

# 意思決定重視学習を用いたポートフォリオ最適化

野坂健成

2025年12月20日

# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>序論</b>	<b>1</b>
1.1	研究背景	1
1.2	問題設定	1
1.3	関連研究	2
1.4	本研究の貢献（暫定）	2
1.5	論文構成	3
<b>第 2 章</b>	<b>既存手法</b>	<b>4</b>
2.1	ポートフォリオ最適化モデル	4
2.1.1	実務における推定問題	4
2.2	予測統合型の手法	5
2.2.1	PTO アプローチ	5
2.2.2	PTO の課題	5
2.2.3	予測統合型アプローチ (IPO)	5
2.3	本章のまとめ	6
<b>第 3 章</b>	<b>提案手法</b>	<b>7</b>
3.1	二段階最適化モデル	7
3.1.1	問題設定と予測モデル	7
3.1.2	下位問題：制約付きポートフォリオ最適化	7
3.1.3	理想的な投資配分	8
3.1.4	上位問題：意思決定誤差最小化	8
3.1.5	問題の性質と再定式化への動機	8
3.2	再定式化による単一レベル最適化問題	8
3.2.1	下位問題のラグランジュ関数	9
3.2.2	強双対性条件に基づく再定式化 (DFL-QCQP-DUAL)	9
3.2.3	KKT 条件に基づく再定式化 (DFL-QCQP-KKT)	10
3.2.4	二つの再定式化の性質	10
3.3	計算量および解法に関する注意	11

<b>第 4 章</b>	<b>数値実験</b>	<b>12</b>
4.1	実データ実験の設定 . . . . .	12
4.1.1	実験の基本方針 . . . . .	12
4.1.2	使用データおよび学習・再バランス設定 . . . . .	12
4.1.3	共分散行列の推定 (OAS × EWMA) . . . . .	13
4.1.4	トレードオフ係数 $\delta$ の設定 . . . . .	14
4.1.5	比較手法 . . . . .	14
4.1.6	初期化およびソルバー設定 . . . . .	15
4.2	実験結果 . . . . .	15
4.2.1	実データによるベースライン比較 . . . . .	15
4.2.2	Dual formulation と KKT formulation の数値的比較 . . . . .	17
	数値計算の信頼性 . . . . .	17
	計算コストの比較 . . . . .	18
	解の同等性の検証 . . . . .	19
	探索経路摸動に対する頑健性 . . . . .	20
	小結 . . . . .	22
4.2.3	初期解導入の効果 (DFL-CF init) . . . . .	22
	累積リターンの比較 . . . . .	22
	全期間の性能指標比較 . . . . .	23
	計算時間への影響 . . . . .	23
	統計的有意性 (ブートストラップ検定) . . . . .	24
	小結 . . . . .	24
4.2.4	提案手法の性質分析 (Decision-Focused Learning の観点) . . . . .	25
	予測精度と意思決定品質の乖離 . . . . .	25
	ポートフォリオ解 $w$ の構造的特徴 . . . . .	26
	最大リターン資産の捕捉行動 . . . . .	26
	小括 . . . . .	27
4.3	考察 . . . . .	27
4.4	補足分析 . . . . .	27
<b>第 5 章</b>	<b>結論</b>	<b>28</b>
	<b>参考文献</b>	<b>29</b>
	<b>参考文献</b>	<b>30</b>
	<b>謝辞</b>	<b>32</b>

# 図目次

4.1	累積リターン推移（2006–2025, ベースライン設定）	16
4.2	計算時間の分布（dual vs KKT ; OK と Warning を分けて表示）	19
4.3	探索経路摂動 ( $\Delta \approx 0.2$ ) 下での性能分布（dual vs kkt）	20
4.4	探索経路摂動 ( $\Delta \approx 0.2$ ) 下での累積リターン overlay (seed 間比較)	21
4.5	累積リターン推移（初期解あり vs なし, および比較手法）	23
4.6	予測精度 ( $R^2$ ) と意思決定品質 (Sharpe 比) の関係	25

# 第 1 章

## 序論

### 1.1 研究背景

金融市場における資産運用では、複数資産への資金配分を決定するポートフォリオ最適化が中心的役割を担う。とりわけ平均–分散最適化（Mean–Variance Optimization; MVO）は、リスクとリターンのトレードオフを明示的に扱える枠組みとして広く用いられてきた。

近年は機械学習の発展により、将来リターンをデータ駆動的に予測し、その予測値を最適化問題に入力して投資配分を得る枠組みが一般的である。このとき、多くの場合、予測モデルは平均二乗誤差（MSE）などの予測誤差を最小化する目的で学習される。以降、この「予測誤差最小化」を目的とする学習を Prediction-Focused Learning (PFL) と呼ぶ。一方で、PFL により得られる高精度な予測が、必ずしも最終的な意思決定（投資成績）の改善に直結するとは限らないことが指摘されている。

このギャップの本質は、予測と意思決定(最適化)が分離された二段階構造にある。すなわち、予測誤差が小さくとも、最適化問題に入力された際に解（投資配分）が大きく変化し、結果として下流の目的関数値（リスク調整後成績など）が悪化する場合があり得る。特に、小標本・低 SNR 環境や、非負制約・売買制約などを含む現実的設定では、推定誤差が解に与える影響が増幅されやすい。

以上を背景として、近年、予測精度そのものではなく、下流の最適化問題を通じて定義される意思決定の質を直接最適化する Decision-Focused Learning (DFL) が注目されている。DFL では、予測モデルの学習を「予測値と真値の誤差」ではなく、予測に基づく最適化解が、真のパラメータに基づく理想解と比べてどれだけ損をするか（regret／意思決定損失）で評価し、その最小化を目指す。

### 1.2 問題設定

時点  $i = 1, \dots, T$ において、特徴量  $\mathbf{x}_i$  と実現リターン  $\mathbf{r}_i$  が観測されるとする。予測モデルはパラメータ  $\boldsymbol{\theta}$  により期待リターンの推定値  $\hat{r}_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_i)$  を出力する。

各時点での投資配分  $\hat{\mathbf{w}}_i(\boldsymbol{\theta})$  は、予測値  $\hat{r}_i$  を用いた下流の最適化問題（制約付き MVO）の最適解

として定まる：

$$\hat{\mathbf{w}}_i(\boldsymbol{\theta}) \in \arg \min_{\mathbf{w} \in \mathcal{S}} c(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{r}}_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_i)).$$

一方で、実運用では利用できないが、実現リターン  $\mathbf{r}_i$  が既知であると仮定した理想的配分を

$$\mathbf{w}_i^* \in \arg \min_{\mathbf{w} \in \mathcal{S}} c(\mathbf{w}, \mathbf{r}_i)$$

と定義する。

DFL は、予測誤差ではなく、最適化後の目的関数差で学習目的を定める。本研究では、各時点の意思決定損失（regret）を

$$\ell_i(\boldsymbol{\theta}) = c(\hat{\mathbf{w}}_i(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{r}_i) - c(\mathbf{w}_i^*, \mathbf{r}_i)$$

と定義し、 $\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \ell_i(\boldsymbol{\theta})$  を最小化する。すなわち、本研究で扱う DFL は、制約付き MVO を下位問題に含む二段階最適化（bilevel optimization）として定式化される。

### 1.3 関連研究

ポートフォリオ最適化は Markowitz の平均–分散理論を起点として、制約付き最適化、ロバスト最適化、推定誤差を考慮した手法など多岐に拡張されてきた。一方で、期待リターン推定は回帰・時系列モデルから機械学習まで幅広く研究されている。

従来主流の二段階法（predict-then-optimize; PTO）は、予測モデルを予測誤差最小化（PFL）で学習し、その出力を最適化に入力する。しかし、この目的は下流の最適化目的と一致しないことがあり、予測誤差と投資成績の乖離が生じ得る。

この課題に対し、予測と最適化を統合する枠組みとして IPO や DFL が提案されている。特に DFL では、学習ループの内部に最適化問題を組み込み、最適化解を介して定義される意思決定損失（regret）を最小化する。近年は、最適化問題を「解く」だけでなく、ソルバを微分可能な演算として扱う実装形態も整備されており、例えば二次計画問題を解くルーチン（例：OSQP）を用いて最適解を得つつ、学習側ではその結果を用いて regret を評価する流れが具体的に示されている。

### 1.4 本研究の貢献（暫定）

本研究の主な貢献は以下のとおりである。

第一に、制約付き平均–分散ポートフォリオ最適化問題に対して、Decision-Focused Learning (DFL) の枠組みを適用し、その数理構造を二段階最適化問題として明示的に定式化した点である。既存研究では、制約のない設定や簡略化された問題が多く扱われてきたのに対し、本研究では、非負制約や予算制約を含む実務的な設定を考慮したモデルを構築している。

第二に、強双対性条件および KKT 条件を用いた再定式化により、DFL に基づくポートフォリオ最適化問題を非凸二次計画問題として整理し、異なる再定式化が持つ数値的性質を比較可能な

形で提示した点である。これにより、理論的には等価である再定式化が、数値計算上は異なる挙動を示し得ることを明確にし、解法設計や初期化の重要性を示唆する。

第三に、小標本・低 SNR 環境を想定した数値実験を通じて、意思決定誤差を直接最小化する学習が、従来の PTO 手法と比較して、投資判断の質を改善し得る可能性を検証する点である。特に、予測誤差の最小化と投資成績の最適化が必ずしも一致しない状況において、DFL の有効性を評価する。

