

令和 6 年度

筑波大学理工学群社会工学類

卒業研究論文

# 意思決定重視学習を用いたポートフォリオ最適化

経営工学主専攻

学籍番号：202211661

野坂健成

指導教員：高野祐一准教授

令和 7 年 1 月 21 日提出

# 目次

第 1 章	序論	1
1.1	研究背景	1
1.2	問題設定	1
1.3	関連研究	1
1.4	本研究の貢献	2
1.5	論文構成	2
第 2 章	既存手法	3
2.1	ポートフォリオ最適化モデル	3
2.2	予測統合型アプローチ	3
2.3	意思決定考慮型アプローチ	4
第 3 章	提案手法	5
3.1	二段階最適化モデル	5
3.2	再定式化	6
第 4 章	数値実験	9
4.1	実データ実験の設定	9
4.2	実験結果	12
4.2.1	実データによるベースライン比較	12
4.2.2	DFL-OPT-D と DFL-OPT-K の数値的比較	13
4.2.3	初期解導入の効果検証	15
4.2.4	提案手法の性質分析	18
4.3	補足分析	24
第 5 章	結論	27
	謝辞	28
	参考文献	29
	Appendix	30
A.	命題 3.1 の証明	30
B.	DFL-OPT-D における強双対性制約の導出	30
C.	OAS 縮小係数と実効サンプルサイズ	31

# 目次

4.1	累積リターン推移 . . . . .	12
4.2	探索経路摂動に対する頑健性：ベースラインとの絶対値の差の分布 . . . . .	15
4.3	累積リターン推移: 初期解あり vs なし, およびベンチマークを除いた比較手法 . . . . .	16
4.4	初期解摂動下での結果分布：初期解ありと初期解なしの比較 . . . . .	17
4.5	$R^2$ と意思決定品質の関係 . . . . .	19
4.6	意思決定誤差の比較 . . . . .	19
4.7	売買量とリスク調整後性能の関係 . . . . .	20
4.8	最大ウェイト資産のスイッチ頻度と性能の関係 . . . . .	21
4.9	条件数レジーム別の相対優位: (上) 週次リターン差 $\Delta r_t$ の分布, (左下) 優越率, (右下) 有効資 産数の比較 . . . . .	23
4.10	条件数レジーム別の意思決定誤差の比較 . . . . .	23
4.11	COVID-19 ショックにおける累積資産推移 . . . . .	24
4.12	COVID-19 ショックにおける資産配分の推移 . . . . .	25

# 第 1 章 序論

## 1.1 研究背景

金融市場における資産運用では、複数資産への資金配分を決定するポートフォリオ最適化が中心的役割を担う。ポートフォリオ最適化では一般に、期待リターンとリスクのトレードオフを考慮した投資配分の決定が求められる。近年は機械学習の発展により、各資産の将来リターンをデータ駆動的に推定し、その推定値を最適化問題に入力して投資配分を得る枠組みが一般的である。このとき、多くの場合で予測誤差を最小化する目的で学習される。しかし、この学習目標が必ずしも投資成績（意思決定品質）の改善に直結するとは限らないことが指摘されている [3, 5]。このギャップの一因は、予測と最適化を独立に扱う二段階構造にある。すなわち、わずかな予測誤差であっても最適化段階で増幅され、最終的な投資配分が大きく変化し、結果としてリスク調整後成績などの評価指標が悪化する場合があり得る。この現象は、推定不確実性が大きい局面や制約を含む現実的設定において、より顕在化しやすい [2]。

以上を背景として、近年、予測精度そのものではなく、後続の最適化問題を通じて定義される意思決定の質を直接最適化する意思決定重視学習（Decision-Focused Learning; DFL）が注目されている [5]。本論文では、「推定値に基づいて得られる投資配分が、理想的配分と比べてどれだけ目的関数値を悪化させるか」を意思決定誤差（機会損失）と呼ぶ。DFL では、予測モデルの学習目標を「推定値と実現値の誤差」ではなく、この意思決定誤差を直接最小化するように定める。

## 1.2 問題設定

時点  $i = 1, \dots, T$  において、各資産に関する特徴量を  $\mathbf{x}_i$ 、当該期間の実現リターンを  $\mathbf{r}_i$  とする。

予測モデルはパラメータ  $\boldsymbol{\theta}$  を持ち、 $\mathbf{x}_i$  に基づいて期待リターンの推定値  $\hat{\mathbf{r}}_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_i)$  を出力する。

各時点における投資配分  $\hat{\mathbf{w}}_i(\boldsymbol{\theta})$  は、推定値  $\hat{\mathbf{r}}_i$  を入力として解かれる制約付きポートフォリオ最適化の最適解として定まる。ここで  $\mathcal{S}$  はポートフォリオ制約で定まる実行可能集合、 $c(\cdot, \cdot)$  は目的関数を表す（具体形は第 2 章で与える）。

$$\hat{\mathbf{w}}_i(\boldsymbol{\theta}) \in \arg \min_{\mathbf{w} \in \mathcal{S}} c(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{r}}_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_i)).$$

一方、比較の基準として、もし実現リターン  $\mathbf{r}_i$  が事前に既知であったと仮定した場合に得られる理想的な投資配分を

$$\mathbf{w}_i^* \in \arg \min_{\mathbf{w} \in \mathcal{S}} c(\mathbf{w}, \mathbf{r}_i)$$

と定義する。

DFL は、予測誤差ではなく、最終的に得られる投資配分の良さに基づく意思決定誤差を学習目標として定める。本研究では、各時点の意思決定誤差を

$$\ell_i(\boldsymbol{\theta}) = c(\hat{\mathbf{w}}_i(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{r}_i) - c(\mathbf{w}_i^*, \mathbf{r}_i)$$

と定義し、 $\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \ell_i(\boldsymbol{\theta})$  を最小化する。すなわち、本研究で扱う DFL は、制約付きポートフォリオ最適化を下位問題に含む二段階最適化として定式化される。

## 1.3 関連研究

ポートフォリオ最適化は Markowitz による平均-分散ポートフォリオ最適化モデル（Mean-Variance Optimization; MVO）[1] を起点として、制約付き最適化、ロバスト最適化、推定誤差を考慮した手法など多岐に拡張

されてきた。MVO は、期待リターンとリスクを明示的に扱えるため、理論的にも実務的にも解釈しやすい基準モデルとして広く用いられてきた。一方で、期待リターン推定は回帰・時系列モデルから機械学習まで幅広く研究されている。平均推定誤差が最適配分に与える影響の大きさは、Chopra and Ziemba[2] により定量的に示されている。

従来の多くの研究および実務では、予測モデルを予測誤差（MSE など）の最小化で学習する予測精度重視学習（Prediction-Focused Learning; PFL）に基づき、得られた推定値を最適化問題に入力して投資配分を決定する。このように、推定誤差の最小化により推定モデルを学習し、得られた推定値を最適化問題に入力して投資配分を得る二段階構造が広く用いられている [3]。しかし、PFL による学習目的は最終的な最適化目的と必ずしも一致しないため、予測誤差と投資成績の乖離が生じ得る [5]。

この課題に対し、予測と最適化を統合的に扱う枠組みとして DFL が提案されている [5]。DFL では、学習過程に最適化問題を組み込み、最適化解を介して定義される意思決定誤差を直接最小化する。さらに、平均-分散ポートフォリオ選択に DFL を適用し、推定モデルが意思決定構造によりどのように影響を受けるかを分析する研究も報告されている [6]。

また、平均-分散ポートフォリオ最適化に対して推定と最適化を統合的に扱う予測統合型手法として IPO が提案されている [4]。加えて、DFL を悲観的二段階最適化として厳密に捉える理論的整理 [7] や、数値安定性の改善に関するアルゴリズム的検討 [8] も進められている。

## 1.4 本研究の貢献

本研究の主な貢献は以下のとおりである。

1. 制約付き平均-分散ポートフォリオ最適化を下位問題に含む DFL を対象に、下位問題の最適性条件に基づく 2 通りの同値再定式化を導出し、比較可能な形で整理した。
2. 実データを用いて、理論的に同値な再定式化であっても数値計算上の挙動（収束、安定性、初期化依存）が異なり得ることを示し、解法設計上の論点を明確化した。
3. 週次 TAA を想定した実務的設定において、PFL（OLS+MVO）と比較し、提案手法が予測精度の改善では説明できない意思決定品質（Sharpe, CVaR）を実現し得ることを実証した。
4. 提案手法が出力した投資配分と損益系列に基づき、機会損失の分布、売買量・切替頻度、条件数レジーム別比較などの性質分析を通じて、「効く局面」および挙動の解釈可能性を整理した。

## 1.5 論文構成

本論文の構成は以下のとおりである。第 2 章では、既存手法として PFL および予測統合型手法を整理する。第 3 章では、提案手法を定式化し、DFL-OPT-D / DFL-OPT-K の再定式化を示す。第 4 章では、実データを用いた数値実験により提案手法の特性を検証する。第 5 章では、結論と今後の課題を述べる。

## 第2章 既存手法

### 2.1 ポートフォリオ最適化モデル

本研究では, Markowitz [1] による平均-分散ポートフォリオ最適化モデル (Mean-Variance Optimization, MVO) を基準モデルとして採用する. 本モデルは, 期待リターンと分散リスクのトレードオフを明示的に表現できるため, 解釈しやすい枠組みとして広く用いられてきた.

資産数を  $d$  とし, 投資配分ベクトルを

$$\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_d)^\top \in \mathbb{R}^d$$

とする. また, 期待リターンベクトルを  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d$ , 共分散行列を  $\mathbf{V} \in \mathbb{S}_{++}^d$  とする. ここで  $\mathbb{S}_{++}^d$  は正定値対称行列の集合を表す.

平均-分散モデルに基づくポートフォリオ最適化問題は, 目的関数 (2.1) を最小化し, 制約 (2.2)–(2.3) のもとで投資配分を決定する問題として定式化される.

$$c(\mathbf{w}, \mathbf{r}) := -(1 - \delta)\mathbf{r}^\top \mathbf{w} + \frac{\delta}{2}\mathbf{w}^\top \mathbf{V} \mathbf{w}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{w} = 1, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{w} \geq \mathbf{0}. \quad (2.3)$$

ここで  $0 \leq \delta \leq 1$  は, 期待リターン項と分散リスク項の比重を直接制御するパラメータである. 最小化問題として扱うために期待リターン項に負号を付しており, 期待リターンを大きくするほど  $-\mathbf{r}^\top \mathbf{w}$  が小さくなる. また  $\frac{\delta}{2}\mathbf{w}^\top \mathbf{V} \mathbf{w}$  は分散リスクを表す. 共分散行列  $\mathbf{V}$  が正定値である場合, 本問題は凸二次計画問題となり, 大域的最適解が一意に定まる. なお, 標準的な平均-分散モデルで用いられるリスク回避係数  $\gamma > 0$  を用いた表現  $-\mathbf{r}^\top \mathbf{w} + \frac{\gamma}{2}\mathbf{w}^\top \mathbf{V} \mathbf{w}$  は, 係数の単調変換 ( $\gamma = \frac{\delta}{1-\delta}$ ,  $\delta \in [0, 1)$ ) により (2.1) と対応する.

実際の運用においては, 期待リターン  $\mathbf{r}$  および共分散行列  $\mathbf{V}$  は未知であり, 過去データから推定される. 特に期待リターンの推定誤差は, 最適化問題 (2.1)–(2.3) の解に大きな影響を与えることが知られている [2].

このため, 実務では回帰モデルや時系列モデル, 近年では機械学習手法を用いてリターンを推定し, その推定値を最適化問題に入力するという枠組みが一般的に用いられている [3]. 本稿では, 期待リターンの推定値を  $\hat{\mathbf{r}}$  として表す.

本章では, 期待リターンは特徴量に対して線形に表現できると仮定し, 特徴量ベクトル  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$  に基づいて次期リターンの推定値を次の形で与える.

$$\hat{r}_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_i) = \text{diag}(\mathbf{x}_i)\boldsymbol{\theta}, \quad (2.4)$$

ここで  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d$  は回帰係数である.  $\boldsymbol{\theta}$  は, 次の最小二乗問題を解くことで推定される.

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \|\mathbf{r}_i - \hat{r}_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_i)\|_2^2. \quad (2.5)$$

得られた推定値  $\hat{\mathbf{r}}$  を用いて, ポートフォリオ最適化問題 (2.1)–(2.3) を解くことで投資配分が決定される. 本稿では, このように推定誤差の最小化を学習目的とし, 推定と最適化を分離して扱う枠組みを PFL と呼ぶ [3, 5].

### 2.2 予測統合型アプローチ

推定と最適化の分離に起因する課題に対し, Butler and Kwon [4] は, 推定モデルの学習段階にポートフォリオ最適化問題を直接組み込む予測統合型アプローチとして, Integrating Prediction in Mean-Variance Portfolio Optimization (IPO) を提案した.

