

# Дистиллирование данных

Марков В.О.  
МГУ ВМК

April 11, 2020

## 1 Основы

Ранее использовали дистилляцию самих нейросетевых моделей. Семейство нейросетей превращали в одну нейросеть. Дистилляция данных, в свою очередь, превращает большой набор данных в значительно более сжатый по объёму набор, точность на котором не хуже точности на исходных данных после тренировки модели.

Плюсы данного подхода:

- В уменьшении времени тренировки
- В уменьшении затрат на хранение данных

Рассмотрим несколько видов инициализации весов:

1. На каждой эпохе будем брать случайным образом инициализированные веса согласно некоторому распределению  $p(w|\sigma, \mu)$
2. Будем работать с фиксированными частично предобученными весами

Также рассмотрим "отравление" классов, базирующееся на методе дистилляции.

## 2 Обзор алгоритма

Обозначим длину и ширину изображений как  $W, H$ . В общем случае будем говорить, что имеем дело с объектами из  $\mathbb{R}^D$ . Возьмем  $M$  объектов в качестве будущих эталонов. Случайным образом заполним пиксели этих  $M$  эталонных изображений  $\tilde{x} = \{x_{i,j,k}\}_{1,1,1}^{M,W,H}$ . Вектор признаков для  $\tilde{x}$  обозначим  $\tilde{y} = [0, 1, 2, 3, \dots, K]$ . Исходные данные обозначим как  $x, y$  для признаков и меток соответственно. Веса будем обозначать за  $w$ .

Далее будем считать, что метки закодированы с помощью one-hot.

Формально, для начала, нам необходимо минимизировать функцию потерь по признакам

$$\tilde{x} = \underset{\tilde{x}}{\operatorname{argmin}} l(x, y, w - \tilde{\eta} \nabla_w l(\tilde{x}, \tilde{y}, w)) \quad (1)$$

Поскольку непонятно, какой градиентный шаг брать при оптимизации весов, то его также будем оптимизировать, получим в итоге:

$$\tilde{x}, \tilde{\eta} = \operatorname{argmin}_{\tilde{x}, \tilde{\eta}} l(x, y, w - \tilde{\eta} \nabla_w l(\tilde{x}, \tilde{y}, w)) \quad (2)$$

В дальнейшем рассмотрим минимизацию не только по  $\tilde{x}, \tilde{\eta}$ , но и по метке  $\tilde{y}$ :

$$\tilde{x}, \tilde{\eta}, \tilde{y} = \operatorname{argmin}_{\tilde{x}, \tilde{\eta}, \tilde{y}} l(x, y, w - \tilde{\eta} \nabla_w l(\tilde{x}, \tilde{y}, w)) \quad (3)$$

Веса изначально будем инициализировать случайным образом на каждой эпохе.

Для нескольких проходов(эпох) достаточно воспользоваться рекурсией, а для подсчета градиентов методом backpropagation, что будет показано ниже. В дальнейшем  $N$  будет обозначать  $N$ -ый шаг рекурсии.

$$\tilde{x}, \tilde{\eta} = \operatorname{argmin}_{\tilde{x}, \tilde{\eta}} l(x, y, \underbrace{w_{N-1}} - \tilde{\eta} \nabla_w l(\tilde{x}, \tilde{y}, \underbrace{w_{N-1}})) \quad (4)$$

Будем использовать метод градиентного спуска, к примеру, для переменной  $\tilde{x}$  наша цель найти:

$$\frac{d l(x, y, w_N(\tilde{x}, \tilde{y}, w_{N-1}))}{d \tilde{x}} = \underbrace{\frac{d l(x, y, w_N)}{d w_N} \frac{\partial w_N}{\partial \tilde{x}}}_{\text{Первый шаг}} + \underbrace{\frac{d l(x, y, w_{N-1})}{d w_{N-1}} \frac{\partial w_{N-1}}{\partial \tilde{x}}}_{\text{Второй шаг}} + \dots + \underbrace{\frac{d l(x, y, w_1)}{d w_1} \frac{\partial w_1}{\partial \tilde{x}}}_{\text{N-ый шаг}} \quad (5)$$

Мы разбили поиск искомого градиента на  $N$  шагов. Это делается для того, чтобы частично самим реализовать метод backpropagation, в следующих разделах станет более понятно почему мы можем оптимизировать данный метод, вместо того, чтобы дать tensorflow или pytorch самостоятельно реализовать обратный проход.

