

修士論文

Computer Simulation of Particle Acceleration
under Turbulence and Shock Structure

村主 崇行

京都大学大学院理学研究科
物理学・宇宙物理学専攻 物理第二分野
天体核研究室

平成20年1月31日

目次

0.1 記号法	4
第 I 部 要旨	5
第 II 部 観測	6
1 動機	6
2 高エネルギー宇宙線の観測	7
3 加速機構の候補、超新星残骸	8
3.1 SN 1006 の観測	8
3.2 SN-1006 をもとに決定されたシミュレーションモデルのパラメタ	10
第 III 部 理論	12
4 MHD	12
4.1 基礎方程式と仮定	12
4.2 MHD 方程式の導出	14
4.3 MHD 方程式の保存形	16
4.3.1 質量の保存	16
4.3.2 運動量の保存	17
4.3.3 エネルギーの保存	17
4.3.4 磁力線の保存	17
5 MHD Waves	19
6 シンクロトロン放射	23
7 衝撃波	24
7.1 運動方程式の保存型と跳躍条件式	24
7.2 磁気流体衝撃波	25
8 乱流理論	26
8.1 Kolmogorov 乱流	26
8.2 Goldreich Sridhar 乱流	27
8.3 Critical Balance	27
9 ショック加速モデル	28
9.1 2 次 Fermi 加速	28
9.2 1 次 Fermi 加速	31
9.3 宇宙線逸失モデル	33

第IV部 シミュレーション	34
10 シミュレータ	34
10.1 シミュレータ設計の概要	34
10.2 LOGSCALE Functional Field	34
10.3 実行時次元解析	35
10.3.1 実行時次元解析の概要	35
10.3.2 実行時次元解析の実装	35
10.3.3 この手法の欠点と改善手段	37
11 単色波と衝撃波のあるシミュレーション	38
12 乱流と衝撃波のあるシミュレーション	41
12.1 セットアップ	41
12.2 シミュレーション概観および Fermi 加速の 3 つの兆候	42
12.2.1 兆候 1: 粒子の越境回数とエネルギー	44
12.2.2 兆候 2: 粒子の衝撃波法線方向の速度と拡散	45
12.2.3 兆候 3: エネルギースペクトル	46
12.3 結果とその理解	47
12.3.1 座標系および記号	47
12.3.2 基礎となる場合	47
12.3.3 背景磁場の方向に対するスペクトルの依存性	65
12.3.4 流体の速度と粒子の初速を SN1006 のパラメータに一致させた場合	67
12.3.5 乱流の最大波長が小さい場合の角度依存性	73
12.3.6 圧縮率を小さくした場合	83
12.3.7 乱流のスペクトルを Goldreich-Sridhar 的にした場合	89
13 結論・乱流衝撃波加速の理解	98
13.1 SN 1006 の形状の説明	100
第V部 発展	101
14 プラズマ運動論	101
14.1 プラズマの運動論方程式および保存則	101
14.1.1 Boltzmann 方程式の基本形	101
14.1.2 連続の式およびエントロピーの保存	102
14.1.3 運動量の保存	105
14.1.4 エネルギーの保存	106
14.2 静電 Vlasov 方程式からの静電流体方程式およびプラズマ振動数の導出	108
14.2.1 方程式セット	108
14.2.2 局所熱平衡仮定の導入	108
14.2.3 モーメント計算	109
14.2.4 方程式の線形化	110
14.3 Landau 減衰	112

15 Appendix	114
16 データ	115
17 参考文献	115
18 謝辞	116

0.1 記号法

c.g.s. Gauss 単位系を採用する。つまり電場と磁場の次元はともに $[\sqrt{\frac{erg}{cm^3}}]$ であり、強さ E の電場のもつエネルギー密度は $\frac{1}{8\pi}E^2$ 、磁場も同様である。

Bold 体	ベクトル量
r	位置および位置座標軸
u	流体の平均としての速度 (風速)
v	流体中の個々の粒子の速度、もしくは位相空間の速度座標軸
v_h	熱速度
F	力
ρ	質量密度
q	電荷密度
j	電流密度
E	電場
B	磁場
J	衝撃波の圧縮率。 $J = u_{up}/u_{dn} = \rho_{up}/\rho_{dn}$
η	乱流強度を表す。 $\eta = B_{turbulence}/B_{uniform}$
h	1 次 Fermi 加速の加速効率。相対論的粒子が衝撃波面を 1 回超えるたび、エネルギーは $(1 + h)$ 倍になる。文献によっては 1 往復の加速率で効率を定義することもあるので注意が必要である。
θ	とくに断りがないかぎり、衝撃波法線と背景磁場のなす角。

単に粒子のエネルギーと言った場合は運動エネルギーではなく四元運動量ベクトルの時間成分 p_0 を指すこととする。1 次および 2 次の Fermi 加速が進行するとき定数倍されるのは p_0 であるので、そちらの方が都合がよいからである。

第I部

要旨

Abstract: 従来、宇宙線加速は、計算量を軽減するために空間の大きさや次元、解像度にさまざまな仮定を取り入れたランダムウォーク過程として計算されてきた [10] [15]。

しかし、本研究では、

- 背景場を数式で与える描像により、宇宙線加速の駆動力となる乱流磁場を 10^9cm から 10^{17}cm までの広い空間スケールにわたって低メモリ・低計算量で表現する手法を開発したこと、
- 超新星残骸における宇宙線加速現象の時間スケールは 1 年程度と、これまで想定されていたよりずっと短い、という観測的示唆 [17] に基づき、シミュレーションの時間スケールを大胆に短縮したこと

により、宇宙線の全軌道を 3 次元的、決定論的に追跡しつつ、多くのパラメータ下において十分な回数の試行を行うことができた。

この新しい手法の元で

- 乱流場上の 2 次 Fermi 加速による熱的領域からの Injection が生じること
- 1 次 Fermi 加速理論の記述するとおりの加速が可能であり、この場合、加速粒子のエネルギースペクトルは従来どおり逆 2 乗幕: $\frac{dp}{dE} = E^{-2}$ になること

を確認し、さらに次の知見を得た。

- 乱流散乱による 1 次 Fermi 加速を発動するための乱流強度に上限が存在することを発見した。
- 加速効率は、主に (1) 乱流の背景磁場に対する強度 (2) 衝撃波面と背景磁場のなす角度 の 2 つに依存することを発見した。
- 1 次 Fermi 加速で生じるスペクトルの幕は、衝撃波の圧縮率 J に依存しないことを発見し、逆 2 乗幕スペクトルはこれまでの理論の想定を超えて普遍的であることを示した。

これらの結果は天文観測結果の解釈に対し、次のように有効である。

- SN 1006 や Cygnus Loop に見られる弧状構造と、SN 1572 や N49 超新星残骸の等方的形状のそれぞれに説明を与える。
- 超新星残骸をふくむ衝撃波加速領域の X 線観測から、近傍の磁場分布を推定する手段を与える。
- 10^{15}eV までの宇宙線のスペクトルが、精度よく幕に乗っている観測結果をより強力に支持する。

私は本研究を通じて、シミュレーションの最先端は常に計算機進歩の限界点にあること；物理学者はハードウェアの進歩を享受することに加えて、いまや高度にまた幅広く発達した情報論の成果の中に計算機アーキテクチャから独立した豊富な表現手段を求め、限りある計算資源のまだ見ぬ活用法を発見できること；そのような分野横断的発見のために、物理学と情報学はますます協力して洞察にあたる必要があるだろうことを学んだ。

第 II 部

観測

Abstract: 宇宙線スペクトルの観測について、また $10^{15} eV$ 以下のエネルギーの宇宙線の加速源として有力視されている超新星残骸について述べる。また、詳細に観察されていることから、本研究のシミュレーション用パラメータの基礎に選んだ SN 1006 について、Bamba 達 [4] の論文を元に紹介する。

1 動機

宇宙線は宇宙のどこかで加速され、図 [1] のようなスペクトルをもって地上に降り注いでいる。これを説明するには Fermi 加速モデルが存在し [2] [6]、長年にわたって追跡されてきた。しかし「すべての効果を取り入れた」とされるシミュレーション [10] [15] にあっても、大きな角度の散乱はランダムに発生すると仮定し、ランダムウォーク問題を解いているにすぎない。

今、課題となっているのは 1 つに Self-Consistent に解くこと、もうひとつは Injection 問題である。

Self-consistent に解くとは、衝撃波付近で発達する乱流を、粒子との相互作用を含めた計算で再現することである。

この磁気乱流は、宇宙線の大部分を構成している陽子が、磁場に Larmor 回転させられる反作用として励起され、また高速粒子を打ち返すことで Fermi 加速メカニズムを働かせている [5] と考えられている。したがって、宇宙線の主要部分を占めるであろう陽子加速を解明するには、高速粒子と磁場の相互作用を直接に計算に取り入れる必要があると考えられている。

もうひとつの Injection 問題とは、もともと keV くらいの熱温度を持つ粒子をまず GeV くらいまで加熱して 1 次 Fermi 加速のステージに乗せるまでがどういう仕組みで行われているのか、という問題である。

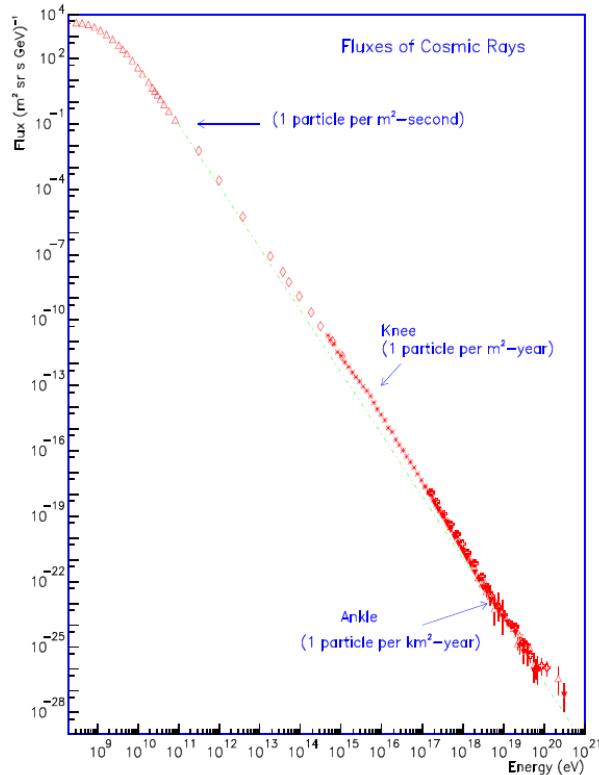
私のシミュレーションでは、宇宙線を加速する磁気乱流のスペクトルおよび衝撃波解を理論 [7] から解析的に仮定し、その磁場の上での粒子の運動を数値的に追跡した。

宇宙線加速のエネルギースペクトルの、大域的な磁場の強度や衝撃波面に対する角度、磁気乱流の振幅に対する依存性を調べた。

これにより、宇宙線加速天体である衝撃波残骸の輝度プロファイル観測に対する示唆を与えた。

2 高エネルギー宇宙線の観測

図 1: 地上で観測される宇宙線のスペクトル。[1]



$$dI/dE(cm^2 srsGeV)^{-1} \propto E^{-3}$$

これが宇宙線研究の百年史のなかで人類が説明しようとしてきたスペクトルであり、以下がそれに対する現行の説明である。

上図をエネルギーの増える方向に眺めてみよう。

このスペクトルは $10^{10} eV$ あたりから始まっている。これより低エネルギーの粒子は太陽風に押し返されてしまうため、地球付近では観測できず、データがない。

$10^{10} eV \sim 10^{16} eV$ のエネルギーの宇宙線は、超新星残骸において後述する Fermi 加速メカニズムによって生み出されていると考えられている。 $knee = 10^{16} eV$ でスペクトルが折れ曲がるのはこのメカニズムのエネルギー上限に達したからだと考えられている。

しかしスペクトルは $ankle = 10^{18.5} eV$ で再び持ち直す。これは銀河系外のなんらかのエネルギー源により加速された粒子だと考えられている。

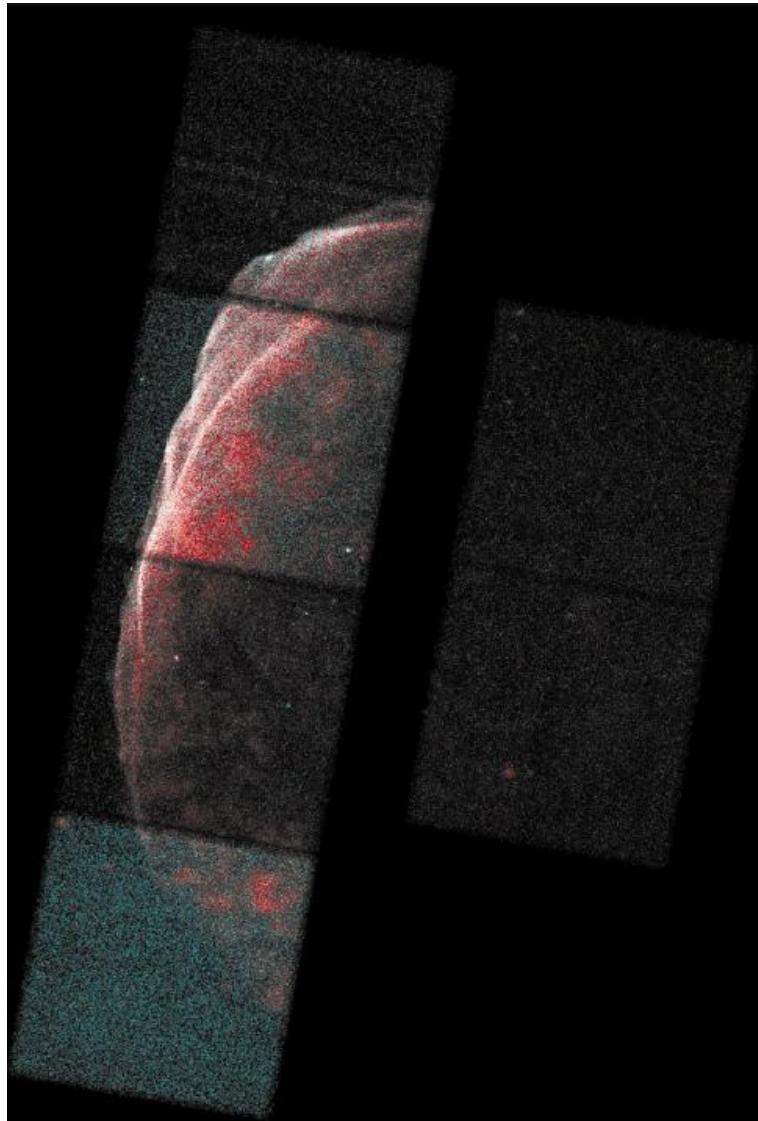
$ankle = 10^{20} eV$ 以上のエネルギーを持つ宇宙線は CMB 光子と反応して π 粒子を生成するせいで地球には届かない。これを GZK Cutoff といい、その存在は議論の余地があるが、Auger による最新の観測は GZK Cutoff の存在を支持している。[8]

3 加速機構の候補、超新星残骸

3.1 SN 1006 の観測

超新星残骸は衝撃波面を形成し、電子の非熱的加速が起こっていることが Chandra 衛星により観測されている [3]。

図 2: 超新星残骸 SN1006



Chandra 衛星による、SN1006 の北西殻の画像。人工的に 2 色に着色されており、赤は $0.5 - 2.0\text{keV}$ 、青は $2.0 - 10.0\text{keV}$ に対応する。図の解像度はおおむね 1 秒角である。

Bamba らの論文 [4] から読み取れる SN1006 における電子加速の様子を以下に述べる。

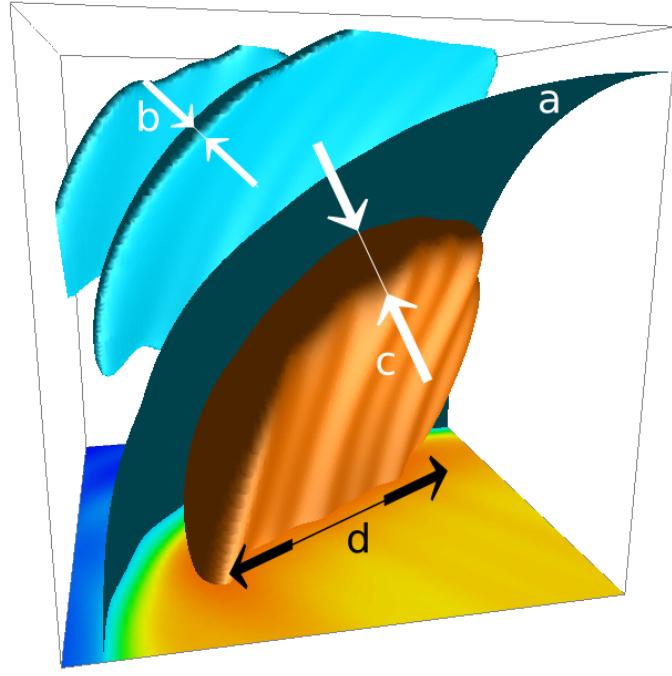


図 3: 超新星残骸の模式図

SN1006[4] の衝撃波面 (a) は半径約 $19pc$ の天体で、ほぼ球殻状の構造を持つ。X 線の温度で見れば球殻はいくつもの非熱的フィラメントの重ね合わせになっており、フィラメントの厚みは衝撃波上流側 (b) で $0.04pc$ 程度、衝撃波下流側 (c) で $0.2pc$ 程度である。フィラメントの幅 (d) は $1pc$ 程度である。

SN1006 では電子が $100TeV$ まで加速されている。

電子の供給源となる熱的領域は約 $1pc$ の厚さに広がっており、その温度は $0.24keV$ である。

モデルフィットにより、磁場は $10\mu G$ から、極端な所では $1mG$ にまで達するとみられる。

乱流の波長については、非熱的なフィラメントの大きさは $0.04 \sim 0.2pc$ が観測 [4] されている。このことから、乱流波長の上限は $0.2pc$ であると見積もれる。乱流波長の下限は、この観測結果からは見積もれない。上流物質の ISM の数密度は、 0.1 個/cc くらいで、中性粒子どうしの散乱断面積は $\sigma = 10^{-15}cm^{-2}$ くらいのため、流体の平均自由行程は $l_{mfp} = 10^{16}cm$ のスケールである。流体機構からは、このスケール以下の乱流やこの厚さ以下の衝撃波面を作ることはできない。

だが、電離ガスにとっては磁場を媒介とした相互作用も可能である。このような無衝突相互作用による構造が、熱温度の粒子の Larmor 半径のスケール 10^7cm まで続いていると考えられる。そのような小規模構造が、たとえば 2 次 Fermi 加速機構を通じて Injection をもたらしているのだろう。

3.2 SN-1006 をもとに決定されたシミュレーションモデルのパラメタ

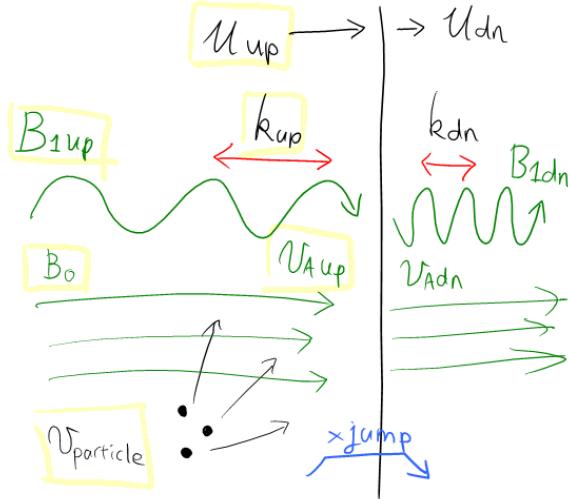


図 4: 垂直衝撃波と torsional Alfvén 波からなる系のパラメータ

上流		下流
$u_{up} = 1 \times 10^9 \text{ cm/s}$	衝撃波に対する流速	$u_{dn} = \frac{1}{J} u_{up}$
$v_{Aup} = 1 \times 10^9 \text{ cm/s}$	流体に対する Alfvén 速度	$v_{Adn} = \frac{1}{\sqrt{J} v_{Aup}}$
$B_{0up} = 1 \times 10^{-5} \text{ Gauss}$	無摂動磁場の強さ	$B_{0dn} = B_{0up}$
$B_{1up} = \eta B_{0up}$	Torsional Alfvén モードの振幅	$B_{1dn} = J B_{1up}$
$k_{up} = 10^9 \sim 10^{17} / \text{cm}$	Torsional Alfvén モードの波数	$k_{dn} = \frac{u_{up} + v_{Aup}}{u_{up} + v_{Aup}} k_{up}$
$v_{particle} = 0.24 \text{ keV} \sim 1 \text{ GeV}$	粒子の初速	

SN1006 の remnant の観測 [4] から以上のパラメータを推定すると以下のようになる。

まず、SN1006 は 1000 年で $19pc$ の大きさにまで拡大したことが観測されている。これは、Sedov 解に当てはめると

$$\begin{aligned} \frac{r}{19pc} &= \left(\frac{t}{1000 \text{ yr}} \right)^{\frac{2}{5}} \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{2}{5} \frac{19pc}{1000 \text{ yr}} \left(\frac{t}{1000 \text{ yr}} \right)^{-\frac{3}{5}} \end{aligned}$$

現在の膨張速度は約 $8 \times 10^{-3} pc/yr = 0.7 \times 10^9 \text{ cm/s}$ であると推定される。実際、観測 [11] によれば膨張速度は $3.0 \times 10^8 \text{ cm/s}$ 程度である。

次に、磁場は $B \approx 10 \mu G$ が観測されている。

上流での粒子数密度は、ISM の代表的な値 $0.1 g/cc$ 程度であるとする。これにより質量密度が $\rho = 10^{-25} g/cm^3$ と決まり、そこでの Alfvén 速度 $v_A = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}} \approx 10^7$ も計算できる。

下流のパラメータは、上流のパラメータと衝撃波圧縮率 J をもとに、第 7.1 節の衝撃波接続条件から決めることができる。

まず、流体の速度 u は $1/J$ 倍になり、 B_0 は衝撃波面に垂直なので変わらず、 B_1 は衝撃波面に平行なので

J 倍になる。また、密度が J 倍になって背景磁場は一定であるから、アルフベン速度 $v_A = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}}$ は、 $J^{-\frac{1}{2}}$ 倍になる。

電荷 e 、質量 m の粒子に対する相対論的 Larmor 半径は

$$r_L = \gamma \frac{mcv}{e|B|} \quad (1)$$

である。陽子を考えると、熱温度が $0.24keV$ だとすればその Larmor 半径は約 $1.5 \times 10^8 cm$ であり、超新星残骸での最高加速点だと思われる $10^{15}eV$ の陽子の Larmor 半径は約 $3.3 \times 10^{17} cm$ になる。

もし宇宙線加速の全プロセスを追跡したいのであれば、このように 9 行にもわたる空間スケールを用意しなければならない。

第 III 部

理論

4 MHD

粒子同士の衝突のほかに電磁気的な相互作用を行う荷電粒子の振る舞いを理解するには、電磁場と物質が結合した系を記述するためのモデルが必要である。そのようなモデルの中でも最もシンプルなものが、

- プラズマを一流体描像であらわし、
- 電磁場のうち電場は長時間平均することで考慮の外に置く

ことで得られる、磁気流体力学 (MagnetoHydroDynamics, M.H.D.) 描像である。

Abstract: 磁場と流体が結合した系は M.H.D. 描像により取り扱うことができる。その基本方程式は、比熱比 γ_{ad} を用いて

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (9)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla P \quad (10)$$

$$\frac{DP}{Dt} = -\gamma_{ad} P \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{(\gamma_{ad} - 1)c^2}{16\pi^2\sigma} (\nabla \times \mathbf{B})^2 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (12)$$

である。

それでは、MHD 描像の方程式系を導出してみよう。

4.1 基礎方程式と仮定

MHD 方程式を得るには、Maxwell 方程式:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi q \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (5)$$

と流体方程式:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (6)$$

$$\rho \frac{Du_a}{Dt} = \rho F_a - \frac{\partial P}{\partial r_a} + \frac{\partial}{\partial r_b} \mu \left(\frac{\partial u_a}{\partial r_b} + \frac{\partial u_b}{\partial r_a} - \frac{2}{3} \delta_{ab} \frac{\partial u_c}{\partial r_c} \right) \quad (7)$$

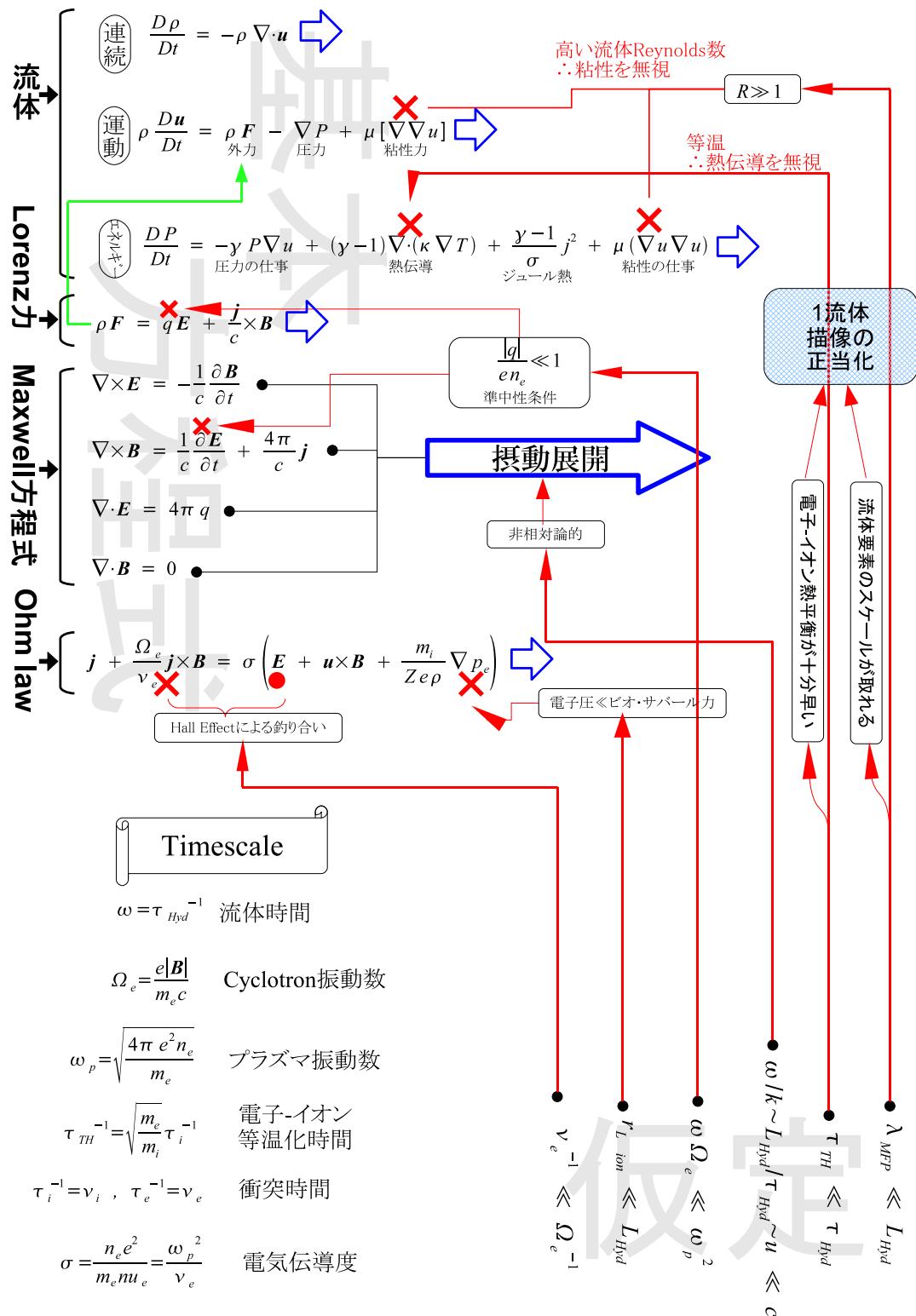
$$\frac{DP}{Dt} = -\gamma_{ad} P \nabla \cdot \mathbf{u} + (\gamma_{ad} - 1) \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \frac{\gamma_{ad} - 1}{\sigma} j^2 + (\gamma_{ad} - 1) \mu \left(\frac{\partial u_a}{\partial r_b} + \frac{\partial u_b}{\partial r_a} - \frac{2}{3} \delta_{ab} \frac{\partial u_c}{\partial r_c} \right) \frac{\partial u_a}{\partial r_b} \quad (8)$$

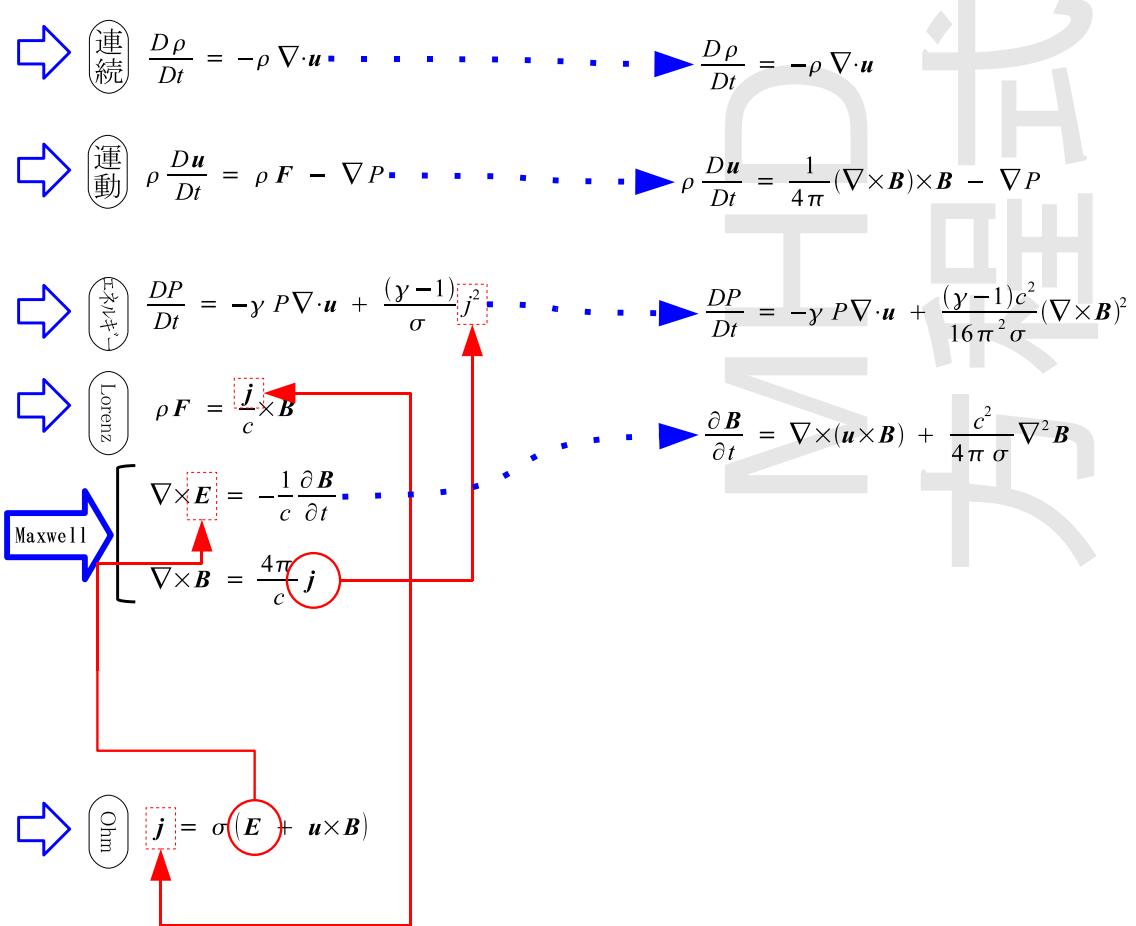
からスタートする。ここで μ は流体の動粘性率、 κ は熱伝導率である。

流体は理想気体であると仮定し、流体のもつ 5 つの自由度として密度 ρ 、平均速度 \mathbf{u} および圧力 P を採用する。このとき流体の他の熱力学変数は比熱比 γ_{ad} を用いて表される。流体の単位体積あたりの内部エネルギーは $\rho\epsilon = \frac{P}{\gamma_{ad}-1}$ であり、エンタルピーは $w = \rho\epsilon + P = \frac{\gamma_{ad}}{\gamma_{ad}-1}P$ である等。

これらの基礎方程式からいくつかの仮定をもとに熱伝導や粘性、電場、電流の項を落とすことで理想 MHD の方程式系を得る。

4.2 MHD 方程式の導出





Lengthscale

$$L_{Hyd} = k^{-1} \text{ 流体スケール}$$

$$r_L = v_e \Omega_e \text{ Cyclotron半径}$$

$$\lambda_D = v_e \omega_p \text{ デバイ長}$$

$$(\sigma_{coll})^{1/2} \approx \frac{e^2}{m v_e^2} \text{ クーロン散乱の断面積}$$

最終的に次の MHD 方程式セットを得る。

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (9)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla P \quad (10)$$

$$\frac{DP}{Dt} = -\gamma_{ad} P \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{(\gamma_{ad} - 1)c^2}{16\pi^2\sigma} (\nabla \times \mathbf{B})^2 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (12)$$

MHD 方程式系の基本変数はこの $\rho, \mathbf{u}, P, \mathbf{B}$ の 8 つである。他の変数は次のように基本変数により媒介表示される。

$$\mathbf{E} = \mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (13)$$

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} \quad (14)$$

4.3 MHD 方程式の保存形

保存形とは、

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{Quantity}) = -\nabla \cdot (\text{Flux}) \quad (15)$$

の形式のこと。この形に書き直せれば、定常解をもとめるのが楽になる：1 次元問題なら解けてしまう。また、ある量 (Quantity) にとっての輸送 (Flux) が何なのかを自信を持って知ることができる。

MHD 方程式の保存形は

- 質量の保存
- 運動量の保存
- エネルギーの保存
- 磁束の凍結

の方程式からなる。

4.3.1 質量の保存

MHD 連続の式 (9) は、Euler 形式に書き直すだけで保存形になる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla(\rho \mathbf{u}) \quad (16)$$

4.3.2 運動量の保存

式(10)を保存形に書き直す。

まず(10)をEuler形式にして

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla(\rho\mathbf{u}) - \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{4\pi}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla P \quad (17)$$

ベクトル公式をつかって $(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mathbf{B}\mathbf{B}) - \frac{1}{2}\nabla|B|^2$ とすることで、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_a) = -\partial_b \left\{ \rho u_a u_b - \frac{1}{4\pi} B_a B_b + \delta_{ab} \left(\frac{1}{8\pi} |B|^2 + P \right) \right\} \quad (18)$$

の保存形を得る。

4.3.3 エネルギーの保存

式(11)を保存形に書き直す。

MHD方程式系のエネルギーは流体の熱エネルギー $\frac{P}{\gamma_{ad}-1}$ 、流体の運動エネルギー $\frac{\rho u^2}{2}$ 、磁場のエネルギー $\frac{B^2}{8\pi}$ に分かれて担われている。

これら3つの量のEuler的な時間発展は次のように分解される。

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{P}{\gamma_{ad}-1} = \underbrace{-\nabla \cdot (\rho \epsilon \mathbf{u})}_{\text{熱エネルギーの輸送}} + \underbrace{-P \nabla \cdot \mathbf{u}}_{\text{圧縮運動による加熱}} + \underbrace{\frac{c^2}{16\pi^2\sigma} (\nabla \times \mathbf{B})^2}_{\text{ジュール熱による加熱}} \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho u^2}{2} = \underbrace{-\mathbf{u} \cdot \nabla P}_{\text{気体の圧縮に使われた仕事}} + \underbrace{-\frac{u^2}{2} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) - \rho u_a u_b \partial_b u_a}_{\text{運動エネルギーの輸送}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi} \mathbf{u} \cdot ((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B})}_{\text{ローレンツ力のする仕事}} \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{B^2}{8\pi} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \underbrace{\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})}_{\text{ローレンツ力}} + \underbrace{\frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B}}_{\text{ジュール熱の発生と磁気エネルギーの輸送}} \right\} \quad (21)$$

あわせると

$$\partial_t \left(\frac{P}{\gamma_{ad}-1} + \frac{\rho u^2}{2} + \frac{B^2}{8\pi} \right) = -\nabla \cdot \left\{ P \mathbf{u} + \frac{1}{2} \rho u^2 \mathbf{u} + \frac{P}{\gamma_{ad}-1} \mathbf{u} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{c^2}{16\pi^2\sigma} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right\} \quad (22)$$

MHDのエネルギー保存則を得る。

4.3.4 磁力線の保存

式(12)は、保存形の形式(15)の通りに書き直すより、以下に述べる磁場の凍結の形に変形したほうが有用である。

磁場の凍結がおこるのは理想MHD描像をとる場合である。理想MHD描像では、電気伝導度 σ が無限大で

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \underbrace{\frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B}}_{\text{ジュール熱の項}} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (23)$$

をはじめあらゆる散逸項を無視することで、MHD の磁場の方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (24)$$

になる。

さて、時間発展する任意の曲面 S とベクトル場 \mathbf{F} について次が成り立つ。

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{v}_{\partial S} \times d\mathbf{l}) + \int_S (\nabla \cdot \mathbf{F}) (\mathbf{v}_S \cdot d\mathbf{s}) \quad (25)$$

ここで、 ∂S は S の周囲の閉曲線であり、 $\mathbf{v}_S, \mathbf{v}_{\partial S}$ は面 S 上の各点の速度である。

この公式で \mathbf{F} を磁場 \mathbf{B} とし、 S を流体とともに運動する曲面とすると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} &= \underbrace{\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}}_{\text{理想 MHD を使う}} + \underbrace{\int_{\partial S} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{u} \times d\mathbf{l})}_{\text{.,}\times\text{の巡回則}} + \underbrace{\int_S (\nabla \cdot \mathbf{B}) (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s})}_{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0} \\ &= \int_S (\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})) \cdot d\mathbf{s} + \underbrace{\int_{\partial S} d\mathbf{l} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{u})}_{Stokes \text{ の定理}} \\ &= \int_S (\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})) \cdot d\mathbf{s} + \int_S \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{s} \\ &= 0 \end{aligned}$$

これは、理想 MHD の範囲では、流体とともに動く任意の曲面を貫く磁場は一定であることを示している。これが磁場の凍結と呼ばれる現象である。

5 MHD Waves

物理学的連続体についてはいつも、その正弦波的摂動を考えることができる。プラズマの場合、対応する波動は MHD wave とよばれ、その特徴としては、同じ波数ベクトルをもつ複数の波動が存在することが挙げられる。

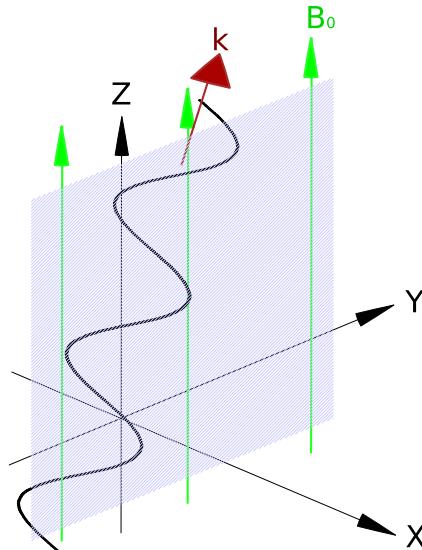
MHD wave の分散関係を導出しよう。MHD 方程式：

$$\begin{aligned}\frac{D\rho}{Dt} &= -\rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) \\ \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= \rho \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla P \\ \frac{DP}{Dt} &= -\gamma_{ad} P \nabla \cdot \mathbf{u} \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})\end{aligned}$$

からスタートし線形解析を行う。

MHD 方程式系では最初に磁場がなければ磁場が生じることはない。そこで、基底状態では、一様密度 ρ_0 ・一様圧力 P_0 ・背景磁場 \mathbf{B}_0 を仮定し、磁場の方向を z 軸にとる。また摂動の波数ベクトル \mathbf{k} は (y, z) 平面内にとる。

図 5: MHD wave モードの計算のセットアップ



まず z 軸が背景磁場の方向、次に yz 平面が波数ベクトルをふくむ平面で、 x 軸方向は並進対称である。

そうすれば摂動の形は

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix},$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 + \rho_1 \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (26)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_1 \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (27)$$

$$P(\mathbf{r}, t) = P_0 + P_1 \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (28)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (29)$$

(30)

とおける。

摂動量の2次以上を無視することでMHD方程式は

$$\begin{aligned} -i\omega\rho_1 &= -i\mathbf{k} \cdot \rho_0 \mathbf{u}_1 \\ -i\omega\rho_0 \mathbf{u}_1 &= \frac{1}{4\pi} (i\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0 \\ -i\omega P_1 &= -\gamma_{ad} P_0 i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1 \\ -i\omega \mathbf{B}_1 &= i\mathbf{k} \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0) \end{aligned}$$

になる。

各方程式を成分で書き下そう。

$$\begin{aligned} \omega\rho_1 &= \rho_0(k_y u_y + k_z u_z) \\ \omega\rho_0 u_{1x} &= -\frac{1}{4\pi} k_z B_{1x} B_0 \\ \omega\rho_0 u_{1y} &= -\frac{1}{4\pi} (k_z B_{1y} B_0 - k_y B_{1z} B_0) \\ \omega\rho_0 u_{1z} &= -\frac{1}{4\pi} k_z B_{1x} B_0 \\ \omega P_1 &= \gamma_{ad} P_0 (k_y u_y + k_z u_z) \\ \omega B_{1x} &= -k_z u_x B_0 \\ \omega B_{1y} &= -k_z u_y B_0 \\ \omega B_{1z} &= +k_y u_y B_0 \end{aligned}$$

