、すなわち定性的な知識と定量的な検査結果とを統合して捉えるには数理的な解析が必要であり、そのためには近代的な制御工学理論が欠かせない。このような立場から研究されるようになるのは、上述した長い歴史からするとごく最近のことである。今回のキー・アイテムとなる制御工学とは、機電系学生の必修科目であるが、大戦前後に急速に基礎が確立された学問でもある ([16], [17])。眼球運動の数理的解析が比較的最近になってから進んだのは、こうした他領域からの流れも多分に影響しているに違いない。

いずれにしても、制御工学理論を眼球運動に応用することで定性・定量両面の議論を統合することができる。これによって次のような疑問に答えることができる、あるいはできる可能性がある。もちろん、臨床的な価値もあるに違いない；

問い合わせ



斜視角から複視の度合を計算する公式はあるか？検査で斜視の危険度を判定できるか？斜視はどのような条件が成立したときに発症するか？逆に、斜視を矯正するために必要な術量やプリズム角は計算でわかるか？どうして最大斜視角まで矯正しなくても斜視が治まるのか？輻轆訓練の効果を判定するパラメータは何か？乳幼児の複視を発見できそうな検査方法はないだろうか？

以降では、徐々に詳しくしながら輻轆運動のモデルを考えていく。以降では数学を徐々に用いる。制御工学的な眼球運動学が比較的新しい分野であることは前述したものの、70年以上前の数学である。よって幸い、現代の高校数学の範囲内で充分に理解をすることができる。復習をかねて進めたい。

## 1.3 フィードバック機構

### 1.3.1 制御工学とは

冒頭以来、「制御工学」の語を連発しているのでここで軽くご説明したい。

### 1.3.2 積分的負帰還システム

輻轆運動を調べた初期の研究に Rashbass ら [10] の業績がある。彼らは両眼分離下で種々の両眼視差を意図的に作り出し、そのときの眼球運動を観察した。その一つを図 1.4 に示す。Rashbass らは図 1.4 などの結果から、輻轆運動が積分的なフィードバックシステムによって成り立っていることを示した。以降で微積分の復習をしつつ説明する。

すこし唐突になってしまふが、図 1.4 の現象を、風呂桶にバケツで水を入れることで例えてみたい（図 1.5）。長さ 160 cm、幅 50 cm の浴槽<sup>\*1</sup>に、一

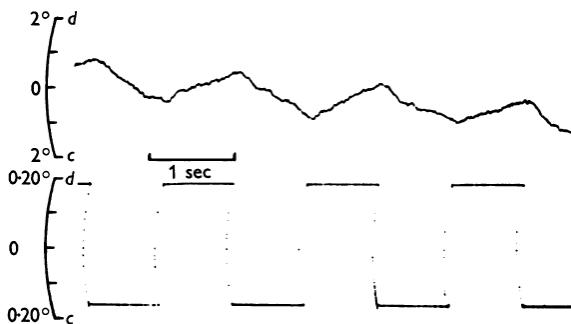


図 1.4: 視差刺激 (下) に対する輻轆運動 (上)。Rashbass et. al([10]) より



図 1.5: 風呂桶にバケツで水を入れる

杯  $10\ell$  の水を入れるとする。バケツ一杯ごとに、浴槽の水位は  $10 \times 1000 \text{ cm}^3 / (160 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}) = 1.25 \text{ cm}$  上がる。よって空の状態から 1 秒間に 1 回、40 秒間にわたって水を入れ続けると、40 秒後の水深は 50 cm になる。当然、逆にここから同じペースで水を汲みだすと 40 秒後に浴槽の水はゼロとなる。図 1.6 にその様子を波形で示す。

図 1.6 を繰り返すとどうなるか。図 1.4 と図 1.7 を見比べると、前述した流し込み/汲み出しを一定間隔で繰り返す動作は図 1.4 の挙動と似ていること

---

\*1 この浴槽が入る浴室を 1 坪タイプといい、よくあるサイズであるらしい。

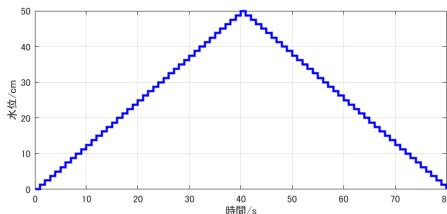


図 1.6: 浴槽の水位変化

がわかる。粗削りながらモデル化の第一歩ができた。

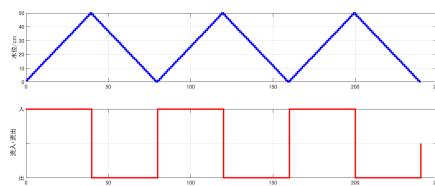


図 1.7: 浴槽の水位変化 (繰り返し)

Rashbass らによって気づかれた積分的フィードバックシステムは、Cook[11],[12] らによって外眼筋の詳細なモデルが追加され、続いて Krishnan[7], Schor[1] によって制御工学の近代的な形式へ書き直されるに至って精細さを増した。

その、輻轆運動を支配していると信じられている負帰還システムを図 1.8 に示す。

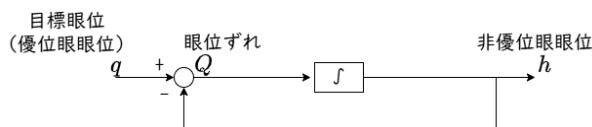


図 1.8: 積分的負帰還システム

輻輳運動を図 1.8 をもとに言いあらわすと、輻輳系の役割は、優位眼眼位  $q$  に対して非優位眼眼位  $h$  を、可能な限り精密に追従させることであるといえる。

そして図 1.8 で表している積分要素  $\int$  は、図 1.5 に示す浴槽である。先ほどは強制的に眼位ずれ  $Q$  を作り出していたが、今度は自然視のことを考えてみたい。神経積分器 (=浴槽) からしてみれば、自然視であるか否かは感知することができない。つまり眼位ずれ  $Q$  にしたがって水が入れられるのは従来同等である。

自然視を考えるにあたって変わることは目標眼位（優位眼眼位）と非優位眼眼位の関係である。これは風呂桶-バケツモデルでは、浴槽の目標水位（目標眼位）を定め、実際の水位（非優位眼眼位）を解析することに相当する。そして、バケツ一杯分の水量が固定であったところ、今度はバケツ一杯の水量は目標水位と実際の水位との差（以下水位差）であるとする。このようにすると、当初は水位差が大きく、よって浴槽の水位は勢いよく目標水位に向かう。水位差が減少するとその勢いが抑えられ、ついには水位差ゼロで飽和し、このときのバケツの水量はゼロであるといえる。

この挙動は、融像運動の一般的な動作によく似ていると感じられるのではないかと思う。

では、例として具体的な数値条件を次のように定め、計算を始める。

### 数値条件

浴槽の初期水位を 0 cm とする。ここから水位を 35 cm にし、それを維持したい。（眼位で例えると、例えば正面視  $0^\circ$  の状態から、 $35^\circ$  右方を新たに固視する場合など。）浴槽やバケツの寸法は従来同等とする。ただし、バケツで浴槽に水を入れるペースは 3 秒に 1 回とする。

さて、まず初期状態でバケツに入れる水の量はどうするか。ここでは  $3.5\ell$  とする。そのタネは水位差、 $35\text{ cm} - 0\text{ cm} = 35\text{ cm}$  である。以降で行う

計算に照らせば、バケツの水量は水位差から直接、 $35\ell$  としてもよいし、逆に  $0.035\ell$  のような微小な値でも成立はする。つまり、水位差とバケツの水位を結びつける比例定数は任意である<sup>\*2</sup>。任意ではあるが、単純に  $35\ell$  のような大きな水量では「ふつうの」バケツに対して大きすぎる。そこでこの場では  $0.1\ell/cm$  とした。

さて優位眼眼位すなわち目標水位は  $35\text{ cm}$  で固定である。このときの実際水位  $h$  は時間が経つにつれどう変化するか。はじめに時刻  $t = 0\text{ s}$  であるとき、バケツの水量はどうか。前述した通り  $h = 0\text{ cm}$  である。 $Q = (35\text{ cm} - 0\text{ cm}) \times 0.1\ell/\text{cm} = 3.5\text{ cm}$  である。この水を直ちに浴槽に入れる。浴槽の水位は  $h = 3.5\ell \times 1000\text{ cm}^3 / (150\text{ cm} \times 50\text{ cm}) = 0.467\text{ cm}$  となる。

つぎに時間が進み、 $t = 3\text{s}$  となったときに再びバケツの水量を計算し、浴槽に水を入れる。浴槽の水位は  $0.467\text{ cm}$  となっているから、バケツの水量は  $Q = (35 - 0.467) \times 0.1\ell/\text{cm} = 3.453\ell$  となり若干減る。この水も直ちに浴槽に入れる。浴槽の水位は  $h = 0.467\text{ cm} + 3.453\ell \times 1000\text{ cm}^3 / (150\text{ cm} \times 50\text{ cm}) = 0.927\text{ cm}$  となる。