最後に、実務を想定した制約付き設定における DFL の適用可能性と限界を整理し、今後の実データ分析や拡張に向けた課題を明確化する点も、本研究の貢献の一つである。

## 1.5 論文構成

本論文の構成は以下のとおりである。

第 1 章では、本研究の背景、問題設定、関連研究を整理し、本研究の目的および位置づけを明確にする。

第 2 章では、平均-分散ポートフォリオ最適化モデルをはじめとする既存手法について概説し、従来の PTO 型アプローチおよび予測統合型手法の特徴と課題を整理する。

第 3 章では、Decision-Focused Learning の枠組みに基づくポートフォリオ最適化問題を二段階最適化問題として定式化し、強双対性条件および KKT 条件を用いた再定式化を示す。

第 4 章では、実データを用いた数値実験の設定を説明し、提案手法と既存手法との比較を通じてその特性を評価する。

第 5 章では、本研究で得られた知見を総括するとともに、今後の課題と展望について述べる。

## 第 2 章

# 既存手法

### 2.1 ポートフォリオ最適化モデル

本研究では、リスクとリターンのトレードオフを明示的に考慮する平均–分散ポートフォリオ最適化モデル（Mean–Variance Optimization; MVO）を基本的な投資判断モデルとして採用する。

資産数を  $d$  とし、投資配分ベクトルを

$$\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_d)^\top \in \mathbb{R}^d$$

とする。また、資産リターンの期待値ベクトルを  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d$ 、共分散行列を  $\mathbf{V} \in \mathbb{S}_{++}^d$  とする。ここで  $\mathbb{S}_{++}^d$  は正定値対称行列の集合を表す。

平均–分散モデルに基づくポートフォリオ最適化問題は、目的関数 (2.1a) を最小化し、制約 (2.1b)–(2.1c) のもとで投資配分を決定する問題として定式化される。

$$c(\mathbf{w}, \mathbf{r}) = -(1 - \delta)\mathbf{r}^\top \mathbf{w} + \frac{\delta}{2}\mathbf{w}^\top \mathbf{V}\mathbf{w}, \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{w} = 1, \quad (2.1b)$$

$$\mathbf{w} \geq \mathbf{0}. \quad (2.1c)$$

ここで  $0 \leq \delta \leq 1$  はリターン項とリスク項の比重を制御するトレードオフ係数であり、 $\delta \rightarrow 0$  のときリターン重視、 $\delta \rightarrow 1$  のときリスク重視の投資配分が得られる。目的関数  $c(\mathbf{w}, \mathbf{r})$  は、期待リターンの最大化項と分散リスクの最小化項から構成されており、制約集合は予算制約および非負制約を表している。共分散行列  $\mathbf{V}$  が正定値である場合、本問題は凸二次計画問題となり、グローバル最適解が一意に定まる。

#### 2.1.1 実務における推定問題

実際の運用においては、期待リターン  $\mathbf{r}$  および共分散行列  $\mathbf{V}$  は未知であり、過去データから推定される。特に期待リターンの推定誤差は、最適化問題 (2.1) の解に大きな影響を与えることが知られている。

このため、実務では回帰モデルや時系列モデル、近年では機械学習手法を用いてリターンを予測し、その予測値を最適化問題に入力するという枠組みが一般的に用いられている。本稿では、期待リターンの推定値（予測値）を  $\hat{r}$  のようにハットを付して表す。

## 2.2 予測統合型の手法

### 2.2.1 PTO アプローチ

従来の多くの研究および実務では、予測と最適化を独立した問題として扱う PTO 型のアプローチが採用されてきた。具体的には、特徴量ベクトル  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$  に基づいて、資産リターンを次の線形モデルで予測する。

$$\hat{r}_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_i) = \text{diag}(\mathbf{x}_i)\boldsymbol{\theta}, \quad (2.2)$$

ここで  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d$  は回帰係数である。 $\boldsymbol{\theta}$  は、次の最小二乗問題を解くことで推定される。

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \|\mathbf{r}_i - \hat{r}_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_i)\|_2^2. \quad (2.3)$$

得られた予測値  $\hat{r}_i$  を用いて、ポートフォリオ最適化問題 (2.1) を解くことで投資配分が決定される。

### 2.2.2 PTO の課題

PTO アプローチでは、予測モデルの学習目的が (2.3) に示すように予測誤差の最小化である。一方で、最適化問題 (2.1) における最終的な評価基準は投資成績、すなわち意思決定の質である。

このため、予測誤差の最小化が必ずしも最適な投資判断につながるとは限らない。特に、ポートフォリオ最適化問題では、期待リターンのわずかな推定誤差が投資配分を大きく変化させることができあり、結果として投資成績が不安定になる可能性がある。この問題は、予測と最適化を分離して扱う二段階構造そのものに起因すると考えられる。

### 2.2.3 予測統合型アプローチ (IPO)

この課題に対して、Butler and Kwon は、予測モデルの学習段階に最適化問題を統合する手法として、Integrating Prediction in Mean–Variance Portfolio Optimization (IPO) を提案した。IPO では、予測モデルのパラメータ  $\boldsymbol{\theta}$  を、予測誤差ではなく、予測値に基づいて得られるポートフォリオの目的関数値を通じて更新する。これにより、予測モデルがポートフォリオ最適化問題の構造を直接考慮することが可能となる。

一方で、IPO は非凸最適化問題として定式化されるため、勾配計算の計算量や局所解への収束、数値的安定性といった課題も指摘されている。

## 2.3 本章のまとめ

本章では、平均-分散ポートフォリオ最適化モデルを基礎として、従来の PTO アプローチおよび予測統合型手法について整理した。次章では、これらの課題を踏まえ、意思決定の質を直接最適化対象とする Decision-Focused Learning に基づくポートフォリオ最適化モデルを提案する。

## 第3章

# 提案手法

### 3.1 二段階最適化モデル

本章では、Decision-Focused Learning (DFL) の枠組みに基づき、制約付き平均–分散ポートフォリオ最適化問題を二段階最適化問題として定式化する。本研究では特に、リターン項とリスク項の相対的重要性を明示的に制御するため、トレードオフ係数  $\delta \in [0, 1]$  を用いた修正平均–分散モデルを採用する。

#### 3.1.1 問題設定と予測モデル

時点  $i = 1, \dots, T$ において、特徴量ベクトル  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$  および実現リターン  $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^d$  が観測されるとする。期待リターンは、以下の線形単回帰モデルにより予測されるものとする。

$$\hat{\mathbf{r}}_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_i) = \text{diag}(\mathbf{x}_i)\boldsymbol{\theta}, \quad (3.1)$$

ここで  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d$  は学習対象となる回帰係数である。

#### 3.1.2 下位問題：制約付きポートフォリオ最適化

予測モデル (3.1)に基づき、各時点  $i$  における投資配分（予測に基づく配分）を  $\hat{\mathbf{w}}_i$  とし、次の制約付き最適化問題の解として定義する。

$$\hat{\mathbf{w}}_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_i) \in \arg \min_{\mathbf{w}_i \in \mathcal{S}} c(\mathbf{w}_i, \hat{\mathbf{r}}_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_i)), \quad (3.2)$$

ただし、目的関数は次の修正平均–分散コスト関数で与えられる。

$$c(\mathbf{w}_i, \mathbf{r}) = -(1 - \delta)\mathbf{r}^\top \mathbf{w}_i + \frac{\delta}{2}\mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i, \quad 0 \leq \delta \leq 1. \quad (3.3)$$

制約集合  $\mathcal{S}$  は

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{1}^\top \mathbf{w}_i = 1, \mathbf{w}_i \geq \mathbf{0}\} \quad (3.4)$$

とする。

ここで  $\mathbf{V}_i \in \mathbb{S}_{++}^d$  は共分散行列であり,  $\delta$  はリターン項とリスク項の比重を制御するパラメータである。 $\delta \rightarrow 0$  のときリターン重視,  $\delta \rightarrow 1$  のときリスク重視の投資配分が得られる。

### 3.1.3 理想的な投資配分

意思決定誤差を評価する基準として, 各時点  $i$  において実現リターン  $\mathbf{r}_i$  が既知であると仮定した場合の理想的な投資配分を次のように定義する。

$$\mathbf{w}_i^* \in \arg \min_{\mathbf{w}_i \in \mathcal{S}} c(\mathbf{w}_i, \mathbf{r}_i). \quad (3.5)$$

この投資配分は実運用では利用できないが, DFL における意思決定誤差の評価基準として用いる。

### 3.1.4 上位問題：意思決定誤差最小化

Decision-Focused Learning では, 予測モデルのパラメータ  $\boldsymbol{\theta}$  を, 予測誤差ではなく意思決定の質を通じて学習する。本研究では, 各時点  $i$  における意思決定誤差を次のように定義する。

$$\ell_i(\boldsymbol{\theta}) = c(\hat{\mathbf{w}}_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_i), \mathbf{r}_i) - c(\mathbf{w}_i^*, \mathbf{r}_i). \quad (3.6)$$

このとき, 上位問題は次の二段階最適化問題として定式化される。

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \quad \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \ell_i(\boldsymbol{\theta}), \quad (3.7a)$$

$$\text{s.t. } \hat{\mathbf{w}}_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_i) \text{ は (3.2) の最適解.} \quad (3.7b)$$