速度以外の摂動変数 $\rho_1, P_1, \mathbf{B}_1$ を消去しよう。

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho_0 u_{1x} &= \frac{B_0^2}{4\pi} k_z^2 u_{1x} \\ \omega^2 \rho_0 u_{1y} &= \frac{B_0^2}{4\pi} (k_y^2 + k_z^2) u_{1y} + \gamma_{ad} P_0 k_y^2 u_{1y} + \gamma_{ad} P_0 k_y k_z u_{1z} \\ \omega^2 \rho_0 u_{1z} &= \gamma_{ad} P_0 k_z k_y u_{1y} + \gamma_{ad} P_0 k_z^2 u_{1z} \end{aligned}$$

この連立方程式は、次のような行列形に書ける。

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \omega^2 - v_A^2 k_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 - v_A^2 k^2 - c_s^2 k_y^2 & -c_s^2 k_y k_z \\ 0 & -c_s^2 k_y k_z & \omega^2 - c_s^2 k_z^2 \end{pmatrix}}_{\text{左辺}} \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{1z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ただし $k^2 = k_y^2 + k_z^2$ 、 $v_A = \frac{\gamma_{ad} P_0}{\rho_0}$ 、 c_s とした。

この方程式が非自明な解を持つためには、行列()の行列式が 0 でなければならない。

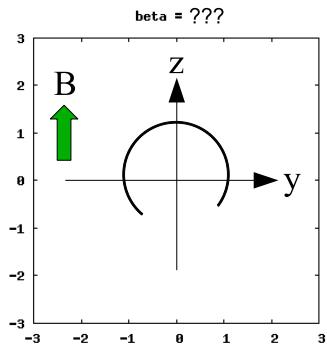
$\det(\) = 0$ を ω^2 について解くと、MHD 方程式が (26) ~ (29) の形の解を持つための条件として、

$$\text{分散関係} \left\{ \begin{array}{l} \omega^2 = v_A^2 k_z^2 \\ \omega^2 = \frac{1}{2} k^2 (c_s^2 + v_A^2) \left(1 \pm \sqrt{1 - \left(2 \frac{k_z}{k} \frac{c_s v_A}{c_s^2 + v_A^2} \right)^2} \right) \end{array} \right. \quad (31)$$

$$(32)$$

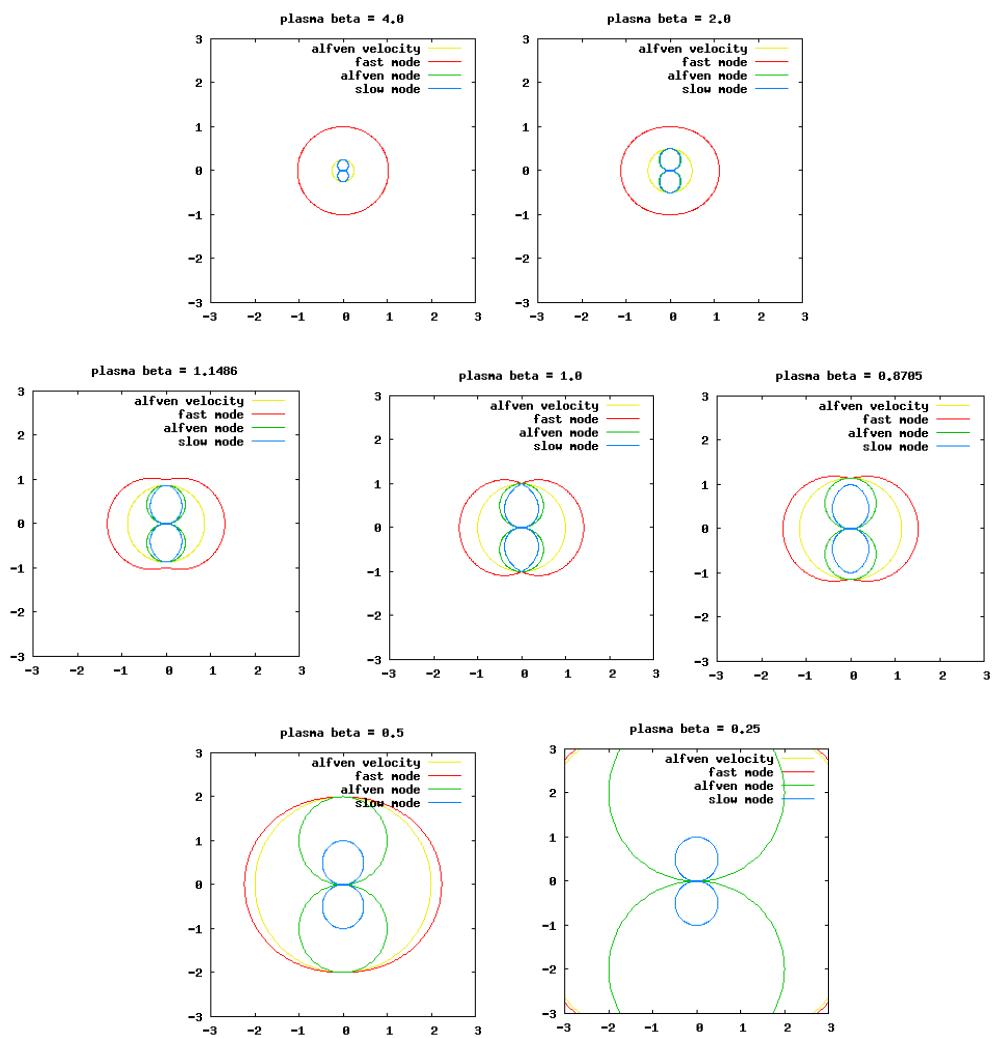
を得る。

MHD waveの分散関係



目盛りの次元は速度で、
単位はガス音速 $c_s = 1$

- ・3つのモードの群速度を媒質の音速で規格化し、曲座標でプロットしたもの。
- ・ある方向 \mathbf{e} への音速が c であるとき、方向 \mathbf{e} で大きさ c のベクトルにあたる点 $(c e_x, c e_y)$ をプロットした図。
- ・あらゆる \mathbf{k} について $\frac{\omega(\mathbf{k})}{k^2 c_s} \mathbf{k}$ をプロットしたことと等価。



6 シンクロトロン放射

背景磁場の中では電荷はサイクロトロン運動とよばれる円運動を行う。このとき、電荷が加速度運動することに起因する電磁波が放射され、電荷は運動エネルギーを失う。これをシンクロトロン放射という。

宇宙線加速の問題の場合に、電荷が失うエネルギーの大きさを見積もう。

質量 m 、電荷 e を持つ粒子が、磁場 B の中を速度 v でサイクロトロン運動しているとき、シンクロトロン放射の全エネルギー強度は次の式で与えられる。

$$I[\text{erg/sec}] = \frac{2e^4 B^2 v^2}{3m^2 c^5 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \quad (33)$$

相対論的 γ 係数を、粒子の四元運動量の第 0 成分 $p_0 = mc^2 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ で表すと、

$$\begin{aligned} I[\text{erg/sec}] &= \frac{2e^4 B^2 v^2}{3m^4 c^9} \frac{m^2 c^4}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \\ &= \frac{2e^4 B^2 v^2}{3m^4 c^9} (p_0)^2 \end{aligned}$$

のようになる。そこでシンクロトロン放射経由のエネルギー損失のタイムスケールは

$$\begin{aligned} \frac{I}{p_0} [\text{/sec}] &= \frac{2e^4 B^2 v^2}{3m^4 c^9} \frac{m^2 c^4}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \\ &= \frac{2e^4 B^2 v^2}{3m^4 c^9} (p_0) \end{aligned}$$

と見積もることができる。超相対論的なエネルギーを持つ陽子が、我々の SNR にいるような状況を考えると、

- $m = m_p = 1.67 \times 10^{-24} [\text{g}]$
- $e = 4.8 \times 10^{-10} [\sqrt{\text{erg} \cdot \text{cm}}]$
- $B = 1 \times 10^{-5} [\text{Gauss}]$
- $v = c$

タイムスケールの具体的な値を計算すると、

$$\frac{I}{p_0} = 10^{-26} \left(\frac{B}{10^{-5} G} \right)^2 p_0 [\text{/sec}] \quad (34)$$

である。

我々が興味のある p_0 の値は $10^{-3} \sim 10^3 [\text{erg}]$ 、時間スケールは高々 $10^{11} [\text{sec}]$ であることを考えると、シンクロトロン放射による減衰は、陽子加速の範囲では貢献しないことがわかる。

7 衝撃波

7.1 運動方程式の保存型と跳躍条件式

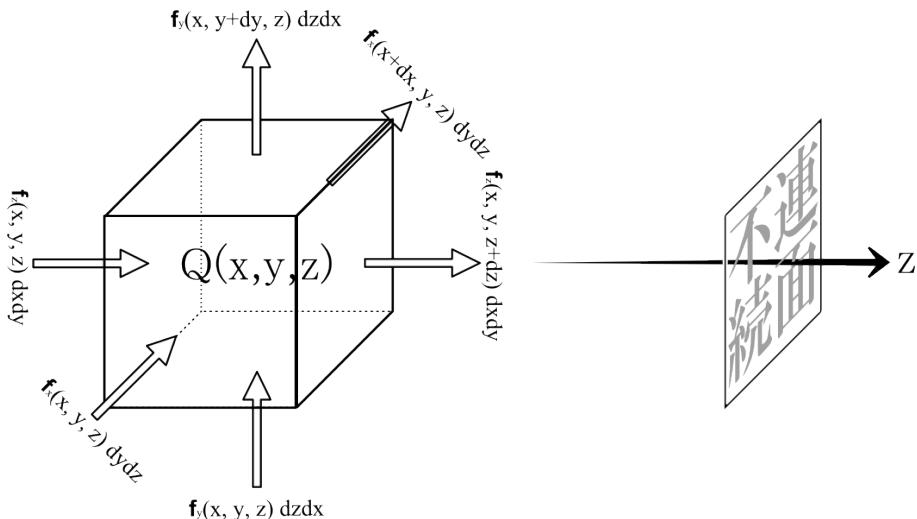
場の方程式系を扱うときは、不連続面があると考えたほうがよい場合がある。ただし、すべての空間微分 $\frac{\partial}{\partial r}$ が発散してしまうため、真の不連続面は場の描像と両立しない。

場の量の変化する長さスケール ϵ が注目している長さスケール l よりも非常に小さいような領域がある場合、不連続面とみなすことができる。

$\sqrt{\epsilon l}$ 程度の長さスケールに注目すれば、衝撃波面は平面であり、衝撃波面の片側では物理量は一様であると思ってよい。そこで、衝撃波面に垂直な方向を z 軸に取ることにすると、衝撃波面をモデルに取り入れる時に必要なのは、モデルに登場する物理量 Q について、衝撃波前面での値 $Q(0, 0, -\epsilon)$ と衝撃波後面での値 $Q(0, 0, +\epsilon)$ との関係を求ることである。

この計算をするに当っては、両面での物理量の差を表現する表記 $\{Q\} \equiv Q(0, 0, +\epsilon) - Q(0, 0, -\epsilon)$ を導入すると便利である。

図 6: 衝撃波近傍の座標系



$\epsilon \ll l$ 、情報が不連続面を横切るのに要する時間 $\tau_\epsilon = \epsilon/c_s$ は注目している時間スケール $\tau = l/c_s$ に較べて非常に小さくなるから、衝撃波面の両側は τ にくらべ瞬時に緩和するとしてよい。ゆえに、時間スケール τ に関して衝撃波は定常問題あるかのように振舞う。

次のような保存系の方程式は、

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{f} \quad (35)$$

定常であることより時間微分は 0 であり、また衝撃波の空間微分のうち有意な値をもつのは z 方向のみであるから、

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} = 0 \quad (36)$$

と変形できる。これを衝撃波の幅にわたって積分して、

$$\{f_z\} = 0 \quad (37)$$

を得る。

7.2 磁気流体衝撃波

さきほどの MHD 方程式の保存則系：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla(\rho \mathbf{u}) \quad 16$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_a) = -\partial_b \left\{ \rho u_a u_b - \frac{1}{4\pi} B_a B_b + \delta_{ab} \left(\frac{1}{8pi} |B|^2 + P \right) \right\} \quad 18$$

$$\partial_t \left(\frac{P}{\gamma-1} + \frac{\rho u^2}{2} + \frac{B^2}{8\pi} \right) = -\nabla \cdot \left\{ P \mathbf{u} + \frac{1}{2} \rho u^2 \mathbf{u} + \frac{P}{\gamma-1} \mathbf{u} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{c^2}{16\pi^2 \sigma} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right\} \quad 22$$

はそのまま接続条件の 5 つになる。だが MHD 方程式系の変数は 8 つあるのであと 3 つの接続条件が必要だ。それらは、Maxwell 方程式のうちの 2 つ

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (38)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (39)$$

からもたらされる。

これらに保存則から接続条件を導く変換 (35) (37) を施すことで、衝撃波面での MHD 接続条件を得る。

$$\{\rho u_z\} = 0 \quad (40)$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \rho u_z u^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} + \frac{1}{4\pi} (u_z B^2 - B_z (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B})) \right\} = 0 \quad (41)$$

$$\left\{ P + \rho u_z^2 + \frac{1}{8\pi} (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) \right\} = 0 \quad (42)$$

$$\left\{ \rho u_x u_z - \frac{1}{4\pi} B_x B_z \right\} = 0 \quad (43)$$

$$\left\{ \rho u_y u_z - \frac{1}{4\pi} B_y B_z \right\} = 0 \quad (44)$$

$$\{B_z u_x - B_x u_z\} = 0 \quad (45)$$

$$\{B_z u_y - B_y u_z\} = 0 \quad (46)$$

$$\{B_z\} = 0 \quad (47)$$

8 亂流理論

Abstract: 流体内に生じる乱流は $v_k \propto k^{-\frac{1}{3}}$ のスペクトルを持つ (Kolmogorov スペクトル。) 磁場下にある流体では乱流スペクトルは非等方的になり、波数ベクトルが磁場に平行な方向では $v_{k\parallel} \propto k_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}$ 磁場に垂直な方向では $v_{k\perp} \propto k_{\perp}^{-\frac{1}{3}}$ となる。

8.1 Kolmogorov 乱流

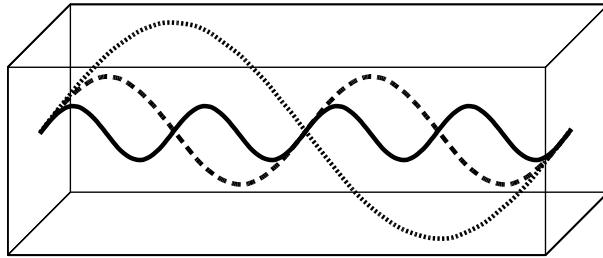


図 7: こんな波たちがあつて

波長の長い波は放っておくと波長の短い波へ分解していく。波長が平均自由行程の程度になると、熱運動と区別がつかなくなる。このようにして運動エネルギーが熱エネルギーへと変換されているプロセスを乱流という。

流体運動の速度を、次の

$$v(t, x) = \sum_{k \in K} v_k \exp(ikx - i\omega t)$$

ようにモード分解して考える。ただし、波数モードの階層は $K = \{k_0, 2k_0, 4k_0, 8k_0, \dots\}$ と、等比数列的に区切っておく。

流体方程式には非線形項

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -v \frac{\partial v}{\partial x}$$

が存在するため、ある波数とその倍波数の速度モードが

$$\frac{\partial v_{2k}}{\partial t} = -v_k \cdot ikv_k$$

のように結合している。

このように、流体中である波数 k のモードが持つ運動エネルギーが次に細かい波数 $2k$ に輸送されるタイムスケールは

$$\tau_k = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1} = (v_k k)^{-1} \quad (48)$$

である。

そう考える時、単位時間、単位体積あたりに、特定のスケール k からより小さいスケールに輸送される運動エネルギーは $\rho v_k^2 / \tau_k [\text{erg/s/cm}^3]$ となる。

平衡状態では、どの波数スケールを通過するエネルギー輸送量も等しくなると考えられるから、

$$\rho v_k^2 / \tau_k = \text{const}(k)$$

τ_k の定義 (48) を代入すると、

$$\rho v_k^2 \cdot v_k k = \text{const}(k)$$

したがって、異なる波数の速度モードの振幅のあいだに、次の関係が成り立つ。

$$v_k \propto k^{-\frac{1}{3}} \quad (49)$$

MHD 摂動解では、磁場と速度は常に比例しているから、磁場のスペクトルは

$$B_k \propto k^{-\frac{1}{3}} \quad (50)$$

となる。

これを、各モードが持つ運動エネルギーの関係に直すと、 $v_k^2 \propto k E(k)$ だから

$$E(k) \propto k^{-\frac{5}{3}}$$

8.2 Goldreich Sridhar 乱流

流体を貫く磁場があると、磁場の方向に運動エネルギーが輸送されるタイムスケールは Alfvén 速度が決めるようになる。

$$\tau_{k\parallel} = (\omega_{alf})^{-1} = (v_A k \parallel)^{-1} \quad (51)$$

すると、単位時間、単位体積あたりに、特定のスケール k からスケールの小さいほうへ輸送される運動エネルギー $\rho v_{k\parallel}^2 / \tau_{k\parallel}$ [erg/s/cm³] が、乱流が定常状態に至ったならばスケールに依存しなくなるという条件

$$\rho v_{k\parallel}^2 / \tau_{k\parallel} = \text{const}(k_\parallel)$$

は、 τ_k の定義 (51) を代入すると、

$$\rho v_{k\parallel}^2 v_A k_\parallel = \text{const}(k_\parallel)$$

と書かれる。したがって、異なる波数の速度モードの振幅のあいだに、次の関係が成り立つ。

$$v_{k\parallel} \propto k \parallel^{-\frac{1}{2}} \quad (52)$$

MHD 摂動解では、磁場と速度は常に比例しているから、磁場のスペクトルは

$$B_{k\parallel} \propto k_\parallel^{-\frac{1}{2}} \quad (53)$$

となる。

8.3 Critical Balance

背景磁場下の乱流では、

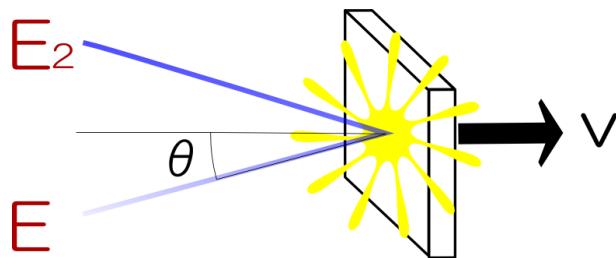
$$k_\parallel v_A = k_\perp v_k \quad (54)$$

の関係をみたす、磁場に平行なモードと垂直なモードが結合しており、どっちかが少ないと、もう一方からエネルギーが流れ込んで励起され、関係 (54) をみたす垂直モードと水平モードの振幅が等しくなることからスペクトルが決まる、という考え方もある。この見積もりもまた (53) 式のスペクトルに導く。

9 ショック加速モデル

Abstract: 流体と高速粒子が相互作用し、高速粒子が加速されるというモデルが2つある。それぞれ
 流体が乱流状態にあるとき
 流体内に衝撃波があるとき
 機能するメカニズムであり、加速効率が
 流体内の速度差 $\frac{v}{c}$ の 2 乗 1 乗
 に比例することから、
 2次 Fermi 加速
 1次 Fermi 加速
 と呼ばれている。

9.1 2次 Fermi 加速



2次 Fermi 加速の原理 ある空間内に、粒子たちが運動しているとする。粒子たちの間の衝突は考えない。また、同じ空間に、粒子とぶつかると粒子を完全反射させるような反射板たちも運動しているとする。

これだけの状況で、粒子は加速されて幕的なスペクトルを持つようになる。本当だろうか。

粒子の速度は c に十分近いが、反射板たちの速度は十分光速より遅く典型的には v であるとしよう。

速度 v で運動している反射板に、エネルギー E をもち、速度 c で運動している粒子が角度 θ をなす方向から衝突し、反射された後のエネルギー $E_2(\theta)$ をもとめよう。

粒子の初期の四元運動量を実験室系から反射板系へ変換し、反射板で反射させ、反射板系から実験室系へ戻すことで、反射後の粒子の四元運動量を

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} E \\ E \cos \theta \\ E \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} E\gamma(1-\beta \cos \theta) \\ E\gamma(-\beta + \cos \theta) \\ E \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} E\gamma(1-\beta \cos \theta) \\ E\gamma(\beta - \cos \theta) \\ E \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} E\gamma^2(1-2\beta \cos \theta + \beta^2) \\ E\gamma^2(2\beta - (1+\beta^2)\cos \theta) \\ E \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

したがって $E_2(\theta) = \gamma^2(1 - 2\beta \cos \theta + \beta^2)E$ である。

一方、粒子が角 θ で衝突する確率的重み $w(\theta)$ は、粒子の運動方向は実験室系で等方的であるとし、正面衝突は追突より起こりやすい効果を考慮すると、

$$w(\theta) = (c - v \cos \theta) \sin \theta \quad (55)$$

である。

これにより E_2 の期待値は、

$$\langle E_2 \rangle = \frac{\int_0^\pi d\theta E_2(\theta) w(\theta)}{\int_0^\pi d\theta w(\theta)} \quad (56)$$

$$= (1 + \frac{2}{3}\beta^2)E \quad (57)$$

となる。ただし β の 2 次まで取った。

このように衝突のたびに粒子の持つエネルギーが定数倍 $(1 + h)$ になることが Fermi 加速メカニズムが幕スペクトルをもたらす本質である。2 次 Fermi 加速の場合 $h = \frac{2}{3}\beta^2$ である。

平均衝突周期を τ_{coll} とすると、時間と共に粒子のエネルギーは

$$E(t) = (1 + h)^{\left(\frac{t}{\tau_{coll}}\right)} = \exp\left(\frac{ht}{\tau_{coll}}\right) \quad (58)$$

$$\equiv \exp\left(\frac{t}{\tau_{acc}}\right) \quad (59)$$

のように、 τ_{acc} のタイムスケールで指数関数的に増加する。

一方、加速機関から粒子が脱出するタイムスケールを τ_{esc} とすると、粒子が時刻 t まで加速機関の中にいる確率は

$$P(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau_{esc}}\right) \quad (60)$$

である。すると時刻 $t \sim t + dt$ の間に脱出する粒子の割合は

$$P(t) - P(t + dt) = -\frac{dP}{dt}dt = \frac{dt}{\tau_{esc}} \exp\left(-\frac{t}{\tau_{esc}}\right) \quad (61)$$

であり、彼らがもっているエネルギーは $\exp\left(\frac{ht}{\tau_{coll}}\right)$ である。したがって、最終的なスペクトルは

$$\frac{dN}{dE} \propto \frac{dP}{dE} = \frac{\frac{dP}{dt}}{\frac{dE}{dt}} = \frac{\frac{dt}{\tau_{esc}}}{\frac{dE}{dt}} \quad (62)$$

$$= \exp\left(-\frac{t}{\tau_{esc}} - \frac{t}{\tau_{acc}}\right) \quad (63)$$

$$= \exp^{-\left(1 + \frac{\tau_{acc}}{\tau_{esc}}\right) \times \frac{t}{\tau_{acc}}} \quad (64)$$

のような幕分布となる。

2次加速のタイムスケール 従来、上記の2次Fermi 加速は、高エネルギー粒子とガス雲の衝突として実現していると考えられてきた。そうであれば、ガス雲のサイズは $\lambda_{mfp} \sim 10\text{pc}$ 程度であるから、平均衝突周期 $\tau_{coll} = \lambda_{mfp}/c = 10^9\text{sec}$ 程度である。またガス雲の速度が銀河回転運動のスケール $u = 10^7\text{cm/sec}$ だとしても、 $\beta = 3 \times 10^{-4}$ であり、加速タイムスケール(エネルギーが e 倍になる時間) $\tau_{acc} \sim 10^{16}\text{sec}$ 、約3億年にもなり、宇宙線加速機構としては現実的ではないとされ、これまであまり重視されてこなかった。

しかし、乱流の中で、各モードの節や腹が反射体の役割をはたして2次加速が起こるものとすれば、最小で $\lambda_{mfp} \sim 10^9\text{cm}$ 程度までの波長の乱流を考えることで、平均衝突周期 $\tau_{coll} = \lambda_{mfp}/c = 0.1\text{sec}$ 程度になる。また反射体の速度は衝撃波面での速度差 $u = 10^8\text{cm/sec}$ のスケールになるとすれば、 $\beta = 3 \times 10^{-3}$ であり、加速タイムスケールは最小で $\tau_{acc} \sim 10^6\text{sec}$ 程度にまで下がることが見積もれる。

実際、本実験においては、12.3.2節で見られるように、1次加速と2次加速がともに有効であることが観察された。

9.2 1 次 Fermi 加速

こんどは、衝撃波面の両側にある流体の間を高速粒子が往復している状況を考えよう。高速粒子はそれぞれの流体内では等方的な運動をしているものと仮定する。このときは、高速粒子の四元運動量のうち空間成分は忘れてよく、衝撃波面を通過するとき法線と速度がなす角度 θ は常に重み $w(\theta) = \cos \theta \sin \theta$ の確率分布に従うと考えてよい。これは、等方的であることから単位体積あたりの θ の数は $\sin \theta$ に比例する一方、彼らの衝撃波面に対する速度は $\cos \theta$ に比例するからである。

また、境界は互いに離れる方向に β の速度で運動しているとする。衝撲波の場合 $\beta < 0$ である。

衝撲波面を角度 θ 横切ったときのエネルギー変化は、単に初めの流体系から後の流体系へ Lorenz 変換すればよく、

$$\begin{pmatrix} E \\ E \cos \theta \\ E \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E\gamma(1 - \beta \cos \theta) \\ E\gamma(-\beta + \cos \theta) \\ E \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

β の 1 次まで採用すると、

$$\begin{aligned} \langle E_{after} \rangle &= \frac{\int_0^{\pi/2} d\theta w(\theta) E_{before} (1 - \beta \cos \theta)}{\int_0^{\pi/2} d\theta w(\theta)} \\ &= (1 - \frac{2}{3}\beta) E_{before} \end{aligned} \quad (65)$$

であるから、衝撲波面を 1 回飛び越すときの加速倍率 $(1 + h)$ は $(1 - \frac{2}{3}\beta)$ である。上流、下流の流速が u_{up} , $u_{dn} = \frac{1}{J}u_{up}$ の衝撲波の場合

$$(1 + h) = 1 + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{J}\right) \frac{u_{up}}{c} \quad (66)$$

である。

1 次 Fermi 加速の生成する宇宙線のエネルギースペクトル いま、粒子が衝撲波面を N 回通過したとのエネルギー $E(N)$ は

$$E(N) = E_0 \exp(hN) \quad (67)$$

になることがわかった。

次に、粒子が衝撲波面を N 回通過できる確率を $P(N)$ としよう。 P は次のように指数関数で表せるとする。

$$P(N) = \exp(-p(N)N) \quad (68)$$

すると、この加速機構から生成される粒子のエネルギースペクトルは、

$$\frac{dP}{dE} = -\frac{\frac{dP}{dN}}{\frac{dE}{dN}} \quad (69)$$

$$= \frac{p \exp(-pN)}{E_0 h \exp(hN)} \quad (70)$$

$$\propto \exp(-(h+p)N) \quad (71)$$

$$\propto E^{-\frac{h+p}{h}} \quad (72)$$

$\frac{dP}{dE} = E^{-\mu}$ の幕 $-\mu$ が -2 になる、という要請から、

$$\mu = \frac{h+p}{h} = 2 \quad (73)$$

$$p = h \quad (74)$$

というシンプルな関係を得る。

従来の説明 従来の説明では、下流での等方的運動とランダムウォークの釣り合いから、脱出確率が $p = \frac{4u_{dn}}{c}$ になるとし、

$$\mu = 1 + \frac{3}{J-1} \quad (75)$$

である、と考えられ、衝撃波の強い極限である $J = \frac{u_{up}}{u_{dn}} = 4$ である場合に限って、 $\mu = 2$ が実現すると考えられてきた。

しかし、12.3.6 節で示すように、実験結果は、 J の値によらず $\mu = 2$ 程度となること、少なくとも J の減少にともなう μ の増加は (75) 式の表すほど急激ではないことを示唆している。

もし $\mu = 2$ が J の値によらないのなら、より普遍的に $p = h$ となる理由があるように思われるが、本研究の範囲内ではそれを見出すことはできなかった。

ひとつ、注目すべき特徴は、もし $p = h$ なら N が 1 増加するごとに、各粒子のエネルギーは $(1+h)$ 倍になるとともに、粒子の数は $(1-p)$ になること、そして $p = h$ であることから、 N が増加しても加速機構の中にいる全粒子の全エネルギーは変化しないということである。

9.3 宇宙線逸失モデル

1次および2次 Fermi 加速が予言する宇宙線の発生源でのエネルギースペクトルの幕は

$$\frac{dN}{dE} = E^{-2} \quad (76)$$

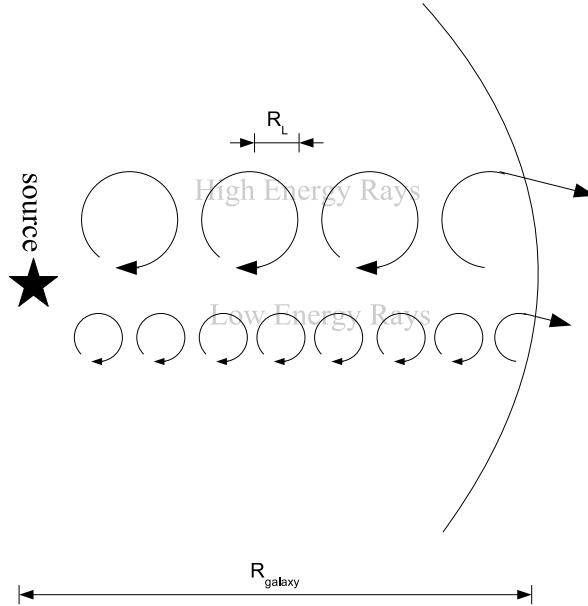
である。一方、観測されているスペクトルの幕は、およそ

$$\frac{dN}{dE} = E^{-3} \quad (77)$$

である。

2つの幕が食い違うのは、銀河内を伝播している間、高エネルギー粒子ほど逸失しやすいという効果のせいである。これは、Leaky Box Model [14] によって説明され、その効果は次のように見積もることができる。

図 8: 宇宙線の漏れ出し



R_{galaxy} が宇宙線を保持する天体のサイズ、 R_L が宇宙線の Larmor 半径。エネルギーの小さい宇宙線ほどランダムウォークの歩幅が小さいので、なかなか漏れ出さない。

宇宙線は銀河系内をランダムウォークしている。大雑把にその周期を $\Omega_L \propto E^{-1}$ 、歩幅を $R_L \propto E^1$ であるとしよう。

加速源から銀河を脱出するまでには、直線距離にして $N = \left(\frac{R_{galaxy}}{R_L}\right)$ 歩進まねばならない。これには N^2 回のランダムウォークを必要とする。したがって、脱出までに要する時間は $T = N^2 \Omega_L^{-1} = \left(\frac{R_{galaxy}}{R_L}\right)^2 \Omega_L^{-1} \propto E^{-1}$ である。

宇宙線の銀河系内滞在時間はそのエネルギーの -1 乗に比例することから、スペクトルの幕に追加の -1 乗がつくのである。

第IV部 シミュレーション

Abstract: 無衝突系の場合、熱的粒子と高エネルギー粒子の相互作用は磁場を介したものに限られる。

ゆえに、流体パートから与えられるべき磁場さえ位置と時間の関数として知っていれば、粒子パートだけに注目してシミュレーションを行うことができる。

この磁場を簡単な式で与えるならば、流体パートをメッシュ法等で計算する時間は省かれまた空間の上限は取り除かれ、以って生じる膨大な計算余力を高エネルギー粒子の時間発展、に注ぎ込むことができる。

そこで、超新星残骸および入力粒子にまつわるさまざまなパラメータを変化させながら MHD 衝撃波解の上に MHD 乱流スペクトルモデル (Kolmogorov 的: 式 (50)、あるいは Goldreich-Sridhar 的: 式 (53)) にしたがって磁場を入れ、式として与えられた磁場の上でテスト粒子を運動させて加速を調べるという手段で一連の数値実験を行った。

10 シミュレータ

10.1 シミュレータ設計の概要

シミュレータは一度に 1 つづつ、乱流のある衝撃波という描像に即しながら時間発展する磁場に粒子を投入する。粒子の位置および運動量は四次の Runge-Kutta 法で更新する。時間刻みは、原則として粒子の速度が熱的である時、背景磁場による Larmor 振動数の 100 分の 1 にする。 10^{-5}Gauss の磁場中の陽子についてこれは約 0.1 秒である。

10.2 LOGSCALE Functional Field

本シミュレータは、ユニークな場の表現方法を採用している。それは **LOGSCALE Functional Field** と呼ばれる。

Functional Field とは、シミュレーションに必要な場を、コンピュータ上で高速に計算可能な関数として表現したものである。Functional Field の利点は、それが LOGSCALE でありうることである。

計算量クラス **LOGSCALE** とは、 n 倍の物理的スケールにわたる現象を取り扱う計算であって、必要な計算量が系の統計的特徴を損なうことなく $O(\log(n))$ にできるような計算のことである。

超新星残骸における宇宙線加速を考える場合、3.2 節で試算したように 10^9cm から 10^{17}cm までのスケールを扱うことが必要であると考えられる。これは 10^8 倍のスケールにまたがる現象である。しかし、Fermi 加速において宇宙線のエネルギーはジャンプ回数の指數関数で増加するため、Fermi 加速を再現するには、波数が 10 倍になるごとに数個のモードがあれば十分である。ゆえに、Fermi 加速メカニズムを探る場合には Functional Field による背景磁場の表現が適している。

LOGSCALE なアルゴリズムの例 数値物理の分野で広く使われている手法の中にも、LOGSCALE であるアルゴリズムの例はある。

Nested Grid は高解像度が必要になるだろうと予測される位置に、あらかじめ細かいメッシュを用意しておく方法である。たとえば球対称なガスからの重力崩壊による星形成では、中心に高密度・小サイズの星が形成されることが予想できるため、あらかじめ入れ子状の格子を用意しておく Nested Grid の方法が威力を発揮する。

Adaptive Mesh Refinement は、高解像度が必要となった領域に動的に細かいメッシュを割り当てる方法で、局所的に小スケール・高密度領域が形成される系のシミュレーションなどに応用されている。

これらは、系のごく一部分で高い空間精度が必要な計算に関して LOGSCALE なアルゴリズムである。しかしいずれの方法も、例えば乱流現象のように、系のあらゆるところで細かい構造が発達する場合には適用できない。

本研究で使用した手法は、位置に個性を持たせることはできないけれども、逆にすべての位置にすべてのスケールの構造があるような系を表現できるという点において、Nested Grid や Adaptive Mesh Refinement と補い合う LOGSCALE アルゴリズムであるといえる。実にこれは Fourier 空間での Nested Grid 手法に相当する。

10.3 実行時次元解析

10.3.1 実行時次元解析の概要

物理量は一般に次元を持ち、異なる次元の量の加算には意味がない。ところが、コンピュータ上の数値は、通常無次元数として表現されるため、本来次元が異なる量を加算する過ちは、深刻な結果をもたらすにも関わらず検出することが難しく、バグの温床であった。

変数と物理量が一対一対応していれば、コンパイル時に次元解析を行うことが可能であるはずだが、モダン Fortran や C++ の文法はそのような処理を簡潔に書くには貧弱すぎる。

そこで、今回は任意の型の変数に対し次元情報を同行させ、プログラムの実行時に、次元情報つきの変数同士が演算されるたびに次元チェックを行う枠組みを作った。

この枠組みは、C++ の自然な式の文法に影響を与えないように設計されている。ゆえにコンパイルオプションを切り替えるだけでコードに変更を加えることなく、次元チェックの有無を切り替えることができ、次元チェックなしモードでは従来の無次元なコードと同じ動作速度を保障する。

10.3.2 実行時次元解析の実装

体 T に対し、 T の元と各次元の幕に対応する実数との組を要素とする”次元を持つ T ” $\text{Dim}(T)$ を定義する。

$$\text{Dim}(T) \equiv \{(a, g, c, s) | a \in T, g, c, s \in \mathbb{R}\} \quad (78)$$

この Dim は、体に”次元を持たせる”関手である。 $\text{Dim}(T)$ の元 (a, g, c, s) について、 $a \in T$ を量、 c, g, s を次元と呼ぼう。

Dim は Dimensional テンプレートクラスとして実装できる。

擬似コード 1: Dimensional テンプレートクラス

```

1 template <class t>
2 class Dimensional{
3 public:
4     t value;
5     double powMass; double powLen; double powTime;
6     Dimensional(t a,double g, double c, double s):value(a), powMass(g), powLen(c), powTime(s){}
7     . .
8 }
```

$\text{Dim}(T)$ の元どうしの乗算は、たがいの量を乗算するとともに次元を加算することとして定義される。

$$(a, g_a, c_a, s_a) \times (b, g_b, c_b, s_b) := (a \times b, g_a + g_b, c_a + c_b, s_a + s_b)$$

除算も同様である。これは次のように実装できる。

擬似コード 2: 有次元量の乗算

```

1 template <class t>
2 Dimensional<t> operator*(Dimensional<t>& a, Dimensional<t> b){
3     return Dimensional<t>(
4         a.value * b.value,
5         a.powMass + b.powMass,
6         a.powLen + b.powLen,
7         a.powTime + b.powTime);
8 }
```

次元を持つ数どうしの加算は、次元が一致していなければ \perp (エラー) となり、そうでなければたがいに共通の次元をもち、たがいの量の和の量をもつ $\text{Dim}(T)$ の元として定義される。減算も同様である。

```

(a, g_a, c_a, s_a) + (b, g_b, c_b, s_b) :=
    if (g_a = g_b and c_a = c_b and s_a = s_b)
        then (a + b, g_a, c_a, s_a)
    else ⊥
```

これは次のように実装される。

擬似コード 3: 有次元量の加算と次元エラーチェック

```

1 template <class t>
2 Dimensional<t> operator+(Dimensional<t>& a, Dimensional<t> b){
3     a.assertSameDimension(b);
4     return Dimensional<t>(
5         a.value + b.value,
6         a.powMass, a.powLen, a.powTime);
7 }
8
9 void assertSameDimension(Dimensional<t> b){
10    const double eps = 1e-6;
11    if(
12        abs(this->powMass - b.powMass) > eps ||
13        abs(this->powLen - b.powLen) > eps ||
14        abs(this->powTime - b.powTime) > eps
15    ){
16        throwDimensionalError();
17    }
18 }
```

ユーザーが次元の一致しない量を加算しようとした場合は例外を生成する。この例外をデバッガで捕捉することで、次元エラーが検出できる。

ほかにも、無次元量による幕乗、無次元量によるスカラー倍や、次元が全て 0 であることを保障する無次元化操作、有次元量どうしの比較演算も実装した。

Dimensional クラスを使えば、C++言語の任意の体に次元チェックを施すことができるし、また複素数やベクトル、行列などの既存の体テンプレートクラスに、次元チェックされる体を要素として持たせることができる。この 2 つは異なることに注意してほしい。

例えば「(次元情報つき倍精度実数) の複素数」と「次元情報つき (倍精度実数の複素数)」は異なる構造である。例えば、前者は実部と虚部で 2 つの次元情報を持ち、加減算しか行わないかぎり 2 つの次元が異なることも許されるが、後者は実部と虚部をあわせて 1 つの次元情報をしか持たないためそれは許されない。また、次元情報を持つ量に関しては体の一般的な操作しか定義されていないため、後者の「実部を取る」操作はそのままでは定義されない。

10.3.3 この手法の欠点と改善手段

前述のように、実行時次元解析は、実際に違法な演算が実行されるまでは次元エラーを検出できず、プログラムを長時間走らせたのちに初めて出来するような次元エラーに対しては無力である。

次元解析をコンパイル時に行えればこの心配はないが、コンパイル時次元解析にはいくつかの困難が予想される。

まず、クラス変数や関数の引数はことなる次元を持って呼び出される可能性があるため、ソースレベルで次元を割り当てることはできず、個々の呼出しごとに次元解析が必要である。これは下手をすると計算量を爆発させかねない。

また、コンパイル時次元解析は代数方程式を解く能力を必要とする可能性がある。たとえば Hilbert 空間である 3 次元ベクトル空間の元の 3 つの成分なども、内積の定義の中に各成分の自乗の和が登場することから、同じ次元であることがわかるが、それを理解できる者は 2 次方程式が解ける必要がある。

有用なコンパイル時次元解析を実装するには、これらの困難を解決または回避できるような仕様を設定せねばならない。コンパイル時次元解析は本質的には依存型の型推論であるから、その分野の研究成果が約に立つだろう。

また、プログラムの分岐やループ構造を解釈し、可能なすべての実行経路を 1 回づつ探索する手法も有效だろう。

11 単色波と衝撃波のあるシミュレーション

最初の1歩として、摂動磁場がただ1つの波数モードからなる場合をシミュレートすることで、波数モードと粒子の相互作用を考察しよう。このシミュレーションにおける粒子はニュートン力学描像であり、光速は電磁波の速度であっても情報伝達の上限速度ではない。またシミュレーションは無次元である。

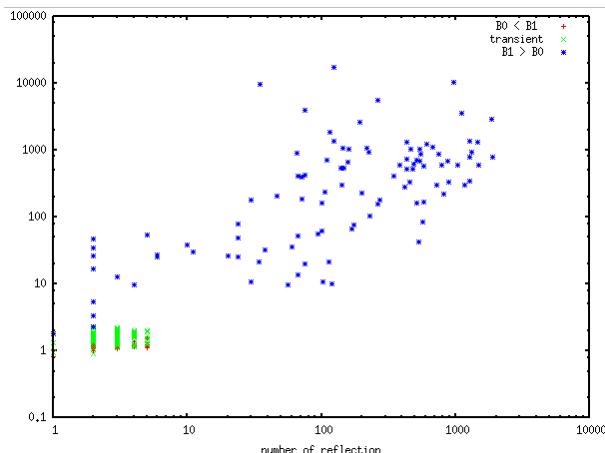
Abstract: 背景磁場として、衝撃波面に垂直な背景磁場 \mathbf{B}_0 と、波数ベクトルが衝撃波面に垂直な Torsional Alfvén Wave \mathbf{B}_1 を用意する。