続いて時間を進めて  $t = 6\text{ s}$  の時点では、 $Q = (35 - 0.927) \times 0.1\ell/\text{cm} = 3.407\ell$  浴槽の水位は  $h = 0.927\text{ cm} + 3.407\ell \times 1000\text{ cm}^3 / (150\text{ cm} \times 50\text{ cm}) = 1.381\text{ cm}$  となる。

さらなる  $h$  や  $Q$  の時間変化について、付録 differentialEquation.xlsx を参照していただきたい。この excel シートが明らかにするのは、第一には現在水位が目標水位に飽和することである。つまり風呂桶-バケツモデル(並びに Schor らのモデル)による眼位制御によって、非優位眼眼位は優位眼眼位に比例することが示される。加えて  $h$ 、 $Q$  の数値変化や、 $h$ 、 $Q$  が曲線を描いていることもわかる。数値変化はコンピュータで計算しているので、その結果は比較的正確である。つまり定量的な結果を得ることには長けている。

---

<sup>\*2</sup> この比例定数を制御工学ではゲインという。ゲインが高ければ高いほど、微小な眼位ずれでも敏感に反応するシステムとなる。

しかし、定性的な議論をしようとすると、非優位眼眼位が優位眼眼位に追従するよう制御されること、眼位変化が曲線を描いていることがわかるぐらいが精々で、限界は近い。実はさらに解析を進めると、複視をはじめとした眼球運動障害を説明するモデルを作ることができる。ここに、この限界を突破するために数学を持ち出す意味が出てくる。以降で一般化を試みつつ進める。

まず、時間変化  $t$  は 3 秒刻みで追跡していたことを反映して  $t_0 = 0, t_1 = 3, t_2 = 6$  のように表記すると便利である。さらに一般的な表記を追求して、 $t_n = n\Delta t$  と書く。 $n = 0, 1, 2, \dots$ 、 $\Delta t = 3$  である。すると今までの計算は表 1.1 のようにまとめられる<sup>\*3</sup>。

表 1.1: 各パラメータの時間変化

$t/\text{s}$	$h/\text{cm}$	$Q/\ell$
$t_0 = 0$	$h_0 = 0$	$Q_0 = 3.5$
$t_1 = 3$	$h_1 = h_0 + Q_0\Delta t = 0.467$	$Q_1 = Q_0 - h_1 = 3.453$
$t_2 = 6$	$h_2 = h_1 + Q_1\Delta t = 0.927$	$Q_2 = Q_0 - h_2 = 3.407$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$t_n = n\Delta t$	$h_n = h_{n-1} + Q_{n-1}\Delta t$	$Q_n = Q_0 - h_n$

表 1.1 から、以下の各式を得ることができた。次節でこれを解析する。

$$t_n = n\Delta t \quad (1.1)$$

$$h_n = h_{n-1} + Q_{n-1} \quad (1.2)$$

$$Q_n = Q_0 - h_n \quad (1.3)$$

---

<sup>\*3</sup> 本書では国際単位系 (SI) の表記法にしたがって表現する。単位を伴う数値は  $1000 \text{ cm}^2$  のように書き、式として扱う数値は  $t/\text{s}$  のように書く。世間で通例となっているように、 $1000[\text{cm}^2]$  と書いても意味は通じるのであるが、多少のわがままをお許しいただきたい。

### 1.3.3 差分方程式とネイピア数の関係

式 1.2、1.3 より、

$$Q_n - Q_{n-1} = Q_0 - h_n - (Q_0 - h_{n-1}) \quad (1.4)$$

$$= h_{n-1} - h_n \quad (1.5)$$

$$= -Q_{n-1}\Delta t \quad (1.6)$$

となる。<sup>4</sup>式 1.6 はさらに次のように変形できるはずである。

$$Q_n = Q_{n-1}(1 - \Delta t) \quad (1.7)$$

ここから、

$$Q_1 = Q_0(1 - \Delta t) \quad (1.8)$$

$$Q_2 = Q_1(1 - \Delta t) = Q_0(1 - \Delta t)^2 \quad (1.9)$$

⋮

$$Q_n = Q_0(1 - \Delta t)^n \quad (1.10)$$

さらに式 1.1 を用いて  $n$  を消去して、

$$Q_n = Q_0(1 - \Delta t)^{t/\Delta t} \quad (1.11)$$

を得る。今まで時間は 3 秒刻みとしていた。これはもとより恣意的な数値設定である。生理学的には、むしろ時間刻みは無限に小さいものと考えたほうが適切に違いない。つまり刻み  $n$  を無限に細かくして、 $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n$  を考えれば、各時刻における  $Q$  の値、 $Q(t)$  を求められるはずである。実際に計

---

<sup>4</sup> 左辺をみると、時間的に隣り合った  $Q$  同士の差であることに気づく。このことからこの種の式は差分方程式と呼ばれる。差分方程式をコンピュータで解く方法を有限差分法といい、前述した付録の excel シートはその簡単な例である。

算をしてみる。

$$q(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n \quad (1.12)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} q(1 - \Delta t)^{t/\Delta t} \quad (1.13)$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow \infty} q \left[ \left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^{-\tau} \right]^t \quad (1.14)$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow \infty} q \left[ \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^{\tau}} \right]^t \quad (1.15)$$

ただし、見やすさのために  $\tau = -\frac{1}{\Delta t}$  とした。実は、 $\lim_{k \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{k})^k$  はある一定の数 (2.71828182845...) に収束することが知られている<sup>\*5</sup>。これこそは、かつて習ったネイピア数である。一般的には記号  $e$  で表すのだった。元々ネイピア数は複利計算の研究 (資金において、貸出期間をどのくらいに設定すれば一番儲かるか?) から出たものであるらしい。ネイピア数を用いて、式 1.15 の解は、

$$q(t) = qe^{-t} \quad (1.16)$$

と表せる。

### 道草-ネイピア数



複利計算とは生臭い話かもしれないが、かつて次のような思考があつたらしい。

例えば 100 万円を年利 10% で 1 年間貸すとすると、1 年後には 110 万円となる。よって 10 万円の利益が出る。もし半年ごとに分けて貸したらどうなるか。この場合、上期終了時の金額は  $100 + 100 \times 0.1/2 = 105$  万円となる。下期は 105 万円を元に貸すから、下期終了時の金額は  $105 + 105 \times 0.1/2 = 110.25$  万円となる。通期で貸

---

<sup>\*5</sup> これは一応電卓でも確かめられる。例えば  $n = 100$  とすれば、 $1 + \frac{1}{n} = 1.01$  である。そこでまず  $1.01 \times 1.01$  を計算し、その後はイコールボタンを 99 回押す。すると近似値が得られる。

すよりも、半年ごとに貸し変えた方が利益が出ることになる。

「ということは、もっと貸出期間を分割したらもっと儲かる…?」という問い合わせネイピア数を生んだ。1年間を  $s$  期に分けて貸しだし、年率を  $r$ 、元本を  $M$  とすると1年後の金額は

$$M \left(1 + \frac{r}{s}\right)^s = M \left[ \left(1 + \frac{1}{s/r}\right)^{s/r} \right]^r \quad (1.17)$$

$$= M \left(1 + \frac{1}{m}\right)^r \quad (1.18)$$

となる。ただし、 $m = s/r$ とした。グラフに示すと図1.9のようになる。

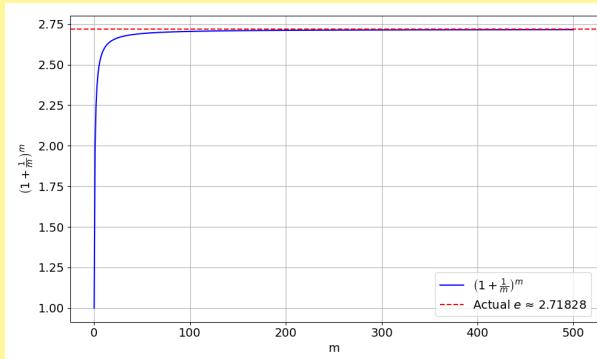


図1.9: 分割数と1年後の金額

昔の人は、必ず賢く期間を分割することで利益は増え続けると考えたのかもしれない。しかし無限には大きくならず一定値に落ち着くことがわかったのである。

### 1.3.4 差分方程式と微分方程式

式 1.6 は、

$$\frac{Q_n - Q_{n-1}}{\Delta t} = -Q_n \quad (1.19)$$

とも変形できる。 $\Delta t$  が微小であることから、式 1.19 は高校数学では、これを微分

$$\frac{dq}{dt} = -q \quad (1.20)$$

として表しても良いのであった。すなわち微分方程式 1.20 の解が式 1.16 であるともいえる。<sup>6</sup>

この手の式は色々な場面で出てくるので、再利用できるようにかつて暗記を勧められたのが指数関数の微積分の公式である。つまり式 1.20 から、

#### ■ 定理 1.3.1: 指数関数の微積分の公式

$$\frac{d}{dt} [e^{-t}] = -e^{-t} \quad (1.21)$$

あるいは表記を改めて、

$$(e^{-t})' = -e^{-t} \quad (1.22)$$

より一般的には

$$(e^a)' = e^a \quad (1.23)$$

また、

$$\int e^a da = e^a \quad (1.24)$$

---

である（式 1.23 の証明は式 1.19 の右辺の符号を + とすればできる）。これららの公式から、ネイピア数の指数関数は、微分してもその形が変わらない

---

<sup>6</sup> そして積分が、微分方程式を解く方法である。冒頭で触れた「積分的フィードバック」の語はここにつながる話である。

ことが読み取れる。この性質は第2章で重要になってくる。

### 1.3.5 $h$ の解、フィードバックの成立

今までの議論は、図1.8の負帰還システムが、優位眼眼位  $q$  に対して非優位眼眼位  $h$  を、可能な限り精密に追従させられるか否か、ということだった。現時点では分かることについて、まとめに入る。

