

令和7年度  
筑波大学理工学群社会工学類  
卒業研究論文

意思決定重視学習を用いたポートフォリオ最適化

経営工学主専攻

学籍番号：202211661

野坂 健成

指導教員：高野 祐一 准教授

令和7年1月21日提出

# 目 次

<b>第 1 章 序論</b>	<b>1</b>
1.1 研究背景 . . . . .	1
1.2 問題設定 . . . . .	1
1.3 関連研究 . . . . .	2
1.4 本研究の貢献 . . . . .	2
1.5 論文構成 . . . . .	3
<b>第 2 章 既存手法</b>	<b>4</b>
2.1 ポートフォリオ最適化モデル . . . . .	4
2.2 予測統合型アプローチ . . . . .	5
2.3 意思決定考慮型アプローチ . . . . .	5
<b>第 3 章 提案手法</b>	<b>6</b>
3.1 二段階最適化モデル . . . . .	6
3.2 再定式化 . . . . .	7
<b>第 4 章 数値実験</b>	<b>11</b>
4.1 実データ実験の設定 . . . . .	11
4.2 実験結果 . . . . .	14
4.2.1 実データによるベースライン比較 . . . . .	14
4.2.2 探索経路制御の効果 . . . . .	15
4.2.3 提案手法の性質分析 . . . . .	16
<b>第 5 章 結論</b>	<b>19</b>
<b>謝辞</b>	<b>20</b>
<b>Appendix</b>	<b>22</b>
A. 命題 3.1 の証明 . . . . .	22
B. DFL-OPT-D における強双対性制約の導出 . . . . .	22
C. OAS 縮小係数と実効サンプルサイズ . . . . .	23
D. 初期解+罰則項あり（全期間）の参考結果 . . . . .	24
E. 命題 3.2 の導出（アクティブ集合固定下） . . . . .	24

# 図 目 次

4.1 累積資産推移	14
4.2 検証期間における正則化強度ごとの性能分布	15
4.3 ホールドアウト期間における累積資産推移	16
4.4 決定係数 $R^2$ と意思決定品質の関係	16
1 全期間（2006–2025）における累積資産推移（初期解+罰則項、取引コスト控除後）	24

# 表 目 次

4.1	評価指標の比較	14
4.2	条件数レジーム別: 意思決定誤差と有効資産数 $N_{\text{eff}}$	17
4.3	ポートフォリオ構造の要約（太字:1位, 下線:2位. 提案手法は網掛け.）	18
4.4	危機局面における性能指標（太字:1位, 下線:2位. 提案手法は網掛け.）	18
1	全期間（2006–2025）における性能指標（初期解+罰則項, 取引コスト控除後；参考, 太字:1位, 下線:2位. 提案手法は網掛け.）	24

# 第1章 序論

## 1.1 研究背景

金融市場における資産運用では、複数資産への資金配分を決定するポートフォリオ最適化が中心的役割を担っている。ポートフォリオ最適化では一般に、期待リターンとリスクのトレードオフを考慮し、投資家の目的に応じた資産配分を決定することが求められる。近年では、機械学習手法の発展に伴い、各資産の将来リターンをデータ駆動的に推定し、その推定値をポートフォリオ最適化問題に入力する枠組みが広く用いられている。このとき多くの場合、推定モデルは平均二乗誤差などの予測誤差を最小化する目的で学習される。このような学習方針は、予測精度の観点では合理的である一方で、必ずしも最終的な投資成績の改善に直結しないことが指摘されている [7, 9]。この乖離の一因として、予測と最適化を独立に扱う二段階構造が挙げられる。すなわち、予測誤差が小さい場合であっても、その誤差が後続の最適化段階において増幅され、投資配分が大きく変動する可能性がある。この結果、リスク調整後リターンや下方リスク指標などにより評価される投資成績が悪化する場合があり得る。このような現象は、推定不確実性が大きい局面や、非負制約などの現実的な制約を含む設定において、特に顕在化しやすいことが知られている [4]。以上の背景から、近年では予測精度そのものではなく、後続の最適化問題を通じて得られる投資成績や意思決定の質を学習目標として直接最適化する枠組みである意思決定重視学習 (Decision-Focused Learning; DFL) が注目されている [9]。DFL は、予測値と実現値の誤差を最小化する従来の予測精度重視学習 (Prediction-Focused Learning; PFL) とは異なり、推定に基づく意思決定が最終的な投資成績にどのような影響を与えるかを明示的に考慮した学習を行う点に特徴がある。

## 1.2 問題設定

本節では、本研究で扱う意思決定重視学習の問題設定を定式化する。

時点  $i = 1, \dots, T$  において、各資産に関する特徴量ベクトルを  $\mathbf{x}_i$ 、当該期間に実現したリターンを  $r_i$  とする。予測モデルはパラメータ  $\theta$  を持ち、 $\mathbf{x}_i$  に基づいて各資産の期待リターンの推定値  $\hat{r}_i(\theta, \mathbf{x}_i)$  を出力するものとする。

各時点における投資配分  $\hat{\mathbf{w}}_i(\theta)$  は、推定値  $\hat{r}_i$  を入力として解かれる制約付きポートフォリオ最適化問題の最適解として定まる。ここで  $\mathcal{S}$  はポートフォリオ制約によって定まる実行可能集合、 $c(\cdot, \cdot)$  は目的関数を表す（具体的な形は第 2 章で与える）。すなわち、

$$\hat{\mathbf{w}}_i(\theta) \in \arg \min_{\mathbf{w} \in \mathcal{S}} c(\mathbf{w}, \hat{r}_i(\theta, \mathbf{x}_i))$$

と定義する。

一方、比較の基準として、もし時点  $i$  において実現リターン  $r_i$  が事前に既知であったと仮定した場合に得られる投資配分を、理想的な投資配分として次のように定義する：

$$\mathbf{w}_i^* \in \arg \min_{\mathbf{w} \in \mathcal{S}} c(\mathbf{w}, r_i).$$

この配分は実運用では利用できないが、推定に基づく意思決定の妥当性を評価するための基準として用いる。

意思決定重視学習 (Decision-Focused Learning; DFL) では、予測誤差そのものではなく、推定値に基づいて得られる投資配分が、理想的な投資配分と比べてどの程度劣っているかという観点から学習目標を定

める。本研究では、各時点  $i$  におけるこの差を意思決定誤差として

$$\ell_i(\boldsymbol{\theta}) = c(\hat{\mathbf{w}}_i(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{r}_i) - c(\mathbf{w}_i^*, \mathbf{r}_i)$$

と定義し、その平均

$$\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \ell_i(\boldsymbol{\theta})$$

を最小化する。

以上より、本研究で扱う問題は、制約付きポートフォリオ最適化を下位問題に含み、その最適解を通じて予測モデルのパラメータを学習する二段階最適化問題として定式化される。

### 1.3 関連研究

ポートフォリオ最適化は Markowitz による平均-分散ポートフォリオ最適化 (Mean-Variance Optimization; MVO) [10] を起点として発展してきた。MVO は期待リターンとリスクを明示的に扱えるため、理論的にも実務的にも解釈しやすい基準モデルとして広く用いられている。一方で、MVO の入力となる期待リターンの推定は、回帰・時系列モデルから機械学習まで幅広く研究されており、推定誤差が最適配分に与える影響が大きいことが知られている。特に Chopra and Ziemba[4] は、平均推定誤差がポートフォリオの効用や配分に与える影響を定量的に示している。

従来の多くの研究および実務では、予測モデルを平均二乗誤差 (MSE) などの予測誤差を最小化する目的で学習し、得られた推定値を最適化問題に入力して投資配分を決定する二段階構造が採用されてきた [7]。しかしこの枠組みでは、予測モデルの学習目標と、後続の最適化で最終的に評価される投資目的が必ずしも一致しないため、予測精度の向上が投資成績の改善に直結しない場合があり得る [9]。

この課題に対し、予測と最適化を統合的に扱い、意思決定の質に基づいて学習を行う枠組みとして DFL が提案されている [9]。DFL では、学習過程に最適化問題を組み込み、最適化解を介して定義される意思決定基準を直接最小化することにより、上述のギャップを緩和することを目指す。さらに、平均-分散ポートフォリオ選択に DFL を適用し、意思決定構造が推定モデルの学習に与える影響を分析する研究も報告されている [8]。

また、平均-分散ポートフォリオ最適化 (MVO) を対象として推定と最適化を統合的に扱う具体的手法として IPO が提案されている [2]。加えて、DFL を悲観的二段階最適化として捉える理論的整理 [1] や、数値安定性・アルゴリズムの観点からの検討 [11] も進められている。

### 1.4 本研究の貢献

本研究の主な貢献は以下のとおりである。

1. 制約付き平均-分散ポートフォリオ最適化を下位問題に含む DFL を対象に、下位問題の最適性条件に基づく 2 通りの同値再定式化を導出し、比較可能な形で整理した。
2. 実データを用いて、理論的に同値な再定式化であっても数値計算上の挙動（収束、安定性、初期化依存）が異なり得ることを示し、解法設計上の論点を明確化した。
3. 週次 TAA を想定した実務的設定において、PFL (OLS+MVO) と比較し、提案手法が予測精度の改善では説明できない意思決定品質 (Sharpe, CVaR) を実現し得ることを実証した。
4. 提案手法が出力した投資配分と損益系列に基づき、機会損失の分布、売買量・切替頻度、条件数レジーム別比較などの性質分析を通じて、「効く局面」および挙動の解釈可能性を整理した。

## 1.5 論文構成

本論文の構成は以下のとおりである。第2章では、既存手法としてPFLおよび予測統合型手法を整理する。第3章では、提案手法を定式化し,DFL-OPT-D / DFL-OPT-Kの再定式化を示す。第4章では、実データを用いた数値実験により提案手法の特性を検証する。第5章では、結論と今後の課題を述べる。

# 第2章 既存手法

## 2.1 ポートフォリオ最適化モデル

本研究では,Markowitz [10] による平均-分散ポートフォリオ最適化モデル (Mean–Variance Optimization, MVO) を基準モデルとして採用する. 本モデルは,期待リターンと分散リスクのトレードオフを明示的に表現できるため,解釈しやすい枠組みとして広く用いられてきた.

