கணிதம்

தரம் 11

பகுதி I

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்

முதலாம் பதிப்பு	-	2015
இரண்டாம் பதிப்பு	-	2016
மூன்றாம் பதிப்பு	-	2017
நான்காம் பதிப்பு	-	2018
ஐந்தாம் பதிப்பு	-	2019
ஆறாம் பதிப்பு	-	2020

ISBN 978-955-25-0306-1

இந்நூல் கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களத்தினால்
அரசாங்க அச்சகக் கூட்டுத்தாபனத்தில்
அச்சிடப்பட்டு, வெளியிடப்பட்டது.

Published by: Educational Publications Department
Printed by: State Printing Corporation

தேசிய கீதம்

சிறீ லங்கா தாயே - நம் சிறீ லங்கா
நமோ நமோ நமோ நமோ தாயே

நல்லெழில் பொலி சீரணி
நலங்கள் யாவும் நிறை வான்மணி லங்கா
ஞாலம் புகழ் வள வயல் நதி மலை மலர்
நறுஞ்சோலை கொள் லங்கா
நமதுறு புகலிடம் என ஒளிர்வாய்
நமதுதி ஏல் தாயே
நம தலை நினதடி மேல் வைத்தோமே
நமதுயிரே தாயே - நம் சிறீ லங்கா
நமோ நமோ நமோ நமோ தாயே

நமதாரருள் ஆனாய்
நவை தவிர் உணர்வானாய்
நமதேர் வலியானாய்
நவில் சுதந்திரம் ஆனாய்
நமதிளமையை நாட்டே
நகு மடி தனையோட்டே
அமைவுறும் அறிவுடனே
அடல் செறி துணிவருளே - நம் சிறீ லங்கா
நமோ நமோ நமோ நமோ தாயே

நமதார் ஒளி வளமே
நறிய மலர் என நிலவும் தாயே
யாமெலாம் ஒரு கருணை அனைபயந்த
எழில்கொள் சேய்கள் எனவே
இயலுறு பிளவுகள் தமை அறவே
இழிவென நீக்கிடுவோம்
ஈழ சிரோமணி வாழ்வுறு பூமணி
நமோ நமோ தாயே - நம் சிறீ லங்கா
நமோ நமோ நமோ நமோ தாயே

ஒரு தாய் மக்கள் நாமாவோம்
ஒன்றே நாம் வாழுமில்லம்
நன்றே உடலில் ஓடும்
ஒன்றே நம் குருதி நிறம்

அதனால் சகோதரர் நாமாவோம்
ஒன்றாய் வாழும் வளரும் நாம்
நன்றாய் இவ் இல்லினிலே
நலமே வாழ்தல் வேண்டுமன்றோ

யாவரும் அன்பு கருணையுடன்
ஒற்றுமை சிறக்க வாழ்ந்திடுதல்
பொன்னும் மணியும் முத்துமல்ல - அதுவே
யான்று மழியாச் செல்வமன்றோ

ஆனந்த சமரக்கோன்
கவிதையின் பெயர்ப்பு

முன்னுரை

உலகம் நாளுக்கு நாள் விருத்தி அடைந்து செல்கின்றது. அதற்கேற்பக் கல்வித் துறையும் எப்போதும் புதுப்பொழிவு பெறுகின்றது. அதனால், எதிர்காலச் சவால்களுக்குச் சிறப்பாக முகங்கொடுக்க முடியுமான மாணவர் சமுதாயமொன்றை உருவாக்க வேண்டுமாயின், எமது கற்றல் கற்பித்தல் செயற்பாடுகளும் வினைத்திறன் மிக்கதாக அமைய வேண்டும். அதற்கு வலுவூட்டி நவீன உலக அறிவை வழங்கும் அதேவேளை உலகிற்கு நற்பண்புகள் நிறைந்த பிரசைகளை உருவாக்குவதற்கு உதவுவதும் எமது பொறுப்பாகும். தேசத்தின் பிள்ளைகளின் அறிவுத் தீபத்தை ஏற்றும் உன்னத நோக்கத்துடன் எமது திணைக்களம் கற்றல் சாதனங்களை உருவாக்கும் செயற்பாட்டில் செயலூக்கத்துடன் ஈடுபட்டு அதற்குப் பங்களிப்பு வழங்குகின்றது.

பாடநூல்கள் அறிவு நிறைந்த களஞ்சியங்களாகும். அவை சில வேளைகளில் எங்களை இரசனை உலகிற்கு அழைத்து செல்வதுடன் தர்க்கரீதியாகச் சிந்திக்கும் ஆற்றலையும் வளர்க்கின்றது. மறைந்துள்ள ஆற்றல்களை வெளிக்கொணர்கின்றது. எதிர்காலத்தில் எப்போதாவது, இந்தப் பாடநூல்கள் தொடர்பான சில ஞாபகங்களை மீட்கும்போது அவை உங்கள் மனதுக்கு இதமானதாக அமையும். இந்தப் பெறுமதி வாய்ந்த கற்றல் சாதனத்தின் மூலம் சிறந்த பயன்பெறும் அதேவேளை மேன்மேலும் சிறந்த அறிவு மூலங்களை நெருங்குவதும் உங்களுக்குப் பயனுள்ளதாக அமையும். இலவசக் கல்வியின் பெறுமதிமிக்க ஒரு பரிசாக இப்பாடநூல் உங்களுக்கு இலவசமாக வழங்கப்படுகின்றது. பாடநூல்களுக்காக அரசாங்கம் செலவிட்டுள்ள பெருந் தொகைப் பணத்திற்கு, உங்களால் மாத்திரமே பெறுமதி சேர்க்க முடியும். இப்பாடநூலை சிறப்பாகப் பயன்படுத்தி சிறந்த அறிவும் பண்பாடும் கொண்ட பிரசைகளாகி நாளைய உலகிற்கு ஒளியூட்டுவதற்கு உங்கள் அனைவருக்கும் ஆற்றலும் தைரியமும் கிடைக்க வேண்டுமென்று வாழ்த்துகின்றேன்.

இப்பாடநூலை உருவாக்குவதில் அளப்பரிய பங்களிப்பு வழங்கிய எழுத்தாளர் மற்றும் பதிப்பாசிரியர் குழுக்களின் அங்கத்தவர்களுக்கும் கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களத்தின் உத்தியோகத்தர்கள் அனைவருக்கும் எனது மனமார்ந்த நன்றிகளைத் தெரிவித்துக் கொள்கிறேன்.

பீ. என். அயிலப்பெரும
கல்வி வெளியீட்டு ஆணையாளர் நாயகம்
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்
இசுருபாய
பத்தரமுல்ல
2020. 06. 26

கண்காணிப்பும் மேற்பார்வையும்

பீ. என். அயிலப்பெரும - கல்வி வெளியீட்டு ஆணையாளர் நாயகம்
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

வழிகாட்டல்

டபிள்யூ. ஏ. நிர்மலா பியசீலி - ஆணையாளர் (அபிவிருத்தி)
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

இணைப்பாக்கம்

அ. குலரத்தினம் - பிரதி ஆணையாளர்
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

எழுத்தாளர் குழு

கலாநிதி ரோசன மீகஸ்டும்புர - சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர்
பேராதெனியப் பல்கலைக்கழகம்.

கலாநிதி ஜே. கே. ரத்னாயக்கா - சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர்
இலங்கை தொடர்பாடல் தொழினுட்ப நிறுவகம்.

என். வாகீசமூர்த்தி - பணிப்பாளர் (ஓய்வு நிலை)

ஆர். எஸ். ஈ. புஸ்பராஜன் - உதவிப் பணிப்பாளர் (ஓய்வு நிலை)
வலயக் கல்விப் பணிமனை, புத்தளம்.

வி. முரளி - விரிவுரையாளர்
ஆசிரியர் மத்திய நிலையம், வவுனியா வடக்கு.

எச். எம். ஜயசேன - ஆசிரிய ஆலோசகர் வலயக் கல்விப் பணிமனை, அம்பலாங்கொட

வி. வி. ஆர். விதாரம - ஆசிரிய ஆலோசகர்
வலயக் கல்விப் பணிமனை, தெகியோவிட்ட.

டபிள்யூ. எம். டபிள்யூ. சீ. வலிசிங்க - உதவிப் பணிப்பாளர்
வலயக் கல்விப் பணிமனை, புத்தளம்.

அஜித் ரணசிங்க - ஆசிரிய ஆலோசகர்
வலயக் கல்விப் பணிமனை, கேகாலை

வீ. எம். பி. லால் விஜயகாந்த - ஆசிரிய ஆலோசகர்
சாந்த தோமஸ் கல்லூரி கல்கிஸ்சை.

அனுர வீரசிங்க - ஆசிரிய ஆலோசகர் (பிரிவேனா)

எச். ஏ. பீ. தர்மரத்ன - ஆசிரிய சேவை
ஸ்ரீமாவோ பண்டாரனாயக்க வித்தியாலயம், கொழும்பு.

பதிப்பாசிரியர் குழு

கலாநிதி ரோமைன் ஜயவர்த்தன	-	சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர் கணிதத்துறை, கொழும்புப் பல்கலைக்கழகம்.
கலாநிதி பீ. கே. மல்லவ ஆராச்சி	-	சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர் கணிதத்துறை, களனிப் பல்கலைக்கழகம்.
கலாநிதி த.ஸ்ரீதரன்	-	சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர் கொழும்புப் பல்கலைக்கழகம்.
திரு சித்தானந்த வியாங்வெல	-	பணிப்பாளர் கணிதக் கிளை, கல்வி அமைச்சு.
பீ. ஜெகத்குமார	-	சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர் கணிதத்துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.
அ. குலரத்தினம்	-	பிரதி ஆணையாளர். கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.
தனுஜா மைத்திரி விதாரண	-	உதவி ஆணையாளர். கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

மொழிப் பதிப்பாசிரியர்

பீ. ராஜசேகரன்	-	ஆசிரிய ஆலோசகர் (ஓய்வு நிலை)

சரவை பார்ப்பு

கே. கருணேஸ்வரன்	-	ஆசிரிய ஆலோசகர் வலயக் கல்விப் பணிமனை, கொழும்பு.

கணினி வடிவமைப்பு

முத்தையா காந்தரூபன்	-	கணினி வடிவமைப்பாளர் கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

உள்ளடக்கம்

பக்கம்

எழுத்தாளர், பதிப்பாசிரியர் குழுக்களின் அறிவுறுத்தல்

2015 ஆண்டிலிருந்து நடைமுறைக்கு வரும் புதிய பாடத்திட்டத்திற்கேற்ப இப்பாடநூல் எழுதப்பட்டுள்ளது. பாடநூல் மாணவர்களுக்காகவே தயாரிக்கப்படுகின்றது. எனவே நீங்கள் தனித்து வாசித்தேனும் விளங்கிக்கொள்ளத்தக்க வகையில் எளிமையாகவும் விபரமாகவும் அதனைத் தயாரிக்க முயற்சித்தோம்.

பாட எண்ணக்கருக்களைக் கவர்ச்சியான வகையில் முன்வைப்பதற்காகவும் உறுதிபடுத்துவதற்காகவும் விபரித்தல், செயற்பாடு மற்றும் உதாரணங்கள் போன்று வெவ்வேறு முறைகளைப் பின்பற்றினோம். பயிற்சிகளைச் செய்வதன் விருப்பு விருத்தியடையும் வகையில் எளிமையிலிருந்து கடினம் வரை முறையாக ஒழுங்குபடுத்தப்பட்டுள்ளன.

கணிதப் பாடத்துக்குரிய எண்ணக்கருக்களைக் குறிக்கும் சொற்களை அரச கரும மொழித் திணைக்களம் தயாரித்துள்ள கணிதப் பாடக் கலைச் சொல் அகராதிக்கேற்பப் பயன்படுத்தினோம்.

பாடத்திட்டத்தில் தரம் 11 இற்குரிய பாடப்பகுதிகளைக் கற்பதற்கு, முன்னைய தரங்களில் நீங்கள் கற்ற சிற்சில விடயங்கள் தேவைப்படும். எனவே அம்முன்னறிவை ஞாபகப்படுத்துவதற்காக மீட்டற் பயிற்சிகள் தேவையான அத்தியாயத்தின் தொடக்கத்திலும் தரப்பட்டுள்ளன. அவற்றின்மூலம் தரம் 11 இற்குரிய பாடவிடயங்களுக்காக நீங்கள் தயார்படுத்தப்படுவீர்கள்.

வகுப்பில் ஆசிரியர் கற்பிப்பதற்கு முன்னர் நீங்கள் இவ்வத்தியாயங்களை வாசிப்பதன் மூலமும் ஒவ்வோர் அத்தியாயத்தில் வரும் மீட்டற் பயிற்சிகளை செய்வதன் மூலமும் இப்பாடநூலைப் பயன்படுத்தி உச்ச பயன்களைப் பெறலாம்.

கணிதக் கல்வியானது மகிழ்ச்சிகரமானதாகவும் பயனுடையதாகவும் அமைய நாங்கள் ஆசி கூறுகின்றோம்.

நூலாக்கக் குழுவினர்.

1 மெய்யெண்கள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- எண் தொடைகளை அறிந்து கொள்வதற்கும்
- சேடுகளைப் பயன்படுத்திக் கோவைகளைச் சுருக்குவதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

1.1 எண்களை வகைப்படுத்தல்

இற்றைக்கு 30 000 ஆண்டுகளுக்கு முன்னர் மனித இனத்தில் எண்கள் பற்றிய எண்ணக் கரு உருவாகியதாக நம்பப்படுகின்றது. பல்வேறு நாகரிகங்களில் சுயாதீனமாக உருவாகி வளர்ந்த இவ்வெண்ணக்கரு முழு உலகிலும் விருத்தியடைந்து இன்று கணிதம் என்னும் உலகளாவிய பாடத்துறையாக மாறியுள்ளது.

தொடக்கத்தில் நாகரிகத்தில் எண்களை எண்ணுதல், கணக்கு வைத்தல் போன்ற எளிய பணிகளுக்கு எண்கள் பயன்படுத்தப்பட்டனவென நாம் கருதலாம். தொடக்கத்தில் உருவாகிய ''ஒன்று'' என்னும் எண்ரீதியான எண்ணக்கரு தொடர்ச்சியாக ''இரண்டு'' ஆக மாறிப் பின்னர் ''மூன்று'', ''நான்கு'' என வளர்ந்தது. இவ்வாறு மக்கள் தங்களுக்கு விருப்பமான அளவைப் பெயரிட முடிந்ததெனப் பிற்காலத்தில் விளங்கிக் கொள்ளப்பட்டது. இவ்வாறு பெயரிடுவதற்குப் பல்வேறு நாகரிகங்களில் பல்வேறு குறியீடுகள் பயன்படுத்தப்பட்டன.

வரலாற்றுரீதியான சான்றுகளுக்கேற்ப இன்று நாம் பயன்படுத்தும் 1, 2, 3 போன்ற எண்கள் குறிக்கும் இலக்கங்கள் இந்தியாவில் பயன்படுத்த ஆரம்பிக்கப்பட்டனவென ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்டுள்ளது. அது மாத்திரமன்று பூச்சியம் என்னும் எண்ணக்கருவை ஓர் எண்ணாகப் பயன்படுத்திய பெருமையும் இடப் பெறுமானத்தை அடிப்படையாகக் கொண்ட ஓர் எண் முறைமையை உருவாக்கிய பெருமையும் இந்தியாவிற்கு உரியனவாகும். இந்த எண் முறைமை இந்து அராபிய எண் முறைமையாக அழைக்கப்பட்ட அதே வேளை அதன் பயன்பாடு வர்த்தக மார்க்கமாக மத்திய கிழக்கிற்கும் அங்கிருந்து ஐரோப்பாவிற்கும் பரவியதாக நம்பப்படுகின்றது. இன்று இந்த எண் முறைமை நியமப் பொது எண் முறைமை என முழு உலகினாலும் ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்டுள்ளது.

எண் பயன்பாடு தொடர்பாக மனிதப் பரிணாமத்தில் ஏற்பட்ட ஒரு பெரும் புரட்சியாக எண்களைப் பயன்படுத்தி அடிப்படைக் கணிதச் செய்கைகளை (கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல்) செய்தலைக் காட்டலாம். இன்றைய தொழினுட்ப உலகில் எண்களும் அவற்றின் மீது செய்யும் கணிதச் செய்கைகளும் இல்லாமல் மனித நிலைத்திருக்கை பற்றிச் சிந்தித்துப் பார்க்க முடியாது.

மனிதத் தேவைகளுக்காக முதலில் பயன்படுத்தப்பட்ட எண்களாக 1, 2, 3, ... ஆகிய வற்றைக் காட்டலாமெனினும் பிற்காலத்தில் பூச்சியம், பின்ன எண்கள், மறை எண்கள் ஆகியன அவற்றுடன் சேர்க்கப்பட்டன. கணிதம் ஒரு தனிப் பாடமாக மேம்பட்ட காலத்தில் வேறு பல்வகை எண்கள் பற்றிக் கணிதவியலாளர்களின் கவனம் சென்றது. இப்பாடத்தில் நாம் அத்தகைய பல்வேறு எண் தொடைகள் பற்றியும் அவற்றின் குறிப்பீட்டு முறைமைகளும் பண்புகளும் பற்றியும் கற்கவுள்ளோம்.

நிறைவெண் தொடை ($\mathbb{Z}$)

இயற்கையாக நாம் முதலில் 1, 2, 3, ... என இளம் பிராயத்தில் கற்ற எண்களை இனங்காண்கின்றோம். இவ்வெண்கள் **எண்ணும் எண்கள்** எனப்படும் அதே வேளை அவை எல்லாம் அடங்கும் தொடை, தொடைக் குறிப்பீட்டில் பின்வருமாறு எழுதப்படும்.

$$\{1, 2, 3, ...\}$$

எண்ணும் எண்கள் என்னும் பெயர் கிடைப்பதற்கான காரணம் மிகத் தெளிவாகும். எனினும் கணிதப் பிரயோகத்தில் இப்பெயர் அரிதாகவே பயன்படுத்தப்படுகின்றது. இத்தொடைக்குப் பெரும்பாலும் பயன்படுத்தப்படும் பெயர் நேர் நிறைவெண் தொடை என்பதாகும். அத்தொடை $\mathbb{Z}^+$ இனால் குறிப்பிடப்படும்.

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ...\}$$

இதற்கேற்ப 1, 2, 3, ... ஆகிய எண்கள் நேர் நிறைவெண்கள் எனப்படும்.

–1, –2, –3, ... ஆகிய எண்கள் மறை முழு எண்களாக வரையறுக்கப்படுகின்றன. இத்தொடையைக் குறிப்பிடுவதற்கு பொதுவாகப் பயன்படுத்தப்படும் ஒரு குறியீடு இல்லாவிட்டாலும் சில கணிதவியலாளர்கள் தமது பாடத்துறையின் தேவைகளுக்கேற்ப அதற்காக $\mathbb{Z}^-$ என்னும் குறியீட்டைப் பயன்படுத்துகின்றனர்.

நிறைவெண்களாக நேர் நிறைவெண்கள், பூச்சியம், மறை நிறைவெண்கள் ஆகிய எல்லா எண்களும் கருதப்படுகின்றன. அத்தொடை $\mathbb{Z}$ இன் மூலம் குறிப்பிடப்படுகின்றது. அதற்கேற்ப

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

என அல்லது

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$$

எனக் குறிப்பிடப்படும்.