式1.2より、

$$\frac{h_n - h_{n-1}}{\Delta t} = Q_{n-1} \quad (1.25)$$

なので、

$$\frac{dh}{dt} = Q \quad (1.26)$$

と表せる。よって任意の定数  $H, C$  を用いて

$$h = H \int_0^t e^{-t} dt \quad (1.27)$$

$$= He^{-t} + C \quad (1.28)$$

が成り立つ。式1.28で  $t = \infty$  とすると、 $h = H$  である。式1.3から、

$$Q_\infty = q - h_\infty \quad (1.29)$$

$$= q - H \quad (1.30)$$

また式1.16からは

$$q(\infty) = qe^{-\infty} = 0 \quad (1.31)$$

である。よって、 $H = q$  とわかる。また、 $h(0) = 0$  であるから、式1.28からは  $0 = -H + C$  であり、したがって  $C = q$  である。よって式1.28は

$$h(t) = q(1 - e^{-t}) \quad (1.32)$$

となる。これが  $h$  の最終的な解である。式1.32に  $t = \infty$  を代入すれば、 $h(\infty) = Q_0$  である。つまり、 $t = \infty$  で優位眼眼位  $q$  と非優位眼眼位  $h$  は等しくなる。フィードバック機構によって眼位が意図通り制御されることが、ここに示された。

### 1.3.6 風呂桶-バケツモデルの更新

第 1.3.3 項で、 $\Delta t$  を無限小にするのが妥当であるとした。その結果、恣意的な値を設定していた  $\Delta t$  から脱却し、第 1.3.4 項で述べた微分計算の公式に結びつけることができた。より万能性の高い数学操作に置き換えることができたのである。

風呂桶-バケツモデルにおいて  $\Delta t$  を無限小にすることは、バケツを無限に小さくしつつ水を注ぎ入れる頻度を無限に増やすことに相当する。このような描像を再現することはもちろん現実には無理である。思考実験であるとしても、もうすこし直観的な考え方がほしい。よって風呂桶-バケツモデル自体も卒業することにする。以下で、どのような描写が適切か考えていきたい。

まず、先ほど無理であるとした状況を緩和したい。そもそもバケツを忙しく風呂桶にもっていきひっくり返すことはたいへんである。そこで工場のラインのようにベルトコンベアに載せたらどうか。楽である。ついでにバケツに水を入れることも楽になればもっと良い。すなわち便利な機械をベルトコンベアの端におく。この機械は水量の計算をしてバケツに水を自動で入れてくれる。図 1.10 にこれらのイメージを示す。

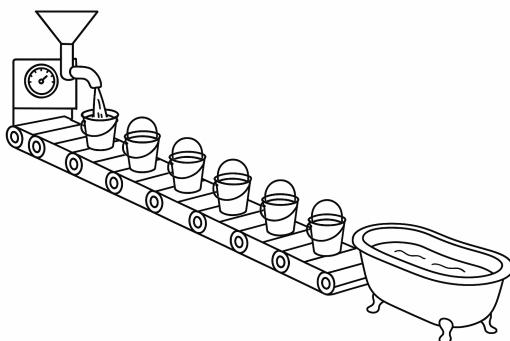


図 1.10: ベルトコンベアと魔法の機械によって楽をする

そのうえでバケツを小さくしていくとどうなるか。結局のところ、バケツ

に入る水量を小さくしていきたいのだから、バケツを薄くしても目的が達成できる。そして  $\Delta t$  を小さくすることは、浴槽にバケツを頻繁に送ることにあたるので、これはベルトコンベア上のバケツ同士の間隔を詰めればよい。ついでにバケツを取り除いてしまう。今は水量だけを議論しているので、ただの水の塊であったとしても議論は同じである。以上の思考実験を極限まで進めると、ぎゅうぎゅうに詰まった水の塊が線上に並ぶことになる。これは何かに似ていないだろうか。言ってしまえば、パイプであるように見えないだろうか。

つまるところ、 $\Delta t$  を無限小にすると、バケツの水量はパイプの流量（単位は例えば  $\ell/s$ ）になるといえる。それから、バケツに水を入れる機械もあるのだった。これは蛇口に読み替えることができる。蛇口はパイプの大元にあって、水量を決めるからである。

ここまで考察を描くと図 1.11 のようになる。

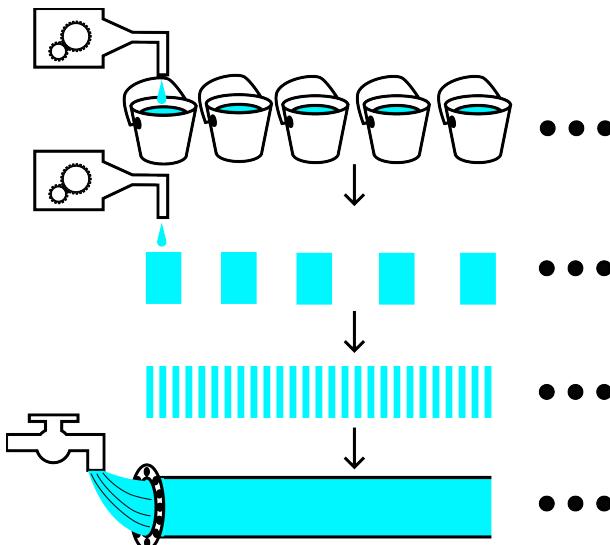


図 1.11: バケツを無限小にしてパイプに変える

風呂桶-バケツモデルを卒業することができた。いわば、風呂桶-蛇口モデルに進化したわけであるが、このモデルは次節で直ちに使うことになる。

## 1.4 高速神経積分器

図 1.8 から始めた議論は、そこで用いたモデルが単純すぎるため、実際の症例には適用しがたいことが多々あるはずである。実際、複視などは説明できないことを第 1.3.2 項の最後で述べた。導出した微分方程式の公式などを活用して徐々にモデルを詳細化していく。

### 1.4.1 モデルの詳細化

輻輳運動では固視ずれが生じることがあるが、図 1.8 に示した制御システムでは固視ずれを説明することができない。 $t = \infty$  で優位眼眼位  $q$  と非優位眼眼位  $h$  は等しくなっていたからである。しかし今や微分方程式を解けるようになったので、より詳細なモデルを扱うことができる。

具体的には図 1.12 のモデルであり、このモデルでは固視ずれを説明できる。Schor モデルから輻輳系のみを、いわゆる高速積分器に限って抽出した

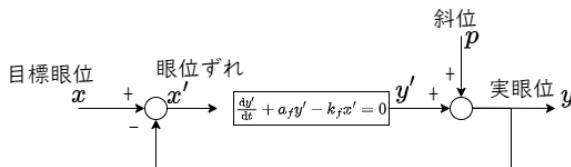


図 1.12: Schor モデル

のは同様である。だが、その高速積分器を原著論文に沿って描き表している

ことが新しい。図 1.12 から、次の連立方程式が導かれる。

$$\frac{dy'}{dt} + a_f y' - k_f x' = 0 \quad (1.33)$$

$$x - y = x' \quad (1.34)$$

$$y' + p = y \quad (1.35)$$

式 1.33 が 1.3.5 項の議論で用いた積分要素に相当し、図 1.12 に書かれている。水を入れる容器でたとえると図 1.13 に相当する。図 1.5 に示した風呂

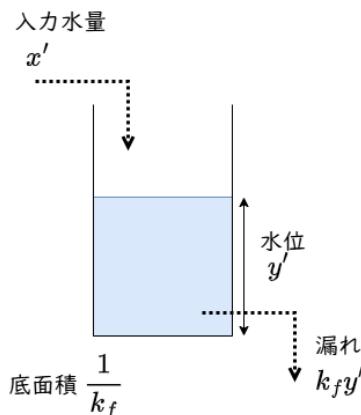


図 1.13: Schor モデル (図 1.12) における積分要素

桶と異なり、水位  $y'$  に比例して水が抜けるようになっている。このことから、積分要素 1.33 は漏れ積分器 (Leaky integrator) と呼ばれる。ところで、これらの式に対して外から観測できるのはあくまでも  $x, y$ 、それに  $p$  である。 $x', y'$  は観測することが難しい。そこで式 1.33 に式 1.34, 1.35 を代入すれば  $x, y$  だけの式となり取り扱いが楽になる。

$$\frac{dy}{dt} + (a_f + k_f)y = k_f x + a_f p \quad (1.36)$$

### 1.4.2 固視ずれの登場

得られた式 1.36 の活用を考える。まず、固視の状況とは充分な時間が経過し、非優位眼眼位の変化がなくなったときを指すと考えられるから、言いかえれば  $\frac{dy}{dt} = 0$  である。式 1.36 にこれを代入すれば

$$y = \frac{k_f x + a_f p}{a_f + k_f} \quad (1.37)$$

が得られる。式 1.37 が物語ることは、第 1.3.5 項の議論とは打って変わり、固視状況下において非優位眼眼位  $y$  が優位眼眼位  $x$  とは一致しないということである。融像域の異常などを除けば、眼位ずれそのもの  $|y - x|$  が複視の原因となるはずだから、この結果は詳しく調べる価値がある。第 1.3.5 項の議論で用いたモデル(図 1.8)を、より精密な図 1.12 のモデルに代えることで興味深い結論を得ることができたのである。