資産数を  $d$  とし,投資配分ベクトルを

$$\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_d)^\top \in \mathbb{R}^d$$

とする. また,期待リターンベクトルを  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d$ , 共分散行列を  $\mathbf{V} \in \mathbb{S}_{++}^d$  とする. ここで  $\mathbb{S}_{++}^d$  は正定値対称行列の集合を表す.

平均-分散モデルに基づくポートフォリオ最適化問題は,目的関数 (2.1) を最小化し,制約 (2.2)–(2.3) のもとで投資配分を決定する問題として定式化される.

$$c(\mathbf{w}, \mathbf{r}) := -(1 - \delta)\mathbf{r}^\top \mathbf{w} + \frac{\delta}{2}\mathbf{w}^\top \mathbf{V}\mathbf{w}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{w} = 1, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{w} \geq \mathbf{0}. \quad (2.3)$$

ここで  $0 \leq \delta \leq 1$  は,期待リターン項と分散リスク項の比重を直接制御するパラメータである. 最小化問題として扱うために期待リターン項に負号を付しており,期待リターンを大きくするほど  $-\mathbf{r}^\top \mathbf{w}$  が小さくなる. また  $\frac{\delta}{2}\mathbf{w}^\top \mathbf{V}\mathbf{w}$  は分散リスクを表す. 共分散行列  $\mathbf{V}$  が正定値である場合, 本問題は凸二次計画問題となり, 大域的最適解が一意に定まる. なお, 標準的な平均-分散モデルで用いられるリスク回避係数  $\gamma > 0$  を用いた表現  $-\mathbf{r}^\top \mathbf{w} + \frac{\gamma}{2}\mathbf{w}^\top \mathbf{V}\mathbf{w}$  は, 係数の単調変換 ( $\gamma = \frac{\delta}{1-\delta}$ ,  $\delta \in [0, 1]$ ) により (2.1) と対応する.

実際の運用においては,期待リターン  $\mathbf{r}$  および共分散行列  $\mathbf{V}$  は未知であり,過去データから推定される.特に期待リターンの推定誤差は,最適化問題 (2.1)–(2.3) の解に大きな影響を与えることが知られている [4].

このため,実務では回帰モデルや時系列モデル,近年では機械学習手法を用いてリターンを推定し,その推定値を最適化問題に入力するという枠組みが一般的に用いられている [7]. 本稿では,期待リターンの推定値を  $\hat{\mathbf{r}}$  として表す.

本章では,期待リターンは特徴量に対して線形に表現できると仮定し,特徴量ベクトル  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$  に基づいて次期リターンの推定値を次の形で与える.

$$\hat{\mathbf{r}}_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_i) = \text{diag}(\mathbf{x}_i)\boldsymbol{\theta}, \quad (2.4)$$

ここで  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d$  は回帰係数である.  $\boldsymbol{\theta}$  は,次の最小二乗問題を解くことで推定される.

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \|\mathbf{r}_i - \hat{\mathbf{r}}_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_i)\|_2^2. \quad (2.5)$$

得られた推定値  $\hat{\mathbf{r}}_i$  を用いて,ポートフォリオ最適化問題 (2.1)–(2.3) を解くことで投資配分が決定される.本稿では,このように推定誤差の最小化を学習目的とし,推定と最適化を分離して扱う枠組みを PFL と呼ぶ [7, 9].

## 2.2 予測統合型アプローチ

推定と最適化の分離に起因する課題に対し, Butler and Kwon [2] は, 推定モデルの学習段階にポートフォリオ最適化問題を直接組み込む予測統合型アプローチとして, Integrating Prediction in Mean–Variance Portfolio Optimization (IPO) を提案した.

IPO は, 推定モデルのパラメータを, 予測誤差ではなく「推定に基づいて得られる最終的な意思決定の良さ」を通じて更新する枠組みである. 例えば, 各時点  $t$  において推定値  $\hat{r}_t(\theta)$  が与えられたとき, ポートフォリオ最適化の最適解を  $\mathbf{w}^*(\hat{r}_t)$  とすると, IPO は次の最適化問題として表現できる.

$$\min_{\theta} \mathbb{E}_t[c(\mathbf{w}^*(\hat{r}_t(\theta)), \hat{r}_t(\theta))]. \quad (2.6)$$

$$\mathbf{w}^*(\hat{r}_t) \in \arg \min_{\mathbf{w} \in S} c(\mathbf{w}, \hat{r}_t). \quad (2.7)$$

この定式化では, 推定モデルのパラメータ  $\theta$  は予測誤差ではなく, 推定値に基づいて得られるポートフォリオの目的関数値を通じて更新される. すなわち, 学習の評価基準は「推定がどれだけ正確か」ではなく, 「推定に基づく投資配分がどれだけ良いか」によって定義される.

一方で, IPO は一般に非凸最適化問題として定式化され, 匀配ベースの手法により学習が行われる. そのため, 計算コストの増大や, 初期値に依存した局所解への収束, 制約付き設定における数値的安定性といった課題も指摘されている. 特に, 非負制約や予算制約を含む実務的な平均–分散最適化問題に対しては, 学習の安定性が必ずしも保証されない場合がある.

## 2.3 意思決定考慮型アプローチ

推定と最適化の分離に起因する課題に対し, Elmachtoub and Grigas [5] は Smart Predict–then–Optimize (SPO+) を提案した. SPO+ は, 従来の二段階法の枠組みを維持しつつ, 最適化問題の構造を反映した surrogate loss を用いて推定モデルを学習する手法である.

この点で SPO+ は, 純粋な prediction-focused learning よりも意思決定を意識した学習を行う一方, 最適化問題を学習ループに完全に組み込む DFL とは異なり, 二段階構造に基づくアプローチと位置づけられる.

本研究では, SPO+ を「二段階法における意思決定考慮型手法」の代表例として比較対象に含める.

## 共分散行列の推定

本研究では期待リターンの推定に焦点を当て, 共分散行列の推定そのものは研究対象としない. 共分散推定誤差がポートフォリオ最適化の安定性に与える影響は大きく, shrinkage 推定 [3] や時間減衰を考慮した推定法 [6] など, これまでに多くの手法が提案してきた.

本研究では, これら既存研究の知見に基づき, 小標本・短期ローリング設定において数値的安定性が高いことが知られている手法として, Oracle Approximating Shrinkage (OAS) [3] と Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) [6] を組み合わせた共分散推定法を採用する. 共分散推定手法の比較や最適化は本研究の主目的ではないため, 以降の数値実験では全ての比較手法に対して同一の共分散推定法を用い, これを固定した上で, DFL による推定モデル学習の効果に焦点を当てる.

# 第3章 提案手法

## 3.1 二段階最適化モデル

本章では, DFL の枠組みに基づき, 平均-分散ポートフォリオ最適化問題を二段階最適化問題として定式化する. 以降, 第2章で導入した平均-分散コスト  $c(\cdot, \cdot)$  ( $\delta \in [0, 1]$  によりリターン項とリスク項を重み付けした形) を用いる.

### 問題設定と推定モデル

時点  $i = 1, \dots, T$  において, 特徴量ベクトル  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$  および実現リターン  $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^d$  が観測されるとする. 第2章と同様に, 期待リターンの推定値は線形単回帰モデル (2.4) により与えられるものとする. ここで  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d$  は学習対象となる回帰係数である.

### 下位問題：制約付きポートフォリオ最適化

推定モデル (2.4) に基づく推定値  $\hat{\mathbf{r}}_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_i)$  を入力として得られる各時点  $i$  の投資配分を  $\hat{\mathbf{w}}_i$  とし, 次の制約付き最適化問題の解として定義する.

$$\hat{\mathbf{w}}_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_i) \in \arg \min_{\mathbf{w}_i \in \mathcal{S}} c(\mathbf{w}_i, \hat{\mathbf{r}}_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_i)), \quad (3.1)$$

ただし, 目的関数は次の修正平均-分散コスト関数で与えられる.

$$c(\mathbf{w}_i, \mathbf{r}) = -(1 - \delta)\mathbf{r}^\top \mathbf{w}_i + \frac{\delta}{2}\mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i, \quad 0 \leq \delta \leq 1. \quad (3.2)$$

ポートフォリオの制約集合  $\mathcal{S}$  は

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{1}^\top \mathbf{w}_i = 1, \mathbf{w}_i \geq \mathbf{0}\} \quad (3.3)$$

とする.

ここで  $\mathbf{V}_i \in \mathbb{S}_{++}^d$  は共分散行列であり,  $\delta$  はリターン項とリスク項の比重を制御するパラメータである.  $\delta \rightarrow 0$  のときリターン重視,  $\delta \rightarrow 1$  のときリスク重視の投資配分が得られる.

### 理想的な投資配分

意思決定誤差を評価する基準として, 各時点  $i$  において実現リターン  $\mathbf{r}_i$  が既知であると仮定した場合の理想的な投資配分を次のように定義する.

$$\mathbf{w}_i^* \in \arg \min_{\mathbf{w}_i \in \mathcal{S}} c(\mathbf{w}_i, \mathbf{r}_i). \quad (3.4)$$

この投資配分は実運用では利用できないが, 学習ではこの理想解に対する目的関数差を最小化することで意思決定誤差の低減を図る.