இயற்கை எண் தொடை ($\mathbb{N}$)

அடுத்ததாக நாம் 1, 2, ... என்றவாறான எண் தொடையை இனங்காண்கின்றோம். அதாவது நேர் நிறைவெண் தொடையாகும். இந்த எண் தொடை இயற்கை எண் தொடை எனப்படும் அதே வேளை அது $\mathbb{N}$ இன் மூலம் குறிப்பிடப்படும். அதாவது

$$\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$$

குறிப்பு : எவ்வெண்கள் இயற்கை எண்களாகக் கருதப்படுகின்றன என்பது பற்றிக் கணிதவியலாளர்களிடையே பொது உடன்பாடு இல்லை. முற்காலத்தில் 1, 2, 3, ... ஆகிய நேர் நிறைவெண்களே இயற்கை எண்களாக அழைக்கப்படுகின்றன. அப்பெயர் பொருத்தமானதாகத் தெரிகின்றது. எனினும் அண்மைக் காலத்தில் (20 ஆம் நூற்றாண்டில்) வாழ்ந்த சில சிரேஸ்ட கணிதவியலாளர்கள் (விசேடமாக, தொடைக் கொள்கை பற்றிய நிபுணர்கள்) தமது நூல்களில் குறித்த சாதாரண காரணங்களுக்காக 0 ஐயும் ஓர் இயற்கை எண்ணாகக் கருதினர். பூச்சியமும் நேர் நிறைவெண்களும் இடம்பெறும் தொடையைக் குறிப்பதற்கு அப்போது ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்ட ஒரு பெயரும் குறிப்பீடும் இராமை அதற்குக் காரணமாக இருக்கலாம். இருப்பினும் எண் கொள்கை தொடர்பான பெரும்பாலான நூல்களில் இயற்கை எண்கள் கொண்ட தொடை $\{1, 2, 3, ...\}$ எனக் கருதப்படுகின்றது. இன்று எழுதப்படும் எல்லா நூல்களிலும் நூலாசிரியர்கள் தாம் கருதும் இயற்கை எண்கள் யாவையென முதலில் குறிப்பிடுகின்றனர்.

விகிதமுறும் எண் தொடை ($\mathbb{Q}$)

நிறைவெண்களைப் போன்று பின்னங்களையும் எண்களாகக் கருதலாம் எனவும் பின்னங்களுக்கும் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் ஆகிய கணிதச் செய்கைகளைச் செய்யலாம் எனவும் நாம் கண்டோம். ஒவ்வொரு நிறைவெண்ணையும் பின்ன எண்ணாக எழுதலாம் (ஓர் உதாரணமாக $2 = \frac{2}{1}$ என எழுதலாம்). அவ்வாறே ஒரே எண் பெறுமானத்தைக் கொண்ட ஒரு பின்னத்தை வேறு விதத்தில் எழுதலாம் (ஓர் உதாரணமாக $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$). மறைப் பின்னங்களையும் நாம் கண்டுள்ளோம் ($-\frac{2}{5}$, $\frac{-11}{3}$ ஆகியன). நாம் பொதுவாக ஒரு பின்ன எண்ணின் பகுதியிலும் தொகுதியிலும் நிறைவெண்கள் இருக்க வேண்டும் எனக் கருதியிருந்தாலும் அது அவ்வாறன்று. ஓர் உதாரணமாக $\frac{3}{\sqrt{2}}$ என்பதுவும் ஒரு பின்ன எண்ணாகும். ஆனால், பகுதியிலும் தொகுதியிலும் நிறைவெண்கள் உள்ள பின்னங்கள் (பகுதியில் 0 இல்லாதபோது) கணிதத்தில் விசேட முக்கியத்துவம் வாய்ந்தனவாக இருக்கும் அதே வேளை அவ்வெண்கள் **விகிதமுறும் எண்கள்** எனப்படும். அத்தொடைகள் $\mathbb{Q}$ வினால் குறிக்கப்படும். இதற்கேற்பப் பிறப்பிக்கும் தொடை முறையைப் பயன்படுத்தி விகிதமுறும் எண் தொடையைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

$$\mathbb{Q}=\left\{ \frac{a}{b} \ : a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}.$$

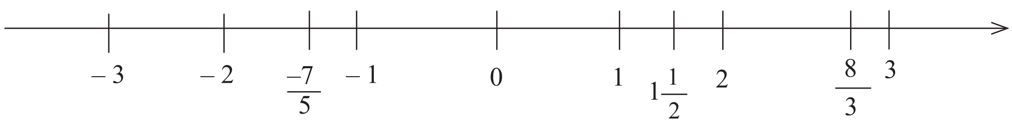
விகிதமுறும் எண் தொடையை வரையறுக்கத்தக்க வேறு விதங்களும் உள்ளன. அவற்றில் ஒரு விதம்

$$\mathbb{Q}=\left\{ \frac{a}{b} \ : a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^{+} \right\}.$$

இவ்விரு வரைவிலக்கணங்களும் ஒன்றுக்கொன்று சமவலுவானவை என்பதை நன்றாக அவதானிக்க (ஒரு விகிதமுறும் எண்ணின் பகுதியில் 0 இருக்க முடியாமையாலும் மறை விகிதமுறும் எண்கள் எல்லாம் தொகுதியின் மறை நிறைவெண்களிலிருந்து கிடைக்கின்றமையாலும் இரண்டாம் வரைவிலக்கணத்திலிருந்தும் எல்லா விகிதமுறும் எண்களும் கிடைக்கின்றன).

விகிதமுறா எண்களின் தொடை ($\mathbb{Q}'$)

இப்போது விகிதமுறா எண்களின் தொடையை இனங்காண்பதற்கு மிகவும் உகந்த தருணமாகும்.நாம் இதற்கு முன்னைய தரங்களில் ஓர் எண் கோட்டினை வரைந்து எண்கள் பற்றிக் கற்ற விதத்தை நினைவுகூர்வோம்.
அதனைப் பற்றி மீண்டும் ஆராய்வோம். இரு பக்கங்களுக்கும் தேவையான அளவுக்கு நீட்டப்படத்தக்க ஒரு நேர்கோட்டைக் கருதுவோம். அக்கோட்டின் மீது ஒரு விருப்பமான புள்ளியை 0 எனப் பெயரிடுவோம். 0 வின் ஒரு பக்கத்தில் (வழமையாக வலது பக்கத்தில்) சம தூரங்களில் 1, 2, 3, ... என்னும் நேர் நிறைவெண்களும் மற்றைய பக்கத்தில் –1, –2, –3, ... என்னும் மறை நிறைவெண்களும் குறிக்கப்பட்டுள்ளனவெனக் கொள்வோம். இதற்கேற்ப எல்லா நிறைவெண்களும் இக்கோட்டின் மீது காட்டப்பட்டுள்ளனவெனக் கொள்வோம். அதன் பின்னர் எல்லா விகிதமுறும் எண்களும் இக்கோட்டின் மீது காட்டப்பட்டுள்ளனவெனக் கொள்வோம். அவ்வாறு குறித்த சில புள்ளிகள் பின்வரும் உருவில் காணப்படுகின்றன.



இப்போது இக்கோட்டின் மீது எல்லா விகிதமுறும் எண்களும் (நிறைவெண்களும் உட்பட) குறிக்கப்பட்டு முடிந்துள்ளனவெனக் கொள்வோம். அப்போது நேர்கோடு மீது எல்லாப் புள்ளிகளுக்கும் ஒத்த ஓர் எண் குறிக்கப்படுகின்றதென நீங்கள் நினைக்கின்றீர்களா? வேறொரு விதத்தில் கேட்டால், கோடு வழியே 0 இலிருந்து உள்ள ஒவ்வொரு தூரத்தையும் ஒரு விகிதமுறும் எண்ணாக எழுதலாமென நீங்கள் நினைக்கின்றீர்களா? உண்மையில் வேறு புள்ளிகள் குறிப்பிடாமல் எஞ்சியிருக்கின்றன. அதாவது ஒரு விகிதமுறும் எண்ணினால் வகைகுறிக்கப்படாத புள்ளிகளும் (எண்கள்)

இக்கோட்டின் மீது எஞ்சியுள்ளன. இவ்வாறு வகைகுறிக்கப்படாமல் எஞ்சியிருப்பவை $\frac{a}{b}$ (இங்கு a, b நிறைவெண்களாகும்). என்ற வடிவில் **எழுதமுடியாத** புள்ளிகள் என்பது தெளிவாகின்றது. இவ்வாறு வகைகுறிக்கப்படாமல் எஞ்சியிருக்கும் புள்ளிகள் (எண்கள்) **விகிதமுறா** எண்கள் எனப்படும்.

விகிதமுறா எண் தொடையை வகைகுறிப்பதற்கு வேறொரு குறியீடு இல்லாத அதே வேளை அது $\mathbb{Q}$ வின் நிரப்பித் தொடை என்பதால் $\mathbb{Q}'$ இனால் காட்டப்படும்.

விகிதமுறா எண்களுக்கு உதாரணங்களாக $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ஆகிய எண்களைக் காட்டலாம். உண்மையில் ஒரு நிறைவர்க்க எண் இல்லாத எந்த ஒரு நிறைவெண்ணினதும் வர்க்க மூலம் ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும். இதனைத் தவிர யாதாயினும் ஒரு வட்டத்தின் பரிதி அதன் விட்டத்துடன் கொண்டுள்ள விகிதம் π என்பதும் ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும். கணிப்பதன் வசதிக்காக π யின் அண்ணளவுப் பெறுமானமாக $\frac{22}{7}$ என எடுக்கப்படுகின்றது.

மெய்யெண் தொடை ($\mathbb{R}$)

மேலேயுள்ள கலந்துரையாடலின்படி ஓர் எண் கோட்டின் மீதுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளையும் விகிதமுறு எண்களாக அல்லது விகிதமுறா எண்களாகக் குறிக்கலாம். இவ்விகிதமுறு, விகிதமுறா எண்கள் யாவற்றையும் அதாவது எண்கோட்டின் மீது அமைந்துள்ள புள்ளிகள் (எண்கள்) அனைத்தும் பொதுவாக **மெய்யெண்கள்** என அழைக்கப்படும். இம்மெய்யெண்களின் தொடை $\mathbb{R}$ இனால் குறிக்கப்படும்.

எண்ணின் தசம வகைக்குறிப்பு

எந்தவொரு மெய்யெண்ணையும் தசம வகைக்குறிப்பாகக் காட்டலாம். முதலில் ஓர் உதாரணமாகச் சில விகிதமுறும் எண்களின் தசம வகைக்குறிப்பைப் பார்ப்போம்.

1. விகிதமுறும் எண்ணின் தசம வகைக்குறிப்பு

$$4 = 4.000\ldots$$

$$\frac{1}{2} = 0.5 = 0.5000\ldots$$

$$\frac{11}{8} = 1.375 = 1.375000\ldots$$

$$\frac{211}{99} = 2.131313\ldots$$

$$\frac{767}{150} = 5.11333\ldots$$

$$\frac{37}{7} = 5.285714285714285714\ldots$$

இத்தசம வகைக்குறிப்புகளுக்கு உள்ள ஒரு பொது இயல்பு தசமப் புள்ளியின் ஒரு குறித்த சந்தர்ப்பத்திற்குப் பின்னர் (அல்லது முதலில்) ஓர் எண் குறித் (Numeral) தொகுதி (அல்லது ஓர் எண் குறிக்கும் இலக்கம்) மீண்டும் மீண்டும் மீளுதலாகும். மீளுதல் எனப்படுவது சம இடைவெளியில் மீண்டும் மீண்டும் எழுதுவது என்பதாகும். ஓர் உதாரணமாக $\frac{1}{2}$ இன் தசம வகைக்குறிப்பில் எண் குறி இலக்கம் 0 ஆனது இரண்டாம் தசம தானத்திலிருந்து மீளுகின்றது. 4 இன் தசம வகைக்குறிப்பில் எண் குறி இலக்கம் 0 தொடக்கத்திலிருந்து மீளுகின்றது. $\frac{211}{99}$ இல் எண் குறிக்கும் இலக்கங்களின் தொகுதி 13 ஆனது தொடக்கத்திலிருந்து மீளுகின்றது. $\frac{37}{7}$ இல் எண் குறிக்கும் இலக்கத் தொகுதி 285714 தொடக்கத்திலிருந்து மீளுகின்றது. இவ்வியல்பு, அதாவது ஒரு குறித்த எண் குறிக்கும் இலக்கத் தொகுதி தொடர்ச்சியாக மீளுதல் ஒவ்வொரு விகிதமுறும் எண்ணுக்கும் பொதுவான இயல்பாகும். இவ்வாறு மீளும் பகுதி 0 எனின் அத்தகைய தசமம் **முடிவுறு தசமம்** (Finite decimal) எனப்படும். அதே வேளை அவ்வாறு இராவிட்டால் அவை **மடங்கு** (Recurring /மீளும்) **தசமம்** எனப்படும். இதற்கேற்ப குறித்த உதாரணத்தில் $\frac{1}{2}$, 4, $\frac{11}{8}$ ஆகியன முடிவுறு தசமங்களாக இருக்கும் அதே வேளை மற்றைய எல்லாம் மடங்கு தசமங்களாகும். இதற்கேற்ப நாம் பின்வருமாறு எடுத்துரைக்கலாம்.

ஒவ்வொரு விகிதமுறும் எண்ணையும் முடிவுறு தசமமாக அல்லது மடங்கு தசமமாக எழுதலாம்.

விகிதமுறும் எண்கள் பற்றிய ஓர் அபூர்வ பேறைப்பற்றிக் கற்போம். ஒரு குறித்த விகிதமுறும் எண்ணின் தசமத்தை வகைகுறிக்கும் முடிவுறு தசமம் பற்றிச் சிந்திப்போம். $\frac{a}{b}$ என்னும் விகிதமுறும் எண்ணில் தசம வகைக்குறிப்பு முடிவுறு தசமம் எனவும் a, b ஆகியவற்றில் பொதுக் காரணிகள் இல்லையெனவும் கொள்வோம். அப்போது பகுதியில் (அதாவது b யில்) 2 அல்லது 5 (அல்லது 2, 5 ஆகிய இரண்டும்) இன் வலுக்கள் மாத்திரம் காரணிகளாக உள்ளன. ஒரு மடங்கு தசமமாகிய ஒரு விகிதமுறும் எண்ணின் 2, 5 ஆகியன தவிர்ந்த வேறொரு முதன்மை எண் பகுதியில் ஒரு காரணியாக இருத்தல் வேண்டும்.

மடங்கு தசமங்களை எழுதும்போது பின்வரும் குறியீட்டு முறைக்கேற்ப எழுதப்படும்.

மடங்கு தசமம்	சுருக்கிக் காட்டல்
12.4444...	$12.\dot{4}$
2.131313...	$2.\dot{1}\dot{3}$
5.11333...	$5.11\dot{3}$
5.285714285714285714...	$5.\dot{2}8571\dot{4}$

பயிற்சி 1.1

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள விகிதமுறும் எண்களின் ஒவ்வோர் எண்ணும் முடிவுறு தசமமா, மடங்கு தசமமா என வகுக்காமல் குறிப்பிடுக. மடங்கு தசமமாக இருக்கும் பின்னங்களைத் தசம வடிவத்தில் காட்டி சுருக்கி எழுதுக.

a. $\frac{3}{4}$ **b**. $\frac{5}{5}$ **c**. $\frac{3}{7}$ **d**. $\frac{5}{9}$ **e**. $\frac{5}{21}$ **f**. $\frac{7}{32}$

g. $\frac{19}{33}$ **h**. $\frac{13}{50}$ **i**. $\frac{7}{64}$ **j**. $\frac{5}{84}$ **k**. $\frac{15}{128}$ **l**. $\frac{41}{360}$

2. விகிதமுறா எண்ணொன்றின் தசம வகைக்குறிப்பு

இப்போது நாம் ஒரு விகிதமுறா எண்ணின் தசம வகைக்குறிப்பைப் பார்ப்போம். ஒரு விகிதமுறா எண்ணின் தசம வகைக்குறிப்பில் எவ்வித எண் குறிக்கும் இலக்கத் தொகுதியின் மீளுதல் நடைபெறுவதில்லை. ஓர் உதாரணமாக $\sqrt{2}$ இன் பெறுமானத்தை 60 தசம தானங்கள் வரைக்கும் கணிக்கும்போது இவ்வாறு கிடைக்கும்.

1.414213562373095048801688724209698078569671875376948073176679...

நாம் நிதமும் சந்திக்கும் ஓர் எண்ணாகிய π யும் ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும். π யின் பெறுமானம் 60 தசமதானங்கள் வரைக்கும் கணிக்கப்படும்போது பின்வருமாறாகும்.

3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944...

விகிதமுறா எண்கள் பற்றிப் பின்வருமாறு எடுத்துரைக்கலாம்.

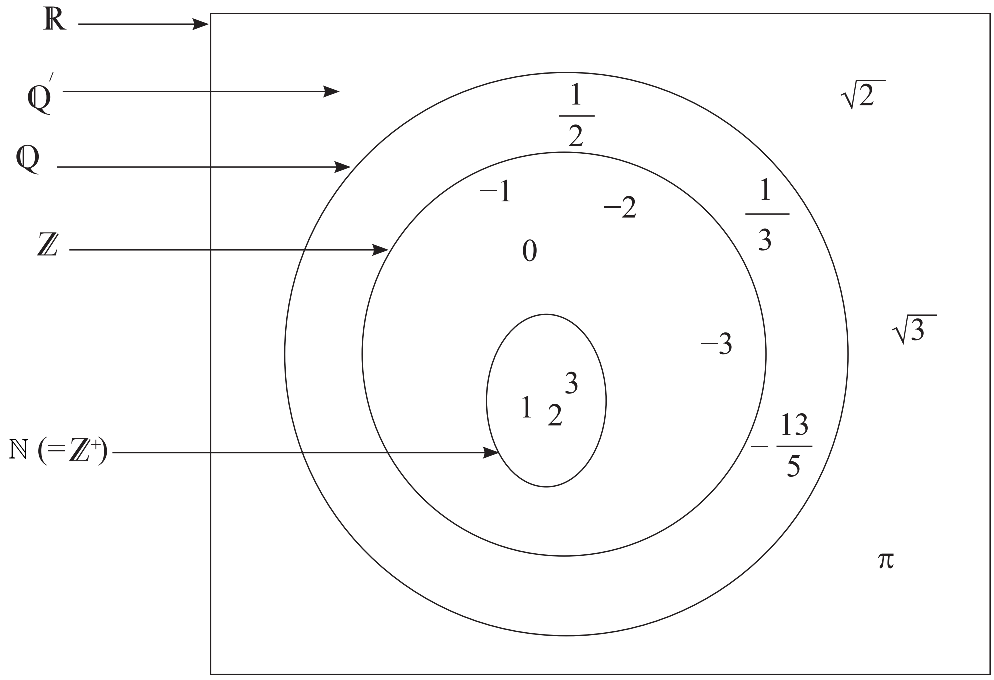
ஒரு விகிதமுறா எண்ணின் தசம வகைக்குறிப்பில் மீளும் எண் குறிக்கும் இலக்கத் தொகுதி இல்லை. அதற்கேற்ப மடங்கு தசமம் அல்லாத முடிவில் தசம எண்கள் விகிதமுறா எண்களாகும்.

