

3.1-2 3.1-4 3.2-3 3.2-5 4.3-3 4.3-6

3.1-2 取 $N > |a|$, 当 $n \geq N$ 时有 $n+a > 0$

$$\therefore \frac{(n+a)^b}{n^b} = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^b = 1$$

∴ 存在常数 n_0 , 使得对所有 $n > n_0$, 有 $\frac{1}{2} \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^b \leq \frac{3}{2}$

$$\text{即 } \frac{1}{2}n^b \leq (n+a)^b \leq \frac{3}{2}n^b$$

$$\text{不妨令 } c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{3}{2}$$

即满足存在正的常数 c_1, c_2 和 n_0 , 使所有 $n > n_0$, 有 $c_1 n^b \leq (n+a)^b \leq c_2 n^b$

$$\text{即 } (n+a)^b = \Theta(n^b)$$

3.1-4 ① $2^{n+1} = O(2^n) \quad \checkmark$

$$\because 2^{n+1} = 2 \times 2^n$$

取 $C \geq 2$, $n_0=0$, 即使得所有 $n > n_0$, 有 $0 \leq 2^{n+1} \leq C \cdot 2^n$

$$\text{即 } 2^{n+1} = O(2^n)$$

② $2^{2^n} = O(2^n) \quad \times$

要使 $2^{2^n} \leq C \cdot 2^n$, 即使 $n \leq \log_2 C$, 对于任意大的 n , 找不到这样的常数 C

3.2-3 ① $n! = o(n^n)$

由斯特林公式, $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

$$\therefore \frac{n!}{n^n} \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n}$$

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi n} e^{-n} = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0, \text{ 即 } n! = o(n^n)$$

$$\textcircled{2} \quad n! = \omega(2^n)$$

$$\textcircled{3} \quad n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\therefore \frac{n!}{2^n} = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\because n \rightarrow \infty \text{ 时 } \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \rightarrow \infty$$

$$\therefore n \rightarrow \infty \text{ 时 } \frac{n!}{2^n} \rightarrow \infty$$

$$\therefore n! = \omega(2^n)$$

$$\textcircled{3} \quad \lg(n!) = \Theta(n \lg n)$$

$$\therefore \lg(n!) \sim \lg[\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n] = \lg \sqrt{2\pi n} + n \lg \frac{n}{e}$$

$$= \Theta(\sqrt{n}) + \Theta(n \lg n)$$

$$= \Theta(n \lg n)$$

$$3.2-5 \quad \lg^*(n) = 1 + \lg^*(\lg n)$$

$\therefore t = \lg^*(n)$. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $t \rightarrow \infty$

$$\therefore f_1(n) = \lg(\lg^* n) = \lg t, f_2(n) = \lg^*(\lg n) = \lg^*(n) - 1 = t - 1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_1(n)}{f_2(n)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lg t}{t-1} = 0$$

$\therefore \lg^*(\lg n)$ 为渐近大

4.3-3 考虑递归 $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$

根结点工作量为 n , 则第一层总工作量约为 $2 \cdot (\lfloor n/2 \rfloor) = n$

第 i 层有 2^i 个子问题, 规模约为 $n/2^i$, 因此该层总工作量为 $2^i \cdot \frac{n}{2^i} = n$

递归直到子问题规模降到常数, 层数约为 $\lceil \lg n \rceil + 1$

\therefore 总工作量为 $n \cdot (\lceil \lg n \rceil + 1) = \Omega(n \lg n)$

结合 $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$ 的解为 $O(n \lg n)$

\therefore 解为 $\Theta(n \lg n)$

4.3-6 为了解决 α 的偏移, 不妨假设没有常数 $c > 0$, 使得 $T(n) \leq c(n-a) \lg(n-a)$

则 $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor + 1) + n$

$$\leq 2c(\lfloor n/2 \rfloor + 1 - a) \lg(\lfloor n/2 \rfloor + 1 - a) + n$$

$$= c(n+34-2a) \lg\left(\frac{n+34-2a}{2}\right) + n \quad (\text{忽略取整, 对结果影响})$$

$$= c(n+34-2a)[\lg(n+34-2a) - \lg 2] + n$$

$$= c(n+34-2a)\lg(n+34-2a) - \lg 2 \cdot c(n+34-2a) + n$$

上式, 当 $c > \frac{1}{\lg 2}$ 时, n 取足夠大, $-\lg 2 \cdot c(n+34-2a) + n$ 为负

\therefore 此时 $T(n) \leq c(n+34-2a) \lg(n+34-2a)$

而 $a \geq 34$ 时, $T(n) \leq c(n-a) \lg(n-a)$, 即 $T(n) = O(n \lg n)$ 证毕