すなわち, 本研究で扱う問題は, 制約付き平均-分散ポートフォリオ最適化を下位問題に含む二段階最適化問題である。

### 3.1.5 問題の性質と再定式化への動機

定式化 (3.7) は, 下位問題に  $\arg \min$  演算子を含むため, 直接的な数値計算が困難である。また, 下位問題の解を通じて定義される目的関数は一般に非凸となる。

そこで本研究では, 下位問題の最適性条件を用いて  $\arg \min$  演算子を除去し, 単一レベルの非凸二次計画問題として再定式化する。次節では, 強双対性条件に基づく定式化(**DFL-QCQP-DUAL**)および**KKT** 条件に基づく定式化(**DFL-QCQP-KKT**)について詳述する。

## 3.2 再定式化による単一レベル最適化問題

前節で定式化した二段階最適化問題 (3.7) は, 下位問題に  $\arg \min$  演算子を含むため, 直接的な数値計算が困難である。そこで本節では, 下位問題の最適性条件を用いて  $\arg \min$  演算子を除去し,

単一レベルの最適化問題として再定式化する。本研究では、先行研究に従い、(1) 強双対性条件に基づく再定式化 (DFL-QCQP-DUAL), (2) KKT 条件に基づく再定式化 (DFL-QCQP-KKT) の 2 通りの定式化を考える。

### 3.2.1 下位問題のラグランジュ関数

各時点  $i$  における下位問題 (3.2) を再掲する。ここでは簡単のため  $\hat{\mathbf{r}}_i := \hat{\mathbf{r}}_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_i)$  とおく。

$$\min_{\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^d} - (1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i^\top \mathbf{w}_i + \frac{\delta}{2} \mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i, \quad (3.8a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{1}^\top \mathbf{w}_i = 1, \quad (3.8b)$$

$$\mathbf{w}_i \geq \mathbf{0}. \quad (3.8c)$$

等式制約および不等式制約に対応するラグランジュ乗数を、それぞれ  $\mu_i \in \mathbb{R}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}^d$  とすると、ラグランジュ関数は次のように与えられる。

$$\mathcal{L}_i(\mathbf{w}_i, \mu_i, \boldsymbol{\lambda}_i) = -(1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i^\top \mathbf{w}_i + \frac{\delta}{2} \mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i + \mu_i (\mathbf{1}^\top \mathbf{w}_i - 1) - \boldsymbol{\lambda}_i^\top \mathbf{w}_i. \quad (3.9)$$

### 3.2.2 強双対性条件に基づく再定式化 (DFL-QCQP-DUAL)

下位問題 (3.8) は凸二次計画問題であり、スレーター条件が満たされたため、強双対性が成立する。このとき、原問題と双対問題の最適値が一致することから、次の条件が成り立つ。

$$-(1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i^\top \mathbf{w}_i + \frac{\delta}{2} \mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i \leq \mu_i, \quad (3.10)$$

さらに、ラグランジュ関数の一階条件より、

$$\delta \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i - (1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i = -\mu_i \mathbf{1} + \boldsymbol{\lambda}_i. \quad (3.11)$$

以上を用いることで、二段階最適化問題 (3.7) は、次の単一レベル最適化問題として再定式化される。

$$\min_{\boldsymbol{\theta}, \{\mathbf{w}_i, \mu_i, \boldsymbol{\lambda}_i\}_{i=1}^T} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left( -(1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i^\top \mathbf{w}_i + \frac{\delta}{2} \mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i \right), \quad (3.12a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{1}^\top \mathbf{w}_i = 1, \quad i = 1, \dots, T, \quad (3.12b)$$

$$\mathbf{w}_i \geq \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, T, \quad (3.12c)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_i \geq \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, T, \quad (3.12d)$$

$$-(1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i^\top \mathbf{w}_i + \frac{\delta}{2} \mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i \leq \mu_i, \quad i = 1, \dots, T, \quad (3.12e)$$

$$\delta \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i - (1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i = -\mu_i \mathbf{1} + \boldsymbol{\lambda}_i, \quad i = 1, \dots, T. \quad (3.12f)$$

この定式化を DFL-QCQP-DUAL と呼ぶ。

### 3.2.3 KKT 条件に基づく再定式化 (DFL-QCQP-KKT)

別の再定式化として、下位問題 (3.8) の KKT 条件をすべて制約として組み込む方法を考える。KKT 条件は以下から構成される。

一次の最適性条件

$$\delta \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i - (1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i = -\mu_i \mathbf{1} + \boldsymbol{\lambda}_i, \quad (3.13)$$

実行可能性条件

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{w}_i = 1, \quad (3.14a)$$

$$\mathbf{w}_i \geq \mathbf{0}, \quad (3.14b)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_i \geq \mathbf{0}. \quad (3.14c)$$

相補性条件

$$\boldsymbol{\lambda}_i \odot \mathbf{w}_i = \mathbf{0}. \quad (3.15)$$

これらを用いることで、次の単一レベル最適化問題が得られる。

$$\min_{\theta, \{\mathbf{w}_i, \mu_i, \boldsymbol{\lambda}_i\}_{i=1}^T} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left( -(1 - \delta) \mathbf{r}_i^\top \mathbf{w}_i + \frac{\delta}{2} \mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i \right), \quad (3.16a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{1}^\top \mathbf{w}_i = 1, \quad i = 1, \dots, T, \quad (3.16b)$$

$$\mathbf{w}_i \geq \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, T, \quad (3.16c)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_i \geq \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, T, \quad (3.16d)$$

$$\delta \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i - (1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i = -\mu_i \mathbf{1} + \boldsymbol{\lambda}_i, \quad i = 1, \dots, T, \quad (3.16e)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_i \odot \mathbf{w}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, T. \quad (3.16f)$$

この定式化を DFL-QCQP-KKT と呼ぶ。

### 3.2.4 二つの再定式化の性質

DFL-QCQP-DUAL (3.12) と DFL-QCQP-KKT (3.16) は、理論的には下位問題の最適性条件を表現しており、同一の解集合を持つ。一方で、数値計算の観点からは両者は異なる特徴を持つ。DFL-QCQP-DUAL は相補性条件を含まない一方で、非線形な不等式制約を含む。DFL-QCQP-KKT は相補性条件という非線形制約を含むが、制約の構造はより直接的である。

これらの違いにより、実際の数値計算では、初期化やソルバーの探索挙動に依存して、解の安定性や収束性に差が生じる可能性がある。これらの点については、第 4 章の数値実験において詳しく検証する。

### 3.3 計算量および解法に関する注意

本章で示した DFL-QCQP-DUAL および DFL-QCQP-KKT は、いずれも単一レベルの最適化問題として定式化されているが、その計算量的性質には注意が必要である。

まず、両定式化はいずれも非線形制約を含む非凸二次計画問題(**non-convex QCQP**)であり、一般にはグローバル最適解を保証する多項式時間アルゴリズムは存在しない。そのため、数値計算においては、局所最適解への収束や初期化への依存といった問題が生じ得る。

次に、DFL-QCQP-DUAL と DFL-QCQP-KKT は理論的には下位問題の最適性条件を表現しており、同一の解集合を持つ。しかしながら、数値計算の観点からは両者は異なる特徴を持つ。DFL-QCQP-DUAL は相補性条件を含まない一方で、非線形な不等式制約を含む。一方、DFL-QCQP-KKT は相補性条件という非線形制約を含むが、制約構造はより直接的である。この違いにより、ソルバーの探索挙動や収束性に差が生じる可能性がある。

さらに、本研究で扱う問題は、上位問題と下位問題が強く結合しているため、初期解の選択が数値計算の安定性に影響を与えることがある。特に、異なる初期化を用いた場合に、異なる局所解に収束する可能性がある点には留意が必要である。

以上を踏まえ、本研究では、特定の解法に依存した結論を導くのではなく、複数の再定式化および初期化条件のもとで数値実験を行い、提案手法の挙動と特性を総合的に評価する立場を取る。

## 第 4 章

# 数値実験

本章では、第 3 章で提案した Decision-Focused Learning (DFL) に基づくポートフォリオ最適化手法について、実データを用いた数値実験によりその特性を検証する。本節では、実験の基本方針、使用データ、共分散推定方法、比較手法、ならびに初期化およびソルバー設定について述べる。

### 4.1 実データ実験の設定

#### 4.1.1 実験の基本方針

第 3 章で示した DFL-QCQP-DUAL および DFL-QCQP-KKT は、いずれも非凸な二次計画問題として定式化される。このため、数値計算においては初期解やソルバーの探索挙動に依存して、異なる局所解に収束する可能性がある。

本研究の目的は、特定の初期化やソルバー調整によって得られた「最良の局所解」をもって性能を主張することではなく、実務的な制約条件の下で、意思決定重視学習としてどのような挙動・特性が現れるかを評価することにある。

そのため、実データおよび実務を想定した制約条件を用いたうえで、比較手法間では可能な範囲で予測モデル、取引制約、入力情報、評価指標を揃え、初期化およびソルバー設定を明示して再現性を確保する。ただし SPO+ は線形最適化を前提とするため、本研究の制約付き MVO をそのまま下位問題として扱えない。そこで SPO+ では、リスク項を制約側に組み込むことで線形最適化に整合する形に変換した設定を用い、その他の条件は可能な限り統一する。

#### 4.1.2 使用データおよび学習・再バランス設定

実データ実験では、短期タクティカル・アセットアロケーション (Tactical Asset Allocation; TAA) を想定し、週次リターンデータを用いる。分析期間は 2006/01/01 から 2025/12/31 までの 20 年間とする（最終提出時には取得可能な最新データに基づき同区間の系列へ差し替える）。投資対象は以下の 4 資産とする。