### 1.4.3 厳密解と時定数

それでは式 1.37 のパラメータ  $k_f, a_f$  は何なのか。式 1.36 を解けばその一端が分かる。

まずは図解で考えたい。再び differentialEquation.xlsx を参照していただきたい。そこには式 1.36 の式を数値計算した例を入れている。この例では初期値ゼロから出発していて、時刻  $t$  が充分大きくなると  $y$  の値は飽和し、その値は式 1.37 で予測されるものに調和する。この観察結果から、ひとまず未定の係数  $\lambda$ を持ち出して

$$y = \frac{k_f x + a_f p}{a_f + k_f} (1 - e^{-\lambda t}) \quad (1.38)$$

が式 1.36 の解になるのではないかという予想が立つ。実際、 $t = 0$  を代入すれば  $y = 0$  となるし、 $t \rightarrow \infty$  とすれば  $y$  は式 1.37 に収束する。では本当に解となるか確かめてみたい。式 1.38 を式 1.36 に代入すると、

$$\frac{k_f x + a_f p}{a_f + k_f} \lambda e^{-\lambda t} + (k_f x + a_f p)(1 - e^{-\lambda t}) = k_f x + a_f p \quad (1.39)$$

となる。式 1.39 はあらゆる時刻で成り立つはずだから、 $t = 0$  を代入してみる。すると  $e^0 = 1$  である事実を便利に利用できて、

$$\lambda = a_f + k_f \quad (1.40)$$

が得られる。式 1.40 を式 1.38 に代入すれば、

$$y = \frac{k_f x + a_f p}{a_f + k_f} (1 - \exp [-(a_f + k_f)t]) \quad (1.41)$$

が導かれる<sup>\*7</sup>。何となく矛盾がなく、これでよさそうである。

なお、昔習ったことを思い出すと、式 1.41 のような式は、すべての時刻  $t$  に関する  $y$  を計算できるので、微分方程式 1.36 の厳密解というのだった。

式 1.41 が示す時系列変化は、至る所が滑らかで、なおかつ 2 次関数などのように最小点なども持たない。グラフからは捉えどころがない。しかし式の形を考えれば、式 1.36 のような微分方程式が元になってさえいれば同じような形に落ち着くはずである。そこで、 $\tau = 1/(a_f + k_f)$  となるような定数を考えると便利である。 $t = \tau$  のとき、

$$y = \frac{k_f x + a_f p}{a_f + k_f} (1 - e^{-1}) \quad (1.42)$$

となる。 $(1 - e^{-1})$  の項<sup>\*8</sup> は式 1.36 のタイプの微分方程式であれば共通である。そこで式 1.41 の特徴を捉えるために便利な定数  $\tau$  を時定数と呼ぶのだった。

そして式のタイプが同じであれば、いつも時定数は時刻 0 から出発して約 63% まで変化したときの時間であるから、実際の時系列データを分析してこのときの時刻をみれば実際の時定数が測定できることになる。以下に、時定数を公式としてまとめておく。

<sup>\*7</sup>  $e^\lambda$  の表記と  $\exp(\lambda)$  の表記は同じ意味をもつ。式 1.41 は文字が多く並ぶため表記  $e^\lambda$  では見づらくなるため、 $\exp(\lambda)$  の形で書いた。

<sup>\*8</sup> 数値を具体的に求めるとき、 $(1 - 1/2.718281828\dots) = 0.63212055\dots$

### ■ 定理 1.4.1: 時定数

とある関数  $f(t)$  があって

$$f(t) = A(1 - e^{-\lambda t}) \quad (1.43)$$

もしくは

$$f(t) = Ae^{-\lambda t} \quad (1.44)$$

と表されるとき、

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad (1.45)$$

で計算できる  $\tau$  を時定数と呼ぶ。時定数は、測定された時系列データに対し、その変化量が約 63% となったときの時間に等しい。

#### 1.4.4 パラメータの同定

以上の議論から、まず  $a_f, k_f$  が眼位の時系列変化の時定数として現れ、その値は  $\tau = 1/(a_f + k_f)$  であることが明らかになった。しかし二つの未知変数  $a_f, k_f$  に対して 1 本の  $(a_f + k_f)$  という和の形しか得られていない。これではまだ分かったとはいえない。もう少し辛抱をいただきたい。

和の形  $(a_f + k_f)$  をほどくためには別の発想が必要である。まず先述の時定数  $\tau = 1/(a_f + k_f)$  を求めた議論の前提は、優位眼眼位  $x$  に対する非優位眼眼位  $y$  の追従、つまり輻輳運動を考えることだった。輻輳運動が必要とされる状況は様々であるが、その一例としては遮閉眼を開閉したときがあるだろう。では、逆に両眼視の状態から一眼遮閉をしたらどうか。このときは

1. 今まで輻輳系に入力されていた、視差  $x'$  の情報が失われる
2. 潜在していた斜位  $p$  が顕在化する

から、図 1.3.5 のフィードバック系が図 1.14 のように書きかえられるはずである。眼位ずれ  $x'$  の情報はもはや存在しない。依然として健全な漏れ積分

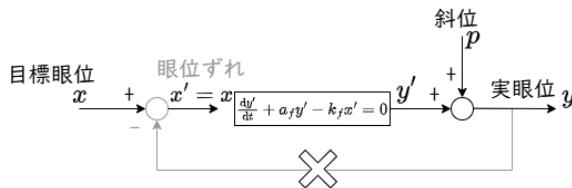


図 1.14: 遮閉時のフィードバック系

器<sup>\*9</sup>(式 1.33) には目標眼位  $x$  がそのまま伝えられる。

ついでに簡単のために第一眼位の固視を考え  $x = 0$  とする<sup>\*10</sup>。すなわち図 1.13 の容器でいえば、入る水の流れが止められ、貯まっていた水が次第に抜けていき、水位  $y'$  が最終的にゼロになることに相当する。すると図 1.14 から、充分な時間をおいた後の眼位  $y$  として斜位  $p$  を観測できる。これが、遮閉試験で第一眼位を指示したときに現れる一連の眼球運動である。

以上の考察をもとに遮閉時の眼位変化を支配する方程式を書き下すと、次のようになる。

$$\frac{dy'}{dt} + a_f y' - k_f x' = 0 \quad (1.46)$$

$$y = y' + p \quad (1.47)$$

式 1.46 に式 1.47 を代入すると、解くべき微分方程式

$$\frac{dy}{dt} + a_f y = a_f p + k_f x \quad (1.48)$$

<sup>\*9</sup> 同じ流れを引き継いで考えれば、融像除去によって眼位ずれの情報  $x'$  が失われるのみならず、漏れ積分器そのものが停止する場合もあるはずである。深い麻酔や死後の状態が考えられる。生理的安静位や絶対安静位と、融像除去眼位との違いについては、低速積分器の閾値を考えると自然であると思われる。これについては項を改めて説明したい。

<sup>\*10</sup> 第二、第三眼位  $x \neq 0$  でも成り立つように図 1.14 を描いた。融像除去状態で斜位が顕在化した、もしくは斜視角が最大化としたとしてもなお、Hering 則にしたがって両眼は運動するはずだからである。ただ、単純に言って  $x \neq 0$  では式の取り扱いが面倒になる。よって本書では  $x = 0$  の場合を考えたい。

が現れる。ここで遮閉開始直後の眼位を書くには、式 1.41において  $t = 0, x = 0$  を代入すればよくて、

$$y(0) = \frac{a_f}{a_f + k_f} p \quad (1.49)$$

である。よって同じく遮閉開始直後の漏れ積分器の出力は式 1.49 を式 1.47 に代入すればわかり、

$$y'(0) = -\frac{k_f}{a_f + k_f} p \quad (1.50)$$

である。つまり式 1.46 は、初期値（式 1.50）のもとで次第にゼロに近づく指數関数と対になっている。このことから同じように

$$y' = -\frac{k_f}{a_f + k_f} p e^{-\lambda t} \quad (1.51)$$

とおき式 1.46 に代入すると、

$$\frac{k_f}{a_f + k_f} \lambda e^{-\lambda t} - \frac{a_f k_f p}{a_f + k_f} - 0 = 0 \quad (1.52)$$