## 上位問題：意思決定誤差最小化

DFL では、予測モデルのパラメータ  $\theta$  を、予測誤差ではなく意思決定の質を通じて学習する。本研究では、各時点  $i$  における意思決定誤差を次のように定義する。

$$\ell_i(\theta) = c(\hat{\mathbf{w}}_i(\theta, \mathbf{x}_i), \mathbf{r}_i) - c(\mathbf{w}_i^*, \mathbf{r}_i). \quad (3.5)$$

このとき、上位問題は次の二段階最適化問題として定式化される。

$$\min_{\theta} \quad \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \ell_i(\theta), \quad (3.6)$$

$$\text{s.t.} \quad \hat{\mathbf{w}}_i(\theta, \mathbf{x}_i) \text{ は (3.1) の最適解.} \quad (3.7)$$

すなわち、本研究で扱う問題は、制約付き平均分散ポートフォリオ最適化を下位問題に含む二段階最適化問題である。

## 問題の性質と再定式化への動機

定式化 (3.6)–(3.7) は、下位問題に  $\arg \min$  演算子を含むため、直接的な数値計算が困難である。さらに、目的関数は下位問題の最適解写像  $\hat{\mathbf{w}}_i(\theta, \mathbf{x}_i)$  を介して  $\theta$  に依存するため、一般に非凸となる。

そこで本研究では、先行研究 [1] を参考に、下位問題の最適性条件を用いて  $\arg \min$  を含む二段階構造を単一レベルの非凸二次計画問題へ再定式化する。次節では、強双対性条件に基づく定式化 (DFL-OPT-D) および KKT 条件に基づく定式化 (DFL-OPT-K) を示す。

## 3.2 再定式化

本節では、前節の方針に従い、単一レベル化した 2 通りの定式化として、(1) 強双対性条件に基づく DFL-OPT-D、(2) KKT 条件に基づく DFL-OPT-K を示す。

### 下位問題のラグランジュ関数

各時点  $i$  における下位問題 (3.1) を再掲する。ここでは簡単のため  $\hat{\mathbf{r}}_i := \hat{\mathbf{r}}_i(\theta, \mathbf{x}_i)$  とおく。

$$\min_{\mathbf{w}_i} \quad -(1-\delta)\hat{\mathbf{r}}_i^\top \mathbf{w}_i + \frac{\delta}{2}\mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i, \quad (3.8)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{1}^\top \mathbf{w}_i = 1, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{w}_i \geq \mathbf{0}. \quad (3.10)$$

等式制約および不等式制約に対応するラグランジュ乗数を、それぞれ  $\mu_i \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}^d$  とすると、ラグランジュ関数は次のように与えられる。

$$\mathcal{L}_i(\mathbf{w}_i, \mu_i, \lambda_i) = -(1-\delta)\hat{\mathbf{r}}_i^\top \mathbf{w}_i + \frac{\delta}{2}\mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i + \mu_i(1 - \mathbf{1}^\top \mathbf{w}_i) - \lambda_i^\top \mathbf{w}_i. \quad (3.11)$$

### 強双対性条件に基づく再定式化

下位問題 (3.8) は、 $\mathbf{V}_i \succ \mathbf{0}$  および  $\delta > 0$  の仮定の下で目的関数が強凸となる凸二次計画問題である。また、制約集合  $\{\mathbf{w} \mid \mathbf{1}^\top \mathbf{w} = 1, \mathbf{w} \geq \mathbf{0}\}$  は非空であり、例えば  $\mathbf{w} = \frac{1}{d}\mathbf{1}$  は等式制約を満たし、かつ  $\mathbf{w} > \mathbf{0}$  を満たす。したがって Slater 条件が成立する。以上より、本問題は強双対性を満たし、双対問題が存在する。

弱双対性より, 任意の主問題の実行可能解  $\mathbf{w}_i$  と双対変数  $(\boldsymbol{\lambda}_i, \mu_i)$  ( $\boldsymbol{\lambda}_i \geq \mathbf{0}$ ) に対して, 双対目的値は主問題目的値の下界となる.

$$-(1 - \delta)\hat{\mathbf{r}}_i^\top \mathbf{w}_i + \frac{\delta}{2}\mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i \geq \mu_i - \frac{\delta}{2}\mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i, \quad (3.12)$$

強双対性より, 最適解においては (3.12) の不等式は等号で成立する.

さらに, ラグランジュ関数の一階条件より,

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{w}_i} \mathcal{L}_i(\mathbf{w}_i, \mu_i, \boldsymbol{\lambda}_i) &= \delta \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i - (1 - \delta)\hat{\mathbf{r}}_i - \mu_i \mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda}_i \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

また, 強双対性と (3.13) を用いると, 最適値一致条件は次の等式として表せる (導出は Appendix に示す).

$$\delta \mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i - (1 - \delta)\hat{\mathbf{r}}_i^\top \mathbf{w}_i = \mu_i. \quad (3.14)$$

以上を用いることで, 二段階最適化問題 (3.6)–(3.7) は, 次の単一レベル最適化問題として再定式化される.

$$\min_{\boldsymbol{\theta}, \{\mathbf{w}_i, \mu_i, \boldsymbol{\lambda}_i\}_{i=1}^T} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left( -(1 - \delta)\hat{\mathbf{r}}_i^\top \mathbf{w}_i + \frac{\delta}{2}\mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i \right), \quad (3.15)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{1}^\top \mathbf{w}_i = 1, \quad i = 1, \dots, T, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{w}_i \geq \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, T, \quad (3.17)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_i \geq \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, T, \quad (3.18)$$

$$\delta \mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i - (1 - \delta)\hat{\mathbf{r}}_i^\top \mathbf{w}_i = \mu_i, \quad i = 1, \dots, T, \quad (3.19)$$

$$\delta \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i - (1 - \delta)\hat{\mathbf{r}}_i - \mu_i \mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, T. \quad (3.20)$$

この定式化を DFL-OPT-D と呼ぶ.

## KKT 条件に基づく再定式化

別の再定式化として, 下位問題 (3.8) の KKT 条件をすべて制約として組み込む方法を考える.KKT 条件は以下から構成される.

一次の最適性条件

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{w}_i} \mathcal{L}_i(\mathbf{w}_i, \mu_i, \boldsymbol{\lambda}_i) &= \delta \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i - (1 - \delta)\hat{\mathbf{r}}_i - \mu_i \mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda}_i \\ &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

実行可能性条件

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{w}_i = 1, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{w}_i \geq \mathbf{0}, \quad (3.23)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_i \geq \mathbf{0}. \quad (3.24)$$

相補性条件

$$\boldsymbol{\lambda}_i \odot \mathbf{w}_i = \mathbf{0}. \quad (3.25)$$

これらを用いることで, 次の単一レベル最適化問題が得られる.

$$\min_{\boldsymbol{\theta}, \{\mathbf{w}_i, \mu_i, \boldsymbol{\lambda}_i\}_{i=1}^T} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left( -(1 - \delta)\hat{\mathbf{r}}_i^\top \mathbf{w}_i + \frac{\delta}{2}\mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i \right), \quad (3.26)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{1}^\top \mathbf{w}_i = 1, \quad i = 1, \dots, T, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{w}_i \geq \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, T, \quad (3.28)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_i \geq \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, T, \quad (3.29)$$

$$\delta \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i - (1 - \delta)\hat{\mathbf{r}}_i - \mu_i \mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, T, \quad (3.30)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_i \odot \mathbf{w}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, T. \quad (3.31)$$

この定式化を DFL-OPT-K と呼ぶ.

## DFL-OPT-D と DFL-OPT-K の関係

本節では、提案手法である DFL-OPT-D と DFL-OPT-K の理論的関係を整理する。両者はいずれも同一の下位ポートフォリオ最適化問題 (3.8) に基づいて導出されており、下位問題の最適性条件を異なる形で表現した定式化である。

**命題 3.1** (DFL-OPT-D と DFL-OPT-K の理論的同値性). 各  $i = 1, \dots, T$  に対して、下位のポートフォリオ最適化問題 (3.8) が凸二次計画問題であり、Slater 条件を満たすと仮定する。このとき、DFL-OPT-D ((3.15)–(3.20)) と DFL-OPT-K ((3.26)–(3.31)) は同一の解集合を持つ。すなわち、両定式化は理論的に等価である。

(証明は Appendix に示す。)

命題 3.1 より、DFL-OPT-D と DFL-OPT-K はいずれも下位問題 (3.8) の最適性条件を正確に表現しており、理論的には等価であることが分かる。一方で、数値計算の観点からは、両者は異なる性質を持つ。

DFL-OPT-K は、下位問題の KKT 条件を直接組み込んだ定式化であり、制約構造が明示的かつ解釈しやすい。その結果、数値計算において比較的安定した挙動を示し、初期値や探索経路に対する感度も抑えられることが確認された。一方、DFL-OPT-D は双対関数に基づく非線形等式制約を含むため、数値的な取り扱いが相対的に難しい場合がある。

以上を踏まえ、本研究の数値実験では、理論的同値性を保ちつつ、より安定かつ実装上扱いやすい DFL-OPT-K を主たる提案手法として用い、以降の議論を進める。DFL-OPT-D は、提案手法の理論的背景を補完する定式化として位置づける。

## 解写像の局所感度と条件数

命題 3.1 より、DFL-OPT-D と DFL-OPT-K は理論的には同値である。一方で、第 4 章の数値実験では、条件数が高い局面において手法間で意思決定誤差の tail やポートフォリオの集中度 ( $N_{\text{eff}}$  や  $\max_i w_i$ ) に差が現れることが観察された。この差を解釈するため、本節では、下位の制約付き凸二次計画問題における最適解写像  $(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{V}) \mapsto \mathbf{w}^*(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{V})$  の局所感度に関する標準的結果を、本研究の文脈に合わせて整理する。

以下では、各時点を固定し、次の下位問題（平均–分散最適化）を考える：

$$\mathbf{w}^*(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{V}) \in \arg \min_{\mathbf{w}} \left\{ -(1 - \delta)\hat{\mathbf{r}}^\top \mathbf{w} + \frac{\delta}{2} \mathbf{w}^\top \mathbf{V} \mathbf{w} \mid \mathbf{1}^\top \mathbf{w} = 1, \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \right\}. \quad (3.32)$$

本問題は  $\delta > 0$  かつ  $\mathbf{V} \succ \mathbf{0}$  の下で強凸であり、最適解は一意に定まる。さらに、不等式制約のアクティブ集合 ( $\mathbf{w}$  の正の成分集合) が近傍で不变である局所では、 $\mathbf{w}^*$  は  $\hat{\mathbf{r}}$  に関して滑らかに変化し、その感度は  $\mathbf{V}$  の数値的性質（特に最小固有値）によって上から抑えられることが知られている（パラメトリック凸 QP の感度解析における標準結果）。

この点を明確化するため、以下の命題を示す。（厳密な導出は Appendix に示す。）本命題はパラメトリック凸 QP の感度解析における標準結果であり、本研究では第 4 章の実験結果の解釈のために再掲する。また、大域的な Lipschitz 性ではなく、アクティブ集合固定下の局所結果に限定する。