- SPY : 米国株式 (S&P 500)
- GLD : 金
- EEM : 新興国株式
- TLT : 米国長期国債

各時点  $t$  における特徴量  $\mathbf{x}_t$  として、直近 26 週のリターン平均を用いる。この設定は、短期的な市場トレンドを捉えつつ、過度なノイズへの反応を抑制することを意図したものであり、短期 TAA において一般的に用いられる時間スケールに基づいている。

モデルの学習および更新は、以下のローリング手順により行う。

- 直近 26 週のデータを用いて予測モデルのパラメータを推定
- 推定したパラメータを次の 4 週間にわたって固定して使用
- 以降、同様の手順を繰り返す

この再バランス頻度は、推定誤差の増幅や過度な売買を避けつつ、市場環境の変化に一定程度追随することを目的として設定している。なお、本章の実験では、学習窓長や再バランス頻度の最適化は行わず、すべての比較手法に対して同一の設定を用いることで、モデル構造および学習方式の違いに焦点を当てる。これらのパラメータに対する感度分析については、後続の補足実験において検討する。

#### 4.1.3 共分散行列の推定 (OAS × EWMA)

本研究では、ポートフォリオ最適化に用いる共分散行列  $\mathbf{V}_t$  を、時間減衰を考慮した標本共分散行列に対して Oracle Approximating Shrinkage (OAS) を適用する方法により推定する。

まず、時点  $t$  における EWMA 共分散行列  $\mathbf{S}_t$  を次式で定義する。

$$\mathbf{S}_t = (1 - \alpha) \sum_{k=0}^{L-1} \alpha^k (\mathbf{r}_{t-k} - \bar{\mathbf{r}}_t)(\mathbf{r}_{t-k} - \bar{\mathbf{r}}_t)^\top, \quad (4.1)$$

ここで、 $L = 13$  はローリング窓長、 $\alpha = 0.97$  は時間減衰率であり、実務における業界慣例に基づき固定する。また、 $\bar{\mathbf{r}}_t$  は同窓内の平均リターンを表す。

次に、OAS に基づく縮小共分散行列  $\mathbf{V}_t$  を次のように定義する。

$$\mathbf{V}_t = (1 - \phi_t) \mathbf{S}_t + \phi_t \frac{\text{tr}(\mathbf{S}_t)}{d} \mathbf{I}, \quad (4.2)$$

ここで  $\phi_t \in [0, 1]$  は縮小強度であり、OAS により解析的に決定される。具体的には、 $d$  次元、共分散推定に用いる（実効的な）サンプルサイズを  $n_{\text{eff}}$  とすると、

$$\phi_t = \min \left\{ 1, \frac{(1 - \frac{2}{d}) \text{tr}(\mathbf{S}_t^2) + \text{tr}(\mathbf{S}_t)^2}{(n_{\text{eff}} + 1 - \frac{2}{d}) \left( \text{tr}(\mathbf{S}_t^2) - \frac{\text{tr}(\mathbf{S}_t)^2}{d} \right)} \right\}. \quad (4.3)$$

EWMA のように観測に重みを付ける場合,  $n_{\text{eff}}$  は「時間減衰率  $\alpha$  に対応する実効サンプルサイズ」とみなせる. 本研究のように有限窓  $L$  を用いるとき, 重みを正規化した  $\tilde{w}_k := \frac{(1-\alpha)\alpha^k}{1-\alpha^L}$  ( $k = 0, \dots, L-1$ ) に対して

$$n_{\text{eff}} := \frac{1}{\sum_{k=0}^{L-1} \tilde{w}_k^2} = \frac{(1-\alpha^L)^2}{(1-\alpha)^2} \cdot \frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^{2L}} = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{(1-\alpha^L)^2}{1-\alpha^{2L}}. \quad (4.4)$$

特に  $L$  が十分大きい場合には  $n_{\text{eff}} \approx \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$  となる. OAS は, 小標本下において標本共分散行列の推定誤差を抑制しつつ, 分散構造の情報を保持する点で知られており, 本研究のような短期ローリング設定と高い親和性を持つ.

#### 4.1.4 トレードオフ係数 $\delta$ の設定

本研究では, 第 3 章で導入した修正平均–分散コスト関数

$$c(\mathbf{w}, \mathbf{r}) = -(1-\delta)\mathbf{r}^\top \mathbf{w} + \frac{\delta}{2}\mathbf{w}^\top \mathbf{V}\mathbf{w} \quad (4.5)$$

を用いる.

実データ実験においては, リスクとリターンのバランスを取った中庸的な設定として  $\delta = 0.5$  をデフォルト値として固定する.  $\delta$  を学習対象や探索変数とせず固定することで, (i) 解法の不安定性とパラメータ感度を分離する, (ii) 定式化および解法 (dual / KKT) の影響に焦点を当てる, という実験設計上の意図を明確にする.

#### 4.1.5 比較手法

実データ実験では, 予測モデル, 制約条件, 評価指標を可能な限り統一したうえで, 以下の手法を比較対象として用いる.

二段階法(**PTO**)の基準:

- OLS + MVO (PTO) : 期待リターンを最小二乗誤差で推定し, 得られた予測値  $\hat{\mathbf{r}}$  を平均–分散最適化に入力して配分を決定する, 実務でも最も標準的な二段階法.

予測統合型(**IPO**)／**end-to-end** 系:

- IPO (analytic) : ポートフォリオ最適化を予測パラメータ学習に統合した IPO を, 制約を外した設定で解析的に解ける形として実装したもの (本研究では初期化・アンカーとしても利用する).
- IPO-GRAD : 下位最適化問題を通じて勾配を伝播させる勾配ベースの統合学習 (end-to-end) 手法.

**Decision-Focused Learning** 系:

- SPO+ : 線形最適化問題に対して意思決定損失の凸上界を構成することで、勾配ベースの学習を可能にした先駆的手法である。一方で、平均-分散ポートフォリオ最適化のような二次目的関数および制約付き問題に対しては、*regret* の上界構成が直接適用できない。本研究は、SPO+ が前提とする近似的枠組みを用い、下位問題の最適性条件を明示的に組み込むことで、制約付き MVO に対する pessimistic bilevel 最適化を直接扱う。
- DFL-QCQP-DUAL / DFL-QCQP-KKT : 第 3 章で導出した dual / KKT 再定式化に基づく提案手法。

ベンチマーク(運用戦略):

- Buy-and-Hold (SPY) : 株式市場に対する単純な長期保有戦略。
- 等分散投資 ( $1/N$ ) : 推定誤差に依存しない頑健な基準配分。
- 時系列モメンタム (TSMOM-SPY) : TAA 的な比較として代表的なトレンドフォロー戦略。

#### 4.1.6 初期化およびソルバー設定

第 3 章で述べたとおり、本研究で扱う最適化問題は非凸であり、初期化およびソルバー設定が数値結果に影響を与える可能性がある。本研究では、非線形最適化ソルバーとして KNITRO を用い、以下の方針で設定を行う。

- 内点法 (Interior/Direct) を採用する
- BFGS による近似ヘッセ行列を使用する
- 反復回数および収束許容誤差を十分厳しく設定する
- スレッド数を 1 に固定し、再現性を確保する

また、DFL 系手法では、現時点の実データ実験では初期値として  $\theta = \mathbf{0}$  を用い（必要に応じて投資配分は等配分、補助変数は 0 から開始する）、初期化に起因する差ができるだけ抑える。一方で、後続の実験では IPO の解析解 (IPO-analytic) に基づく初期化やアンカーも併せて検討し、初期化の影響も含めて評価する。

## 4.2 実験結果

### 4.2.1 実データによるベースライン比較

本節では、第 3 章で導出した提案手法である Decision-Focused Learning (DFL) に基づく DFL-QCQP モデル (dual 定式化および KKT 定式化) について、初期解 (**warm-start**) および正則化項 (アンカー・罰則項) を一切導入しないベースライン設定の下で、既存手法との比較評価を行う。

比較対象として、従来の予測誤差最小化に基づく OLS (PTO)、予測統合型の手法である IPO (analytic / gradient)，ならびに代表的な Decision-Focused Learning 手法である SPO+ を含める。ま

た, 単純な投資戦略として  $1/N$  ポートフォリオ, 時系列モメンタム (TSMOM; SPY), Buy-and-Hold (SPY) をベンチマークとして用いる.

評価指標として, 年率リターン (ann\_return), 最終資産 (terminal\_wealth), リスク調整後指標 (Sharpe 比・Sortino 比), リスク指標 (年率ボラティリティ, 最大ドローダウン, CVaR(95%)), および運用上重要な売買回転率 (平均ターンオーバー) を用いる. なお, 本実験では取引コスト (bps) を加味した実行ベースの損益系列に基づき指標を算出している (詳細は第 4.1 節を参照).

まず, 図 4.1に, 2006 年から 2025 年までの全期間における各手法の累積リターン推移を示す. 図 4.1より, 提案手法 (DFL-QCQP) は dual / KKT のいずれの定式化においても, 多くの比較手法を上回る累積リターンを示していることが確認できる. 特に, 長期にわたる運用期間を通じて, リターンの上振れだけでなく, 下落局面における毀損の抑制も一定程度観察される.