この系にテスト粒子を投入し、さまざまな条件の下での一定時間後の運動エネルギーを調べた。

セットアップ

磁場の強さとゲイン 衝撃波静止系から見た Alfvén 波の振動数が背景磁場 \mathbf{B}_0 による Larmor 振動数と一致すること $B_0 = \omega$ が共鳴のために必要であると思われる。

図9: ピッチ角散乱の共鳴条件



横軸はショック面を往復した回数、縦軸はエネルギーをあらわし、色別は B_0 の強さを表す。ゲインと反復数は比例関係にある。また、磁場が $\Omega_L = \omega_A$ を満たすときもっともゲインが高くなることがわかる。

加速機構へのヒント・運動エネルギーのどちら成分がゲインしているのか 粒子は運動エネルギーをおもに上流で得ているか？下流で得ているか？を「上流にいた時間 t_{up} 」「下流にいた時間 t_{dn} 」をはかって、ゲインとの関係を調べよう。

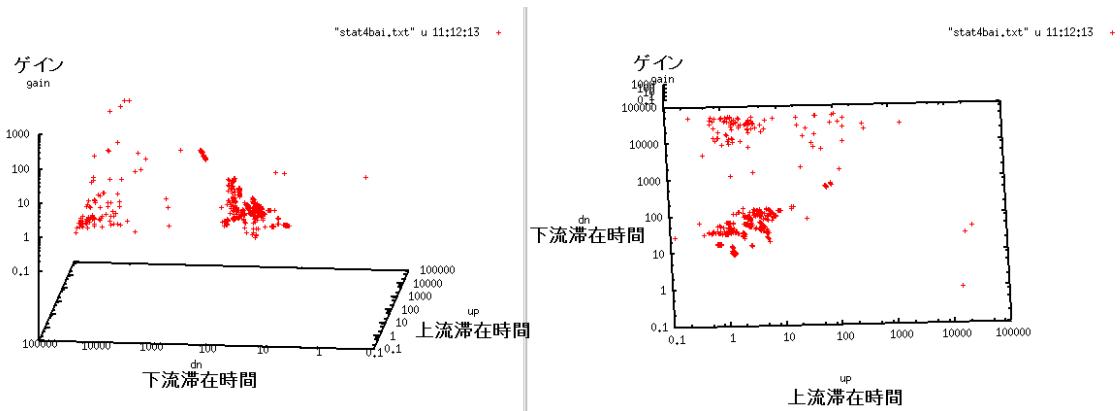
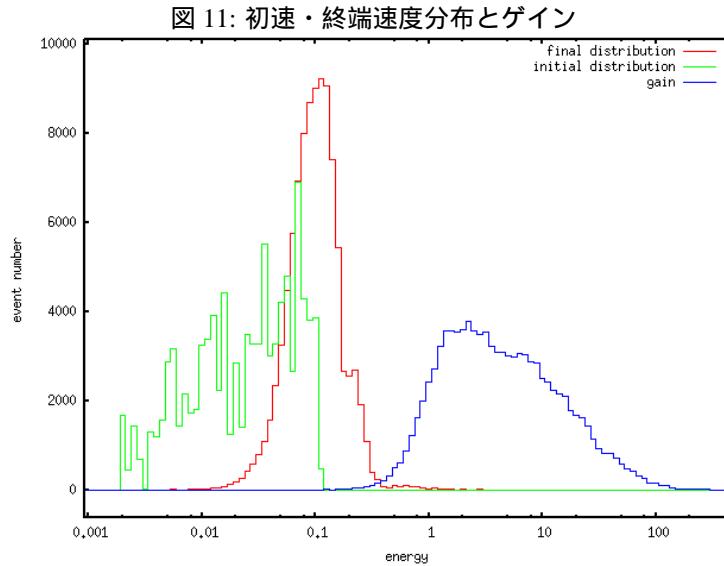


図 10: 上流・下流滞在時間とゲイン

up 軸が上流滞在時間、dn 軸が下流滞在時間、gain がゲインである。(滞在時間)には、衝撃波面を飛び越した時点で、それまで居た側の滞在時間が加算される仕組みになっている。つまり、最終的に落ち着いた側に最後に入っての時間は「滞在時間」とはカウントしない。

図をみると $t_{up} = t_{dn}$ をみたすグループと $t_{up} << t_{dn}$ をみたすグループがいるようだ。そしてより高い加速を受けているのは $t_{up} << t_{dn}$ を満たすグループであるように見える。単色な背景場を考える限り、粒子は下流で加速されているように思われる。(が、後の乱流入りシミュレーションでは粒子は上流で加速されることがわかった。)

速度分布進化とゲイン　投入した速度分布、得られた速度分布、および運動エネルギーが何倍になったかをプロットした。



このシミュレーションの単位系では速度 0.1 が上流速度、速度 0.3 が上流 Alfvén 速度、速度 1.0 が光速に対応する。初速が広い範囲に分布していても、最終的な分布は波と共に鳴るような運動エネルギーに集中することがわかる。

このことから、さまざまな波長の Alfvén 波がある乱流状態では、粒子は次々に長波長の波に乗り換えるながら、どんどん高いエネルギーへと加速されていくことが期待される。

12 亂流と衝撃波のあるシミュレーション

以上は Alfvén 振動数と Larmor 振動数と粒子速度/波数、がすべて、ほぼ同じ値になるように設定した Toy Model 上でのシミュレーションであった。また、相対論効果を取り入れてはいなかった。

そこで、シミュレーションに相対論的効果を取り入れた。また、SN1006 で観測されている衝撃波面に合うようにシミュレーションのパラメータを調節した。さらに乱流をスペクトルをもって与えた。

12.1 セットアップ

Abstract:

このシミュレーションは、解析的に与えられた流体背景の中で、テスト粒子を運動させる方法をとっている。無衝突系なので、粒子が流体から受ける作用は磁場を通じたものに限られており、磁場を解析的に、有限個の正弦波モードの重ね合わせとして与えることで任意の地点で電磁場の値を正確に計算することができ無限大のシミュレーション空間を確保することができる。

磁場の配置 配置されている磁場は、衝撃波面に垂直な背景磁場 B_0 および Torsional Alfvén Mode の重ねあわせである乱流磁場 B_1 からなる。

$$\text{背景磁場の大きさは } B_0(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10^{-5} \end{pmatrix} \text{ gauss である。}$$

乱流磁場については波数ベクトルの大きさを変えつつ、波数ベクトルの向きは磁場に平行な Torsional Alfvén Wave を導入。振幅は Goldreich-Slidar 乱流 [12] のスペクトル (53) に合わせる。スペクトルを 1 次元に限ったのは、MHD 乱流の発達には非等方性があり、この向きの乱流がとくに発達しやすいからである [18]。

上流・下流それぞれの流体静止系では torsional alfvén wave の磁場および、オームの法則 (13) で定められる電場が存在する。これを Lorentz 変換することで衝撃波静止系での電磁場を求めることができる。

乱流磁場のモード $\{k_i\}$ たちは、最大波数から最小波数まで等比数列的に n_T 個設定する。

$$k_i = k_{min} \times \left(\frac{k_{max}}{k_{min}} \right)^{\frac{i}{n_T - 1}} \quad (79)$$

これらのモードの重ねあわせにより磁場は

$$B_1 = B_{1Base} \cdot \sum_{i=1}^{n_T} \left(\frac{k_i}{k_{MA}} \right)^{P_T} \quad (80)$$

以下の結果では主に $n_T = 100$, $k_{max} = 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$, $k_{min} = 10^{-17} \text{ cm}^{-1}$ である。 B_{1Base} は B_1 のだいたいの大きさを決める定数で、 k_{MA} はスペクトルの中で振幅がもっとも大きくなるモードである。 $P_T < 0$ なら $k_{MA} = k_{min}$ だし $P_T > 0$ なら $k_{MA} = k_{max}$ である。

1 次元 Kolmogorov 乱流や GS 乱流ならば $P_T < 0$ であるが、 D 次元乱流では、波数絶対値 k をもつモードが波数空間で占める体積が k^{D-1} に比例するため、高周波が多くエネルギーを持つようになり、実効的に $P_T > 0$ となることもある。

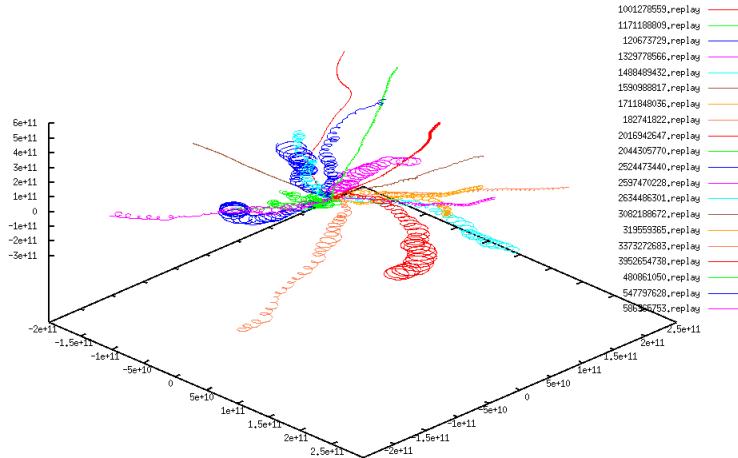
粒子の配置と試行 このような状況下で、粒子を1個づつ同じ初速で投入する。どの試行でも粒子の初期速度は一定であり、試行ごとに異なるのは各乱流モードの位相だけである。すべての試行に対し乱数の種は保存され、のちに任意の試行を詳細に再現することができる。

粒子は運動量と位置の自由度を持ち、相対論的な運動方程式にもとづいて4次のRunge-Kutta法で更新する。典型的には、時間刻みを粒子のLarmor周期の100分の1である0.1sec程度にとり、 3×10^8 ステップの時間発展を追跡した。これは約1年にあたる。シミュレーションの進行中、 10^6 ステップごとに粒子の位置、速度をはじめ様々な物理量を記録した。

12.2 シミュレーション概観およびFermi 加速の3つの兆候

粒子の3次元運動 次の図は特に加速の著しかった20のケースについて、衝撃波面からスタートした粒子の軌道をプロットしたものである。

図 12: シミュレーション空間内の宇宙線の軌跡



図は空間3次元をあらわし、長さの単位はcmである。衝撃波面はz軸の原点に存在し、xy平面に平行である。

このように、本シミュレーションでは、粒子の運動についてはMonte Carlo的な仮定をすることなく、テスト粒子のジャイロ運動までを分解することが可能であり、このサイズを分解していくながらなお最終的な計算領域はparsecのオーダーにまで広がっている。

Fermi 加速の兆候 本研究では、粒子の運動の記録を見て

1. 粒子が衝撃波面を通過するたびに、エネルギーが $(1 + h)$ 倍になっている
2. 粒子の z 軸方向の運動を観察し、衝撃波面で多数回反射されている
3. 最終的な粒子のエネルギースペクトルが逆 2 乗則に従う

ことを 1 次 Fermi 加速の兆候とし、これらの兆候の顕らかさをもって 1 次 Fermi 加速が起こったか否かを判断した。

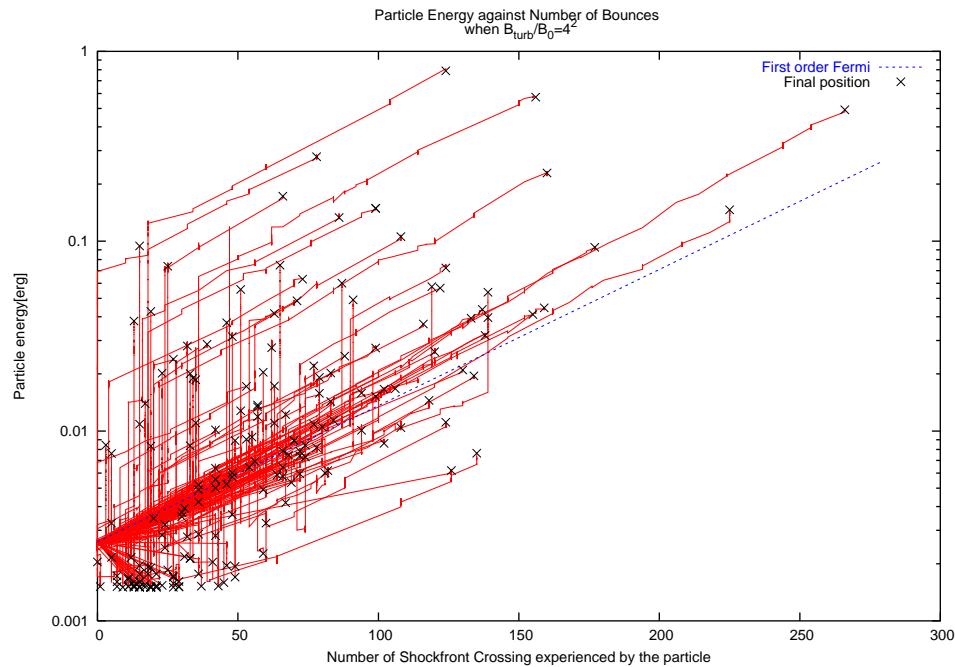
これらの兆候のうち、1 次 Fermi 加速が本来説明したかったのはエネルギースペクトルであるが、この兆候はほぼ全ての粒子が 1 次加速に参加した時のみ顕著となる性質であるのに対し、他の 2 つの兆候は一部の粒子だけが 1 次加速を起こしている事をも検出できる。

現実的には、Fermi 加速は熱的粒子の一部のみを高エネルギー宇宙線領域まで加速すると考えられるし、シミュレーションではさらに時間的・空間的制限から、歩留まりのよい加速が観察できるとは限らない。したがって、1 次 Fermi 加速の条件を発見するには 3 つの兆候全てから推理することが必要である。

12.2.1 光候 1: 粒子の越境回数とエネルギー

本研究では、粒子が衝撃波面を飛び越した回数、つまり粒子の z 座標の符号が変化した回数を記録している。次の図は、この飛び越し回数 n を横軸に、粒子のエネルギー E を縦軸にプロットしたものである。

図 13: 粒子の越境回数とエネルギーの典型的な関係

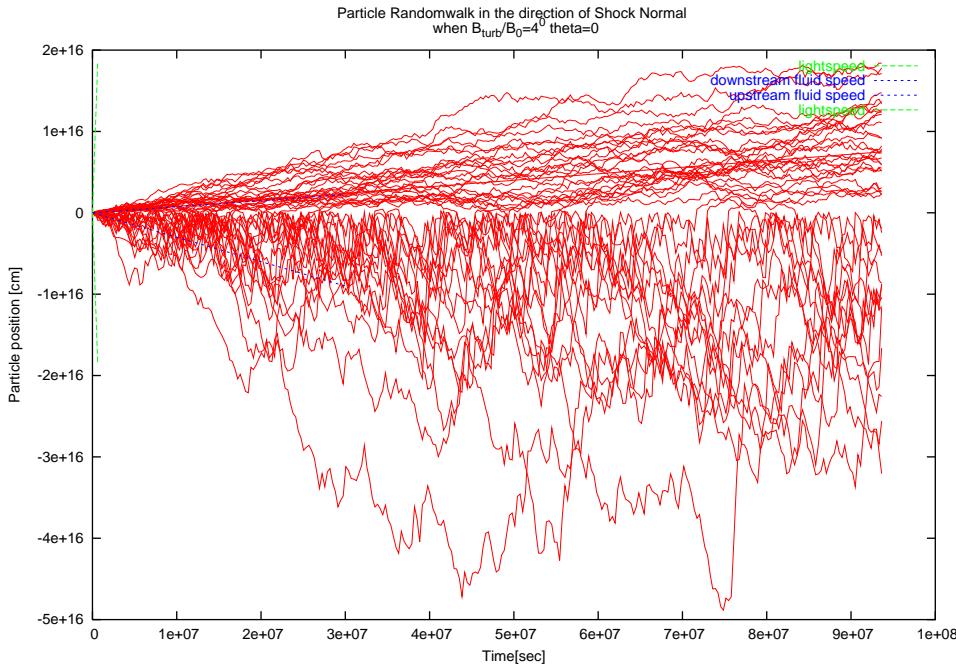


縦:エネルギー軸は対数であり、このグラフから、加速率が 1 次 Fermi 加速の効率 $E(n) = (1 + h)^n$ (青点線)に則っている程度を判断できる。

12.2.2 光候 2: 粒子の衝撃波法線方向の速度と拡散

次の図は、 $v_{init} = v_t h, \lambda_{max} = 10^{14}$ としたケースについて、横軸を時間にとって、縦軸に各粒子の衝撃波法線方向 (z 軸) の運動をプロットしたものである。赤い曲線群は粒子の軌跡であり、緑の直線は光速、青の直線は上流・下流の流体の速度をあらわす。なお、 z の増加する方向が下流であり、衝撃波面は $z=0$ にある。ただし、粒子の位置は 10^6 ステップごとにしか記録されていないので、実際の運動はより滑らかである。

図 14: 衝撃波法線方向の運動



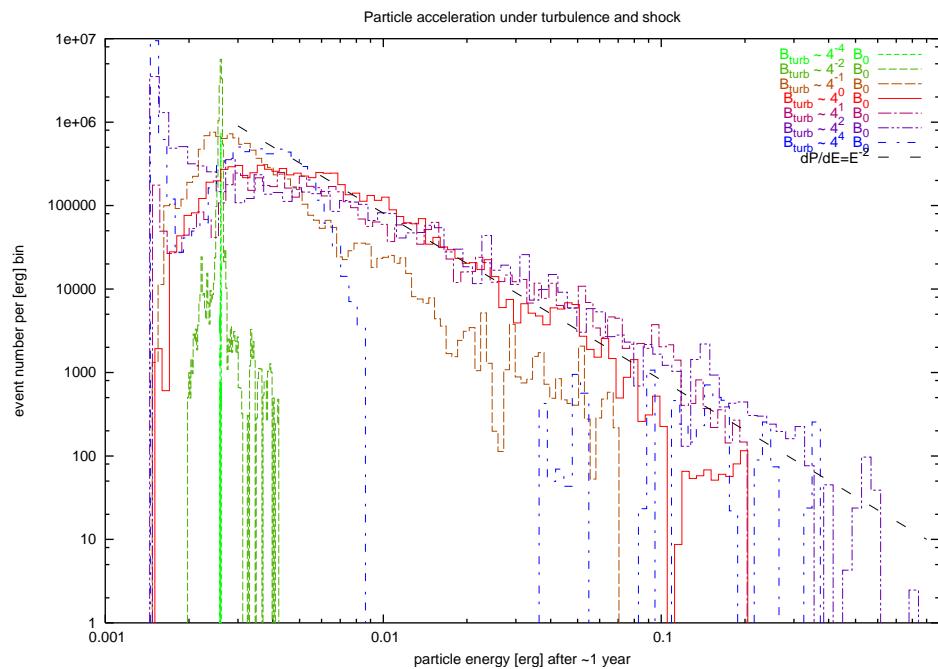
この図は次のように解釈できる。上流側には加速中の粒子があり、衝撃波面に繰り返し衝突しながら 1 次 Fermi 加速を行っている。加速中の粒子は、衝撃波面で直ちに反射され殆どの時間を上流で過ごすことが見て取れる。ごく一部の粒子は、加速を終えて下流に移行したり、逆に下流から上流に移行しているのも見かけられる。下流側にいる加速が終了した粒子たちは乱流により流体の運動と結合し、流体と同じ速度で運動しながら拡散していく。

以下にさまざまな例で示すように、この粒子の $t-z$ 運動を記録したグラフから、現在のパラメータが衝撃波加速にとって好条件なのか悪条件なのかを知ることができる。もし、殆どの粒子が下流に向かって初速 v_{z0} で運動し、余り拡散が起っていない場合は、衝撃波加速を起こすには乱流が弱すぎて、粒子はただ初期の Larmor 運動を維持しているのである。同様に拡散が弱いが、粒子たちが速度 u_{dn} で下流に向かって運動している場合は、衝撃波加速を起こすには乱流が強すぎて、殆どの粒子が乱流捕捉を起こしているのである。

12.2.3 光候 3:エネルギースペクトル

次の図は、12.3.2 節のパラメータ下で、乱流磁場の振幅ごとに、系の粒子全体のエネルギースペクトルをプロットしたものである。

図 15: 粒子のエネルギースペクトル



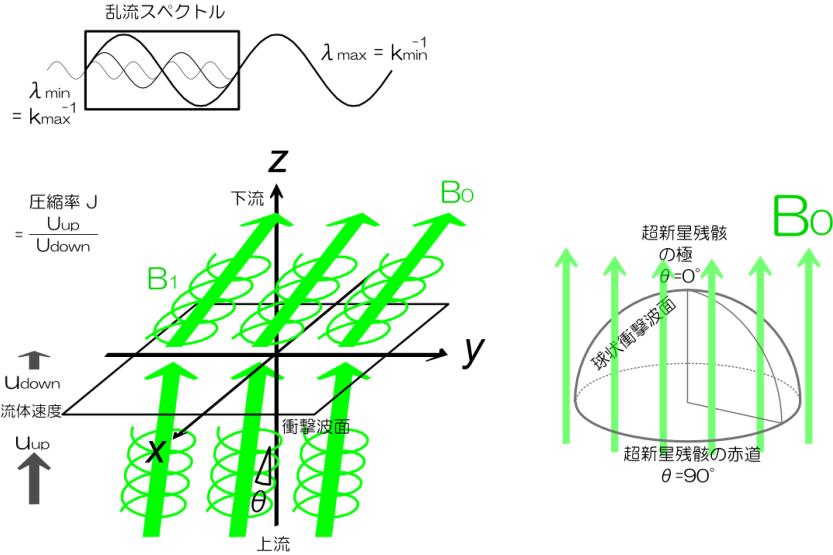
乱流強度パラメータが $\eta = 1 \sim 16$ の範囲であるとき 1 次 Fermi 加速がもっとも効率的に起こって逆二乗則どおりの幕が生成されること、乱流が強すぎても、弱すぎても粒子加速が効率的でないことが読み取れる。

12.3 結果とその理解

この節では、実験を行ったパラメータとその結果、我々の解釈を順に示す。

12.3.1 座標系および記号

図 16: 衝撃波加速実験(左)、および超新星残骸(右)におけるパラメータ設定



シミュレーションの設定 本実験では、衝撃波面と、それを一般には斜めに貫く背景磁場、そして背景磁場に平行な波数ベクトルをもつ Torsional Alfvén Wave 亂流を考える。

衝撃波の下流方向を \$z\$ 軸、磁場の傾いている方向を \$y\$ 軸とする。流体の速度を上流で \$u_{up}\$、下流で \$u_{down}\$ とする。

背景磁場の大きさを \$B_0\$ とし、上流で磁場と \$z\$ 軸のなす角を \$\theta\$ とする。乱流磁場のうち最大波長のものの振幅を \$B_1\$ とし、比 \$\eta = B_1/B_0\$ を乱流の強さの指標とする。

乱流のスペクトルは、上流で (Kolmogorov 的 : (50)、あるいは Goldreich-Sridhar 的 : (53)) のように仮定し、下流では MHD 接続条件 (7.1 節) にしたがって接続する。

超新星残骸の設定 すべての超新星残骸は球形であると仮定しよう。超新星残骸周辺の背景磁場の方向 \$\mathbf{B}_0\$ を基準に、衝撃波面と \$\mathbf{B}_0\$ が垂直になる箇所を超新星残骸の極、衝撃波面と \$\mathbf{B}_0\$ が平行になる箇所を超新星残骸の赤道と呼ぶことにする。極においては \$\theta = 0^\circ\$、赤道においては \$\theta = 90^\circ\$ である。

12.3.2 基礎となる場合

設定 このケースは、精度のよいスペクトルを得るために、最も多くの時間をかけてシミュレートされたケースである。

\$v_{init} = 1\text{GeV}\$, \$\theta = 0\$, \$J = 4\$, \$vUp = 10^9\text{cm}\$, \$k \in [10^9\text{cm} \cdots 10^{17}\text{cm}]\$ を一定にし、乱流振幅が \$\eta \in [4^{-4}, 4^{-2}, 4^{-1}, 4^0, 4^1, 4^2, 4^4]\$ である 7 つの場合について、各 1000 回程度の繰り返し試行を行った。

越境-エネルギー関係 まずは衝撃波面を一度横切るごとにエネルギーが定数倍になるという、1次 Fermi 加速の特徴を鮮明に示す一連の図を御覧いただきたい。

48 からの図は、 η ごとに、粒子が衝撃波を横切った回数 N と、粒子のエネルギー E の関係をプロットしたものである。

各曲線がひとつの粒子の時間発展に対応する。横軸の縦軸は対数軸である。

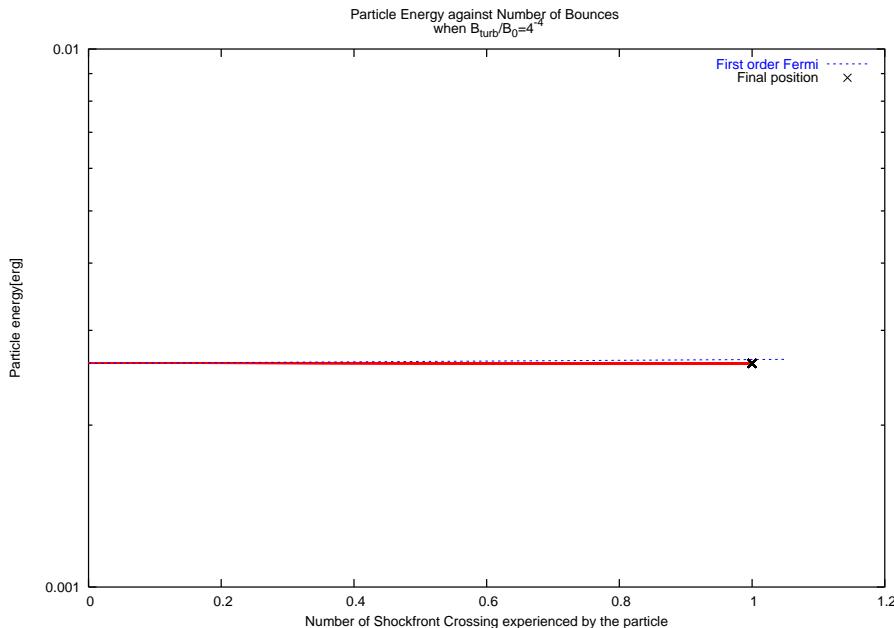
それぞれの図で、青い点線の傾きは、本シミュレーションのセットアップで 1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率

$$\begin{aligned} E(N) &\propto (1+h)^N \\ (1+h) &= 1 + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{J}\right) \frac{u_{up}}{c} \end{aligned} \quad (66)$$

を示している。いま我々の設定では $u_{up} = 10^9 \text{ cm/s}$, $J = 4$ だから、たとえばエネルギーが 10 倍になるには衝撃波面を $\frac{\log 10}{\log 1+h} \sim 139$ 回超えなければならない。

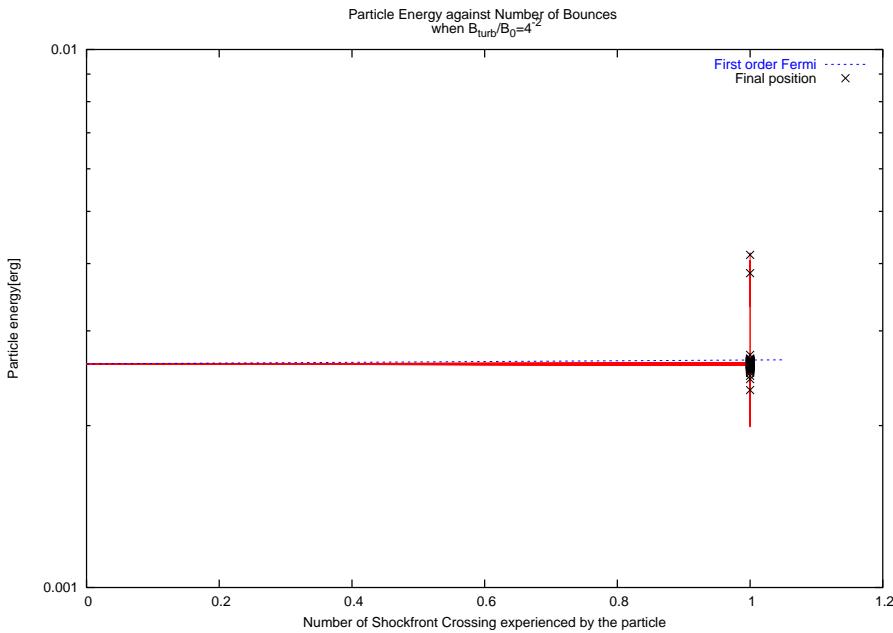
また、垂直に上昇する直線は衝撃波面を横切らない 2 次加速を表しており、1 次加速と 2 次加速とともに有効であることが観察される。従来宇宙線加速には有効でないと考えられてきた 2 次加速が、なぜ 1 次加速と肩を並べるまで有効になるのかは、9.1 節で大雑把な評価はしたものの、理解できなかった。ひとつ考えられることは、13 節で述べる乱流捕捉が起こって、粒子が流体と同じ平均速度で運動しているとき、流体に対し v_A で運動している乱流の Alfvén モードは両側から粒子に正面衝突する方向で働き、「乱流捕捉内の 1 次加速」が起こるのではないか、というモデルである。

図 17: 越境回数とエネルギー : $\eta = 4^{-4}$



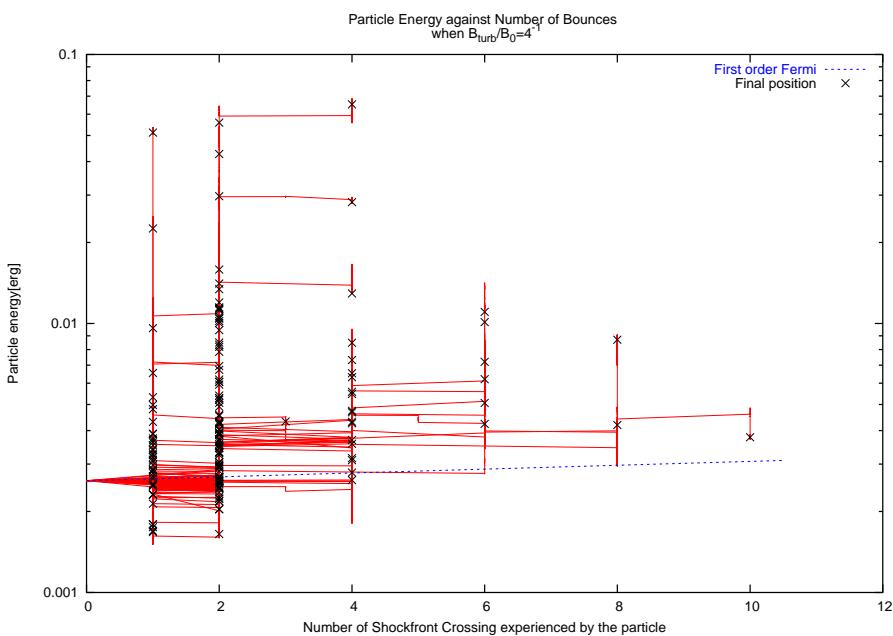
横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1+h)^N$ 。

図 18: 越境回数とエネルギー : $\eta = 4^{-2}$



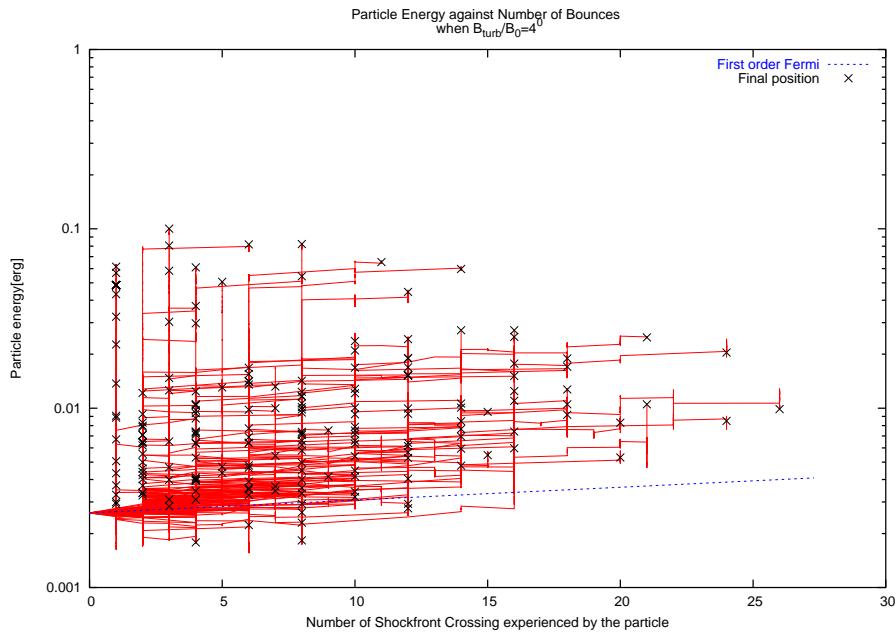
横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 19: 越境回数とエネルギー : $\eta = 4^{-1}$



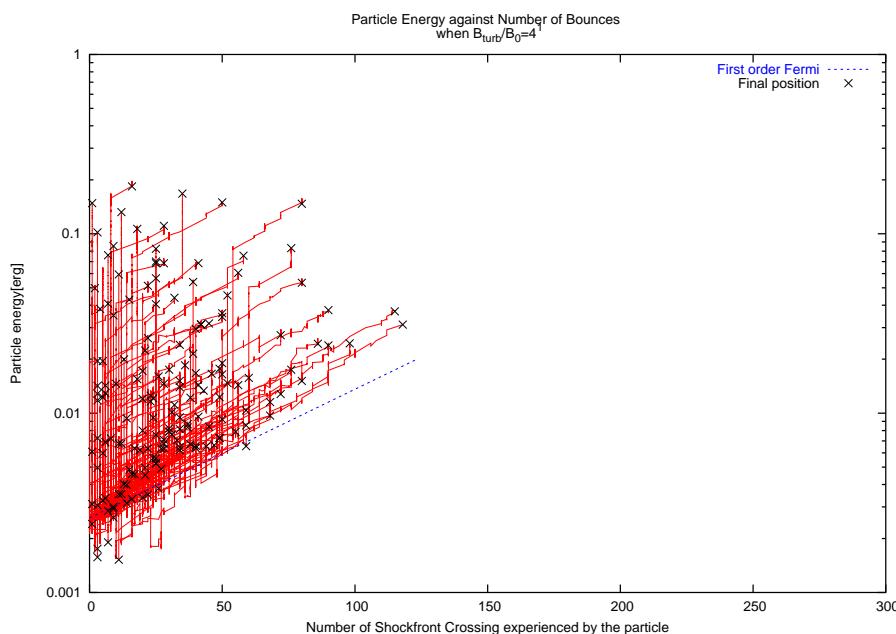
横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 20: 越境回数とエネルギー : $\eta = 4^0$



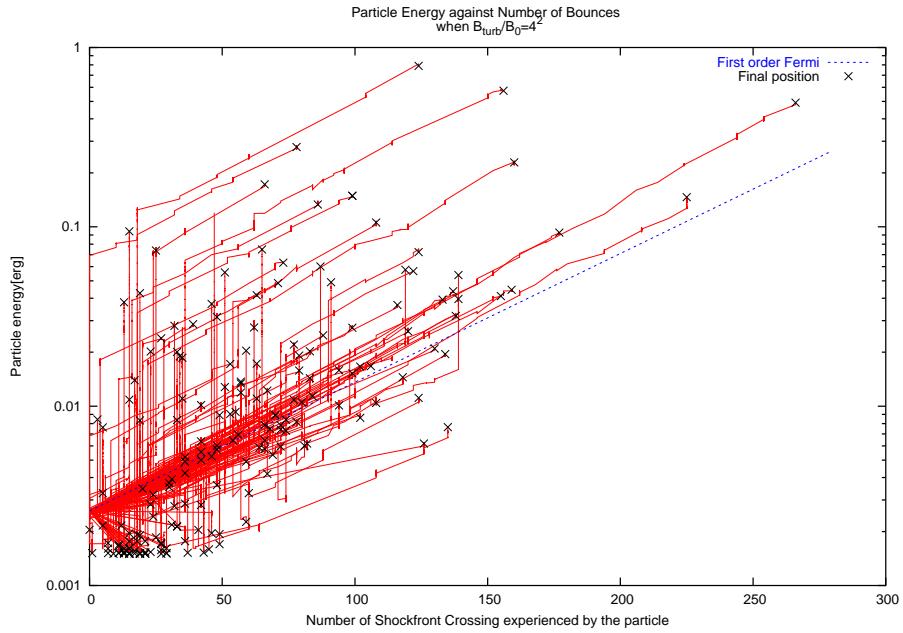
横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 21: 越境回数とエネルギー : $\eta = 4^1$



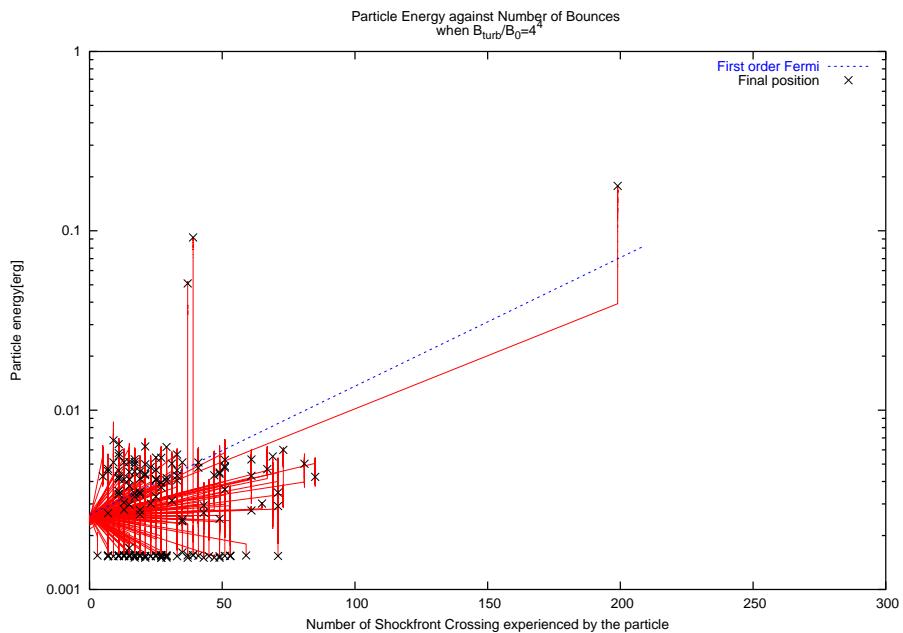
横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 22: 越境回数とエネルギー : $\eta = 4^2$



横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

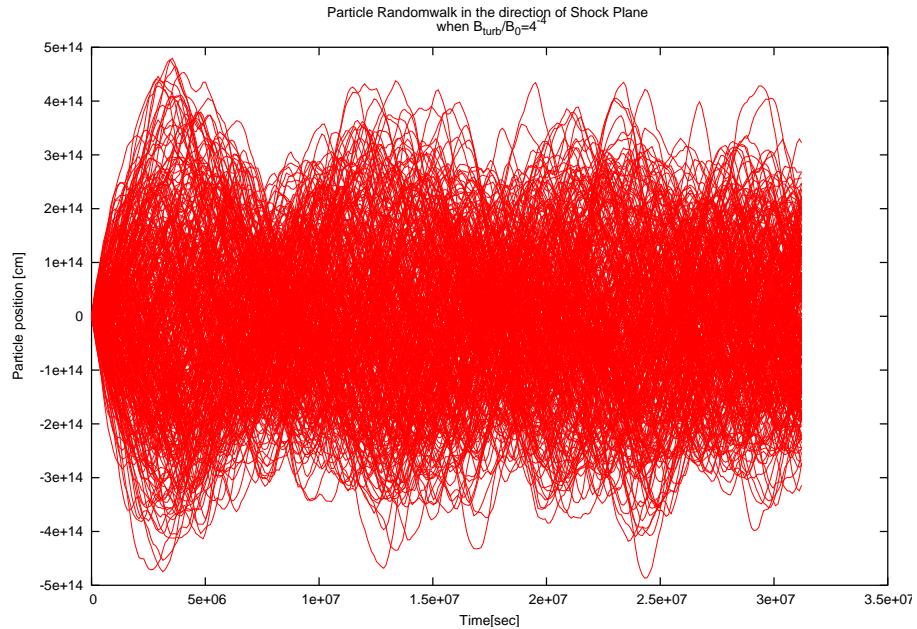
図 23: 越境回数とエネルギー : $\eta = 4^4$



横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

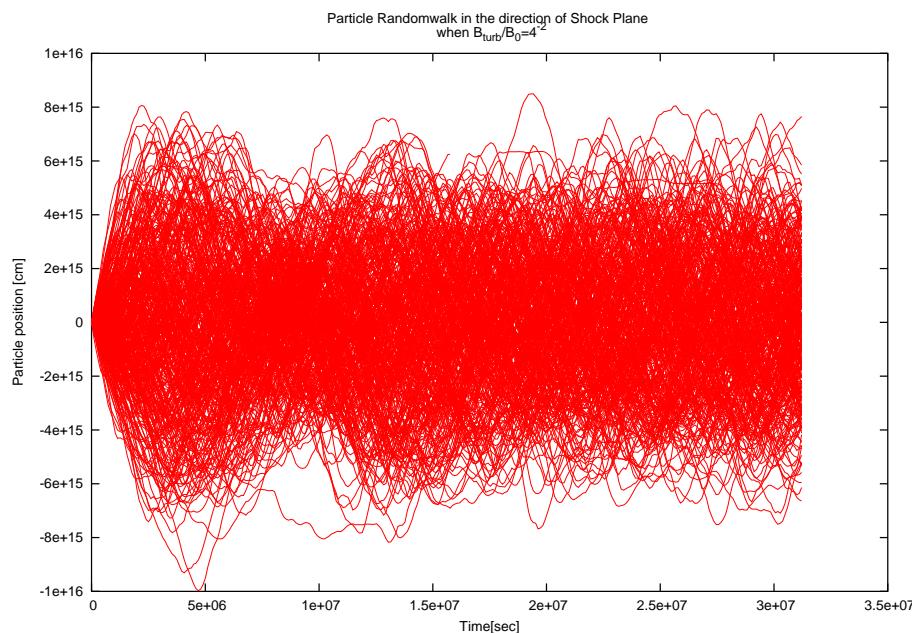
衝撃波面に平行な方向のランダムウォーク 次の図は各粒子の x 座標(衝撃波面に沿った方向の位置)の時間発展をプロットしたものである。