IPO は, 推定モデルのパラメータを, 予測誤差ではなく「推定に基づいて得られる最終的な意思決定の良さ」を通じて更新する枠組みである. 例えば, 各時点  $t$  において推定値  $\hat{\mathbf{r}}_t(\boldsymbol{\theta})$  が与えられたとき, ポートフォリオ最適化の最適解を  $\mathbf{w}^*(\hat{\mathbf{r}}_t)$  とすると, IPO は次の最適化問題として表現できる.

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \mathbb{E}_t[c(\mathbf{w}^*(\hat{\mathbf{r}}_t(\boldsymbol{\theta})), \hat{\mathbf{r}}_t(\boldsymbol{\theta}))]. \quad (2.6)$$

$$\mathbf{w}^*(\hat{\mathbf{r}}_t) \in \arg \min_{\mathbf{w} \in S} c(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{r}}_t). \quad (2.7)$$

この定式化では, 推定モデルのパラメータ  $\boldsymbol{\theta}$  は予測誤差ではなく, 推定値に基づいて得られるポートフォリオの目的関数値を通じて更新される. すなわち, 学習の評価基準は「推定がどれだけ正確か」ではなく, 「推定に基づく投資配分がどれだけ良いか」によって定義される.

一方で, IPO は一般に非凸最適化問題として定式化され, 勾配ベースの手法により学習が行われる. そのため, 計算コストの増大や, 初期値に依存した局所解への収束, 制約付き設定における数値的安定性といった課題も指摘されている. 特に, 非負制約や予算制約を含む実務的な平均-分散最適化問題に対しては, 学習の安定性が必ずしも保証されない場合がある.

## 2.3 意思決定考慮型アプローチ

推定と最適化の分離に起因する課題に対し, Elmachetoub and Grigas [9] は Smart Predict-then-Optimize (SPO+) を提案した. SPO+ は, 従来の二段階法の枠組みを維持しつつ, 最適化問題の構造を反映した surrogate loss を用いて推定モデルを学習する手法である.

この点で SPO+ は, 純粋な prediction-focused learning よりも意思決定を意識した学習を行う一方, 最適化問題を学習ループに完全に組み込む DFL とは異なり, 二段階構造に基づくアプローチと位置づけられる.

本研究では, SPO+ を「二段階法における意思決定考慮型手法」の代表例として比較対象に含める.

## 共分散行列の推定

本研究では期待リターンの推定に焦点を当て, 共分散行列の推定そのものは研究対象としない. 共分散推定誤差がポートフォリオ最適化の安定性に与える影響は大きく, shrinkage 推定 [10] や時間減衰を考慮した推定法 [11] など, これまでに多くの手法が提案されてきた.

本研究では, これら既存研究の知見に基づき, 小標本・短期ローリング設定において数値的安定性が高いことが知られている手法として, Oracle Approximating Shrinkage (OAS) [10] と Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) [11] を組み合わせた共分散推定法を採用する. 共分散推定手法の比較や最適化は本研究の主目的ではないため, 以降の数値実験では全ての比較手法に対して同一の共分散推定法を用い, これを固定した上で, DFL による推定モデル学習の効果に焦点を当てる.

## 第3章 提案手法

### 3.1 二段階最適化モデル

本章では,DFL の枠組みに基づき, 平均-分散ポートフォリオ最適化問題を二段階最適化問題として定式化する. 以降, 第2章で導入した平均-分散コスト  $c(\cdot, \cdot)$  ( $\delta \in [0, 1]$  によりリターン項とリスク項を重み付けした形) を用いる.

#### 3.1.1 問題設定と推定モデル

時点  $i = 1, \dots, T$  において, 特徴量ベクトル  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$  および実現リターン  $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^d$  が観測されるとする. 第2章と同様に, 期待リターンの推定値は線形単回帰モデル (2.4) により与えられるものとする. ここで  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d$  は学習対象となる回帰係数である.

#### 3.1.2 下位問題：制約付きポートフォリオ最適化

推定モデル (2.4) に基づく推定値  $\hat{\mathbf{r}}_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_i)$  を入力として得られる各時点  $i$  の投資配分を  $\hat{\mathbf{w}}_i$  とし, 次の制約付き最適化問題の解として定義する.

$$\hat{\mathbf{w}}_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_i) \in \arg \min_{\mathbf{w}_i \in \mathcal{S}} c(\mathbf{w}_i, \hat{\mathbf{r}}_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_i)), \quad (3.1)$$

ただし, 目的関数は次の修正平均-分散コスト関数で与えられる.

$$c(\mathbf{w}_i, \mathbf{r}) = -(1 - \delta)\mathbf{r}^\top \mathbf{w}_i + \frac{\delta}{2}\mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i, \quad 0 \leq \delta \leq 1. \quad (3.2)$$

ポートフォリオの制約集合  $\mathcal{S}$  は

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{1}^\top \mathbf{w}_i = 1, \mathbf{w}_i \geq \mathbf{0}\} \quad (3.3)$$

とする.

ここで  $\mathbf{V}_i \in \mathbb{S}_{++}^d$  は共分散行列であり,  $\delta$  はリターン項とリスク項の比重を制御するパラメータである.  $\delta \rightarrow 0$  のときリターン重視,  $\delta \rightarrow 1$  のときリスク重視の投資配分が得られる.

#### 3.1.3 理想的な投資配分

意思決定誤差を評価する基準として, 各時点  $i$  において実現リターン  $\mathbf{r}_i$  が既知であると仮定した場合の理想的な投資配分を次のように定義する.

$$\mathbf{w}_i^* \in \arg \min_{\mathbf{w}_i \in \mathcal{S}} c(\mathbf{w}_i, \mathbf{r}_i). \quad (3.4)$$

この投資配分は実運用では利用できないが, 学習ではこの理想解に対する目的関数差を最小化することで意思決定誤差の低減を図る.

#### 3.1.4 上位問題：意思決定誤差最小化

DFL では, 予測モデルのパラメータ  $\boldsymbol{\theta}$  を, 予測誤差ではなく意思決定の質を通じて学習する. 本研究では, 各時点  $i$  における意思決定誤差を次のように定義する.

$$\ell_i(\boldsymbol{\theta}) = c(\hat{\mathbf{w}}_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_i), \mathbf{r}_i) - c(\mathbf{w}_i^*, \mathbf{r}_i). \quad (3.5)$$



このとき, 上位問題は次の二段階最適化問題として定式化される.

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \quad \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \ell_i(\boldsymbol{\theta}), \quad (3.6)$$

$$\text{s.t.} \quad \hat{\mathbf{w}}_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_i) \text{ は (3.1) の最適解.} \quad (3.7)$$

すなわち, 本研究で扱う問題は, 制約付き平均-分散ポートフォリオ最適化を下位問題に含む二段階最適化問題である.

### 3.1.5 問題の性質と再定式化への動機

定式化 (3.6)–(3.7) は, 下位問題に  $\arg \min$  演算子を含むため, 直接的な数値計算が困難である. さらに, 目的関数は下位問題の最適解写像  $\hat{\mathbf{w}}_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_i)$  を介して  $\boldsymbol{\theta}$  に依存するため, 一般に非凸となる.

そこで本研究では, 先行研究 [7] を参考に, 下位問題の最適性条件を用いて  $\arg \min$  を含む二段階構造を単一レベルの非凸二次計画問題へ再定式化する. 次節では, 強双対性条件に基づく定式化 (DFL-OPT-D) および KKT 条件に基づく定式化 (DFL-OPT-K) を示す.

## 3.2 再定式化

本節では, 前節の方針に従い, 単一レベル化した 2 通りの定式化として, (1) 強双対性条件に基づく DFL-OPT-D, (2) KKT 条件に基づく DFL-OPT-K を示す.

### 3.2.1 下位問題のラグランジュ関数

各時点  $i$  における下位問題 (3.1) を再掲する. ここでは簡単のため  $\hat{\mathbf{r}}_i := \hat{\mathbf{r}}_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_i)$  とおく.

$$\min_{\mathbf{w}_i} \quad -(1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i^\top \mathbf{w}_i + \frac{\delta}{2} \mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i, \quad (3.8)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{1}^\top \mathbf{w}_i = 1, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{w}_i \geq \mathbf{0}. \quad (3.10)$$

等式制約および不等式制約に対応するラグランジュ乗数を, それぞれ  $\mu_i \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\lambda}_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}^d$  とすると, ラグランジュ関数は次のように与えられる.

$$\mathcal{L}_i(\mathbf{w}_i, \mu_i, \boldsymbol{\lambda}_i) = -(1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i^\top \mathbf{w}_i + \frac{\delta}{2} \mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i + \mu_i (1 - \mathbf{1}^\top \mathbf{w}_i) - \boldsymbol{\lambda}_i^\top \mathbf{w}_i. \quad (3.11)$$

### 3.2.2 強双対性条件に基づく再定式化

下位問題 (3.8) は,  $\mathbf{V}_i \succ \mathbf{0}$  および  $\delta > 0$  の仮定の下で目的関数が強凸となる凸二次計画問題である. また, 制約集合  $\{\mathbf{w} \mid \mathbf{1}^\top \mathbf{w} = 1, \mathbf{w} \geq \mathbf{0}\}$  は非空であり, 例えば  $\mathbf{w} = \frac{1}{d} \mathbf{1}$  は等式制約を満たし, かつ  $\mathbf{w} > \mathbf{0}$  を満たす. したがって Slater 条件が成立する. 以上より, 本問題は強双対性を満たし, 双対問題が存在する.

弱双対性より, 任意の主問題の実行可能解  $\mathbf{w}_i$  と双対変数  $(\boldsymbol{\lambda}_i, \mu_i)$  ( $\boldsymbol{\lambda}_i \geq \mathbf{0}$ ) に対して, 双対目的値は主問題目的値の下界となる.

$$-(1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i^\top \mathbf{w}_i + \frac{\delta}{2} \mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i \geq \mu_i - \frac{\delta}{2} \mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i, \quad (3.12)$$

強双対性より, 最適解においては (3.12) の不等式は等号で成立する.

さらに, ラグランジュ関数の一階条件より,

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{w}_i} \mathcal{L}_i(\mathbf{w}_i, \mu_i, \boldsymbol{\lambda}_i) &= \delta \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i - (1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i - \mu_i \mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda}_i \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

また, 強双対性と (3.13) を用いると, 最適値一致条件は次の等式として表せる (導出は Appendix に示す) .

$$\delta \mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i - (1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i^\top \mathbf{w}_i = \mu_i. \quad (3.14)$$

以上を用いることで, 二段階最適化問題 (3.6)–(3.7) は, 次の単一レベル最適化問題として再定式化される.

$$\min_{\boldsymbol{\theta}, \{\mathbf{w}_i, \mu_i, \boldsymbol{\lambda}_i\}_{i=1}^T} \quad \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left( -(1 - \delta) \mathbf{r}_i^\top \mathbf{w}_i + \frac{\delta}{2} \mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i \right), \quad (3.15)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{1}^\top \mathbf{w}_i = 1, \quad i = 1, \dots, T, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{w}_i \geq \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, T, \quad (3.17)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_i \geq \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, T, \quad (3.18)$$

$$\delta \mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i - (1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i^\top \mathbf{w}_i = \mu_i, \quad i = 1, \dots, T, \quad (3.19)$$

$$\delta \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i - (1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i - \mu_i \mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, T. \quad (3.20)$$

この定式化を DFL-OPT-D と呼ぶ.

### 3.2.3 KKT 条件に基づく再定式化

別の再定式化として, 下位問題 (3.8) の KKT 条件をすべて制約として組み込む方法を考える. KKT 条件は以下から構成される.

一次の最適性条件

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{w}_i} \mathcal{L}_i(\mathbf{w}_i, \mu_i, \boldsymbol{\lambda}_i) &= \delta \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i - (1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i - \mu_i \mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda}_i \\ &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

実行可能性条件

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{w}_i = 1, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{w}_i \geq \mathbf{0}, \quad (3.23)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_i \geq \mathbf{0}. \quad (3.24)$$

相補性条件

$$\boldsymbol{\lambda}_i \odot \mathbf{w}_i = \mathbf{0}. \quad (3.25)$$

これらを用いることで, 次の単一レベル最適化問題が得られる.

$$\min_{\boldsymbol{\theta}, \{\mathbf{w}_i, \mu_i, \boldsymbol{\lambda}_i\}_{i=1}^T} \quad \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left( -(1 - \delta) \mathbf{r}_i^\top \mathbf{w}_i + \frac{\delta}{2} \mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i \right), \quad (3.26)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{1}^\top \mathbf{w}_i = 1, \quad i = 1, \dots, T, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{w}_i \geq \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, T, \quad (3.28)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_i \geq \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, T, \quad (3.29)$$

$$\delta \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i - (1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i - \mu_i \mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, T, \quad (3.30)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_i \odot \mathbf{w}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, T. \quad (3.31)$$

この定式化を DFL-OPT-K と呼ぶ.

### 3.2.4 DFL-OPT-D と DFL-OPT-K の関係

本節では, 提案手法である DFL-OPT-D と DFL-OPT-K の理論的關係を整理する. 両者はいずれも同一の下位ポートフォリオ最適化問題 (3.8) に基づいて導出されるが, 下位問題の最適性条件の表現方法が異なる.