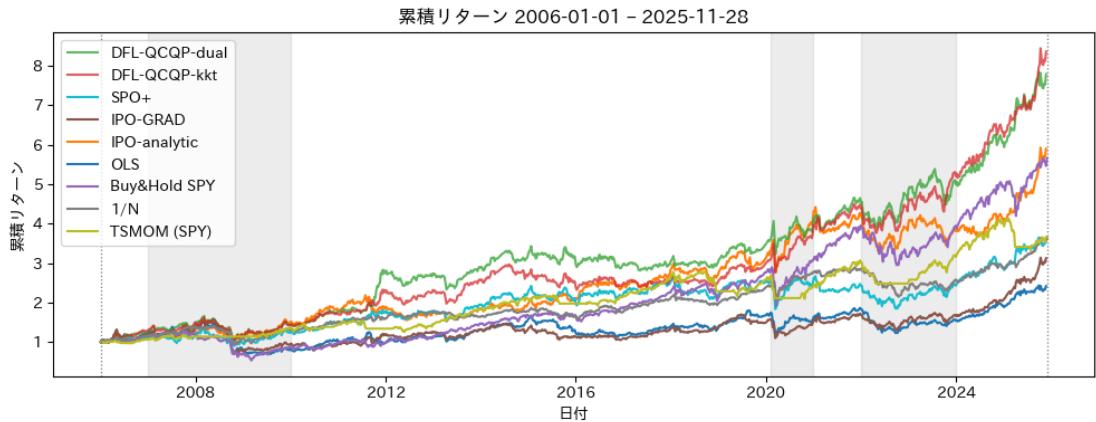


図4.1: 累積リターン推移 (2006–2025, ベースライン設定)

次に, 表 4.1に主要なパフォーマンス指標をまとめる. 提案手法は年率リターン・最終資産において上位であるだけでなく, Sharpe 比・CVaR(95%) といったリスク調整後指標においても良好な値を示している. このことは, 単なるリターンの増大ではなく, リスク制御を伴った意思決定の改善が実現されている可能性を示唆する.

また, ターンオーバーの観点では, 提案手法 (DFL-QCQP) は IPO-analytic や OLS と同程度の水準に収まっており, 性能改善が売買過多のみによって生じているとは言い難い. さらに, dual と KKT の比較では, KKT 定式化が多くの指標で僅かに優位である一方, 両者の性能差は大きくなく, 定式化の違いが投資性能に与える影響は限定的であることも示唆される.

表4.1: パフォーマンス比較 (2006–2025, ベースライン設定)

Model	Ann. Return	Terminal	Sharpe	Sortino	Ann. Vol	MaxDD	CVaR95	Turnover
DFL-QCQP-KKT	<b>11.86</b>	<b>8.36</b>	<b>0.78</b>	<b>0.73</b>	15.22	-35.13	5.01	23.98
DFL-QCQP-DUAL	11.54	7.79	0.75	0.72	15.45	-36.39	5.03	23.96
IPO-analytic	10.46	5.90	0.60	0.57	17.38	-30.43	5.68	24.24
Buy&Hold(SPY)	10.40	5.67	0.57	0.52	18.16	-58.36	6.23	<b>0.00</b>
SPO+	8.10	3.62	0.45	0.44	17.91	-33.37	5.93	20.69
1/N	7.16	3.65	0.63	0.59	<b>11.43</b>	-33.49	<b>3.67</b>	<b>0.00</b>
TSMOM-SPY	7.25	3.66	0.61	0.46	11.92	<b>-24.66</b>	4.26	1.45
IPO-GRAD	7.48	3.13	0.40	0.37	18.49	-55.15	6.44	20.19
OLS	6.29	2.42	0.33	0.30	19.06	-55.68	6.73	20.79

以上より、特別な初期化や正則化を行わないベースライン設定においても、提案手法 (DFL-QCQP) は既存の予測主導型手法 (OLS) および代表的 DFL 手法 (SPO+), ならびに IPO 系手法に対して競争力のある投資性能を示すことが確認できる。次節では、提案手法における dual / KKT の定式化差が数値計算 (収束性・安定性) および投資性能に与える影響について、より詳細に検討する。

#### 4.2.2 Dual formulation と KKT formulation の数値的比較

本節では、提案手法において用いた非凸 QCQP に対する二つの定式化、dual formulation と KKT formulation の数値的性質を比較する。両者は理論的には等価であり、同一の最適解集合を持つことが示されるが、非凸最適化問題を数値的に解く際には、定式化の違いがソルバの収束挙動、計算コスト、および探索経路への依存性に影響を与える可能性がある。

本節の目的は投資パフォーマンスの優劣を比較することではなく、どちらの定式化が数値計算としてより安定的かつ実務的に採用可能かを明らかにすることである。

そのため、以下の 4 つの観点から比較を行う。

1. 数値計算の信頼性 (solver status)
2. 計算コスト (特に worst-case を表す p90)
3. 解の同等性 (理論的等価性の数値的検証)
4. 探索経路摂動に対する頑健性 (非凸性への耐性)

##### 数値計算の信頼性

まず、各定式化に対する数値計算の信頼性を評価する。ここでは、全期間を通じた rolling retraining において、各リバランス時点で解かれた最適化問題に対し、ソルバが返した終了ステータスを集計した。

評価区分は以下の通りである。

- OK : 最適性条件を満たして終了
- Warning : 実行可能解は得られたが、収束判定に関する警告あり（例： $xtol$ に基づく相対改善停止、near-optimal 判定）
- No-solution : 実行可能解が得られなかったケース

なお、Warning に分類されたケースについても、全てのケースで実行可能解が返却されており、制約違反量はいずれも数値誤差レベル ( $10^{-8}$  以下) に留まっている。

表4.2: Solver status distribution and warning breakdown

(A) Solver status distribution			
Formulation	OK (%)	Warning (%)	No-solution (%)
Dual	95.0	5.0	0.0
KKT	88.1	11.9	0.0

(B) Warning breakdown (within Warning)		Count	Share (%)
Formulation	Reason	Count	Share (%)
Dual	NEARLY_OPT: 改善不可 (Nearly optimal)	9	69.2
Dual	NO_IMPROVE: 改善不可	2	15.4
Dual	XTOL_ITERS: 相対変化が $xtol$ 未満 (xtol_iters)	2	15.4
KKT	NEARLY_OPT: 改善不可 (Nearly optimal)	21	67.7
KKT	NO_IMPROVE: 改善不可	7	22.6
KKT	XTOL_ITERS: 相対変化が $xtol$ 未満 (xtol_iters)	3	9.7

表 4.2 より、両定式化とともに No-solution は一度も発生しておらず、数値計算としての基本的な安定性は共通して確保されていることが分かる。一方で、KKT formulation では Warning の割合がやや高いが、その内訳を確認すると、多くは最適性改善が所定の閾値以下となった段階での終了であり、実行可能性や制約充足の破綻を示すものではない。

### 計算コストの比較

次に、計算コストの観点から両定式化を比較する。非凸最適化では平均計算時間よりも稀に発生する難ケースでの計算時間が実務上重要であるため、本研究では 90 パーセンタイル (p90) を主要指標として用いる。

評価指標は以下の通りである。

- Median : 代表的な計算時間
- Mean : 参考値
- p90 : 最悪 10% の計算時間を表す指標

表4.3: Computation time statistics (seconds)

Formulation	Median	Mean	p90
Dual	1.20	1.65	2.99
KKT	0.75	0.95	1.71

さらに、計算時間分布全体を可視化するため、箱ひげ図を図 4.2 に示す。

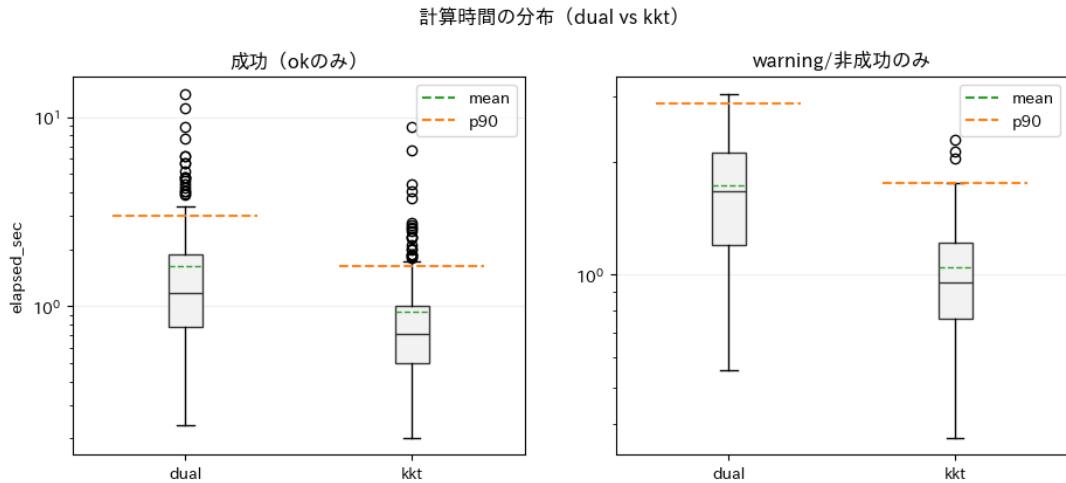


図4.2: 計算時間の分布 (dual vs KKT ; OK と Warning を分けて表示)

中央値および平均値では両定式化に大きな差は見られないものの、p90においては KKT formulation の方が小さく、計算時間分布の裾が抑制されている。すなわち、KKT formulation は worst-case においても計算時間が過度に増大しにくい特性を持つ。

### 解の同等性の検証

次に、dual formulation と KKT formulation が数値的にも同一の問題を解いているかを検証する。評価指標として、(i) ポートフォリオ重みの差 ( $L_1/L_2$  距離), (ii) 下位 MVO 問題の目的関数値差, (iii) 学習時の目的関数値差を用いる。

表4.4: Solution agreement (Dual vs KKT)

Metric	Median	p90
MVO cost diff	$1.2 \times 10^{-10}$	$5.3 \times 10^{-3}$
Train objective diff	$2.8 \times 10^{-6}$	$1.3 \times 10^{-3}$
Weight $L_1$ distance	$3.4 \times 10^{-8}$	1.17
Weight $L_2$ distance	$2.2 \times 10^{-8}$	0.77

中央値ではすべての指標が数値誤差レベルに留まっており, dual と KKT は大多数の期間でほぼ同一の解を与えている. 一方, p90 付近では一時的に差が大きくなるケースが存在するが, これは非凸性に起因する探索経路の差異によるものであり, 特定の定式化が系統的に劣ることを示すものではない.