Стоит уточнить, что символом  $d$  обозначается полная частная производная, а символом  $\partial$  частная производная.

Заметим, также, что для любого  $N$  справедливо:

$$\frac{\partial w_N}{\partial \tilde{x}} = -\tilde{\eta} \frac{\partial l(\tilde{x}, \tilde{y}, w_{N-1})}{\partial \tilde{x}} \quad (6)$$

Если подставить это в уравнение (5), то получим готовую формулу для оптимизированного метода backpropagation, чем воспользуемся ниже.

**И заметим, что пока непонятно, какое брать распределение весов и каким брать параметр  $M$ .**

В оригинальной статье по дистилляции данных вначале рассматривают простейший случай с однослойной сетью со среднеквадратичной функцией ошибки, где легко выводят, что значение  $M$  должно удовлетворять неравенству  $M \geq D$ , в таком случае, по крайней мере, для данной простой модели наши дистилированные данные не зависят от весов. Для более сложных моделей мы можем полагать, что должно выполняться аналогичное ограничение и понятно, что хотелось бы брать значение  $M$  минимально возможным.

## 3 Tensorflow реализация

### 3.1 Модель

Модель будет иметь следующие методы:

```

1 import tensorflow as tf
2
3 class Model:
4     def __init__(self, size: int, num_classes: int, sigma=0.2, mu=0):
5         pass
6
7     def forward(self, X, weights=None) -> tf.Tensor:
8         pass
9
10    def flat_weights(self, weights: tf.Tensor, biases: tf.Tensor) -> tf.Tensor:
11        pass
12
13    def unflat_weights(self, weights: tf.Tensor) -> (tf.Tensor, tf.Tensor):
14        pass
15
16    def get_weights(self) -> tf.Tensor:
17        pass
18

```

Метод `forward` принимает на вход также веса, то есть, мы можем перестроить граф вычислений модели предоставив новые веса. Методы `flat_weights`, `unflat_weights` для преобразования весов в одномерный массив и для преобразования из одномерного в массива весов в многомерные для каждого слоя соответственно.

## 3.2 Дистиллятор

```

1 class Distillator:
2     def __init__(self, models: [], shape: (int),
3                 num_classes: int, M: int,
4                 batch_size: int, num_epochs: int, distill_epochs: int,
5                 sigma: float, mu: float):
6         pass
7     def forward(self, model) -> (tf.Tensor, [], []):
8         pass
9     def backward(self, forward_output) -> ([], []):
10        pass
11    def optimizer(self, gradients: []):
12        pass
13    def train(self, X, y):
14        pass
15    def get_result(self):
16        pass

```

Начнем с конструктора класса:

```
1     def __init__(self, models: [], shape: (int),
2                   num_classes: int, M: int,
3                   batch_size: int, num_epochs: int, distill_epochs: int,
4                   sigma: float, mu: float):
5
6         self.batch_size = batch_size
7         self.num_epochs = num_epochs
8         self.distill_epochs = distill_epochs
9         self.models = models
10        self.num_classes = num_classes
11
12
13        self.learningRateX = tf.constant(1e-2, dtype=tf.float32)
14        self.learningRateW = tf.Variable(1e-2, dtype=tf.float32)
15
16        self.x_real = tf.placeholder(tf.float32, shape=[None, *shape])
17        self.y_real = tf.placeholder(tf.float32, shape=[None, num_classes])
18
19        self.x_distilled = tf.Variable(tf.truncated_normal([M, *shape],
20        → , stddev=sigma, mean=mu))
21
22        self.y_distilled = np.eye(num_classes)[np.arange(0, num_classes)]
23        self.y_distilled = tf.Variable(self.y_distilled)
```

В конструкторе мы объявляем три переменные: шаг градиента  $\tilde{\eta}$ , дистиллированные признаки  $\tilde{x}$  и их метки  $\tilde{y}$ . Пока что будем оптимизировать лишь шаг градиента и признаки. А метки положим равными 0,1...,9 после чего закодируем с помощью one-hot кодирования. Следует уточнить, что в алгоритме у нас будут два прохода - по дистиллированным данным и по реальным данным, отсюда есть необходимость определить значения для эпох каждого цикла.

