

HW3

4.1

4.1 证明式 $f(x, y) \exp[j2\pi(u_0x + v_0y)/N] \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$ 和式

$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) \exp[-j2\pi(ux + vy)/N]$ 成立。

对傅里叶变换公式:

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy)/N]$$

代入 $u - u_0, v - v_0$ 有:

$$\begin{aligned} F(u - u_0, v - v_0) &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp[-j2\pi((u - u_0)x + (v - v_0)y)/N] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp[j2\pi(u_0x + v_0y)/N] \exp[-j2\pi(ux + vy)/N] \end{aligned}$$

所以 $f(x, y) \exp[j2\pi(u_0x + v_0y)/N] \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$ 得证

同样的, 对傅里叶逆变换公式:

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp[j2\pi(ux + vy)/N]$$

代入 $x - x_0, y - y_0$ 有:

$$\begin{aligned} f(x - x_0, y - y_0) &= \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp[j2\pi(u(x - x_0) + v(y - y_0))/N] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp[-j2\pi(ux_0 + vy_0)/N] \exp[j2\pi(ux + vy)/N] \end{aligned}$$

所以 $f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) \exp[-j2\pi(ux_0 + vy_0)/N]$ 得证

4.2

4.2 证明 $f(x)$ 的自相关函数的傅里叶变换就是 $f(x)$ 的功率谱 $|F(u)|^2$ 。

证明：

由相关定理结合自相关函数，可以得到：

$$f(x) \circ f(x) \Leftrightarrow F^*(u)F(u)$$

而根据共轭

$$F^*(u)F(u) = |F(u)F(u)| = |F^2(u)| = |F(u)|^2$$

综上， $f(x)$ 的自相关函数的傅里叶变换就是 $f(x)$ 的功率谱 $|F(u)|^2$

4.3

4.3 证明离散傅里叶变换和反变换都是周期函数（为简便可以用 1-D 函数为例）。

周期 $T=N$ ，证明如下：

首先由欧拉公式可以得到 $\exp[-j2\pi x]$ 和 $\exp[j2\pi x] = 1$

傅里叶变换公式： $F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp[-j2\pi ux/N]$

$$\begin{aligned}
F(u + T) &= F(u + N) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp[-j2\pi(u+N)x/N] \\
&= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp[-j2\pi ux/N] \exp[-j2\pi x] \\
&= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp[-j2\pi ux/N] \\
&= F(u)
\end{aligned}$$

傅里叶逆变换公式 $f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \exp[j2\pi ux/N]$

$$\begin{aligned}
f(x + T) &= f(x + N) \\
&= \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \exp[j2\pi u(x + N)/N] \\
&= \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \exp[j2\pi ux/N] \exp[j2\pi u] \\
&= \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \exp[j2\pi ux/N] \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

证毕