**命題 3.2** (最適解写像の局所感度 (アクティブ集合固定)).  $\delta > 0$ ,  $\mathbf{V} \succ \mathbf{0}$  とし、(3.32) の最適解を  $\mathbf{w}^*(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{V})$  とする。ある  $(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{V})$  の近傍で、アクティブ集合  $A := \{j \mid w_j^* > 0\}$  が不变であると仮定する。このとき、 $A$  上の解  $\mathbf{w}_A^*$  は  $\hat{\mathbf{r}}_A$  に関して affine であり、そのヤコビアンは

$$\frac{\partial \mathbf{w}_A^*}{\partial \hat{\mathbf{r}}_A} = \frac{1 - \delta}{\delta} (\mathbf{V}_{AA}^{-1} - \mathbf{V}_{AA}^{-1} \mathbf{1} (\mathbf{1}^\top \mathbf{V}_{AA}^{-1} \mathbf{1})^{-1} \mathbf{1}^\top \mathbf{V}_{AA}^{-1}) \quad (3.33)$$

で与えられる。したがって、同一アクティブ集合内の任意の摂動  $\Delta\hat{\mathbf{r}}$  に対し

$$\|\Delta\mathbf{w}^*\|_2 \leq C_A \frac{1-\delta}{\delta} \frac{1}{\lambda_{\min}(\mathbf{V}_{AA})} \|\Delta\hat{\mathbf{r}}\|_2 \quad (3.34)$$

を満たす定数  $C_A < \infty$  が存在する。

命題 3.2 は、アクティブ集合が固定される局所では、 $\hat{\mathbf{r}}$  の誤差（あるいは数値誤差）が  $\mathbf{w}^*$  に增幅される度合いが  $\lambda_{\min}(\mathbf{V}_{AA})$  により支配されることを意味する。特に、 $\mathbf{V}$  の条件数が大きい局面では一般に  $\lambda_{\min}(\mathbf{V}_{AA})$  が小さくなりやすく、同じ大きさの  $\Delta\hat{\mathbf{r}}$  に対して  $\mathbf{w}^*$  が大きく変動し得る。さらに、アクティブ集合の切替えが生じる境界近傍では、この変動が「少数資産への極端集中」へ遷移する形で観測される可能性がある。

本研究では共分散推定として OAS 縮小を用いるため、 $\mathbf{V}_\phi = (1 - \phi)\mathbf{S} + \phi\alpha\mathbf{I}$  と書ける。このとき  $\lambda_{\min}(\mathbf{V}_\phi) \geq (1 - \phi)\lambda_{\min}(\mathbf{S}) + \phi\alpha$  より、 $\lambda_{\min}$  が底上げされ、(3.34) の上界（すなわち解写像の感度）が抑制される方向に働く。第 4 章では、この感度の観点と整合する形で、条件数レジーム別に意思決定誤差の tail および  $N_{\text{eff}}$  や極端集中確率を比較する。

# 第4章 数値実験

本章では、第3章で提案した DFL-OPT-D および DFL-OPT-K の数値的挙動と実務的有効性を、実データを用いたタクティカル・アセット・アロケーション (Tactical Asset Allocation; TAA) の文脈で評価する。特に、(i) dual 定式化と KKT 定式化の数値的差異、(ii) 初期化の影響、(iii) 提案手法がどのような状況で相対的な優位性を示すか、という点に焦点を当てる。

## 4.1 実データ実験の設定

本節では、実験の基本方針、使用データ、共分散推定方法、比較手法、ならびに初期化およびソルバー設定について述べる。本章を通じて、比較手法間で実験設定を可能な限り統一し、学習枠組みおよび定式化の違いに起因する差異に焦点を当てる。

### 実験の基本方針

第3章で示したとおり、DFL-OPT-D および DFL-OPT-K はいずれも、下位に制約付き平均-分散最適化問題を含む非凸な非線形最適化問題として定式化される。そのため、数値計算においては初期解やソルバー設定に依存して、異なる局所解へ収束する可能性がある。

本研究の目的は、特定の初期化やハイパーパラメータ調整によって得られた「最良の局所解」を主張することではない。むしろ、実務的に自然な制約条件と統一された実験設定の下で、DFL に基づく定式化がどのような挙動・特性を示すかを体系的に評価することを目的とする。

このため、本章では可能な限り

- 使用データ
- 特徴量設計
- 制約条件
- 評価指標
- 初期化およびソルバー設定

を比較手法間で統一し、モデル構造および学習方式の違いそのものに起因する差異に焦点を当てる。

### 使用データおよび学習・再バランス設定

実データ実験では、短期タクティカル・アセット・アロケーション (Tactical Asset Allocation; TAA) を想定し、Yahoo Finance から取得した調整後終値に基づく週次リターン（2006年1月から2025年12月）を用いる。投資対象は、異なるリスク特性を代表する ETF として、以下の4資産を選択する。

- SPDR S&P 500 ETF Trust (SPY)：米国株式
- SPDR Gold Shares (GLD)：金
- iShares MSCI Emerging Markets ETF (EEM)<sub>11</sub>：新興国株式

- iShares 20+ Year Treasury Bond ETF (TLT) : 米国長期国債

各時点  $t$  における特徴量  $\mathbf{x}_t$  として, 直近 26 週の週次リターン平均を用いる. これは, 短期的なトレンド情報を反映しつつ, 週次データに内在するノイズを一定程度平滑化するための設定である.

モデルの学習およびポートフォリオの更新はローリング手順に基づき, 直近 26 週 (約半年) の週次リターンを用いて推定を行い, 推定したパラメータは次の 4 週間 (約 1 か月) にわたって固定して用いる. これにより, 週次データの短期ノイズに過度に反応することを抑えつつ, 半年程度の情報に基づく短期的な状態推定と月次の運用更新という時間スケールを両立する.

なお, 以降の実験ではリスクとリターンのトレードオフ係数を中庸的な設定として  $\delta = 0.5$  に固定する. 本章ではハイパーパラメータ最適化は目的とせず, すべての手法で学習窓長と更新頻度を共通に固定することで, 第 3 章の定式化および学習枠組みの差異の影響を比較する.

## 共分散行列の推定

本研究では, ポートフォリオ最適化に用いる共分散行列  $\mathbf{V}_t$  を, 時間減衰を考慮した標本共分散行列に対して Oracle Approximating Shrinkage (OAS) を適用する方法により推定する [3].

まず, 時点  $t$  における EWMA 共分散行列  $\mathbf{S}_t$  を次式で定義する.

$$\mathbf{S}_t = (1 - \alpha) \sum_{k=0}^{L-1} \alpha^k (\mathbf{r}_{t-k} - \bar{\mathbf{r}}_t)(\mathbf{r}_{t-k} - \bar{\mathbf{r}}_t)^\top, \quad (4.1)$$

ここで,  $L = 13$  はローリング窓長 (約四半期) であり, 本研究の短期ローリング設定に基づき固定する. また,  $\alpha = 0.97$  は時間減衰率であり, 実務における業界慣例に基づき固定する [6].  $\bar{\mathbf{r}}_t$  は同窓内の平均リターンを表す.

次に, OAS に基づく縮小共分散行列  $\mathbf{V}_t$  を次のように定義する.

$$\mathbf{V}_t = (1 - \phi_t) \mathbf{S}_t + \phi_t \frac{\text{tr}(\mathbf{S}_t)}{d} \mathbf{I}, \quad (4.2)$$

ここで  $\phi_t \in [0, 1]$  は縮小強度であり, OAS により解析的に決定される. また, EWMA のように観測に重みを付ける場合,  $n_{\text{eff}}$  は「時間減衰率  $\alpha$  に対応する実効サンプルサイズ」とみなせる [6]. OAS は, 小標本下において標本共分散行列の推定誤差を抑制しつつ, 分散構造の情報を保持する点で知られており, 本研究のような短期ローリング設定と高い親和性を持つ [3]. 縮小係数  $\phi_t$  および  $n_{\text{eff}}$  の具体式は Appendix に示す.

本研究では, 共分散推定手法の比較や最適化は目的とせず, すべての手法に対して同一の  $\mathbf{V}_t$  を用いる. これにより, 推定リターンと意思決定の統合方法 (PFL / IPO / DFL) の違いに焦点を当てる.

## 評価指標

本章の数値実験におけるポートフォリオ性能の評価には, リターン水準, リスク水準, リスク調整後パフォーマンス, および売買行動の安定性を多面的に捉えるため, 以下の指標を用いる. いずれの指標も, 取引コスト (bps) を考慮した実行ベースの損益系列に基づいて算出する.

### リターン指標

- 年率リターン (Annualized Return) : 期間全体の累積リターンから年率換算した平均成長率を用いる.
- 最終資産価値 (Final Wealth) : 初期資産を 1 としたときの評価期間終了時点における累積資産額を用いる.

### リスク調整後指標

- Sharpe 比 : 無リスク利子率を 0 と仮定し, 年率リターンを年率ボラティリティで除した値として定義する.

$$\text{Sharpe} = \frac{\mu}{\sigma},$$

ここで  $\mu$  は年率リターン,  $\sigma$  は年率ボラティリティである.

#### リスク指標

- 年率ボラティリティ (Annualized Volatility) : 週次リターンの標準偏差を年率換算した値とする.
- 最大ドローダウン (Maximum Drawdown) : 累積資産曲線におけるピークからの最大下落率を測定する.
- CVaR<sub>95</sub> : リターン分布の下位 5% における平均損失を用い, 極端な損失リスクを評価する.

#### 売買行動・安定性指標

- 平均ターンオーバー (Turnover) : 各リバランス時点におけるポートフォリオ変更量の平均値を用いる.
- スイッチ頻度 (Switch Frequency) : リバランス時点において, 最大ウェイトを持つ資産が前期から変更された割合を測定する. 本指標は, 意思決定の安定性およびポートフォリオ構成の急激な変化の度合いを捉える目的で導入する.

以上の評価指標は, すべての比較手法に対して同一の定義および算出方法を適用する. これにより, 手法間の性能差が定式化および学習枠組みの違いに起因するものであることを明確にする.

## 比較手法

実データ実験では, 予測モデルや制約条件等を可能な限り統一したうえで, 以下の手法を比較対象として用いる.

#### 提案手法

- DFL-OPT-D : 第 3 章で導出した強双対性条件に基づく提案手法.
- DFL-OPT-K : 第 3 章で導出した KKT 条件に基づく提案手法.