図 24: x 軸方向のランダムウォーク : $\eta = 4^{-4}$



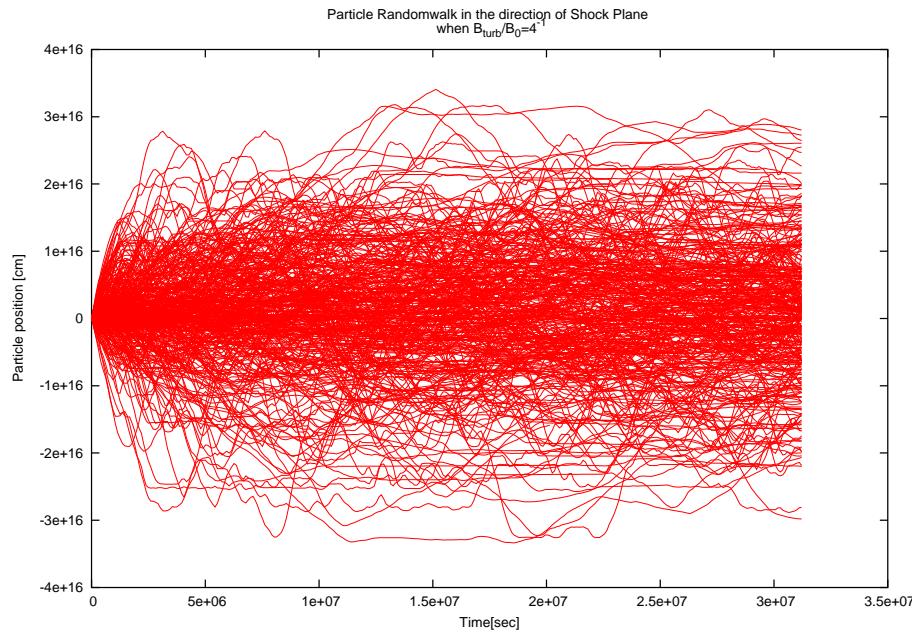
横軸：時間 縦軸： x 座標

図 25: x 軸方向のランダムウォーク : $\eta = 4^{-2}$



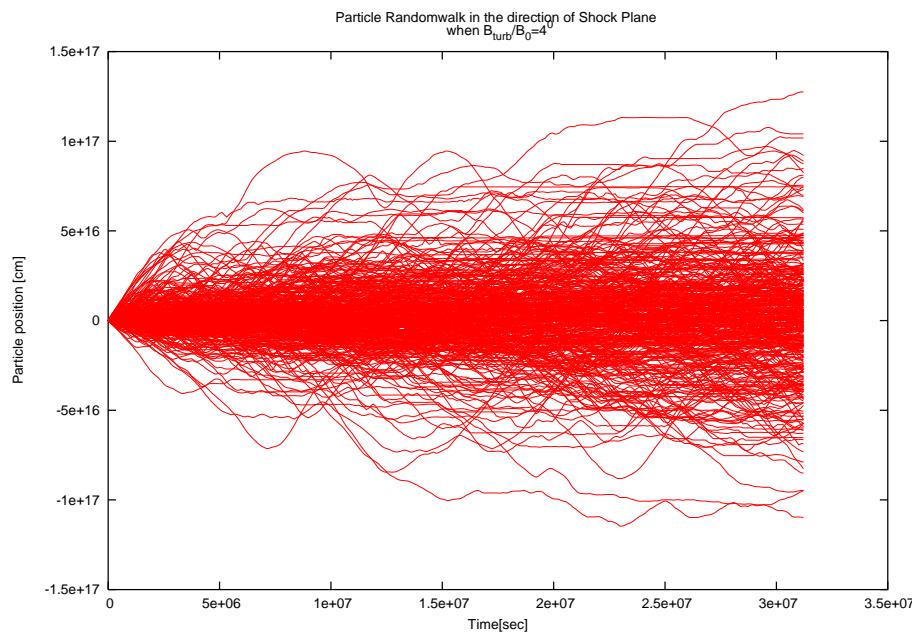
横軸：時間 縦軸： x 座標

図 26: x 軸方向のランダムウォーク : $\eta = 4^{-1}$



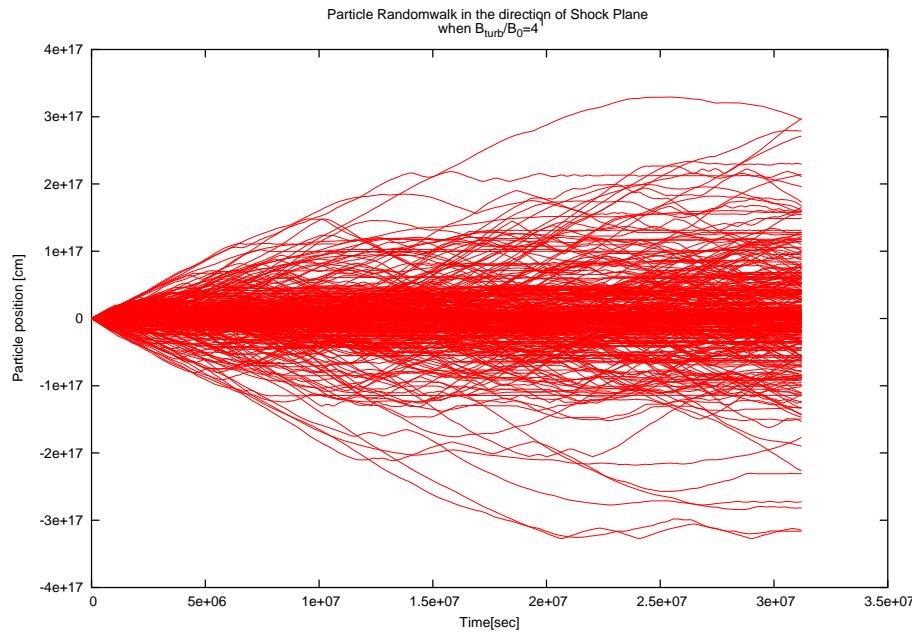
横軸：時間 縦軸：x 座標

図 27: x 軸方向のランダムウォーク : $\eta = 4^0$



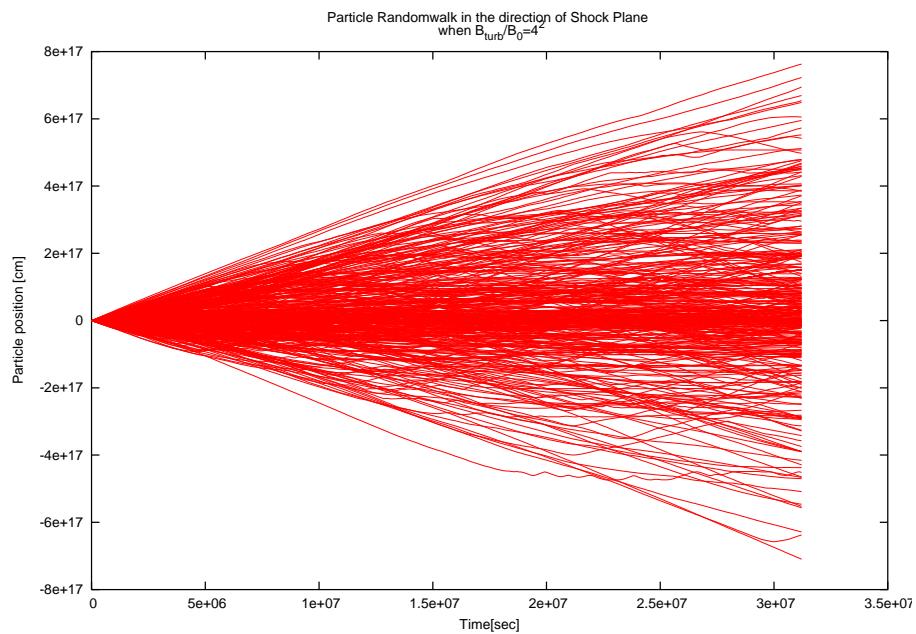
横軸：時間 縦軸：x 座標

図 28: x 軸方向のランダムウォーク : $\eta = 4^1$



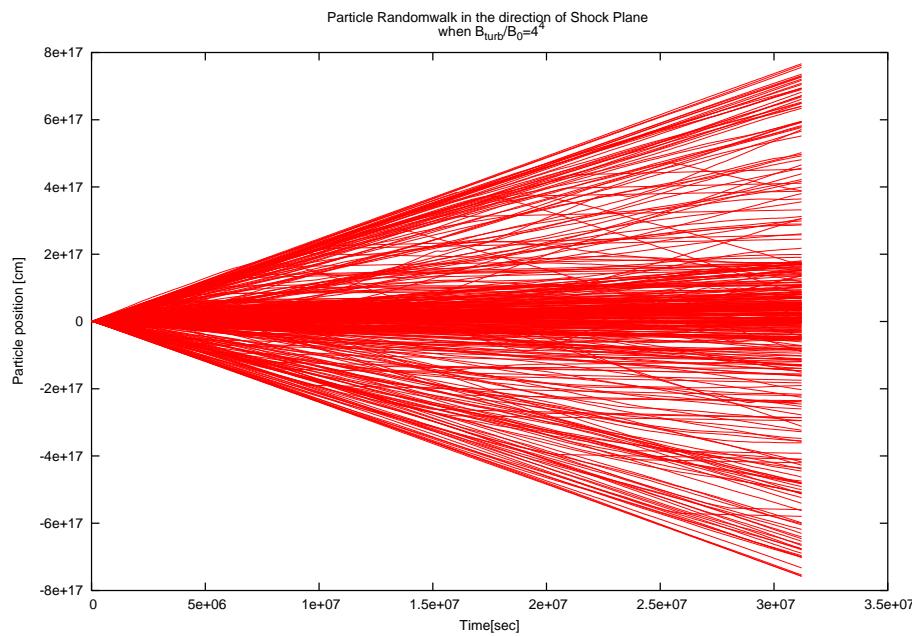
横軸：時間 縦軸：x 座標

図 29: x 軸方向のランダムウォーク : $\eta = 4^2$



横軸：時間 縦軸：x 座標

図 30: x 軸方向のランダムウォーク : $\eta = 4^4$



横軸：時間 縦軸：x 座標

衝撃波面に垂直な方向のランダムウォーク 次の図は乱流強度 η ごとに、各粒子の z 座標(衝撃波面に垂直な方向の位置)の時間発展をプロットしたものである。

まず、最初の図の、乱流が最も弱い $\eta = 4^{-4}$ の場合では、粒子はシミュレーション上の z 方向の初速 $1.732 \times 10^{10} cm/sec$ にほぼ近い速度で衝撃波面から離れていく。次の $\eta = 4^{-2}$ のケースでは多少の分散がみられるが同様である。

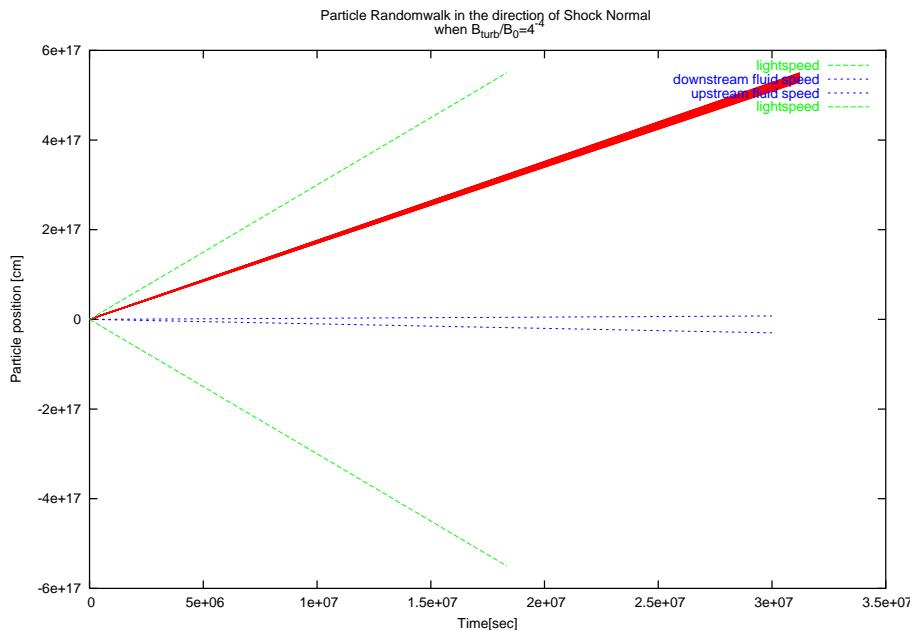
$4^{-1} \leq \eta \leq 4^2$ のケースでは、粒子の運動は衝撃波面にまとわり付く、衝撃波面に対して非対称な運動になっている。これは Fermi 加速プロセスが働いていることを示している。

最も乱流の強い $\eta = 4^4$ のケースでは、粒子はふたたびバルク速度を持って衝撃波面から離れていく。このバルク運動の速度は、衝撃波下流でのシミュレーション上の流体速度 $2.5 \times 10^8 cm/s$ を含んでいる。

この最後のグラフは、衝撃波加速のコンテキストにおいて、乱流捕捉という新しい概念の導入を促す。

- 亂流が小さいうちは、高エネルギー粒子は衝撃波面を通過して飛び去ってしまうので加速は起こらない。
- 亂流が適当な大きさだと、高エネルギー粒子は乱流に跳ね返されて衝撃波面を往復することができ、1次 Fermi 加速が起こる。
- 亂流が大きすぎると、高エネルギー粒子は乱流によって流体に捕捉され、流体と同じ速度で流れ去ってしまう。このためやはり加速は起こらない。

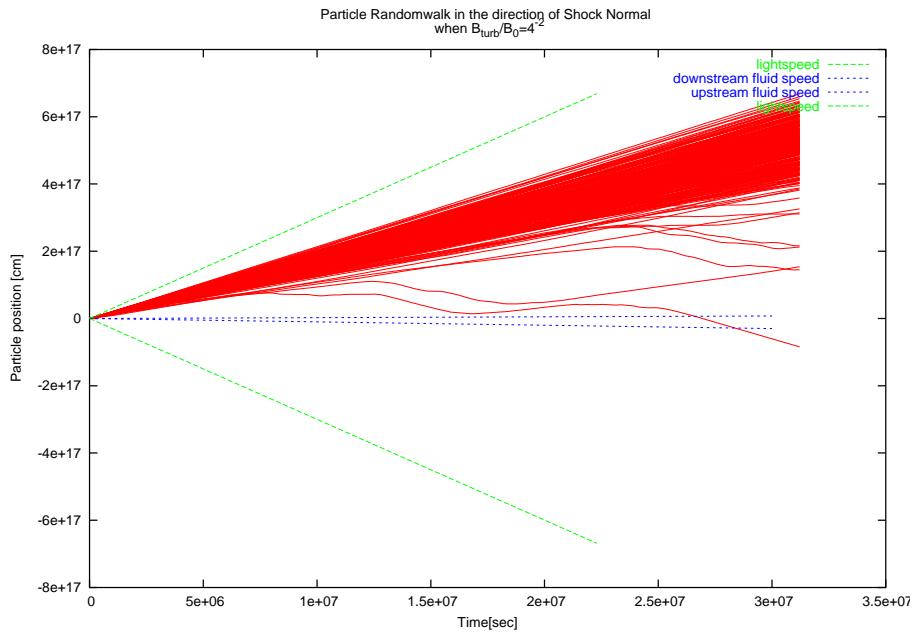
図 31: z (衝撃波に垂直) 方向の粒子の運動 : $\eta = 4^{-4}$



横軸：時刻、縦軸： z 座標。

傾きの急な黄緑の点線は光速。傾きのゆるい青い点線は上流/下流の流体速度。

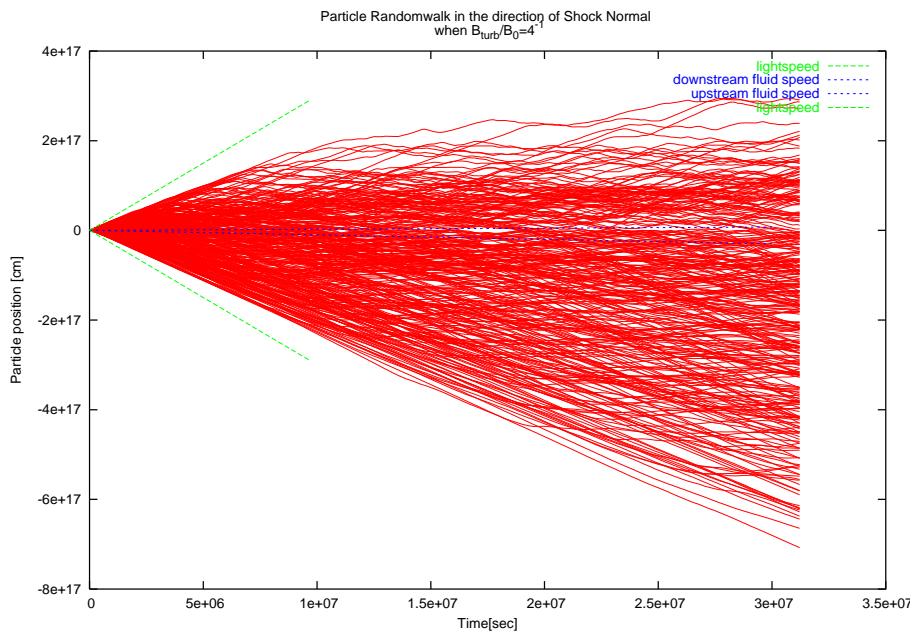
図 32: z (衝撃波に垂直) 方向の粒子の運動 : $\eta = 4^{-2}$



横軸：時刻、縦軸： z 座標。

傾きの急な黄緑の点線は光速。傾きのゆるい青い点線は上流/下流の流体速度。

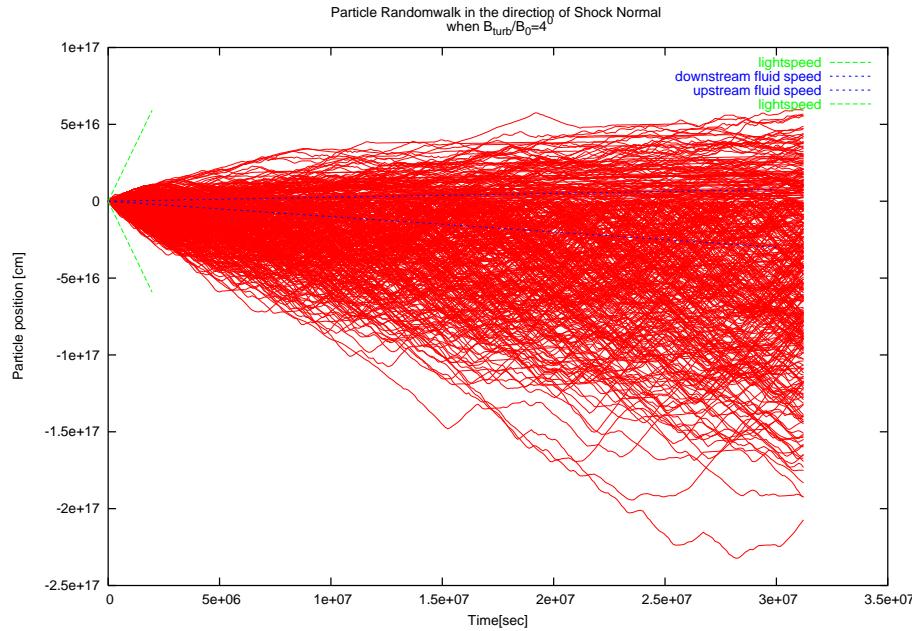
図 33: z (衝撃波に垂直) 方向の粒子の運動 : $\eta = 4^{-1}$



横軸：時刻、縦軸： z 座標。

傾きの急な黄緑の点線は光速。傾きのゆるい青い点線は上流/下流の流体速度。

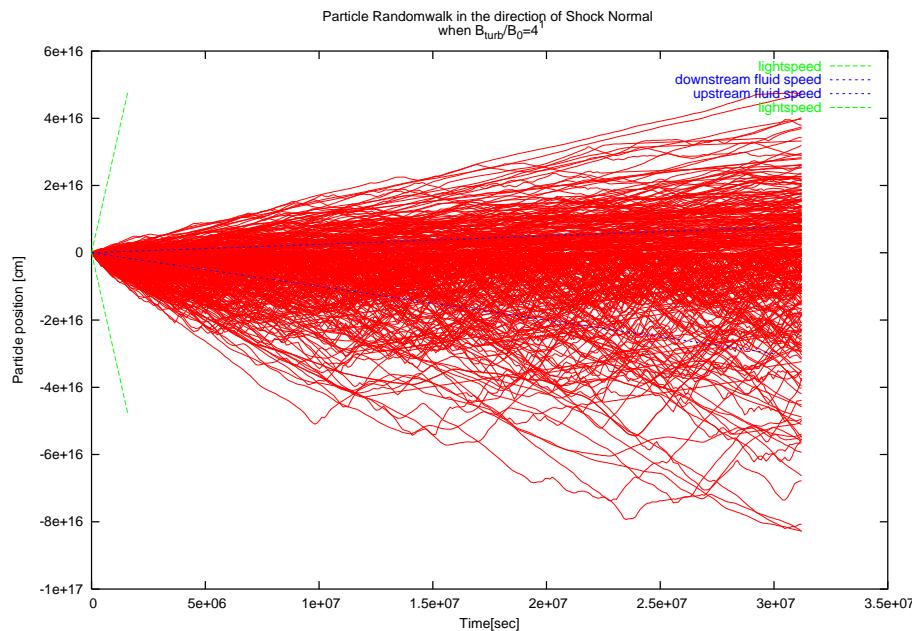
図 34: z (衝撃波に垂直) 方向の粒子の運動 : $\eta = 4^0$



横軸：時刻、縦軸： z 座標。

傾きの急な黄緑の点線は光速。傾きのゆるい青い点線は上流/下流の流体速度。

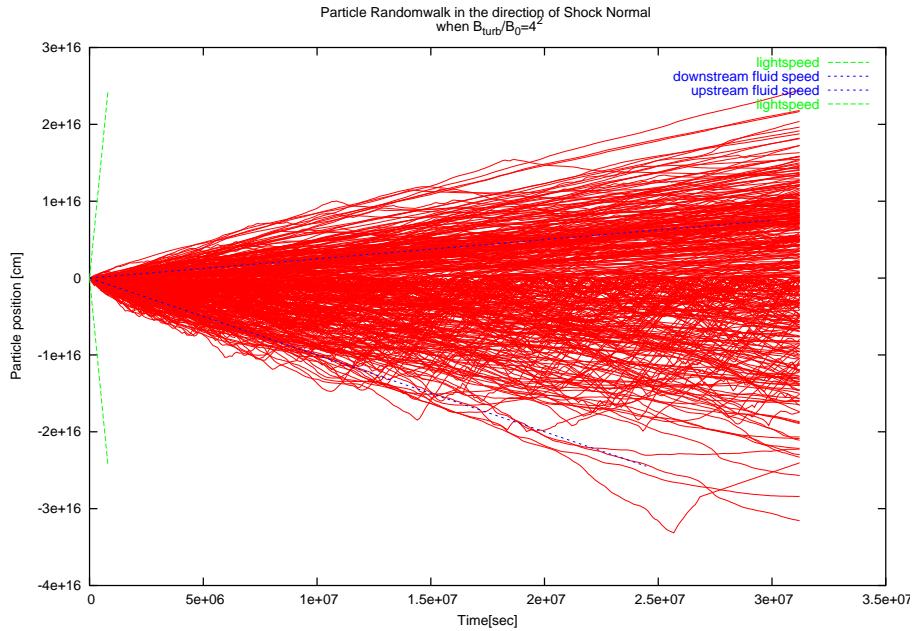
図 35: z (衝撃波に垂直) 方向の粒子の運動 : $\eta = 4^1$



横軸：時刻、縦軸： z 座標。

傾きの急な黄緑の点線は光速。傾きのゆるい青い点線は上流/下流の流体速度。

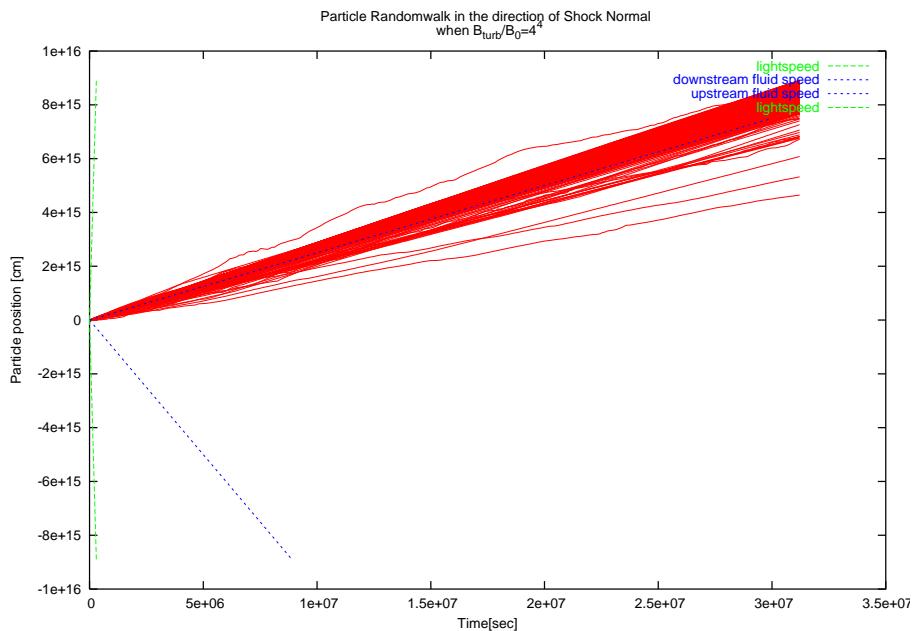
図 36: z (衝撃波に垂直) 方向の粒子の運動 : $\eta = 4^2$



横軸：時刻、縦軸： z 座標。

傾きの急な黄緑の点線は光速。傾きのゆるい青い点線は上流/下流の流体速度。

図 37: z (衝撃波に垂直) 方向の粒子の運動 : $\eta = 4^4$

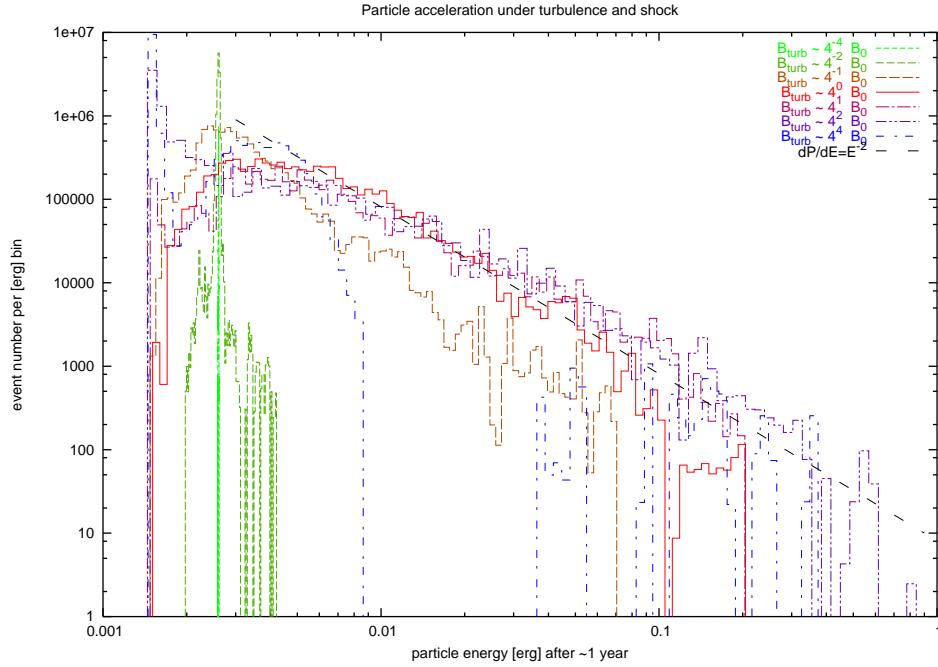


横軸：時刻、縦軸： z 座標。

傾きの急な黄緑の点線は光速。傾きのゆるい青い点線は上流/下流の流体速度。

スペクトル このパラメータ設定下で生成されたスペクトルは図 15 である。

図 38: 乱流の強さ η と加速粒子のスペクトルの関係

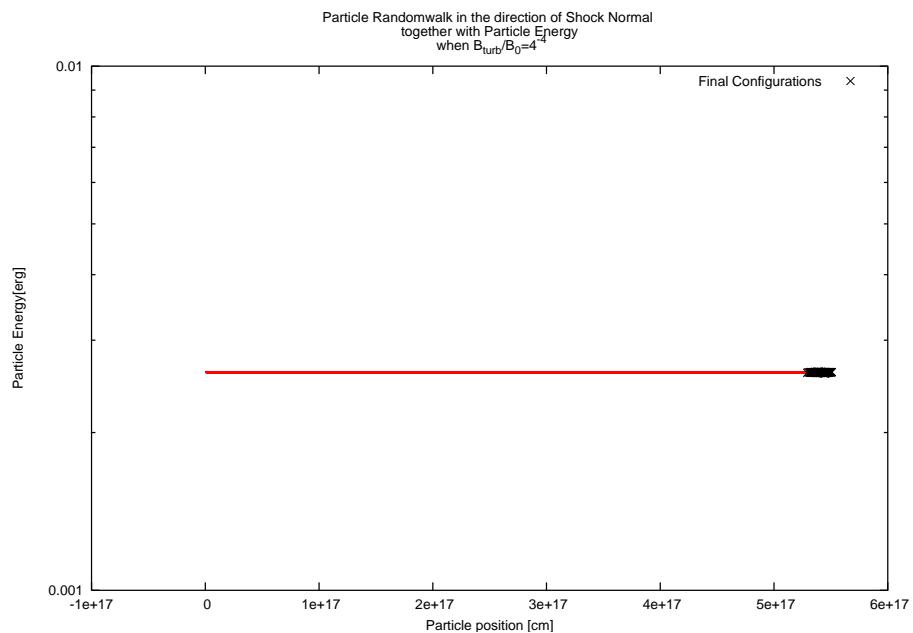


これは加速機構内の全粒子のスペクトルである。脱出した粒子のスペクトルを測ろうと、たとえば下流に位置する粒子のみのスペクトルを描いてみても、やはり逆 2 乗幕に則っている。衝撃波加速機構からの脱出は、9.2 節で触れた従来の説明とは違い、例えば、衝撃波が消滅する時間スケールのほうが、粒子が加速源から脱出する時間スケールより遅く、すべての粒子がいっせいに解放されるのかもしれない。

エネルギーと z 座標の関係 以上3つの兆候に加えて、粒子のエネルギーと z 座標の関係を見ることで、衝撃波面が粒子のエネルギーに及ぼす影響が明らかになる。なお、この段落のグラフについては、軌跡を見やすくするために全体の1/10の軌跡のみをランダムに選んでプロットしている。

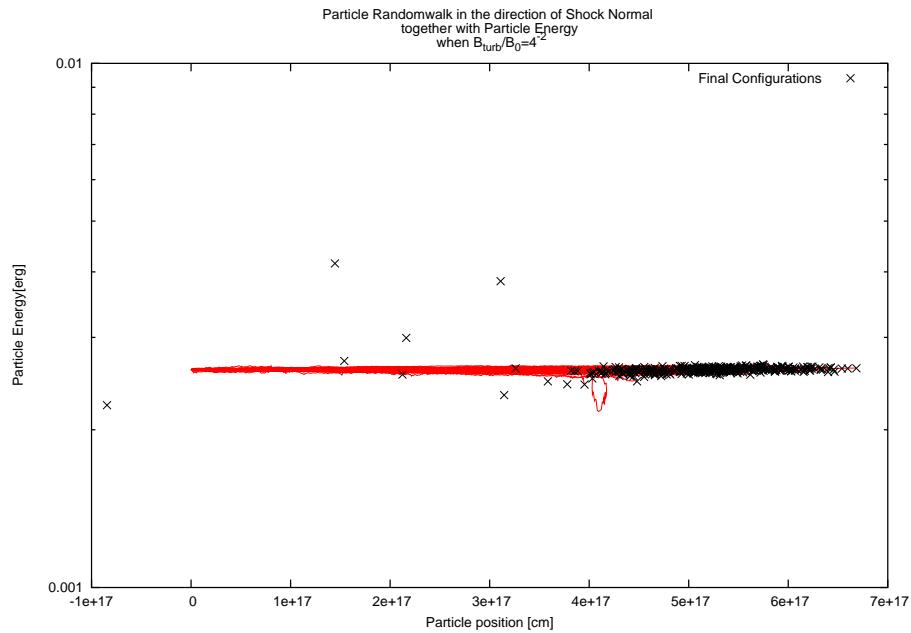
$\eta = 1 \sim 16$ の図において、衝撃波上面には、粒子の軌跡が密集しており、さかんに1次 Fermi 加速が発生していることがわかる。これに対し、衝撃波面を離れていく粒子は、上流・下流のどちらに向かうにせよ、おおむね水平方向に運動している。つまり、一旦衝撃波面を離れれば、大幅な加速はおこらない。いったん上流に逃げ出した粒子が下流に戻る様も観察される。また、グラフ上を斜め右上に運動する、つまり下流へ向かいながらエネルギーを大幅に増やしている粒子たちが確認できる。これらは、乱流捕捉中の1次加速の候補である。

図 39: z 座標とエネルギーの関係: $J = 4, \eta = 4^{-4}$



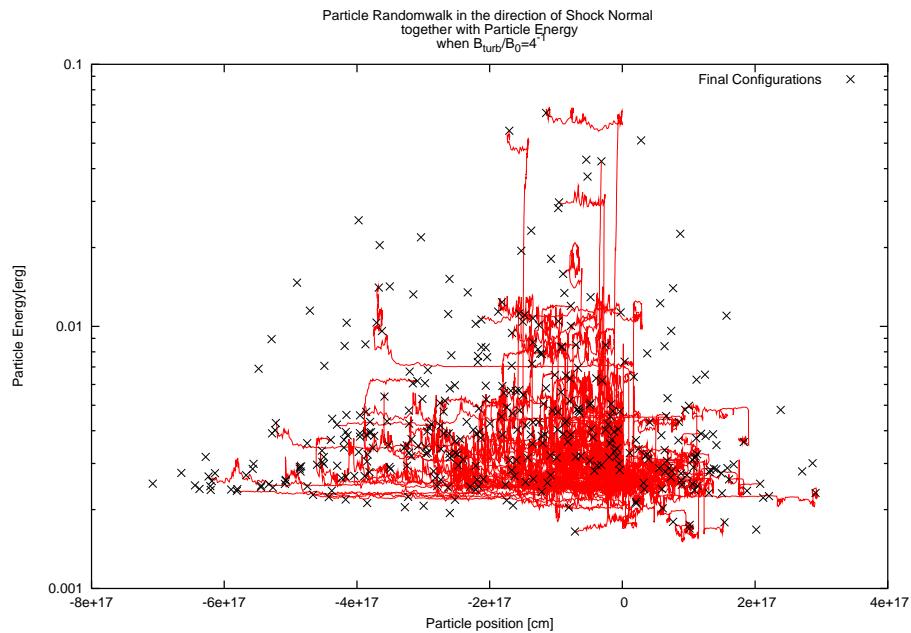
横軸：粒子の衝撃波法線方向の座標(z 軸)、下流方向が正値。縦軸：粒子のエネルギー(対数)。 \times 印は最終的な配置。

図 40: z 座標とエネルギーの関係: $J = 4, \eta = 4^{-2}$



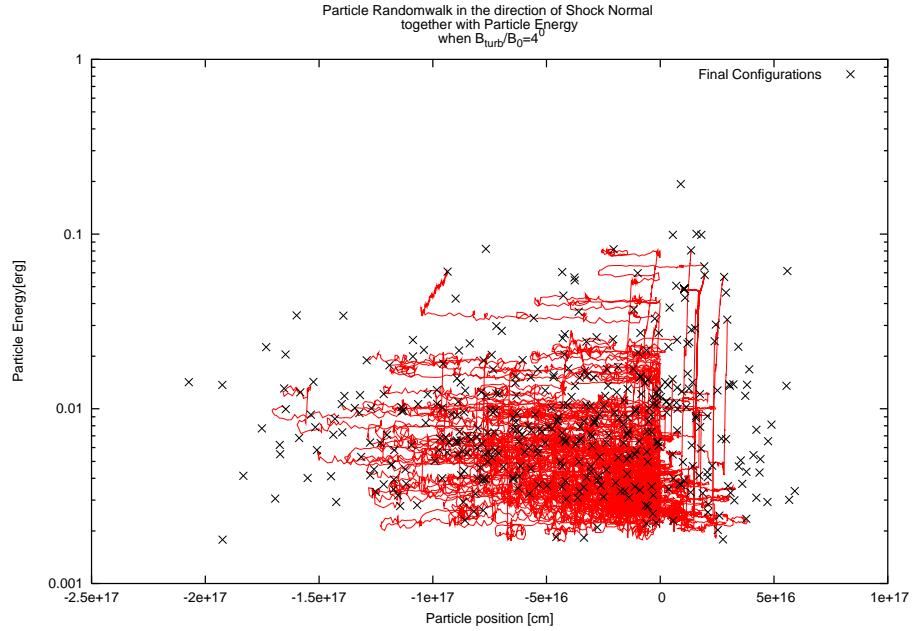
横軸：粒子の衝撃波法線方向の座標 (z 軸)、下流方向が正値。縦軸：粒子のエネルギー (対数)。 \times 印は最終的な配置。

図 41: z 座標とエネルギーの関係: $J = 4, \eta = 4^{-1}$



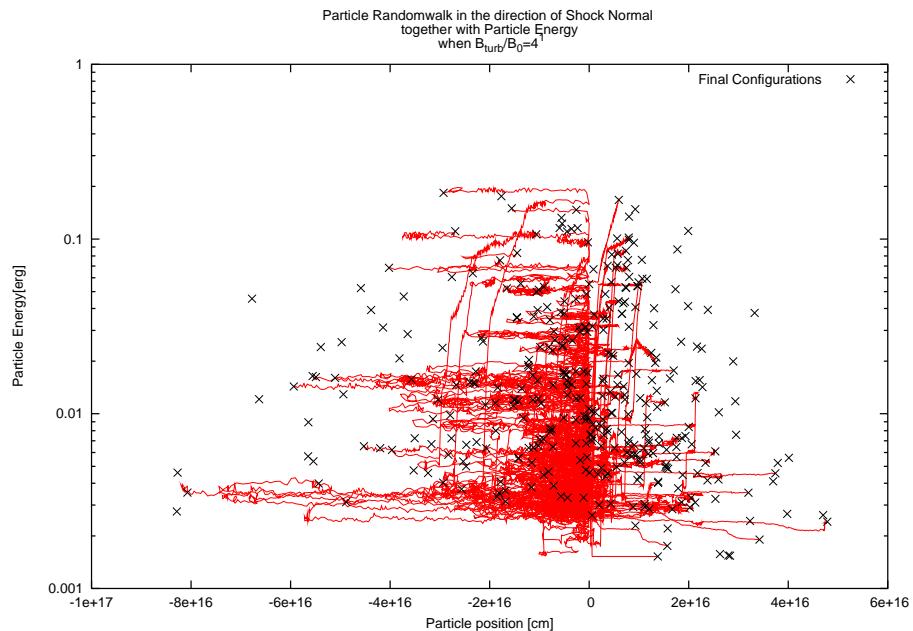
横軸：粒子の衝撃波法線方向の座標 (z 軸)、下流方向が正値。縦軸：粒子のエネルギー (対数)。 \times 印は最終的な配置。

図 42: z 座標とエネルギーの関係: $J = 4$, $\eta = 4^0$



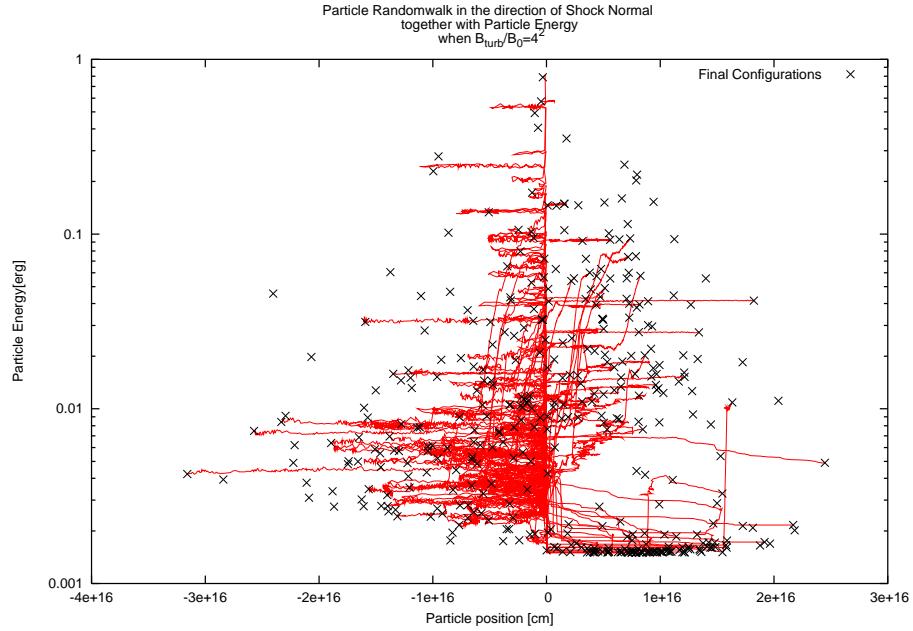
横軸：粒子の衝撃波法線方向の座標 (z 軸)、下流方向が正値。縦軸：粒子のエネルギー (対数)。×印は最終的な配置。