**命題 3.1** (DFL-OPT-D と DFL-OPT-K の理論的同値性). 各  $i = 1, \dots, T$  に対して, 下位のポートフォリオ最適化問題 (3.8) が凸二次計画問題であり, Slater 条件を満たすと仮定する. このとき, DFL-OPT-D ((3.15)–(3.20)) と DFL-OPT-K ((3.26)–(3.31)) は同一の解集合を持つ. すなわち, 両定式化は理論的に等価である.

(証明は Appendix に示す.)

以上より,DFL-OPT-D と DFL-OPT-K は理論的には等価である. しかしながら, 数値計算の観点からは両者は異なる特徴を持つ.DFL-OPT-D は相補性条件を含まない一方で, 双対関数を含む非線形な等式制約(3.19)を含む. 一方,DFL-OPT-K は相補性条件という非線形制約を含むが, 制約構造はより直接的である.

これらはいずれも非線形制約を含む非凸最適化問題であるため, 一般には大域的最適解を保証する多項式時間アルゴリズムは存在せず, 数値計算においては局所解への収束や初期値依存性が生じ得る. これらの違いが数値的安定性や計算効率に与える影響については, 第 4 章の数値実験において比較・検討する.

## 第 4 章 数値実験

本章では, 第 3 章で提案した DFL-OPT-D および DFL-OPT-K の数値的挙動と実務的有効性を, 実データを用いたタクティカル・アセット・アロケーション (Tactical Asset Allocation; TAA) の文脈で評価する. 特に, (i) dual 定式化と KKT 定式化の数値的差異, (ii) 初期化の影響, (iii) 提案手法がどのような状況で相対的な優位性を示すか, という点に焦点を当てる.

### 4.1 実データ実験の設定

本節では, 実験の基本方針, 使用データ, 共分散推定方法, 比較手法, ならびに初期化およびソルバー設定について述べる. 本章を通じて, 比較手法間で実験設定を可能な限り統一し, 学習枠組みおよび定式化の違いに起因する差異に焦点を当てる.

#### 4.1.1 実験の基本方針

第 3 章で示したとおり, DFL-OPT-D および DFL-OPT-K はいずれも, 下位に制約付き平均-分散最適化問題を含む非凸な非線形最適化問題として定式化される. そのため, 数値計算においては初期解やソルバー設定に依存して, 異なる局所解へ収束する可能性がある.

本研究の目的は, 特定の初期化やハイパーパラメータ調整によって得られた「最良の局所解」を主張することではない. むしろ, 実務的に自然な制約条件と統一された実験設定の下で, DFL に基づく定式化がどのような挙動・特性を示すかを体系的に評価することを目的とする.

このため, 本章では可能な限り

- 使用データ
- 特徴量設計
- 制約条件
- 評価指標
- 初期化およびソルバー設定

を比較手法間で統一し, モデル構造および学習方式の違いそのものに起因する差異に焦点を当てる.

#### 4.1.2 使用データおよび学習・再バランス設定

実データ実験では, 短期タクティカル・アセット・アロケーション (Tactical Asset Allocation; TAA) を想定し, Yahoo Finance から取得した調整後終値に基づく週次リターン (2006 年 1 月から 2025 年 12 月) を用いる. 投資対象は, 異なるリスク特性を代表する ETF として, 以下の 4 資産を選択する.

- SPDR S&P 500 ETF Trust (SPY): 米国株式
- SPDR Gold Shares (GLD): 金
- iShares MSCI Emerging Markets ETF (EEM): 新興国株式
- iShares 20+ Year Treasury Bond ETF (TLT): 米国長期国債

各時点  $t$  における特徴量  $\mathbf{x}_t$  として, 直近 26 週の週次リターン平均を用いる. これは, 短期的なトレンド情報を反映しつつ, 週次データに内在するノイズを一定程度平滑化するための設定である.

モデルの学習およびポートフォリオの更新はローリング手順に基づき, 直近 26 週 (約半年) の週次リターン

を用いて推定を行い、推定したパラメータは次の 4 週間（約 1 か月）にわたって固定して用いる。これにより、週次データの短期ノイズに過度に反応することを抑えつつ、半年程度の情報に基づく短期的な状態推定と月次の運用更新という時間スケールを両立する。

なお、以降の実験ではリスクとリターンのトレードオフ係数を中庸的な設定として  $\delta = 0.5$  に固定する。本章ではハイパーパラメータ最適化は目的とせず、すべての手法で学習窓長と更新頻度を共通に固定することで、第 3 章の定式化および学習枠組みの差異の影響を比較する。

### 4.1.3 共分散行列の推定

本研究では、ポートフォリオ最適化に用いる共分散行列  $\mathbf{V}_t$  を、時間減衰を考慮した標本共分散行列に対して Oracle Approximating Shrinkage (OAS) を適用する方法により推定する [10]。

まず、時点  $t$  における EWMA 共分散行列  $\mathbf{S}_t$  を次式で定義する。

$$\mathbf{S}_t = (1 - \alpha) \sum_{k=0}^{L-1} \alpha^k (\mathbf{r}_{t-k} - \bar{\mathbf{r}}_t)(\mathbf{r}_{t-k} - \bar{\mathbf{r}}_t)^\top, \quad (4.1)$$

ここで、 $L = 13$  はローリング窓長（約四半期）であり、本研究の短期ローリング設定に基づき固定する。また、 $\alpha = 0.97$  は時間減衰率であり、実務における業界慣例に基づき固定する [11]。 $\bar{\mathbf{r}}_t$  は同窓内の平均リターンを表す。

次に、OAS に基づく縮小共分散行列  $\mathbf{V}_t$  を次のように定義する。

$$\mathbf{V}_t = (1 - \phi_t) \mathbf{S}_t + \phi_t \frac{\text{tr}(\mathbf{S}_t)}{d} \mathbf{I}, \quad (4.2)$$

ここで  $\phi_t \in [0, 1]$  は縮小強度であり、OAS により解析的に決定される。また、EWMA のように観測に重みを付ける場合、 $n_{\text{eff}}$  は「時間減衰率  $\alpha$  に対応する実効サンプルサイズ」とみなせる [11]。OAS は、小標本下において標本共分散行列の推定誤差を抑制しつつ、分散構造の情報を保持する点で知られており、本研究のような短期ローリング設定と高い親和性を持つ [10]。縮小係数  $\phi_t$  および  $n_{\text{eff}}$  の具体式は Appendix に示す。

本研究では、共分散推定手法の比較や最適化は目的とせず、すべての手法に対して同一の  $\mathbf{V}_t$  を用いる。これにより、推定リターンと意思決定の統合方法（PFL / IPO / DFL）の違いに焦点を当てる。

### 4.1.4 評価指標

本章の数値実験におけるポートフォリオ性能の評価には、リターン水準、リスク水準、リスク調整後パフォーマンス、および売買行動の安定性を多面的に捉えるため、以下の指標を用いる。いずれの指標も、取引コスト (bps) を考慮した実行ベースの損益系列に基づいて算出する。

リターン指標

- ・ 年率リターン (Annualized Return)：期間全体の累積リターンから年率換算した平均成長率を用いる。
- ・ 最終資産価値 (Final Wealth)：初期資産を 1 としたときの評価期間終了時点における累積資産額を用いる。

リスク調整後指標

- ・ Sharpe 比：無リスク利子率を 0 と仮定し、年率リターンを年率ボラティリティで除した値として定義する。

$$\text{Sharpe} = \frac{\mu}{\sigma},$$

ここで  $\mu$  は年率リターン、 $\sigma$  は年率ボラティリティである。

リスク指標

- 年率ボラティリティ (Annualized Volatility)：週次リターンの標準偏差を年率換算した値とする。
- 最大ドローダウン (Maximum Drawdown)：累積資産曲線におけるピークからの最大下落率を測定する。
- CVaR<sub>95</sub>：リターン分布の下位 5% における平均損失を用い、極端な損失リスクを評価する。

#### 売買行動・安定性指標

- 平均ターンオーバー (Turnover)：各リバランス時点におけるポートフォリオ変更量の平均値を用いる。
- スイッチ頻度 (Switch Frequency)：リバランス時点において、最大ウェイトを持つ資産が前期から変更された割合を測定する。本指標は、意思決定の安定性およびポートフォリオ構成の急激な変化の度合いを捉える目的で導入する。

以上の評価指標は、すべての比較手法に対して同一の定義および算出方法を適用する。これにより、手法間の性能差が定式化および学習枠組みの違いに起因するものであることを明確にする。

### 4.1.5 比較手法

実データ実験では、予測モデルや制約条件等を可能な限り統一したうえで、以下の手法を比較対象として用いる。

#### 提案手法

- DFL-OPT-D：第 3 章で導出した強双対性条件に基づく提案手法。
- DFL-OPT-K：第 3 章で導出した KKT 条件に基づく提案手法。

#### Prediction-Focused Learning の基準

- OLS + MVO：期待リターンを最小二乗誤差で推定し、得られた推定値  $\hat{r}$  を平均-分散最適化に入力して配分を決定する、実務でも標準的な構成。これを PFL の基準手法として採用する。

#### 予測統合型手法

- IPO-GRAD：最適化問題を学習ループに組み込み、下位最適化問題を通じて勾配を伝播させる End-to-End 手法 [4]。

#### Decision-Focused Learning 系

- DFL-CF：(3.6)–(3.7) の下位問題において制約を外した場合に得られる解析解に基づく手法であり、[4] に示される解析的解に対応する。本研究では、解析解ベースの基準および初期化候補として用いる。
- SPO+：線形最適化問題に対して機会損失の凸上界を構成することで、勾配ベースの学習を可能にした手法 [9]。本研究の制約付き平均-分散問題には直接適用できないため、近似的設定により比較対象に含める。

#### ベンチマーク（運用戦略）

- Buy-and-Hold (S&P 500)：株式市場に対する単純な長期保有戦略。
- 等分散投資 ( $1/N$ )：推定誤差に依存しない頑健な基準配分。

### 4.1.6 初期化およびソルバー設定

第 3 章で述べたとおり、本研究で扱う最適化問題は非凸であり、初期化により到達する局所解が変化し得る。本研究では、非線形最適化ソルバーとして KNITRO を用い、ソルバー設定は原則として全手法で統一する。

DFL 系手法では、実データ実験におけるデフォルト初期値として  $\theta = \mathbf{0}$  を用い、その他の変数は中立的な初期値から開始する。後続の実験では、DFL-CF に基づく初期化も導入し、初期化の影響を検証する。

4.2 実験結果

4.2.1 実データによるベースライン比較

本節では、第 3 章で導出した提案手法である DFL-OPT-D / DFL-OPT-K について、既存手法との比較評価を行う。

まず、図 4.1 に、2006/01/01 から 2025/12/31 までの全期間における各手法の累積リターン推移を示す。図 4.1 より、提案手法は DFL-OPT-D / DFL-OPT-K のいずれの定式化においても、多くの比較手法を上回る累積リターンを示していることが確認できる。特に、長期にわたる運用期間を通じて、リターンの上振れだけでなく、下落局面における毀損の抑制も一定程度観察される。

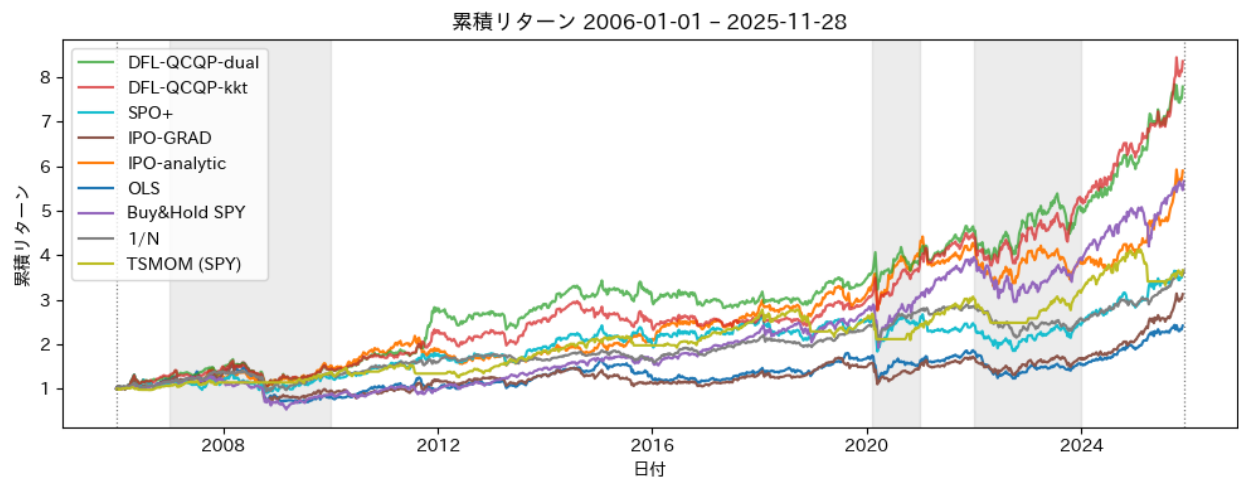


図4.1: 累積リターン推移

次に、表 4.1 に主要なパフォーマンス指標をまとめる。提案手法は年率リターン・最終資産において上位であるだけでなく、Sharpe 比・CVaR(95%) といったリスク調整後指標においても良好な値を示している。このことは、単なるリターンの増大ではなく、リスク制御を伴った意思決定の改善が実現されている可能性を示唆する。