#### Prediction-Focused Learning の基準

- OLS + MVO : 期待リターンを最小二乗誤差で推定し, 得られた推定値  $\hat{r}$  を平均-分散最適化に入力して配分を決定する, 実務でも標準的な構成. これを PFL の基準手法として採用する.

#### 予測統合型手法

- IPO-GRAD : 最適化問題を学習ループに組み込み, 下位最適化問題を通じて勾配を伝播させる End-to-End 手法 [2].

#### Decision-Focused Learning 系

- DFL-CF : (3.6)–(3.7) の下位問題において制約を外した場合に得られる解析解に基づく手法であり,[2] に示される解析的解に対応する. 本研究では, 解析解ベースの基準および初期化候補として用いる.
- SPO+ : 線形最適化問題に対して機会損失の凸上界を構成することで, 勾配ベースの学習を可能にした手法 [5]. 本研究の制約付き平均-分散問題には直接適用できないため, 近似的設定により比較対象に含める.

#### ベンチマーク (運用戦略)

- Buy-and-Hold (S&P 500) : 株式市場に対する単純な長期保有戦略.
- 等分散投資 ( $1/N$ ) : 推定誤差に依存しない頑健な基準配分.

## 初期化およびソルバー設定

第3章で述べたとおり、本研究で扱う最適化問題は非凸であり、初期化により到達する局所解が変化し得る。本研究では、非線形最適化ソルバーとして KNITRO を用い、ソルバー設定は原則として全手法で統一する。

DFL 系手法では、実データ実験におけるデフォルト初期値として  $\theta = \mathbf{0}$  を用い、その他の変数は中立的な初期値から開始する。後続の実験では、DFL-CF に基づく初期化も導入し、初期化の影響を検証する。

## 4.2 実験結果

### 4.2.1 実データによるベースライン比較

本節では、第3章で導出した提案手法である DFL-OPT-K について、実データを用いた比較手法との結果を示す。以降の数値実験では、DFL-OPT-K を主たる提案手法として扱い、下位問題の初期解には解析解に基づく DFL-CF を用いる。まず、図 4.1 に、2006 年 1 月から 2025 年 12 月までの全期間における各手法の累積資産推移を示す。

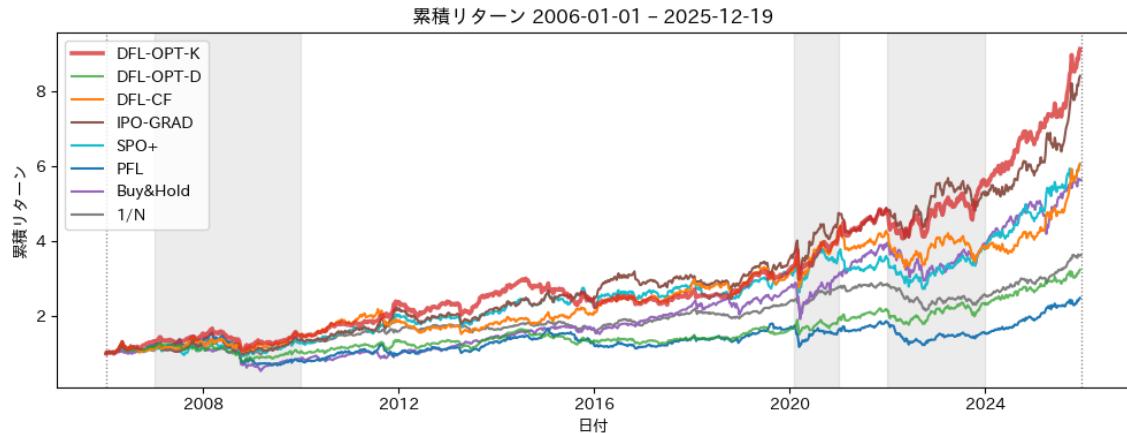


図 4.1: 累積資産推移

図 4.1 より、DFL-OPT-K は比較手法と比べて、長期運用期間を通じて相対的に安定した資産成長をしていることが確認できる。特に、大きな下落局面においても資産の毀損が抑制されており、時系列的に見て過度な変動を伴わない挙動が観察される。

次に、表 4.1 に主要な評価指標をまとめる。(太字:1 位、下線:2 位。提案手法は網掛け。) DFL-OPT-K は Sharpe 比、最終資産および年率リターンにおいて最も高い値を示しており、年率ボラティリティや CVaR<sub>95</sub> といったリスク指標においても、等分散投資に次ぐ水準に留まっている。これらの結果は、図 4.1 で観察された安定した資産推移が、リターン水準とリスク指標の双方において定量的にも裏付けられていることを示している。

表 4.1: 評価指標の比較

Model	Sharpe	Terminal	Ann. Return	Ann. Vol	CVaR <sub>95</sub>
DFL-OPT-K	<b>0.81</b>	<b>9.14</b>	<b>12.27</b>	15.16	4.94
DFL-CF	0.61	6.07	10.57	17.36	5.65
IPO-GRAD	<u>0.71</u>	<u>8.42</u>	<u>12.19</u>	17.23	5.47
SPO+	0.60	6.07	10.66	17.91	5.73
PFL	0.34	2.49	6.42	19.04	6.68
Buy&Hold	0.57	5.64	10.35	18.14	6.19
1/N	0.62	3.64	7.13	<b>11.42</b>	<b>3.65</b>

以上より、DFL-OPT-K は実データにおいて、既存手法と比較して競争力のある投資性能を示していることが確認できる。次節以降では、DFL-OPT-K の数値的性質や探索挙動に焦点を当て、初期解の役割や最適化過程の安定性について詳細に検討する。

#### 4.2.2 探索経路制御の効果

本節では、提案手法 DFL-OPT-K において、探索経路の制御が数値的安定性および意思決定品質に与える影響を検証する。第3章で述べたとおり、DFL-OPT-K は非凸な最適化問題を含むため、初期化や正則化といった探索経路の設計が、収束挙動および得られる解の安定性に影響を与える可能性がある。ここでは、解析解に基づく初期解の導入およびパラメータに対する罰則項の付加という二つの探索経路制御手法に着目する。

##### 正則化強度 $\eta$ の選択

$\theta$  が解析解  $\theta_{CF}$  から過度に乖離することを防ぐため、本研究では目的関数に  $\ell_2$  型の罰則項  $\eta \|\theta - \theta_{CF}\|_2^2$  を導入する。正則化強度  $\eta$  は、データ全体（2006/01/01–2025/12/31）を前半 10 年（2006/01/01–2015/12/31）と後半 10 年（2016/01/01–2025/12/31）に分割し、前半期間のみを用いて選択した。後半期間は、最終的な性能評価のために保持し、 $\eta$  の選択には一切用いていない。

前半 10 年の検証では、時系列の順序を保つため、学習期間を過去から順次延長し、将来側の区間を検証に用いるホールドアウト検証を行った。具体的には、学習期間を 2006 年から段階的に拡張し、各段階でそれ以後の期間を検証区間とする複数の分割（例：2006–2007 を学習、2008–2015 を検証；…；2006–2012 を学習、2013–2015 を検証）を構成した。各分割において、候補集合  $\eta \in \{0, 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1, 5, 10, 50, 100, 500\}$  に対する検証性能を算出し、分割間で集計した指標に基づいて比較を行った。

$\eta$  の選択基準としては、検証区間における Sharpe 比の平均値を主指標とし、同程度の Sharpe 比を示す候補が複数存在する場合には、下方リスクの観点から CVaR<sub>95</sub> が小さいものを優先した。その結果、 $\eta = 5$  が前半期間の検証において最も安定して良好な性能を示したため、以降の実験ではこの値を採用する。

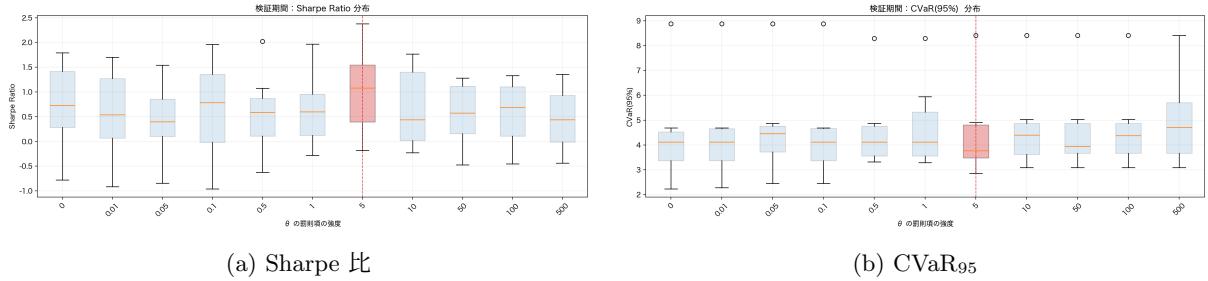


図 4.2: 検証期間における正則化強度ごとの性能分布

##### 投資成績への影響

最後に、探索経路制御が実際の投資成績に与える影響を確認する。ここでは、初期解および罰則項を導入した DFL-OPT-K を用いて、時系列ホールドアウトの評価期間（2016/01/01–2025/12/31）における運用結果を確認する。評価指標は取引コストを考慮した実行ベースの損益系列に基づいて算出する。



図 4.3: ホールドアウト期間における累積資産推移

図 4.3 に示す通り、解析解初期化+罰則項はホールドアウト期間において他の設定と比較して安定した資産成長を示している。実際、Sharpe 比は初期化 ( $\theta = 0$ ) (0.59)、解析解初期化 (0.61) に対し、解析解初期化+罰則項では 0.67 と最も高い値を示した。

これらの結果から、探索経路制御は数値的安定性を向上させるだけでなく、投資成績を大きく損なうことなく、場合によってはリスク調整後指標の改善にも寄与していることが確認できる。

#### 4.2.3 提案手法の性質分析

本節では、前節までで示した提案手法 (DFL-OPT-K) の実証的な性能差が、どのような性質に起因しているのかを詳しく分析する。特に本研究では、「予測精度の高さ」そのものではなく、「予測誤差を含んだ状況下で、どのような意思決定が行われているか」という観点から、提案手法の挙動を整理する。