図 43: z 座標とエネルギーの関係: $J = 4$, $\eta = 4^1$



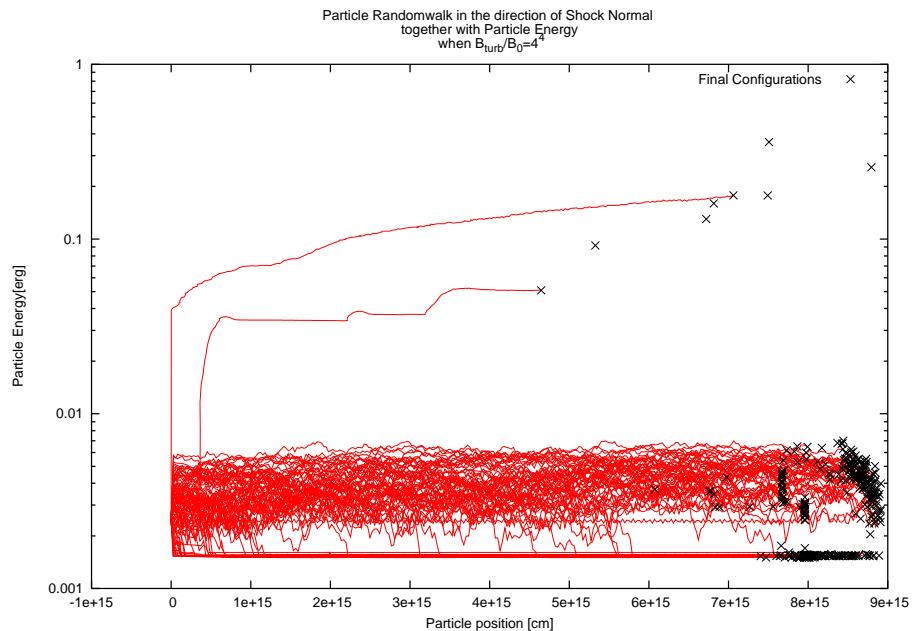
横軸：粒子の衝撃波法線方向の座標 (z 軸)、下流方向が正値。縦軸：粒子のエネルギー (対数)。×印は最終的な配置。

図 44: z 座標とエネルギーの関係: $J = 4, \eta = 4^2$



横軸：粒子の衝撃波法線方向の座標 (z 軸)、下流方向が正値。縦軸：粒子のエネルギー (対数)。×印は最終的な配置。

図 45: z 座標とエネルギーの関係: $J = 4, \eta = 4^4$



横軸：粒子の衝撃波法線方向の座標 (z 軸)、下流方向が正値。縦軸：粒子のエネルギー (対数)。×印は最終的な配置。

12.3.3 背景磁場の方向に対するスペクトルの依存性

超新星残骸は球状の構造であり、その半径よりも大きなスケールの背景磁場が存在する場合、衝撃波面はいたるところで異なる角度で磁場と交わる。Fermi 加速の効率がこの磁場の向きに依存するとすれば、超新星残骸の X 線像の形状を説明できることになる。

そこで 12.3.2 節のパラメータにおいて、衝撃波法線と背景磁場のなす角 θ を $[0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 80^\circ, 90^\circ]$ の範囲で変化させ、エネルギースペクトルがどう変化するかを調べた。この場合、粒子の $x - y$ 平面内での初速が意味をもつので、背景磁場を傾ける方向 y 軸に対して初速が平行な場合と垂直な場合の両方を調査した。

結果は、スペクトルの角度依存性はあまり見られず、 $\theta = 90^\circ$ に近いほどやや最大エネルギーが上がっていった。13 節での理解を先取りしていえば、これは乱流の大波長成分が背景磁場の役割を果たしていることにより、 θ によらず Fermi 加速メカニズムが有効であるためである。

図 46: η と加速粒子のスペクトルの関係-初速が磁場に平行な場合

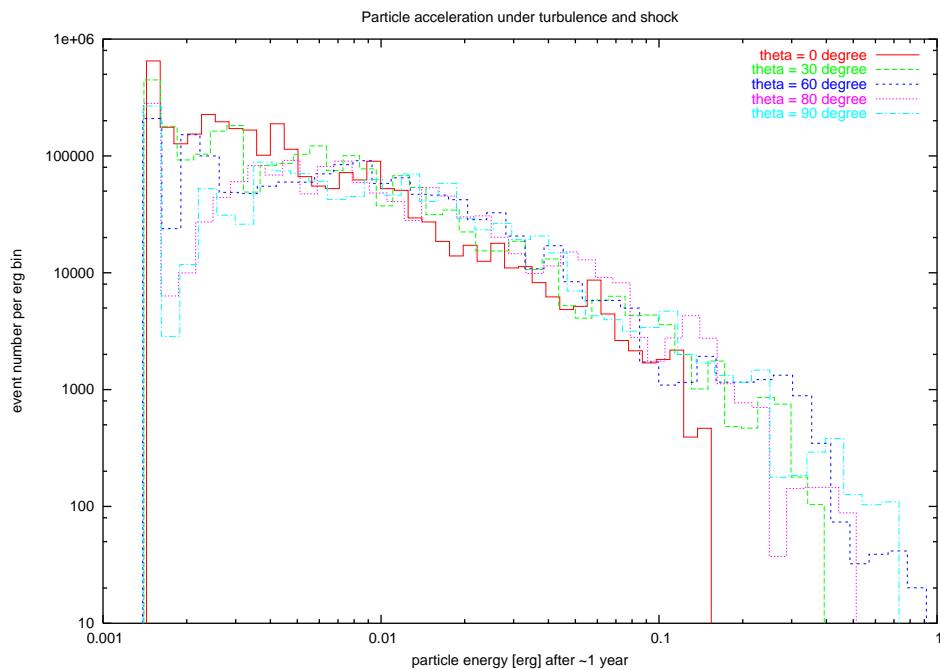
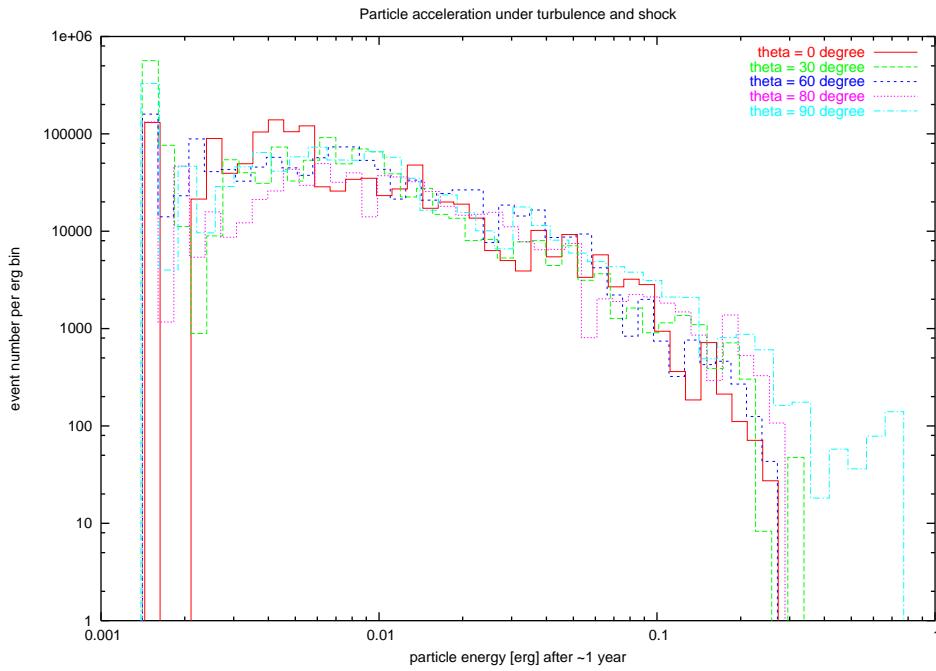


図 47: η と加速粒子のスペクトルの関係-初速が磁場に垂直な場合



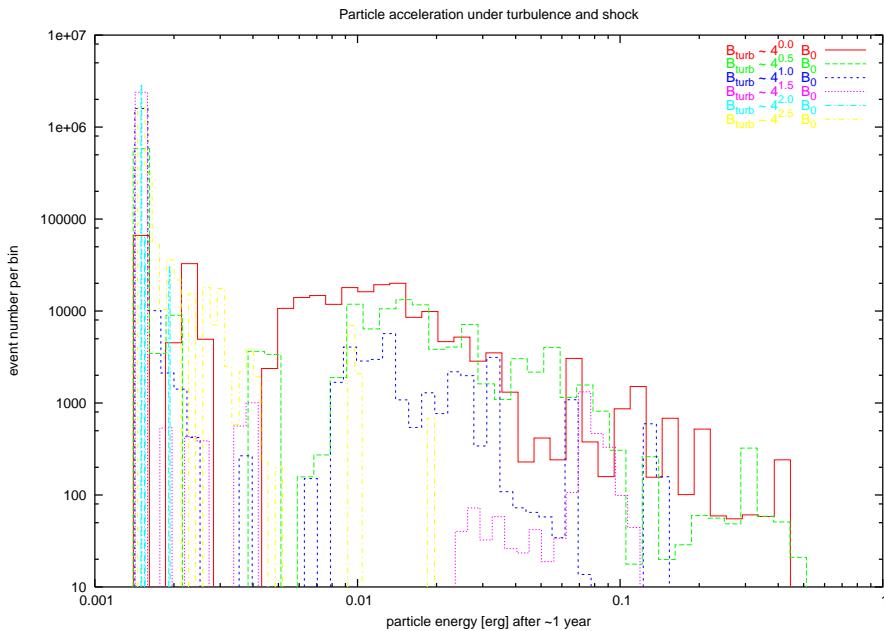
12.3.4 流体の速度と粒子の初速を SN1006 のパラメータに一致させた場合

SN 1006 の観測にあわせ、 $v_{up} = 3 \times 10^8 \text{ cm/sec}$ とした。また、粒子の初速を、SN 1006 で観測されている電子の温度に等しく、 0.24 keV とした上で、乱流振幅を 2 倍づつ変化させ、 $\eta \in [4^{-1.0}, \dots, 4^{3.5}]$ である 10 の場合について試行を繰り返した。

これにより、設定は現実に近づいたが、越境あたりの加速効率は $(1 + h) = 1/200$ と小さくなり、また粒子をより小さい速度から加速しないといけないため、シミュレーションにとっては不利な条件である。

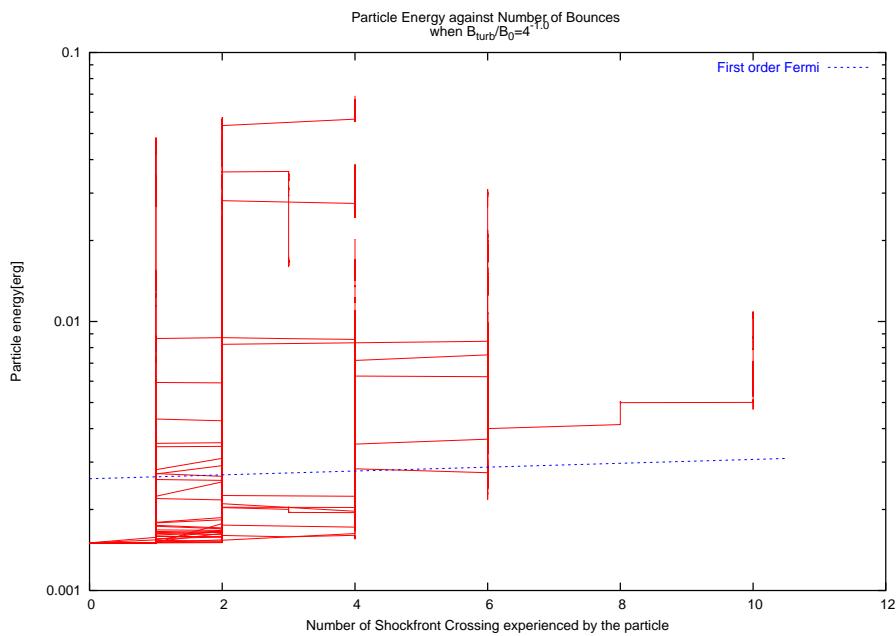
試行回数はスペクトルの幕を明確にするほど多くは取れなかつたが、この条件下でも宇宙線は $\sim 10^{12} \text{ eV}$ まで加速され、 $\eta = 4^{-0.5} \sim 4^{1.5}$ の範囲で $(1 + h) = 1/200$ の 1 次 Fermi 加速が起こっていることがわかる。

図 48: 乱流スペクトル



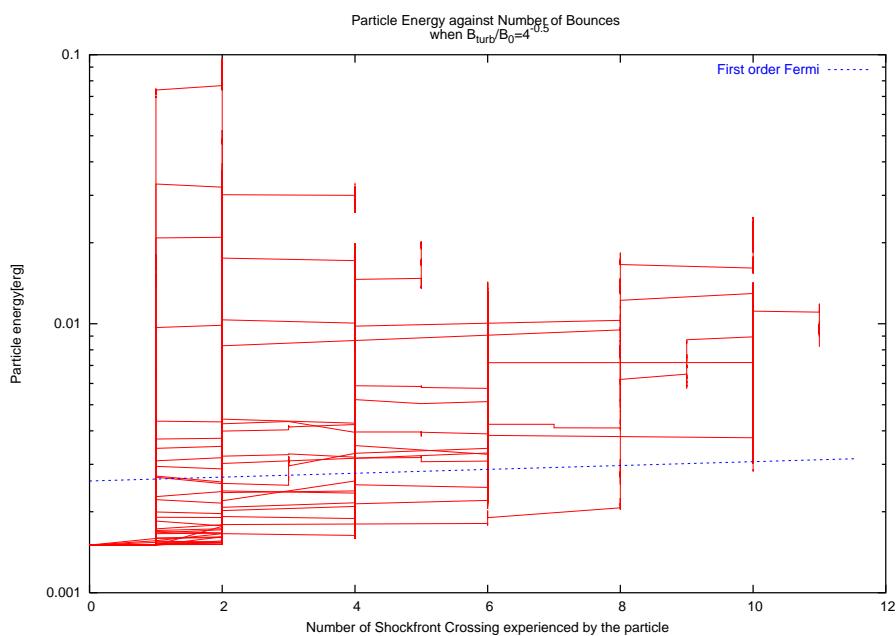
横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 49: 越境回数とエネルギーの関係 $\eta = 4^{-1.0}$



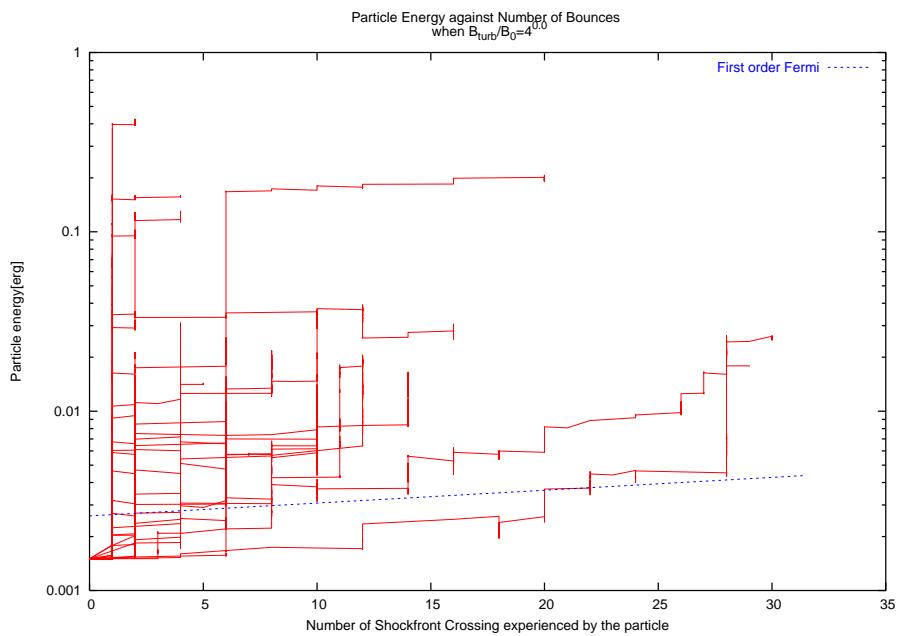
横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 50: 越境回数とエネルギーの関係 $\eta = 4^{-0.5}$



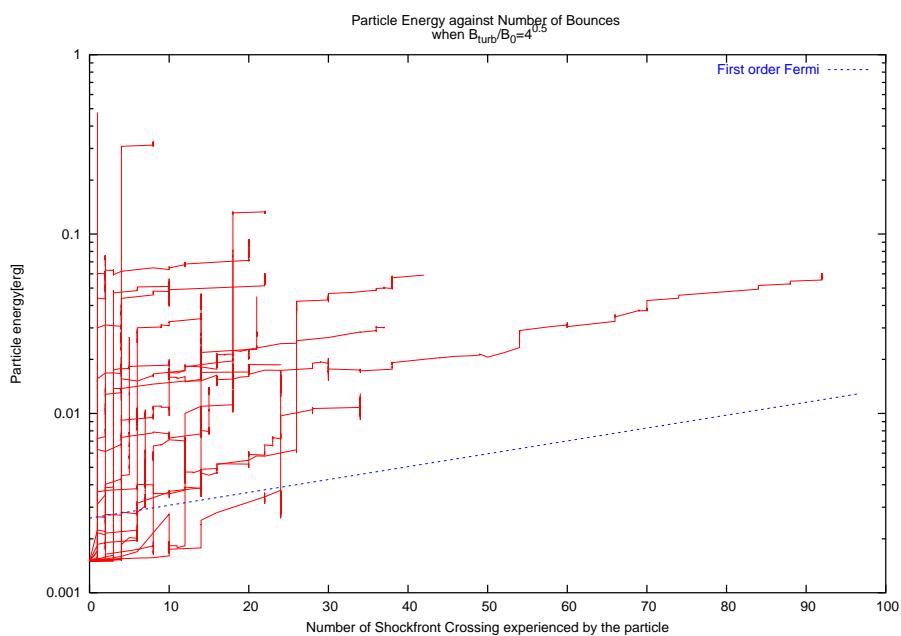
横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 51: 越境回数とエネルギーの関係 $\eta = 4^{-0.0}$



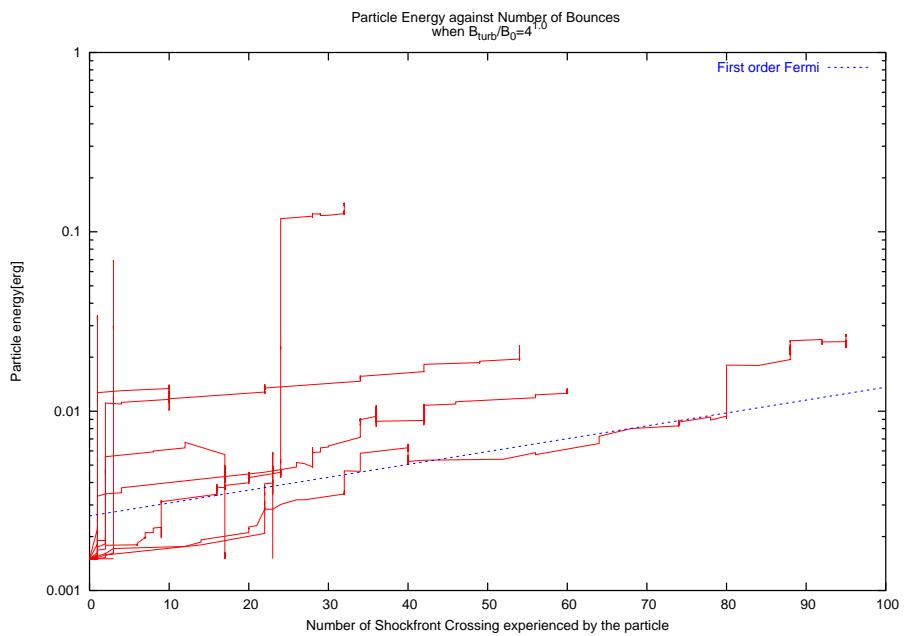
横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 52: 越境回数とエネルギーの関係 $\eta = 4^{-0.5}$



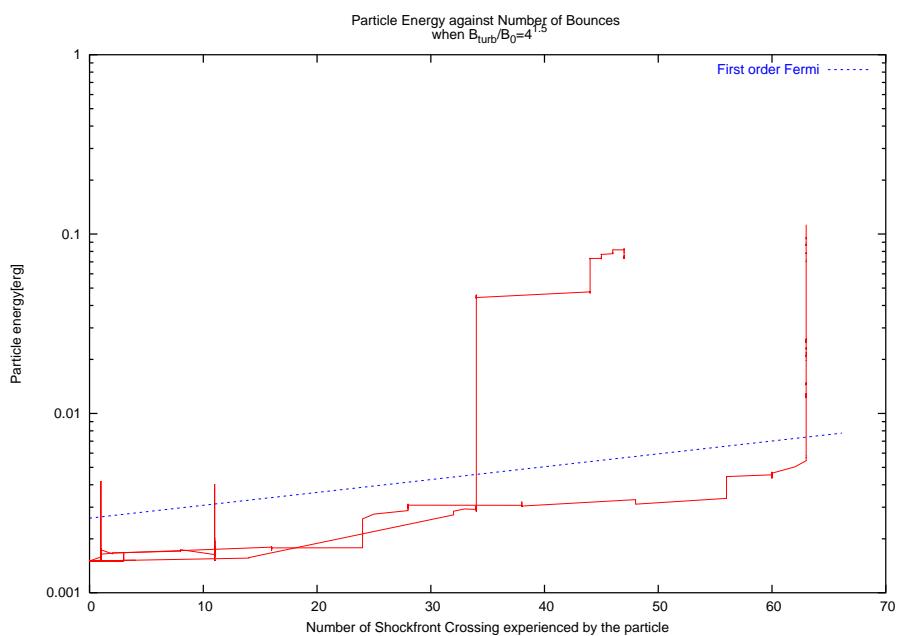
横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 53: 越境回数とエネルギーの関係 $\eta = 4^{-1.0}$



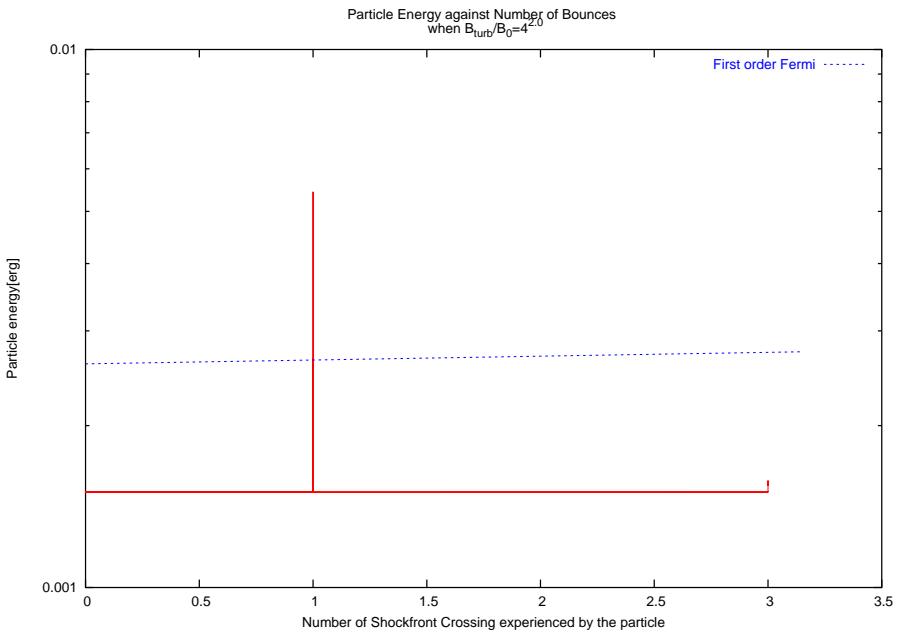
横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 54: 越境回数とエネルギーの関係 $\eta = 4^{-1.5}$



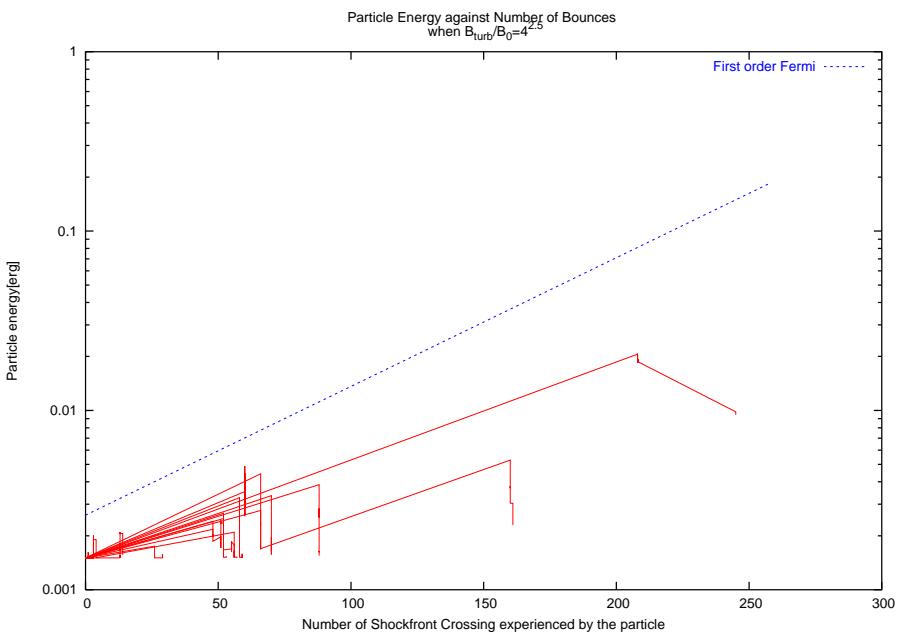
横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 55: 越境回数とエネルギーの関係 $\eta = 4^{-2.0}$



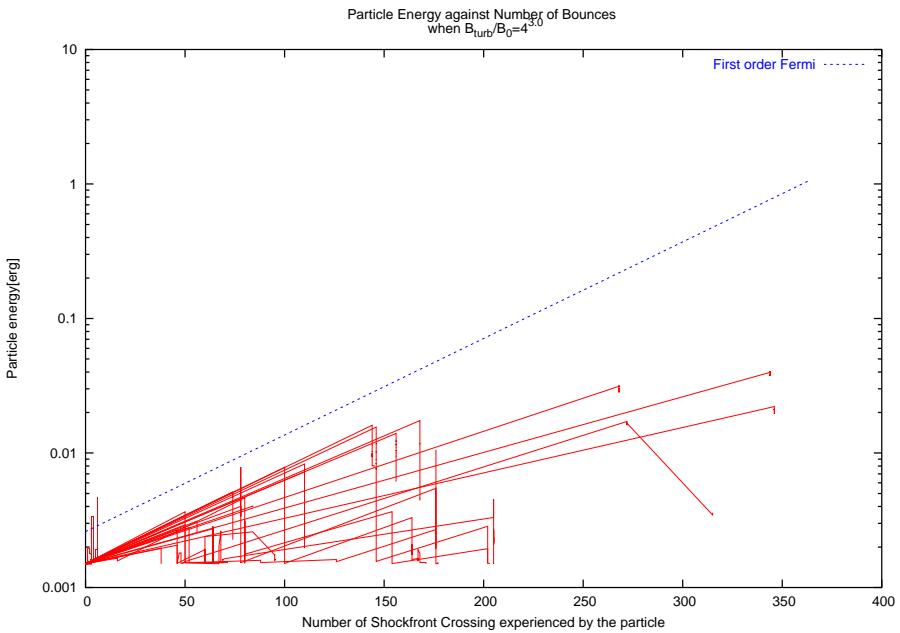
横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 56: 越境回数とエネルギーの関係 $\eta = 4^{-2.5}$



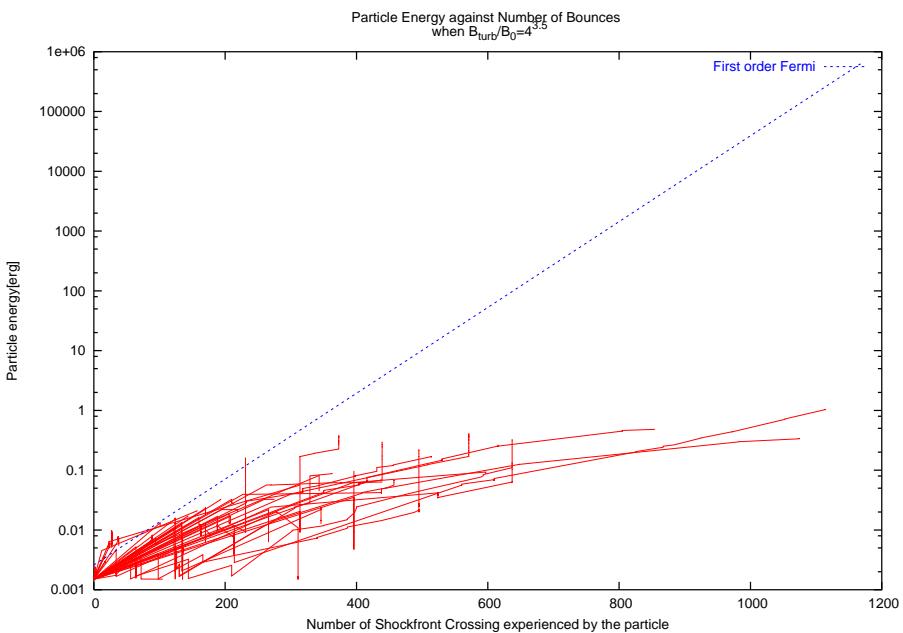
横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 57: 越境回数とエネルギーの関係 $\eta = 4^{-3.0}$



横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 58: 越境回数とエネルギーの関係 $\eta = 4^{-3.5}$



横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

12.3.5 乱流の最大波長が小さい場合の角度依存性

背景磁場の角度に対するスペクトルの有意な依存性が検出できなかったとき、大スケールの乱流が事実上背景磁場の役割を果たしているからではないか、と考えたので、乱流の最大スケールを減らしてみることを重いついた。

そこで、SN 1006 のパラメータ $v_{init} = 1 \text{ keV}$, $v_{up} = 3 \times 10^8 \text{ cm/s}$ を採るとともに、乱流の波長を $k = 10^{-14} \text{ cm} \sim 10^{-9} \text{ cm}$ までに限定して、 $\eta \in [-0.25, 1, 4]$, $\theta \in [0^\circ, 45^\circ, 90^\circ]$ の場合についてシミュレーションを行った。

このケースでは、初速が低いこと、流体速度も低く加速効率も悪いことなどから、十分な数の粒子が Fermi 加速されるだけの計算時間をとることができず、幕が読み取れるようなスペクトルを探ることができなかった。

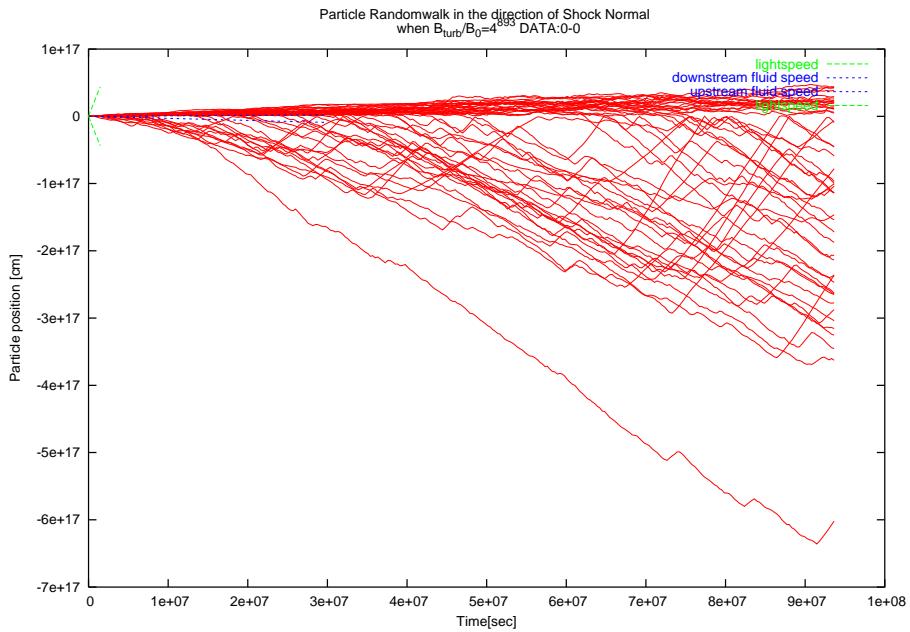
しかし、 z 軸方向の粒子の運動の軌跡は Fermi 加速機構の稼働率を明確に示しており、これと越境回数-エネルギー関係のグラフをあわせると、次のような結果が読み取れる。

まず、 $\theta = 90^\circ$ の場合には、 η がいくらであっても乱流捕捉が支配し、粒子は 1 次 Fermi 加速されることができない。

$\theta = 0^\circ, 45^\circ$ の場合は、 $\eta = 0.25$ および $\eta = 1.0$ については両者ともに 1 次 Fermi 加速をうけているコンポーネントがある。ただし、乱流捕捉が効き始め、 $\eta = 1.0$ では $\theta = 45^\circ$ のケースのほうが逸失の割合が大きい。これは $\eta = 4.0$ でいっそう顕著となる。 $\eta = 4.0$ では既にすべての角度で乱流捕捉が支配し、 $\theta = 0^\circ$ のケースのみわずかに 1 次 Fermi 加速の兆候がみられる。

$\lambda_{max} = 10^{17}$ であった 12.3.2 節のパラメータでは、1 次 Fermi 加速が最も有効であったのは $\eta = 1 \sim 16$ の範囲であったのに対し、最大波長を $\lambda_{max} = 10^{14}$ と小さくした本節のケースでは 1 次 Fermi 加速が有効なのは $\eta = -0.25 \sim 4.0$ の内側であった。この結果は 13 節で解釈される。

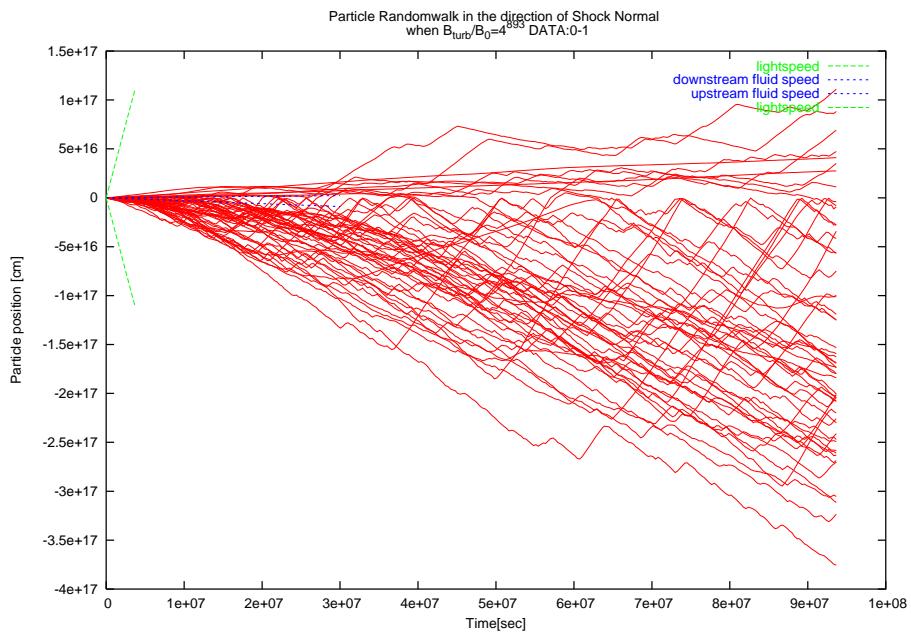
図 59: z 軸方向の運動: $\eta = 0.25, \theta = 0^\circ$



横軸：時刻、縦軸： z 座標。

傾きの急な黄緑の点線は光速。傾きのゆるい青い点線は上流/下流の流体速度。

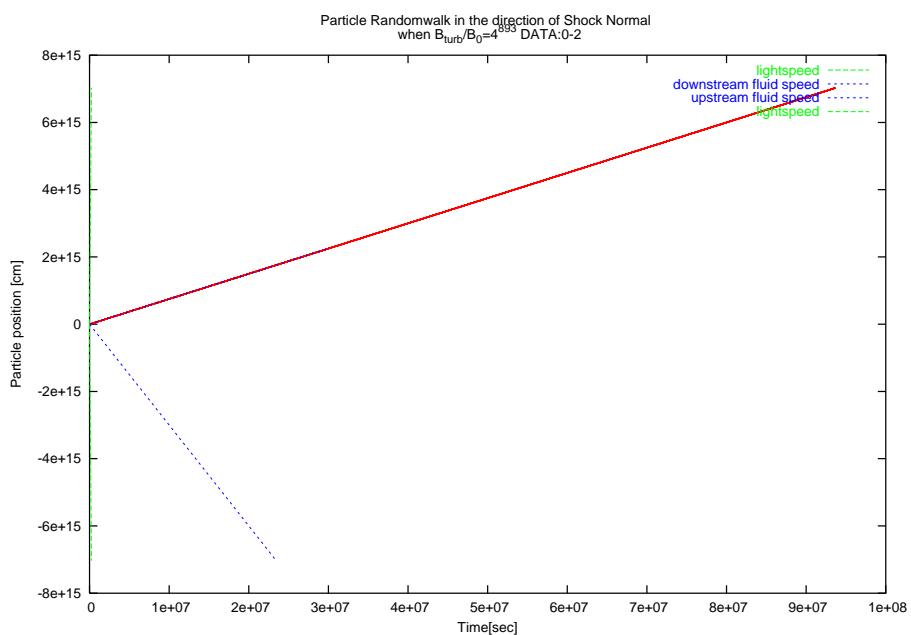
図 60: z 軸方向の運動: $\eta = 0.25, \theta = 45^\circ$



横軸 : 時刻、縦軸 : z 座標。

傾きの急な黄緑の点線は光速。傾きのゆるい青い点線は上流/下流の流体速度。

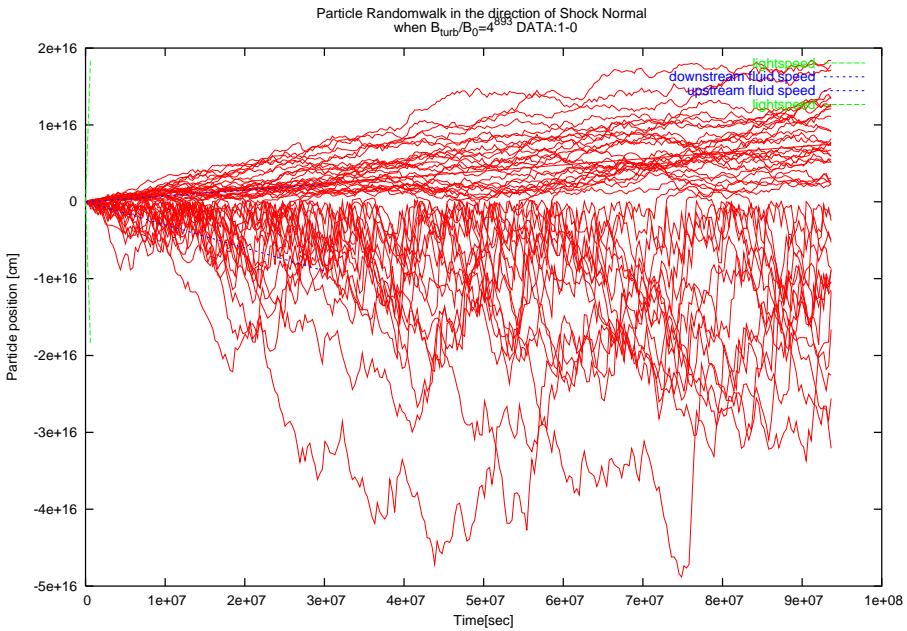
図 61: z 軸方向の運動: $\eta = 0.25, \theta = 90^\circ$



横軸 : 時刻、縦軸 : z 座標。

傾きの急な黄緑の点線は光速。傾きのゆるい青い点線は上流/下流の流体速度。

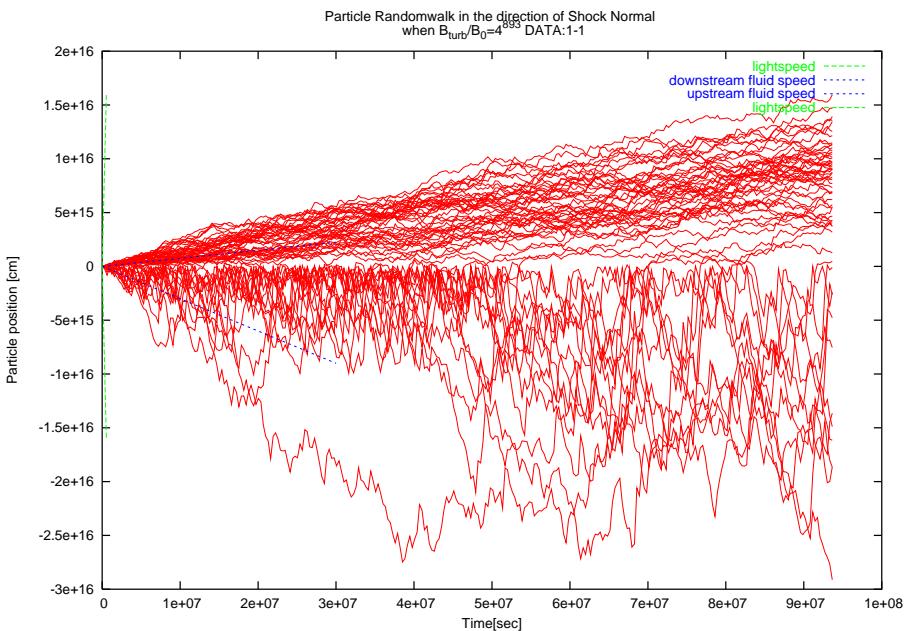
図 62: z 軸方向の運動: $\eta = 1.0, \theta = 0^\circ$