### 探索経路摂動に対する頑健性

非凸問題では, 同一問題であっても初期化(探索経路)により到達点が変化し得る. そこで補助変数初期値を摂動し, 探索経路依存性を評価した. ここでは摂動強度を simplex 上の  $L_1$  距離

$$\Delta \triangleq \|\mathbf{w}_t^{(0)} - \mathbf{w}_{\text{base},t}\|_1$$

で実効的に較正し,  $\Delta \approx 0.2$ (weak 相当)の条件で複数 seed を用いて学習・評価を行った. なお, 本結果は IPO 解析解に基づく初期化(init-ipo)を用いた設定で得られたものである.

図 4.3 に, Sharpe / CVaR / Terminal wealth の箱ひげ図(seed 間の分布)を示す. また, 図 4.4 に累積リターンの overlay (seed 間比較) を示す.

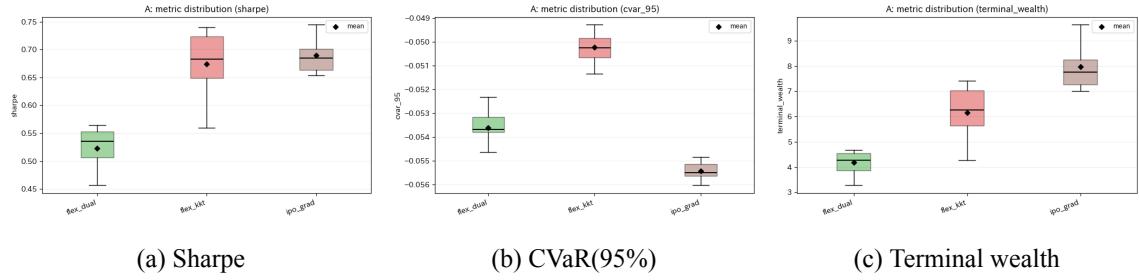


図4.3: 探索経路摂動 ( $\Delta \approx 0.2$ ) 下での性能分布 (dual vs kkt)

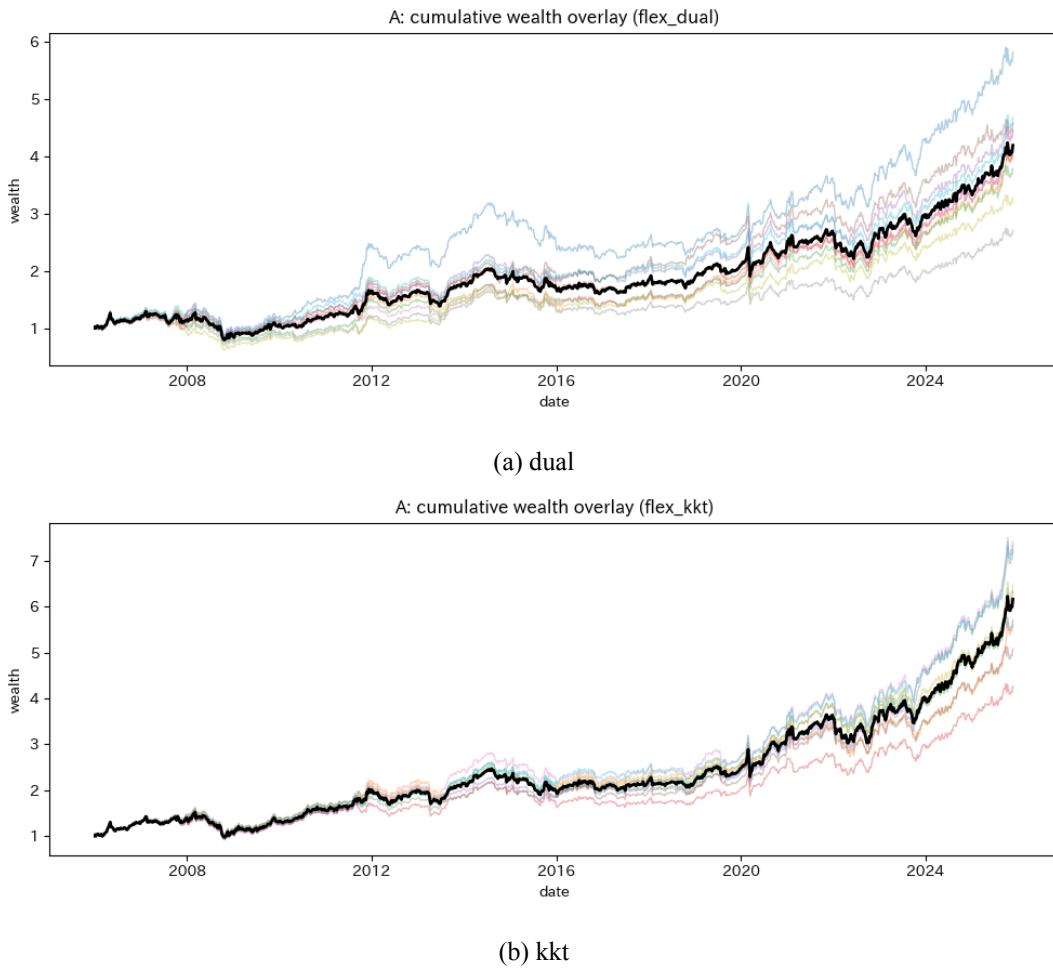


図4.4: 探索経路摸動 ( $\Delta \approx 0.2$ ) 下での累積リターン overlay (seed 間比較)

観測された傾向 ( $\Delta \approx 0.2$  条件) を以下にまとめると。

- 性能分布 (summary\_table の seed 集計) では, KKT の Sharpe 平均が Dual より高く (Dual: 0.5232, KKT: 0.6737), Terminal wealth も KKT が大きい (Dual: 4.192, KKT: 6.160).
- 一方で Warning 発生は KKT の方が多い (平均 Warning count: Dual 8.0, KKT 27.3). ただし, その内訳は主に NEARLY\_OPT / NO\_IMPROVE 型であり, No-solution が発生しない事実と併せると, ここでの Warning は“失敗”ではなく“収束判定の違い(停止条件の差)”として扱うのが妥当である.
- cumulative wealth overlay では, Dual の方が seed によるばらつきが大きい (上振れもあるが下振れも大きい) という形が視覚的に確認できる. 一方 KKT は線群が比較的まとまる.

この段階で言えるのは「KKT が常に優越する」ではなく, より厳密には

- KKT : 計算時間分布 (p90) の観点で安定 (X.2), 摂動下の性能分布も比較的安定 (本実験)
- Dual : Warning は少ない (X.1) が, 摂動下で分散が増えやすい可能性 (本実験)

というトレードオフ構造である. したがって採用判断としては, **KKT formulation** を優先するのが論理的に自然である.

### 小結

本節では, dual formulation と KKT formulation の数値的性質を多角的に比較した. その結果,

- 両定式化は解の同等性を数値的にも満たしている
- 計算時間の p90 (worst-case) の観点で, KKT formulation は安定的な傾向を示す
- 探索経路摂動 ( $\Delta \approx 0.2$ ) 下では, KKT formulation は性能分布が比較的安定であり, dual より高い中央値・平均を示す一方, Warning は増加する

以上の結果を踏まえ, 以降の数値実験では KKT formulation を主たる定式化として採用する.

#### 4.2.3 初期解導入の効果 (DFL-CF init)

本節では, 提案手法 DFL-QCQP (KKT formulation) において制約なし DFL-MVO の解析解 (以下, DFL-CF 解) を初期解として与えた場合の効果を検証する.

非凸最適化問題においては, 探索開始点が収束先の局所解および収束速度に影響を与えることが知られている. 本研究では,

- 初期解を与えない場合 (no init)
- 制約なし DFL-MVO の解析解を初期化として与える場合 (DFL-CF init)

を比較し, 性能・安定性・計算コストの観点から初期解導入の影響を定量的に評価する.

### 累積リターンの比較

図 4.5に, 初期解導入の有無および比較手法を含めた累積リターン推移を示す. 図 4.5より, DFL-QCQP-KKT は初期解の有無にかかわらず比較手法を上回る累積リターンを示す一方, 初期解 (DFL-CF 解) を導入することで, 特に後半期間において累積リターンが上方にシフトしていることが確認できる. また, 初期解として用いた DFL-CF 解そのものよりも, 再最適化後の DFL-QCQP の方が高い最終パフォーマンスを達成しており, 良好的な初期解は最終解を固定するものではなく, 探索を有利な領域へ導く役割を果たしていることが示唆される.

