№6 $n = 200$ $\quad m_1 = 181$ $\quad m_2 = 9$ $\quad m_0 = n - (m_1 + m_2) = 10$

$H_0: \xi \sim \beta(2, p), \quad H_1 = \bar{H}_0$

$\rho(x) = \sum_{k=0}^{2} \underbrace{C_2^k p^k (1-p)^{2-k}}_{p_k} \{k\}$

H_0 – сложная гипотеза

ОМПП: $L = P_0^{m_0} P_1^{m_1} P_2^{m_2} =$

$= \left(C_2^0 p^0 (1-p)^2\right)^{10} \cdot \left(C_2^1 p^1 (1-p)^1\right)^{181} \cdot \left(C_2^2 p^2 (1-p)^0\right)^9 =$

$= (1-p)^{20} (p(1-p))^{181} p^{18}$

	A_0	A_1	A_2
m_i	10	181	9
nP_i	50,5	100	49,5

$\ln L = 20 \ln(1-p) + 181 \ln(2p(1-p)) + 18 \ln p = 20 \ln(1-p) + 181 \ln(2p) +$
$+ 181 \ln(1-p) + 18 \ln p$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = -\frac{20}{1-p} + \frac{181 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}p} + \frac{181(-1)}{1-p} + \frac{18}{p} = \frac{-201}{1-p} + \frac{199}{p} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-201p + 199 - 199p}{p(1-p)} = 0 \Rightarrow 400p = 199 \Rightarrow p = \frac{199}{400}$$

$P_0 \cdot 200 = \left(1 - \frac{199}{400}\right)^2 200 = 50,5$

$P_1 \cdot 200 = 2 \cdot \left(1 - \frac{199}{400}\right) \frac{199}{400} \cdot 200 = 100$

$P_2 \cdot 200 = \left(\frac{199}{400}\right)^2 \cdot 200 = 49,5$

$\Delta = \sum_{i=0}^{2} \frac{(m_i - nP_i)^2}{nP_i}$ $\qquad \Delta \sim \chi^2(3-1-1) = \chi^2(1)$

$$\tilde{\Delta} = \frac{(10 - 50,5)^2}{50,5} + \frac{(181 - 100)^2}{100} + \frac{(9 - 49,5)^2}{49,5} \approx 131,227$$

(why not ≥ $\qquad \alpha = 0,05$

$$\text{p-value} = P(\Delta \geq \tilde{\Delta} \mid H_0) = \int_{131,227}^{+\infty} p_{\chi^2(1)}(x)\,dx \approx 2,2 \cdot 10^{-30} \ll \alpha$$

$\Rightarrow$ Уверенно отвергаем

[N7] $n_1 = 100$ $n_2 = 100$

$m_{-1} = 25$ $m_{01} = 50$ $m_{+1} = 25$

$m_{-2} = 52$ $m_{02} = 41$ $m_{+2} = 7$

H_0 : Номер партии и размера детали независимы

H_1 : $\overline{H_0}$

Крит. однородности:

	A_-	A_0	A_+
1	25	50	25
2	52	41	7
$P(A_j)$	$\frac{77}{200}$	$\frac{91}{200}$	$\frac{32}{200}$

$$\tilde{\Delta} = \frac{\left(25 - 100\cdot\frac{77}{200}\right)^2}{100\cdot\frac{77}{200}} + \frac{\left(50 - 100\cdot\frac{91}{200}\right)^2}{100\cdot\frac{91}{200}} + \frac{\left(25 - 100\cdot\frac{32}{200}\right)^2}{100\cdot\frac{32}{200}} \approx$$

$\approx 10,24$

$$\tilde{\Delta}_2 = \frac{\left(52 - 100\cdot\frac{77}{200}\right)^2}{100\cdot\frac{77}{200}} + \frac{\left(41 - 100\cdot\frac{91}{200}\right)^2}{100\cdot\frac{91}{200}} + \frac{\left(7 - 100\cdot\frac{32}{200}\right)^2}{100\cdot\frac{32}{200}} \approx 10,24$$

$$\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}_1 + \tilde{\Delta}_2 = 20,48$$

[III] Если H_0 верна, то $\Delta \sim \chi^2((\overset{3}{k}-1)(\overset{2}{m}-1))$

$\Rightarrow \Delta \sim \chi^2(2)$

$$p\text{-value} = P(\Delta \geq \tilde{\Delta} \mid H_0) = \int_{20,48}^{+\infty} p_{\chi^2(2)}(x)\,dx \approx 3,57\cdot 10^{-5} < 0,05 \text{ "}\alpha\text{"}$$