を得て ( $x = x' = 0$  を使った)、式 1.52 に  $t = 0$  を代入すると、

$$\frac{k_f p}{a_f + k_f} \lambda - \frac{a_f k_f p}{a_f + k_f} = 0 \quad (1.53)$$

より、 $\lambda = a_f$  である。したがって厳密解は

$$y'(t) = -\frac{k_f}{a_f + k_f} p e^{-a_f t} \quad (1.54)$$

$$y(t) = \left(1 - \frac{k_f}{a_f + k_f} e^{-a_f t}\right) p \quad (1.55)$$

である。時定数は  $\tau = 1/a_f$  である。まとめると、

遮閉⇒開放の場合には

$$\tau_{c \rightarrow o} = 1/(a_f + k_f) \quad (1.56)$$

開放⇒遮閉の場合には

$$\tau_{o \rightarrow c} = 1/a_f \quad (1.57)$$

という時定数で眼球運動がおこる。式 1.57 で  $a_f$  を測定し、それを式 1.56 に代入したうえで  $k_f$  を求めれば、2つのパラメータ  $a_f, k_f$  が明らかとなる。長い説明をご辛抱いただいた。求めたパラメータを式 1.37 に代入すると、患者個々人の固視ずれを推定できるはずである。

式 1.37 から読み取れることとして、複視がなくなる ( $y \doteq x$ ) ための十分条件は  $a_f \doteq 0$  である。よって複視患者では  $a_f$  が大きな値を示す可能性がある。

# 2

## 固有関数と直交関数

本章では Schor 論文などの制御工学的モデルを読むために不可欠な、ラプラス変換の導出までを行う。

ラプラス変換は微分方程式を解いたり表現したりするために便利なツールである。その導出にいたるには、固有関数と直交関数の便利な性質；

- 少なくとも何回か微分すると同じ関数に戻る特別な関数（固有関数）
- 似た関数同士を掛け算してから積分するとゼロになる特別な関数（直交関数）

を活用できないかというアイデアが底流にある。章名を「固有関数と直交関数」としたのはこれが理由である。導出に際し、その感覚をもっていただければ幸いである。より理解が深まるはずである。

## 2.1 マクローリン展開

### ■ 定理 2.1.1: マクローリン展開

$f(t)$  の第  $n$  次導関数を  $f^{(n)}(t)$  と書けば

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \frac{f'''(0)}{3!}t^3 + \dots \quad (2.1)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} \quad (2.2)$$

が成立する。ただし、

$$k! = k \times (k-1) \times (k-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 \quad (2.3)$$

### 2.1.1 導出

関数  $e^t$  を例に考える。いったん式 2.2 の形式が成立すると信じて、

$$e^t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots \quad (2.4)$$

とおく。式 2.4 はすべての  $t$  について成り立つはずだから、まず  $t = 0$  として式 2.4 に代入してみる。すると右辺は  $a_0$  しか残らない。つまり  $a_0 = e^0 = 1$  であることがわかる。

次に式 2.4 の両辺を微分してみるとどうか。左辺は  $(e^t)' = e^t$  からわかる。右辺は微分の効果で  $a_0$  が消えて、

$$e^t = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + \dots \quad (2.5)$$

となる。式 2.5 に、先ほどと同じように  $t = 0$  を代入する。すると  $a_0 = e^0 = 1$  であることがわかる。

同じやり方で式 2.5 の両辺を微分する。

$$e^t = 2a_2 + 3 \times 2a_3 t + 4 \times 3a_4 t^2 + 5 \times 4a_5 t^3 + \dots \quad (2.6)$$

となるので、 $t = 0$  を代入して  $a_2 = \frac{1}{2}$  を得る。

再び式 2.6 の両辺を微分する。

$$e^t = 3 \times 2a_3 + 4 \times 3 \times 2a_4 t + 5 \times 4 \times 3a_5 t^2 + 6 \times 5 \times 4a_6 t^3 + \dots \quad (2.7)$$

となるので、 $t = 0$  を代入して  $a_3 = \frac{1}{3 \times 2} = \frac{1}{3!}$  を得る。

パターンがお判りになったと思う。以下無限に続けると、 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$  が求まる。具体的には  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して、 $a_n = \frac{1}{n!}$  であることがわかる。これは式 2.2 に示した  $\frac{t^k}{k!}$  に一致している。以上で導出できた。

$f(t)$  には例として  $e^t$  を使ったが、他の関数でももちろん成り立つ。

### 道草-マクローリン展開の使い道



通常、三角関数は関数電卓や Excel などを使って計算する。しかし無人島ではどうするか。もし無人島に何か一つだけ持って行けるなら何が良い?と問われたとき、関数電卓と答える人は変わった人だろう。それは実際、マクローリン展開を知っていれば普通の電卓や手計算で三角関数を計算できるから…ではないだろうけれども、マクローリン展開で三角関数が計算できること自体は興味深いので紹介したい。

ここでは例として  $\cos(30^\circ) (= \frac{\sqrt{3}}{2} \doteq 0.866)$  を計算してみる。とりあえず  $30^\circ$  をラジアンに直すと、 $(180^\circ \text{ で } \pi \text{ であることを思い出して })\pi/6$  である。では、式 2.2 で  $f(t) = \cos(t)$  として、

$$\begin{aligned} \cos(t) &= \cos(0) - \sin(0)t - \cos(0)t^2 \frac{1}{2!} + \sin(0)t^3 \frac{1}{3!} + \cos(0)t^4 \frac{1}{4!} \quad (2.8) \\ &= 1 - t^2 \frac{1}{2!} + t^4 \frac{1}{4!} + \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

とわかる。 $t = \pi/6$  を代入すれば<sup>a</sup>、

$$\cos(\pi/6) = 1 - \frac{(3.14/6)^2}{2} + \frac{(3.14/6)^4}{4 \times 3 \times 2} + \dots \doteq 0.866 \quad (2.10)$$

となる。計算が大変なので  $\frac{(3.14/6)^4}{4 \times 3 \times 2}$  までで打ち切った。もっと頑張れば精度が上がるが、これでもそこそこの精度は出る。

実は、マクローリン展開は電卓芸のためだけのものではなく、もっと実用的な意味を持っている。それは、コンピュータで三角関数を計算することである。コンピュータは特別な回路がない限り、四則演算しかできない。つまり三角関数のようなものは元来計算できない。ところが、式 2.2 は四則演算だけですむ。よってゼロにおける微分係数をプログラムに書いておけば三角関数の値が得られる。式 2.8 に暗黙のうちに書いたように、ゼロにおける微分係数は高々数個あればそこそこの精度が出る。そのくらいの項数であれば簡単にプログラム化できる。我々は、知らず知らずのうちにマクローリン展開の成果を使っているのである。

<sup>a</sup> 無人島に行っても  $\pi \approx 3.14$  は覚えているものとする。

## 2.2 フーリエ級数展開

### ■ 定理 2.2.1: フーリエ級数展開

周期  $T$  で繰り返す関数  $f(t)$  は

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right) \quad (2.11)$$

と書き表せる。ただし、

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi n t}{T} dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2\pi n t}{T} dt$$

前節で説明したマクローリン展開と同じような発想の式だが、周期性がある関数に適用できるものである。

### 2.2.1 導出

式 2.11 の両辺を積分してみる。すると実は

$$\int_0^T f(t)dt = \frac{a_0}{T} \quad (2.12)$$

となり、ここから

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)dt \quad (2.13)$$

となってまずは  $a_0$  が求まる。式 2.12 の関係が成り立つからには

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right) \quad (2.14)$$

でなければならない。

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} \right) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left( b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

と書き直せるが、このうち  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right)$  について考えてみる。

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left( b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right) dt \\
 &= \int_0^T b_1 \sin \frac{2\pi \times t}{T} dt \\
 &+ \int_0^T b_2 \sin \frac{2\pi \times 2t}{T} dt \\
 &+ \int_0^T b_3 \sin \frac{2\pi \times 3t}{T} dt \\
 &+ \dots
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

と展開してみる。これをまともに計算すると面倒なので、作図して抜け道を進むことにする。図??に示す。

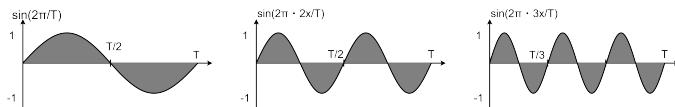


図 2.1: 各積分項

今考える積分は図??の灰色部分の面積だが、いずれの積分項も値がゼロになることが見てとれる。このようにすると、式 2.13 が成り立つことがわかる。

次に  $a_n$  について考える。式 2.11 の両辺に  $\cos \frac{2\pi n t}{T}$  をかけて 0 から  $T$  まで積分する。すると最終的に、

$$\int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi n t}{T} dt = \frac{a_n}{2} T \tag{2.17}$$