குறிப்பு : விகிதமுறா எண்களின் தசம வகைக்குறிப்புப் பற்றி விவரிக்கும்போது ஏற்படும் ஒரு பொது வழு ''ஒரு விகிதமுறா எண்ணின் தசம வகைக்குறிப்பில் எவ்விதக் கோலமும் இல்லாமை'' ஆகும். ''கோலம்'' என்னும் சொல் கணிதத்தில் நன்றாக வரையறுக்கப்படாமை இங்கு உள்ள பிரச்சினையாகும். ஓர் உதாரணமாகக் கீழே எழுதப்பட்டுள்ள தசம எண்ணுக்கு ஒரு தெளிவான கோலம் உண்டு.

0.101001000100001000001...

எனினும் அது ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும். இதில் எந்த ஒரு தசமப் பகுதியும் மீளவில்லை.

இதுவரைக்கும் கற்ற எண் தொடைகள் எல்லாவற்றையும் மெய்யெண் தொடையாகவும் அதனை அகிலத் தொடையாகக் கொண்டு மற்றைய எண் தொடைகளை அதன் தொடைப்பிரிவுகளாகப் பின்வருமாறு ஒரு வென் வரிப்படத்தில் காட்டலாம். விளங்கிக் கொள்வதன் வசதிக்காகச் சில தொடைப்பிரிவுகளில் இருக்கவேண்டிய சில மூலகங்கள் வீதமும் எழுதப்பட்டுள்ளன.



பயிற்சி 1.2

1. பின்வரும் மெய்யெண்களை விகிதமுறும் எண்களாகவும் விகிதமுறா எண்களாகவும் வேறுபடுத்திக் காட்டுக.

   a. $\sqrt{2}$ **b.** $\sqrt{25}$ **c.** $\sqrt{6}$ **d.** $\sqrt{11}$ **e.** 6.52

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள கூற்றுகள் சரியானவையா, தவறானவையா எனத் தீர்மானிக்குக.

   (a) எந்தவொரு மெய்யெண்ணும் முடிவுறு தசமம் அல்லது முடிவில் தசமம் ஆகும்.

   (b) முடிவில் தசமத்தில் விகிதமுறும் எண்களும் இருக்கலாம்.

   (c) எந்தவொரு மெய்யெண்ணும் மடங்கு தசமம் அல்லது முடிவில் தசமம் ஆகும்.

   (d) 0.010110111011110... என்பது ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும்.

1.2 சேடுகள்

கணிதத்தில் மூலக் குறியாக அழைக்கப்படும் " $\sqrt{}$ " ஐப் பயன்படுத்தி எண் (அத்துடன் அட்சரகணிதக்) கோவைகளைக் காட்டிய விதம் உங்கள் நினைவில் இருக்கும் என்பதில் சந்தேகமில்லை. ஓர் உதாரணமாக $\sqrt{4}$ ஆனது " 4 இன் நேர் வர்க்கமூலம்" என அழைக்கப்படும் அதே வேளை வர்க்கிக்கும்போது 4 கிடைக்கும். நேர் எண் அதாவது 2 அதன் மூலம் காட்டப்படுகின்றது.எந்த ஒரு நேர் நிறைவெண் x இன் வர்க்கமூலமாகிய $\sqrt{x}$ உம் ஒரு நேர் நிறைவெண்ணாக இருப்பின் அப்போது $\sqrt{x}$ ஆனது நிறை வர்க்கமூலம் எனப்படும். இதற்கேற்ப $\sqrt{4}$ ஆனது நிறை வர்க்கமூலமாகும். எனினும் $\sqrt{2}$ ஒரு நிறை வர்க்க மூலமன்று எனவும் அது அண்ணளவாக 1.414 எனவும் நாம் இதற்கு முன்னர் பார்த்தோம். மேலும் $\sqrt{2}$ ஆனது ஒரு விகிதமுறா எண் எனவும் நாம் இப்பாடத்தில் கற்றோம். இந்த "$\sqrt{}$" குறி இடப்பட்ட ஆனால் நிறை வர்க்கமூலம் இல்லாத கோவைகள் **சேடுகள்** எனப்படும்.

உண்மையில் "$\sqrt{}$ " இட்டுக்கொண்டு வர்க்கமூலம் தவிர்ந்த வேறெந்த மூலத்தையும் காட்டலாம். உதாரணமாக $\sqrt[3]{2}$ ஆனது 2 இன் மூன்றாம் மூலத்திற்கு நேர் எண் காட்டப்படுகின்றது. அது 2 இன் கன (முப்படி) மூலம் எனப்படும். அது ஒரு விகிதமுறா எண்ணாக இருக்கும் அதே வேளை அதன் பெறுமானம் அண்ணளவாக 1.2599 ஆகும். (1.2599^3 இன் பெறுமானத்தைக் காண்பதன் மூலம் நீங்கள் இதனை நிறுவலாம்). இவ்வாறே 2 இன் நான்காம் மூலம், 2 இன் ஐந்தாம் மூலம் ஆகியவற்றையும் வரையறுக்கலாம் (உதாரணமாக $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[6]{8.24}$) இத்தகைய கோவைகளும் சேடுகளாகும். எனினும் நாம் இப்பாடத்தில் நேர் நிறைவெண்களின் வர்க்கமூலங்கள் உள்ள சேடுகளை மாத்திரம் கருதுவோம்.

நிறை வர்க்கம் அல்லாத ஓர் எண்ணின் வர்க்க மூலம் முடிவுறு தசமம் அல்லது மடங்கு தசமம் அன்று. அதற்கேற்ப சேடுகள் விகிதமுறா எண்கள் என்பதை அவதானிக்க.

நாம் இங்கு விசேடமாகச் சேடு வடிவத்தில் உள்ள கோவைகளைச் சுருக்குதல் பற்றிக் கருதுகிறோம். இத்தகைய சுருக்கல்கள் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தனவாக இருப்பதற்குப் பல காரணங்கள் உள்ளன. ஒரு காரணமாகக் கணிப்பை எளிதாக்கலைக் காட்டலாம். ஓர் உதாரணமாக $\frac{1}{\sqrt{2}}$ இன் பெறுமானத்தைக் காணவேண்டியுள்ளபோது $\sqrt{2}$ இதற்காக 1.414 ஐ இட்டால் $\frac{1}{1.414}$ இன் பெறுமானத்தைக் காணலாம். இவ்வகுத்தல் ஓரளவு நீண்டது. ஆனால் பின்வருமாறு சுருக்கிக் கணித்தல் மிகவும் எளிதானது.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$ (பின்னத்தில் பகுதியையும் தொகுதியையும் $\sqrt{2}$ இனால் பெருக்கும்போது)

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{1.414}{2} = 0.707.$$

மேலும் ஒரு காரணமாக, கணிக்கும்போது எழும் வழுவை இழிவளவாக்குவதாகக் காட்டலாம். அதற்காக ஓர் உதாரணமாக, $\frac{\sqrt{20}}{2} - \sqrt{5}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்போம். இங்கு $\sqrt{20}$ இன் கிட்டிய பெறுமானமாக 4.5 ஐயும் $\sqrt{5}$ இன் கிட்டிய பெறுமானமாக 2.2 ஐயும் கொள்வோம். அப்போது

$$\frac{\sqrt{20}}{2} - \sqrt{5} = \frac{4.5}{2} - 2.2 = 2.25 - 2.2$$
$$= 0.05$$

எனினும் இக்கோவையில் உண்மைப் பெறுமானம் 0 ஆகும். இவ்வாறு வேறு விடை கிடைப்பதற்கு ஒரு காரணம் $\sqrt{20}$, $\sqrt{5}$ இற்கு ஒரு அண்ணளவுப் பெறுமானத்தைப் பயன்படுத்துகின்றமையாகும். ஆனால், தரப்பட்டுள்ள கோவையை வேறு விதத்தில் சுருக்குதன் மூலம் சரியான பெறுமானமாகிய 0 ஐப் பெறலாம்.

$\sqrt{20}$ என்னும் வடிவத்தில் உள்ள சேட்டில் இருக்கும் சிறப்பியல்பு முழு எண்ணும் வர்க்கமூலக் குறியில் இருத்தலாகும். அத்தகைய சேடுகள் **முழுமைச் சேடு** எனப்படும்.

$6\sqrt{15}$ என எழுதும்போது $6 \times \sqrt{15}$ எனக் கருதப்படுகின்றது. அது ஒரு சேட்டினதும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணினதும் (1 இற்குச் சமமற்றது) பெருக்கமாகும்.

ஒரு சேடு $a\sqrt{b}$ வடிவத்தில் எழுதப்படும்போது மிக எளிய வடிவத்தில் இருப்பதாகக் கூறப்படும். இங்கு a ஆனது ஒரு விகிதமுறும் எண்ணாக இருக்கும் அதே வேளை b யின் காரணிகளாக ஒரு நிறை வர்க்கம் இருக்கக்கூடாது. ஓர் உதாரணமாக $6\sqrt{15}$ ஆனது மிக எளிய வடிவத்தில் உள்ள ஒரு சேடாக இருக்கும் அதே வேளை $5\sqrt{12}$ மிக எளிய வடிவத்தில் இல்லை. அதற்குக் காரணம் 12 இன் ஒரு காரணியாக ஒரு நிறை வர்க்கமான 4 இருத்தலாகும்.

முதலில் சுட்டிகள் பற்றிய இயல்புகளைப் பயன்படுத்திச் சேடுகள் உள்ள கோவைகள் சுருக்கப்படும் விதத்தை உதாரணங்களின் மூலம் கருதுவோம்.

உதாரணம் 1

சுருக்குக. $3\sqrt{5} + 6\sqrt{5}$
இங்கு $\sqrt{5}$ என்பதை ஒரு தெரியாக் கணியமாக எண்ணிச் சுருக்கலாம்.

எனவே $3\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 9\sqrt{5}$.

இது $3x + 6x = 9x$ எனச் சுருக்குவது போன்றதாகும். இத்தகைய சேடு வடிவில் மேலும் சுருக்க முடியாது என்பதை அவதானிக்க. $\sqrt{5}$ இற்குக் கிட்டிய ஒரு பெறுமானத்தை இட்டுச் சுருக்குவது சேடு வடிவில் சுருக்குதல் அல்ல என்பதை நினைவில் கொள்க.

நினைவில் கொள்ளவேண்டிய இன்னுமொரு முக்கிய விடயமானது, $3\sqrt{2} + 8\sqrt{3}$ போன்ற கோவைகளை (சேடுகளை) மேலும் சுருக்க முடியாது என்பதாகும்.

இனிச் சுட்டி பற்றிய பண்புகளைப் பயன்படுத்திச் சேடுகளைக் கொண்ட கோவைகளைச் சுருக்குவதை உதாரணங்களின் மூலம் கவனிப்போம்.

உதாரணம் 2

$\sqrt{20}$ என்னும் சேடை எளிய வடிவில் பின்வருமாறு காட்டலாம்.

$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5}$

$= \sqrt{4} \times \sqrt{5}$ ($\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ என்பதால்)

$= 2 \times \sqrt{5}$

$= 2\sqrt{5}$

உதாரணம் 3

$4\sqrt{5}$ என்னும் சேடை முழுமைச் சேடாகப் பின்வருமாறு காட்டலாம்.

$4\sqrt{5} = \sqrt{16} \times \sqrt{5}$ ($4 = \sqrt{16}$ என்பதால்)

$= \sqrt{16 \times 5}$

$= \sqrt{80}$

சேடுகளைப் பெருக்கும் முறையையும் வகுக்கும் முறையையும் கவனிப்போம்.

உதாரணம் 4

$5\sqrt{3} \times 4\sqrt{2}$

பெருக்கும்போது விகிதமுறு எண்களையும் விகிதமுறா எண்களையும் வெவ்வேறாகப் பெருக்குவோம்.

$$\begin{aligned} 5\sqrt{3} \times 4\sqrt{2} &= 5 \times 4 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} \\ &= 20 \times \sqrt{3 \times 2} \\ &= 20\sqrt{6} \end{aligned}$$

உதாரணம் 5

$3\sqrt{20} \div 2\sqrt{5}$

$3\sqrt{20}$ முழுமைச் சேடாகும். அதனை $3\sqrt{4 \times 5}$ என எழுதலாம்.

மேலும் சுருக்கி $3 \times 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$ எனக் காட்டலாம்.

அப்போது

$$\begin{aligned} 3\sqrt{20} \div 2\sqrt{5} &= \frac{3\sqrt{20}}{2\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ &= 3 \end{aligned}$$

இனி நாம் $\frac{a}{\sqrt{b}}$ என்ற வடிவிலான கோவைகளைச் சுருக்கும் முறை பற்றி ஆராய்வோம். இவ்வாறான பின்னங்களாக $\frac{3}{\sqrt{2}}$, $\frac{4}{\sqrt{5}}$ ஆகியவற்றைக் குறிப்பிடலாம். இவ்வொவ்வொரு பின்னத்திலும் பகுதியில் வர்க்கமூலத்துடனான ஒரு கோவை உள்ளது. வர்க்கமூலத்துடனான அக்கோவைக்குப் பதிலாகப் பகுதியில் நிறைவெண் ஒன்று (அல்லது விகிதமுறும் எண்) பெறப்படும் வகையில் இவற்றை ஒழுங்கு செய்யும் விதத்தை இப்போது ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 6

$\frac{3}{\sqrt{2}}$ என்னும் எண்ணைப் பகுதியில் ஒரு நிறைவெண்ணைக் கொண்ட பின்னமாகத் தருக.

இங்கு பயன்படுத்தப்படும் முறையானது $\frac{3}{\sqrt{2}}$ இன் பகுதியையும் தொகுதியையும் $\sqrt{2}$ இனால் பெருக்குதலாகும்.

$$\begin{aligned} \frac{3}{\sqrt{2}} &= \frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

இங்கு செய்யப்பட்ட செய்கை பகுதியை விகிதமுறும் எண்ணாக மாற்றுதல் எனப்படும்.

உதாரணம் 7

$\dfrac{a}{\sqrt{b}}$ இன் பகுதியை விகிதமுறு எண்ணாக மாற்றுக.

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \times \sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}}$$

$$= \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

சேடுகளுடனான பிரசினங்கள் சிலவற்றைத் தீர்க்கும் விதத்தைக் கவனிப்போம்.

உதாரணம் 8

சுருக்குக. $4\sqrt{63} - 5\sqrt{7} - 8\sqrt{28}$

$$4\sqrt{63} = 4 \times \sqrt{9 \times 7} = 4 \times 3\sqrt{7}$$

$$= 12\sqrt{7}$$

$$8\sqrt{28} = 8 \times \sqrt{4 \times 7} = 8 \times 2\sqrt{7}$$

$$= 16\sqrt{7}$$

எனவே $4\sqrt{63} - 5\sqrt{7} - 8\sqrt{28} = 12\sqrt{7} - 5\sqrt{7} - 16\sqrt{7}$

$$= -9\sqrt{7}$$

இறுதியாகச் சேடுடன் கூடிய சிக்கலான ஒரு பிரசினத்தைத் தீர்க்கும் முறையைக் கவனிப்போம்.

உதாரணம் 9

சுருக்குக. $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}} + \sqrt{75} - \dfrac{3}{\sqrt{12}}$

$$\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}} + \sqrt{75} - \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{2\sqrt{2 \times 3}}{\sqrt{2}} + \sqrt{25 \times 3} - \frac{3}{\sqrt{4 \times 3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \sqrt{25 \times 3} - \frac{3}{\sqrt{4} \times \sqrt{3}}$$

$$= 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$= 7\sqrt{3} - \frac{3 \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$= 7\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2 \times 3}$$

$$= 7\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{13\sqrt{3}}{2}$$

பயிற்சி 1.3

1. முழுமைச் சேடைச் சேடாக மாற்றுக.

a. $\sqrt{20}$ **b.** $\sqrt{48}$ **c.** $\sqrt{72}$ **d.** $\sqrt{28}$

e. $\sqrt{80}$ **f.** $\sqrt{45}$ **g.** $\sqrt{98}$ **h.** $\sqrt{147}$

2. சேடை முழுமைச் சேடாக மாற்றுக.

a. $2\sqrt{3}$ **b.** $2\sqrt{5}$ **c.** $4\sqrt{7}$ **d.** $5\sqrt{2}$ **e.** $6\sqrt{11}$

3. சுருக்குக.

a. $\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$

b. $\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{7}$

c. $4\sqrt{3} + 5\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$

d. $6\sqrt{11} + 3\sqrt{7} - 2\sqrt{11} - 5\sqrt{7} + 4\sqrt{7}$

e. $8\sqrt{3} + 7\sqrt{7} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$

4. சுருக்குக.

a. $3\sqrt{2} \times 2\sqrt{3}$ **b.** $5\sqrt{11} \times 3\sqrt{7}$ **c.** $\sqrt{5} \times 3\sqrt{3}$

d. $4\sqrt{14} \div 2\sqrt{7}$ **e.** $6\sqrt{27} \div 3\sqrt{3}$ **f.** $\sqrt{48} \div 5\sqrt{3}$

5. விகிதமுறா எண்களைப் பகுதியெண்ணாகக் கொண்ட பின்னங்களை விகிதமுறும் பகுதியெண்ணாக மாற்றுக.

a. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ **b.** $\frac{5}{\sqrt{3}}$ **c.** $\frac{5}{\sqrt{7}}$ **d.** $\frac{12}{2\sqrt{3}}$ **e.** $\frac{27}{3\sqrt{2}}$

f. $\frac{3}{2\sqrt{5}}$ **g.** $\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{7}}$ **h.** $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$ **i.** $\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$

6. சுருக்குக.

a. $2\sqrt{27} - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{7} + 3\sqrt{28}$ **b.** $3\sqrt{63} - 2\sqrt{7} + 3\sqrt{27} + 3\sqrt{3}$

c. $2\sqrt{128} - 3\sqrt{50} + 2\sqrt{162} + \frac{4}{\sqrt{2}}$ **d.** $\sqrt{99} - 2\sqrt{44} + \frac{110}{\sqrt{11}}$

e. $\frac{\sqrt{20}}{2} - \sqrt{5}$

2 சுட்டிகளும் மடக்கைகளும் I

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- சுட்டி, மடக்கை விதிகளைக் கொண்டு வலுக்களும் மூலங்களும் இடம்பெறும் கோவைகளைச் சுருக்குவதற்கும்
- சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

சுட்டிகள்

சுட்டிகளையும் மடக்கைகளையும் பற்றி நீங்கள் இதுவரைக்கும் கற்ற விடயங்களை மீட்பதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. சுருக்கிப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

a. $2^2 \times 2^3$ **b.** $(2^4)^2$ **c.** 3^{-2}

d. $\dfrac{5^3 \times 5^2}{5^5}$ **e.** $\dfrac{3^5 \times 3^2}{3^6}$ **f.** $(5^2)^2 \div 5^3$

g. $\dfrac{(2^2)^3 \times 2^4}{2^8}$ **h.** $\dfrac{5^{-3} \times 5^2}{5^0}$ **i.** $(5^2)^{-2} \times 5 \times 3^0$

2. சுருக்குக.

a. $a^2 \times a^3 \times a$ **b.** $a^5 \times a \times a^0$ **c.** $(a^2)^3$

d. $(x^2)^3 \times x^2$ **e.** $(xy)^2 \times x^0$ **f.** $(2x^2)^3$

g. $\dfrac{2pq \times 3p}{6p^2}$ **h.** $2x^{-2} \times 5xy$ **i.** $\dfrac{(3a)^{-2} \times 4a^2b^2}{2ab}$

3. சுருக்குக.

a. $\lg 25 + \lg 4$ **b.** $\log_2 8 - \log_2 4$

c. $\log_5 50 + \log_5 2 - \log_5 4$ **d.** $\log_a 5 + \log_a 4 - \log_a 2$

e. $\log_x 4 + \log_x 12 - \log_x 3$ **f.** $\log_p a + \log_p b - \log_p c$

4. பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

a. $\log_5 x = \log_5 4 + \log_5 2$ **b.** $\log_5 4 - \log_5 2 = \log_5 x$

c. $\log_a 2 + \log_a x = \log_a 10$ **d.** $\log_3 x + \log_3 10 = \log_3 5 + \log_3 6 - \log_3 2$

e. $\lg 5 - \lg x + \lg 8 = \lg 4$ **f.** $\log_x 12 - \log_5 4 = \log_5 3$

2.1 வலுவின் பின்னச் சுட்டிகள்

4 இன் வர்க்கமூலம் என்பதை மூலக் குறியைக் கொண்டு $\sqrt{4}$ எனவும் சுட்டிகளைக் கொண்டு $4^{\frac{1}{2}}$ எனவும் எழுதலாம்.