Также следует заметить, что в инициализациях указаны модели, что подразумевает работу с несколькими моделями. То есть, алгоритм будет проходить по всем моделям, получая градиенты от каждого из них, после чего будем усреднять полученное значение на количество моделей  $\frac{1}{models} \sum_{j=1}^{models} \nabla_{\tilde{x}} L(x, y, w_N)$

Где за  $\nabla_{\tilde{x}} L_j(x, y, w_N)$  обозначена сумма градиентов, полученных из прохода по каждой модели. Несколько моделей необходимы для того, чтобы дистиллированные данные не зависели от алгоритма, это еще один подход к избавлению зависимости дистиллированных данных от весов. Формально, мы берем маотжидание относительно алгоритмов, считая, что дисперсия дистиллированных данных по всем алгоритмам небольшая.

### 3.3 Train

```
1  def train(self,X,y):
2      sess = tf.Session()
3      self.sess = sess
4      sess.run([self.x_distilled.initializer,
5                self.y_distilled.initializer,
6                self.learningRateWK.initializer])
7
8      self.__weights_initializers = []
9      gradients = []
10     lossSum = 0
11
12     for model in self.models:
13         forwardOutput = self.forward(model)
14         loss,_,_ = forwardOutput
15         lossSum = lossSum+loss
16         gradients.append(self.backward(forwardOutput))
17     self.optimizer(gradients)
18
19     for epoch in np.arange(0,self.numEpochsK):
20         for step_i in np.arange(0,X.shape[0], self.batchSizeK):
21             x_real_batch = X[step_i:step_i + self.batchSizeK,:]
22             y_real_batch = y[step_i:step_i + self.batchSizeK,:]
23
24             sess.run(self.__weights_initializers)
25             sess.run([self.optimize_x,self.optimize_lr],
26                       feed_dict={self.x_real:x_real_batch,
27                                   self.y_real:y_real_batch})
```

Сначала мы создаем новую сессию, после чего инициализируем наши три переменные. Далее начинаем проход по всем моделям.

Метод `forward` возвращает значением функции потерь на N-ом шаге  $l(x, y, w_N)$ , а также список весов  $w_1, \dots, w_N$  и их градиентов, умноженных на  $-\tilde{\eta}$ :  $-\tilde{\eta} \nabla_{w_1} l(\tilde{x}, \tilde{y}, w_1), \dots, -\tilde{\eta} \nabla_{w_N} l(\tilde{x}, \tilde{y}, w_N)$ .

Все данные значения отправляются в следующий метод `backward`, который возвращает искомые градиенты для  $\tilde{\eta}, \tilde{x}$ .

Метод `optimizer` делает оптимизацию по полученным градиентам. Всё это статическая часть кода, на этом этапе мы создали весь граф вычислений алгоритма, далее в динамической части мы разбиваем реальную выборку на бачи и проходим несколько эпох по исходным данным. На каждой шаге(step) инициализируем заново случайным образом веса модели, после чего запускаем оптимизацию для  $\tilde{\eta}, \tilde{x}$ .

### 3.4 Forward

Данный метод имеет следующую реализацию:

```
1  def forward(self,model):
2      model.forward(self.x_distilled)
3      weights = model.get_weights()
4      (new_weights_list,gradients_list) = [weights],[]
5
6      for epoch in np.arange(0,self.distill_epochs):
7          output = model.forward(self.x_distilled,weights=weights)
8          loss = reduce_mean(softmax_cross_entropy(logits=output,
9                               labels=self.y_distilled))
10         dloss_dw = tf.gradients(loss,weights)
11         dloss_dw = tf.squeeze(dloss_dw)
12         new_weights = tf.stop_gradient(weights - self.learningRateW*dloss_dw)
13
14         new_weights_list.append(new_weights)
15         gradients_list.append(-self.learningRateW*dloss_dw)
16         weights = new_weights
17
18     self.__weights_initializers += model.initializers
19     output = model.forward(self.x_real,weights=weights)
20     loss = reduce_mean(softmax_cross_entropy(logits=output,
21                                               labels=self.y_real))
22     return(loss,new_weights_list,gradients_list)
```

Метод получает на вход конкретную модель, прогоняет дистиллированные данные через эту модель , получает веса, инициализированные случайным образом, которые будут первые в нашей рекурсии  $w_1$ .