以下では、(i) 予測精度と意思決定品質の乖離、(ii) 問題条件の難易度（条件数）に応じた挙動の変化、(iii) ポートフォリオ解  $w$  の構造的特徴、および (iv) 危機局面における挙動、の順に検討する。

##### 予測精度と意思決定品質の乖離

まず、予測モデルの精度と、それに基づく投資成果との関係を確認する。

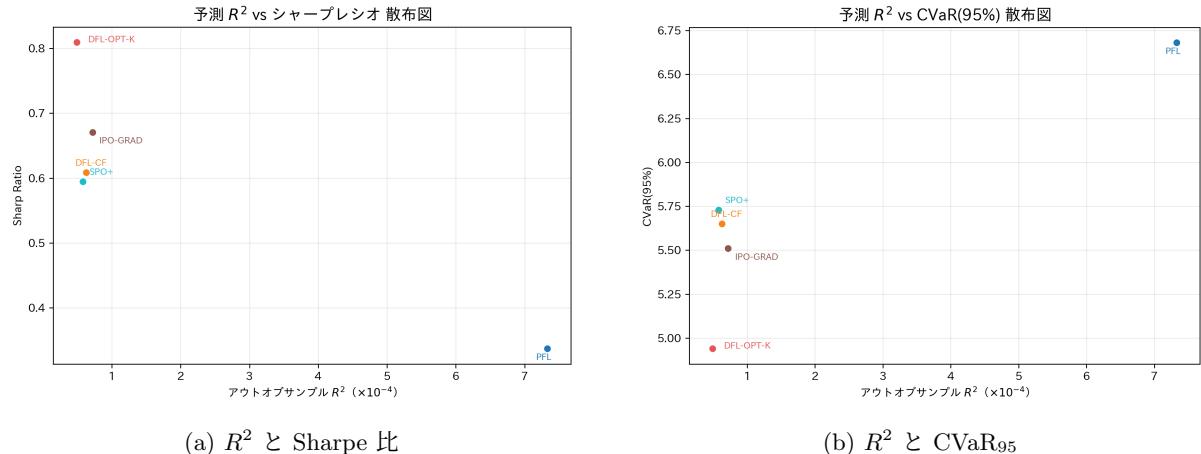


図 4.4: 決定係数  $R^2$  と意思決定品質の関係

図 4.4 は、各手法について、予測精度（決定係数  $R^2$ ）と意思決定品質（投資成績）との関係を示したものである。

これらの図から、予測精度が必ずしも高い手法が高い Sharpe 比や低い CVaR を達成しているわけではないことが確認できる。特に、PFL 系手法では比較的高い予測精度を示す場合であっても、投資成績が必ずしも改善されないケースが見られる。

一方、提案手法 DFL-OPT-K は、予測精度が中程度である場合でも、相対的に高い Sharpe 比や良好な下方リスク指標を示している。これは、提案手法が予測誤差を含んだ状況においても、最終的な意思決定を重視した学習・最適化を行っていることを示唆している。

### 条件数レジーム別の比較分析

次に、下位最適化問題の数値的な難易度が、意思決定の品質にどのような影響を与えるかを分析する。本研究では、各時点における共分散行列の条件数に基づき、市場環境を「低・中・高」の 3 つの条件数レジームに分類する。

表 4.2: 条件数レジーム別: 意思決定誤差と有効資産数  $N_{\text{eff}}$

Model	低 (条件数)				中 (条件数)				高 (条件数)			
	平均	p90	p95	$N_{\text{eff}}$	平均	p90	p95	$N_{\text{eff}}$	平均	p90	p95	$N_{\text{eff}}$
DFL-OPT-K	84.91	<b>201.1</b>	<b>249.1</b>	<b>1.420</b>	<b>94.60</b>	<b>217.6</b>	<b>286.4</b>	<b>1.482</b>	120.9	<b>263.7</b>	<b>360.7</b>	<b>1.530</b>
DFL-CF	<b>83.56</b>	223.7	256.7	1.062	100.1	258.6	348.2	1.059	122.9	309.9	405.7	1.049
IPO-GRAD	83.98	<b>212.7</b>	<b>255.6</b>	1.038	<b>98.92</b>	<b>243.9</b>	330.6	1.070	<b>120.6</b>	<b>293.2</b>	<b>392.2</b>	1.066
SPO+	85.08	218.2	256.2	1.036	101.6	258.2	<b>310.6</b>	1.049	<b>119.7</b>	320.7	410.9	1.071
PFL	85.48	218.2	263.9	<u>1.079</u>	101.1	<b>257.5</b>	336.0	<u>1.101</u>	132.0	329.1	481.3	<u>1.106</u>

表 4.2 には、各レジームにおける意思決定誤差および有効資産数  $N_{\text{eff}}$  をまとめている。

この結果から、条件数が高くなるにつれて、多くの比較手法では意思決定誤差が大きくなり、有効資産数が急激に減少する傾向が確認される。特に、条件数が高いレジームでは、解が一部の資産に極端に集中する傾向が顕著である。

一方、提案手法 DFL-OPT-K は、高条件数レジームにおいても意思決定誤差の増大が相対的に抑制されており、有効資産数も安定して維持されている。これは、提案手法が数値的に不安定な状況においても、意思決定を過度に歪めない構造を持っていることを示唆する。

この挙動は、制約付き凸二次計画問題における最適解が、アクティブ制約集合に応じた *piecewise affine* な構造を持つことと整合的である。すなわち、共分散行列の条件数が高い局面では、わずかな予測誤差や数値誤差がアクティブ集合の切り替えを誘発し、解が一部の資産に極端に集中するレジームへ遷移しやすい。提案手法 DFL-OPT-K では、このようなレジーム切り替えが相対的に抑制されている可能性が示唆される。さらに、このような高条件数レジームにおける意思決定誤差の tail 抑制は、実際の投資成果にも部分的に反映されている。表 4.2 に示すように、高条件数レジームでは多くの手法で意思決定誤差（平均・tail）が増大する一方、提案手法 DFL-OPT-K は p90/p95 の観点で相対的に小さい値を示しており、数値的に不安定な局面において極端な意思決定の失敗を回避しやすい可能性が示唆される。

### ポートフォリオ解 $w$ の構造的特徴

前節では、共分散行列の条件数に応じて、意思決定誤差や解の安定性が大きく変化することを確認した。本節では、そのような数値的特性の違いが、実際にどのようなポートフォリオ構造として現れているかを分析する。

表 4.3: ポートフォリオ構造の要約 (太字:1 位, 下線:2 位. 提案手法は網掛け.)

Model	HHI (平均)	$P(\max_i w_i \geq 0.95)$	捕捉率 (%)	平均ターンオーバー (%)	平均 $N_{\text{eff}}$
DFL-OPT-K	<b>0.772</b>	<b>0.490</b>	<b>43.1</b>	24.01	<b>1.477</b>
DFL-CF	0.968	0.915	27.2	24.17	1.057
IPO-GRAD	0.967	0.912	27.3	25.24	1.058
SPO+	0.970	0.915	30.1	<u>21.02</u>	1.052
PFL	<u>0.947</u>	<u>0.866</u>	<u>30.6</u>	<b>20.73</b>	<u>1.095</u>

表 4.3 には、各手法について、以下をまとめている.

- 平均ウェイト
- $P(\max_i w_i \geq 0.95)$  (極端集中の発生確率)
- 週次リターン最大資産の捕捉率
- 平均ターンオーバーおよびスイッチ頻度

この結果から、PFL 系手法では、特定の資産への極端な集中や高頻度なポジション切替が生じやすいことが確認される。これは、意思決定問題の解が、異なるアクティブ集合に対応するレジーム間を頻繁に行き来している可能性を示唆する。これに対し、提案手法 DFL-OPT-K は、極端な集中の発生確率を低く抑えつつ、必要な局面では資産配分を調整するという、より滑らかなポートフォリオ更新を行っている。

このような構造的特徴は、前節で確認した下方リスクの抑制や、安定した Sharpe 比の達成と整合的である。

### 危機局面における挙動

最後に、市場の急変動が生じた危機局面における挙動を検証する。本研究では、リーマンショック期、COVID-19 初期局面、およびインフレ局面を代表的な危機局面として取り上げる。

表 4.4: 危機局面における性能指標 (太字:1 位, 下線:2 位. 提案手法は網掛け.)

Model	リーマン危機		コロナショック		インフレ局面	
	Sharpe	CVaR <sub>95</sub>	Sharpe	CVaR <sub>95</sub>	Sharpe	CVaR <sub>95</sub>
DFL-OPT-K	0.238	<b>6.87</b>	<b>1.047</b>	<b>8.13</b>	<b>0.615</b>	<b>3.89</b>
DFL-CF	<b>0.493</b>	<u>7.42</u>	<u>0.996</u>	<u>9.42</u>	-0.200	<u>4.51</u>
IPO-GRAD	-0.168	9.76	-0.210	12.11	0.021	4.76
SPO+	<u>0.249</u>	7.77	0.010	11.32	<u>0.123</u>	4.85
PFL	-0.385	9.88	-0.291	12.06	-0.402	4.91

ここには、各局面における Sharpe 比、下方リスク指標 (CVaR または MaxDD)、およびターンオーバーをまとめている。

危機局面において、提案手法は相対的に下方リスクを抑制しつつ、過度な取引を伴わない安定した挙動を示している。特に、急激な市場下落局面においても、ポートフォリオが極端な集中状態に陥ることを回避している点が特徴的である。

## 第5章 結論

本章では、本研究で得られた知見を総括する。方法論的には、制約付き平均-分散ポートフォリオ最適化を下位問題として含む DFL を悲観的二段階最適化として定式化し、下位問題の最適性条件に基づく 2 つの単一レベル再定式化 (DFL-OPT-D, DFL-OPT-K) を導出した。また、理論的同値性と数値計算上の挙動が必ずしも一致しない点を、実データ実験で検証可能な形で整理した。実証的には、週次 TAA の実データ実験において、提案手法 (DFL-OPT-K) が  $R^2$  の向上に依らずに、Sharpe 比の改善や CVaR<sub>95</sub> の低下を通じて意思決定品質を向上させ得ることを示した。改善は平均だけでなく分布の裾 (p90/p99) の抑制としても現れ、条件数が高い局面で相対的に下方リスクを抑える傾向が確認された。また、この改善は売買量や切替頻度の増加だけでは説明されにくく、COVID-19 局面では安全資産 (TLT)への動的シフトが観察された。今後は、非凸性に伴う局所解・初期化依存の低減、多資産化と現実的制約の導入、および感度分析や解法安定化を通じた実務適用可能性の検証を進める。