$\Rightarrow$ уверенно отвергаем гипотезу H_0

[N8] $n_1 = 300$ $n_2 = 300$

	A_2	A_3	A_4	A_5
1	33	43	80	144
2	39	35	72	154
$P(A_j)$	$\frac{72}{600}$	$\frac{78}{600}$	$\frac{152}{600}$	$\frac{298}{600}$

H_0 : оба потока однородны

H_1 : $\overline{H_0}$

$$\tilde{\Delta}_1 = \frac{\left(33 - 300\cdot\frac{72}{600}\right)^2}{300\cdot\frac{72}{600}} + \frac{\left(43 - 300\cdot\frac{78}{600}\right)^2}{300\cdot\frac{78}{600}} + \frac{\left(80 - \frac{152}{2}\right)^2}{\frac{152}{2}} + \frac{\left(144 - \frac{298}{2}\right)^2}{\frac{298}{2}} \approx 1,04$$

$$\tilde{\Delta}_2 = \frac{\left(39 - \frac{72}{2}\right)^2}{\frac{72}{2}} + \frac{\left(35 - \frac{78}{2}\right)^2}{\frac{78}{2}} + \frac{\left(72 - \frac{152}{2}\right)^2}{\frac{152}{2}} + \frac{\left(154 - \frac{298}{2}\right)^2}{\frac{298}{2}} \approx 1,04$$

$\tilde{\Delta} = \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 2{,}08$

$\Delta \sim \chi((4-1)(2-1)) = \chi^2(3)$

p-value $= P(\Delta \geq \tilde{\Delta} \mid H_0) = \int_{2{,}08}^{+\infty} p_{\chi^2(3)}(x)\,dx \approx 0{,}556 >> 0{,}05 = \alpha$

$\Rightarrow$ нет оснований отвергнуть H_0

$\boxed{№9}$ а) $n = 100$

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
$\vec{x}_n$	5	8	6	12	14	18	11	6	13	7

$H_0: \xi \sim R[0, 9]$ – равномерное распределение

H_0 – простая гипотеза

Критерий χ^2: $np_i = n \cdot \frac{1}{10} = 100 \cdot \frac{1}{10} = 10$

$$\tilde{\Delta} = \frac{(5-10)^2 + (8-10)^2 + (6-10)^2 + (12-10)^2 + (14-10)^2 + (18-10)^2 + (11-10)^2 + (6-10)^2 + (13-10)^2}{10} + \frac{(7-10)^2}{10} = 16{,}4.$$

$\Delta \sim \chi^2(k-1) \overset{k=10}{=} \chi^2(9)$

p-value $= P(\Delta \geq \tilde{\Delta} \mid H_0) = \int_{16{,}4}^{+\infty} q_{\chi^2(9)}\,dx = 0{,}0589 > 0{,}05 = \alpha$

$\Rightarrow$ нет оснований отвергать гипотезу.

Критерий Колмогорова:

$\tilde{\Delta} = 1{,}4$ $\alpha = 0{,}05$

p-value $= P(\Delta \geq \tilde{\Delta} \mid H_0) = 1 - P(\Delta < \tilde{\Delta} \mid H_0) = 1 - K(\tilde{\Delta}) = 0{,}03968 \leq 0{,}05$

$\Rightarrow$ отвергаем H_0

В Колмогорово можем отвергать H_0, а в χ^2 не можем, т.к. он дал близкие значения к предельным в) $n = 100$ $\qquad N(\bar{a}, \sigma^2)$

	$[0,1)$	$[1,2)$	$[2,3)$	$[3,4)$	$[4,5)$	$[5,6)$	$[6,7)$	$[7,8)$	$[8,9)$	$[9,+\infty)$
m_i	5	8	6	12	14	18	11	6	13	7
np_i	4,42	5,17	8,65	12,36	15,1	15,75	14,04	10,7	6,97	6,83

Критерий χ^2:

$$P(x) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(\frac{-\frac{1}{2}(\bar{a} - x_i)^2}{\sigma^2}\right) dx, \quad x_i \in [a, b]$$

$$L = \prod_{i=1}^{n} P(x) \longrightarrow \max \quad \Rightarrow \quad \bar{a} = 5,27, \quad \sigma^2 = 2,505$$

$$\hat{\Delta} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} = 10,803$$

$$\Delta \sim \chi^2(k-1-s)$$

$$p\text{-value} = P(\Delta \geq \hat{\Delta} \mid H_0) = \int_{10,803}^{+\infty} q_{\chi^2(7)}\, dx = 0,862 > 0,05$$

$\Rightarrow$ нет оснований отвергать гипотезу

Критерий Колмогорова

$p\text{-value} = 0,506 > 0,05 = \alpha$

$\Rightarrow$ нет оснований отвергать гипотезу.

Не можем отвергать ни χ^2, ни Колмогорово