横軸：時刻、縦軸： z 座標。

傾きの急な黄緑の点線は光速。傾きのゆるい青い点線は上流/下流の流体速度。

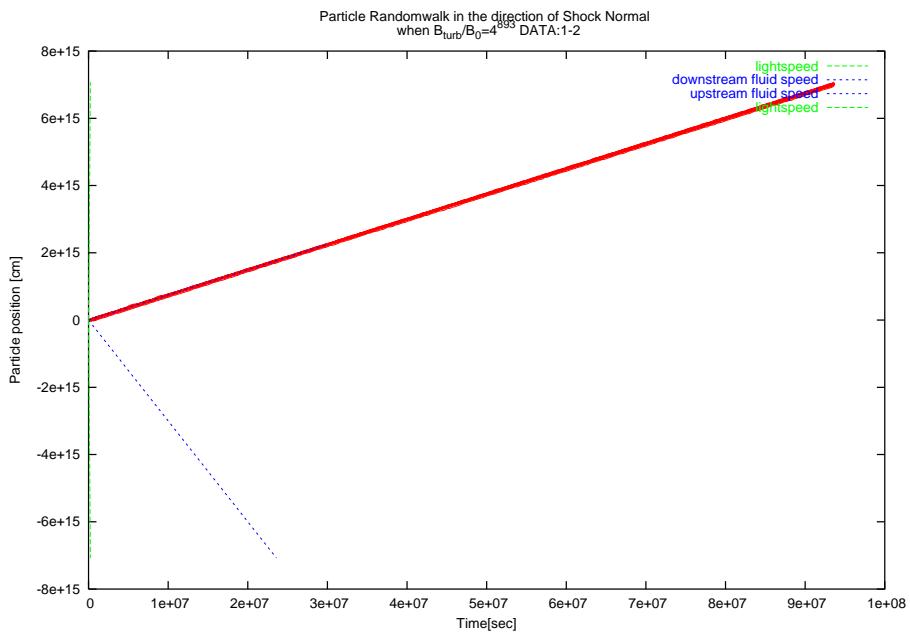
図 63: z 軸方向の運動: $\eta = 1.0, \theta = 45^\circ$



横軸：時刻、縦軸： z 座標。

傾きの急な黄緑の点線は光速。傾きのゆるい青い点線は上流/下流の流体速度。

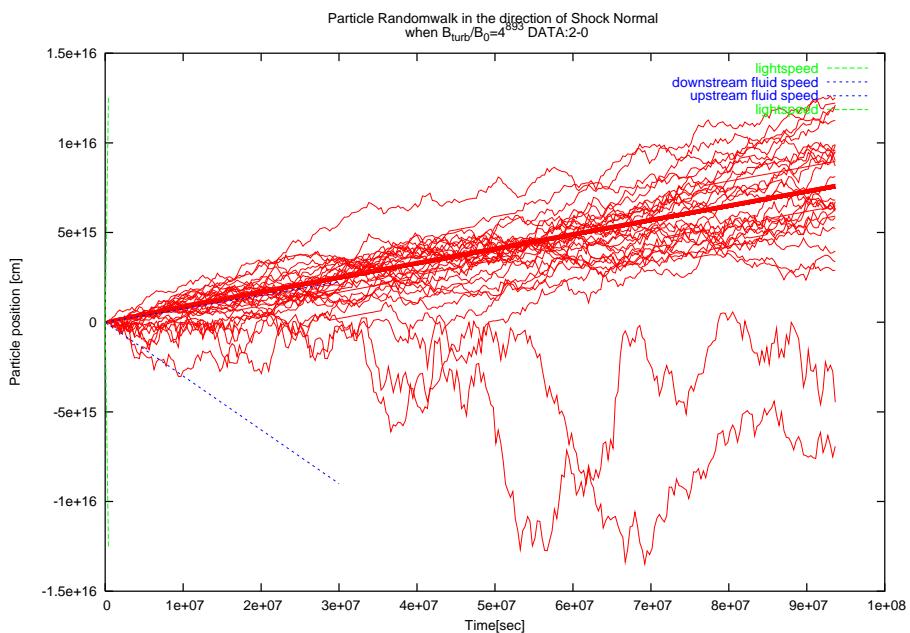
図 64: z 軸方向の運動: $\eta = 1.0, \theta = 90^\circ$



横軸：時刻、縦軸：z 座標。

傾きの急な黄緑の点線は光速。傾きのゆるい青い点線は上流/下流の流体速度。

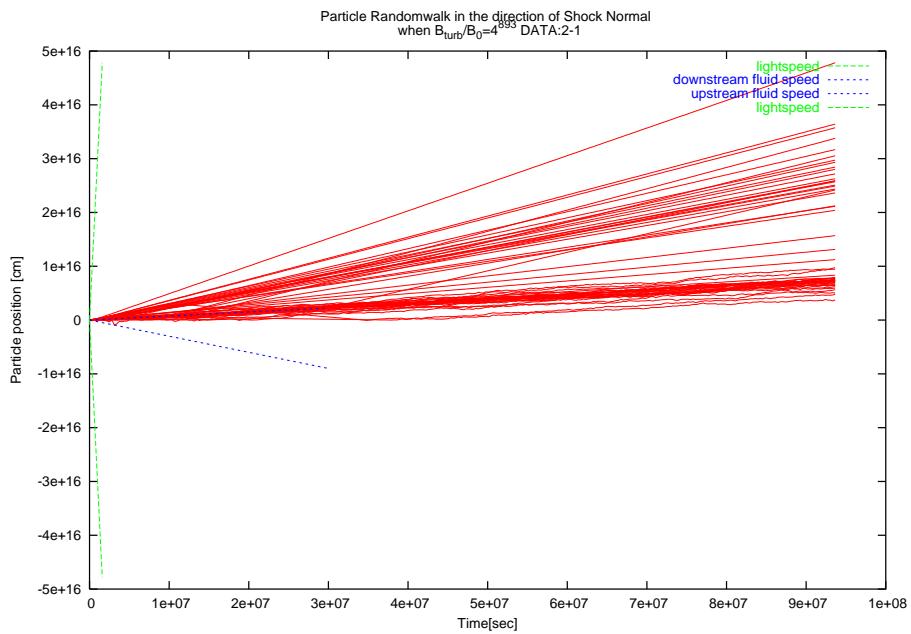
図 65: z 軸方向の運動: $\eta = 4.0, \theta = 0^\circ$



横軸：時刻、縦軸：z 座標。

傾きの急な黄緑の点線は光速。傾きのゆるい青い点線は上流/下流の流体速度。

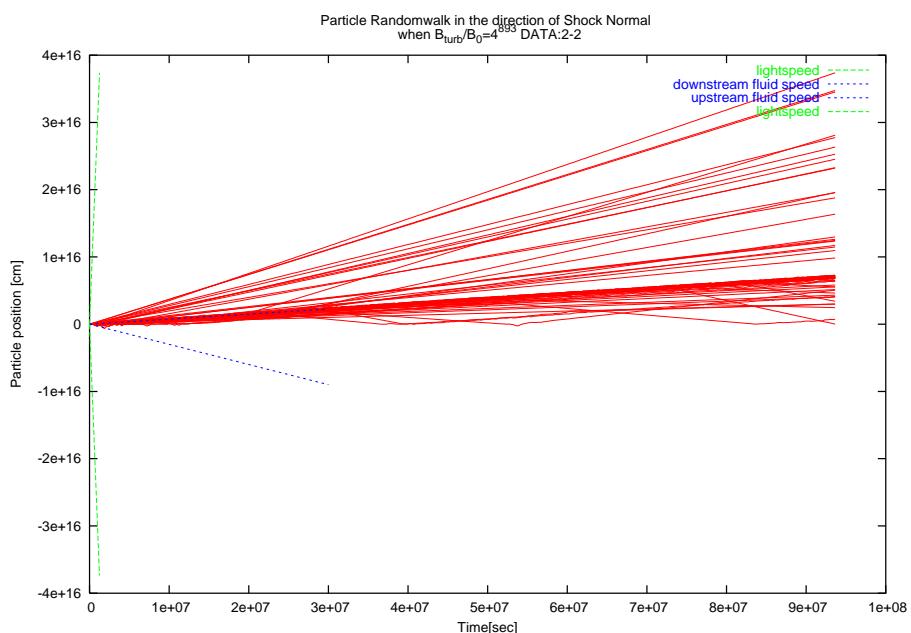
図 66: z 軸方向の運動: $\eta = 4.0, \theta = 45^\circ$



横軸 : 時刻、縦軸 : z 座標。

傾きの急な黄緑の点線は光速。傾きのゆるい青い点線は上流/下流の流体速度。

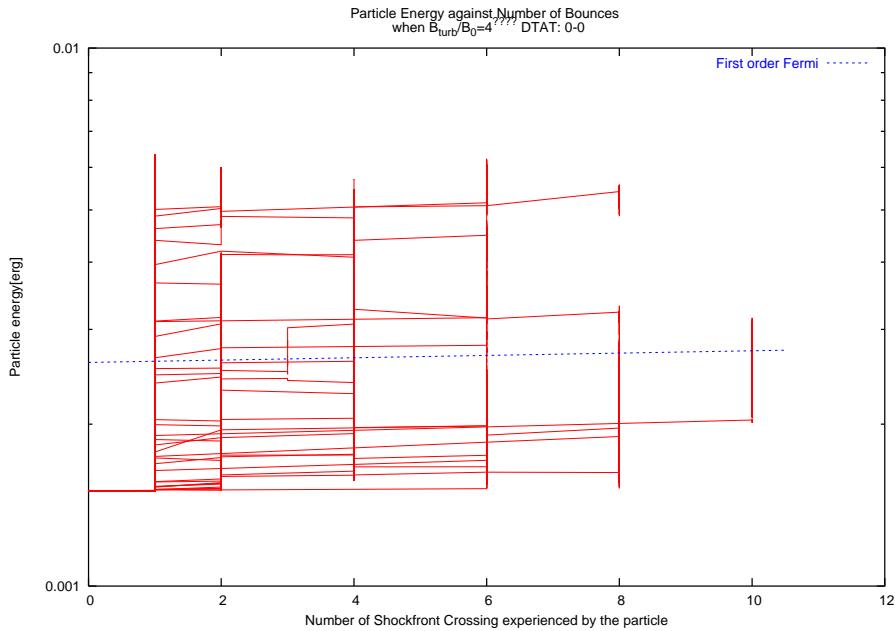
図 67: z 軸方向の運動: $\eta = 4.0, \theta = 90^\circ$



横軸 : 時刻、縦軸 : z 座標。

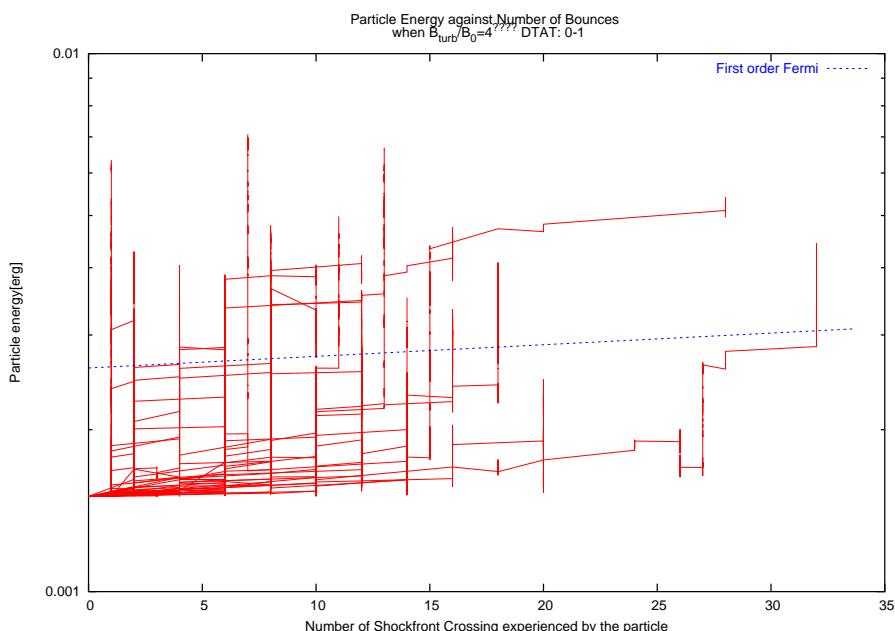
傾きの急な黄緑の点線は光速。傾きのゆるい青い点線は上流/下流の流体速度。

図 68: 越境-エネルギー関係: $\eta = 0.25, \theta = 0^\circ$



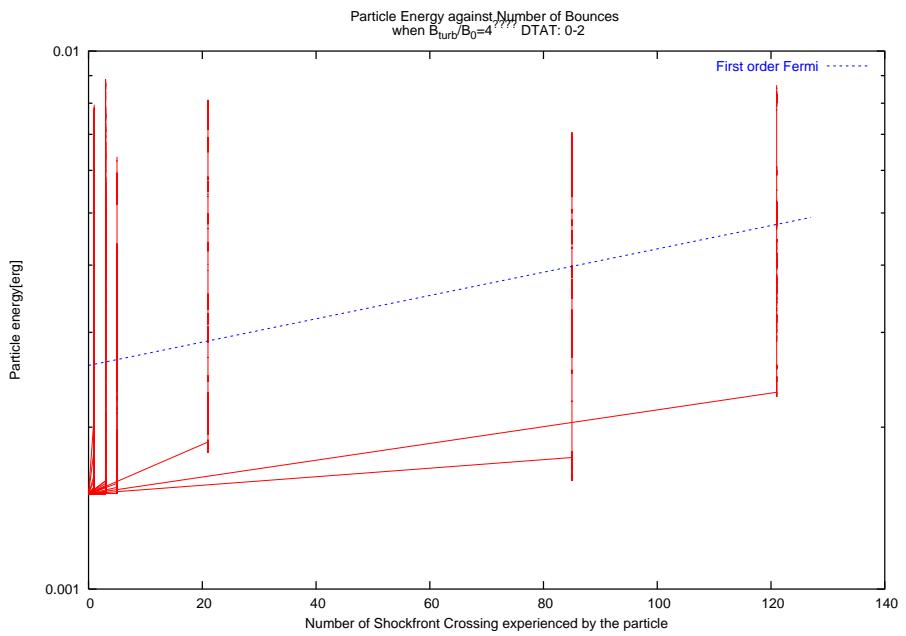
横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 69: 越境-エネルギー関係: $\eta = 0.25, \theta = 45^\circ$



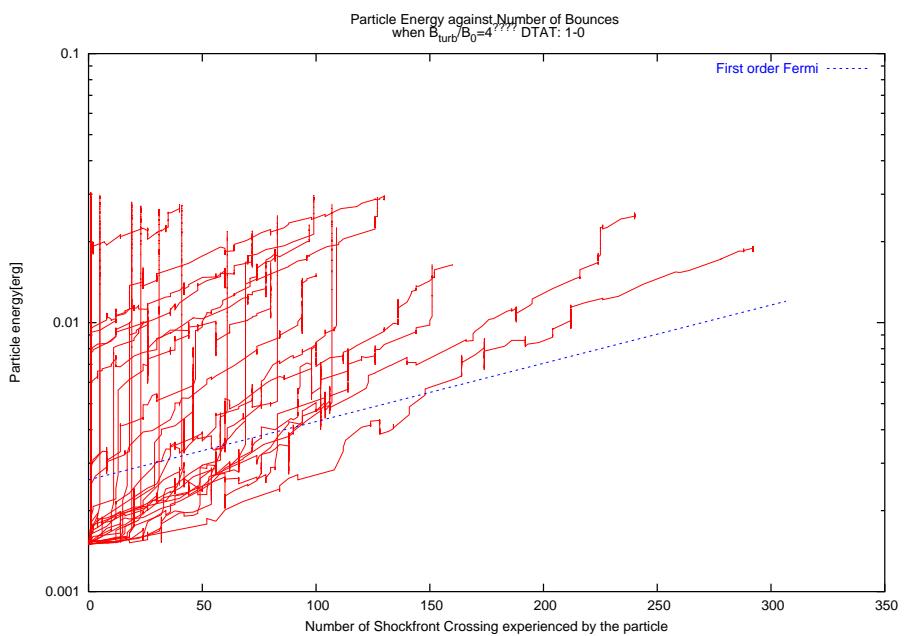
横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 70: 越境-エネルギー関係: $\eta = 0.25, \theta = 90^\circ$



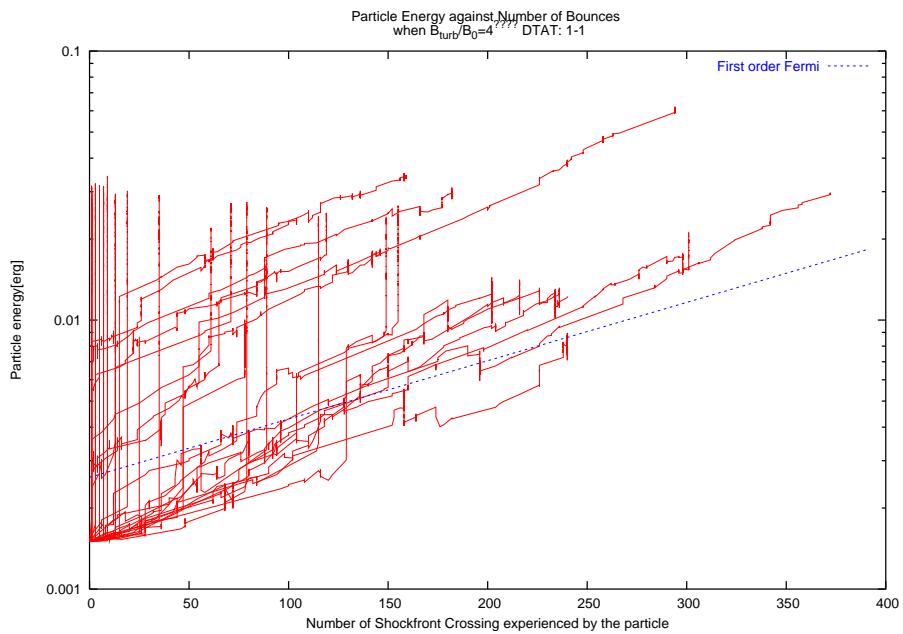
横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 71: 越境-エネルギー関係: $\eta = 1.0, \theta = 0^\circ$



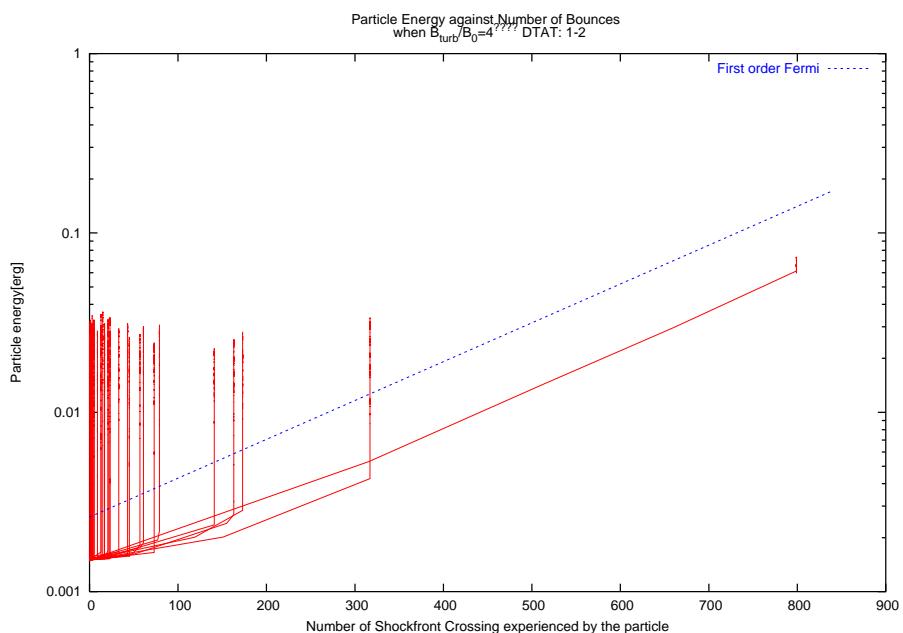
横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 72: 越境-エネルギー関係: $\eta = 1.0, \theta = 45^\circ$



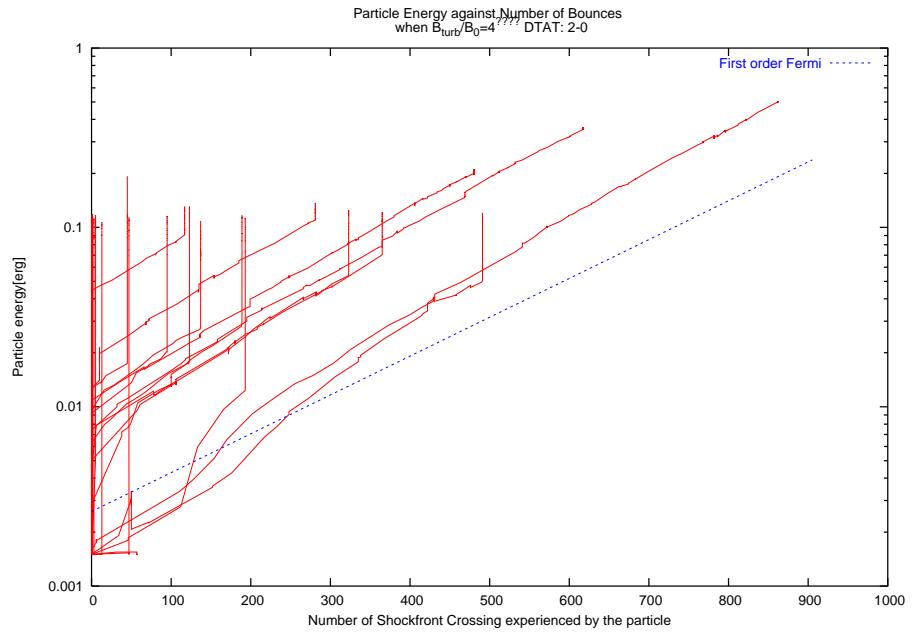
横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 73: 越境-エネルギー関係: $\eta = 1.0, \theta = 90^\circ$



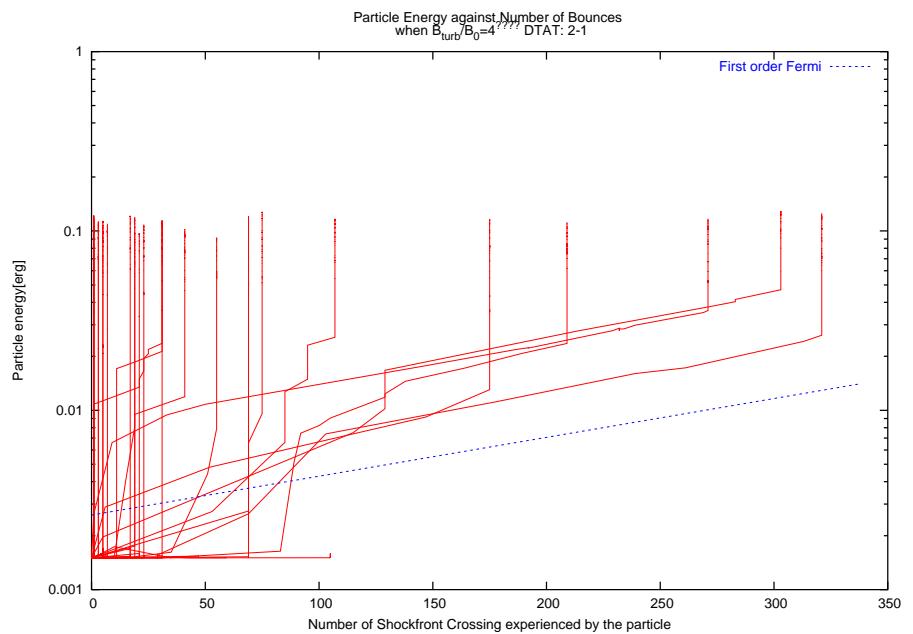
横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 74: 越境-エネルギー関係: $\eta = 4.0, \theta = 0^\circ$



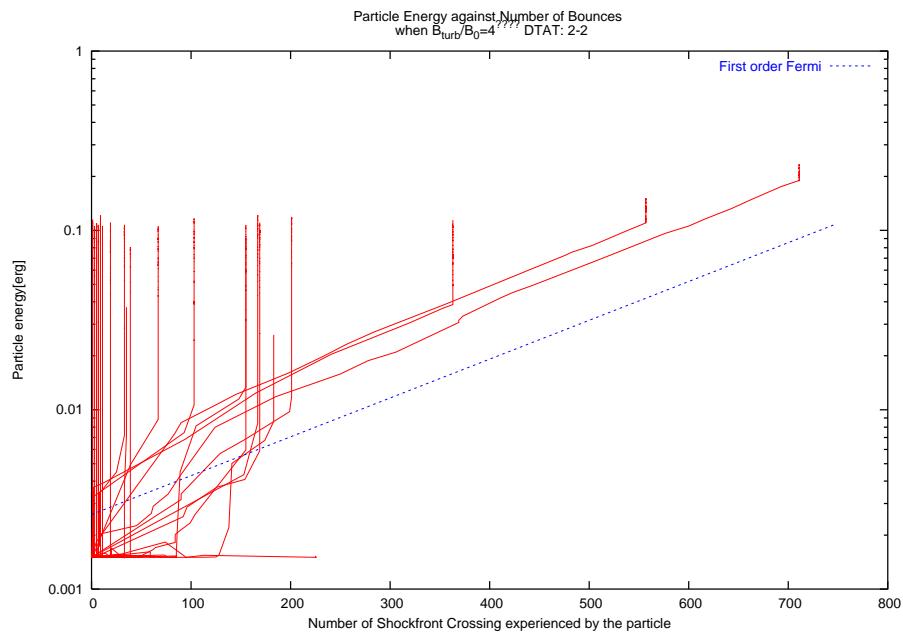
横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 75: 越境-エネルギー関係: $\eta = 4.0, \theta = 45^\circ$



横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 76: 越境-エネルギー関係: $\eta = 4.0, \theta = 90^\circ$



横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

12.3.6 圧縮率を小さくした場合

12.3.2 節の条件に対し、 $J = 2$ にした場合の加速効率を調べた。

従来、9.2 節で紹介したように、Fermi 加速の結果生じる幕 $\frac{dP}{dE} \propto E^{-\mu}$ は

$$\mu = 1 + \frac{3}{J - 1}$$

になると考えられてきた。これによれば、 $J = 2$ のときは、宇宙線のエネルギースペクトルは $\mu = 4$ でなければならない。

ところが、実験の結果は、 $J = 2$ のとき、 $\mu = 1.5$ 程度であった。一方、越境回数-エネルギー のプロットを見る限り、越境あたりの加速効率 $(1 + h)$ は従来どおり、 $h = \frac{2}{3} \frac{u_{up} - u_{down}}{c}$ を満たすようだ。

衝撃波の圧縮率 J が弱いのにスペクトルが高エネルギー粒子が増える側に傾くというのは不自然に思われるが、粒子の z 軸方向の運動とエネルギーのグラフを、 $J = 2$ と $J = 4$ の場合で比較することでヒントが得られる。 $J = 4$ の場合、かなりの数の粒子が $z = 0$ の衝撃波面に沿ってエネルギーを増加させているのに対し、 $J = 2$ の場合、61 ページで触れた、右上に向かって曲がりながら加速している、乱流捕捉中の Fermi 加速の兆候が見られる。

この 2 つの対比は、乱流振幅 η が大きくなるほど明らかになっており、 $J = 2, \eta = 2$ では乱流捕捉中加速のほうが衝撃波面での 1 次 Fermi 加速より卓越している。

圧縮率の大きい極限 $J = 4$ の衝撃波だけではなく、任意の圧縮率の衝撃波でも逆 2 乗幕に近い宇宙線スペクトルが生み出されているのかも知れない。

図 77: 圧縮率が小さい場合の乱流スペクトル

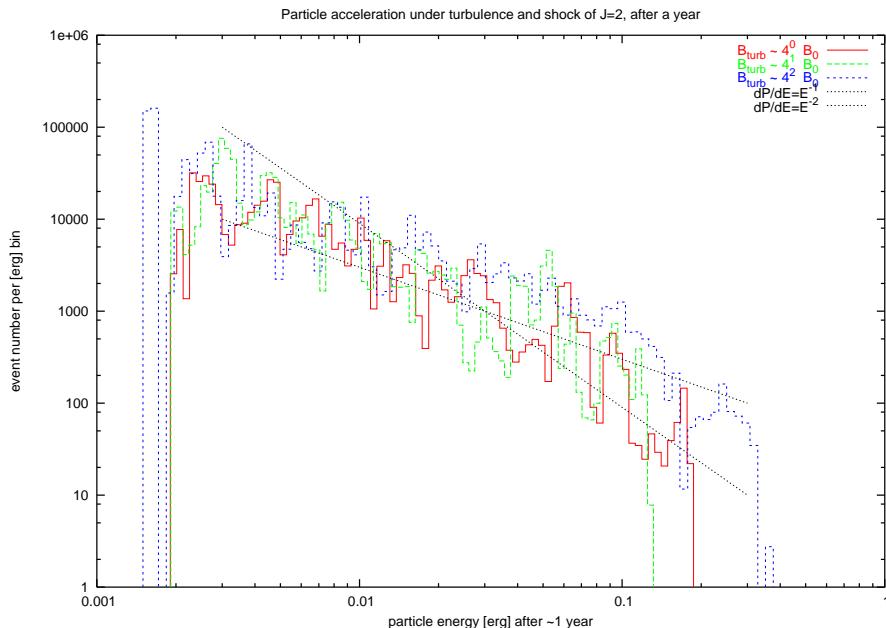
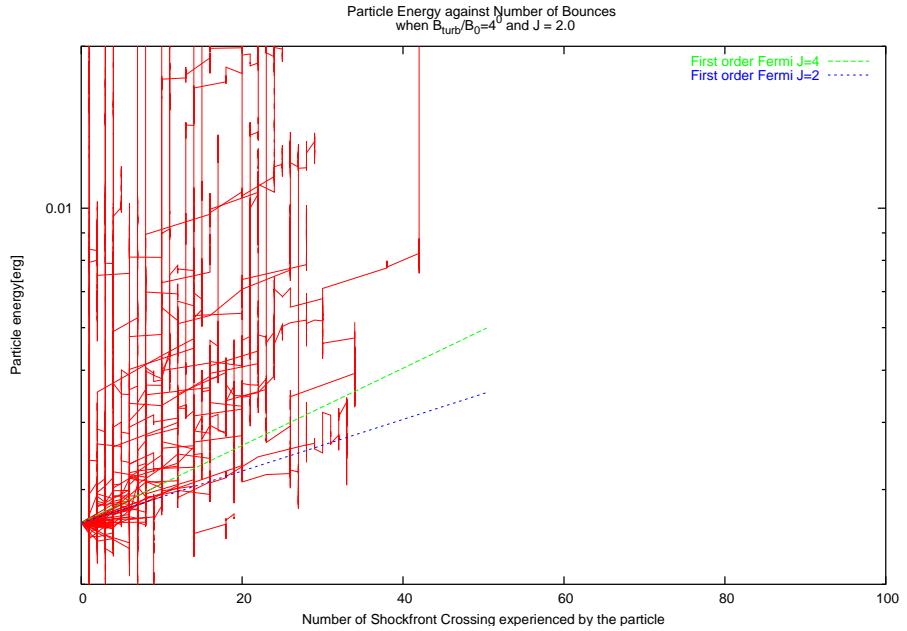
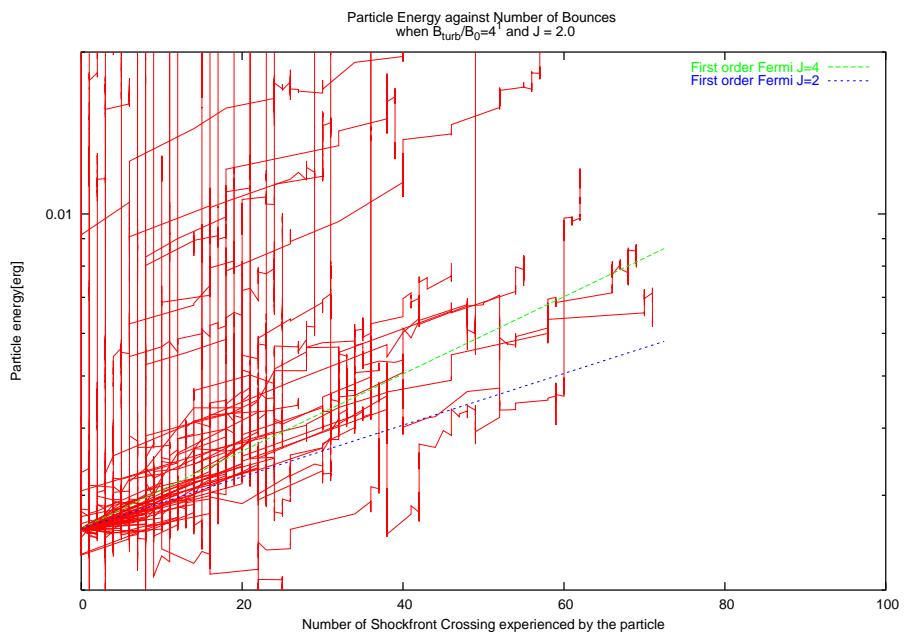


図 78: 圧縮率が小さい場合の越境回数とエネルギーの関係



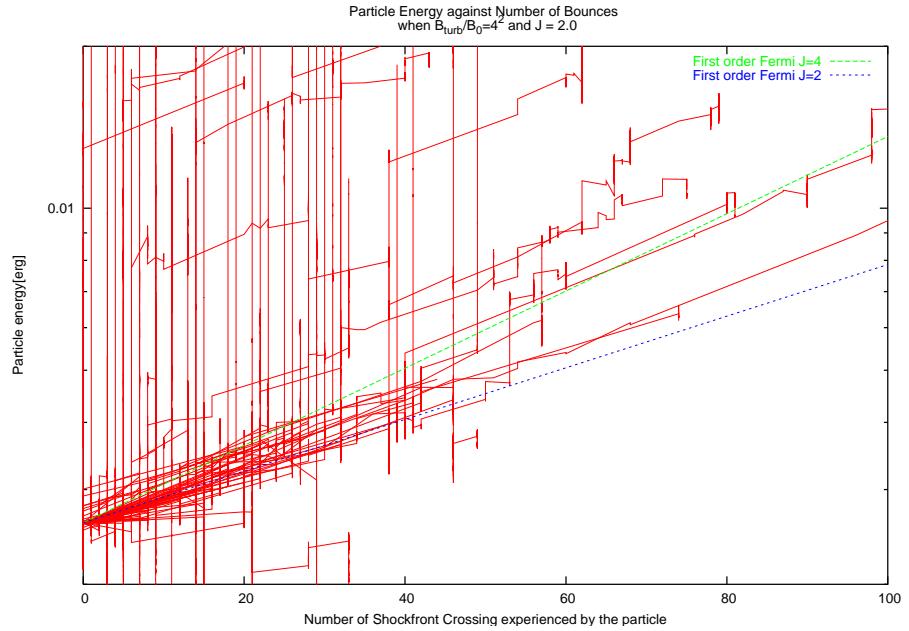
横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 79: 圧縮率が小さい場合の越境回数とエネルギーの関係



横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 80: 圧縮率が小さい場合の越境回数とエネルギーの関係



横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 81: z 座標とエネルギーの関係: $J = 2, \eta = 1$

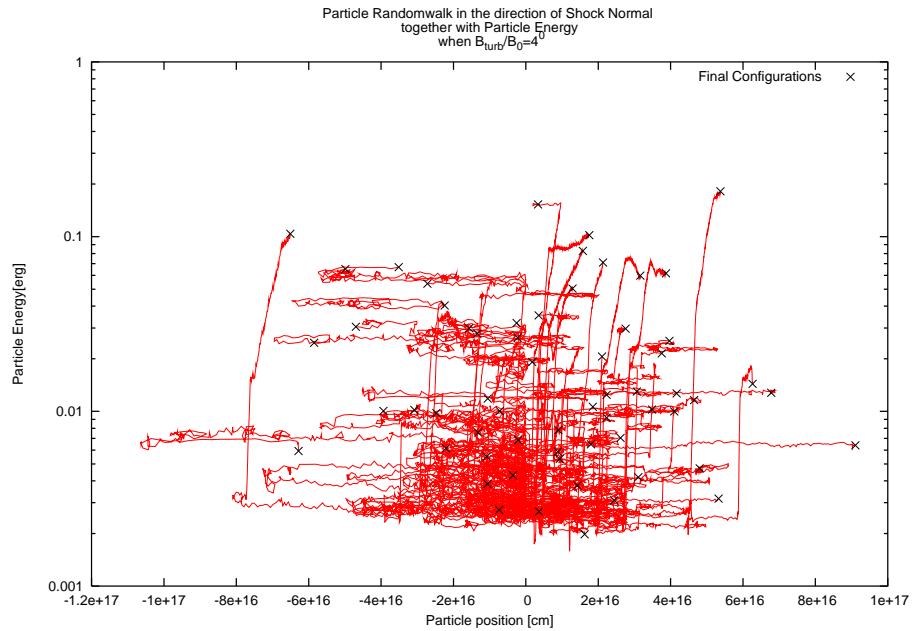
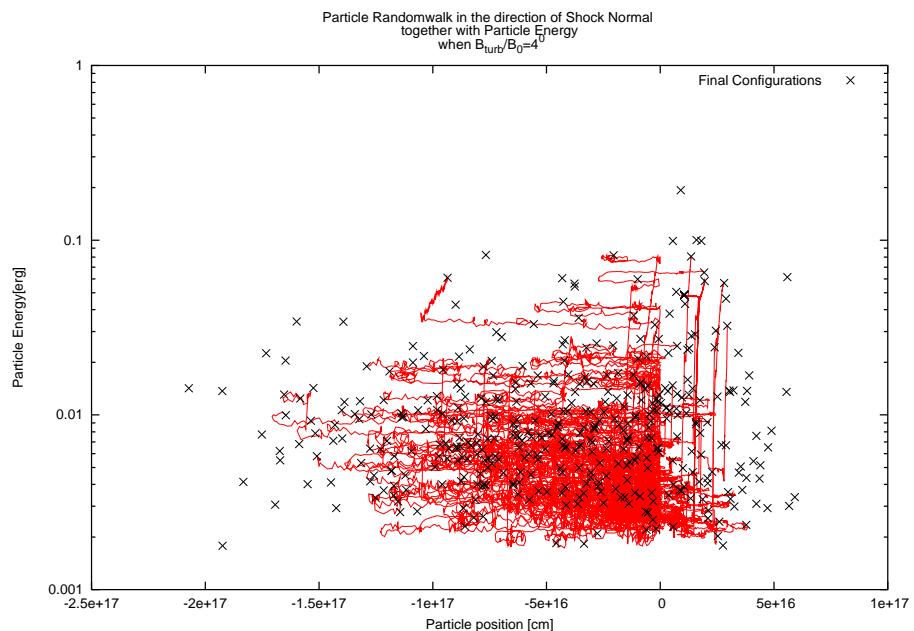


図 82: z 座標とエネルギーの関係: $J = 4, \eta = 4^0$



横軸：粒子の衝撃波法線方向の座標 (z 軸)、下流方向が正値。縦軸：粒子のエネルギー (対数)。 \times 印は最終的な配置。圧縮率 $J = 2$ の場合 (上図) では乱流内の加速が、 $J = 4$ (下図) では衝撃波加速が優勢である。