さらに、DFL-OPT-D と DFL-OPT-K の比較では、KKT 定式化が多くの指標で僅かに優位である一方、両者の性能差は大きくなく、定式化の違いが投資性能に与える影響は限定的であることも示唆される。

表4.1: パフォーマンス比較（2006–2025, ベースライン設定）

Model	Sharpe	Terminal	Ann. Return	Ann. Vol	CVaR <sub>95</sub>	MaxDD
DFL-OPT-K	<b>0.78</b>	<b>8.36</b>	<b>11.86</b>	15.22	5.01	-35.13
DFL-OPT-D	0.75	7.79	11.54	15.45	5.03	-36.39
DFL-CF	0.60	5.90	10.46	17.38	5.68	<b>-30.43</b>
IPO-GRAD	0.40	3.13	7.48	18.49	6.44	-55.15
SPO+	0.45	3.62	8.10	17.91	5.93	-33.37
PFL	0.33	2.42	6.29	19.06	6.73	-55.68
Buy&Hold	0.57	5.67	10.40	18.16	6.23	-58.36
1/N	0.63	3.65	7.16	<b>11.43</b>	<b>3.67</b>	-33.49

以上より、提案手法（DFL-OPT-D / DFL-OPT-K）は既存の予測主導型手法（PFL）および代表的 DFL 手法（SPO+）、ならびに IPO 手法に対して競争力のある投資性能を示すことが確認できる。

## 4.2.2 DFL-OPT-D と DFL-OPT-K の数値的比較

本節では、二つの提案手法の数値的性質を比較する。両者は理論的には等価であり、同一の最適解集合を持つことが示されるが、非凸最適化問題を数値的に解く際には、定式化の違いがソルバの収束挙動、計算コスト、および探索経路への依存性に影響を与える可能性がある。

本節の目的は投資パフォーマンスの優劣を比較することではなく、どちらの定式化が数値計算としてより安定的かつ実務的に採用可能かを明らかにすることである。

そのため、以下の4つの観点から比較を行う。

1. 数値計算の信頼性
2. 計算コスト
3. 解の同等性
4. 探索経路摂動に対する頑健性

### 数値計算の信頼性

まず、各定式化に対する数値計算の信頼性を評価する。ここでは、各リバランス時点で解かれた最適化問題に対し、ソルバが返した終了ステータスを集計した。

評価区分は以下の通りである。また、本実験では実行可能解が得られなかったケースはなかった。

- Optimal：最適性条件を満たして終了
- Warning：実行可能解は得られたが、収束判定に関する警告あり
- Nearly optimal：最適性改善が所定の閾値以下となった段階での終了
- No improve：最適性改善が全く見られない段階での終了
- xtol iters：変数ベクトルの相対変化が xtol 未満となった段階での終了

なお、Warning に分類されたケースについても、全てのケースで実行可能解が返却されており、制約違反量はいずれも数値誤差レベル ( $10^{-8}$  以下) に留まっている。

表4.2: ソルバー終了ステータスの分布と Warning 内訳

Model	Optimal (%)	Warning (%)	Nearly optimal (件数)	No improve (件数)	xtol iters (件数)
DFL-OPT-D	95.0	5.0	9	2	2
DFL-OPT-K	88.1	11.9	21	7	3

表 4.2 より、数値計算としての基本的な安定性は共通して確保されていることが分かる。一方で、DFL-OPT-K では Warning の割合がやや高いが、その内訳を確認すると、多くは最適性改善が所定の閾値以下となった段階での終了であり、実行可能性や制約充足の破綻を示すものではない。

### 計算コストの比較

次に、計算コストの観点から両定式化を比較する。非凸最適化では平均計算時間だけでなく、稀に発生する難ケースにおける計算時間の増大が運用上のボトルネックとなり得る。このため、本研究では 90 パーセンタイル (p90) を指標として追加で用いる。

評価指標は以下の通りである。

- p90：最悪 10% の計算時間を表す指標



表4.3: 計算時間の統計 (秒)

Model	中央値	平均	p90
DFL-OPT-D	1.20	1.65	2.99
DFL-OPT-K	0.75	0.95	1.71

表 4.3 より, 中央値および平均値では両定式化に大きな差は見られないものの, p90 においては DFL-OPT-K の方が小さく, 計算時間分布の裾が抑制されている. すなわち, DFL-OPT-K は最悪ケースにおいても計算時間が過度に増大しにくい特性を持つ.

### 解の同等性の検証

次に, DFL-OPT-D と DFL-OPT-K が数値的にも同一の問題を解いているかを検証する. 評価指標としては以下の 3 つを用いた.

表4.4: 解の一致度 (DFL-OPT-D vs DFL-OPT-K)

指標	中央値	p90 (90 パーセンタイル)
下位 MVO 目的関数値差	$1.2 \times 10^{-10}$	$5.3 \times 10^{-3}$
学習目的関数値差	$2.8 \times 10^{-6}$	$1.3 \times 10^{-3}$
重み $L_1$ 距離	$3.4 \times 10^{-8}$	1.17

中央値ではすべての指標が数値誤差レベルに留まっており, DFL-OPT-D と DFL-OPT-K は大多数の期間ではほぼ同一の解を与えている. 一方, p90 付近では一時的に差が大きくなるケースが存在するが, これは非凸性に起因する探索経路の差異によるものであり, 特定の定式化が系統的に劣ることを示すものではない.

### 探索経路摂動に対する頑健性

非凸問題では, 同一問題であっても初期値によって探索経路が変わり, 到達する局所解が変化し得る. そこで補助変数のうち投資配分の初期値を摂動し, 探索経路依存性を評価した. ここでは摂動強度を  $L_1$  距離

$$\Delta \triangleq \|\mathbf{w}_t^{(0)} - \mathbf{w}_{\text{base},t}\|_1$$

で定義し,  $\Delta \approx 0.2, 0.4$  の 2 条件で乱数シードを変えて学習・評価を行った. ここで  $\mathbf{w}_t^{(0)}$  は初期配分,  $\mathbf{w}_{\text{base},t}$  は摂動なし (ベースライン) の初期配分である. 両者はいずれも実行可能集合  $\{\mathbf{w} \mid \mathbf{1}^\top \mathbf{w} = 1, \mathbf{w} \geq \mathbf{0}\}$  (単体) 上の点である. 各シードについて, 摂動ありで得られた指標値とベースラインで得られた指標値の差の絶対値を集計し, 摂動に対する感度を比較する.

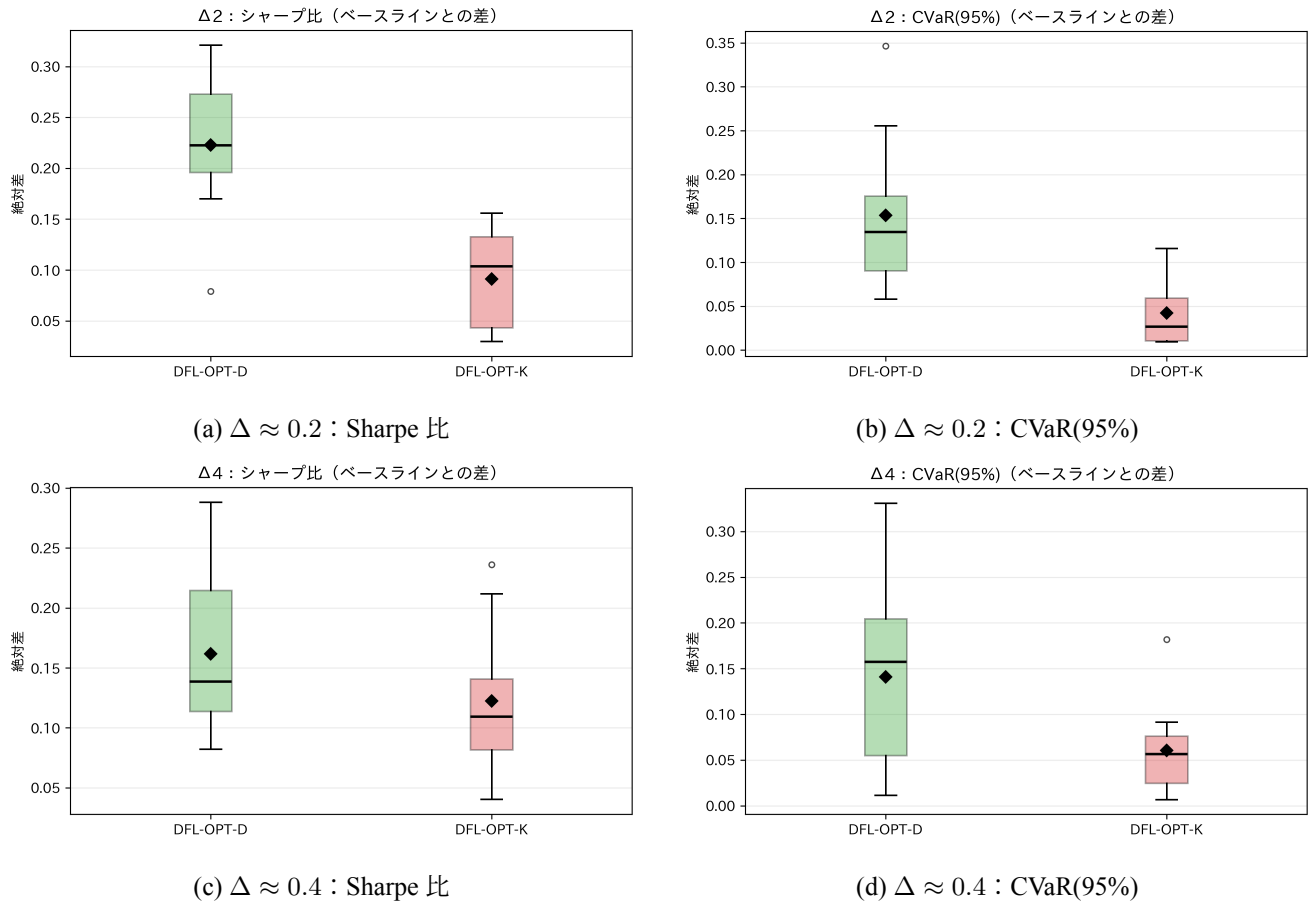


図4.2: 探索経路摂動に対する頑健性：ベースラインとの絶対値の差の分布

図 4.2より, いずれの指標でも摂動強度が大きいほどベースラインとの差は増大する. その上で, DFL-OPT-K は DFL-OPT-D と比べて差の分布が小さく, 探索経路摂動に対して相対的に頑健であることが確認できる. 一方, 表 4.2に示すように KKT 定式化では Warning が増えやすいが, いずれも実行可能解は返却されており, 本設定では「解が得られない」事象は観測されない. 以上より, 運用上の安定性という観点では, DFL-OPT-K を優先するのが自然である.

### 4.2.3 初期解導入の効果検証

本節では, 提案手法 DFL-OPT-K において制約なしの解析解 (以下, DFL-CF 解) を初期解として与えた場合の効果を検証する. 非凸最適化問題においては, 探索開始点が収束先の局所解および収束速度に影響を与えることが知られている. 本研究では,

- Init = None : 初期解を与えない場合
- Init = DFL-CF : DFL-CF 解を初期解として与える場合

を比較し, 性能・安定性・計算コストの観点から初期解導入の影響を定量的に評価する.

#### 累積リターンの比較

図 4.3に, 初期解導入の有無および比較手法を含めた累積リターン推移を示す. 図 4.3より, DFL-OPT-K は初期解の有無にかかわらず比較手法を上回る累積リターンを示す一方, 初期解 (DFL-CF 解) を導入することで, 特に後半期間において累積リターンが上方にシフトしていることが確認できる. また, 初期解として用いた DFL-CF 解そのものよりも, 再最適化後の DFL-OPT-K の方が高い最終パフォーマンスを達成しており, 良好な初期解は最終解を固定するものではなく, 探索を有利な領域へ導く役割を果たしていることが示唆される.