இதற்கேற்ப $\sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}}$ என்பது தெளிவாகும்.

வேறோர் அத்தகைய சந்தர்ப்பத்தைக் கருதுவோம்.

$$
\begin{aligned}
2 \times 2 \times 2 &= 2^1 \times 2^1 \times 2^1 \\
&= 2^3 \\
&= 8
\end{aligned}
$$

2 இன் மூன்றாம் வலு 8 ஆகும். அதாவது, 8 இன் கனமூலம் 2 ஆகும். அதனைக் குறியீடுகளைக் கொண்டு

$\sqrt[3]{8} = 2$ அல்லது $8^{\frac{1}{3}} = 2$ என எழுதலாம்.

அதாவது $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}}$ என்பது தெளிவாகும்.

மேலும் a ஆனது ஒரு நேர் மெய்யெண் எனின்,

$$
\begin{aligned}
\sqrt{a} &= a^{\frac{1}{2}} \\
\sqrt[3]{a} &= a^{\frac{1}{3}} \\
\sqrt[4]{a} &= a^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}
$$
என எழுதலாம்.

இதற்கேற்ப மூலக் குறிக்கும் வலுவின் சுட்டிக்குமிடையே உள்ள தொடர்பைப் பொதுவாகப் பின்வருமாறு காட்டுவோம்.

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$$

சுட்டிக் கோவைகளைச் சுருக்குவதற்கு இத்தொடர்புடைமை பயன்படுத்தப்படும் விதத்தைப் பின்வரும் உதாரணங்களின் மூலம் ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

1. பெறுமானங் காண்க.

(i) $\sqrt[3]{27}$ (ii) $(\sqrt{25})^{-2}$ (iii) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$

(i) $\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}}$

$= (3^3)^{\frac{1}{3}}$

$= 3^{3 \times \frac{1}{3}}$

$= 3$

(ii) $(\sqrt{25})^{-2} = (25^{\frac{1}{2}})^{-2}$

$= \{(5^2)^{\frac{1}{2}}\}^{-2}$

$= \{5^{2 \times \frac{1}{2}}\}^{-2}$

$= 5^{-2}$

$= \frac{1}{5^2}$

$= \frac{1}{25}$

(iii) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}}$

$= \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{(3^3)^{\frac{1}{3}}}{(2^3)^{\frac{1}{3}}}$

$= \frac{3^{3 \times \frac{1}{3}}}{2^{3 \times \frac{1}{3}}}$

$= \frac{3}{2}$

$= 1\frac{1}{2}$

சுட்டிகளைக் கொண்ட அட்சரகணிதக் கோவைகளைச் சுருக்குவதற்குச் சுட்டி விதிகள் பயன்படுத்தப்படும் விதத்தைப் பின்வரும் உதாரணங்களைக் கொண்டு மேலும் ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 2

சுருக்கி, விடையை நேர்ச் சுட்டிகளுடன் தருக.

(i) $(\sqrt{x})^3$ (ii) $(\sqrt[3]{a})^{-\frac{1}{2}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{x^{-3}}}$

(i) $(\sqrt{x})^3 = (x^{\frac{1}{2}})^3$

$= x^{\frac{1}{2} \times 3}$

$= x^{\frac{3}{2}}$

(ii) $(\sqrt[3]{a})^{-\frac{1}{2}} = (a^{\frac{1}{3}})^{-\frac{1}{2}}$

$= a^{\frac{1}{3} \times -\frac{1}{2}}$

$= a^{-\frac{1}{6}}$

$= \frac{1}{a^{\frac{1}{6}}}$

(iii) $\frac{1}{\sqrt{x^{-3}}} = \frac{1}{(x^{-3})^{\frac{1}{2}}}$

$= \frac{1}{x^{-3 \times \frac{1}{2}}}$

$= \frac{1}{x^{-\frac{3}{2}}}$

$= x^{\frac{3}{2}}$

உதாரணம் 3

பெறுமானங் காண்க. (i) $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$ (ii) $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$

(i) $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$

$$= \left(\frac{3^3}{4^3}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left[\left(\frac{3}{4}\right)^3\right]^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{3\times\frac{2}{3}}$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$= \underline{\underline{\frac{9}{16}}}$$

(ii) $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$

$$= \left(\frac{2^4}{3^4}\right)^{-\frac{3}{4}}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{4\times\frac{-3}{4}}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$= \frac{27}{8}$$

$$= 3\frac{3}{8}$$

இப்போது சற்றுச் சிக்கலான ஓர் உதாரணமாக $\left(\frac{125}{64}\right)^{-\frac{1}{3}} \times \left(\sqrt[5]{32}\right)^3 \times 3^0$ இன் பெறுமானத்தை எவ்வாறு காணலாமென ஆராய்வோம்.

$$\left(\frac{125}{64}\right)^{-\frac{1}{3}} \times \left(\sqrt[5]{32}\right)^3 \times 3^0 = \left(\frac{5^3}{2^6}\right)^{-\frac{1}{3}} \times \left(32^{\frac{1}{5}}\right)^3 \times 1$$

$$= \left(\frac{2^6}{5^3}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(2^{5\times\frac{1}{5}}\right)^3$$

$$= \frac{2^{6\times\frac{1}{3}}}{5^{3\times\frac{1}{3}}} \times 2^3$$

$$= \frac{2^2}{5} \times 2^3$$

$$= \frac{2^5}{5}$$

$$= \frac{32}{5}$$

$$= 6\frac{2}{5}$$

உதாரணம் 4

சுருக்குக. $\dfrac{\sqrt[3]{343x^{\frac{3}{2}}}}{x}$

$$\frac{\sqrt[3]{343x^{3/2}}}{x} = \left(343x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \div x$$

$$= 343^{\frac{1}{3}} \times \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \div x$$

$$= (7^3)^{\frac{1}{3}} \times \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \div x$$

$$= 7 \times x^{\frac{1}{2}} \div x$$

$$= 7 \times x^{\frac{1}{2} - 1}$$

$$= 7 \times x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{7}{x^{\frac{1}{2}}}$$

பயிற்சி 2.1

1. மூலக் குறியீட்டுடன் எழுதுக.

a. $p^{\frac{1}{3}}$ **b.** $a^{\frac{2}{3}}$ **c.** $x^{-\frac{2}{3}}$

d. $m^{\frac{4}{5}}$ **e.** $y^{-\frac{3}{4}}$ **f.** $x^{-\frac{5}{3}}$

2. நேர்ச் சுட்டியுடன் எழுதுக.

a. $\sqrt{m^{-1}}$ **b.** $\sqrt[3]{x^{-1}}$ **c.** $\sqrt[5]{p^{-2}}$ **d.** $(\sqrt{a})^{-3}$ **e.** $\sqrt[4]{x^{-3}}$

f. $(\sqrt[3]{p})^{-5}$ **g.** $\dfrac{1}{\sqrt{x^{-3}}}$ **h.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^{-2}}}$ **i.** $2\sqrt[3]{x^{-2}}$ **j.** $\dfrac{1}{3\sqrt{a^{-5}}}$

3. பெறுமானங் காண்க.

a. $\sqrt{25}$ **b.** $\sqrt[4]{16}$ **c.** $(\sqrt{4})^5$

d. $(\sqrt[5]{32})^3$ **e.** $\sqrt[4]{81^3}$ **f.** $\sqrt[3]{1000^2}$

g. $\left(\dfrac{27}{125}\right)^{\frac{2}{3}}$ **h.** $\left(\dfrac{81}{10000}\right)^{\frac{3}{4}}$ **i.** $\left(\dfrac{1}{64}\right)^{-\frac{5}{6}}$

j. $\left(\dfrac{27}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$ **k.** $(0.81)^{\frac{3}{2}}$ **l.** $(0.125)^{-\frac{2}{3}}$

m. $\left(\dfrac{4}{25}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-1} \times 2^0$ **n.** $\left(\dfrac{9}{100}\right)^{-\frac{3}{2}} \times \left(\dfrac{4}{25}\right)^{\frac{3}{2}}$ **o.** $(27)^{1\frac{1}{3}} \times (81)^{-1\frac{1}{4}}$

p. $\left(11\dfrac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \left(6\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$ **q.** $(0.125)^{-\frac{1}{3}} \times (0.81)^{\frac{3}{2}}$ **r.** $(\sqrt[3]{8})^2 \times \sqrt[4]{16^3}$

4. சுருக்கி நேர்ச் சுட்டியுடன் எழுதுக.

a. $\sqrt[3]{a^{-1}} \div \sqrt[3]{a}$ **b.** $\sqrt[5]{a^{-3}} \div \sqrt[5]{a^7}$ **c.** $\sqrt[3]{a^2} \div \sqrt[3]{a^{-3}}$

d. $\left(\sqrt[3]{x^5}\right)^{\frac{1}{2}} \times \sqrt[6]{x^{-5}}$ **e.** $\left\{\left(\sqrt{a^3}\right)^{-2}\right\}^{\frac{-1}{2}}$ **f.** $\left(\sqrt{x^2y^2}\right)^{-6}$

g. $\sqrt{\dfrac{4a^{-2}}{9x^2}}$ **h.** $\left(\sqrt[3]{27x^3}\right)^{-2}$ **i.** $\left(\dfrac{xy^{-1}}{\sqrt{x^5}}\right)^{-2}$

2.2 சுட்டிகள் இடம்பெறும் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்

$2^x = 2^3$ என்பது ஒரு சமன்பாடாகும். அதன் சமக் குறியின் இரு பக்கங்களிலும் உள்ள இரு வலுக்களினதும் அடிகள் சமமாகையால், இரு சுட்டிகளும் சமம் ஆகும். இதற்கேற்ப $2^x = 2^3$ ஆக இருக்கும்போது $x = 3$ ஆகும்.

அவ்வாறே $x^5 = 2^5$ என்னும் சமன்பாட்டிலும் சமக் குறியின் இரு பக்கங்களிலும் சுட்டிகள் இரண்டிலும் சமமான இரு வலுக்கள் இருக்கின்றன. அச்சுட்டிகள் சமமாகையால், இரு அடிகளும் சமமாகும். இதற்கேற்ப $x^5 = 2^5$ ஆக இருக்கும்போது $x = 2$ ஆகும். ஆனால் $x^2 = 9$ எனின், x யிற்கு $+3, -3$ என்னும் இரு பெறுமானங்களும் x இன் தீர்வுகளாகும். ஆயினும் இப்பாடத்தில் $x > 0$ ஆகவுள்ள சமன்பாடுகளை மாத்திரம் கவனத்தில் கொள்வோம். 1 இன் சுட்டிகளில் விசேடமான ஒரு பண்பு உண்டு. அதாவது 1 இன் எந்தவொரு சுட்டியும் 1 ஆகும். அதாவது எல்லா m இற்கும் $1^m = 1$ ஆகும்.

பொதுவாக மேற்குறித்த கோட்பாட்டைப் பின்வருமாறு காட்டலாம்.

$x > 0,\ y > 0,\ x \neq 1,\ y \neq 1$ ஆயின்

$x \neq 0$ ஆக இருக்கும்போது $x^m = x^n$ எனின், $m = n$ ஆகும்.
$m \neq 0$ ஆக இருக்கும்போது $x^m = y^m$ எனின், $x = y$ ஆகும்.

சுட்டிகளுடனான சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதற்கு மேற்குறித்த கோட்பாடுகளைப் பயன்படுத்துவோம்.

உதாரணம் 1

தீர்க்க.

(i) $4^x = 64$ (ii) $x^3 = 343$ (iii) $3 \times 9^{2x-1} = 27^{-x}$

(i) $4^x = 64$

$4^x = 4^3$

$\therefore x = 3$

(ii) $x^3 = 343$

$x^3 = 7^3$

$\therefore x = 7$

(iii) $3 \times 9^{2x-1} = 27^{-x}$

$3 \times (3^2)^{2x-1} = (3)^{3(-x)}$

$3 \times 3^{2(2x-1)} = 3^{-3x}$

$3^{1+4x-2} = 3^{-3x}$

$\therefore 1 + 4x - 2 = -3x$

$4x + 3x = 2 - 1$

$7x = 1$

$\therefore x = \frac{1}{7}$

பயிற்சி 2.2

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

a. $3^x = 9$ **b.** $3^{x+2} = 243$

c. $4^{3x} = 32$ **d.** $2^{5x-2} = 8^x$

e. $8^{x-1} = 4^x$ **f.** $x^3 = 216$

g. $2\sqrt{x} = 6$ **h.** $\sqrt[3]{2x^2} = 2$

2. சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

a. $2^x \times 8^x = 256$ **b.** $8 \times 2^{x-1} = 4^{x-2}$

c. $5 \times 25^{2x-1} = 125$ **d.** $3^{2x} \times 9^{3x-2} = 27^{-3x}$

e. $4^x = \dfrac{1}{64}$ **f.** $(3^x)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{27}$

g. $3^{4x} \times \dfrac{1}{9} = 9^x$ **h.** $x^2 = \left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$

2.3 மடக்கை விதிகள்

$\log_2 (16 \times 32) = \log_2 16 + \log_2 32$, $\log_2 (32 \div 16) = \log_2 32 - \log_2 16$ என மடக்கை விதிகளைக் கொண்டு எழுதலாம் என்பதை நாம் அறிவோம். அவ்விதிகள் பொதுவாக

$\log_a (mn) = \log_a m + \log_a n$ எனவும்

$\log_a \left(\dfrac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$ எனவும் தரப்படும்.

அத்தகைய வேறொரு மடக்கை விதியை இப்போது அறிந்து கொள்வோம்.

ஓர் உதாரணமாக $\log_5 125^4$ ஐக் கருதுவோம்.

$$\begin{aligned}\log_5 125^4 &= \log_5 (125 \times 125 \times 125 \times 125)\\ &= \log_5 125 + \log_5 125 + \log_5 125 + \log_5 125\\ &= 4 \log_5 125\end{aligned}$$

அவ்வாறே

$\lg_{10} 10^5 = 5 \lg_{10} 10$

$\log_3 5^2 = 2 \log_3 5$ இதனைப் பொதுவாக ஒரு மடக்கை விதியாகப் பின்வருமாறு காட்டலாம்.

$$\boxed{\log_a m^r = r \log_a m}$$

பின்னச் சுட்டிகளைக் கொண்ட கோவைகளுக்கும் இவ்விதி உண்மையாக இருக்கும் அதே வேளை அதற்குரிய சில உதாரணங்கள் கீழே காணப்படுகின்றன.

$$\log_2 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_2 3$$

$$\log_5 7^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log_5 7$$

மேலே இனங்கண்ட மடக்கை விதி உட்பட மடக்கை விதிகள் பயன்படுத்தப்படும் விதம் பின்வரும் உதாரணங்களின் மூலம் காட்டப்படுகின்றது.

உதாரணம் 1

பெறுமானங் காண்க.

(i) $\lg 1000$ (ii) $\log_4 \sqrt[3]{64}$ (iii) $2\log_2 2 + 3\log_2 4 - 2\log_2 8$

(i) $\lg 1000 = \lg 10^3$

$= 3\lg 10$

$= 3 \times 1$ ($\lg 10 = 1$ என்பதால்)

$= 3$

(ii) $\log_4 \sqrt[3]{64} = \log_4 64^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{3} \log_4 64$

$= \frac{1}{3} \log_4 4^3$

$= \frac{1}{3} \times 3 \log_4 4$

$= \log_4 4$

$= 1$

(iii) $2\log_2 2 + 3\log_2 4 - 2\log_2 8 = 2\log_2 2 + 3\log_2 2^2 - 2\log_2 2^3$

$= \log_2 2^2 + \log_2 (2^2)^3 - \log_2 (2^3)^2$

$= \log_2 \left(\frac{2^2 \times (2^2)^3}{(2^3)^2} \right)$

$= \log_2 \left(\frac{2^2 \times 2^6}{2^6} \right)$

$= \log_2 2^2$

$= 2\log_2 2$

$= 2$

உதாரணம் 2

தீர்க்க.

(i) $2\lg 8 + 2\lg 5 = \lg 4^3 + \lg x$

$$
\begin{aligned}
\lg x &= 2\lg 8 + 2\lg 5 - \lg 4^3 \\
&= \lg 8^2 + \lg 5^2 - \lg 4^3 \\
&= \lg \frac{8^2 \times 5^2}{4^3} \\
&= \lg 25 \\
\therefore \quad x &= 25
\end{aligned}
$$

(ii) $2 \log_b 3 + 3 \log_b 2 - \log_b 72 = \frac{1}{2} \log_b x$

$$
\begin{aligned}
2 \log_b 3 + 3 \log_b 2 - \log_b 72 &= \frac{1}{2} \log_b x \\
\log_b 3^2 + \log_b 2^3 - \log_b 72 &= \log_b x^{\frac{1}{2}} \\
\log_b \left(\frac{3^2 \times 2^3}{72}\right) &= \log_b x^{\frac{1}{2}} \\
\frac{3^2 \times 2^3}{72} &= x^{\frac{1}{2}} \\
1^2 &= (x^{\frac{1}{2}})^2 \\
1 &= x^1 \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

(iii) வாய்ப்புப் பார்க்க. $\log_5 75 - \log_5 3 = \log_5 40 - \log_5 8 + 1$

இ.கை.ப. $= \log_5 75 - \log_5 3$

$$
\begin{aligned}
&= \log_5 \frac{75}{3} \\
&= \log_5 25 \\
&= \log_5 5^2 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

வ.கை.ப. $= \log_5 40 - \log_5 8 + 1$

$= \log_5 \frac{40}{8} + 1$

$= \log_5 5 + 1$

$= 1 + 1$

$= 2$

$\therefore \log_5 75 - \log_5 3 = \log_5 40 - \log_5 8 + 1$

மடக்கை விதிகள் பற்றிக் கற்ற விடயங்களைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் பயிற்சியை செய்க.