В цикле прогоняем дистиллированные данные с новыми весами  $w_1, \dots, w_{N-1}$  на каждой итерации, для упрощения, будем для всех моделей брать многоклассовую кроссэнтропию из tensorflow. Далее идет подсчет градиента:

$$\nabla_{w_{N-1}} l(\tilde{x}, \tilde{y}, w_{N-1})$$

После чего делаем новый градиентный шаг:

$$w_N = w_{N-1} - \tilde{\eta} \nabla_{w_{N-1}} l(\tilde{x}, \tilde{y}, w_{N-1})$$

После цикла сохраняем инициализаторы весов, делаем проход модели, но уже на реальных данных, получая значение функции потерь:

$$l(x, y, w_N) \tag{7}$$



### Останавливаем градиент

В 12 строчке мы останавливаем градиент, чтобы веса  $w_{N+1}$  не зависели от  $w_N, \tilde{x}, \tilde{\eta}$ . Это сделано для того, чтобы в методе `backward` мы самостоятельно проделали обратный проход для оптимизации, в силу того, что мы явно знаем зависимость  $w_{N+1}$  от указанных переменных и имеем возможность явно выписать соответствующие градиенты.

## 3.5 Backward

Данный метод имеет следующую реализацию:

```

1 def backward(self, forward_output):
2     (loss, new_weights_list,
3      gradients_list) = forward_output
4
5     dloss_dw_last, = tf.gradients(loss, new_weights_list[-1])
6     x_distilled_grad = tf.zeros_like(self.x_distilled)
7     lr_grad = 0
8
9     for weights, dloss_dw in reversed(list(zip(new_weights_list, gradients_list))):
10         gradients = tf.gradients(dloss_dw,
11                                  [self.x_distilled,
12                                   self.learningRateWK,
13                                   weights],
14                                  grad_ys=dloss_dw_last)
15         (dloss_dx, dloss_dlr, ddloss_ddw) = gradients
16
17         x_distilled_grad += dloss_dx
18         lr_grad += dloss_dlr
19
20         dloss_dw_last = dloss_dw_last + ddloss_ddw
21     return x_distilled_grad, lr_grad

```

Сначала берем дифференцирование (7) по самым последним весам  $w_N$ :

$$\frac{\partial l(x, y, w_N)}{\partial w_N} \quad (8)$$

После чего идем обратно по подсчитанным градиентам и весам  $w_{N-1}, \dots, w_1$  и их градиентов, умноженных на  $-\tilde{\eta}$

$$-\tilde{\eta} \nabla_{w_{N-1}} l(\tilde{x}, \tilde{y}, w_{N-1}), \dots, -\tilde{\eta} \nabla_{w_1} l(\tilde{x}, \tilde{y}, w_1)$$

Здесь нужно вспомнить уравнение (5), в котором и подчеркнут каждый шаг в `backward`.



### Примечание!

В силу того, что в списке весов больше, чем соответствующих градиентов, получим, что проход начнется с шага **N-1**

Если рассмотреть первый шаг, то наша цель получить:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\frac{d l(x, y, w_N)}{d w_N} \frac{\partial w_N}{\partial \tilde{x}}}_{\text{Первый шаг}} = \overbrace{-\tilde{\eta} \frac{\partial l(x, y, w_N)}{\partial w_N}}^{\text{См. 5 и 20 строчки}} \overbrace{\frac{\partial^2 l(\tilde{x}, \tilde{y}, w_{N-1})}{\partial \tilde{x}, \partial w_{N-1}}}^{\text{Получаем в 10-14 строках кода}} \\ \underbrace{\frac{d l(x, y, w_N)}{d w_N} \frac{\partial w_N}{\partial \tilde{\eta}}}_{\text{Первый шаг}} = -\tilde{\eta} \overbrace{\frac{\partial l(x, y, w_N)}{\partial w_N} \frac{\partial^2 l(\tilde{x}, \tilde{y}, w_{N-1})}{\partial \tilde{\eta}, \partial w_{N-1}}}^{\text{Аналогично}} \end{array} \right. \quad (9)$$

Полученные градиенты для искоемых переменных аккумулируем, а градиент для весов используем для обновления (8) и подготовки ко второму шагу. Последующие шаги проводятся аналогично.