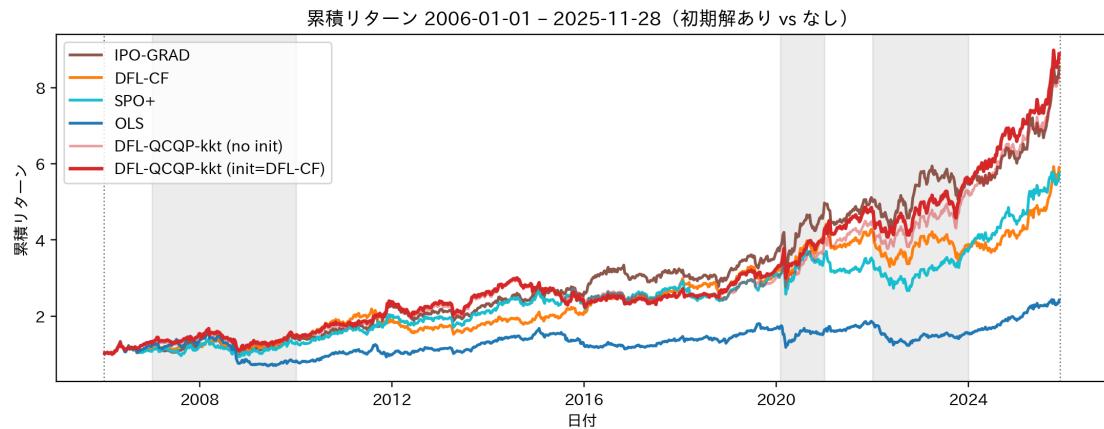


図4.5: 累積リターン推移（初期解あり vs なし, および比較手法）

### 全期間の性能指標比較

次に, 全期間における主要評価指標を表 4.5 に示す.

表4.5: 初期解導入の有無による性能比較（全期間）

Model	Ann. Return (%)	Terminal	Sharpe	Sortino	Ann. Vol (%)	MaxDD (%)	CVaR <sub>95</sub> (%)
DFL-QCQP-KKT (init=DFL-CF)	12.16 (+0.30)	8.89 (+0.53)	0.80 (+0.02)	0.75 (+0.02)	15.17 (-0.05)	-34.73 (+0.40)	-4.97 (+0.04)
DFL-QCQP-KKT (no init)	11.86	8.36	0.78	0.73	15.22	-35.13	-5.01
IPO-GRAD	11.51	7.30	0.67	0.65	17.26	-29.75	-5.51
DFL-CF (解析解のみ)	10.46	5.90	0.60	0.57	17.38	-30.43	-5.68
SPO+	10.29	5.60	0.57	0.57	17.95	-33.25	-5.77
OLS	6.29	2.42	0.33	0.30	19.06	-55.68	-6.73

括弧内は初期解なし (no init) との差分 (init – no init) である. 表 4.5 から, 初期解導入によりリターン・リスク調整後指標が一貫して改善していることが読み取れる (年率リターン : +0.30%, Sharpe / Sortino : ともに +0.02, CVaR<sub>95</sub> : +0.04). 年率ボラティリティはほぼ不変であり, リスク水準を上げることなくリターン効率が向上している. 改善幅は過度に大きくはないが, 全指標で符号が揃っている点は重要であり, 初期解導入が体系的に探索結果を改善していることを示している.

### 計算時間への影響

表 4.6 に, 計算時間の比較 (平均・最大) および Warning 件数を示す.

表4.6: 計算時間の比較（初期解あり vs なし）

Model	Mean fit time (sec)	Max fit time (sec)	Warning count
DFL-QCQP-KKT (init=DFL-CF)	0.73	2.66	33
DFL-QCQP-KKT (no init)	0.95	8.89	31

初期解を導入することで、平均計算時間は短縮され、最大計算時間も大幅に抑制されている。これは、初期解が探索初期段階における不利な方向への移動を抑制し、比較的早期に良好な局所解近傍へ到達している可能性を示唆する。以上より、以降は 初期解あり(**DFL-CF init**)を基本設定として、性能比較および統計的検定を行う。

### 統計的有意性（ブートストラップ検定）

非凸最適化では、初期解の有無により探索経路が変化し、得られる解（ひいては性能評価）にも差が生じ得る。そのため本研究では、初期解（DFL-CF）導入の効果と計算時間への影響を確認した上で、初期解あり(**DFL-CF init**)の **DFL-QCQP-KKT** を対象として、性能差の統計的有意性を評価する。

表 4.7に、ブートストラップに基づく対応のある検定の結果を示す。表中の“1”は、DFL が比較モデルに対して当該指標で有意に優位であることを表し、“0”は有意差が確認できないことを表す(5% 水準および 1% 水準を併記)。

表4.7: 統計的有意性 (5% 水準／1% 水準, 1: DFL が有意に優位, 0: 有意差なし)

DFL モデル	比較モデル	年率リターン(5%)	年率リターン(1%)	年率ボラ(5%)	年率ボラ(1%)	シャープ比(5%)	シャープ比(1%)	ソルティノ比(5%)	ソルティノ比(1%)	CVaR(95%)(5%)	CVaR(95%)(1%)	最終資産(5%)	最終資産(1%)
DFL-QCQP-KKT (init=DFL-CF)	Buy&Hold(SPY)	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
DFL-QCQP-KKT (init=DFL-CF)	DFL-CF	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
DFL-QCQP-KKT (init=DFL-CF)	IPO-GRAD	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
DFL-QCQP-KKT (init=DFL-CF)	OLS	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0
DFL-QCQP-KKT (init=DFL-CF)	SPO+	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0

表 4.7より、DFL-QCQP-KKT (init=DFL-CF) は、多くの比較対象に対して年率ボラティリティおよび CVaR(95%) の観点で有意な改善を示しており、性能向上が平均リターンの増大というよりもリスク低減(特に下方リスクの抑制)として現れていることが示唆される。一方で、最終資産については有意差が確認されない比較もあり、サンプルのばらつきや期間依存性を踏まえた慎重な解釈が必要である。

### 小結

本節では、制約なし DFL-MVO の解析解を初期解として導入した場合の効果を検証した。その結果、

- 初期解導入により、提案手法の主要性能指標が一貫して改善
- 初期解そのものを上回る性能が、制約付き再最適化によって達成される
- 計算時間の短縮という実務的利点も同時に得られる

ことが確認された。以上より、良好な初期解の導入は、非凸 DFL 問題において性能・安定性・計算効率を同時に改善する有効な戦略であると結論づけられる。

#### 4.2.4 提案手法の性質分析（Decision-Focused Learning の観点）

本節では、提案手法が予測精度の改善を直接目的としないにもかかわらず、意思決定品質を向上させるという Decision-Focused Learning (DFL) の基本的性質を満たしているかを検証する。加えて、最適化によって得られるポートフォリオ解  $\mathbf{w}$  の構造的特徴を分析し、提案手法がどのような意思決定を学習しているかを明らかにする。

##### 予測精度と意思決定品質の乖離

まず、予測精度と意思決定品質の関係を確認する。図 4.6 は、各手法についてアウト・オブ・サンプルの予測精度指標 ( $R^2$ ) と、対応する投資パフォーマンス指標 (Sharpe 比) との関係を示した散布図である。

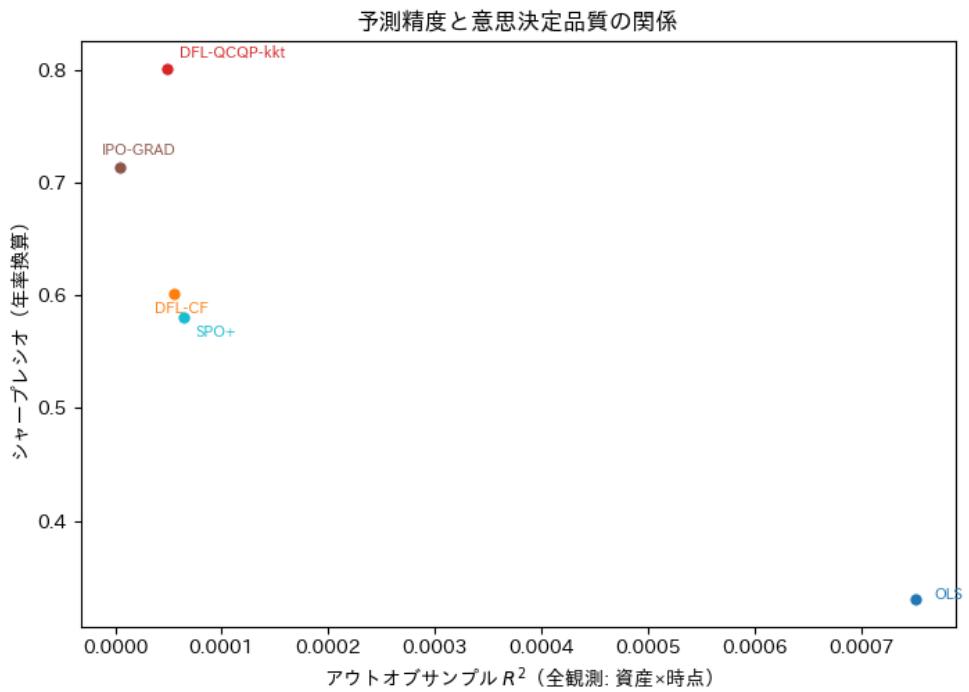


図4.6: 予測精度 ( $R^2$ ) と意思決定品質 (Sharpe 比) の関係

図 4.6 より、予測精度と意思決定品質が必ずしも正の関係にないことが確認できる。特に OLS は、相対的に良好な予測精度を示しているにもかかわらず、Sharpe 比は低水準にとどまっている。これは、予測誤差の二乗最小化が、必ずしも最適なポートフォリオ選択につながらないことを示唆している。