பயிற்சி 2.3

1. பெறுமானங் காண்க.

a. $\log_2 32$ **b.** $\lg 10\,000$ **c.** $\frac{1}{3}\log_3 27$

d. $\frac{1}{2}\log_5 \sqrt{25}$ **e.** $\log_3 \sqrt[4]{81}$ **f.** $3\log_2 \sqrt[3]{8}$

2. பின்வரும் கோவைகள் ஒவ்வொன்றையும் சுருக்கிப் பெறுமானங் காண்க.

a. $2\log_2 16 - \log_2 8$ **b.** $\lg 80 - 3\lg 2$

c. $2\lg 5 + 3\lg 2 - \lg 2$ **d.** $\lg 75 - \lg 3 + \lg 28 - \lg 7$

e. $\lg 18 - 3\lg 3 + \frac{1}{2}\lg 9 + \lg 5$ **f.** $4\lg 2 + \lg \frac{15}{4} - \lg 6$

g. $\lg \frac{1}{256} - \lg \frac{125}{4} - 3\lg \frac{1}{20}$ **h.** $\log_3 27 + 2\log_3 3 - \log_3 3$

i. $\lg \frac{12}{5} + \lg \frac{25}{21} - \lg \frac{2}{7}$ **j.** $\lg \frac{3}{4} - 2\lg \frac{3}{10} + \lg 12 - 2$

3. தீர்க்க.

a. $\lg x + \lg 4 = \lg 8 + \lg 2$

b. $4\lg 2 + 2\lg x + \lg 5 = \lg 15 + \lg 12$

c. $3\lg x + \lg 96 = 2\lg 9 + \lg 4$

d. $\lg x = \frac{1}{2}(\lg 25 + \lg 8 - \lg 2)$

e. $3\lg x + 2\lg 8 = \lg 48 + \frac{1}{2}\lg 25 - \lg 30$

f. $\lg 125 + 2\lg 3 = 2\lg x + \lg 5$

பலவினப் பயிற்சி

1. பெறுமானங் காண்க.

a. $(\sqrt[3]{8})^2 \times \dfrac{1}{\sqrt[3]{27}}$

b. $(\sqrt{125})^3 \times \dfrac{1}{\sqrt{20}} \times 10$

c. $\dfrac{32^{-\frac{2}{5}} \times 216^{\frac{2}{3}}}{81^{\frac{3}{4}} \times \sqrt[3]{8^0} \times \sqrt[3]{27^{-2}}}$

d. $\sqrt{\dfrac{18 \times 5^2}{8}}$

e. $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} \times 5^{-2} \times 100$

f. $27^{\frac{2}{3}} - 16^{\frac{3}{4}}$

2. சுருக்கி, நேர்ச் சுட்டிகளுடன் தருக.

a. $\sqrt{a^2 b^{-\frac{1}{2}}}$

b. $(x^{-4})^{\frac{1}{2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{x^{-3}}}$

c. $(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})\,(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})$

d. $(x \div \sqrt[n]{x})^n$

e. $\left[\left(\sqrt{a^3}\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{2}}$

3. பின்வருவனவற்றை வாய்ப்புப் பார்க்க.

a. $\lg\left(\dfrac{217}{38} \div \dfrac{31}{266}\right) = 2\lg 7$

b. $\log_3 24 + \log_3 5 - \log_3 40 = 1$

c. $\dfrac{1}{2}\lg 9 + \lg 2 = 2\lg 3 - \lg 1.5$

d. $\lg 26 + \lg 119 - \lg 51 - \lg 91 = \lg 2 - \lg 3$

e. $2\log_a 3 + \log_a 20 - \log_a 36 = \log_a 10 - \log_a 2$

3 சுட்டிகளும் மடக்கைகளும் II

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி 0 இற்கும் 1 இற்குமிடையே உள்ள எண்களின் வலுக்களும் மூலங்களும் இடம்பெறும் பெருக்கல்களையும் வகுத்தல்களையும் கொண்ட கோவைகளைச் சுருக்குவதற்கும்
- விஞ்ஞானக் கணிகருவியில் $\boxed{\wedge}$, $\boxed{\sqrt{\ }}$ என்னும் சாவிகளை இனங்காண்பதற்கும் தசமங்கள், வலுக்கள், மூலங்கள் ஆகியன இடம்பெறும் கோவைகளை விஞ்ஞானக் கணிகருவியைக் கொண்டு சுருக்குவதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

மடக்கை அட்டவணையும் அதன் பயன்பாடுகளும்

$10^3 = 1000$. அதனை $\log_{10} 1000 = 3$ என மடக்கை வடிவத்தில் எழுதலாம். $\log_{10}$ இற்குப் பதிலாக lg ஐ மாத்திரம் பயன்படுத்தி அதனை $\lg 1000 = 3$ எனக் காட்டலாம் என்பதை நாம் அறிவோம். அடி 10 ஐத் தவிர வேறு அடிகள் இருக்கும்போது அடியைக் குறிப்பிடுதல் வேண்டும். உதாரணமாக

$5^2 = 25$ ஆகையால் $\log_5 25 = 2$,

$10^0 = 1$ ஆகையால் $\lg 1 = 0$

$10^1 = 10$ ஆகையால் $\lg 10 = 1$.

எந்தவொரு நேர் எண்ணினதும் மடக்கைகளைப் பெறுதலை மடக்கை அட்டவணைகளைக் கொண்டு செய்யலாம். மடக்கைகளைப் பயன்படுத்திப் பெருக்கலும் வகுத்தலும் உட்பட எண்களைச் சுருக்கலை நினைவுகூர்வதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியைச் செய்வோம்.

மீட்டற் பயிற்சி

1. பின்வரும் அட்டவணைகளைப் பூரணப்படுத்துக.

(i)

எண்	விஞ்ஞான முறைக் குறிப்பீடு	மடக்கை		
		சிறப்பியல்பு	தசமக்கூட்டு	மடக்கை
73.45	7.345×10^1	1	0.8660	1.8660
8.7				
12.5				
725.3				
975				

(ii)

மடக்கை	மடக்கை		விஞ்ஞான முறைக் குறிப்பீடு	எண்
	சிறப்பியல்பு	தசமக்கூட்டு		
1.5492				
2.9059				
1.4036				
2.8798				
3.4909				

2. மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி வெற்றிடங்களை நிரப்புக.

a. lg 5.745 = 0.7593 ஆகையால் 5.745 = $10^{0.7593}$
b. lg 9.005 = ... ஆகையால் 9.005 = $10^{\cdots\cdots}$
c. lg 82.8 = ... ஆகையால் 82.8 = $10^{\cdots\cdots}$
d. lg 74.01 = ... ஆகையால் 74.01 = $10^{\cdots\cdots}$
e. lg 853.1 = ... ஆகையால் 853.1 = $10^{\cdots\cdots}$
f. antilog 0.7453 = 5.562 ஆகையால் 5.562 = $10^{0.7453}$
g. antilog 0.0014 = ... ஆகையால் .... = $10^{0.0014}$
h. antilog 1.9251 = ... ஆகையால் .... = $10^{1.9251}$
i. antilog 2.4374 = ... ஆகையால் .... = $10^{2.4374}$
j. antilog 3.2001 = ... ஆகையால் .... = $10^{3.2001}$

3. வெற்றிடங்களை நிரப்பி P இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) மடக்கைக் கோவையாக

$$P = \frac{27.32 \times 9.8}{11.5}$$

$\lg P =$ lg ... + lg ... − lg ...

$=$ ... + ... − ....

$=$ ....

$\therefore\ P =$ antilog ....

$=$ ....

(ii) சுட்டி வடிவத்தில்

$$P = \frac{27.32 \times 9.8}{11.5}$$

$$= \frac{10^{\cdots\cdots} \times 10^{\cdots\cdots}}{10^{\cdots\cdots}}$$

$$= \frac{10^{\cdots\cdots}}{10^{\cdots\cdots}}$$

$$= 10^{\cdots\cdots}$$

$=$ .... $\times\ 10^{\cdots}$

$=$ ....

4. பின்வரும் கோவைகள் ஒவ்வொன்றையும் மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திச் சுருக்குக.

a. 14.3×95.2 **b.** $2.575 \times 9.27 \times 12.54$ **c.** $\dfrac{9.87 \times 7.85}{4.321}$

3.1 ஒன்றிலும் குறைந்த தசம எண்களின் மடக்கைகள்

மடக்கை அட்டவணையிலிருந்து 1 இலும் கூடிய எண்களின் மடக்கைகளைப் பெற்ற விதத்தில் கவனஞ் செலுத்தி 0 இற்கும் 1 இற்குமிடையே உள்ள எண்களின் மடக்கை கள் பெறப்படும் விதம் பற்றி இப்போது பார்ப்போம்.

எண்	விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீடு	மடக்கை		மடக்கை
		சிறப்பியல்பு	தசமக்கூட்டு	
5432	5.432×10^3	3	0.7350	3.7350
543.2	5.432×10^2	2	0.7350	2.7350
54.32	5.432×10^1	1	0.7350	1.7350
5.432	5.432×10^0	0	0.7350	0.7350
0.5432	5.432×10^{-1}	-1	0.7350	$\overline{1}.7350$
0.05432	5.432×10^{-2}	-2	0.7350	$\overline{2}.7350$
0.005432	5.432×10^{-3}	-3	0.7350	$\overline{3}.7350$
0.0005432	5.432×10^{-4}	-4	0.7350	$\overline{4}.7350$

மேற்குறித்த அட்டவணைக்கேற்ப முதல் நிரலில் 5.432 இற்குப் பின்னர் உள்ள 0 இற்கும் 1 இற்கும் இடைப்பட்ட எண்களின் மடக்கையின் சிறப்பியல்பு ஒரு மறைப் பெறுமானத்தை எடுக்கின்றது. சிறப்பியல்பு ஒரு மறைப் பெறுமானமாக இருந்தாலும் அட்டவணையிலிருந்து பெறப்படும் தசமக்கூட்டு ஒரு நேர்ப் பெறுமானமாகும். சிறப்பியல்பு மாத்திரம் மறையாக இருக்கின்றது என்பதைக் காட்டுவதற்கு அதற்கு மேலே "$-$" இடப்படுகின்றது. இது **பிரிகோடு** என வாசிக்கப்படும். உதாரணமாக $\overline{2}.3725$ ஆனது பிரிகோடு (Bar) இரண்டு தசம் மூன்று ஏழு இரண்டு ஐந்து என வாசிக்கப்படும். மேலும் $\overline{2}.3725$ இன் மூலம் $-2 + 0.3725$ காட்டப்படுகின்றது.

0 இற்கும் 1 இற்குமிடையே உள்ள எண்களின் மடக்கையின் சிறப்பியல்பு மறையாகும். அத்தகைய ஓர் எண்ணின் சிறப்பியல்பைப் பெறுதல் விஞ்ஞான முறைக் குறிப்பீட்டைப் போன்று தசமப் புள்ளிக்குப் பின்னர் வரும் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கையினாலும் செய்யப்படலாம். தசமப் புள்ளிக்குப் பின்னர் (அதன் பின்னர் வரும் முதற் பூச்சியமல்லாத இலக்கத்துக்கு முன்னர்) உள்ள பூச்சியங்களின்

எண்ணிக்கையுடன் ஒன்றைக் கூட்டி அதன் மறைப் பெறுமானத்தை எடுக்கும்போது கிடைக்கும் பெறுமானம் மடக்கையின் சிறப்பியல்பாகும். இதனை மேலேயுள்ள அட்டவணையில் அவதானிக்கலாம்.

உதாரணம்:

0.004302 தசமப் புள்ளிக்குப் பின்னர் முதற் பூச்சியமல்லாத இலக்கத்துக்கு முன்னர் உள்ள பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை
2, சிறப்பியல்பு $\bar{3}$
0.04302 தசமப் புள்ளிக்குப் பின்னர் உள்ள பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை
1, சிறப்பியல்பு $\bar{2}$
0.4302 தசமப் புள்ளிக்குப் பின்னர் உள்ள பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை
0, சிறப்பியல்பு $\bar{1}$

அப்போது $\lg 0.004302 = \bar{3}.6337$
அது சுட்டி வடிவத்தில் எழுதப்படும்போது
$0.004302 = 10^{\bar{3}.6337}$ ஆகும். வேறொரு விதமாகக் காட்டப்படும்போது
$0.004302 = 10^{-3} \times 10^{0.6357}$ ஆகும்.

0 இற்கும் 1 இற்குமிடையே உள்ள எண்களின் மடக்கைகளைப் பெறுவதில் பரிச்சயப்படுவதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியைச் செய்க.

பயிற்சி 3.1

1. பின்வரும் எண்கள் ஒவ்வொன்றினதும் சிறப்பியல்பை எழுதுக.

a. 0.9843 **b.** 0.05 **c.** 0.0725
d. 0.0019 **e.** 0.003141 **f.** 0.000783

2. பெறுமானங் காண்க.

a. lg 0.831 **b.** lg 0.01175 **c.** lg 0.0034
d. lg 0.009 **e.** lg 0.00005 **f.** lg 0.00098

3. பின்வரும் எண்களைப் பத்தின் வலுவாக எழுதுக.

a. 0.831 **b.** 0.01175 **c.** 0.0034
d. 0.009 **e.** 0.00005 **f.** 0.00098

3.2 மடக்கைக்குரிய எண் (முரண்மடக்கை / antilog)

முன்னர் கற்ற 1 இலும் கூடிய எண்களின் முரண்மடக்கையைப் பெற்ற விதத்தை நினைவுகூர்வோம்.

$$\text{antilog } 2.7421 = 5.522 \times 10^{2}$$
$$= 552.2$$

ஓர் எண்ணை விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீட்டில் எழுதும்போது கிடைக்கும் 10 இன் வலுவின் சுட்டி அவ்வெண்ணின் மடக்கையின் சிறப்பியல்பாகும். முரண் மடக்கையைப் பெறுவதற்குத் தசமப் புள்ளி செல்லவேண்டிய தானங்களின் எண்ணிக்கை சிறப்பியல்பினால் காட்டப்படுகின்றது. இதற்கேற்ப மேற்குறித்த 5.522 இல் தசமப் புள்ளிகள் இரு தானங்கள் வலக்கைப் பக்கமாகச் சென்று 552.2 கிடைத்துள்ளது. ஆனால் ஒரு மறைச் சிறப்பியல்பு உள்ள சந்தர்ப்பத்தில் இத்தசமப் புள்ளி இடக் கைப் பக்கமாகச் செல்லல் நடைபெறுகின்றது.

$\text{antilog } \bar{2}.7421 = 5.522 \times 10^{-2}$ (தசமப் புள்ளி இடக் கைப் பக்கமாக இரு தானங்களுக்குச் செல்ல வேண்டும்)
$= 0.05522$ (பிரிகோடு 2 ஆகையால் தசமப் புள்ளிக்கு வலப்பக்கமாக 1 பூச்சியம்)

$\text{antilog } \bar{1}.7421 = 5.522 \times 10^{-1}$ (தசமப் புள்ளி இடக் கைப் பக்கமாக ஒரு தானத்திற்குச் செல்ல வேண்டும்)
$= 0.5522$ (பிரிகோடு 1 ஆகையால் தசமப் புள்ளிக்கு வலப்பக்கமாகப் பூச்சியம் இல்லை)

பயிற்சி 3.2

1. விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீட்டில் உள்ள பின்வரும் எண்கள் ஒவ்வொன்றையும் தசம எண்ணாக எழுதுக.

a. 3.37×10^{-1} **b.** 5.99×10^{-3} **c.** 6.0×10^{-2}
d. 5.745×10^{0} **e.** 9.993×10^{-4} **f.** 8.777×10^{-3}

2. மடக்கை அட்டவணையைக் கொண்டு பெறுமானத்தைக் காண்க.

a. $\text{antilog } \bar{2}.5432$ **b.** $\text{antilog } \bar{1}.9321$ **c.** $\text{antilog } 0.9972$
d. $\text{antilog } \bar{4}.5330$ **e.** $\text{antilog } \bar{2}.0000$ **f.** $\text{antilog } \bar{3}.5555$

3.3 பிரிகோடு இடம்பெறும் மடக்கைகளைக் கூட்டலும் கழித்தலும்

(a) கூட்டல்

ஒரு மடக்கையின் தசமக்கூட்டு மடக்கை அட்டவணையிலிருந்து பெறப்படும் அதே வேளை அது எப்போதும் ஒரு நேர்ப் பெறுமானமாகும். எனினும், சிறப்பியல்பு நேர் அல்லது மறை அல்லது பூச்சியம் என்பதை நாம் அறிவோம். $\overline{2}.5143$ இன் தசமக்கூட்டு 0.5143 நேரும் சிறப்பியல்பு $\overline{2}$ மறையும் ஆகும். இத்தகைய எண்களைக் கூட்டும்போது அல்லது கழிக்கும்போது தசமக்கூட்டுப் பகுதியை வேறாகவும் சிறப்பியல்புப் பகுதியை வேறாகவும் சுருக்க வேண்டும்.

உதாரணம் 1

சுருக்குக; விடையில் மறை பெறப்படும் சந்தர்ப்பத்தில் பிரிகோட்டுடன் தருக.

(i) $\overline{2}.5143 + \overline{1}.2375$
$$= (-2) + 0.5143 + (-1) + 0.2375$$
$$= (-2-1) + (0.5143 + 0.2375)$$
$$= -3 + 0.7518$$
$$= \overline{3}.7518$$

(ii) $\overline{3}.9211 + 2.3142$
$$= (-3) + 0.9211 + 2 + 0.3142$$
$$= (-3) + 2 + 0.9211 + 0.3142$$
$$= -1 + 1 + 0.2353$$
$$= 0.2353$$

(iii) $\overline{3}.8753 + 1.3475$
$$= (-3) + 0.8753 + 1 + 0.3475$$
$$= (-3) + 1 + 0.8753 + 0.3475$$
$$= -2 + 1.2228$$
$$= -2 + 1 + 0.2228$$
$$= \overline{1}.2228$$

(b) கழித்தல்

கூட்டலில் போன்று தசமக்கூட்டு நேரெனக் கொண்டு வலப்பக்கமிருந்து இடப்பக்கமாக முறையே கழித்தல் வேண்டும்.

உதாரணம் 2

சுருக்குக; விடையில் மறை பெறப்படும் சந்தர்ப்பத்தில் பிரிகோட்டுடன் தருக.

(i) $\overline{2}.5143 - 1.3143 = -2 + 0.5143 - (1 + 0.3143)$
$$= -2 + 0.5143 - 1 - 0.3143$$
$$= -2 - 1 + 0.5143 - 0.3143$$
$$= -3 + 0.2000$$
$$= \overline{3}.2000$$

(ii) $2.5143 - \bar{1}.9143 = 2 + 0.5143 - (-1 + 0.9143)$
$= 2 + 0.5143 + 1 - 0.9143$
$= 3 - 0.4000$
$= 2.6000$

(iii) $0.2143 - \bar{1}.8143 = 0.2143 - (-1 + 0.8143)$
$= 0.2143 + 1 - 0.8143$
$= 1 - 0.6000$
$= 0.4$

(iv) $\bar{2}.5143 - \bar{1}.9143 = -2 + 0.5143 - (-1 + 0.9143)$
$= -2 + 0.5143 + 1 - 0.9143$
$= -2 + 1 + 0.5143 - 0.9143$
$= -1 - 0.4000$

இங்கு தசமக்கூட்டுக்கு ஒரு மறைப் பெறுமானம் கிடைக்கின்றது. ஆனால் மடக்கையில் தசமக்கூட்டு நேராக இருத்தல் வேண்டும் ஆகையால், பின்வரும் விதமாக ஓர் உத்தியைப் பயன்படுத்துவோம்.