図 83: z 座標とエネルギーの関係: $J = 2, \eta = 4$

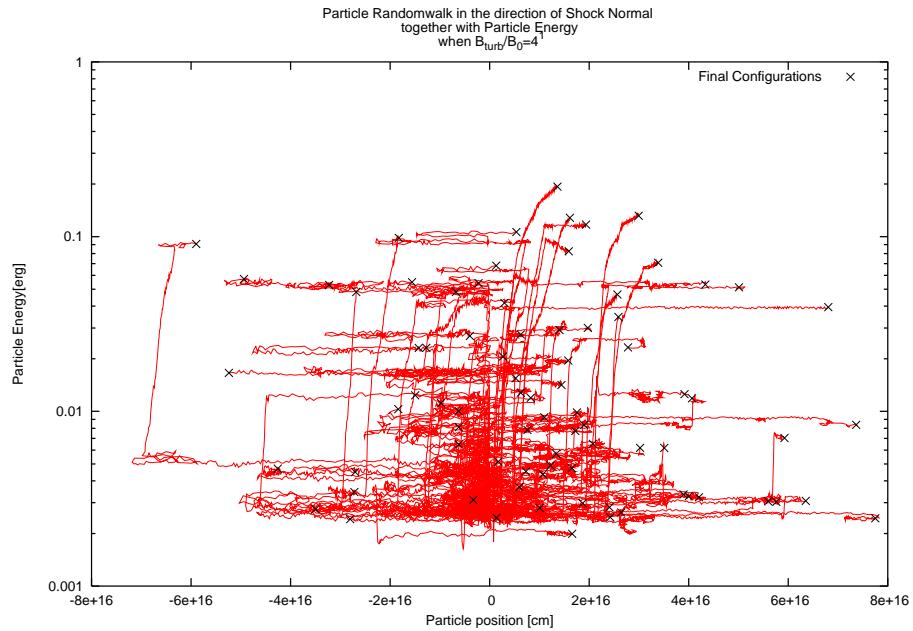
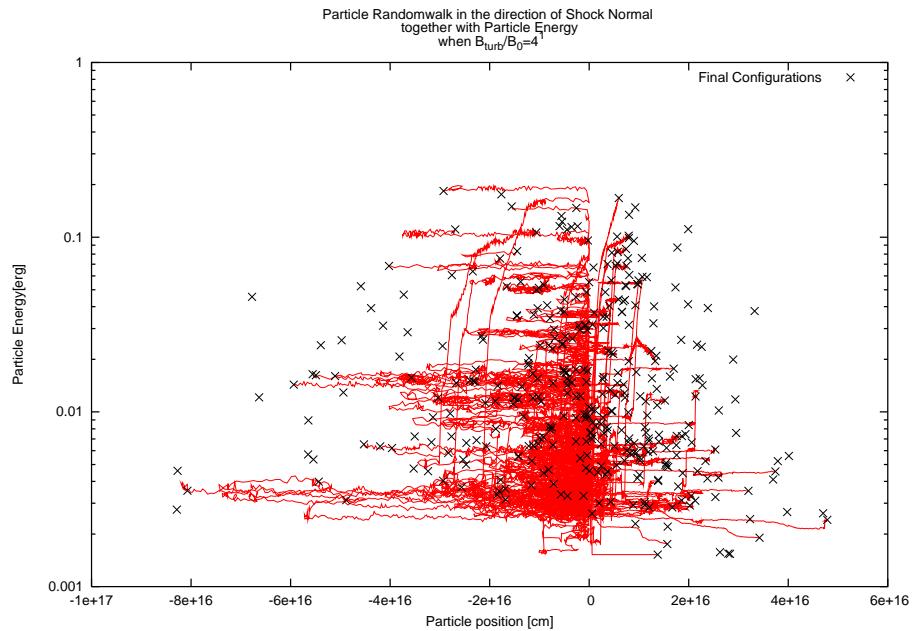


図 84: z 座標とエネルギーの関係: $J = 4, \eta = 4^1$



横軸：粒子の衝撃波法線方向の座標 (z 軸)、下流方向が正値。縦軸：粒子のエネルギー (対数)。 \times 印は最終的な配置。圧縮率 $J = 2$ の場合 (上図) では乱流内の加速が、 $J = 4$ (下図) では衝撃波加速が優勢である。

図 85: z 座標とエネルギーの関係: $J = 2, \eta = 16$

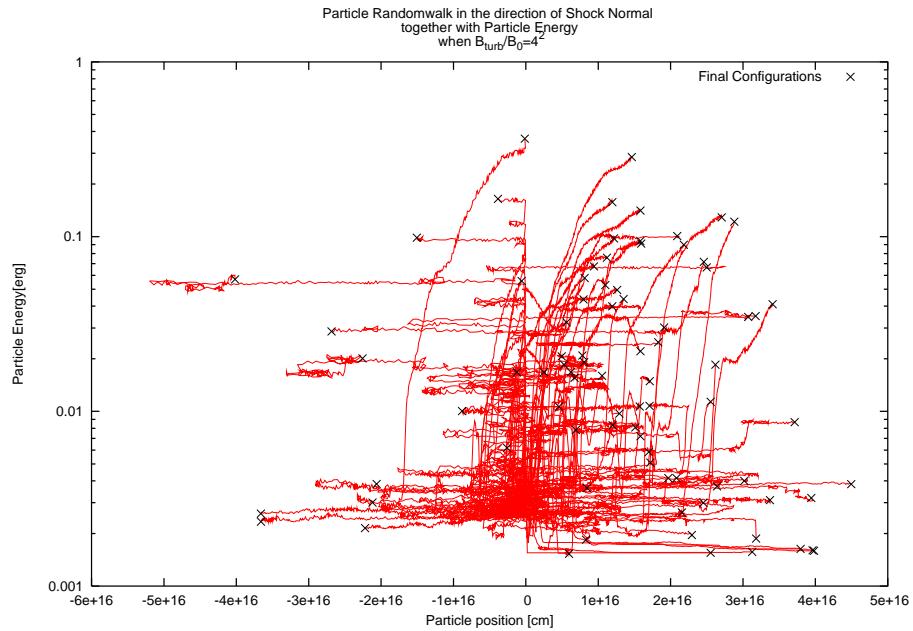
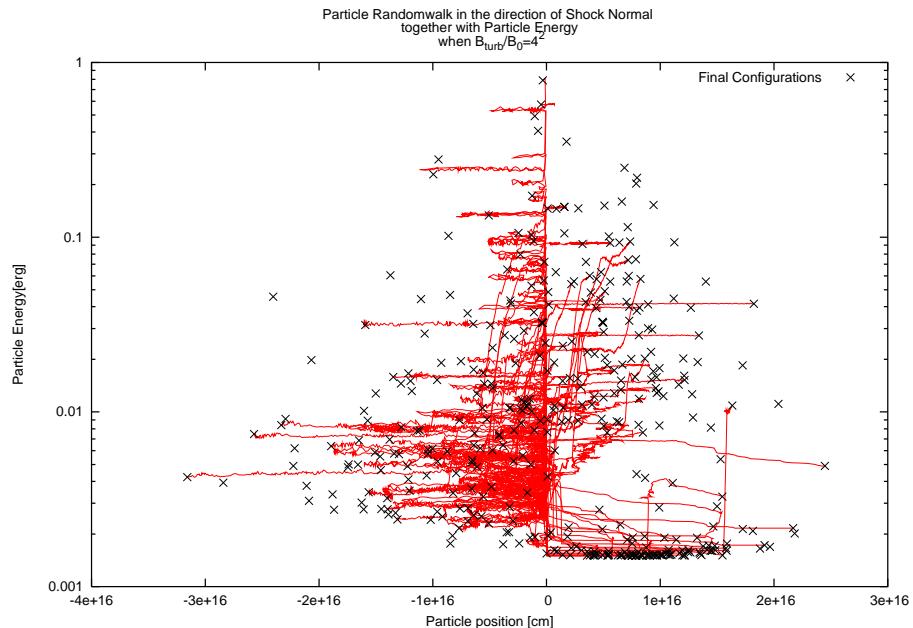


図 86: z 座標とエネルギーの関係: $J = 4, \eta = 4^2$

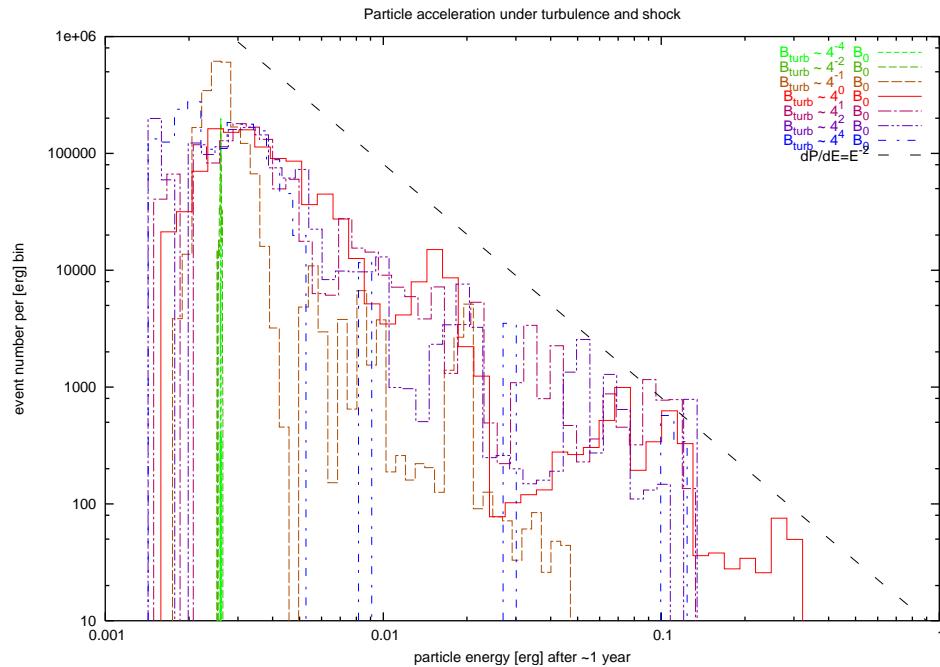


横軸：粒子の衝撃波法線方向の座標 (z 軸)、下流方向が正値。縦軸：粒子のエネルギー (対数)。 \times 印は最終的な配置。圧縮率 $J = 2$ の場合 (上図) では乱流内の加速が、 $J = 4$ (下図) では衝撃波加速が優勢である。

12.3.7 乱流のスペクトルを Goldreich-Sridhar 的にした場合

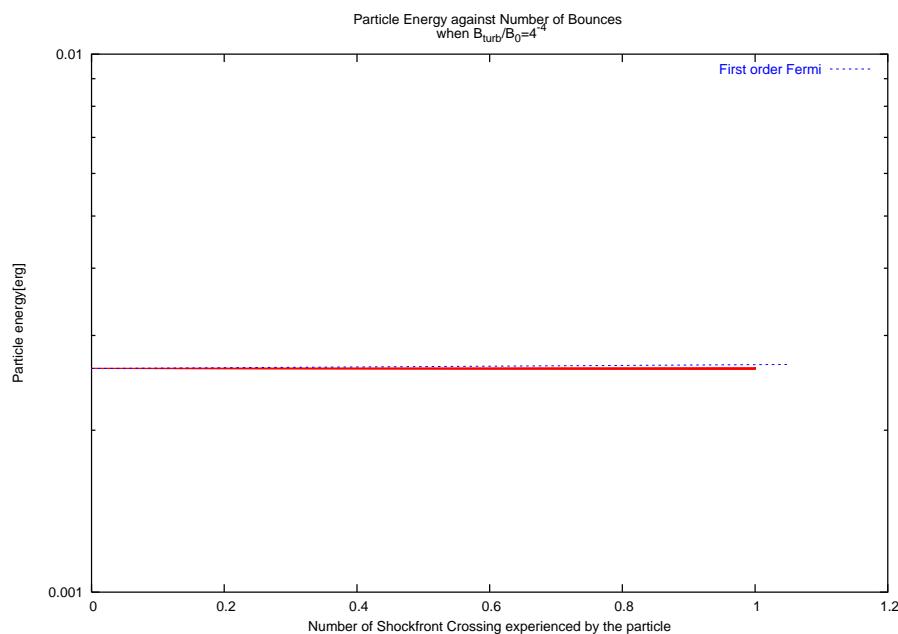
12.3.2 のパラメータを元に、スペクトルを Kolmogorov 的：式 (50) から Goldreich-Sridhar 的：式 (53) に変えて実験を開始している。残念ながらまだ十分な数のデータが集まっていないが、スペクトルの幕は逆二乗に近いように思われ、また Fermi 加速の兆候もみられる。

図 87: 粒子のエネルギースペクトル



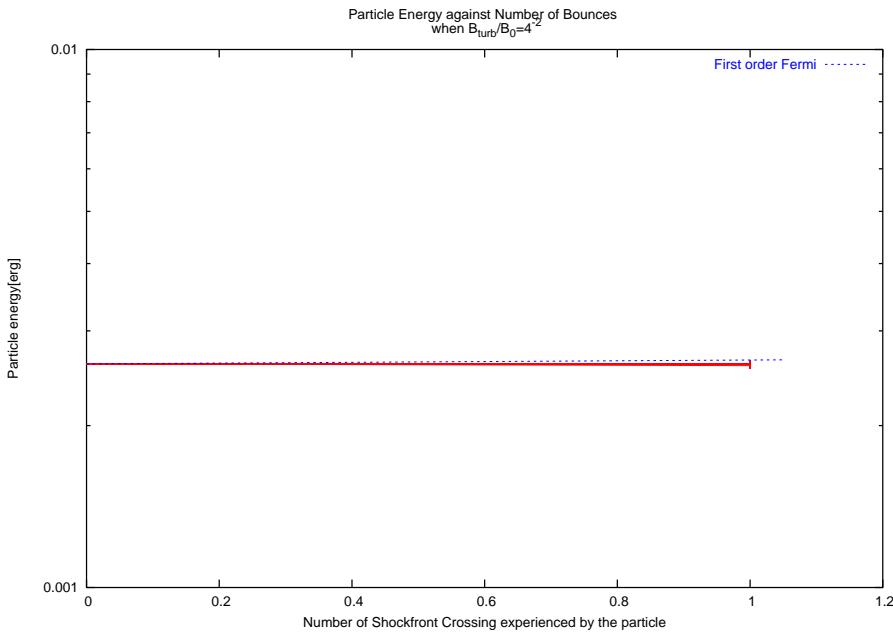
越境-エネルギー関係 乱流強度パラメータ η ごとに、粒子が衝撃波を横切った回数 N と、粒子のエネルギー E の関係をプロットしたものである。乱流のスペクトルが Kolmogorov 的だった場合にくらべ、短波長領域での乱流のエネルギーは小さくなっているため、加速はより起こりにくくなっているようである。

図 88: 越境回数とエネルギー : $\eta = 4^{-4}$



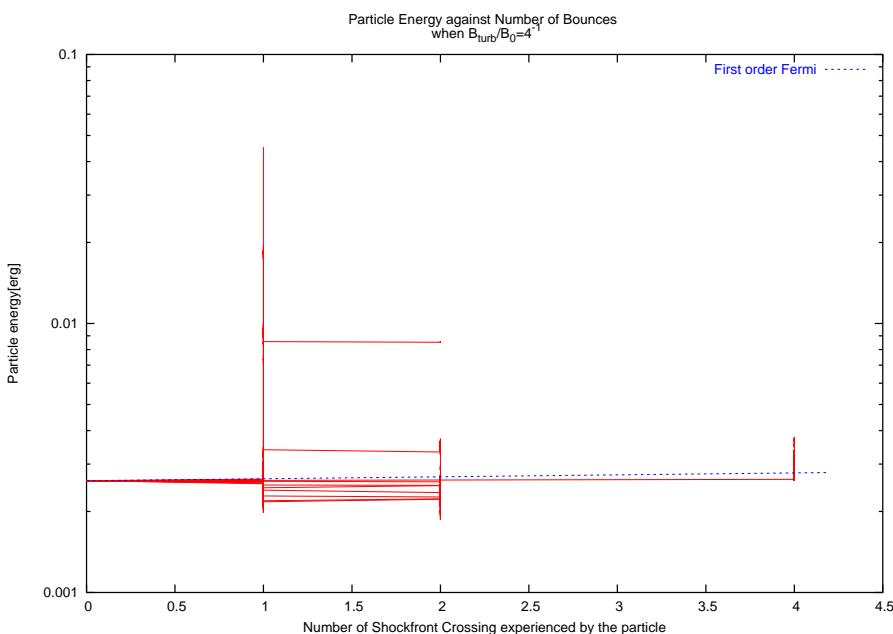
横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 89: 越境回数とエネルギー : $\eta = 4^{-2}$



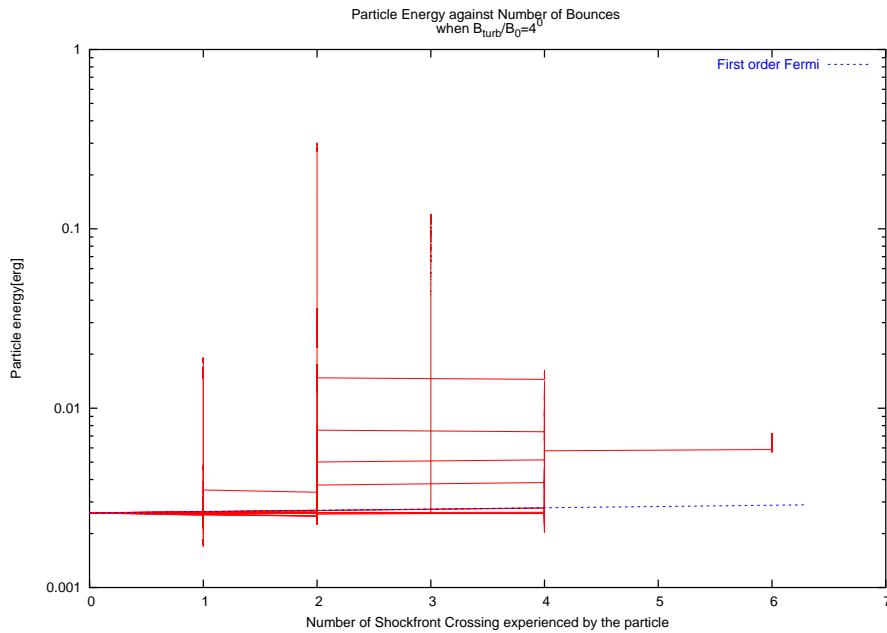
横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 90: 越境回数とエネルギー : $\eta = 4^{-1}$



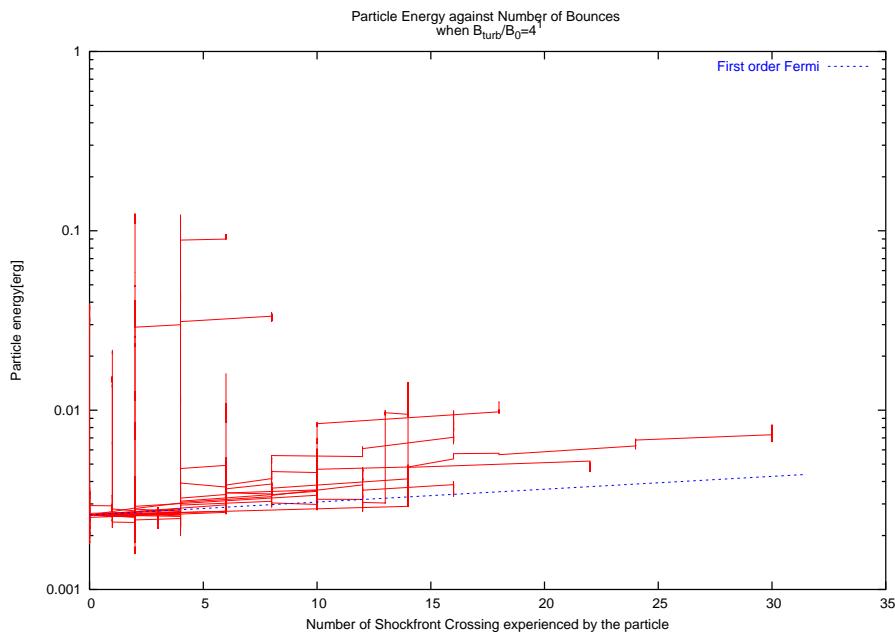
横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 91: 越境回数とエネルギー : $\eta = 4^0$



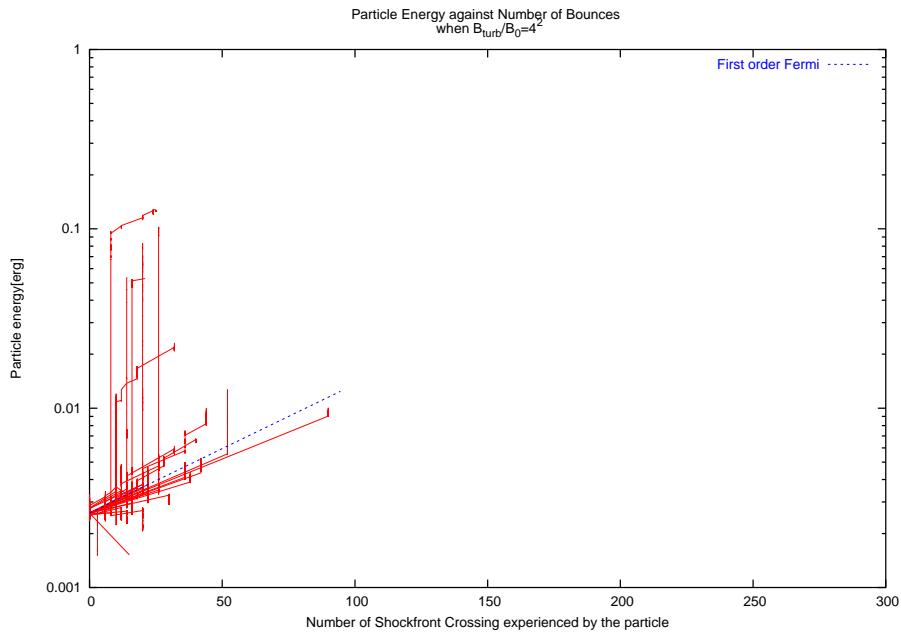
横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 92: 越境回数とエネルギー : $\eta = 4^1$



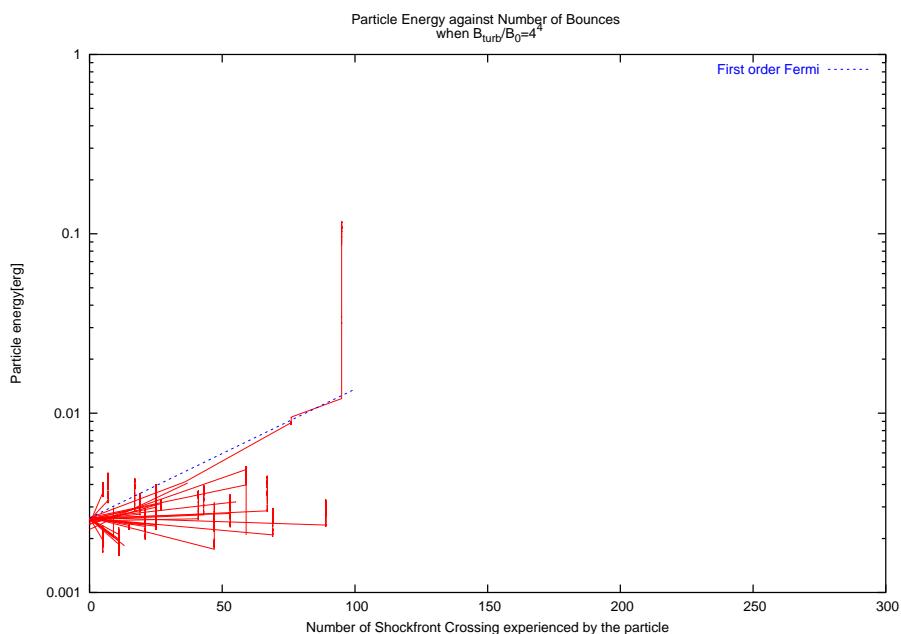
横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

図 93: 越境回数とエネルギー : $\eta = 4^2$



横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

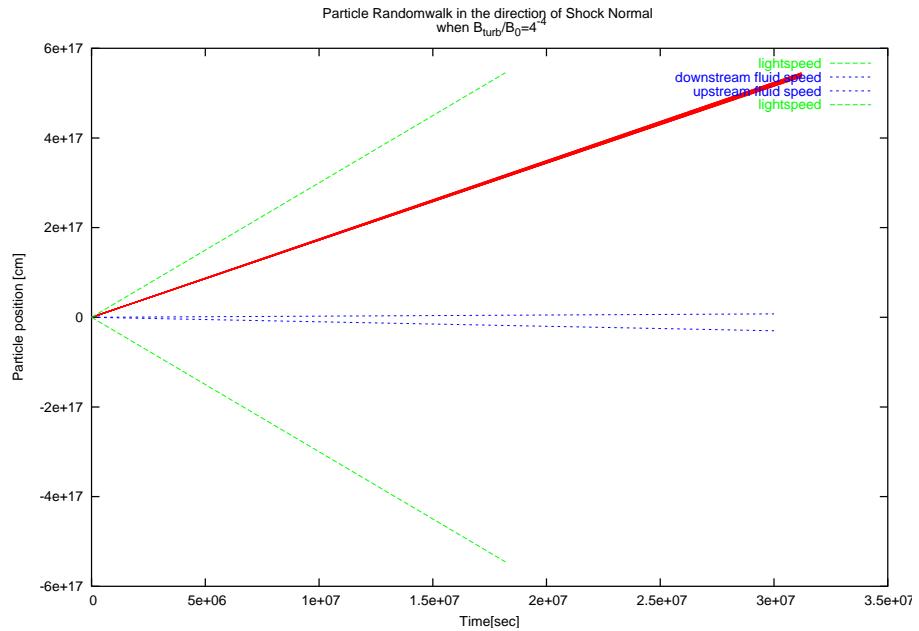
図 94: 越境回数とエネルギー : $\eta = 4^4$



横軸：粒子が衝撃波を横切った回数 N と、縦軸：粒子のエネルギー E の関係。縦軸は対数。青い点線は、1 次 Fermi 加速モデルが導く理論上の加速効率 $E(N) \propto (1 + h)^N$ 。

衝撃波面に垂直な方向のランダムウォーク 次の図は乱流強度 η ごとに、各粒子の z 座標(衝撃波面に垂直な方向の位置)の時間発展をプロットしたものである。

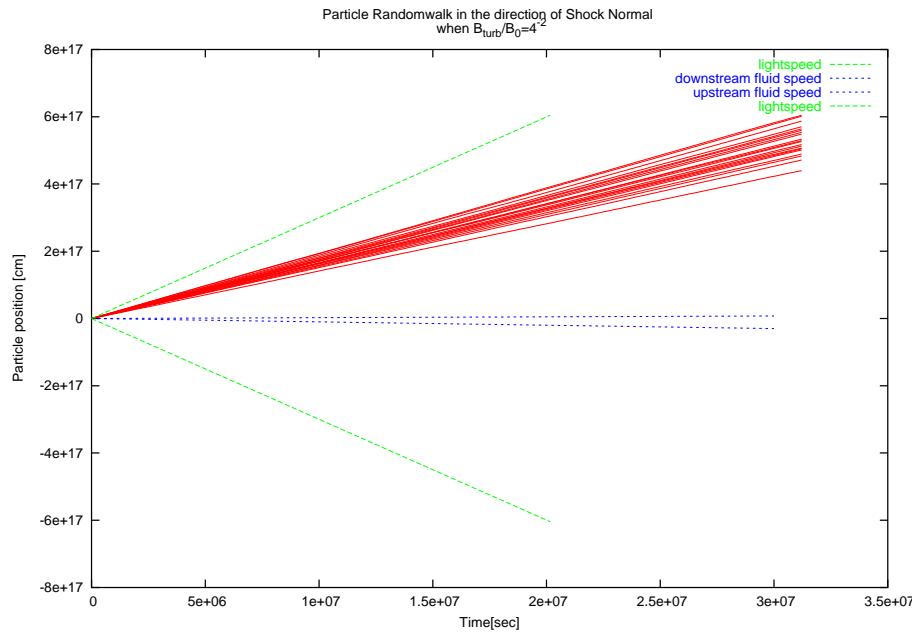
図 95: z (衝撃波に垂直) 方向の粒子の運動 : $\eta = 4^{-4}$



横軸：時刻、縦軸： z 座標。

傾きの急な黄緑の点線は光速。傾きのゆるい青い点線は上流/下流の流体速度。

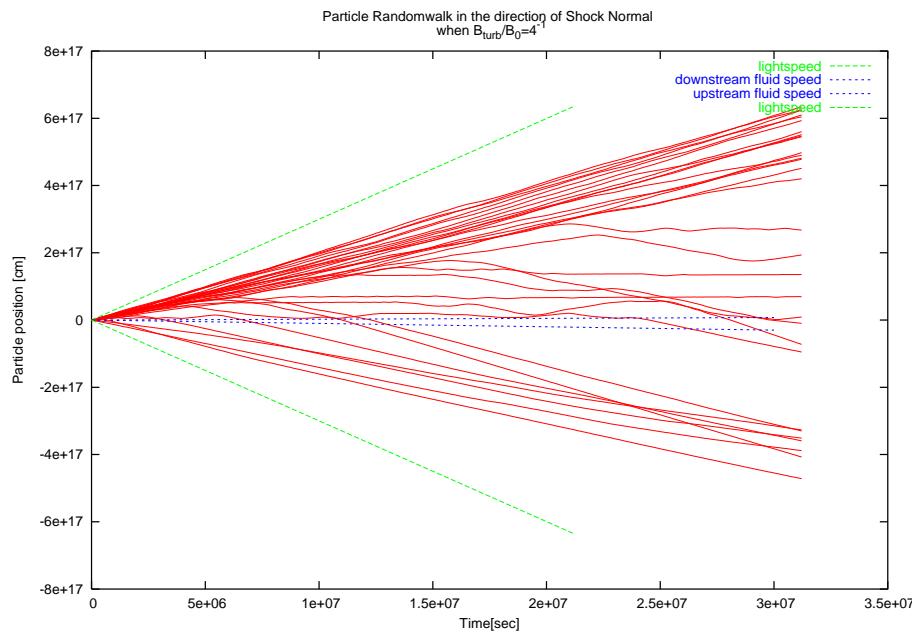
図 96: z (衝撃波に垂直) 方向の粒子の運動 : $\eta = 4^{-2}$



横軸：時刻、縦軸： z 座標。

傾きの急な黄緑の点線は光速。傾きのゆるい青い点線は上流/下流の流体速度。

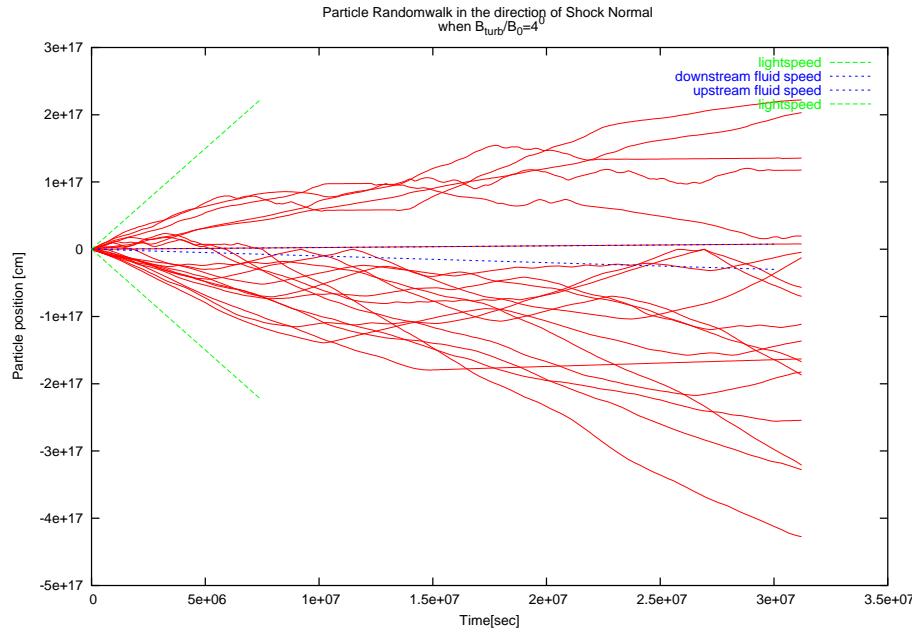
図 97: z (衝撃波に垂直) 方向の粒子の運動 : $\eta = 4^{-1}$



横軸：時刻、縦軸： z 座標。

傾きの急な黄緑の点線は光速。傾きのゆるい青い点線は上流/下流の流体速度。

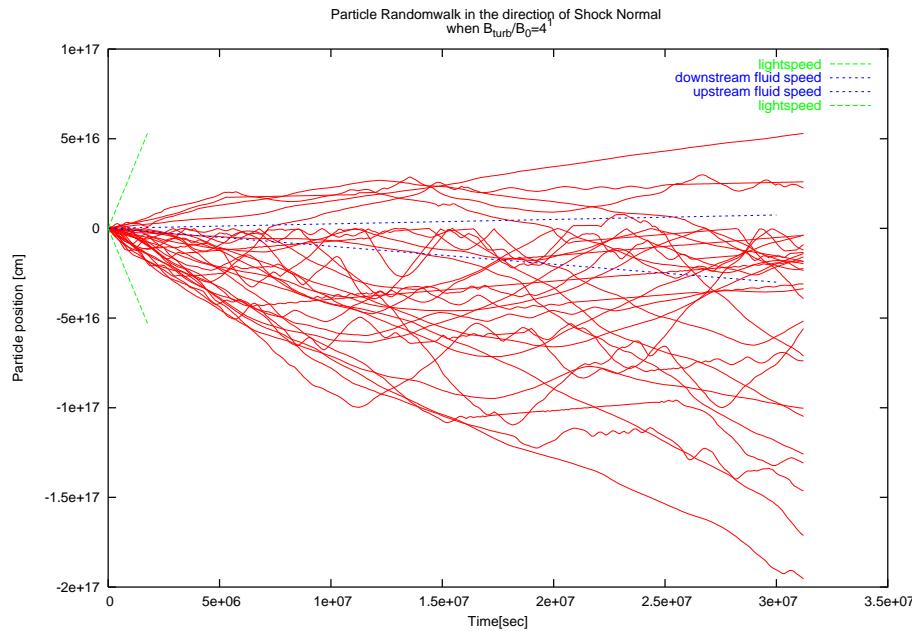
図 98: z (衝撃波に垂直) 方向の粒子の運動 : $\eta = 4^0$



横軸：時刻、縦軸： z 座標。

傾きの急な黄緑の点線は光速。傾きのゆるい青い点線は上流/下流の流体速度。

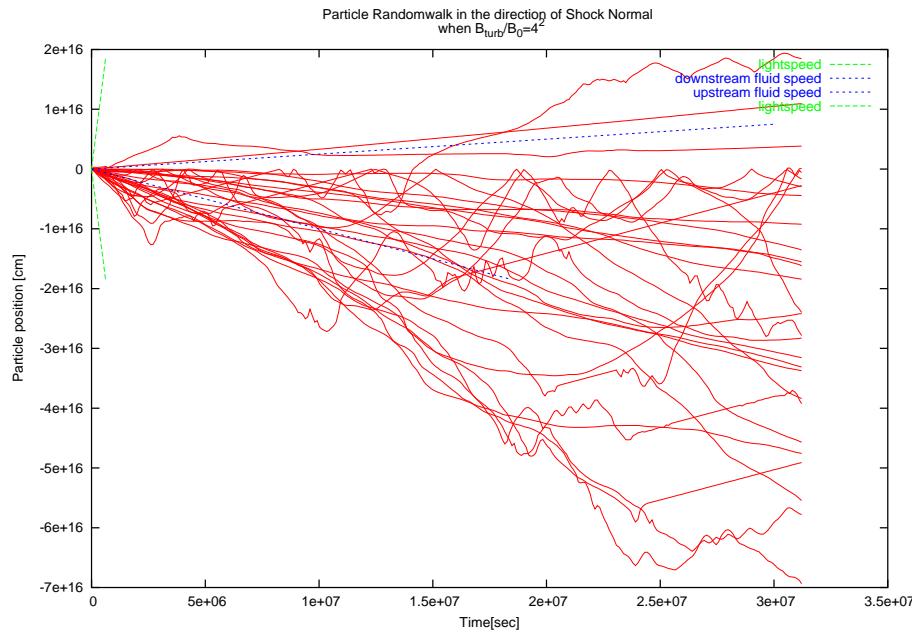
図 99: z (衝撃波に垂直) 方向の粒子の運動 : $\eta = 4^1$



横軸：時刻、縦軸： z 座標。

傾きの急な黄緑の点線は光速。傾きのゆるい青い点線は上流/下流の流体速度。

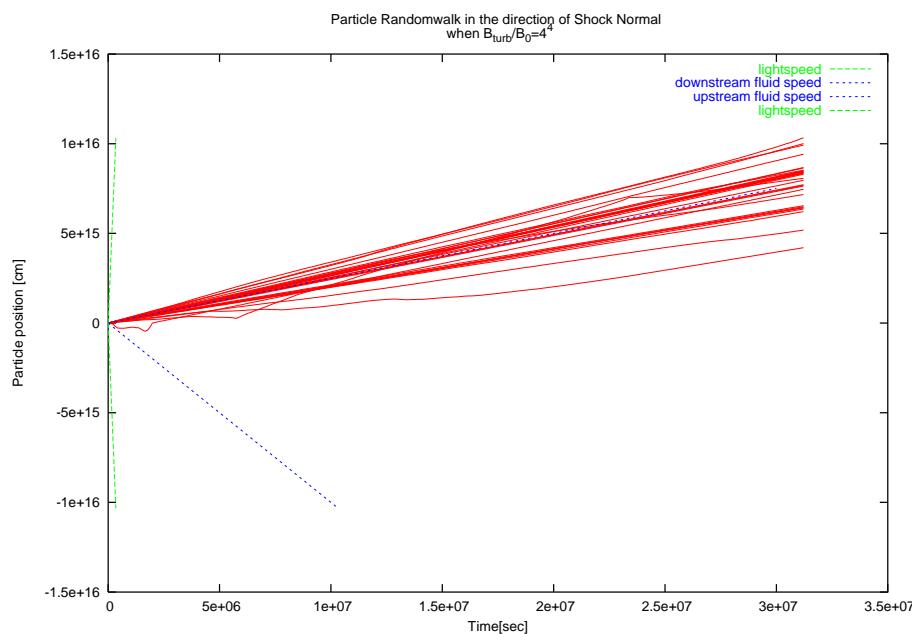
図 100: z (衝撃波に垂直) 方向の粒子の運動 : $\eta = 4^2$



横軸：時刻、縦軸： z 座標。

傾きの急な黄緑の点線は光速。傾きのゆるい青い点線は上流/下流の流体速度。

図 101: z (衝撃波に垂直) 方向の粒子の運動 : $\eta = 4^4$

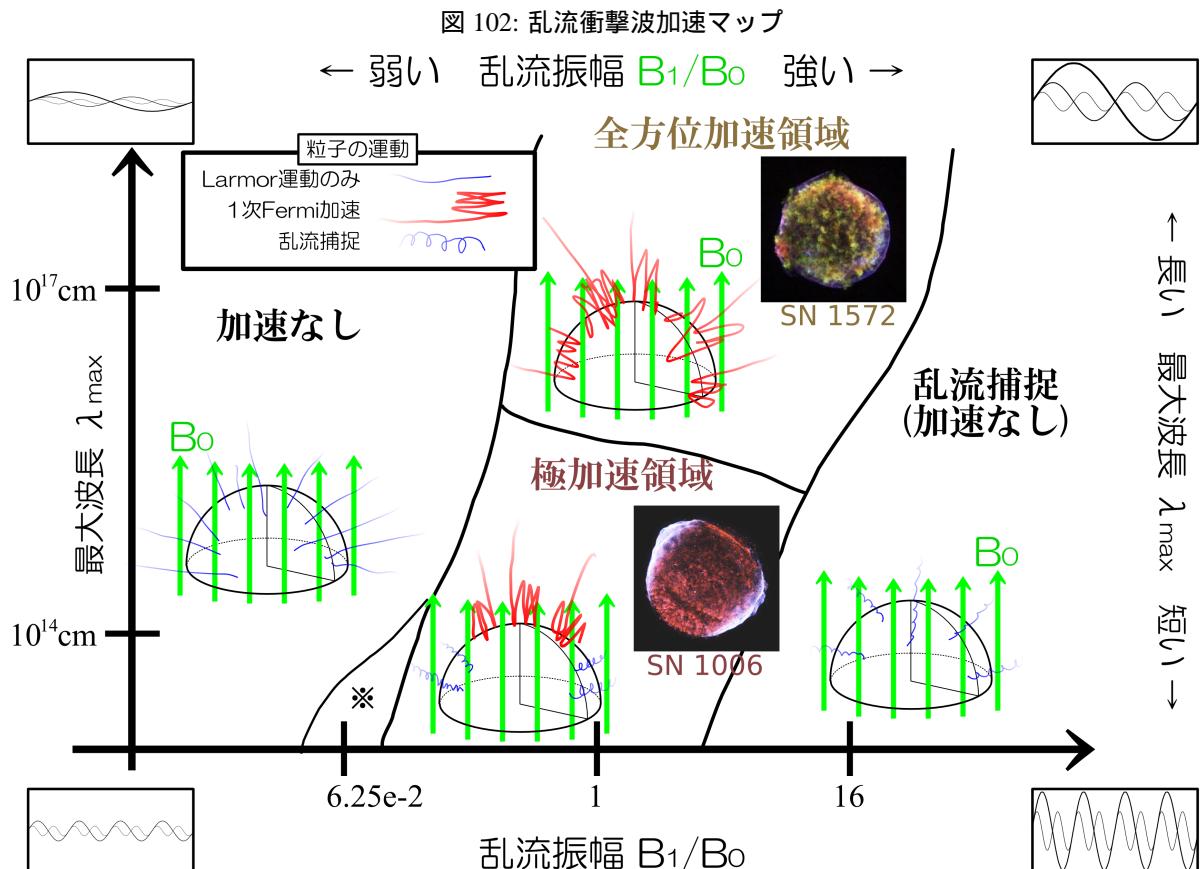


横軸：時刻、縦軸： z 座標。

傾きの急な黄緑の点線は光速。傾きのゆるい青い点線は上流/下流の流体速度。

13 結論・乱流衝撃波加速の理解

今回、パラメータ空間の中で重要と思われる箇所の探索を順に行うことでの、次のような概観を得ることができた。は今まで知られていなかった事項である。



図の()はあとで解説する赤道加速領域

乱流振幅 $\eta = B_1/B_0$ と乱流の最大波長 λ_{max} が、乱流衝撃波加速の様相を決定する 2 つの主要な変数である。

無加速領域 η が小さいときは、乱流が粒子を散乱するには弱すぎるため、粒子は Larmor 回転しつづけるだけであり、Fermi 加速機構は機能しない(12.3.2 節等)。

極加速領域 乱流が短波長のものしかない場合は、背景磁場と衝撃波面法線が平行($\theta \sim 0$)であるときしか加速効率がよくない(12.3.5 節)。これは、極領域では宇宙線は磁力線の周りを Larmor 回転しながら、衝撃波面を Pitch Angle Scattering により比較的自由に往復することができるのに対し、赤道領域では宇宙線は Larmor 回転により磁力線に捕捉されて短期間のうちに衝撃波面を離れてしまうからである。