となり、ここから

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi n t}{T} dt \tag{2.18}$$

となる。

## 2.2.2 応用

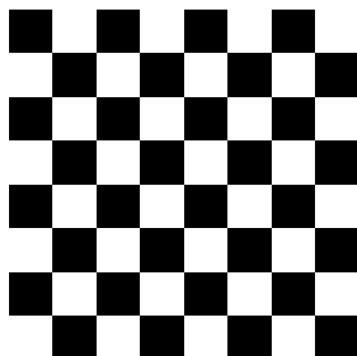


図 2.2: チェッカボードパターン

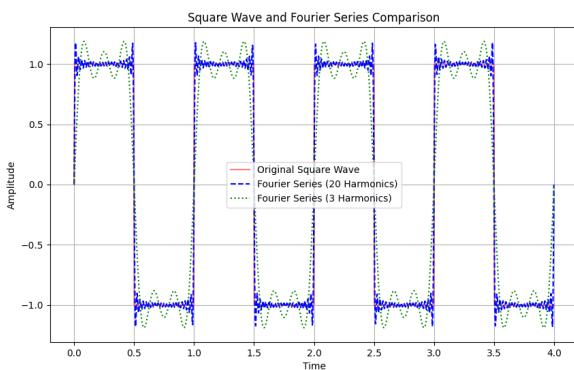


図 2.3: 矩形波のフーリエ級数展開

図 2.2 に示すのは何の変哲もないチェッカボードパターンである。そして

図2.3の赤線は、図2.2の一行目を横方向に切り取ったときの白黒を1, -1で表現したものである。さらに赤線の波形を式2.11にあてはめ、 $n = 20$ まで展開したうえでグラフ化したものが青線である。同じく、 $n = 3$ まで展開したものが緑線である。

みると、 $n$ が大きいほうが赤線に対して忠実になる傾向であるといえる。実は、この関係性は画像圧縮技術の核心として使われている。例えば図2.2が500 mm角のサイズであるとする。3 m離れたところにあるディスプレイに表示させ、視力1.5の人に対して綺麗なチェックボードパターンと認識できるようにするために、 $n$ はいくつである必要があるだろうか。

まず視力1.5の人は  $\tan(1^\circ / 60/1.5) \times 3000 \approx 0.6$  mmの細かさまで見える。つまり3 m離れた地点で波長1.2 mmの縞模様までは認識できるが、それ以上細かい模様はその人には見えない。これを踏まえて、チェックボードパターンを構成する波の波長は1.2 mm以上とするのが合理的であると考えられる。チェックボードパターンは500 mm角だったので、一つの白⇒黒のセクションは125 mmとなる。

したがって式2.11を念頭に考えると、 $n = 125/1.2 \approx 100$  としておけば足りる。要するに横方向のデータを100個持つておけば、視力1.5の人にとっては綺麗なチェックボードパターンになるはずである。縦方向についても同様のことがいえる。実は図2.2は400x400画素のデータで描いたのだが、以上の議論からデータ数を1/4にすることができることになる。

このように、縦横それぞれの方向でフーリエ級数展開を行ってデータ数を節約する画像圧縮アルゴリズムがある。有名どころではJPEGなどである。当然、視力2.0の人には粗目立ちする。つまり画像の情報は一部失われていることになるが、その反面、データを非常に小さくできるという大きな利点がある。もしフーリエ級数展開による画像圧縮アルゴリズムがなければ、今のようにインターネットが普及することは難しかった<sup>\*1</sup>のかもしれない。

---

<sup>\*1</sup> 例えばFAXではランレンジス符号化といって、全く異なる圧縮方式を使っている。FAXは白黒画像を送るものであり、なおかつ白または黒の連続が多いことを利用したアルゴリズムである。つまりネットで汎用されるような画像を送るのには全く適していない

## 2.3 三角関数の直交性

### ■ 定理 2.3.1: 三角関数の直交性

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n) \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n) \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0 \quad (2.21)$$

ただし  $m, n$  は自然数とする。以上の性質から、 $\sin(x), \cos(x)$  は互いに直交しているという。

式 2.21 から、 $\sin \times \cos$  を一周期で積分するとゼロになることがわかる。また、同じ  $\sin, \cos$  同士でも、2 つの関数の周期が同じ場合のみ、一周期で積分してゼロにならなくなるということもわかる。

### 2.3.1 導出

式 2.20 を代表として導出していく。まず  $m \neq n$  のとき、

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \cos[(m-n)x] - \frac{1}{2} \cos[(m+n)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{m-n} [\sin(m-n)x]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \frac{1}{m+n} [\sin(m+n)x]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

次に  $m = n$  のとき、

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{1 - \cos(2mx)\} dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[ x \right]_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \frac{1}{2m} \left[ \sin(2mx) \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \pi
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

となり、式 2.20 が成り立つことがわかる。式 2.19 は同様の計算で証明できる。

次に式 2.21 について計算してみる。三角関数の積の公式を使うと、

### ■ 定理 2.3.2: 三角関数の積の公式

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)] \tag{2.24}$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)] \tag{2.25}$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A + B) + \sin(A - B)] \tag{2.26}$$

$$\sin(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x)] \tag{2.27}$$

したがって積分は、

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x)] dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \sin((m+n)x) dx \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \sin((m-n)x) dx \right]
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

となる。ここで図??と同様の考え方をすると、任意の定数  $k$  について

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx = 0 \tag{2.29}$$

となるから、式 2.21 が成り立つことがわかる。

道草-直交振幅変調



タイタニック号の無線通信記録。沈没事故直前



*Keep out; shut up, I'm working Cape Race*

- Jack Phillips, Titanic

実はタイタニック号の沈没事故が起きる直前に、当時近くにいた汽船カリフォルニア号から氷山の警告が発せられていたらしい。しかし邪魔な混信として片付けられてしまった。草創期の船舶無線機は周波数を精密に選ぶことができず、言い換えれば一つの糸電話をあらゆる船が共有している状態であったため、混信が起こってしまったらしい。事故後に様々な対策が進むことになるが、いかに大量の情報を限られた周波数帯域に詰め込むかという問題は、今なお無線通信技術の中核的な関心事項でありつづけている。

では糸電話を改良してみる。ここでは 2 つの信号  $I(t), Q(t)$  を 1 つ

の糸にのせ(変調)、受信側で再び2つの信号に戻し(復調)てみる。

まず送信側では  $I(t), Q(t)$  をもとに、

$$s(t) = \sin(2\pi f_c t)I(t) + \cos(2\pi f_c t)Q(t) \quad (2.30)$$

なる信号  $s(t)$  をつくる。この操作が変調である。 $s(t)$  の中で  $I, Q$  を足し算することによって、1つの信号として1つの糸に情報をのせることができた。ここで、 $\sin, \cos$  で示す波のことを搬送波という。すなわち、 $f_c$  は搬送波の周波数に相当する。

若干なじみ深いところでいえば、普段、RADIO BERRY なら 74.6MHz, NHK 東京ラジオ第1放送なら 594kHz に合わせる。これらは搬送波の周波数を指しているのである。

さて受信側で復調をする。ここで再び三角関数を掛け算する。

$$r(t) = I(t)\sin(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t) + Q(t)\cos(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t) \quad (2.31)$$

なる信号  $r(t)$  を作る。 $r(t) = s(t)\cos(2\pi f_c t)$ としたわけである。三角関数の倍角公式をつかって、式 2.31 を少し変形しておく。

$$r(t) = I(t)\sin(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t) + \frac{Q(t)}{2}[1 + \cos(4\pi f_c t)] \quad (2.32)$$

三角関数の直交性の性質から、 $\sin$  と  $\cos$  の積を周期で積分すると、その値は常にゼロになることが以前の議論でわかっている。この性質を使うと、 $r(t)$  から  $Q(t)$  のみを漉しとることができそうである。実際、そういう操作が回路もしくはソフトウェアで行える。なぜなら、FM・AM 放送の搬送波は先ほどの議論の通り、数十 MHz～数百 kHz のオーダーであるからである。一方、復調すべき信号は音声周波数、言い換えれば可聴周波数域の信号であり、高々 20 kHz 未満の周波数に分布している。

つまり、測定量  $I, Q$  は時間で変化する信号であるものの、 $r(t)$  の周

期程度では、ほぼ定数であるとみなすことができる<sup>a</sup>。そのように考えると、復調した信号  $\hat{Q}(t)$  が得られることが以下の式でわかる。

$$\begin{aligned}
 \hat{Q}(t) &= \int_0^{\frac{1}{f_c}} r(t) dt \\
 &= 0 + \frac{Q(t)}{2} \left[ t \right]_0^{\frac{1}{f_c}} + \frac{Q(t)}{2} \int_0^{\frac{1}{2f_c}} \cos(4\pi f_c t) dt \\
 &\quad + \frac{Q(t)}{2} \int_{\frac{1}{2f_c}}^{\frac{1}{f_c}} \cos(4\pi f_c t) dt \\
 &= \frac{Q(t)}{2f_c}
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

$r(t)$  を  $\sin$  によって別途同様に作ると、もうひとつの信号、 $I(t)$  を復調できる。以上の一連の操作を直交振幅変調 (Quadrature Amplitude Modulation) という。1 つの糸で 2 つの信号を扱うことができた。