$-1 - 0.4 = -1 - 1 + 1 - 0.4$ ($-1+1 = 0$ ஆகையால் பெறுமானம் மாறுவதில்லை)
$= -2 + 0.6$
$= \bar{2}.6$

இங்கு சிறப்பியல்பிற்கு -1 உம் தசமக்கூட்டிற்கு $+1$ உம் சேர்க்கப்பட்டுள்ளது.

குறிப்பு: மேற்குறித்த இம்முறை தசமக்கூட்டில் மறை கிடைத்தலைத் தவிர்க்கத்தக்கதாக இருந்தது.

$-2 + 0.5143 + 1 - 0.9143 = -2 + 1.5143 - 0.9143 = -2 + 0.6 = \bar{2}.6$

பயிற்சி 3.3

1. சுருக்குக.

a. $0.7512 + \bar{1}.3142$ **b.** $\bar{1}.3072 + \bar{2}.2111$ **c.** $\bar{2}.5432 + \bar{1}.9513$

d $\bar{3}.9121 + \bar{1}.5431$ **e.** $0.7532 + \bar{3}.8542$ **f.** $\bar{1}.8311 + \bar{2}.5431 + 1.3954$

2. சுருக்குக.

a. $3.8760 - \bar{2}.5431$ **b.** $\bar{2}.5132 - \bar{1}.9332$ **c.** $\bar{3}.5114 - \bar{2}.4312$

d $\bar{2}.9372 - 1.5449$ **e.** $0.7512 + \bar{1}.9431$ **f.** $\bar{1}.9112 - \bar{3}.9543$

3. சுருக்குக.

a. $\overline{1}.2513 + 0.9172 - \overline{1}.514$ **b.** $\overline{3}.2112 + 2.5994 - \overline{1}.5004$

c. $\overline{3}.2754 + \overline{2}.8211 - \overline{1}.4372$ **d.** $0.8514 - \overline{1}.9111 - \overline{2}.3112$

e. $\overline{3}.7512 - (0.2511 + \overline{1}.8112)$ **f.** $\overline{1}.2572 + 3.9140 - \overline{1}.1111$

3.4 மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி எண்கோவைகளைச் சுருக்கல்

கீழே தரப்பட்டுள்ள மடக்கை விதிகளைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் மடக்கைகளை எண் கணிப்புச் செய்யும் விதத்தைச் சில உதாரணங்களின் மூலம் ஆராய்வோம்.

1. $\log_a (P \times Q) = \log_a P + \log_a Q$

2. $\log_a \left(\frac{P}{Q}\right) = \log_a P - \log_a Q$

உதாரணம் 1

மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி மடக்கை விதிகளைப் பிரயோகித்துச் சுருக்குக.

a. 43.85×0.7532 **b.** 0.0034×0.8752 **c.** $0.0875 \div 18.751$ **d.** $0.3752 \div 0.9321$

a. 43.85×0.7532

முறை I

$P = 43.85 \times 0.7532$ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\lg P = \lg (43.85 \times 0.7532)$

$= \lg 43.85 + \lg 0.7532$

$= 1.6420 + \overline{1}.8769$

$= 1 + 0.6420 - 1 + 0.8769$

$= 1.5189$

$\therefore P = \text{antilog } 1.5189$

$= 33.03$

முறை II

சுட்டி வடிவத்தில் சுருக்கல்

43.85×0.7532

$= 10^{1.6420} \times 10^{\overline{1}.8769}$

$= 10^{1.5189}$

$= 3.303 \times 10^{1}$

$= 33.03$

b. 0.0034×0.8752

$P = 0.0034 \times 0.8752$ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\lg P = \lg (0.0034 \times 0.8752)$

$= \lg 0.0034 + \lg 0.8752$

$= \overline{3}.5315 + \overline{1}.9421$

$= -3 + 0.5315 - 1 + 0.9421$

$= -4 + 1 + 0.4736$

$= -3 + 0.4736$

$= \overline{3}.4736$

$\therefore P = \text{antilog } \overline{3}.4736$

$= 0.002975$

சுட்டி வடிவத்தில் சுருக்கல்

0.0034×0.8752

$= 10^{\overline{3}.5315} \times 10^{\overline{1}.9421}$

$= 10^{\overline{3}.4736}$

$= 2.975 \times 10^{-3}$

$= 0.002975$

c. $0.0875 \div 18.75$

$P = 0.0875 \div 18.75$ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\lg P = \lg (0.0875 \div 18.75)$

$$
\begin{aligned}
&= \lg 0.0875 - \lg 18.75 \\
&= \overline{2}.9420 - 1.2730 \\
&= -2 + 0.9420 - 1 - 0.2730 \\
&= -3 + 0.6690 \\
&= \overline{3}.6690
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad P &= \text{antilog } \overline{3}.6690 \\
&= 0.004666
\end{aligned}
$$

சுட்டி வடிவத்தில் சுருக்கல்
$0.0875 \div 18.75$
$= 10^{\overline{2}.9420} \div 10^{1.2730}$
$= 10^{\overline{2}.9420 - 1.2730}$
$= 10^{\overline{3}.6690}$
$= 4.666 \times 10^{-3}$
$= 0.004666$

d. $0.3752 \div 0.9321$

$P = 0.3752 \div 0.9321$ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\lg P = \lg (0.3752 \div 0.9321)$

$$
\begin{aligned}
&= \lg 0.3752 - \lg 0.9321 \\
&= \overline{1}.5742 - \overline{1}.9694 \\
&= -1 + 0.5742 - (-1 + 0.9694) \\
&= -1 + 0.5742 + 1 - 0.9694 \\
&= -1 + 0.5742 + 0.0306 \\
&= -1 + 0.6048 \\
&= \overline{1}.6048
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad P &= \text{antilog } \overline{1}.6048 \\
&= 0.4026
\end{aligned}
$$

சுட்டி வடிவத்தில் சுருக்கல்
$0.3752 \div 0.9321$
$= 10^{\overline{1}.5742} \div 10^{\overline{1}.9694}$
$= 10^{\overline{1}.5742 - \overline{1}.9694}$
$= 10^{\overline{1}.6048}$
$= 4.026 \times 10^{-1}$
$= 0.4026$

உதாரணம் 2

மடக்கை வடிவில் சுருக்குக. $\dfrac{8.753 \times 0.02203}{0.9321}$

$$P = \frac{8.753 \times 0.02203}{0.9321}$$ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\lg P = \lg \left(\dfrac{8.753 \times 0.02203}{0.9321}\right)$

$= \lg 8.753 + \lg 0.02203 - \lg 0.9321$

$= 0.9421 + \bar{2}.3430 - \bar{1}.9694$

$= 0.9421 - 2 + 0.3430 - \bar{1}.9694$

$= \bar{1}.2851 - \bar{1}.9694$

$= -1 + 0.2851 - (-1 + 0.9694)$

$= -1 + 0.2851 + 1 - 0.9694$

$= \bar{1}.3157$

$\therefore \quad P = \text{antilog } \bar{1}.3157$

$= 0.2068$

சுட்டி வடிவத்தில் சுருக்கல்

$$\frac{8.753 \times 0.02203}{0.9321}$$

$$= \frac{10^{0.9421} \times 10^{\bar{2}.3430}}{10^{\bar{1}.9694}}$$

$$= \frac{10^{\bar{1}.2851}}{10^{\bar{1}.9694}}$$

$$= 10^{\bar{1}.2851 - \bar{1}.9694}$$

$$= 10^{\bar{1}.3157}$$

$$= 2.068 \times 10^{-1}$$

$$= 0.2068$$

பயிற்சி 3.4

1. மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திப் பெறுமானம் காண்க.

A.

a. 5.945×0.782 **b.** 0.7453×0.05921 **c.** 0.0085×0.0943

d. $5.21 \times 0.752 \times 0.093$ **e.** $857 \times 0.008321 \times 0.457$ **f.** $0.123 \times 0.9857 \times 0.79$

B.

a. $7.543 \div 0.9524$ **b.** $0.0752 \div 0.8143$ **c.** $0.005273 \div 0.0078$

d. $0.9347 \div 8.75$ **e.** $0.0631 \div 0.003921$ **f.** $0.0752 \div 0.0008531$

C.

a. $\dfrac{8.247 \times 0.1973}{0.9875}$ **b.** $\dfrac{9.752 \times 0.0054}{0.09534}$ **c.** $\dfrac{79.25 \times 0.0043}{0.3725}$

d. $\dfrac{0.7135 \times 0.4391}{0.0059}$ **e.** $\dfrac{5.378 \times 0.9376}{0.0731 \times 0.471}$ **f.** $\dfrac{71.8 \times 0.7823}{23.19 \times 0.0932}$

3.5 ஓர் எண்ணின் மடக்கையை முழு எண்ணால் பெருக்கலும் வகுத்தலும்

ஒன்றிலும் கூடிய எண்களின் மடக்கைகளின் சிறப்பியல்பானது நேர்ப் பெறுமானத்தை எடுக்கும் என்பதை நாம் அறிவோம். அவ்வாறான மடக்கையை இன்னோர் எண்ணினால் பெருக்கும்போது அல்லது வகுக்கும்போது சாதாரண முறையில் சுருக்கலாம். ஆயினும் 0 இற்கும் 1 இற்குமிடையே உள்ள எண்களின் மடக்கைளின் சிறப்பியல்பு ஒரு மறைப் பெறுமானத்தை எடுக்கின்றது என்பதை நாம் அறிவோம். $\overline{3}.8247$ அத்தகைய ஒரு மடக்கை ஆகும். இத்தகைய பிரிகோடு இடம்பெறும் ஒரு மடக்கையை வேறோர் எண்ணினால் பெருக்கும்போது அல்லது வகுக்கும்போது சிறப்பியல்பு, தசமக்கூட்டுப் பகுதிகளை வேறுவேறாகச் சுருக்க வேண்டும்.

மடக்கையை முழு எண்ணால் பெருக்கல்

உதாரணம் 1

சுருக்குக.

a. 2.8111×2 **b.** $\overline{2}.7512 \times 3$ **c.** $\overline{1}.9217 \times 3$

a.

$$
\begin{aligned}
& 2.8111 \times 2 \\
= \; & 5.6222
\end{aligned}
$$

b.

$$
\begin{aligned}
& \overline{2}.7512 \times 3 \\
&= 3(-2 + 0.7512) \\
&= -6 + 2.2536 \\
&= -6 + 2 + 0.2536 \\
&= -4 + 0.2536 \\
&= \overline{4}.2536
\end{aligned}
$$

c.

$$
\begin{aligned}
& \overline{1}.9217 \times 3 \\
&= 3(-1 + 0.9217) \\
&= -3 + 2.7651 \\
&= -3 + 2 + 0.7651 \\
&= -1 + 0.7651 \\
&= \overline{1}.7651
\end{aligned}
$$

மடக்கையை ஒரு முழு எண்ணால் வகுத்தல்

மடக்கைகளை ஒரு முழு எண்ணால் வகுக்கும் விதம் பற்றி இப்போது கருதுவோம். சிறப்பியல்பு பிரிகோட்டைக் கொண்டிருக்கும் மடக்கையை முழு எண்ணால் வகுக்கும்போது சிறப்பியல்பு, தசமக்கூட்டு ஆகிய இரு பகுதிகளும் மறை, நேர்ப் பெறுமானங்கள் இருக்கின்றமையால் வகுக்கும்போது மறைப் பகுதியையும் நேர்ப் பகுதியையும் வேறுவேறாக வகுத்தல் வேண்டும். அத்தகைய சில சந்தர்ப்பங்கள் பற்றி இப்போது பார்ப்போம்.

உதாரணம் 2

சுருக்குக.

a. $2.5142 \div 2$ **b.** $\bar{3}.5001 \div 3$ **c.** $\bar{4}.8322 \div 2$

$(-3 + 0.5001) \div 3$ $(-4 + 0.8322) \div 2$

$2.5142 \div 2$ $= 1.2571$	$\bar{3} \div 3 = \bar{1}$ $0.5001 \div 3 = 0.1667$ $\therefore\ \bar{3}.5001 \div 3$ $= \bar{1}.1667$	$\bar{4} \div 2 = \bar{2}$ $0.8322 \div 2 = 0.4161$ $\therefore\ \bar{4}.8322 \div 2$ $= \bar{2}.4161$

மேற்குறித்த உதாரணத்தில் உள்ள மடக்கைகளின் சிறப்பியல்பை மீதியின்றி வகுத்தோம். சிறப்பியல்பை மீதியுடன் வகுத்தால், அது வகுக்கப்படும் விதம் பற்றிப் பின்வரும் உதாரணங்களின் மூலம் ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 3

சுருக்குக.

a. $\bar{1}.5412 \div 2$ **b.** $\bar{2}.3713 \div 3$ **c.** $\bar{3}.5112 \div 2$

a. $\bar{1}.5412 \div 2$ என்பதை $(-1 + 0.5412) \div 2$ எனக் கொள்வோம்.

சிறப்பியல்பு $\bar{1}$ ஆனது 2 இனால் செப்பமாக வகுக்கப்படாமையால், அதனை $\bar{2} + 1$ என அமைக்கலாம்.

$$\begin{aligned}\bar{1}.5412 \div 2 &= (-1 + 0.5412) \div 2\\ &= (-2 + 1 + 0.5412) \div 2\\ &= (-2 + 1.5412) \div 2\\ &= \bar{1}.7706\end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned}\bar{1}.3713 \div 3 &= (-1 + 0.3712) \div 3\\ &= (-3 + 2 + 0.3712) \div 3 \qquad (-1 = -3 + 2 \text{ ஆகையால்})\\ &= (\bar{3} + 2.3712) \div 3\\ &= \bar{1}.7904\end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned}\bar{3}.5112 \div 2 &= (-3 + 0.5112) \div 2\\ &= (-4 + 1 + 0.5112) \div 2\\ &= \bar{2} + 1.5112 \div 2 \qquad (-3 = -4 + 1 \text{ ஆகையால்})\\ &= \bar{2}.7556\end{aligned}$$

மடக்கை அட்டவணைகளைப் பயன்படுத்திச் செய்யும் சுருக்கலில் இப்பெருக்கல்களும் வகுத்தல்களும் முக்கியமானவை ஆகையால், அவ்வறிவை விருத்தி செய்வதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியைச் செய்க.

பயிற்சி 3.5

1. பெறுமானங் காண்க.

a. $\overline{1}.5413 \times 2$ **b.** $\overline{2}.7321 \times 3$ **c.** 1.7315×3

d. 0.4882×3 **e.** $\overline{3}.5111 \times 2$ **f.** $\overline{3}.8111 \times 4$

2. பெறுமானங் காண்க.

a. $1.9412 \div 2$ **b.** $0.5512 \div 2$ **c.** $\overline{2}.4312 \div 2$

d. $\overline{3}.5412 \div 3$ **e.** $\overline{2}.4712 \div 2$ **f.** $\overline{4}.5321 \div 2$

g. $\overline{1}.5432 \div 2$ **h.** $\overline{2}.9312 \div 3$ **i.** $\overline{3}.4112 \div 2$

j. $\overline{1}.7512 \div 3$ **k.** $\overline{4}.1012 \div 3$ **l.** $\overline{5}.1421 \div 3$

3.6 மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி எண்ணின் வலுவையும் மூலத்தையும் காணல்

$\log_2 5^3 = 3\log_2 5$ அது முன்னர் நாம் கற்ற ஒரு மடக்கை விதியாகிய $\log_a m^r = r\log_a m$ மூலம் கிடைக்கின்றது என்பதை நாம் அறிவோம்.
அவ்வாறே மூலம் உள்ள ஒரு எண்ணின் மடக்கையை மடக்கை விதியின் கீழ் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

(i) $\log_a\sqrt{5} = \log_a 5^{\frac{1}{2}}$ ($\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$ ஆகையால்)

$= \frac{1}{2}\log_a 5$ (மடக்கை விதியைப் பயன்படுத்தல்)

(ii) $\lg\sqrt{25} = \lg 25^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\lg 25$

இதற்கேற்ப மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி ஓர் எண்ணின் வலுவையும் மூலத்தையும் பெறும் விதம் பற்றிப் பின்வரும் உதாரணங்களைக் கொண்டு ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

பெறுமானங் காண்க.

a. 354^2 **b.** 0.0275^3 **c.** 0.9073^4

a. $P = 354^2$ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\lg P = \lg 354^2$

$= 2 \lg 354$

$= 2 \lg (3.54 \times 10^2)$

$= 2 \times 2.5490$

$= 5.0980$

$\therefore \quad P = \text{antilog } 5.0980$

$= 1.253 \times 10^5$

$= 125\,300$

b. $P = 0.0275^3$ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\lg P = \lg 0.0275^3$

$= 3 \lg 0.0275$

$= 3 \times \overline{2}.4393$

$= 3 \times (-2 + 0.4393)$

$= -6 + 1.3179$

$= -6 + 1 + 0.3179$

$= -5 + 0.3179$

$= \overline{5}.3179$

$\therefore \quad P = \text{antilog } \overline{5}.3179$

$= 2.079 \times 10^{-5}$

$= 0.00002079$

c. $P = 0.9073^4$ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\lg P = \lg 0.9073^4$

$= 4 \lg 0.9073$

$= 4 \times \overline{1}.9577$

$= 4 \times (-1 + 0.9577)$

$= -4 + 3.8308$

$= -4 + 3 + 0.8308$

$= -1 + 0.8308$

$= \overline{1}.8308$

$\therefore P = \text{antilog } \overline{1}.8308$

$= 6.773 \times 10^{-1}$

$= 0.6773$

சுட்டி வடிவத்தில் சுருக்கல்

$0.9073^4 = \left(10^{\overline{1}.9577}\right)^4$

$= 10^{\overline{1}.9577 \times 4}$

$= 10^{-1.8308}$

$= 6.773 \times 10^{-1}$

$= 0.6773$

உதாரணம் 2

பெறுமானங் காண்க. **a.** $\sqrt{8.75}$ **b.** $\sqrt[3]{0.9371}$ **c.** $\sqrt[3]{0.0549}$

a. $P = \sqrt{8.75}$ எனக் கொள்வோம்.

$$P = \sqrt{8.75}$$
$$P = 8.75^{\frac{1}{2}}$$

அப்போது $\lg P = \lg 8.75^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{2} \lg 8.75$$
$$= \frac{1}{2} \times 0.9420$$
$$= 0.4710$$
$$\therefore \quad P = \text{antilog } 0.4710$$
$$= 2.958$$

b. $P = \sqrt[3]{0.9371}$ எனக் கொள்வோம்.

$$P = \sqrt[3]{0.9371}$$
$$= 0.9371^{\frac{1}{3}}$$

அப்போது $\lg P = \lg 0.9371^{\frac{1}{3}}$

$$= \frac{1}{3} \lg 0.9371$$
$$= \frac{1}{3} \times \bar{1}.9717$$
$$= (\bar{1}.9717) \div 3$$
$$= (-1 + 0.9717) \div 3$$
$$= (-3 + 2 + 0.9717) \div 3$$
$$= (-3 + 2.9717) \div 3$$
$$= -1 + 0.9906$$
$$= \bar{1}.9906$$
$$\therefore \quad P = \text{antilog } \bar{1}.9906$$
$$= 0.9786$$

சுட்டி வடிவத்தில் சுருக்கல்

$$\sqrt[3]{0.9371} = 0.9371^{\frac{1}{3}}$$
$$= \left(10^{\bar{1}.9717}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$= 10^{\bar{1}.9717 \times \frac{1}{3}}$$
$$= 10^{\bar{1}.9906}$$
$$= 9.786 \times 10^{-1}$$
$$= 0.9786$$

c. $P = \sqrt[3]{0.0549}$ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது
$$\begin{aligned} \lg P &= \lg 0.0549^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{3} \lg 0.0549 \\ &= \frac{1}{3} \times \bar{2}.7396 \\ &= (\bar{2}.7396) \div 3 \\ &= (-2 + 0.7396) \div 3 \\ &= (-3 + 1 + 0.7396) \div 3 \\ &= (-3 + 1.7396) \div 3 \\ &= -1 + 0.5799 \\ &= \bar{1}.5799 \\ \therefore P &= \text{antilog } \bar{1}.5799 \\ &= 0.3801 \end{aligned}$$

சுட்டி வடிவத்தில் சுருக்கல்

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{0.0549} &= 0.0549^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(10^{\bar{2}.7396}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= 10^{\bar{2}.7396 \times \frac{1}{3}} \\ &= 10^{\bar{1}.5799} \\ &= 3.801 \times 10^{-1} \\ &= 0.3801 \end{aligned}$$

இப்போது பின்வரும் பயிற்சியைச் செய்க.