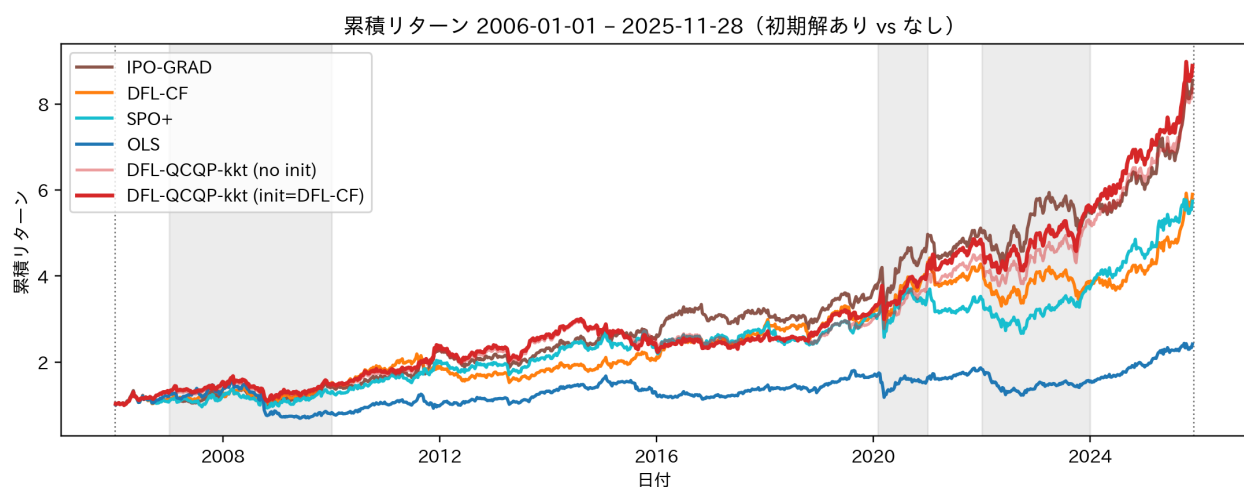


図4.3: 累積リターン推移: 初期解あり vs なし, およびベンチマークを除いた比較手法

### 全期間の性能指標比較

次に, 全期間における主要評価指標を表 4.5に示す. 括弧内は初期解なしとの差分である.

表4.5: 初期解導入の有無による性能比較 (全期間)

Model	Sharpe	Terminal	Ann. Return (%)	Ann. Vol (%)	CVaR <sub>95</sub>	MaxDD (%)
DFL-OPT-K (Init=DFL-CF)	<b>0.80 (+0.02)</b>	<b>8.89 (+0.53)</b>	<b>12.16 (+0.30)</b>	<b>15.17 (−0.05)</b>	<b>−4.97 (+0.04)</b>	<b>−34.73 (+0.40)</b>
DFL-OPT-K (Init=None)	0.78	8.36	11.86	15.22	−5.01	−35.13
DFL-CF	0.60	5.90	10.46	17.38	−5.68	−30.43
IPO-GRAD	0.67	7.30	11.51	17.26	−5.51	<b>−29.75</b>
SPO+	0.57	5.60	10.29	17.95	−5.77	−33.25
PFL	0.33	2.42	6.29	19.06	−6.73	−55.68

表 4.5から, 初期解導入によりリターン・リスク調整後指標が一貫して改善していることが読み取れる. 年率ボラティリティはほぼ不変であり, リスク水準を上げることなくリターン効率が向上している. 改善幅は過度に大きくはないが, 全指標で符号が揃っている点は重要であり, 初期解導入が体系的に探索結果を改善していることを示している.

### 初期解摂動に対する頑健性

非凸最適化では, 初期解の僅かな違いが探索経路を変え, 異なる局所解へ収束する可能性がある. そこで, 初期解に対して大きさ  $\Delta \approx 0.2$  の摂動を与え, 乱数 seed を変えて 10 回繰り返した際の結果を集計し, 初期化の安定性を検証する. 比較対象として, 同一の摂動強度の下で初期解なしも同様に 10 回評価する.

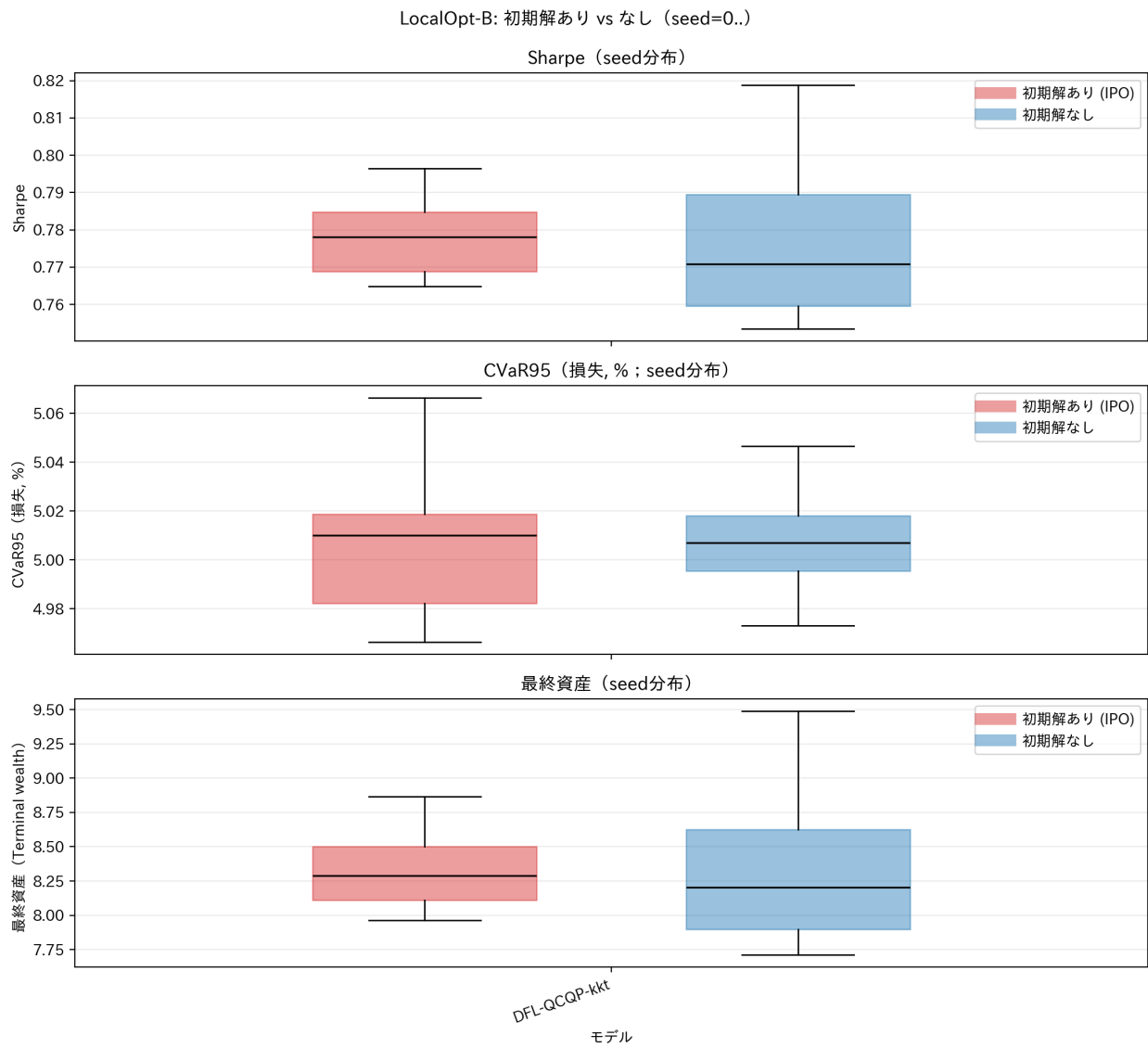


図4.4: 初期解摂動下での結果分布：初期解ありと初期解なしの比較

図 4.4より, 初期解ありは初期解なしと比較して,Sharpe 比の中央値が高く (+0.007) , 分散 (IQR) が小さい傾向が確認できる. また, 最終資産の中央値も初期解ありで高い (+0.084) 一方,CVaR<sub>95</sub> loss の中央値差は僅少である. これらは, 初期解の摂動に対しても性能が大きく崩れにくく, かつ解のばらつきが抑制されることを示唆しており, 初期解導入が探索を安定な局所解近傍へ導く効果を持つ可能性を支持する.

表4.6: 初期解摂動 ( $\Delta \approx 0.2$ ) 下の要約 (10 seeds ; median と IQR)

Setting	Sharpe (med.)	Sharpe (IQR)	CVaR <sub>95</sub> (med.)
DFL-OPT-K (Init = DFL-CF)	0.778	0.016	5.010
DFL-OPT-K (Init = None)	0.771	0.030	5.007

#### 計算時間への影響

表 4.7に, 計算時間の比較 (平均・最大) および Warning 件数を示す.

表4.7: 計算時間の比較（初期解あり vs なし）

Model	Mean fit time (sec)	Max fit time (sec)
DFL-OPT-K (Init = DFL-CF)	0.73	2.66
DFL-OPT-K (Init = None)	0.95	8.89

初期解を導入することで、平均計算時間は短縮され、最大計算時間も大幅に抑制されている。これは、初期解が探索初期段階における不利な方向への移動を抑制し、比較的早期に良好な局所解近傍へ到達している可能性を示唆する。以上より、以降は初期解ありを基本設定として、性能比較および統計的検定を行う。

#### 統計的有意性

非凸最適化では、初期解の有無により探索経路が変化し、得られる解（ひいては性能評価）にも差が生じ得る。そのため本研究では、初期解（DFL-CF）導入の効果と計算時間への影響を確認した上で、初期解あり（DFL-CF init）の DFL-OPT-K を対象として、性能差の統計的有意性を評価する。

表 4.8に、ブートストラップに基づく対応のある検定の結果を示す。表中の“1”は 5% 水準で DFL が比較モデルに対して当該指標で有意に優位であることを表し、“0”は有意差が確認できないことを表す。また、1\* は 1% 水準でも有意であることを表す。

表4.8: 統計的有意性（5% 水準,1: DFL が有意に優位,0: 有意差なし；1\* は 1% 水準でも有意）

DFL モデル	比較モデル	Sharpe 比	最終資産	年率リターン	年率ボラティリティ	CVaR <sub>95</sub>
DFL-OPT-K (Init=DFL-CF)	Buy&Hold(SPY)	0	0	0	1*	1
DFL-OPT-K (Init=DFL-CF)	DFL-CF	0	0	0	1*	1
DFL-OPT-K (Init=DFL-CF)	IPO-GRAD	0	0	0	1*	0
DFL-OPT-K (Init=DFL-CF)	PFL	1	0	0	1*	1*
DFL-OPT-K (Init=DFL-CF)	SPO+	0	0	0	1*	1*

表 4.8より、DFL-OPT-K（Init=DFL-CF）は、多くの比較対象に対して年率ボラティリティおよび CVaR<sub>95</sub> の観点で有意な改善を示しており、性能向上が平均リターンの増大というよりもリスク低減（特に下方リスクの抑制）として現れていることが示唆される。また、一部の比較では 1% 水準でも有意差が確認される（1\*）。

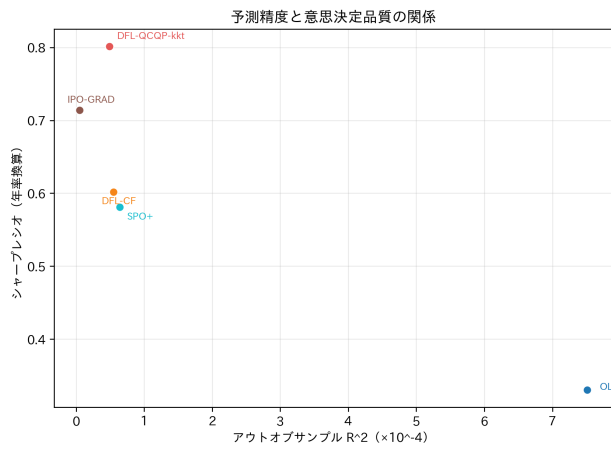
以上より、良好な初期解の導入は、非凸 DFL 問題において性能・安定性・計算効率を同時に改善する有効な戦略であると結論づけられる。

#### 4.2.4 提案手法の性質分析

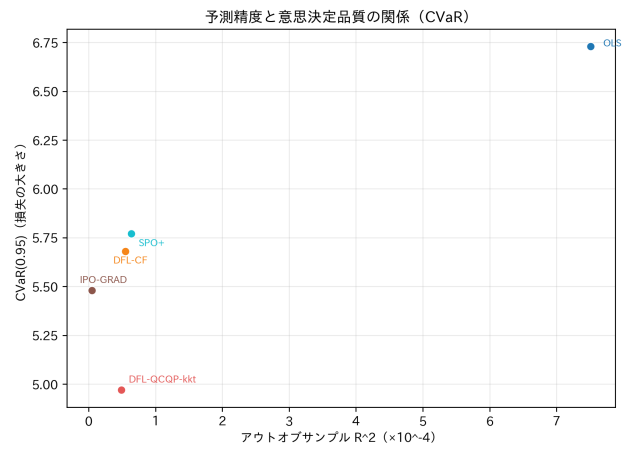
本節では、提案手法が予測精度の改善を直接目的としないにもかかわらず、意思決定品質を向上させるという DFL の基本的性質を満たしているかを検証する。加えて、最適化によって得られるポートフォリオ解  $w$  の構造的特徴を分析し、提案手法がどのような意思決定を学習しているかを明らかにする。

##### 予測精度と意思決定品質の乖離

まず、予測精度と意思決定品質の関係を確認する。図 4.5は、各手法についてアウト・オブ・サンプルの予測精度指標  $R^2$  と、対応する意思決定品質（リスク調整後リターンおよび下方リスク）との関係を示した散布図である。本実験では  $R^2$  が  $10^{-4}$  オーダーのため、可視化のため横軸は  $R^2 \times 10^4$  を用いている。



(a)  $R^2$  と Sharpe 比



(b)  $R^2$  と  $CVaR_{95}$

図4.5:  $R^2$  と意思決定品質の関係

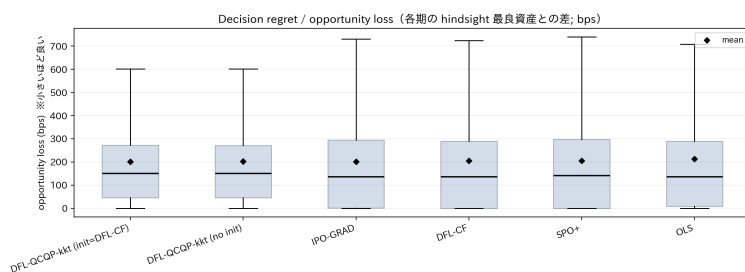
図 4.5 より, 予測精度と意思決定品質が必ずしも正の関係にないことが確認できる. 特に PFL は相対的に大きな  $R^2$  を示す一方で, Sharpe 比は低く,  $CVaR_{95}$  も大きい (= 下方リスクが大きい). これは, 予測誤差の二乗最小化が, 必ずしも最適なポートフォリオ選択につながらないことを示唆している.