ここで直交振幅変調という用語の意味について触れておく。変調や復調をするときに、 $I(t)$  には  $\sin$ 、 $Q(t)$  には  $\cos$  を使った。先述の議論から  $\sin, \cos$  は直交していることがわかっている。直交の語はここから来ている。なお、 $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta)$ 、 $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\theta)$  であるから、直角の角度  $\frac{\pi}{2}$  を保って  $\sin$  と  $\cos$  の間を相互に変換できるわけで、このことから直交の言葉を使う、としてもよいような気がする。

いずれにしても、直交した 2 関数を使うという QAM の発想は現代社会で重要なものとなっている。ディジタル信号を QAM で扱うと、さらに多数の信号を詰め込めるからである [5]。例として、図 2.4 は 16QAM といい、16 個の信号を 1 つの信号に変調していることを示す。

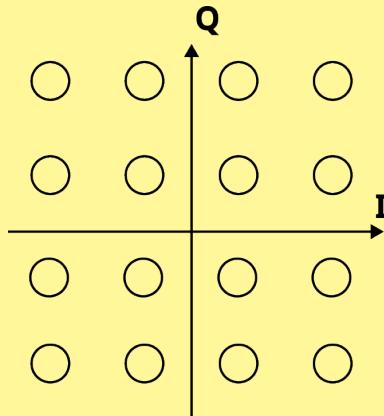


図 2.4: 16QAM。I, Q という 2 つの直交した軸を用いていることが「みぞ」

5G 通信では 1024QAM を使うらしい。QAM が、1 つの周波数帯を多数の端末で共有するために欠かせない技術であろうことがわかる。

<sup>a</sup> 一般的なパソコンのディスプレイは 60 Hz で表示内容を逐次入れ替えているが、普通はそのちらつきを感じないので似ている。錐体細胞が高々 0.1-0.2 秒の応答速度をもっていて [4]、いいかえればそれより速い 60 Hz の変動は、定数として積分されるからである。

## 2.4 オイラーの定理

### ■ 定理 2.4.1: オイラーの公式

$$e^{jt} = \cos(t) + j \sin(t) \quad (2.34)$$

$j$  は虚数単位である<sup>a</sup>。

<sup>a</sup> 電気数学特有の事情を持ち込むことになり恐縮だが、虚数単位を  $j$  で書く。 $i$  は

電流を表すために予約しておくのが慣習だからである。

### 2.4.1 導出

マクローリン展開(式2.2)において、 $t$ を $jt$ に置き換えて計算してみると、

$$e^{jt} = e^0 + e^0 \frac{jt}{1!} + e^0 \frac{(jt)^2}{2!} + e^0 \frac{(jt)^3}{3!} + \dots \quad (2.35)$$

$$= 1 + \frac{jt}{1!} - \frac{t^2}{2!} - \frac{jt^3}{3!} + \dots \quad (2.36)$$

$$= \left( 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \right) + j \left( t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots \right) \quad (2.37)$$

となる<sup>\*2</sup>が、いったん中断して  $\cos(t)$  のマクローリン展開を考える。

$$\cos(t) = \cos(0) - \frac{\sin(0)}{1!}t - \frac{\cos(0)}{2!}t^2 + \frac{\sin(0)}{3!}t^3 + \frac{\cos(0)}{4!}t^4 + \dots \quad (2.38)$$

$$= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots \quad (2.39)$$

となり、 $\sin(t)$ についても同様に

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots \quad (2.40)$$

となる。したがって、式2.37と比較すれば、式2.34が成り立つことがわかる。

---

<sup>\*2</sup> ここで高校数学の復習をしたい。式2.35から式2.36への変形には、 $j^2 = -1$ とする約束を使った。

## 2.4.2 応用

### 2.5 フーリエ変換

#### 定理 2.5.1: フーリエ変換

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.41)$$

によって計算する関数  $F(\omega)$  の導出操作を  $f(t)$  のフーリエ変換という。 $F(\omega)$  から  $f(t)$  に戻す計算も同様にあって、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega x} d\omega \quad (2.42)$$

である。これを逆フーリエ変換という。

#### 2.5.1 導出

三角関数の直交性(式 2.20~2.21)を使って、直交振幅変調の項で道草した通り、あらゆる波の中から狙った波だけを抽出できるようになった。では、試しに図 2.5 に示すような波形について試してみたいと思う。少し脱線

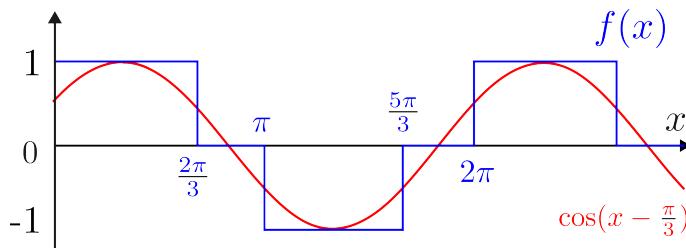


図 2.5: 修正正弦波

するが、自動車の 12V 電源を交流 100V に変換し、車内で家電を使えるよ

うにする製品として、いわゆるカーインバータと呼ばれるものがある。一般住宅などに供給されている交流 100V は図 2.5 の赤線に示すような正弦波であるのに対し、一部の安価なカーインバータでは、内部回路を簡略化するために波形も簡単なものが採用されている。同図青線に示すもので、修正正弦波と呼ばれている。その名の通り、本来の正弦波に似ているように見える。何となく解析が簡単そうである。

### 道草-CT の原理

逆フーリエ変換を使うと、X 線 CT や MRI などに用いられる Computed Tomography の原理を導出することができる。

そのためには、まず Radon 変換という別の計算を考えなければならない。1917 年にオーストリアの数学者 Johann Radon によって純粹数学として生まれた Radon 変換は、約 60 年後の 1979 年にノーベル医学生理学賞”for the development of computer assisted tomography”として結実することとなった。

では、Radon 変換から CT をつくっていく。

まず、図 2.6 のように、平行光線の X 線を被写体にあてるなどを考える。

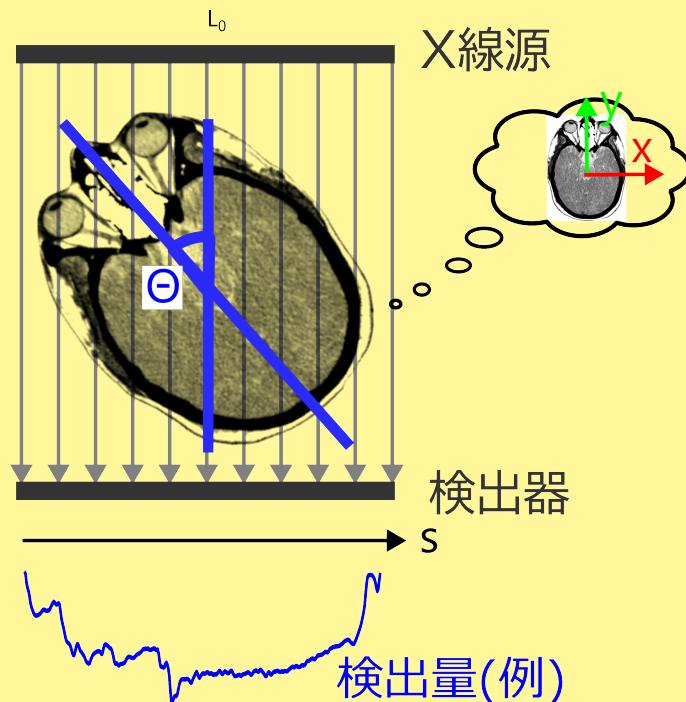


図 2.6: X 線 CT 装置による透視撮影。頭部像は引用元 [6] をネガポジ反転した。

被写体は適宜回転させるものとし、その角度を  $\theta$  で表す。X 線は被写体を透過して検出器に到達する。その量を  $g(s, \theta)$  として書く。手始めに  $g(0, \theta)$  を考える。これは図 2.6において、被写体の X 線吸収率  $f(x, y)$  を、 $L_0$  に沿って積分することに相当する。 $L_0$  上の点について、 $x, y$  は

$$\frac{y}{x} = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta} \quad (2.43)$$

を満たす。よって、

$$g(0, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta) dx dy \quad (2.44)$$

であるといえる。

ここで、 $\delta()$  はディラックのデルタ関数というものである。デルタ関数は

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad (2.45)$$

となる性質をもっている。デルタ関数を使うことで、 $x = 0$  での  $f$  の値を拾ってくる操作を積分の形式に書き直せる。これによって、式 2.44 は  $x, y$  についての積分という書き方をしつつ、 $g$  についての答えを示すことができている。

さて、 $s = 0$  の特殊ケースから離れて、一般の  $g(s, \theta)$  を考えてみる。先ほどは、積分経路が図 2.6 での  $L_0$  だった。今度は図 2.7 における  $L_s$  が相当する経路になる。