பயிற்சி 3.6

1. மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திப் பெறுமானங் காண்க.

a. $(5.97)^2$ **b.** $(27.85)^3$ **c.** $(82.1)^3$

d. $(0.752)^2$ **e.** $(0.9812)^3$ **f.** $(0.0593)^2$

2. மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திப் பெறுமானங் காண்க.

a. $\sqrt{25.1}$ **b.** $\sqrt{947.5}$ **c.** $\sqrt{0.0714}$

d. $\sqrt[3]{0.00913}$ **e.** $\sqrt[3]{0.7519}$ **f.** $\sqrt{0.999}$

3.7 வலுவும் மூலமும் இடம் பெறும் கோவைகளை மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திச் சுருக்கல்

வலு, மூலம், பெருக்கல், வகுத்தல் என்னும் கணிதச் செய்கைகள் எல்லாம் (அல்லது சில) இடம்பெறும் ஒரு கோவையை மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திச் சுருக்கும் விதம் பின்வரும் உதாரணத்தில் காணப்படுகின்றது.

உதாரணம் 1

சுருக்குக. விடையைக் கிட்டிய முதலாம் தசமதானத்திற்கு எழுதுக.

a. $\dfrac{7.543 \times 0.987^2}{\sqrt{0.875}}$ **b.** $\dfrac{\sqrt{0.4537} \times 75.4}{0.987^2}$

a. $P = \dfrac{7.543 \times 0.987^2}{\sqrt{0.875}}$ எனக் கொள்வோம்.

$$
\begin{aligned}
\text{அப்போது } \lg P &= \lg\left(\frac{7.543 \times 0.987^2}{\sqrt{0.875}}\right)\\
&= \lg 7.543 + \lg 0.987^2 - \lg 0.875^{\frac{1}{2}}\\
&= \lg 7.543 + 2 \lg 0.987 - \frac{1}{2} \times \bar{1}.9420\\
&= 0.8776 + 2 \times \bar{1}.9943 - \frac{\bar{2} + 1.9420}{2}\\
&= 0.8776 + \bar{1}.9886 - (\bar{1} + 0.9710)\\
&= 0.8776 + \bar{1}.9886 - \bar{1}.9710\\
&= 0.8662 - \bar{1}.9710\\
&= 0.8952\\
\therefore P &= \text{antilog } 0.8952\\
&= 7.855
\end{aligned}
$$

$\therefore \dfrac{7.543 \times 0.987^2}{\sqrt{0.875}} \approx 7.9$ (கிட்டிய முதலாம் தசமதானதிற்கு)

சுட்டி வடிவத்தில் சுருக்கல்

$$
\begin{aligned}
\frac{7.543 \times 0.987^2}{\sqrt{0.875}} &= \frac{7.543 \times 0.987^2}{0.875^{\frac{1}{2}}}\\
&= \frac{10^{0.8776} \times \left(10^{\bar{1}.9943}\right)^2}{\left(10^{\bar{1}.9420}\right)^{\frac{1}{2}}}\\
&= \frac{10^{0.8776} \times 10^{\bar{1}.9886}}{10^{\bar{1}.9710}}\\
&= \frac{10^{0.8662}}{10^{\bar{1}.9710}}\\
&= 10^{0.8662 - \bar{1}.9710}\\
&= 10^{0.8952}
\end{aligned}
$$

$$= 7.855 \times 10^{0}$$
$$= 7.855$$
$$\approx 7.9$$

b. $P = \dfrac{\sqrt{0.4537} \times 75.4}{0.987^2}$ எனக் கொள்வோம்.

$$\begin{aligned}
\lg P &= \lg \left(\frac{0.4537^{\frac{1}{2}} \times 75.4}{0.987^2} \right) \\
&= \lg\ 0.4537^{\frac{1}{2}} + \lg 75.4 - \lg 0.987^2 \\
&= \frac{1}{2} \lg 0.4537 + \lg 75.4 - 2 \lg 0.987 \\
&= \frac{1}{2} \times \bar{1}.6568 + 1.8774 - 2 \times \bar{1}.9943 \\
&= \bar{1}.8284 + 1.8774 - \bar{1}.9886 \\
&= 1.7058 - \bar{1}.9886 \\
&= 1.7172 \\
P &= \text{antilog } 1.7172 \\
&\approx 52.15
\end{aligned}$$

$\dfrac{\sqrt{0.4537} \times 75.4}{0.987^2} = 52.2$ (கிட்டிய முதலாவது தசம தானத்திற்கு)

சுட்டி வடிவத்தில் சுருக்கல்

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{0.4537} \times 75.4}{0.987^2} &= \left(\frac{0.4537^{\frac{1}{2}} \times 75.4}{0.987^2} \right) \\
&= \frac{\left(10^{\bar{1}.6568}\right)^{\frac{1}{2}} \times 10^{1.8774}}{\left(10^{\bar{1}.9943}\right)^{2}} \\
&= \frac{10^{\bar{1}.8284} \times 10^{1.8774}}{10^{\bar{1}.9886}} \\
&= 10^{1.7058 - \bar{1}.9886} \\
&= 10^{1.7172} \\
&= 52.15 \\
&\approx 52.2
\end{aligned}$$

பயிற்சி 3.7

1. மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

a. $\dfrac{8.765 \times \sqrt[3]{27.03}}{24.51}$ **b.** $\dfrac{\sqrt{9.18} \times 8.02^2}{9.83}$ **c.** $\dfrac{\sqrt{0.0945} \times 4.821^2}{48.15}$

d. $\dfrac{3 \times 0.752^2}{\sqrt{17.96}}$ **e.** $\dfrac{6.591 \times \sqrt[3]{0.0782}}{0.9821^2}$ **f.** $\dfrac{3.251 \times \sqrt[3]{0.0234}}{0.8915}$

3.8 மடக்கை அட்டவணையின் பயன்பாடு

எண்களைப் பெருக்கலும் வகுத்தலும் இடம்பெறும் பெரும்பாலான பிரசினங்களைச் சுருக்கல் மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம் எளிதாக்கப்படும் அத்தகைய ஓர் உதாரணம் கீழே காணப்படுகின்றது.

உதாரணம் 1

ஒரு கோளத்தின் கனவளவு V ஆனது சூத்திரம் $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ இனால் தரப்பட்டுள்ளது. இங்கு $\pi = 3.142$, $r = 0.64$ cm எனின், மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திக் கோளத்தின் கனவளவைக் கிட்டிய முதலாம் தசம தானத்திற்குக் காண்க.

$$\begin{aligned}
V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\
&= \frac{4}{3} \times 3.142 \times 0.64^3 \\
\lg V &= \lg\left(\frac{4}{3} \times 3.142 \times 0.64^3\right) \\
&= \lg 4 + \lg 3.142 + 3 \lg 0.64 - \lg 3 \\
&= 0.6021 + 0.4972 + 3 \times \bar{1}.8062 - 0.4771 \\
&= 0.6021 + 0.4972 + \bar{1}.4186 - 0.4771 \\
&= 0.5179 - 0.4771 \\
&= 0.0408 \\
\therefore \quad V &= \text{antilog } 0.0408 \\
&= 1.098 \\
&\approx 1.1 \quad (\text{முதலாந் தசம தானத்திற்கு})
\end{aligned}$$

$\therefore$ கோளத்தின் கனவளவு 1.1 cm^3 ஆகும்.

மேற்குறித்தவாறு மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திப் பெருக்கலும் வகுத்தலும் இடம்பெறும் கோவைகளை எளிதாகச் சுருக்கலாம் என்பதை அறிந்து கொண்டீர்கள். அத்தகைய சில பிரசினங்கள் பின்வரும் பயிற்சியில் இடம்பெறுகின்றன.

பயிற்சி 3.8

1. 1 கன சென்ரிமீற்றர் இரும்பின் திணிவு 7.76 g ஆகும். நீளம், அகலம், தடிப்பு ஆகியன முறையே 5.4 m, 0.36 m, 0.22 m ஆகவுள்ள ஒரு கனவுரு இரும்பு வளையின் திணிவைக் கிட்டிய kg இற்குக் காண்க.

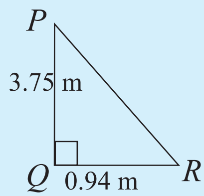
2. சூத்திரம் $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$ இல் $\pi = 3.142$, $l = 1.75$, $T = 7.5$ எனின், g யின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

3. 0.75 m ஆரையுள்ள ஒரு மெல்லிய வட்ட உலோகத் தகட்டிலிருந்து 0.07 m ஆரையுள்ள ஒரு வட்டப் பகுதி வெட்டி நீக்கப்பட்டுள்ளது.

(i) மீதிப் பகுதியின் பரப்பளவை $\pi \times 0.82 \times 0.68$ எனக் காட்டுக.

(ii) $\pi = 3.142$ எனக் கொண்டு எஞ்சிய பகுதியின் பரப்பளவை மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

4. ஒரு செங்கோண முக்கோண நிலப் பகுதி உருவில் காணப் படுகின்றது. அதில் செங்கோணத்தை உள்ளடக்கிய பக்கங் களின் நீளங்கள் 3.75 m , 0.94 m எனின், PR இன் நீளத்தைக் கிட்டிய மீற்றருக்குக் காண்க.



3.9 கணிகருவியின் பயன்பாடுகள்

நெடுங்காலமாகச் சிக்கலான கணிப்புகளுக்கு மடக்கைகள் பயன்படுத்தப்பட்டன. எனினும் இன்று அப்பணி பெரும்பாலும் கணிகருவியினால் (calculator) மேற்கொள்ளப்படுகின்றது. சாதாரண கணிகருவியைப் பயன்படுத்திச் செய்யத்தக்க கணிப்புகள் மட்டுப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. சிக்கலான கணிப்புகளுக்கு விஞ்ஞானக் கணிகருவி பயன்படுத்தப்படுகின்றது. விஞ்ஞானக் கணிகருவியின் சாவிப்பலகை சாதாரண கணிகருவியிலும் பார்க்கச் சிக்கலானது.

கணிகருவியின் மூலம் வலுவின் பெறுமானத்தைப் பெறுதல்

521^3 இன் பெறுமானம் கணிகருவியின் மூலம் $521 \times 521 \times 521$ எனச் சாவிப் பலகையைத் தொழிற்படுத்துவதன் மூலம் பெறப்படுகின்றது. எனினும் விஞ்ஞானக் கணிகருவியின் மூலம் x^n வலுவைக் காட்டும் சாவியைப் பயன்படுத்தி $\boxed{x}$, $\boxed{\wedge}$, $\boxed{n}$ என்னும் சாவிகளைத் தொழிற்படுத்துவதன் மூலம் எளிதாக ஒரே தடவையில் 521^3 இன் பெறுமானதைக் காணலாம்.

உதாரணம் 1

275^3 இன் பெறுமானத்தைக் கணிகருவியின் மூலம் காண்க. காண்பதற்குத் தொழிற்படுத்தும் சாவிகளை முறையே பாய்ச்சற் கோட்டுப் படத்திற் காட்டுக.

$\boxed{2}\ \boxed{7}\ \boxed{5}\ \boxed{x^n}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$ அல்லது $\boxed{2}\ \boxed{7}\ \boxed{5}\ \boxed{\wedge}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$ 20 796 875

கணிகருவியைப் பயன்படுத்தி மூலத்தின் பெறுமானத்தைப் பெறுதல்

சாவிப் பலகையின் $\boxed{\text{shift}}$ சாவி மூலத்தைப் பெற அவசியமானதாகும். அதற்கு மேலதிகமாக $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$ சாவியையும் $\boxed{n}$ சாவியையும் தொழிற்படுத்த வேண்டும்.

உதாரணம் 1

$\sqrt[4]{2313\,441}$ பெறுமானத்தைக் கணிகருவியின் மூலம் பெறுவற்குத் தொழிற்படுத்தப்படும் சாவிகளை முறையே பாய்ச்சற் கோட்டுப் படத்திற் காட்டுக.

$\boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{4}\ \boxed{1}\ \boxed{\text{shift}}\ \boxed{x^n}\ \boxed{4}\ \boxed{=}$

அல்லது

$\boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{4}\ \boxed{1}\ \boxed{x^{1/n}}\ \boxed{4}\ \boxed{=}$ 39

அல்லது

$\boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{4}\ \boxed{1}\ \boxed{\sqrt[n]{x}}\ \boxed{4}\ \boxed{=}$

வலுவும் மூலமும் இடம்பெறும் கோவையைச் சுருக்குவதற்குக் கணிகருவியைப் பயன்படுத்தல்

$\dfrac{5.21^3 \times \sqrt[3]{4.3}}{3275}$ இன் பெறுமானத்தைப் பெறுவதற்கு விஞ்ஞானக் கணிகருவியில் தொழிற்படுத்தப்படும் சாவிகளை முறையே பாய்ச்சற் கோட்டுப் படத்தில் காட்டுக.

$\boxed{5}\ \boxed{.}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{x^n}\ \boxed{3}\ \boxed{\times}\ \boxed{4}\ \boxed{.}\ \boxed{3}\ \boxed{x^{1/n}}\ \boxed{3}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{7}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$ 0.070219546

பயிற்சி 3.9

1. பின்வரும் பெறுமானங்கள் ஒவ்வொன்றையும் கணிப்பதற்கு விஞ்ஞானக் கணிகருவியில் தொழிற்படுத்தப்படும் சாவிகளை முறையே பாய்ச்சற் கோட்டுப்படத்தில் காட்டுக.

a. 952^2

b. $\sqrt{475}$

c. 5.85^3

d. $\sqrt[3]{275.1}$

e. $375^2 \times \sqrt{52}$

f. $\sqrt{4229} \times 352^2$

g. $\dfrac{37^2 \times 853}{\sqrt{50}}$

h. $\dfrac{\sqrt{751} \times 85^2}{\sqrt[3]{36}}$

i. $\dfrac{\sqrt{1452} \times 38.75}{98.2}$

j. $\dfrac{\sqrt[3]{827.3} \times 5.41^2}{9.74}$

பலவினப் பயிற்சி

1. மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திச் சுருக்குக. விடையின் செம்மையைக் கணிகருவியின் மூலம் வாய்ப்புப் பார்க்க.

(i) $\dfrac{1}{275.2}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{982.1}}$ (iii) $\dfrac{1}{\sqrt{0.954}}$ (iv) $0.5678^{\frac{1}{3}}$

(v) $0.785^2 - 0.0072^2$ (vi) $9.84^2 + 51.2^2$

2. $a = 0.8732$, $b = 3.168$ ஆக இருக்கும்போது

(i) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

(ii) $(ab)^2$

ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

3. சூத்திரம் $A = p\ (1 + \dfrac{r}{100}\ )^n$ இல் $p = 675$, $r = 3.5$, $n = 3$ ஆக இருக்கும்போது A இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

4. ஒரு மெல்லிய வட்ட உலோகத் தகட்டிலிருந்து மையக் கோணம் 73° ஆகவுள்ள ஓர் ஆரைச்சிறை வெட்டி நீக்கப்பட்டுள்ளது.

(i) ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவு வட்டத்தின் பரப்பளவின் என்ன பின்னமாகும்?

(ii) வட்டத் தகட்டின் ஆரை 17.8 cm எனின், ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவைக் காண்க.

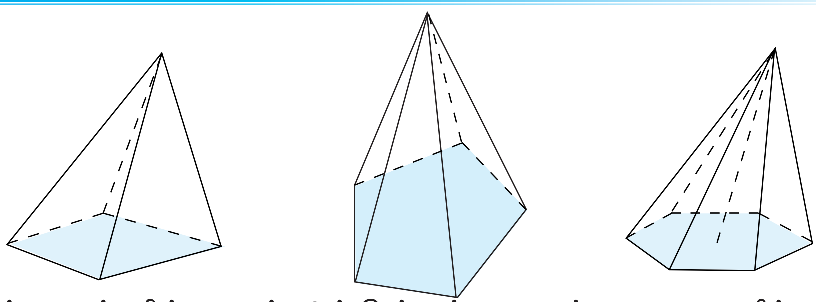
4 திண்மங்களின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- ஒரு செங்கூம்பகத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் கணிப்பதற்கும்
- ஒரு செங்கூம்பின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் கணிப்பதற்கும்
- ஒரு கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் கணிப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

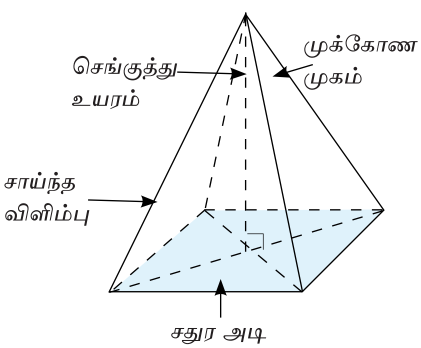
கூம்பகம்



மேற்குறித்த உருக்களில் காணப்படும் திண்மங்களை நன்றாக அவதானிக்க. அவற்றின் முகங்களாகப் பல்கோணிகள் உள்ளன. இம்முகங்களில் ஒன்றைத் தவிர மற்றையவை முக்கோண வடிவமானவை ஆகும். முக்கோண வடிவமல்லாத முகம் கூம்பகத்தின் அடி எனப்படும். அடியாக அமையாத முகங்கள் எல்லாம் முக்கோணிகள் ஆகும். அம்முக்கோண முகங்கள் எல்லாவற்றுக்கும் பொதுவான ஒரு புள்ளி இருக்கும் அதே வேளை அப்பொதுப் புள்ளி உச்சி எனப்படும். இவ்வியல்புகளை உடைய திண்மம் **கூம்பகம்** எனப்படும்.

உருவில் உள்ள மூன்று கூம்பகங்களினதும் அடிகள் முறையே நாற்பக்கல், ஐங்கோணி, அறுகோணி ஆகும்.