この結果、超新星残骸の衝撃波面が背景磁場の方向と一致する両極側に、弧状の宇宙線加速領域ができる。これは、SN1006 の観測と、向きも含めて整合している。

ただし、衝撃波法線と磁場が一致するとき最も加速効率がよいことは、既存の Diffusive Shock Acceleration の研究の中でも仮定されてきたことである。

全方位加速領域 乱流が長波長まである場合は、長波長モードが背景磁場の役割をするので、背景磁場がどんな向きであっても効率よく加速される (12.3.3 節)。Kolmogorov or G.S. スペクトルを仮定すると、長波長モードほど振幅が大きいので、 λ_{max} が大きい場合ほど、同一の η 、同一の k に対する振幅は小さい。このため、加速されはじめた頃の粒子と共に鳴るようなより短波長のモードが十分な強さであるためには、乱流強度は極加速領域の場合より大きいことが必要である (12.3.4, 12.3.5 節)。

このような天体は、電子シンクロトロン放射光で等方的に輝き、なおかつ乱流の痕跡が多い超新星残骸として観測される。

乱流捕捉 η が極端に大きい場合は、ほとんどの粒子が乱流によって流体と同じ速度で運動させられる (12.3.2 節等)。この結果、粒子たちはすぐに衝撃波面から引き離されてしまい、Fermi 加速はおこらない。

赤道加速領域 η がとても小さく、Pitch angle scattering が不可能なほど乱流が弱い場合、背景磁場によるラーモア回転を利用して、ごく一部の粒子が衝撃波面を往復し、エネルギーを獲得する (12.3.5 節)。この場合、背景磁場は、SN 1006 の場合とは逆に $\theta = 90$ 度近くのほうが効率がよい。といっても加速される粒子の割合はわずかで、対応する天体が存在しそうかは疑問である。

他のパラメータに対する依存性 さらに $J = v_{up}/v_{down}$ に対する依存性は従来考えられていたものとは異なる (12.3.6 節)。乱流スペクトルの幕依存性も研究中である。

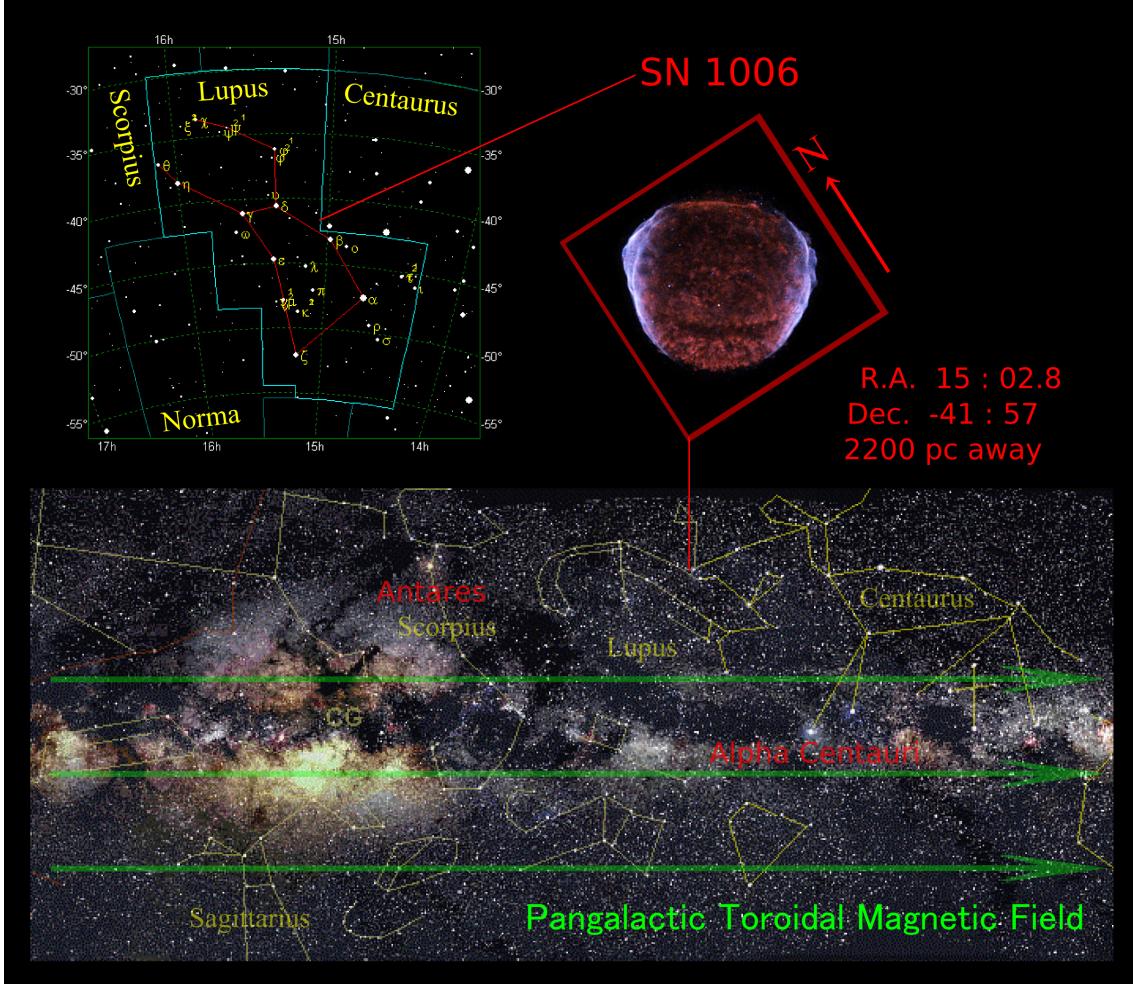
2 次加速 本実験においては、12.3.2 節で見られるように、Fermi 1 次加速と Fermi 2 次加速がともに有効であることが観察された。

これらの発見により Fermi 加速の理解は刷新された。今後はより豊富な計算資源をもって網羅的なパラメータサーチを行い、詳細なマップを得たい。

13.1 SN 1006 の形状の説明

SN 1006 は (J2000)RA 15h 04m 10.01s, Dec -41° 53' 44.88"、太陽系からの距離およそ 2200pc、おおかみ座に位置する超新星残骸であり、keV X 線領域では電子シンクロトロン輻射由来と思われる 1 対の弧状の構造が観測されている。SN 1006 は、銀河赤道面からおよそ 500pc—つまり星形成領域の厚みの 10 倍程度離れた、比較的静かな領域に位置する。

図 103: SN1006 の天球内的位置および方向



SN 1006 付近の磁場の詳細が観測されたことはないが、それを予測することはできる：一般に、銀河赤道面には MRI を通じて大局的なトロイダル磁場が形成されることが、系外銀河 [16] および天の川銀河の観測 [13] から知られており、またシミュレーション [9] によっても理解されている。SN 1006 付近の背景磁場も、この大局的なトロイダル磁場の影響下にあり、銀河赤道面に平行な方向を向いているものと思われる。

また、主に銀河赤道面上に分布するさまざまな擾乱源から離れていること、また SN 1006 自身がほぼ球形を保っていることから、SN 1006 付近には大きなスケールの乱流はないものと思われる。

本理論(とくに 12.3.5 節)はこのように、乱流の最大波長が小さい場合、超新星残骸の極領域(磁場と衝撃波法線が平行になる 2 つの弧状領域)で粒子加速が盛んに起こるだろうと予測する。これは SN 1006 の観測と一致している。

第V部

発展

本研究は Boltzmann 空間シミュレータを開発するためのテスト計算から派生したものである。そこで以下に、プラズマ運動論の概要を述べる。

14 プラズマ運動論

14.1 プラズマの運動論方程式および保存則

14.1.1 Boltzmann 方程式の基本形

熱平衡にない粒子の速度分布を表現したい時には分布関数 $f(x, v)$ を使う。通常プラズマは複数種の粒子から成ると考えるので、粒子の種類のラベル s ごとの分布関数 $f_s(x, v)$ を考えることになる。

分布関数の定義は次の通り：位置が $[x \dots x + d^3]$ 、速度が $[v \dots v + d^3]$ の範囲にある種族 s の粒子の数が $f_s(x, v) d^3 d^3$ 。

分布関数の運動方程式を Boltzmann 方程式と言い、Collision を考えなければ次の形を取る。

$$f_s(t + dt, \mathbf{r} + \mathbf{v}dt, \mathbf{v} + \mathbf{F}_s dt) = 0 \quad (81)$$

ここで $\mathbf{F}_s(t, x, v)$ は位置 x において速度 v にある種族 s 粒子にはたらく加速度である。

これを Euler 描像に直すと

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}_s(t, x, v) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (82)$$

となる。

Vlasov 方程式 さて粒子に及ぼされる力 \mathbf{F}_s を電磁気力であるとしよう。このような Boltzmann 方程式を Vlasov 方程式という。

この力 \mathbf{F} を静電気的に与えて得られる方程式を Vlasov-Poisson 方程式と呼ぶ。一方力 \mathbf{F} をローレンツ力で与えられるとして、電磁場の時間発展を Maxwell 方程式にしたがって解く場合を Vlasov-Maxwell 方程式と呼ぶ。

種類 s ごとに粒子たちが持つ素電荷 q_s および素電流 vq_s を足し合わせることで、媒質全体の電荷密度 ρ と電流密度 \mathbf{j} は、

$$\begin{cases} \rho(t, \mathbf{r}) = \sum_s q_s \int d^3 f_s(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \\ \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \sum_s q_s \int d^3 \mathbf{v} f_s(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \end{cases} \quad (83)$$

のように与えられる。

Vlasov-Maxwell 描像では、これらの電荷密度 ρ と電流密度 \mathbf{j} から Maxwell 方程式にしたがって電磁場が生じ、

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (84)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} \quad (85)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (86)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (87)$$

この電磁場がローレンツ力

$$\mathbf{F}_s(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{q_s}{m_s} \left(\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) \right) \quad (88)$$

によって粒子たちを駆動する。

Vlasov-Poisson 描像の場合、方程式セットはより単純になる。すなわち電荷密度 ρ から Poisson 方程式にしたがって電場が生じ、

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (89)$$

この電磁場が静電力により荷電粒子を加速する。

$$\mathbf{F}_s(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{q_s}{m_s} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \quad (90)$$

14.1.2 連続の式およびエントロピーの保存

力 (88) がローレンツ力であり、Collision が無いことから、流線に沿って f が保存するという重要な結果を得ることができる。以下にこれを 3 つの観点から述べる。

分布関数の保存

1 まず、分布関数の値の保存は、Vlasov 方程式を 6 次元の移流方程式としてみた場合、「速度ベクトル」の発散が無いことに対応している。つまり

$$\begin{aligned} \nabla_6 Flux_6 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{F} \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\mathbf{E}(x) + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (91)$$

が成り立っている。

2 このため、移流方程式である Boltzmann 方程式は、本来

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\mathbf{v}f) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{F}f) = 0 \quad (92)$$

とならなければならないところを、

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (93)$$

となっていたのである。これは Lagrange 描像で言うなら、一言で

$$\frac{Df}{Dt} = 0 \quad (94)$$

と書ける。

3 さらに、流体要素の6次元的体積 $d\vec{d}^3$ が保存している、

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{Dt} (d\vec{d}^3) &= \frac{D\vec{d}^3}{Dt} d\vec{d}^3 + d\vec{d}^3 \frac{D\vec{d}^3}{Dt} \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{D\mathbf{r}}{Dt} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) d\vec{d}^3 \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{F} \right) d\vec{d}^3 \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{95}$$

とも言える。

分布関数の関数の保存 f が保存することに加えて、さらに単種粒子の分布関数の任意の関数

$$\beta(f_s(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})) \tag{96}$$

や、その和

$$\sum_s \beta_s(f_s(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})) \tag{97}$$

が保存する、つまり

$$\frac{d}{dt} \int d\vec{d}^3 \sum_s \beta_s(f_s(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})) = 0 \tag{98}$$

であることが言える。ただし、分布関数たちの任意の関数

$$\beta(f_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}), f_2(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}), \dots) \tag{99}$$

が保存するわけではない。

ラグランジュ描像による証明

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d}{dt} \beta d\vec{d}^3 &= \int \frac{D}{Dt} (\beta d\vec{d}^3) \\
 &= \int \frac{\partial \beta}{\partial f} \underbrace{\frac{Df}{Dt}}_{\text{式 (91) より } 0} d\vec{d}^3 + \int \beta \underbrace{\frac{D}{Dt}(d\vec{d}^3)}_{\text{式 (95) より } 0} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

オイラー描像による証明

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int \beta(f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})) d\vec{d}^3 &= \int d\vec{d}^3 \frac{\partial \beta}{\partial t} \\
 &\quad \text{積分すれば } 0 \text{ になる表面項を加算} \\
 &= \int d\vec{d}^3 \frac{\partial \beta}{\partial t} + \overbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{v}\beta) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{F}\beta)}^{\text{第 1 項}} \\
 &= \int d\vec{d}^3 \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial v} \cdot \mathbf{F} \right)}_{\text{第 1 項}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\beta + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\beta + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\beta}_{\text{第 2 項}}
 \end{aligned}$$

である、ここで第1項は Boltzmann 方程式の移流項に発散がないこと:式 (91) により 0 になる。

第 2 項は、 β の時間・空間変化はすべて f を通じていることを踏まえて

$$\begin{aligned}\text{(第 2 項)} &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right) \frac{\partial \beta}{\partial f} \\ &= 0\end{aligned}$$

と 0 になる。

このように、オイラー描像の連続の式 (98) が言えた。

エントロピーの保存 上の定理で $\beta_s(f_s) = f_s \log f_s$ とすることにより、 $S = \sum_s \beta_s(f_s) = \sum_s f_s \log f_s$ が時間の定数であることが言える。この S はエントロピーに他ならない。

14.1.3 運動量の保存

目的

$$\frac{d}{dt} \left[\underbrace{\sum_s \int d^3v dm_s v f_s}_{\text{粒子の持つ運動量}} + \underbrace{\int d^3k \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{B}}_{\text{電磁場の持つ運動量}} \right] = 0 \quad (100)$$

を示せ。

証明

1) 粒子の持つ運動量 粒子の持つ運動量について、Boltzmann 方程式を使うと次のことが言える。

$$\sum_s \int d^3v dm_s v \underbrace{\left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{\text{第1項}} + \mathbf{v} \cdot \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}}_{\text{第2項}} + \underbrace{\frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}}}_{\text{第3項}} \right)}_{\text{Boltzmann 方程式より } 0} = 0$$

第1項は粒子の持つ運動量の形になっている。

第2項は x 方向の発散項なので積分すれば 0 になる。

第3項は次のように変形する。

$$(\text{第3項})_i = \sum_s \int d^3v dm_i \left(\frac{q_s}{m_s} E_j + \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)_j \right) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}}$$

これを $\frac{\partial}{\partial v_j}$ で部分積分すると

$$= - \sum_s \int d^3v q_s \frac{\partial}{\partial v_j} \left\{ \underbrace{v_i}_{(1)} \underbrace{\left(E_j + \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)_j \right)}_{(2)} \right\} f_s$$

ここで $\frac{\partial}{\partial v_j}$ の微分を実行すると、(1)の項は δ_{ij} を生む。(2)の項は表面項に帰着され、消滅する。したがって

$$= - \sum_s \int d^3v q_s \left((E_i + (\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B})_i) \right) f$$

s に関する和と v 積分を実行すると、電荷密度と電流密度の定義より

$$(\text{第3項}) = - \int d^3v (\rho \mathbf{E} + (\frac{\mathbf{j}}{c} \times \mathbf{B}))$$

になる。この通り、粒子が得る運動量はローレンツ力である。

2) 電磁場の持つ運動量 一方電磁場の持つ運動量は次のように変形される。

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \overbrace{\int d^3 \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{B}}^{\text{電磁場の持つ運動量}} = \int d^3 \frac{1}{4\pi c} \overbrace{\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}^{\text{時間微分を分配}} \\
& = \int d^3 \left(\overbrace{\frac{1}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{j}}{c}}^{\text{マクスウェル方程式より}} \right) \times \mathbf{B} + \overbrace{\left(\frac{1}{4\pi} \nabla \times \mathbf{E} \right)}^{\text{同じく}} \times \mathbf{E} \\
& = - \int dx \frac{\mathbf{j}}{c} \times \mathbf{B} + \int dx \frac{1}{4\pi} \underbrace{\left((\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla |B|^2 \right)}_{\substack{\text{ベクトル公式による変形} \\ \text{発散の積分で } 0}} \\
& + \int dx \frac{1}{4\pi} \underbrace{\left((\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} - \frac{1}{2} \nabla |E|^2 \right)}_{\substack{\text{ベクトル公式による変形} \\ \text{発散の積分で } 0}} \\
& = - \int dx \frac{\mathbf{j}}{c} \times \mathbf{B} \\
& - \int d^3 \frac{1}{4\pi} \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}}_{=0} - \int d^3 \frac{1}{4\pi} \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}}_{=4\pi\rho} \\
& = - \int dx \rho \mathbf{E} + \frac{\mathbf{j}}{c} \times \mathbf{B}
\end{aligned}$$

この通り、電磁場の失う運動量はローレンツ力であり、先の式 (101) の第 3 項に一致するから、そこへ代入すると Maxwell-Boltzmann システムの運動量保存則: 式 (100) を得る。

14.1.4 エネルギーの保存

目的 $\frac{d}{dt} \left[\sum_s \left\{ \int d^3 \frac{1}{2} m_s |\mathbf{v}|^2 f_s \right\} + \int d^3 \frac{1}{8\pi} (|E|^2 + |B|^2) \right] = 0$ って言え。

証明 上の式

$$\frac{d}{dt} (\text{全エネルギー}) = \frac{d}{dt} \left[\underbrace{\sum_s \left\{ \int d^3 \frac{1}{2} m_s |\mathbf{v}|^2 f_s \right\}}_{\text{粒子項}} + \underbrace{\int d^3 \frac{1}{8\pi} (|E|^2 + |B|^2)}_{\text{電磁場項}} \right]$$

のうち、(粒子項) の中で時間微分をもつのは分布関数 f だけであるから、(粒子項) の時間微分は

$$\frac{d}{dt} (\text{粒子項}) = \sum_s \left\{ \int d^3 \frac{1}{2} m_s |\mathbf{v}|^2 \frac{\partial f_s}{\partial t} \right\}$$

である。一方(電磁場項)の時間微分は次のように計算される。

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(\text{電磁場項}) &= \left\{ \int d^3 \frac{1}{8\pi} \frac{d}{dt} (|E|^2 + |B|^2) \right\} \\
 &= \int d^3 \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int d^3 (\mathbf{E} \cdot (c \nabla \times \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{j}) + \mathbf{B} \cdot (-c \nabla \times \mathbf{E})) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int d^3 \underbrace{\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E})}_{\substack{\text{にベクトル公式} \\ \rightarrow \text{発散項なので } 0}} - 4\pi \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}
 \end{aligned}$$

ここで電流 \mathbf{j} を定義式 (83) にしたがって分布関数で表すと、

$$\begin{aligned}
 (\text{電磁場項}) &= - \int d^3 \mathbf{E} \cdot \overbrace{\left(\sum_s \int d^3 q_s \mathbf{v} f_s(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \right)}^{j \text{ の定義}} \\
 &= \sum_s \int d^3 d^3 q_s \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} f_s
 \end{aligned}$$

になる。ここで、 $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0$ なので、 \mathbf{E} を $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ で置き換えるても良い。磁場は仕事をしないので、このようなトリックをもってエネルギー方程式に登場させる必要がある。さらに、 \mathbf{v} を $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} |\mathbf{v}|^2$ で置き換えると、

$$\begin{aligned}
 (\text{電磁場項}) &= - \sum_s \int d^3 d^3 q_s (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} |\mathbf{v}|^2 \right) f_s \\
 &= \sum_s \int d^3 d^3 q_s (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) \widehat{\frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}}}^{\text{部分積分}}
 \end{aligned}$$

となった。以上の変形より、

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(\text{全エネルギー}) &= \sum_s \int d^3 d^3 \left[\underbrace{\frac{1}{2} m_s |\mathbf{v}|^2 \frac{\partial f_s}{\partial t}}_{\text{粒子項}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_s |\mathbf{v}|^2 \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}}}_{\text{電磁場項}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_s |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}}_{0 \text{ に等しい } \mathbf{r} \text{ の発散項}} \right] \\
 &= \sum_s \int d^3 d^3 \frac{1}{2} m_s |\mathbf{v}|^2 \underbrace{\left(\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}} \right)}_{Boltzmann \text{ 方程式より } = 0} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

となり、エネルギー保存則が導かれる。

14.2 静電 Vlasov 方程式からの静電流体方程式およびプラズマ振動数の導出

運動論からプラズマ振動数を導出しよう。

14.2.1 方程式セット

空間 1 次元系を考える。

イオンは重いので、一様に分布・静止していると近似して、電子のみの運動を考える。

電子の分布関数を $f(t, x, v)$ 、イオンの数密度を n_i 、電子の数密度を $n(t, x)$ 、電子とイオンを差し引きした電荷密度を $\rho_e(t, x)$ 、電場を $E(t, x)$ とすると、Vlasov 方程式セットは次のように書ける。

$$f(t + dt, x + vdt, v - \frac{e}{m_e} Edt) = f(t, x, v) \quad \text{粒子の運動} \quad (101)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x}(t, x) = 4\pi\rho_e(t, x) \quad \text{電場の発生} \quad (102)$$

$$\rho_e(t, x) = -e(n(t, x) - n_i) \quad \text{電荷密度の定義} \quad (103)$$

$$n(t, x) = \int f(t, x, v)dv \quad \text{粒子数の定義} \quad (104)$$

ここで次のように正規化を行えば、

$$\bullet \rho_e \rightarrow -e\rho_e$$

$$\bullet E \rightarrow -\frac{m_e}{e}E$$

$$\bullet \epsilon \equiv \frac{4\pi e^2}{m_e}$$

これら Vlasov 方程式はただ 1 つの結合定数 ϵ を用いて

$$f(t + dt, x + vdt, v + E dt) = f(t, x, v) \quad (105)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x}(t, x) = \epsilon\rho_e(t, x) \quad (106)$$

$$\rho_e(t, x) = n(t, x) - n_i \quad (107)$$

$$n(t, x) = \int f(t, x, v)dv \quad (108)$$

と書くことができる。式 (105) は、オイラーディクレト法で書くと

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} + E\frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad (109)$$

となっている。

14.2.2 局所熱平衡仮定の導入

Boltzmann 方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x, v) + v\frac{\partial f}{\partial x}(t, x, v) + E\frac{\partial f}{\partial v}(t, x, v) = 0 \quad (109)$$

に登場する分布関数 f について、それが局所熱平衡分布になっていることを仮定する。これは、分布関数 f が、各位置での

- 密度: $n(t, x)$
- 流体速度: $u(t, x)$
- 热速度: $w(t, x)$

をもちいて

$$f(t, x, v) = \frac{1}{v_{th}(t, x) \sqrt{\pi}} n(t, x) \exp \left[\left(\frac{v - u(t, x)}{v_{th}(t, x)} \right)^2 \right] \quad (110)$$

と表せる、と考えることにあたる。

これにより、2次元場であった f は次の3つの1次元場へと拘束された。これに電場 E をあわせた4つの1次元場が未知数となる。

Boltzmann 方程式 (105) の両辺に v の幕をかけて v で積分することで、これらの未知変数に対する方程式を得ることができる。

これらのは、流体としての粒子数 f 、運動量 vf 、運動エネルギー $v^2 f$ の時間発展を追跡するという意味がある。

14.2.3 モーメント計算

0次のモーメント 式 (109) の辺々を v で積分する。

$$\int dv \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, x, v) + v \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, v) + E \frac{\partial f}{\partial v}(t, x, v) \right) = 0$$

v 積分の順序をなるべく中のほうに入れる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int dv f(t, x, v) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int dv v f(t, x, v) \right) + E \left(\int dv \frac{\partial f}{\partial v}(t, x, v) \right) = 0$$

Appendix を参照しながらこれらの積分を評価する。

$$\frac{\partial}{\partial t} n + \frac{\partial}{\partial x} (n u) = 0 \quad (111)$$

1次のモーメント 式 (109) の辺々に v をかけて v で積分する。

$$\int dv v \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, x, v) + v \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, v) + E \frac{\partial f}{\partial v}(t, x, v) \right) = 0$$

v 積分の順序をなるべく中のほうに入れる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int dv v f(t, x, v) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int dv v^2 f(t, x, v) \right) + E \left(\int dv v \frac{\partial f}{\partial v}(t, x, v) \right) = 0$$

Appendix を参照しながらこれらの積分を評価する。

$$\frac{\partial}{\partial t} (n u) + \frac{\partial}{\partial x} \left(n u^2 + \frac{1}{2} n v_{th}^2 \right) - n E = 0 \quad (112)$$

2次のモーメント 式(109)の辺々に v^2 をかけて v で積分する。

$$\int dv v^2 \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, x, v) + v \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, v) + E \frac{\partial f}{\partial v}(t, x, v) \right) = 0$$

v 積分の順序をなるべく中のはうに入れる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int dv v^2 f(t, x, v) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int dv v^3 f(t, x, v) \right) + E \left(\int dv v^2 \frac{\partial f}{\partial v}(t, x, v) \right) = 0$$

Appendix を参照しながらこれらの積分を評価する。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(n u^2 + \frac{1}{2} n v_{th}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(n u^3 + \frac{3}{2} n u v_{th}^2 \right) - n u E = 0 \quad (113)$$

3次以上のモーメント 3次以上のモーメントからも流体方程式が求まるけれども、実はより低次のモーメントの流体方程式で記述されてしまうため意味がない。たとえば3次のモーメントは

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(n u^2 + \frac{3}{2} n v_{th}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(n u^4 + 3 n u^2 v_{th}^2 + \frac{3}{4} n v_{th}^4 \right) \\ & - 3 n u^2 E - \frac{3}{2} n v_{th}^2 E = 0 \end{aligned} \quad (114)$$

だけれども、これは $(3u + \frac{3}{2}w^2/u) \times (112) - 2u^2 \times (111)$ になっている。

流体方程式セットの完成 これら3つのモーメント方程式(111), (112), (113)に加え、Maxwell方程式(106)がclosureとなり、4つの未知数に対し4つの方程式を与える。

$$\frac{\partial}{\partial t} n + \frac{\partial}{\partial x} (n u) = 0 \quad (111)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (n u) + \frac{\partial}{\partial x} \left(n u^2 + \frac{1}{2} n v_{th}^2 \right) - n E = 0 \quad (112)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(n u^2 + \frac{1}{2} n v_{th}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(n u^3 + \frac{3}{2} n u v_{th}^2 \right) - n u E = 0 \quad (113)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \epsilon (n - n_i) \quad (106)$$

14.2.4 方程式の線形化

4つの未知変数 n, u, v_{th}, E を次のように摂動展開する。

$$n = n_0 + n_1 \exp(-\omega t + kx) \quad (115)$$

$$u = n_1 \exp(-\omega t + kx) \quad (116)$$

$$v_{th} = v_{th0} + v_{th1} \exp(-\omega t + kx) \quad (117)$$

$$E = n_1 \exp(-\omega t + kx) \quad (118)$$

ちなみに n_0 はイオンの平均数密度 n_i に等しく、 v_{th0} は平均温度である。

4つの方程式の未知変数にこれらの形式を代入し、摂動の1次の項を取ることで、各変数の摂動の振幅位相の間の次の関係式を得る。

$$-i\omega n_1 + ik(n_0 u_1) = 0 \quad (119)$$

$$-i\omega n_0 u_1 + ik(\frac{1}{2}n_1 v_{\#0}^2 + n_0 v_{\#0} v_{\#1}) = n_0 E_1 \quad (120)$$

$$-i\omega(n_1 v_{\#0}^2 + 2n_0 v_{\#0} v_{\#1}) + \frac{3}{2}ik(n_0 v_{\#0}^2 u_1) = 0 \quad (121)$$

$$ikE_1 = \epsilon n_1 \quad (122)$$

これらを相互代入して 1 次の項を消すことで次の分散関係を得る。

$$\omega^2 = n_0 \epsilon + \frac{3}{2} v_{\#}^2 k^2 \quad (123)$$

ϵ を物理量に戻すと

$$\omega^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e} + \frac{3}{2} v_{\#}^2 k^2 \quad (124)$$

長波長極限での振動数 ω_p はプラズマ振動数と呼ばれる。これを使って分散関係を表すと

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3}{2} v_{\#}^2 k^2 \quad (125)$$

14.3 Landau 減衰

プラズマ振動の波長 k^{-1} が短くなつてデバイ波数 $\lambda_D = \sqrt{\frac{T}{4\pi e^2 m}}$ 程度になるとき、プラズマ振動は減衰し始める。たとえ無衝突系でも！

Landau 減衰を導出してみよう。

速度分布がどの位置でも一様であるような平衡状態を考え、そこからの摂動を考察する。

$$f(t, x, v) = f_0(v) + f_1(t, x, v) \quad (126)$$

俺たちの方程式セットはプラズマの運動を決める Vlasov 方程式と、プラズマの発生する電場を決める Poisson 方程式である。

なお、後に Landau 減衰を導き出すときには、複素積分の積分路が極のどちら側を通るのかが重要になる。この判定は、本質的には時間軸の方向を問うものであり、この判定に寄与する以外にはどんな影響も及ぼさないほど小さい粘性項を加えることでこの判定を実行することができる。今回は、($v \ll w/k[\text{sec}^{-1}]$) 程度の時間スケールで分布関数を熱的分布に還元しようとする次のような粘性を考える。

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{e}{m} E \frac{\partial f_0}{\partial v} + \nu(f - f_0) = 0 \quad (127)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -4\pi e \int f_1 dv \quad (128)$$

Vlasov 方程式の 1 次のパートは次のようになる。

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{e}{m} E \frac{\partial f_0}{\partial v} + \nu f_1 = \quad (129)$$

f_1 の形を次のように仮定しておく。

$$f_1(t, x, v) = f_1 f_0(v) \exp(ikx - i\omega t) \quad (130)$$

さつきの 1 次摂動式 (129) に代入する。

$$-i\omega f_1 + ikv f_1 - \frac{e}{m} E \frac{\partial f_0}{\partial v} = -\nu f_1$$

f_1 について解く。

$$f_1 = \frac{ieE}{m(\omega - kv + iv)} \frac{\partial f_0}{\partial v} \quad (131)$$

さらに Poisson 方程式 (128) も摂動形で書く。

$$ikE = -4\pi e \int f_1 dv \quad (132)$$

$$ikE = -4\pi e \int dv \underbrace{\frac{ieE}{m(\omega - kv + iv)} \frac{\partial f_0}{\partial v}}_{f_1 \text{の表式 (131) を代入}} \quad (133)$$

辺々を通分する。

$$1 = \frac{4\pi e}{k^2 m} \int dv \frac{\frac{\partial f_0}{\partial v}}{v - (\omega + iv)/k} \quad (134)$$

$f_0 = n_0 \hat{f}_0$ によって規格化した分布関数を考え、 n_0 をくくり出し、プラズマ振動数 $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_0}{m}}$ に置き換える。

$$1 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \int dv \frac{\frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v}}{v - (\omega + iv)/k} \quad (135)$$

この積分を実行しよう。積分路は複素 v 平面の実軸である。被積分関数は $v = (\omega + iv)/k$ に極を持つ。 v が正の無限小であるので、積分路を実軸上の主値積分とこの極の下側を迂回する半円積分に分割できる。

$$\left(\frac{k}{\omega_p}\right)^2 = P \underbrace{\int dv \frac{\frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v}}{v - \omega/k}}_{\text{部分積分する}} + i\pi \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v}(v := \omega/k) \quad (136)$$

$$\left(\frac{k}{\omega_p}\right)^2 = P \int dv \hat{f}_0(v)(v - \omega/k)^{-2} + i\pi \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v}(v := \omega/k) \quad (137)$$

主値積分を評価するには、 $f_0(v)$ の形が熱平衡分布； $f_0(v) = 1/v_{th} \exp\{-(v/v_{th})^2\}$ であると仮定する。すると、積分に主に貢献するのは $|v| < v_{th}$ の領域である。そこで、 $v_{th} \ll \omega/k$ だと思って $(v - \omega/k)^{-2}$ をテーラー展開する。

$$\left(\frac{k}{\omega_p}\right)^2 = P \int dv \hat{f}_0(v) \overbrace{\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 \left\{1 + \frac{2kv}{\omega} + \frac{3k^2v^2}{\omega^2} + \dots\right\}}^{\text{テーラー展開}} + i\pi \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v}(v := \omega/k) \quad (138)$$

$f_0(v) = 1/v_{th} \exp\{-(v/v_{th})^2\}$ を利用して積分を実行する。

$$\left(\frac{k}{\omega_p}\right)^2 = \frac{k^2}{\omega^2} \left\{1 + \frac{3k^2 v_{th}^2}{2\omega^2}\right\} + i\pi \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v}(v := \omega/k) \quad (139)$$

辺々を $\omega^2 \omega_p^2 / k^2$ 倍することで次の分散関係を得る。

$$\omega^2 = \left\{\omega_p^2 + \frac{3\omega_p^2}{2\omega^2} k^2 v_{th}^2\right\} + i\pi \frac{\omega^2 \omega_p^2}{k^2} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v}(v := \omega/k) \quad (140)$$

(左辺の ω を右辺の k の関数として与える式だと見てほしい、 ω について完全に解けてはいないゆえに。) たとえば、 $\omega/k \ll v_{th}$ のうちは $\omega \approx \omega_p$ かつ $\frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v}(v := \omega/k)$ は指数的に小さいので、この分散関係 (140) は

$$\omega^2 = \left\{\omega_p^2 + \frac{3}{2} k^2 v_{th}^2\right\} \quad (141)$$

前節で求めたプラズマ振動の分散関係 (125) になっている。

次に、 ω に小さい虚部があり、 $\omega = \omega_R + i\omega_I$ あるとすると、式 (140) は

$$\omega_R^2 + \underbrace{2i\omega_R \omega_I}_{\text{左辺虚部}} = \left\{\omega_p^2 + \frac{3\omega_p^2}{2\omega_R^2} k^2 v_{th}^2\right\} + \underbrace{i\pi \frac{\omega_R^2 \omega_p^2}{k^2} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v}}_{\text{右辺虚部}}(v := \omega/k) \quad (142)$$

f_0 が Gaussian 分布ならば $\frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v}(v := \omega/k)$ は負であるから、 $\omega_I < 0$ であるとわかる。

f_1 の Fourier 展開は

$$f_1(t, x, v) = f_1 f_0(v) \exp(ikx - i\omega t)$$

であったから、 $\omega_I < 0$ は減衰振動のあることを示す。

これが Landau 減衰である。

15 Appendix

f の微分

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial t} + \left(\frac{2(v-u)^2}{v_{th}^3} - \frac{1}{v_{th}} \right) \frac{\partial v_{th}}{\partial t} + \frac{2(v-u)}{v_{th}^2} \frac{\partial u}{\partial t} \right) f \quad (143)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} + \left(\frac{2(v-u)^2}{v_{th}^3} - \frac{1}{v_{th}} \right) \frac{\partial v_{th}}{\partial x} + \frac{2(v-u)}{v_{th}^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) f \quad (144)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{2(v-u)}{v_{th}^2} f \quad (145)$$

f の積分

$$\int dv f = n \quad (146)$$

$$\int dv v f = n u \quad (147)$$

$$\int dv v^2 f = n(u^2 + \frac{1}{2} v_{th}^2) \quad (148)$$

$$\int dv(v-u)f = 0 \quad (149)$$

$$\int dv(v-u)f = n \frac{1}{2} v_{th}^2 \quad (150)$$

$$\int dv v^2(v-u)f = n \frac{1}{2} u v_{th}^2 \quad (151)$$

$$\int dv(v-u)^2 f = n \frac{1}{2} v_{th}^2 \quad (152)$$

$$\int dv v(v-u)^2 f = n \frac{1}{2} u v_{th}^2 \quad (153)$$

$$\int dv v^2(v-u)^2 f = n(\frac{1}{2} u^2 v_{th}^2 + \frac{3}{4} v_{th}^4) \quad (154)$$

$$\int dv(v-u)^3 f = n(\frac{1}{2} u^3 + \frac{3}{2} u v_{th}^2) \quad (155)$$

$$\int dv v(v-u)^3 f = n(\frac{3}{2} u^2 v_{th}^2 + \frac{3}{4} v_{th}^4) \quad (156)$$

$$\int dv v^2(v-u)^3 f = n(\frac{1}{2} u^3 v_{th}^2 + \frac{9}{4} u v_{th}^4) \quad (157)$$

16 データ

17 参考文献

参考文献

- [1] Luis Anchordoqui, Thomas Paul, Stephen Reucroft, and John Swain. Ultrahigh energy cosmic rays: The state of the art before the auger observatory. *arXiv:hep-ph/0206072 v3 6 Dec 2002 http://arXiv.org/abs/hep-ph/0206072*, 2002.
- [2] W.I. Axford, E. Leer, and G. Skadron. *Proc. 15th Int. Cosmic Ray Conf. (Plovdiv)*, vol. 11 (1977), p. 132.
- [3] A. Bamba, R. Yamazaki, M. Ueno, and K. Koyama. Fine structure of the thermal and non-thermal X-rays in the SN 1006 shell. *Advances in Space Research*, 33:376–380, 2004.
- [4] Aya Bamba, Ryo Yamazaki, Masaru Ueno, and Katsuji Koyama. Small-scale structure of the sn1006 shock with chandra observations. *ApJ 589:827-837, 2003 June 1 http://www.journals.uchicago.edu/doi/abs/10.1086/374687*, 2003.
- [5] A. R. Bell and S. G. Lucek. Cosmic ray acceleration to very high energy through the non-linear amplification by cosmic rays of the seed magnetic field. *mnras*, 321:433–438, March 2001.
- [6] A.R. Bell. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 182, 147.156 (1978) 443.455.
- [7] Jungyeon Cho, A. Lazarian, and Ethan T. Vishniac. Mhd turbulence: Scaling laws and astrophysical implications. 2002.
- [8] The Pierre Auger Collaboration. Correlation of the highest-energy cosmic rays with nearby extragalactic objects. *http://www.sciencemag.org/cgi/content/short/318/5852/938*, 2007.
- [9] C. L. Dobbs and D. J. Price. Magnetic fields and the dynamics of spiral galaxies. *mrans*, 383:497–512, January 2008.
- [10] Donald C. Ellison, Matthew G. Baring, and Frank C. Jones. Nonlinear particle acceleration in oblique shocks. 1996.
- [11] Parviz Ghavamian, P. Frank Winkler, John C. Raymond, and Knox S. Long. The optical spectrum of the sn 1006 supernova remnant revisited. *The Astrophysical Journal, Volume 572, Issue 2, pp. 888-896. (ApJ Homepage)*.
- [12] P. Goldreich and S. Sridhar. Toward a theory of interstellar turbulence. ii. strong alfvénic turbulence. 1995.
- [13] C. Heiles. The Magnetic Field Near the Local Bubble. In D. Breitschwerdt, M. J. Freyberg, and J. Truemper, editors, *IAU Colloq. 166: The Local Bubble and Beyond*, volume 506 of *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, pages 229–238, 1998.
- [14] Y. Komori. Propagation of Cosmic Ray Electrons Including the Source Region I : Leaky Box Model. In *International Cosmic Ray Conference*, volume 3 of *International Cosmic Ray Conference*, pages 177–+, 2005.
- [15] S.G. Lucek and A.R. Bell. Non-linear amplification of a magnetic field driven by cosmic ray streaming. 2000.

- [16] I. Patrickeyev, A. Fletcher, R. Beck, E. Berkhuijsen, P. Frick, and C. Horellou. Anisotropic Wavelet Analysis of Spiral Arms and Magnetic Fields in the Galaxy M51. In K. T. Chyzy, K. Otmianowska-Mazur, M. Soida, and R.-J. Dettmar, editors, *The Magnetized Plasma in Galaxy Evolution*, pages 130–135, June 2005.
- [17] Yasunobu Uchiyama, Felix A. Aharonian, Takaaki Tanaka, Tadayuki Takahashi, and Yoshitomo Maeda. Extremely fast acceleration of cosmic rays in a supernova remnant. 2007.
- [18] Huirong Yan and A. Lazarian. Scattering of cosmic rays by magnetohydrodynamical interstellar turbulence. 2002.

18 謝辞

本研究は、そこから謝辞を捧げられることで以下の偉大な方々の名誉を増しうるほどの品質であるとは思われないけれども、彼らのうち一人でも欠けていれば、本研究はこの品質にすら達し得なかつたに違いない。そこで、

- 犬塚修一郎先生に：コンピューター・シミュレーションの更なる可能性を信じ、数々の不可欠な物理的洞察を下さったこと、また研究が進まないときは暖かく見守り、研究が進むときは最大限の励ましをいただくことで、現代計算機が意味のある仕事をするには必要なウェット・デバイスをつねに良い状態に保つことができたことに対して。
- 中村卓史先生に：さまざまな天文学および物理学の知見に触れられると同時に、数値計算手法に理解のある環境を用意してくださったことに対して。
- 村瀬孔太氏に：衝撃波加速についての数々の重要なアドバイスに対して。
- intel の技術者たちに：素晴らしいCPUと浮動小数点演算アクセラレータの開発に対して。
- 基礎物理学研究所へ：それらを搭載したマシンを購入し、共同利用者に解放していることに対して。
- まつもとゆきひろ氏と ruby の開発者たちへ：データ処理への強力な援助に対して。
- svn へ：分散した複数のマシンでの開発を格段に楽にするとともに、上書きと削除という年経た悪魔から解放してくれたことに対して。
- Haskell へ：テスト計算と、いくつかの作図の簡潔な記述、そして行き詰まった時の気分転換を可能にしたことに対して。

感謝の意を表明させていただきたい。

合掌