一方で, 提案手法 (DFL-OPT-K) は  $R^2$  が必ずしも高くはないにもかかわらず, Sharpe 比が高く,  $CVaR_{95}$  も小さい. この結果は, 「予測精度を最大化すること」と「意思決定品質を最大化すること」が異なる目的であり, 後者を直接最適化対象とする DFL の設計思想が, 下方リスクを含む意思決定性能の向上に寄与していることを支持する. 以上より, 本実験設定において, PFL と DFL アプローチの差異が実証的に確認されたと言える.

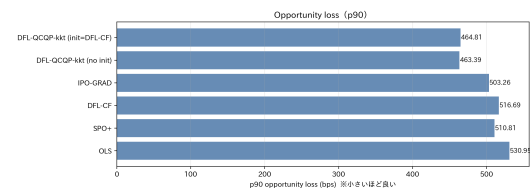
### 意思決定誤差の分布

次に, 意思決定重視学習としての効果をより直接に確認するため, 意思決定誤差に着目する. ここで意思決定誤差は, 各週において「理想解 (実現リターンが既知として得られる最適配分) に基づく目的関数値」と「予測解に基づく目的関数値」の差を bps で表したものであり, 小さいほど良い.

図 4.6 に, 全期間 ( $n = 1038$ ) での意思決定誤差の分布と中央値を示す.



(a) 意思決定誤差の分布



(b) 中央値の比較

図4.6: 意思決定誤差の比較

図 4.6 および表 4.9 より, 提案手法 (DFL-OPT-K) は中央値において最小級であるだけでなく,  $p_{90} / p_{99}$  といった大きな損失が発生する局面において PFL を明確に上回る. このことは, DFL が「平均的に僅かに良い」だけでなく, 悪い局面での損失を抑える方向に意思決定を学習している可能性を示唆する.

表4.9: 意思決定誤差の要約統計

Model	平均	中央値	p90	p99
DFL-OPT-K (Init = DFL-CF)	201.63	150.64	464.81	1044.89
DFL-CF	204.89	137.03	516.69	1142.46
IPO-GRAD	201.37	135.95	503.26	1050.03
SPO+	204.98	141.90	510.81	1052.91
PFL	212.86	137.13	530.95	1204.22

### ターンオーバーと性能の関係

次に, 提案手法の性能が「売買量を増やしたこと」によって見かけ上改善していないかを確認する. 図 4.7は, 取引コスト控除後の評価指標 (Sharpe 比および  $CVaR_{95}$ ) と, 平均ターンオーバーの関係を示す.

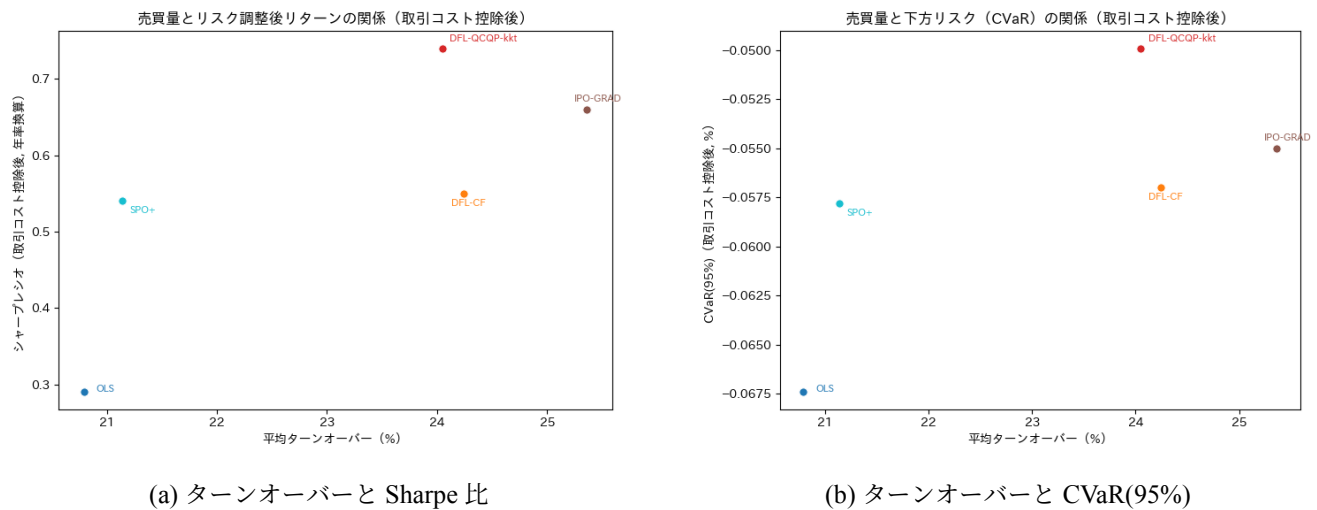


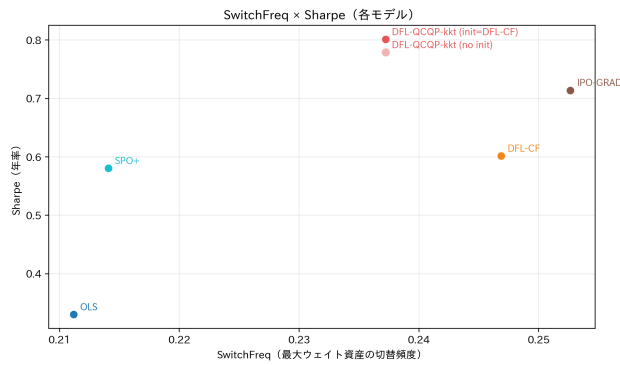
図4.7: 売買量とリスク調整後性能の関係

図 4.7より, 提案手法 (DFL-OPT-K) は PFL と比較してターンオーバーが同程度の水準にある一方で, Sharpe 比は高く,  $CVaR_{95}$  も改善している. また, IPO-GRAD はターンオーバーが大きいにもかかわらず Sharpe 比が提案手法を下回る. これらの結果は, 提案手法の性能改善が単に売買量 (取引回数) の増加に起因するのではなく, 同程度の売買量の下で意思決定 (配分) を改善していることを示唆する.

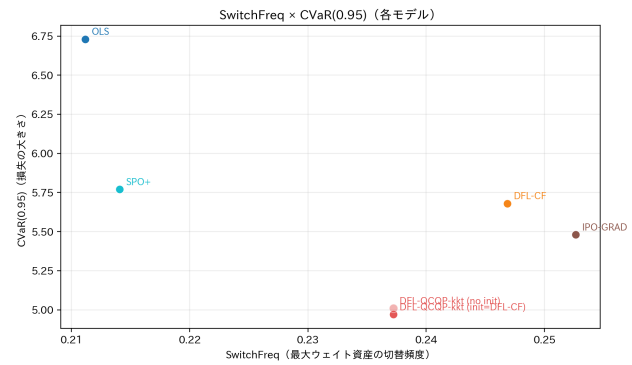
### 最大ウェイト資産のスイッチ頻度と性能の関係

ターンオーバーは売買量の総量を表す指標である一方, 意思決定の「切替」を捉える指標として, 「最大ウェイト資産が前週から切り替わったか」を基準にしたスイッチ頻度を定義する. 具体的には, 各週  $t$  において  $\arg \max_i w_{t,i}$  が前週と異なる場合を切替と数え, その比率をスイッチ頻度とする.

図 4.8に, スイッチ頻度と性能指標 (Sharpe 比および  $CVaR_{95}$ ) の関係を示す.



(a) SwitchFreq と Sharpe 比



(b) SwitchFreq と CVaR(95%) loss

図4.8: 最大ウェイト資産のスイッチ頻度と性能の関係

図 4.8より, スイッチ頻度は 0.21–0.25 程度の狭い範囲に収まっているが, 提案手法は PFL より高い切替頻度を持ちつつ, Sharpe 比が高く,  $CVaR_{95}$  も小さい. これは, 提案手法が単に「頻繁に切り替える」ことで性能を得ているというよりも, 必要な局面で配分の主役資産を切り替える行動を学習し, 下方リスクを抑制しながらリスク調整後リターンを改善している可能性を示唆する.

表4.10: 最大ウェイト資産のスイッチ頻度の要約

Model	Switch count	SwitchFreq	Sharpe	$CVaR_{95}$
DFL-OPT-K (init=DFL-CF)	246	0.237	0.802	4.97
DFL-OPT-K (no init)	246	0.237	0.779	5.01
DFL-CF	256	0.247	0.602	5.68
IPO-GRAD	262	0.253	0.714	5.48
SPO+	222	0.214	0.581	5.77
PFL	219	0.211	0.330	6.73

### ポートフォリオ解 $w$ の構造的特徴

次に, 提案手法が学習した意思決定の「形」を理解するため, 得られたポートフォリオ解  $w$  の構造的特徴を分析する. 表 4.11は, 有効資産数 ( $N_{\text{eff}}$ ), 最大ウェイト, およびウェイトが 0.95 以上となる頻度 (高集中頻度) を要約したものである.

表4.11: ポートフォリオ解の集中度の要約

Model	$H$	$N_{\text{eff}}$	$\max_i w_i$	$P(\max_i w_i \geq 0.95)$
DFL-OPT-K	0.771	1.478	0.826	0.488
DFL-CF	0.967	1.057	0.976	0.914
IPO-GRAD	0.964	1.061	0.973	0.903
OLS	0.947	1.096	0.960	0.865
SPO+	0.968	1.054	0.977	0.912

表 4.11より,PFL は多くの期間で単一資産への極端な集中投資を行う傾向が確認される. これは  $N_{\text{eff}}$  が小さく, 最大ウェイトおよび高集中頻度が高いことから裏付けられる. このような解は, 推定誤差に対して脆弱であり, リスク調整後パフォーマンスの低下につながりやすい.