### Почему мы аккумулируем градиенты?

В уравнении (5) расписаны все шаги по правилам дифференцирования, на каждом шаге мы получаем очередное слагаемое, учитывая, что отключили градиент у всех весов. Тем самым, мы не выделяем память под данные, а лишь обновляем значения искоемых градиентов.

Наконец, возвращаем градиенты искоемых переменных.

## 3.6 Optimizer

Данный метод имеет следующую простейшую реализацию:

```

1  def optimizer(self, gradients):
2      x_grad_sum = tf.zeros_like(self.x_distilled)
3      lr_grad_sum = 0
4      for x_grad, lr_grad in gradients:
5          x_grad_sum = x_grad_sum + x_grad
6          lr_grad_sum = lr_grad_sum + lr_grad
7      x_grad = x_grad_sum / len(self.models)
8      lr_grad = lr_grad_sum / len(self.models)
9      self.optimize_x = tf.assign_sub(self.x_distilled,
10                                     self.learningRateX * x_grad)
11     self.optimize_lr = tf.assign_sub(self.learningRateW,
12                                     self.learningRateX * lr_grad)

```



Проходимся по всем градиентам, суммируя их, далее делим на количество моделей, как было описано выше и обновляем искомые переменные  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{\eta}$ .

Последний метод служит простым вычислением данных через сессию.

## 4 Однослойная нейросеть

Для начала возьмем вместо многослойной нейросети однослойную - логистическую регрессию. Рассмотрим датасет MNIST,  $W = H = 28$ ,  $\tilde{y} = [0, 1, 2, 3, \dots, 9]$ . Также возьмем нормальное распределение весов с параметрами  $\sigma = 0.2$ ,  $\mu = 0$ .

Прогоним данные через наш дистиллятор и после примерно 10 секунд получим, что данные аппроксимируются визуально верно:

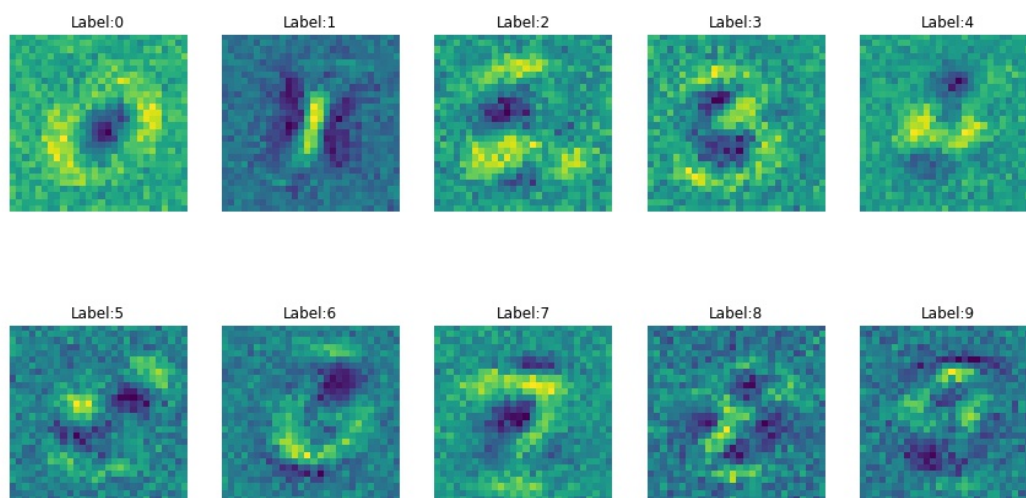


Figure 1: Визуализация  $\tilde{x}$

Посмотрим на зависимость значений функции потерь от эпох:

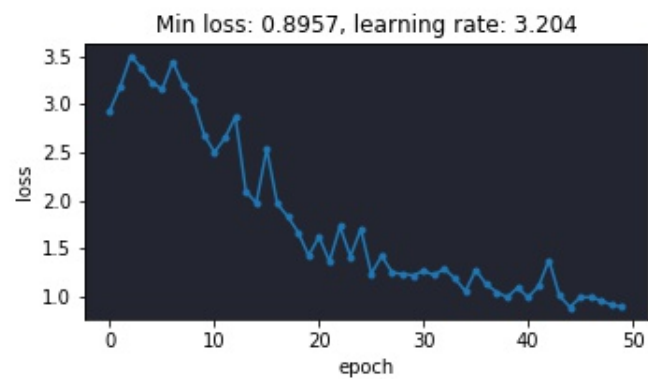


Figure 2: Зависимость значений функции потерь от эпох

Попробуем увеличить дисперсию у весов, положив  $\sigma = 0.7$ ,  $\mu = 0$

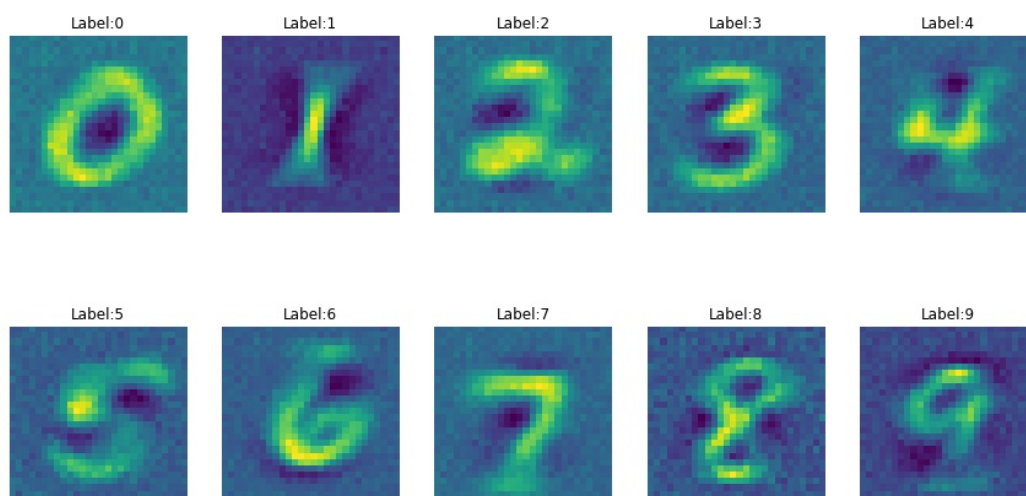


Figure 3: Визуализация  $\tilde{x}$

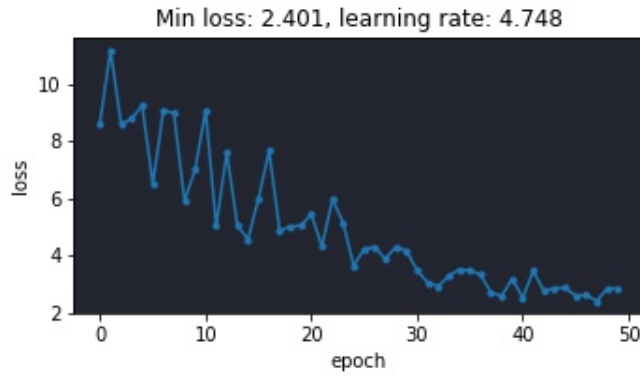


Figure 4: Зависимость значений функции потерь от эпох

Вероятно, из-за того, что веса генерируются слишком большими, функция потерь также имеет относительно большие значения, в то время как  $\tilde{x}, \tilde{\eta}$  "сильнее" стремятся минимизировать потери.

Возьмем Xavier инициализацию, тогда получим следующий график:

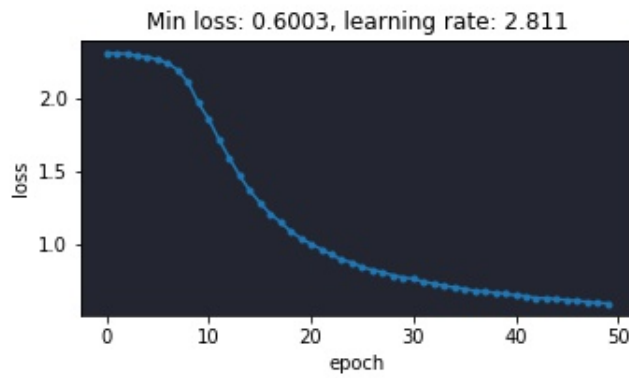


Figure 5: Зависимость значений функции потерь от эпох