## 謝辞

本研究をご指導くださいました高野祐一准教授をはじめ、議論に協力してくださいました研究室の皆様に深く感謝いたします。

## 関連図書

- [1] V. Bucarey, S. Calderón, G. Muñoz, and F. Semet. Decision-focused predictions via pessimistic bilevel optimization. In *Proceedings of CPAIOR 2024*, volume 14742 of *LNCS*, pages 127–135, 2024.
- [2] Adam Butler and Roy H. Kwon. Integrating prediction in mean–variance portfolio optimization. *Quantitative Finance*, 23(3):429–452, 2023.
- [3] Y. Chen, A. Wiesel, and Alfred O. Hero. Shrinkage estimation of high-dimensional covariance matrices. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 58(10):5016–5029, 2010.
- [4] Vijay K. Chopra and William T. Ziemba. The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice. *The Journal of Portfolio Management*, 19(2):6–11, 1993.
- [5] Adam N. Elmachtoub and Paul Grigas. Smart predict, then optimize. *Management Science*, 68(1):9–26, 2022.
- [6] J. P. Morgan. *RiskMetrics Technical Document*. 4 edition, 2006.
- [7] Ali A. Lahoud, Asif S. Khan, Erik Schaffernicht, Marco Trincavelli, and J. A. Stork. Predict-and-optimize techniques for data-driven optimization problems: A review. *Neural Processing Letters*, 57:40, 2025.
- [8] J. Lee, H. Jeon, H. Bae, and Y. Lee. Return prediction for mean-variance portfolio selection: How decision-focused learning shapes forecasting models. In *Proceedings of ICAIF 2025*, pages 114–122, 2025.
- [9] J. Mandi, J. Kotary, S. Berden, M. Mulamba, V. Bucarey, and F. Fioretto. Decision-focused learning: Foundations, state of the art, benchmark and future opportunities. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 81:1623–1701, 2024.
- [10] Harry Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1):77–91, 1952.
- [11] S. Shah, K. Wang, H. Chen, A. Perrault, F. Doshi-Velez, and M. Tambe. Decision-focused learning without decision-oracles: Learning locally optimized decision losses. In *Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS 2022)*, 2022.

# Appendix

## A. 命題 3.1 の証明

本章では, DFL-OPT-D と DFL-OPT-K が理論的に同値であることを示す.

証明. 各  $i = 1, \dots, T$  に対して, 下位のポートフォリオ最適化問題 (3.8) は目的関数が強凸な二次関数であり, 等式制約および非負制約からなる凸制約集合を持つ凸二次計画問題である. また,  $\mathbf{w}_i > \mathbf{0}$ かつ  $\mathbf{1}^\top \mathbf{w}_i = 1$  を満たす内点が存在するため, Slater 条件が成り立つ. したがって, 強双対性が成立する.

強双対性の成立より, 下位問題の最適解は KKT 条件を満たす点と必要十分に一致する. すなわち, ある双対変数  $(\mu_i, \boldsymbol{\lambda}_i)$  が存在して, 停留条件

$$\delta \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i - (1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i - \mu_i \mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda}_i = \mathbf{0},$$

主問題の可行性

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{w}_i = 1, \quad \mathbf{w}_i \geq \mathbf{0},$$

双対可行性

$$\boldsymbol{\lambda}_i \geq \mathbf{0},$$

および相補性条件

$$\boldsymbol{\lambda}_i \odot \mathbf{w}_i = \mathbf{0}$$

が同時に成り立つとき,  $\mathbf{w}_i$  は下位問題の最適解である.

DFL-OPT-K は, 上記の KKT 条件を制約として直接組み込んだ定式化である. 一方, DFL-OPT-D は, 主問題の可行性と双対可行性に加え, 停留条件 (3.20) と最適値一致条件 (3.19) を課すことで下位問題の最適性を表現している. 強双対性が成立する凸最適化問題においては, これらの条件は KKT 条件と同値であるため, DFL-OPT-D により許容される  $(\mathbf{w}_i, \mu_i, \boldsymbol{\lambda}_i)$  の集合は, DFL-OPT-K により許容される集合と一致する.

以上より, DFL-OPT-D ((3.15)–(3.20)) と DFL-OPT-K ((3.26)–(3.31)) は同一の解集合を持ち, 理論的に等価であることが示された.  $\square$

## B. DFL-OPT-D における強双対性制約の導出

ここでは, 本文 (3.12) および (3.14) (したがって (3.19)) の導出を, 双対関数  $g_i$  の導出を含めて示す.

まず, ラグランジュ関数 (3.11) に基づき, 双対関数を

$$g_i(\mu_i, \boldsymbol{\lambda}_i) := \inf_{\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^d} \mathcal{L}_i(\mathbf{w}_i, \mu_i, \boldsymbol{\lambda}_i)$$

と定義する. ここで  $\mathcal{L}_i$  を  $\mathbf{w}_i$  で最小化する停留条件は本文 (3.13) であり, これより

$$\tilde{\mathbf{w}}_i(\mu_i, \boldsymbol{\lambda}_i) = \frac{1}{\delta} \mathbf{V}_i^{-1} ((1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i + \mu_i \mathbf{1} + \boldsymbol{\lambda}_i)$$

を得る. これを代入すると, 双対関数は

$$g_i(\mu_i, \boldsymbol{\lambda}_i) = \mu_i - \frac{1}{2\delta} ((1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i + \mu_i \mathbf{1} + \boldsymbol{\lambda}_i)^\top \mathbf{V}_i^{-1} ((1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i + \mu_i \mathbf{1} + \boldsymbol{\lambda}_i)$$

と表される.

次に, 停留条件 (3.13) を

$$\delta \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i = (1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i + \mu_i \mathbf{1} + \boldsymbol{\lambda}_i$$

と書き直し, 右辺を  $z_i$  とおくと  $z_i = \delta \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i$  である. これを上式に代入すると

$$g_i(\mu_i, \boldsymbol{\lambda}_i) = \mu_i - \frac{1}{2\delta} (\delta \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i)^\top \mathbf{V}_i^{-1} (\delta \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i) = \mu_i - \frac{\delta}{2} \mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i$$

となり, 双対目的値は停留条件を介して  $\mathbf{V}_i^{-1}$  を含まない形に簡約できる.

弱双対性より, 任意の主問題の実行可能解  $\mathbf{w}_i$  と双対変数  $(\mu_i, \boldsymbol{\lambda}_i)$  ( $\boldsymbol{\lambda}_i \geq \mathbf{0}$ ) に対して, 主問題目的値は双対目的値の上界である. したがって,

$$-(1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i^\top \mathbf{w}_i + \frac{\delta}{2} \mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i \geq \mu_i - \frac{\delta}{2} \mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i$$

が成り立つ. これが本文 (3.12) である. 両辺に  $\frac{\delta}{2} \mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i$  を加えると

$$\delta \mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i - (1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i^\top \mathbf{w}_i \geq \mu_i$$

を得る.

最後に, 強双対性より最適解においては弱双対性の不等式が等号で成立する. このとき KKT 条件の相補性  $\boldsymbol{\lambda}_i \odot \mathbf{w}_i = \mathbf{0}$  が成り立ち, 導出中に現れる  $\boldsymbol{\lambda}_i^\top \mathbf{w}_i$  が消えるため, 最適値一致条件は

$$\delta \mathbf{w}_i^\top \mathbf{V}_i \mathbf{w}_i - (1 - \delta) \hat{\mathbf{r}}_i^\top \mathbf{w}_i = \mu_i$$

と表される. これが本文 (3.14) の等式であり, DFL-OPT-D では各  $i$  についてこの関係を制約 (3.19) として課している.

## C. OAS 縮小係数と実効サンプルサイズ

ここでは, 第 4 章で用いた OAS の縮小係数  $\phi_t$  と, EWMA の重みに対応する実効サンプルサイズ  $n_{\text{eff}}$  の具体式を示す.

まず,  $d$  次元の共分散推定に用いるサンプルサイズを  $n_{\text{eff}}$  とすると, OAS による縮小係数は

$$\phi_t = \min \left\{ 1, \frac{\left(1 - \frac{2}{d}\right) \text{tr}(\mathbf{S}_t^2) + \text{tr}(\mathbf{S}_t)^2}{\left(n_{\text{eff}} + 1 - \frac{2}{d}\right) \left(\text{tr}(\mathbf{S}_t^2) - \frac{\text{tr}(\mathbf{S}_t)^2}{d}\right)} \right\} \quad (\text{A.1})$$

で与えられる.

次に, EWMA における減衰率  $\alpha$  は, 重み付き標本に基づく共分散推定の「記憶長」を制御するパラメータとして解釈できる [6]. 特に, 重み  $w_k = (1 - \alpha)\alpha^k$  に対して定義される実効サンプルサイズ

$$\text{ESS} := \frac{1}{\sum_k w_k^2}$$

を用いると, EWMA はおよそ  $\text{ESS} \approx \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$  個の独立標本に相当する情報量を持つと解釈できる [6]. 本研究ではこの対応関係に基づき, 短期ローリング設定における数値的安定性と反応性のバランスを考慮して  $\alpha$  を設定する.

本研究のように有限窓  $L$  を用いるとき, 重みを正規化した  $\tilde{w}_k := \frac{(1-\alpha)\alpha^k}{1-\alpha^L}$  ( $k = 0, \dots, L-1$ ) に対して

$$n_{\text{eff}} := \frac{1}{\sum_{k=0}^{L-1} \tilde{w}_k^2} = \frac{(1 - \alpha^L)^2}{(1 - \alpha)^2} \cdot \frac{1 - \alpha^2}{1 - \alpha^{2L}} = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \cdot \frac{(1 - \alpha^L)^2}{1 - \alpha^{2L}} \quad (\text{A.2})$$

となる. 特に  $L$  が十分大きい場合には  $n_{\text{eff}} \approx \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$  となり, 上の ESS の近似と整合する.