これに対し, 提案手法は,PFL と比較して極端な一点集中を抑制しつつ, 複数資産を組み合わせたポートフォリオを選択する傾向が見られる.  $N_{\text{eff}}$  の増加や最大ウェイトの低下は, 提案手法が単なる推定値の大小ではな



く、最終的な意思決定品質を考慮した配分構造を学習していることを示唆している。

### 最大リターン資産の捕捉行動

さらに、単なる分散度の違いだけでなく、「どの資産に賭けるか」という行動の違いを確認するため、週次で最大リターンを記録した資産に対する捕捉率を分析した。表 4.12 は、各週において最大リターン資産のウェイトが閾値（0.05）以上となっているかを基準に、捕捉率を集計した結果である。

表4.12: 週次最大リターン資産の捕捉率（閾値 = 0.05）

Model	捕捉率	捕捉回数	見逃し回数
DFL-OPT-K	0.432	448	590
DFL-CF	0.272	282	756
IPO-GRAD	0.278	289	749
SPO+	0.301	312	726
PFL	0.306	318	720

この指標は、各手法が市場環境の変化に応じて、どの程度適切な資産選択を行っているかを定量化するものである。提案手法は PFL と比較して、最大リターン資産を捕捉する頻度が高く、かつ特定資産への過度な固定化を避けている。これは、提案手法が「分散すること」自体を目的としているのではなく、局面ごとに意思決定を切り替える行動を学習していることを示している。

### 条件数レジーム別の相対優位

最後に、「提案手法が効く局面」を説明するため、共分散推定の不安定性を表す指標として、推定共分散行列  $\mathbf{V}_t$  の条件数

$$\kappa(\mathbf{V}_t) := \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{V}_t)}{\lambda_{\min}(\mathbf{V}_t)} \quad (4.3)$$

に着目する。一般に  $\kappa(\mathbf{V}_t)$  が大きいほど推定が不安定であり、最適化問題は入力誤差に敏感になりやすい。本研究では、 $\kappa(\mathbf{V}_t)$  の分位点に基づき、各週を 3 つのレジームに分類し（各  $n = 342$ ）、提案手法と PFL の相対性能を比較する。

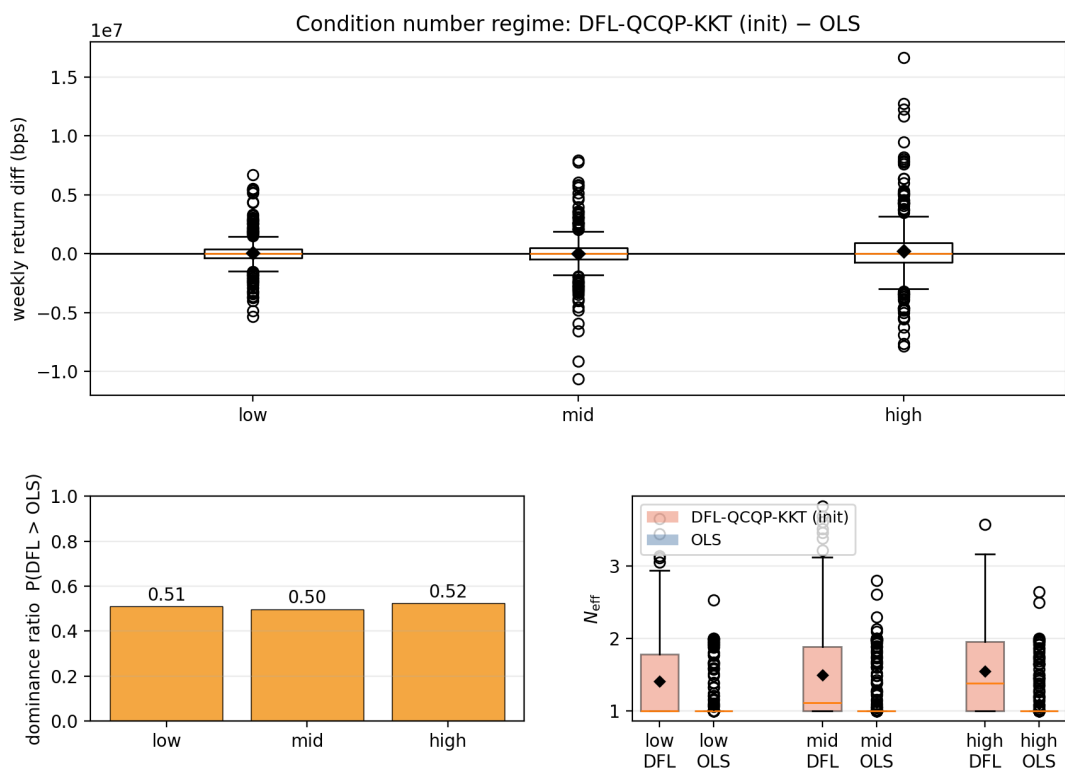


図4.9: 条件数レジーム別の相対優位:

(上) 週次リターン差  $\Delta r_t$  の分布,

(左下) 優越率,

(右下) 有効資産数の比較

図 4.9より, 週次リターン差  $\Delta r_t := r_t^{\text{DFL}} - r_t^{\text{OLS}}$  の中央値は概ね 0 近傍であり, 勝率も 0.5 前後で大きな差は見られない. 一方で, 高条件数レジームでは  $N_{\text{eff}}$  が増加しており, 提案手法が PFL と比較して一点集中を緩和し, 行動様式 (配分構造) を変えていることが示唆される.

ただし, 高条件数では意思決定誤差が全体的に悪化するのは自然である (推定共分散が不安定であり, 最適化が推定誤差に敏感になるため). そこで本研究では, 平均ではなく, 中央値と p90 に注目し, 「悪化をどの程度抑制できるか」を評価する.

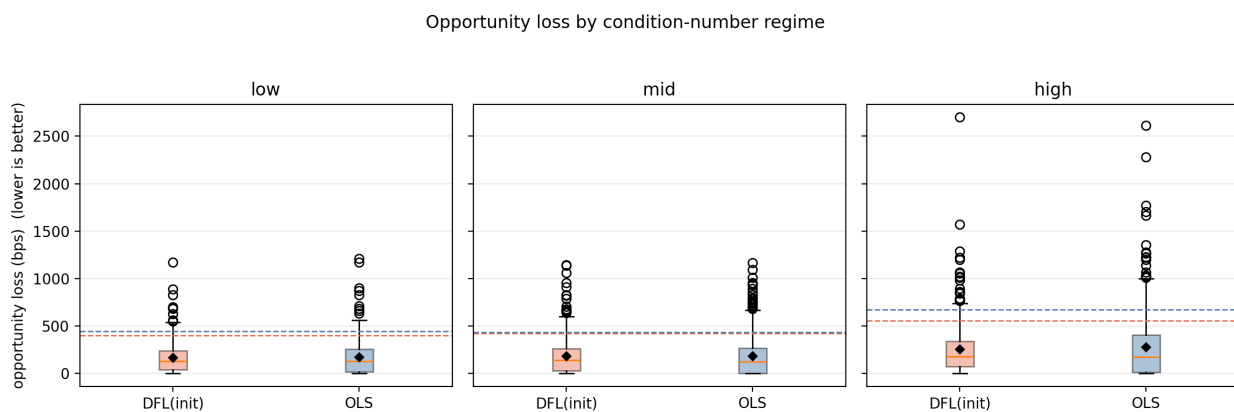


図4.10: 条件数レジーム別の意思決定誤差の比較

図 4.10および表 4.13より, 高条件数レジームでは両手法とも機会損失が増大する一方, 提案手法は p90 を相

対的に抑える傾向が確認できる（high で  $\Delta p90 = -118.7$  bps）。中央値については必ずしも一貫して改善しないが、共分散推定が不安定な局面（cond high）で、tail リスクを抑制するという点で、意思決定重視学習としての有効性が示唆される。

表4.13: 条件数レジーム別の意思決定誤差（中央値 / p90）：DFL-OPT-K と PFL の比較

Regime	$n$	$\kappa$ 中央値	$\kappa$ p90	DFL med.	PFL med.	$\Delta$ med.	DFL p90	PFL p90	$\Delta$ p90
low	342	1.96	2.57	129.8	128.1	+1.7	399.0	445.5	-46.5
mid	342	3.72	4.90	137.5	123.1	+14.4	424.0	433.6	-9.6
high	342	6.90	9.58	179.3	173.7	+5.6	554.1	672.8	-118.7

これらの結果は、提案手法が DFL の枠組みに沿って設計され、実際にその性質を備えた意思決定を実現していることを示している。

## 4.3 補足分析

本節では、本文の主張を補足する目的で、代表的な危機局面における挙動を確認する。危機局面分析は論旨が散りやすいため、本節では 1 イベント（COVID-19 ショック）に絞って示す。

### 4.3.1 危機局面における挙動

図 4.11 は、COVID-19 ショックの危機区間における累積資産推移（開始 = 1）を示す。提案手法（DFL-OPT-K）は、急落局面における下落を相対的に抑制しつつ、その後の回復局面でも追随していることが確認できる。

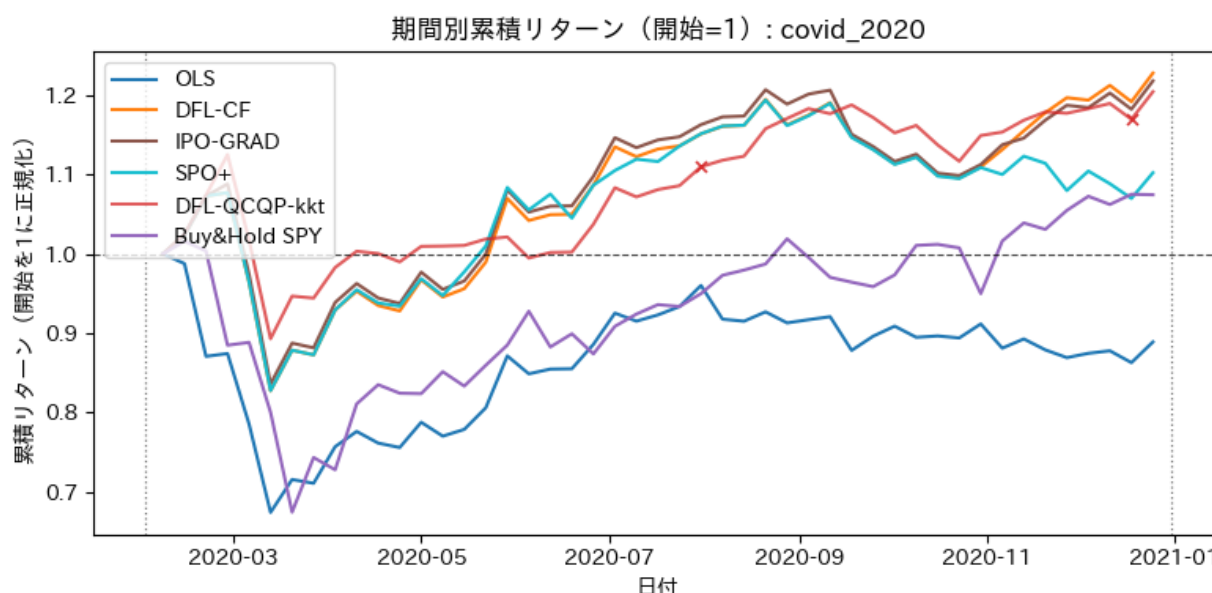


図4.11: COVID-19 ショックにおける累積資産推移

次に、図 4.12 に、主要モデルの資産配分推移を示す。危機局面ではリスク資産（例：SPY, EEM）に対する不確実性が急増する一方、安全資産（TLT）の相対的有利性が高まることが多い。提案手法は、この局面で TLT への配分を動的に増加させ、その後の局面では再びリスク資産への配分を戻す様子が確認できる。これは、提案手法が単に固定的な分散投資を行うのではなく、下方リスクを意識した動的な意思決定を実現していることを示唆する。

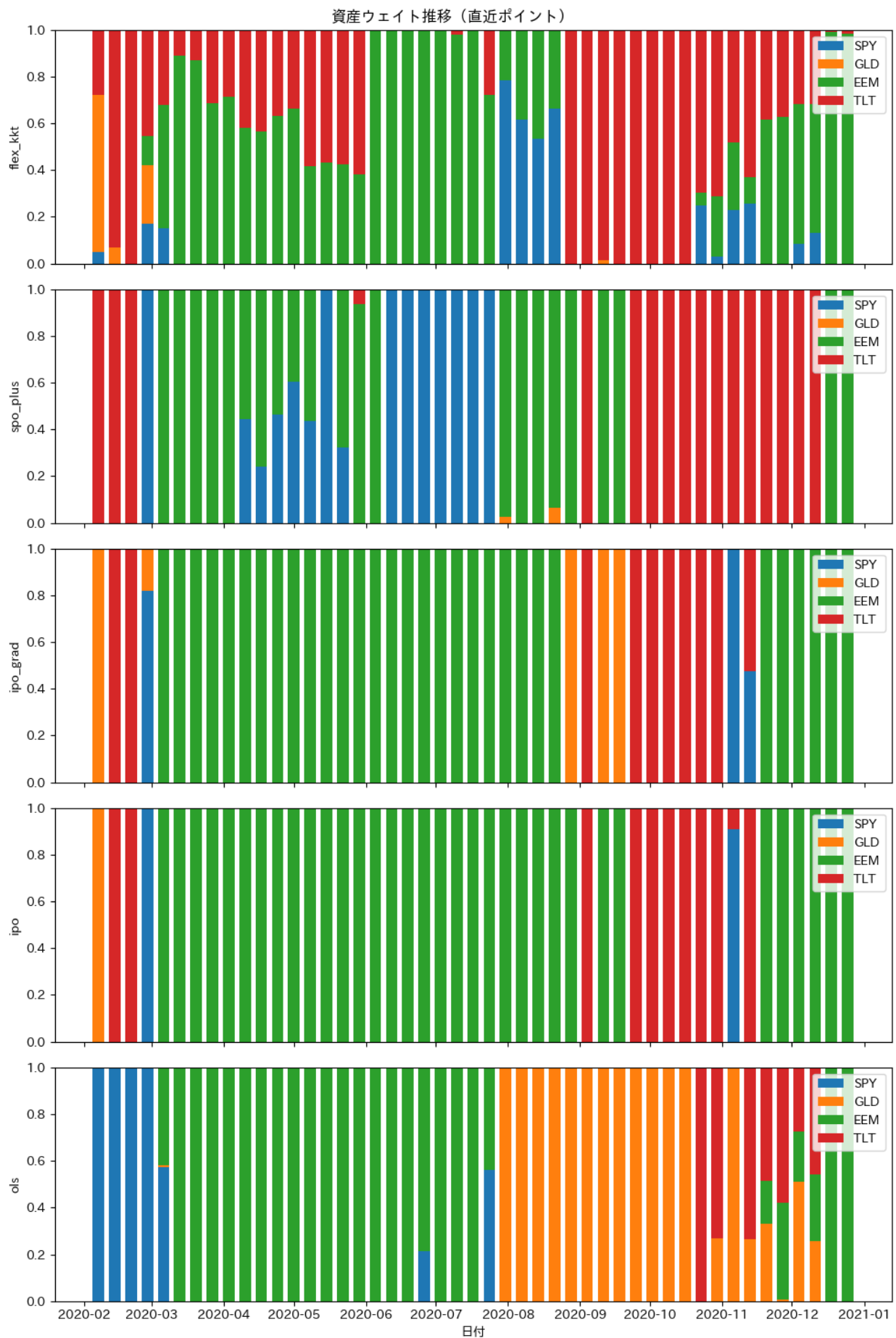


図4.12: COVID-19 ショックにおける資産配分の推移

表 4.14に、危機区間での Total return,CVaR(95%) loss,Sharpe（年率換算）を示す（本文の初期解分析と重複

を避けるため,ここではベース設定(初期解なし)を用いる).提案手法は,下方リスク(CVaR)を抑制しつつ高い Sharpe を維持しており,危機局面における相対的な頑健性が確認できる.

