POLITEKNIK NEGERI MALANG
JURUSAN TEKNOLOGI INFORMASI

ALJABAR LINIER

Aturan Cramer

Muhammad Afif Hendrawan, S.Kom., M.T.

Outlines

- Penyelesaian sistem linier dengan Aturan Cramer

Aturan Cramer

Introduction to Cramer's Rule

- Aturan Cramer dapat dimanfaatkan dalam berbagai macam kalkulasi dalam berbagai bidang (cth., volume dan transformasi linier)
- Dapat juga digunakan untuk mempelajari $Ax = b$ → mengetahui dampak perubahan sistem berdasarkan b
- Akan tetapi, aturan ini cukup rumit jika dikalkulasi secara manual → kecuali pada matriks 2×2 atau 3×3

Aturan Cramer #1

Untuk semua matriks A, $n \times n$, dan b pada $\mathbb{R}^n$

Jika $A_i(b)$ adalah matrik yang didapatkan dari A dengan mengganti nilainya pada kolom i dengan vektor b

$$A_i(b) = [a_1 \ldots \boxed{b} \ldots a_n]$$

kolom *i*

Aturan Cramer #2 – The Rule!

Jika A merupakan matriks $n \times n$ yang memiliki invers. Untuk semua b pada $\mathbb{R}^n$, solusi dari x pada $Ax = b$ adalah,

$$x_i = \frac{\det A_i(b)}{\det A}, i = 1,2, \ldots, n$$

Aturan Cramer - Contoh

Selesaikan sistem berikut dengan Aturan Cramer,

$$3x_1 - 2x_2 = 6$$
$$-5x_1 + 4x_2 = 8$$

Solusi → $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}, A_1(b) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}, A_2(b) = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$$

Karena $\det A = 2$

$$x_1 = \frac{\det A_1(b)}{\det A} = \frac{24 - (-16)}{2} = \frac{24 + 16}{2} = \frac{40}{2} = 20$$
$$x_2 = \frac{\det A_2(b)}{\det A} = \frac{24 - (-30)}{2} = \frac{24 + 30}{2} = \frac{54}{2} = 27$$

Aturan Cramer untuk sistem 3×3 atau $n \times n$

- Caranya sama! → $A_i(b)$ dimana i adalah kolom-kolom dari A
- Determinan dapat dicari dengan berbagai cara, cth. **Ekspansi kofaktor** atau **Aturan Sarrus**

Aturan Cramer – Penerapan Pada Bidang Teknik

- Transformasi Laplace → Sistem diferensial ke sistem aljabari
- Contoh,

$$3sx_1 - 2x_2 = 4$$
$$-6x_1 + sx_2 = 1$$

Dengan $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} 3s & -2 \\ -6 & s \end{bmatrix}, A_1(b) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}, A_2(b) = \begin{bmatrix} 3s & 4 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 3s^2 - 12 = 3(s+2)(s-2)$$

$$x_1 = \frac{\det A_1(b)}{\det A} = \frac{4s+2}{3(s+2)(s-2)}$$
$$x_2 = \frac{\det A_2(b)}{\det A} = \frac{3s+24}{3(s+2)(s-2)} = \frac{s+8}{(s+2)(s-2)}$$

Aturan Cramer – Mencari nilai A^{-1}

Jika A adalah matriks $n \times n$ yang memiliki invers, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj\ A$$

dimana adj adalah adjugate / *classical adjoint* → **transpose dari matrik kofaktor C**

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Dimana C adalah kofaktor dari A

Aturan Cramer – Contoh Mencari Nilai A^{-1} #1

Tentukan invers dari $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

Terdapat 9 kofaktor, yaitu,

$$C_{11} = + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2,\ C_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3,\ C_{13} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5$$

$$C_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 14,\ C_{22} = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 7,\ C_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -7$$

$$C_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4,\ C_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ C_{33} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$adj\ A = \begin{bmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{bmatrix}$$

Aturan Cramer – Contoh Mencari Nilai A^{-1} #2

$$(adj\ A)A = \begin{bmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} = 14I$$

Karena $(adj\ A)A = 14I \rightarrow \det A = 14$, maka,

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{bmatrix}$$

Latihan!

Gunakan Aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem berikut,

$$5x_1 + 7x_2 = 3$$
$$2x_1 + 4x_2 = 1$$

$$-5x_1 + 2x_2 = 9$$
$$3x_1 - x_2 = 4$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 8$$
$$-x_1 + 2x_3 = 4$$
$$3x_1 + x_2 = 4$$

Selesaikan dengan Aturan Cramer (Jika ada)!

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 4x_2 &= 5 \\
2x_1 + x_2 &= 4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4x + 5y &= 2 \\
11x + y + 2z &= 3 \\
x + 5y + 2z &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x + y - 2z &= 1 \\
2x - y + z &= 2 \\
x - 2y - 4z &= -4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 &= -32 \\
7x_1 + 2x_2 + 9x_3 - x_4 &= 14 \\
3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 11 \\
x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 &= -4
\end{aligned}
$$


thank you
gracias
danke
謝謝
ngiyabonga
شكراً جزيلاً
teşekkür ederim
merci
obrigado
go raibh maith agat
mochchakkeram
dziękuję
bedankt
спасибо
sukriya
kop khun krap
terima kasih
arigatô
dakujem
grazie
dank je
merси
감사합니다
ありがとう
рахмат
Баярлалаа
mersi
barka
welalin
tack
spas
faafetai lava
vinaka
blagodaram
misaotra
matondo
paldies
grazzi
mahalo
tapadh leat
хвала
asante
manana
obrigada
tenki
murakoze
kiitos
dankie
nanni
nandri
dhanyavad
mauruuru
köszönöm
hvala
gràcie
bayarlalaa
enkosi
djiere dieuf
дякую
mamnun
chnorakaloutioun
gratias ago
gràcies
sulpáy
taiku
takk
trugarez
shukriya
dhanyavadagalu
diolch
rahmet
tanemirt
sobodi
dėkuji
mèsi
sagolun
najis tuke
kam sah hamnida
didi madloba
rahmat
xièxie
ευχαριστώ
tau
akun
dankon
aciú
spasibi
chokrane
mercè

Referensi

- Lay, D.C., Lay, S.R. and McDonald, J. (2021) *Linear algebra and its applications*. Boston: Pearson.
- Kariadinata, R. (2013) *Aljabar Matriks Elementer*. Bandung: Pustaka Setia.