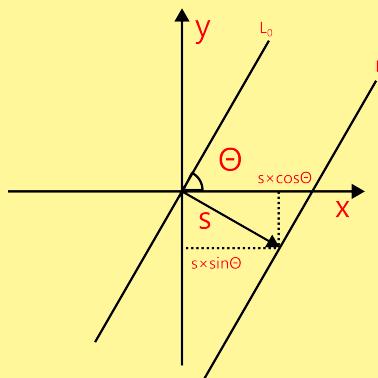


図 2.7:  $x, y$  から  $s$  への変換

$L_0$  を  $x$  方向に  $s \cos \theta$ 、 $y$  方向に  $s \sin \theta$  だけ移動すれば  $L_s$  になるこ

とがわかるので、式 2.43 と併せて、

$$(x - s \cos \theta) \cos \theta + (y - \sin \theta) \sin \theta = 0 \quad (2.46)$$

であることがわかる。さらに式 2.44 と比較すれば、

$$g(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy \quad (2.47)$$

となる。式 2.47 を、 $f(x, y)$  から  $g(s, \theta)$  への Radon 変換と呼ぶ。X 線 CT 装置は線源と検出器を被写体の周りでぐるぐる回しながら 2 次元分布を撮る、すなわち  $\theta$  を走査しながら  $s$  軸に沿った検出量を測定し、 $g(s, \theta)$  として記録する装置にほかならない。よって、検出量  $g(s, \theta)$  から  $f(x, y)$  を推定する、逆 Radon 変換ができれば断層写真を得られることになる。

座標系  $(x, y)$  と  $(s, u)$  の変換をする。図 2.8 をみると、

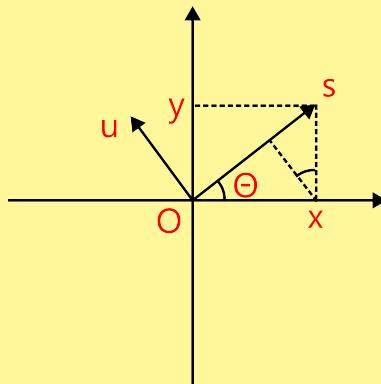


図 2.8:  $(x, y)$  座標系から  $(s, u)$  座標系への変換

$$s = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (2.48)$$

であることがわかる。同様にして、

$$\begin{aligned}s &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ u &= -x \sin \theta + y \cos \theta\end{aligned}\tag{2.49}$$

$$\begin{aligned}x &= s \cos \theta - u \sin \theta \\ y &= s \sin \theta + u \cos \theta\end{aligned}\tag{2.50}$$

という関係で相互に変換できることがわかる。よって、

$$\begin{aligned}g(s, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta) du\end{aligned}\tag{2.51}$$

と書き表せる。式 2.51 は ray-sum と呼ばれる。図 2.47 に描いたように、X 線の光線に沿って被写体を素直に積分した形になっているからである。続いて Radon 変換  $g(s, \theta)$  のフーリエ変換を  $s$  についておこなってみる。

$$G_{\theta}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s, \theta) \exp(-j2\pi ks) ds\tag{2.52}$$

式 2.52 に式 2.51 を代入すると、

$$G_{\theta}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta) \exp(-j2\pi ks) ds du\tag{2.53}$$

となる。式 2.49, 2.50 から  $dx dy = ds du$  だから<sup>a</sup>、

$$\begin{aligned}G_{\theta}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-j2\pi k(x \cos \theta + y \sin \theta)) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-j2\pi((k \cos \theta)x + (k \sin \theta)y)) dx dy \\ &= F(k \cos \theta, k \sin \theta)\end{aligned}\tag{2.54}$$

となることが明らかとなった。ここに  $F(k \cos \theta, k \sin \theta)$  は被写体  $f(x, y)$  をフーリエ変換したものである。同様にして  $G_\theta(k)$  は、式 2.47 にしたがって CT 装置から得られる測定量  $G_\theta$  をフーリエ変換したものだから、式 2.54 の両辺をフーリエ逆変換すれば、元の被写体  $f(x, y)$  を推定できる。

---

<sup>a</sup> 例え式 2.49 から  $\frac{du}{dx} = -\sin \theta$ 、式 2.50 からは  $\frac{dx}{du} = -\sin \theta (= \frac{du}{dx})$  となる。よって  $du \neq 0, dx \neq 0$  を念頭におけば、 $du = dx$  であることがわかる。

## 2.6 ラプラス変換

### ≡ 定理 2.6.1: ラプラス変換

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \quad (2.55)$$

で定義される  $F(s)$  の計算操作を関数  $f(t)$  のラプラス変換という。ここで  $s$  は 2 つの実数  $\sigma, \omega$  を用いて  $s = \sigma + j\omega$  とする。なおラプラス変換では表記の簡素化のため、とくに  $\mathcal{L}[f(t)]$  と表すことがある。

### 2.6.1 導出

まず始めに、工学上で扱う問題は  $t \geq 0$  であることを確認しておく。制御工学には因果性システムという概念がある。世の中のあらゆる制御システムは、過去の値をもとに未来の値を計算する。では「過去」の値はいつから存在するのか。例えば車のエンジン制御システムを考える。エンジンが掛かっていない状態でアクセルを踏んでもエンジンには何の変化も生じないし、また、掛けた後のエンジンに影響を与えないことも明らかである。つまり、制御が開始される以前の情報は意味を持たないわけである。

制御工学では、因果性システムの考え方から時刻  $t < 0$  では  $f(t) = 0$  と

している。つまり  $t = 0$  で制御が始まるとするわけである。このことは、以下で説明する、ラプラス変換の導出に深くかかわってくる。 $\rightarrow$  ここから複そふーりえ変換のマイナス積分区間を 0 にしてラプラス変換に持ち込む

# 3

## Schor モデル

3.1 Schor モデル概観

3.2 プリズムアダプテーションの理解

3.3 複視の精密理解

3.4 静的斜位補正器への応用

3.5 動的斜位補正器の検討

# 4

## 斜視発症モデル

### 4.1 非線形システム論

---

# 5

## 眼位の座標表現

5.1 極座標

5.2 四元数

## 参考文献

- [1] THE RELATIONSHIP BETWEEN FUSIONAL VERGENCE EYE MOVEMENTS AND FIXATION DISPARITY, Clifton M. Schor, Vis. Res, 19, pp. 1359-1367, 1979.
- [2] 東大塾長の理系ラボ, <https://rikeilabo.com/>
- [3] 浅野 晃, 第4部・C Tスキャナー—投影からの画像の再構成／Radon変換と投影定理, [http://racco.mikeneko.jp/Kougi/2012s/IPPR/2012s\\_ippr12.pdf](http://racco.mikeneko.jp/Kougi/2012s/IPPR/2012s_ippr12.pdf).
- [4] 橋本修志, 二種類の視細胞(錐体と桿体)の応答特性を決める分子メカニズム, 生産と技術, 72(3), 2020.
- [5] Dave's space, Quadrature Amplitude Modulation (QAM): Explained, <https://youtu.be/1asY7-NZ93g?feature=shared>.
- [6] Mikael Häggström, Scrollable computed tomography images of a normal brain (case 1), [https://commons.wikimedia.org/wiki/Scrollable\\_computed\\_tomography\\_images](https://commons.wikimedia.org/wiki/Scrollable_computed_tomography_images)
- [7] V.V.Krishnan, A Heuristic Model for the Human Vergence Eye Movement System, IEEE Trans. Biomed. Engr, BME-24(1), 1977.
- [8] 長谷部 聰, Cliff Schor の調節と輻湊の制御モデルと眼科診療, 日本視能訓練士協会誌, 48, 2019.
- [9] Steven H. Strogatz, 田中ほか訳, ストロガツツ 非線形ダイナミクスとカオス, 丸善出版, 2015.

- [10] C.Rashbass et. al, DISJUNCTIVE EYE MOVEMENTS, *J. Physiol.*, 159, pp. 339-360, 1961.
- [11] G. Cook et. al, DERIVATION OF A MODEL FOR THE HUMAN EYE-POSITIONING MECHANISM, *Bull. Math. Biophys.*, 29, pp 153-174, 1967.
- [12] G. Cook et. al, The Human Eye-Movement Mechanism - Experiments, Modeling, and Model Testing-, *Arch Opthal.*, 79, pp 428-436, 1968.
- [13] Christopher W. Tyler, Evidence That Leonardo da Vinci Had Strabismus, *JAMA Ophthalmology*, 137(1), 2018.
- [14] Loudon, S. E. et. al, The History of the Treatment of Amblyopia. Strabismus, 13(2), pp 93–106.
- [15] Irene H. Ludwig, Strabismus Surgery - Innovative and Classic Approaches -, Thieme Medical Publishers, Inc., pp 2, New York, pp2021.
- [16] R.Kline, Harold Black and the negative-feedback amplifier, *IEEE Control Systems Magazine*, 13(4), pp 82-85, 1993.
- [17] 荒木ほか, 『PID 制御』第 1 回: PID 制御の歴史, 計測と制御, 36(9), 1997.
- [18] Luciana Acosta Güemes et. al, Ophthalmology in Ancient Egypt, Asian Journal of Education and Social Studies, 35(4), pp 18-23, 2022.
- [19] Francisco J. Ascaso et. al, Cataract surgery in ancient Egypt, *Journal of Cataract & Refractive Surgery*, 35(3), pp 607-608, 2009.