## D. 初期解+罰則項あり（全期間）の参考結果

本付録では、初期解+罰則項を導入した場合について、取引コストを控除した実行ベースの損益系列に基づく全期間（2006–2025）の累積資産推移を参考として示す。なお、本結果は提案手法の主張を補強するものではなく、探索経路制御が実務的なコストを考慮しても致命的な性能劣化を招かないことを確認する目的で提示する。

本実験では、ティッカー別の取引コスト（bps）を“SPY:5, GLD:10, EEM:10, TLT:5”として設定した（デフォルト設定）。



図 1: 全期間（2006–2025）における累積資産推移（初期解+罰則項、取引コスト控除後）

表 1: 全期間（2006–2025）における性能指標（初期解+罰則項、取引コスト控除後；参考、太字:1位、下線:2位。提案手法は網掛け。）

Model	年率リターン (%)	最終資産	Sharpe 比	年率ボラ (%)	CVaR <sub>95</sub> (%)
DFL-OPT-K	<b>13.95</b>	<b>12.15</b>	<b>0.83</b>	<u>16.76</u>	<u>-5.21</u>
DFL-CF	9.66	5.07	0.56	17.36	-5.65
IPO-GRAD	9.85	5.25	0.57	17.39	-5.63
SPO+	9.50	4.90	0.55	17.38	-5.67
PFL	5.61	2.11	0.29	19.04	-6.68
Buy&Hold(SPY)	<u>10.35</u>	<u>5.64</u>	0.57	18.14	-6.19
1/N	7.13	3.64	<u>0.62</u>	<b>11.42</b>	<b>-3.65</b>

## E. 命題 3.2 の導出（アクティブ集合固定下）

本節では、命題 3.2 の導出を示す。以下では簡単のため時点添字を省略し、(3.32) の下位問題

$$\min_{\mathbf{w}} f(\mathbf{w}; \hat{\mathbf{r}}, \mathbf{V}) := -(1 - \delta)\hat{\mathbf{r}}^\top \mathbf{w} + \frac{\delta}{2}\mathbf{w}^\top \mathbf{V}\mathbf{w} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{1}^\top \mathbf{w} = 1, \quad \mathbf{w} \geq \mathbf{0}$$

を考える。ここで  $\delta > 0$ ,  $\mathbf{V} \succ \mathbf{0}$  とする。

### E.1 アクティブ集合固定による縮約

最適解を  $\mathbf{w}^*(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{V})$  とし、正の成分集合（アクティブ集合）を

$$A := \{j \in \{1, \dots, d\} \mid w_j^* > 0\}, \quad N := A^c$$

とおく。アクティブ集合が近傍で不变（すなわち  $w_A^* > 0$  かつ  $w_N^* = 0$  が近傍で維持される）と仮定する。このとき、制約  $w \geq 0$  は局所的に

$$\mathbf{w}_{N \setminus A} = \mathbf{0}$$

という等式制約に置き換えられる。したがって、局所的には次の縮約問題と同値になる：

$$\min_{\mathbf{w}_A \in \mathbb{R}^{|A|}} -(1-\delta)\hat{\mathbf{r}}_A^\top \mathbf{w}_A + \frac{\delta}{2}\mathbf{w}_A^\top \mathbf{V}_{AA}\mathbf{w}_A \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{1}_A^\top \mathbf{w}_A = 1. \quad (1)$$

ここで  $\mathbf{1}_A$  は  $|A|$  次元の全成分 1 ベクトルである。 $\mathbf{V} \succ 0$  より主小行列  $\mathbf{V}_{AA} \succ 0$  であり、(1) は強凸な等式制約付き QP である。

## E.2 縮約問題の KKT 条件

(1) のラグランジュ関数を

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}_A, \mu) = -(1-\delta)\hat{\mathbf{r}}_A^\top \mathbf{w}_A + \frac{\delta}{2}\mathbf{w}_A^\top \mathbf{V}_{AA}\mathbf{w}_A + \mu(1 - \mathbf{1}_A^\top \mathbf{w}_A)$$

とする。KKT 条件は

$$\delta \mathbf{V}_{AA}\mathbf{w}_A - (1-\delta)\hat{\mathbf{r}}_A - \mu \mathbf{1}_A = \mathbf{0}, \quad (2)$$

$$\mathbf{1}_A^\top \mathbf{w}_A = 1 \quad (3)$$

である。(2) より

$$\mathbf{w}_A = \frac{1}{\delta} \mathbf{V}_{AA}^{-1} ((1-\delta)\hat{\mathbf{r}}_A + \mu \mathbf{1}_A). \quad (4)$$

これを (3) に代入すると

$$\mathbf{1}_A^\top \mathbf{w}_A = \frac{1}{\delta} \mathbf{1}_A^\top \mathbf{V}_{AA}^{-1} ((1-\delta)\hat{\mathbf{r}}_A + \mu \mathbf{1}_A) = 1,$$

すなわち

$$\mu = \frac{\delta - (1-\delta)\mathbf{1}_A^\top \mathbf{V}_{AA}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_A}{\mathbf{1}_A^\top \mathbf{V}_{AA}^{-1} \mathbf{1}_A}. \quad (5)$$

(5) を (4) に代入すると

$$\mathbf{w}_A^*(\hat{\mathbf{r}}_A, \mathbf{V}_{AA}) = \underbrace{\frac{1-\delta}{\delta} \mathbf{V}_{AA}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_A}_{\text{線形項}} + \underbrace{\frac{1}{\delta} \mathbf{V}_{AA}^{-1} \mathbf{1}_A \frac{\delta - (1-\delta)\mathbf{1}_A^\top \mathbf{V}_{AA}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_A}{\mathbf{1}_A^\top \mathbf{V}_{AA}^{-1} \mathbf{1}_A}}_{\text{アフィン補正}}$$

を得る。よって  $\mathbf{w}_A^*$  は  $\hat{\mathbf{r}}_A$  に関して affine である。

## E.3 ヤコビアンの導出 (式 (3.33))

(4) を  $\hat{\mathbf{r}}_A$  で微分すると

$$\frac{\partial \mathbf{w}_A^*}{\partial \hat{\mathbf{r}}_A} = \frac{1-\delta}{\delta} \mathbf{V}_{AA}^{-1} + \frac{1}{\delta} \mathbf{V}_{AA}^{-1} \mathbf{1}_A \frac{\partial \mu}{\partial \hat{\mathbf{r}}_A}.$$

一方、(5) より

$$\mu = \frac{\delta}{\mathbf{1}_A^\top \mathbf{V}_{AA}^{-1} \mathbf{1}_A} - \frac{1-\delta}{\mathbf{1}_A^\top \mathbf{V}_{AA}^{-1} \mathbf{1}_A} \mathbf{1}_A^\top \mathbf{V}_{AA}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_A$$

なので

$$\frac{\partial \mu}{\partial \hat{\mathbf{r}}_A} = -\frac{1-\delta}{\mathbf{1}_A^\top \mathbf{V}_{AA}^{-1} \mathbf{1}_A} \mathbf{1}_A^\top \mathbf{V}_{AA}^{-1}.$$

したがって

$$\frac{\partial \mathbf{w}_A^*}{\partial \hat{\mathbf{r}}_A} = \frac{1-\delta}{\delta} \mathbf{V}_{AA}^{-1} - \frac{1-\delta}{\delta} \mathbf{V}_{AA}^{-1} \mathbf{1}_A (\mathbf{1}_A^\top \mathbf{V}_{AA}^{-1} \mathbf{1}_A)^{-1} \mathbf{1}_A^\top \mathbf{V}_{AA}^{-1}, \quad (6)$$

すなわち本文 (3.33) を得る。

#### E.4 局所 Lipschitz 上界 (式 (3.34))

同一アクティブ集合  $A$  が維持される局所では

$$\Delta \mathbf{w}_A^* = \left( \frac{\partial \mathbf{w}_A^*}{\partial \hat{\mathbf{r}}_A} \right) \Delta \hat{\mathbf{r}}_A$$

が成り立つため,

$$\|\Delta \mathbf{w}_A^*\|_2 \leq \left\| \frac{\partial \mathbf{w}_A^*}{\partial \hat{\mathbf{r}}_A} \right\|_2 \|\Delta \hat{\mathbf{r}}_A\|_2$$

である. ここで

$$\mathbf{P}_A := \mathbf{I} - \mathbf{V}_{AA}^{-1} \mathbf{1}_A (\mathbf{1}_A^\top \mathbf{V}_{AA}^{-1} \mathbf{1}_A)^{-1} \mathbf{1}_A^\top$$

とおくと,

$$\frac{\partial \mathbf{w}_A^*}{\partial \hat{\mathbf{r}}_A} = \frac{1-\delta}{\delta} \mathbf{P}_A \mathbf{V}_{AA}^{-1}.$$

よって

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{w}_A^*}{\partial \hat{\mathbf{r}}_A} \right\|_2 \leq \frac{1-\delta}{\delta} \|\mathbf{P}_A\|_2 \|\mathbf{V}_{AA}^{-1}\|_2 = \frac{1-\delta}{\delta} \|\mathbf{P}_A\|_2 \frac{1}{\lambda_{\min}(\mathbf{V}_{AA})}.$$

これより

$$\|\Delta \mathbf{w}_A^*\|_2 \leq C_A \frac{1-\delta}{\delta} \frac{1}{\lambda_{\min}(\mathbf{V}_{AA})} \|\Delta \hat{\mathbf{r}}_A\|_2$$

が得られる. ただし  $C_A := \|\mathbf{P}_A\|_2 < \infty$  とおいた. 最後に  $\Delta \mathbf{w}^*$  は  $N$  成分がゼロのままなので,  $\|\Delta \mathbf{w}^*\|_2 = \|\Delta \mathbf{w}_A^*\|_2$  が成り立ち, 本文の (3.34) が従う.

以上で命題 3.2 の導出を完了する.

**注記（局所性）**：本節の導出は, ある最適解近傍でアクティブ集合  $A$  が不变である局所に限定している. 境界 ( $w_j^* = 0$  に接する点) では集合が切り替わり得るため, 写像は一般に大域的には滑らかでない.