一方で、提案手法（DFL-QCQP-KKT）は、予測精度指標の改善を直接的な目的としていないにもかかわらず、Sharpe 比において明確に高い値を示している。この結果は、「予測精度を最大化すること」と「意思決定品質を最大化すること」が異なる目的であり、後者を直接最適化対象とする DFL の設計思想が、実際の意思決定性能の向上に寄与していることを支持する。以上より、本実験設定において、PTO アプローチと Decision-Focused アプローチの差異が実証的に確認されたと言える。

#### ポートフォリオ解 $w$ の構造的特徴

次に、提案手法が学習した意思決定の「形」を理解するため、得られたポートフォリオ解  $w$  の構造的特徴を分析する。表 4.8 は、有効資産数 ( $N_{\text{eff}}$ )、最大ウェイト、およびウェイトが 0.95 以上となる頻度（高集中頻度）を要約したものである。

表4.8: ポートフォリオ解の集中度の要約（全期間平均）

Model	$H$	$N_{\text{eff}}$	$\max_i w_i$	$P(\max_i w_i \geq 0.95)$
DFL-QCQP-KKT	0.771	1.478	0.826	0.488
DFL-CF	0.967	1.057	0.976	0.914
IPO-GRAD	0.964	1.061	0.973	0.903
OLS	0.947	1.096	0.960	0.865
SPO+	0.968	1.054	0.977	0.912

表 4.8 より、OLS は多くの期間で单一資産への極端な集中投資を行う傾向が確認される。これは  $N_{\text{eff}}$  が小さく、最大ウェイトおよび高集中頻度が高いことからも裏付けられる。このような解は、推定誤差に対して脆弱であり、リスク調整後パフォーマンスの低下につながりやすい。

これに対し、提案手法（DFL-QCQP-KKT）は、OLS と比較して極端な一点集中を抑制しつつ、複数資産を組み合わせたポートフォリオを選択する傾向が見られる。 $N_{\text{eff}}$  の増加や最大ウェイトの低下は、提案手法が単なる予測値の大小ではなく、最終的な意思決定品質を考慮した配分構造を学習していることを示唆している。

#### 最大リターン資産の捕捉行動

さらに、単なる分散度の違いだけでなく、「どの資産に賭けるか」という行動の違いを確認するため、週次で最大リターンを記録した資産に対する捕捉率を分析した。表 4.9 は、各週において最大リターン資産のウェイトが閾値以上（threshold=0.05）となっているかを基準に、捕捉率を集計した結果である。

表4.9: 週次最大リターン資産の捕捉率 (threshold=0.05)

Model	Capture rate	Captured	Missed
DFL-QCQP-KKT	0.432	448	590
OLS	0.306	318	720
SPO+	0.301	312	726
IPO-GRAD	0.278	289	749
DFL-CF	0.272	282	756

この指標は、各手法が市場環境の変化に応じて、どの程度適切な資産選択を行っているかを定量化するものである。提案手法は OLS と比較して、最大リターン資産を捕捉する頻度が高く、かつ特定資産への過度な固定化を避けている。これは、提案手法が「分散すること」自体を目的としているのではなく、局面ごとに意思決定を切り替える行動を学習していることを示している。

### 小括

以上の分析から、提案手法は以下の性質を持つことが確認された。

- 予測精度と意思決定品質が一致しない状況においても、高い意思決定性能を実現する
- 極端な一点集中を回避しつつ、意思決定品質を重視したポートフォリオ構造を学習する
- 市場局面に応じた資産選択行動を実証的に示す

これらの結果は、提案手法が Decision-Focused Learning の枠組みに沿って設計され、実際にその性質を備えた意思決定を実現していることを示している。

## 4.3 考察

(後続節)

## 4.4 補足分析

(後続節)

## 第 5 章

### 結論

本研究では、制約付き平均-分散ポートフォリオ最適化を下位問題として含む Decision-Focused Learning (DFL) を対象に、意思決定誤差に基づく学習問題を二段階最適化問題として定式化した。さらに、下位問題の最適性条件に基づき、強双対性条件に基づく再定式化 (DFL-QCQP-DUAL) および KKT 条件に基づく再定式化 (DFL-QCQP-KKT) を導出し、単一レベルの非凸二次計画問題 (QCQP) として整理した。

また、実務を想定した週次リターンの実データ設定のもとで、データ分割、共分散推定、比較手法、初期化およびソルバー設定を明示し、提案手法の挙動を評価するための実験設計を示した。今後は、第 4 章で得られる実験結果を踏まえ、定式化の違いが収束性・解の安定性・投資成績に与える影響を整理するとともに、より多資産・より現実的な制約を含む設定への拡張を検討する。

# 参考文献

# 参考文献

- [1] Lee, J., Return Prediction for Mean-Variance Portfolio Selection: How Decision-Focused Learning Shapes Forecasting Models, Proceedings of ... (to appear), 2024.  
意思決定重視学習（Decision-Focused Learning; DFL）を平均分散ポートフォリオ選択に適用し、予測モデルが意思決定構造にどのような影響を与えるかを分析した研究。
- [2] Kim, J., Tae, I., Lee, Y., Estimating Covariance for Global Minimum Variance Portfolio: A Decision-Focused Learning Approach, arXiv preprint arXiv:2508.10776, 2025.  
DFL の枠組みを用いてグローバル最小分散ポートフォリオ（GMVP）の共分散推定問題を再定式化し、意思決定損失最小化の観点から理論的および実証的検討を行った研究。

## 一般的な **Decision-Focused Learning** 理論

- [3] Butler, J. B., Kwon, S. J., Integrating Prediction in Mean-Variance Portfolio Optimization, 2021.  
予測モデルとポートフォリオ最適化問題を統合的に扱う予測統合型最適化（Integrated Prediction and Optimization; IPO）の枠組みを提案した先行研究。
- [4] M. W. P. et al., Decision-Focused Learning: Foundations, State of the Art, Benchmark and Future Opportunities, arXiv preprint, 2024.  
Decision-Focused Learning の基礎理論から最新動向、代表的ベンチマークおよび今後の研究課題までを包括的に整理した総説論文。
- [5] Butler, J. B., Kwon, S. J., Decision-Focused Predictions via Pessimistic Bilevel Optimization: Complexity and Algorithms, Journal / arXiv, Year.  
DFL を悲観的二段階最適化（pessimistic bilevel optimization）として定式化し、計算複雑性および再定式化手法を理論的に解析した研究。
- [6] Shah, S., et al., Learning Locally Optimized Decision Losses, Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS), 2022.  
最適化問題を含む意思決定損失の微分可能近似を提案し、DFL の一般的な学習枠組みを拡張した研究。

### 共分散推定・**Shrinkage** モデル

- [7] Ledoit, O., Wolf, M., A Well-Conditioned Estimator for Large-Dimensional Covariance Matrices, *Journal of Multivariate Analysis*, 2004.  
高次元環境における共分散行列の shrinkage 推定法を提案した基礎的研究.
- [8] Bodnar, T., Dynamic Shrinkage Estimation of the High-Dimensional Minimum-Variance Portfolio, arXiv preprint arXiv:2106.02131, 2021.  
GMV ポートフォリオに対する動的 shrinkage 共分散推定モデルを提案した研究.
- [9] Bodnar, T., Parolya, N., Thorsén, E., Two Is Better Than One: Regularized Shrinkage of Large Minimum Variance Portfolio, arXiv preprint arXiv:2202.06666, 2022.  
共分散推定とポートフォリオ重み正則化を同時に行う二重 shrinkage モデルを理論的に分析した研究.
- [10] Tan, V., Zohren, S., Estimation of Large Financial Covariances: A Cross-Validation Approach, arXiv preprint arXiv:2012.05757, 2020.  
交差検証を用いた大規模金融共分散推定手法を提案した研究.

### 伝統的ポートフォリオ最適化理論

- [11] Markowitz, H., Portfolio Selection, *The Journal of Finance*, 1952.  
平均–分散ポートフォリオ理論を提唱した近代ポートフォリオ理論の原典.
- [12] Wikipedia contributors, Modern Portfolio Theory, [https://en.wikipedia.org/wiki/Modern\\_portfolio\\_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Modern_portfolio_theory).  
近代ポートフォリオ理論の概要および基本概念をまとめた補足資料.

### 関連応用研究

- [13] Anis, H. T., et al., End-to-End, Decision-Based, Cardinality-Constrained Portfolio Optimization, *Journal of ...*, 2025.  
End-to-end 学習と DFL を組み合わせ、組合せ制約付きポートフォリオ最適化問題を扱った研究.
- [14] Kim, Juhyeong, Semi-Decision-Focused Learning with Deep Ensembles: A Practical Framework for Robust Portfolio Optimization, *Proceedings of the International Conference on Learning Representations (ICLR)*, 2025.  
Deep Ensemble と DFL を統合した実務志向のロバストポートフォリオ最適化手法を提案した研究.

# 謝辞

本研究をご指導くださいました高野祐一准教授をはじめ、議論に協力してくださいました研究室の皆様に深く感謝いたします。