表4.14: COVID-19 ショックにおける性能指標

Model	Total return (%)	CVaR <sub>95</sub> loss (%)	Sharpe (ann.)
DFL-OPT-K	20.44	8.13	1.05
DFL-CF	22.80	9.42	1.00
IPO-GRAD	-8.16	12.11	-0.21
SPO+	-3.28	11.32	0.01
PFL	-11.10	12.06	-0.29

## 第5章 結論

本章では, 本研究で得られた知見を総括する. 方法論的には, 制約付き平均-分散ポートフォリオ最適化を下位問題として含む DFL を悲観的二段階最適化として定式化し, 下位問題の最適性条件に基づく2つの単一レベル再定式化 (DFL-OPT-D, DFL-OPT-K) を導出した. また, 理論的同値性と数値計算上の挙動が必ずしも一致しない点を, 実データ実験で検証可能な形で整理した. 実証的には, 週次 TAA の実データ実験において, 提案手法 (DFL-OPT-K) が  $R^2$  の向上に依らずに, Sharpe 比の改善や CVaR<sub>95</sub> の低下を通じて意思決定品質を向上させ得ることを示した. 改善は平均だけでなく分布の裾 (p90/p99) の抑制としても現れ, 条件数が高い局面で相対的に下方リスクを抑える傾向が確認された. また, この改善は売買量や切替頻度の増加だけでは説明されにくく, COVID-19 局面では安全資産 (TLT) への動的シフトが観察された. 今後は, 非凸性に伴う局所解・初期化依存の低減, 多資産化と現実的制約の導入, および感度分析や解法安定化を通じた実務適用可能性の検証を進める.

# 謝辞

本研究をご指導くださった高野祐一准教授をはじめ, 議論に協力してくださった研究室の皆様に深く感謝いたします.

## 参考文献

- [1] Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77–91.
- [2] Chopra, V. K., & Ziemba, W. T. (1993). The Effect of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice. *The Journal of Portfolio Management*, 19(2), 6–11.
- [3] Lahoud, A. A., Khan, A. S., Schaffernicht, E., Trincavelli, M., & Stork, J. A. (2025). Predict-and-Optimize Techniques for Data-Driven Optimization Problems: A Review. *Neural Processing Letters*, 57, 40.
- [4] Butler, A., & Kwon, R. H. (2023). Integrating Prediction in Mean–Variance Portfolio Optimization. *Quantitative Finance*, 23(3), 429–452.
- [5] Mandi, J., Kotary, J., Berden, S., Mulamba, M., Bucarey, V., & Fioretto, F. (2024). Decision-Focused Learning: Foundations, State of the Art, Benchmark and Future Opportunities. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 81, 1623–1701.
- [6] Lee, J., Jeon, H., Bae, H., & Lee, Y. (2025). Return Prediction for Mean-Variance Portfolio Selection: How Decision-Focused Learning Shapes Forecasting Models. In *Proceedings of ICAIF 2025*, 114–122.
- [7] Bucarey, V., Calderón, S., Muñoz, G., & Semet, F. (2024). Decision-Focused Predictions via Pessimistic Bilevel Optimization. In *Proceedings of CPAIOR 2024*, LNCS 14742, 127–135.
- [8] Shah, S., Wang, K., Chen, H., Perrault, A., Doshi-Velez, F., & Tambe, M. (2022). Decision-Focused Learning without Decision-Oracles: Learning Locally Optimized Decision Losses. In *Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS 2022)*.
- [9] Elmachtoub, A. N., & Grigas, P. (2022). Smart Predict, Then Optimize. *Management Science*, 68(1), 9–26.
- [10] Chen, Y., Wiesel, A., & Hero, A. O. (2010). Shrinkage estimation of high-dimensional covariance matrices. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 58(10), 5016–5029.
- [11] Morgan, J. P. (2006). *RiskMetrics Technical Document*, 4th ed.



# Appendix

## A. 命題 3.1 の証明

本章では,DFL-OPT-D と DFL-OPT-K が理論的に同値であることを示す.

*証明.* 各  $i = 1, \dots, T$  に対して, 下位のポートフォリオ最適化問題 (3.8) は目的関数が強凸な二次関数であり, 等式制約および非負制約からなる凸制約集合を持つ凸二次計画問題である. また,  $\mathbf{w}_i > \mathbf{0}$  かつ  $\mathbf{1}^\top \mathbf{w}_i = 1$  を満たす内点が存在するため, Slater 条件が成り立つ. したがって, 強双対性が成立する.

強双対性の成立より, 下位問題の最適解は KKT 条件を満たす点と必要十分に一致する. すなわち, ある双対変数  $(\mu_i, \boldsymbol{\lambda}_i)$  が存在して, 停留条件

$$\delta \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i - (1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i - \mu_i \mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda}_i = \mathbf{0},$$

主問題の可行性

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{w}_i = 1, \quad \mathbf{w}_i \geq \mathbf{0},$$

双対可行性

$$\boldsymbol{\lambda}_i \geq \mathbf{0},$$

および相補性条件

$$\boldsymbol{\lambda}_i \odot \mathbf{w}_i = \mathbf{0}$$

が同時に成り立つとき,  $\mathbf{w}_i$  は下位問題の最適解である.

DFL-OPT-K は, 上記の KKT 条件を制約として直接組み込んだ定式化である. 一方, DFL-OPT-D は, 主問題の可行性と双対可行性に加え, 停留条件 (3.20) と最適値一致条件 (3.19) を課すことで下位問題の最適性を表現している. 強双対性が成立する凸最適化問題においては, これらの条件は KKT 条件と同値であるため, DFL-OPT-D により許容される  $(\mathbf{w}_i, \mu_i, \boldsymbol{\lambda}_i)$  の集合は, DFL-OPT-K により許容される集合と一致する.

以上より, DFL-OPT-D ((3.15)–(3.20)) と DFL-OPT-K ((3.26)–(3.31)) は同一の解集合を持ち, 理論的に等価であることが示された.  $\square$

## B. DFL-OPT-D における強双対性制約の導出

ここでは, 本文 (3.12) および (3.14) (したがって (3.19)) の導出を, 双対関数  $g_i$  の導出を含めて示す.

まず, ラグランジュ関数 (3.11) に基づき, 双対関数を

$$g_i(\mu_i, \boldsymbol{\lambda}_i) := \inf_{\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^d} \mathcal{L}_i(\mathbf{w}_i, \mu_i, \boldsymbol{\lambda}_i)$$

と定義する. ここで  $\mathcal{L}_i$  を  $\mathbf{w}_i$  で最小化する停留条件は本文 (3.13) であり, これより

$$\tilde{\mathbf{w}}_i(\mu_i, \boldsymbol{\lambda}_i) = \frac{1}{\delta} \mathbf{V}_i^{-1} ((1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i + \mu_i \mathbf{1} + \boldsymbol{\lambda}_i)$$

を得る. これを代入すると, 双対関数は

$$g_i(\mu_i, \boldsymbol{\lambda}_i) = \mu_i - \frac{1}{2\delta} ((1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i + \mu_i \mathbf{1} + \boldsymbol{\lambda}_i)^\top \mathbf{V}_i^{-1} ((1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i + \mu_i \mathbf{1} + \boldsymbol{\lambda}_i)$$

と表される.

次に, 停留条件 (3.13) を

$$\delta \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i = (1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i + \mu_i \mathbf{1} + \boldsymbol{\lambda}_i$$

と書き直し, 右辺を  $z_i$  とおくと  $z_i = \delta \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i$  である. これを上式に代入すると

$$g_i(\mu_i, \boldsymbol{\lambda}_i) = \mu_i - \frac{1}{2\delta} (\delta \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i)^\top \mathbf{V}_i^{-1} (\delta \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i) = \mu_i - \frac{\delta}{2} \mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i$$

となり, 双対目的値は停留条件を介して  $\mathbf{V}_i^{-1}$  を含まない形に簡約できる.

弱双対性より, 任意の主問題の実行可能解  $\mathbf{w}_i$  と双対変数  $(\mu_i, \boldsymbol{\lambda}_i)$  ( $\boldsymbol{\lambda}_i \geq \mathbf{0}$ ) に対して, 主問題目的値は双対目的値の上界である. したがって,

$$-(1-\delta)\hat{\mathbf{r}}_i^\top \mathbf{w}_i + \frac{\delta}{2} \mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i \geq \mu_i - \frac{\delta}{2} \mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i$$

が成り立つ. これが本文 (3.12) である. 両辺に  $\frac{\delta}{2} \mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i$  を加えると

$$\delta \mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i - (1-\delta)\hat{\mathbf{r}}_i^\top \mathbf{w}_i \geq \mu_i$$

を得る.

最後に, 強双対性より最適解においては弱双対性の不等式が等号で成立する. このとき KKT 条件の相補性  $\boldsymbol{\lambda}_i \odot \mathbf{w}_i = \mathbf{0}$  が成り立ち, 導出中に現れる  $\boldsymbol{\lambda}_i^\top \mathbf{w}_i$  が消えるため, 最適値一致条件は

$$\delta \mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i - (1-\delta)\hat{\mathbf{r}}_i^\top \mathbf{w}_i = \mu_i$$

と表される. これが本文 (3.14) の等式であり, DFL-OPT-D では各  $i$  についてこの関係を制約 (3.19) として課している.

## C. OAS 縮小係数と実効サンプルサイズ

ここでは, 第 4 章で用いた OAS の縮小係数  $\phi_t$  と, EWMA の重みに対応する実効サンプルサイズ  $n_{\text{eff}}$  の具体式を示す.

まず,  $d$  次元の共分散推定に用いるサンプルサイズを  $n_{\text{eff}}$  とすると, OAS による縮小係数は

$$\phi_t = \min \left\{ 1, \frac{(1 - \frac{2}{d}) \text{tr}(\mathbf{S}_t^2) + \text{tr}(\mathbf{S}_t)^2}{(n_{\text{eff}} + 1 - \frac{2}{d}) \left( \text{tr}(\mathbf{S}_t^2) - \frac{\text{tr}(\mathbf{S}_t)^2}{d} \right)} \right\} \quad (\text{A.1})$$

で与えられる.

次に, EWMA における減衰率  $\alpha$  は, 重み付き標本に基づく共分散推定の「記憶長」を制御するパラメータとして解釈できる [11]. 特に, 重み  $w_k = (1-\alpha)\alpha^k$  に対して定義される実効サンプルサイズ

$$\text{ESS} := \frac{1}{\sum_k w_k^2}$$

を用いると, EWMA はおよそ  $\text{ESS} \approx \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$  個の独立標本に相当する情報量を持つと解釈できる [11]. 本研究ではこの対応関係に基づき, 短期ローリング設定における数値的安定性と反応性のバランスを考慮して  $\alpha$  を設定する.

本研究のように有限窓  $L$  を用いるとき, 重みを正規化した  $\tilde{w}_k := \frac{(1-\alpha)\alpha^k}{1-\alpha^L}$  ( $k = 0, \dots, L-1$ ) に対して

$$n_{\text{eff}} := \frac{1}{\sum_{k=0}^{L-1} \tilde{w}_k^2} = \frac{(1-\alpha^L)^2}{(1-\alpha)^2} \cdot \frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^{2L}} = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{(1-\alpha^L)^2}{1-\alpha^{2L}} \quad (\text{A.2})$$

となる. 特に  $L$  が十分大きい場合には  $n_{\text{eff}} \approx \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$  となり, 上の ESS の近似と整合する.