அடி சதுரமாகவுள்ள செங்கூம்பகம்



உருவில் காணப்படும் கூம்பகத்தின் அடி சதுரம் ஆகும். எஞ்சியுள்ள நான்கு முகங்களும் முக்கோணிகள் ஆகும்.
சதுர அடியின் நடுப்புள்ளியை (அதாவது சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் இடைவெட்டும் புள்ளி) கூம்பகத்தின் உச்சியுடன் தொடுக்கும் கோட்டுத் துண்டம் அடிக்குச் செங்குத்தானது எனின், அப்போது இக்கூம்பகம் **சதுரச் செங்கூம்பகம்** எனப்படும். அக்கோட்டுத் துண்டத்தின் நீளம் செங்குத்து உயரம்

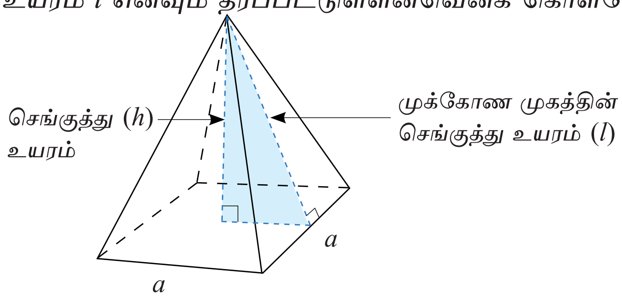
(அல்லது மேலும் எளிதாக உயரம்) எனப்படும். அடியின் பக்கங்களாக அமையாத விளிம்புகள் சாய்ந்த விளிம்புகள் எனப்படும். நாம் இப்பாடத்தில் சதுரக் கூம்பகத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காணல் பற்றி மாத்திரம் கருதுவோம்.

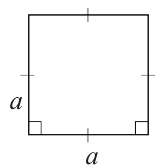
குறிப்பு: நான்முகியையும் கூம்பகமாகக் கருதலாம். இங்கு சகல முகங்களும் முக்கோண வடிவமானவை ஒரு நான்முகியின் அடியாக எந்தவொரு முகத்தையும் கருதலாம். செங்கூம்பகம் என்பது அடி சதுரமாக அமையாத போதும் கூம்பகமாக வரையறுக்கப்படலாம். ஓர் உதாரணமாக அடி எந்த ஒழுங்கான பல்கோணி வடிவத்தையும் எடுக்கும்போது செங்கூம்பகம் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும். அவ்வொழுங்கான பல்கோணியின் சமச்சீர்க் கோடுகள் எல்லாம் செல்லும் ஒரு பொதுப் புள்ளி இருக்கும் அதே வேளை அப்பொதுப் புள்ளியைக் கூம்பகத்தின் உச்சியுடன் தொடுக்கும் கோட்டுத் துண்டம் அடிக்குச் செங்குத்தானதெனின், அக்கூம்பகம் **செங்கூம்பகம்** எனப்படும். அடி ஒழுங்கான பல்கோணி வடிவத்தை எடுக்கும்போது அந்த அடியின் நடுவாக அப்பல்கோணியின் மையப்போலியை எடுக்கலாம். கணிதத்தை மேல் வகுப்புகளில் கற்கும்போது மையப்போலி பற்றிய எண்ணக்கருவை கற்பீர்கள்.

சதுரச் செங்கூம்பகத்தில் எல்லா முக்கோண முகங்களும் ஒருங்கிசைதல் ஒரு முக்கிய இயல்பாகும். ஆகவே அம்முக்கோணிகளின் பரப்பளவுகளும் சமம். மேலும் இம்முக்கோணிகள் இருசமபக்க முக்கோணிகள் ஆகும்.
அதாவது, அம்முக்கோண முகங்கள் எல்லாவற்றினதும் ஒரு பக்கம் சதுர அடியின் ஒரு பக்கமாக இருக்கும் அதே வேளை இரு எஞ்சிய பக்கங்களும் நீளத்தில் சமம்.

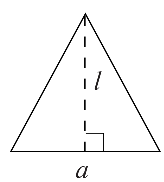
4.1 அடி சதுரமாக உள்ள செங்கூம்பகத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு

அடி சதுரமாக உள்ள ஒரு செங்கூம்பகத்தின் அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளத்தையும் ஒரு முக்கோண முகத்தின் செங்குத்து உயரத்தையும் கொண்டு அதன் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்பதற்கு அடியின் பரப்பளவையும் நான்கு முக்கோண முகங்களின் பரப்பளவுகளையும் கண்டு அவை எல்லாவற்றினதும் கூட்டுத்தொகையை எடுத்தல் வேண்டும். சதுர அடியின் ஒரு பக்க நீளமும் செங்குத்து உயரமும் தரப்படும்போது அதன் மேற்பரப்பளவைக் காண்பதில் கவனம் செலுத்துவோம்.
சதுர அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் a எனவும் ஒரு முக்கோண முகத்தின் செங்குத்து உயரம் l எனவும் தரப்பட்டுள்ளனவெனக் கொள்வோம்.





சதுர வடிவான அடி



4 முக்கோண முகங்கள்

இதற்கேற்ப மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவைப் பின்வருமாறு காணலாம்.

$$\left.\begin{array}{l}\text{சதுரக் கூம்பகத்தின்}\\ \text{மொத்த மேற்பரப்பின்}\\ \text{பரப்பளவு}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{சதுர அடியின்}\\ \text{பரப்பளவு}\end{array}\right\} + 4 \times \left\{\begin{array}{c}\text{முக்கோண}\\ \text{முகத்தின்}\\ \text{பரப்பளவு}\end{array}\right\}$$

$$= a \times a + 4 \times \frac{1}{2} a \times l$$

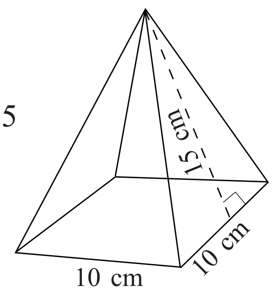
$$= a^2 + 2al$$

$$\boxed{A = \boldsymbol{a^2 + 2al}}$$

சதுரச் செங்கூம்பகம் ஒன்றின் மேற்பரப்பளவு தொடர்பான சில பிரசினங்களில் இப்போது எமது கவனத்தைச் செலுத்துவோம்.

உதாரணம் 1

சதுர அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 10 cm ஆகவும் முக்கோண முகத்தின் செங்குத்து உயரம் 15 cm ஆகவும் உள்ள ஒரு சதுரச் செங்கூம்பகத்தின் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவைச் சதுர சென்ரிமீற்றரில் காண்க.



அடியின் பரப்பளவு $= 10 \times 10$

$= 100$

ஒரு முக்கோண முகத்தின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times 10 \times 15$

$= 75$

எல்லா முக்கோண முகங்களினதும் பரப்பளவு $= 75 \times 4$

$= 300$

மொத்தப் பரப்பளவு $= 100 + 300$

$= 400$

$\therefore$ மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு 400 cm^2 ஆகும்.

உதாரணம் 2

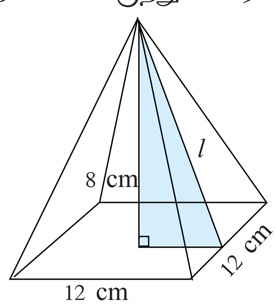
உருவில் காணப்படும் செங்கூம்பகத்தின் சதுர அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 12 cm ஆக இருக்கும் அதே வேளை செங்கூம்பகத்தின் செங்குத்து உயரம் 8 cm ஆகும்.

(i) ஒரு முக்கோண முகத்தின் செங்குத்து உயரம்

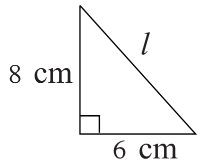
(ii) ஒரு முக்கோண முகத்தின் பரப்பளவு

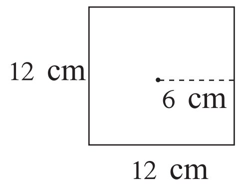
(iii) மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு

ஆகியவற்றைக் காண்க.



ஒரு முக்கோண முகத்தின் செங்குத்து உயரம் l cm எனக் கொள்வோம். தரப்பட்டுள்ள உருவில் நிழற்றப்பட்டுள்ள முக்கோணியைக் கருதுவோம். பைதகரசின் தேற்றத்திற்கேற்ப





(i) $l^2 = 8^2 + 6^2$

$= 64 + 36$

$= 100$

$\therefore\ l = \sqrt{100}$

$= 10$

$\therefore$ ஒரு முக்கோண முகத்தின் செங்குத்து உயரம் 10 cm ஆகும்.

(ii) ஒரு முக்கோண முகத்தின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times 12 \times 10$

$= 60$

$\therefore$ முக்கோண முகத்தின் பரப்பளவு 60 cm^2 ஆகும்.

(iii) மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $= 12 \times 12 + 4 \times 60$

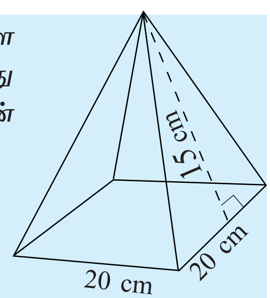
$= 144 + 240$

$= 384$

$\therefore$ மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு 384 cm^2 ஆகும்.

பயிற்சி 4.1

1. சதுர அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 20 cm ஆகவுள்ள செங்கூம்பகம் ஒன்றின் ஒரு முக்கோண முகத்தின் செங்குத்து உயரம் 15 cm எனின், கூம்பகத்தின் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.



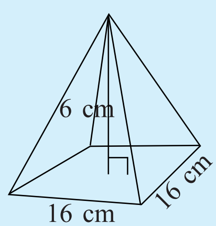
2. சதுர அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 8 cm ஆகவுள்ள செங்கூம்பகம் ஒன்றின் ஒரு முக்கோண மேற்பரப்பின் செங்குத்து உயரம் 20 cm எனின் கூம்பகத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.

3. சதுர அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 16 cm ஆகவுள்ள செங்கூம்பகம் ஒன்றின் செங்குத்து உயரம் 6 cm ஆகும்.

(i) ஒரு முக்கோண முகத்தின் செங்குத்து உயரம்

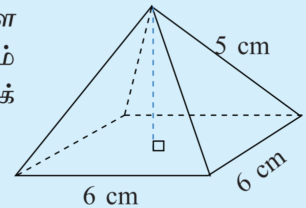
(ii) கூம்பகத்தின் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு

ஆகியவற்றைக் காண்க.



4. சதுர அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 20 cm ஆகவும் ஒரு செங்கூம்பகத்தின் செங்குத்து உயரம் 12 cm ஆகவும் இருப்பின், கூம்பகத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.

5. சதுர அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 6 cm ஆகவுள்ள செங்கூம்பகம் ஒன்றின் ஒரு சாய்ந்த விளிம்பின் நீளம் 5 cm எனின் கூம்பகத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.



6. சதுர அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 10 cm ஆகவுள்ள ஒரு சதுர அடியை உடைய செங்கூம்பகம் ஒன்றின் சாய்ந்த விளிம்பின் நீளம் 13 cm எனின் அதன் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.

7. ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 30 cm ஆகவுள்ள ஒரு சதுர அடியைக் கொண்ட செங்கூம்பகம் ஒன்றின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு 2 400 cm^2 ஆகும்.

(i) அதன் உச்சியிலிருந்து அடியின் ஒரு பக்கத்திற்கு உள்ள செங்குத்துத் தூரம்

(ii) கூம்பகத்தின் செங்குத்து உயரம்

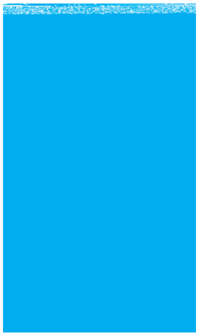
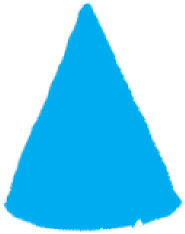
ஆகியவற்றைக் காண்க.

8. ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 8 m ஆகவுள்ள ஒரு சதுர அடியைக் கொண்ட செங்கூம்பகக் கூடாரம் ஒன்று செய்யப்பட்டுள்ள துணியின் பரப்பளவு 80 m^2 ஆகும். கூடாரத்தின் அடிக்குத் துணி பயன்படுத்தப்படவில்லை எனக் கொண்டு கூடாரத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

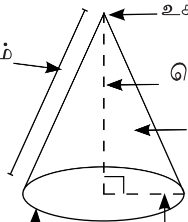
9. செங்குத்து உயரம் 4 m ஆகவும் ஒரு முக்கோண முகத்தின் செங்குத்து உயரம் 5 m ஆகவும் உள்ள சதுர அடியைக் கொண்ட ஒரு கூடாரத்தின் கூரைக்கும் அடிக்கும் துணியை விரிப்பதற்கு உத்தேசிக்கப்பட்டிருப்பின், தேவையான மொத்தத் துணியின் பரப்பளவைக் காண்க.

10. சதுர அடியின் ஒரு பக்க நீளம் 16 m ஆகவும் செங்குத்து உயரம் 6 m ஆகவும் விளிம்பின் நீளம் 5 m ஆகவும் இருக்குமாறு சதுரச் செங்கூம்பகக் கூடாரம் ஒன்றைச் அமைக்க வேண்டியுள்ளது. இதன் அடியையும் மறைக்கத்தக்கதாகக் கூடாரத்தை அமைப்பதற்குத் தேவையான துணியின் பரப்பளவைக் காண்க.

கூம்பு

கூம்பு வடிவமுள்ள சில பொருள்கள் மேலே காணப்படுகின்றன. ஒரு கூம்புக்கு வட்டத் தளப் பரப்பு ஒன்றும் வளைபரப்பு ஒன்றும் இருப்பதை அவதானிக்கலாம். வட்டத் தளப் பரப்பு கூம்பின் அடி எனவும் வளைபரப்பின் மீது வரையப்பட்டுள்ள எல்லா நேர்கோடுகளும் செல்லும் புள்ளி கூம்பின் உச்சி எனவும் அழைக்கப்படும்.



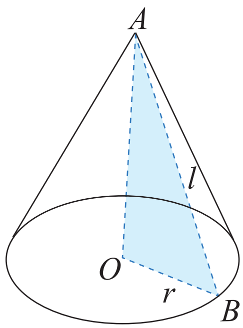
ஒரு கூம்பின் வட்ட அடியின் மையத்தை உச்சியுடன் இணைக்கும்போது கிடைக்கும் கோட்டுத் துண்டம் அடிக்குச் செங்குத்தானதெனின், அது **செவ்வட்டக் கூம்பு** எனப்படும். ஒரு கூம்பின் வட்ட அடியின் ஆரை கூம்பின் ஆரை எனவும் அடி வட்டத்தின் மையத்திற்கும் உச்சிக்குமிடையே உள்ள தூரம் கூம்பின் செங்குத்து உயரம் எனவும் அழைக்கப்படும். மேலும் கூம்பின் உச்சிக்கும் அடி வட்டத்தின் பரிதி மீது உள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளிக்குமிடையே உள்ள நேர்கோட்டுத் துண்டம் சாய்ந்த விளிம்பு எனவும் அக்கோட்டுத் துண்டத்தின் நீளம் கூம்பின் சாயுயரம் எனவும் அழைக்கப்படும்.

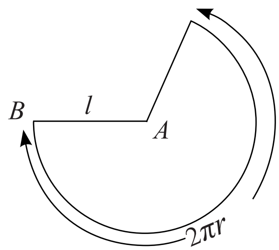
ஒரு கூம்பின் ஆரை r இனாலும் செங்குத்து உயரம் h இனாலும் சாயுயரம் l இனாலும் பொதுவாகக் காட்டப்படும்.

4.2 செவ்வட்டக் கூம்பின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு

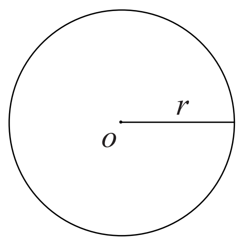
ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்பதற்கான ஒரு முறையை விவரிப்பதற்கு ஒரு மெல்லிய அடரினால் ஆக்கப்பட்ட ஒரு பொட்கூம்பைக் கருதுவோம். முதலில் அது செய்யப்பட்டுள்ள மேற்பரப்புப் பகுதிகளைப் பார்ப்போம். அடி வட்ட வடிவமுள்ள ஒரு தளப் பரப்பாகும். வளைபரப்பை ஒரு சாய்ந்த கோடு வழியே விரிக்கும்போது ஆரைச்சிறை வடிவமுள்ள ஓர் அடராகும்.

ஒரு கூம்பின் ஆரையும் சாயுயரமும் தரப்படும்போது அதன் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்பதற்கு வளைபரப்பின் பரப்பளவையும் வட்ட அடியின் பரப்பளவையும் கண்டு அவற்றின் கூட்டுத்தொகையை எடுக்கலாம். சூத்திரம் πr^2 ஐப் பயன்படுத்தி வட்ட அடியின் பரப்பளவைக் கணிக்கலாம். வளைபரப்பின் பரப்பளவைப் பின்வருமாறு கணிக்கலாம்.





வளைந்த மேற்பரப்புப் பகுதி



வட்ட வடிவ அடி

வளைபரப்பின் பரப்பளவானது அதனை விரிப்பதன் மூலம் பெறப்படும் ஆரைச் சிறையின் பரப்பளவுக்குச் சமம். இந்த ஆரைச்சிறையின் ஆரை l ஆகும். அதன் வில்லின் நீளம் $2\pi r$ ஆகும். (ஏனெனில் அவ்வில்லின் நீளம் அடி வட்டத்தின் பரிதியாகும்). இப்போது இந்த ஆரைச்சிறையின் மையக் கோணம் (தரம் 10 இல் ஆரைச்சிறையின் சுற்றளவின் கீழ் கற்றவாறு) $\dfrac{360r}{l}$ ஆகும்.

இம்மையக் கோணமுள்ள ஓர் ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவு (தரம் 10 இல் ஆரைச் சிறையின் பரப்பளவின் கீழ் கற்றவாறு) $\dfrac{\pi l^2}{360} \times \dfrac{360r}{l}$ ஆகும். இதனைச் சுருக்கும்போது πrl கிடைக்கும். ஆகவே கூம்பின் வளைபரப்பின் பரப்பளவு πrl ஆகும். இதற்கேற்ப

$$\text{செவ்வட்டக் கூம்பின் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு} = \left\{\text{கூம்பின் வளை பரப்பின் பரப்பளவு}\right\} + \left\{\text{வட்ட அடியின் பரப்பளவு}\right\}$$

$$= \pi rl + \pi r^2$$

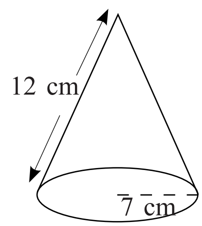
$$\boxed{A = \pi rl + \pi r^2}$$

ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு தொடர்பாகத் தீர்க்கப்பட்ட சில பிரசினங்கள் பற்றி இப்போது எமது கவனத்தைச் செலுத்துவோம்.

இங்கு π இன் பெறுமானம் $\frac{22}{7}$ எனக் கொள்க.

உதாரணம் 1

ஒரு திண்மச் செவ்வட்டக் கூம்பின் வரிப்படம் கீழே காணப்படுகின்றது. அதன் ஆரை 7 cm ஆகவும் சாயுயரம் 12 cm ஆகவும் இருப்பின், கூம்பின் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவைச் சதுர சென்ரிமீற்றரில் காண்க.



கூம்பின் வளைபரப்பின் பரப்பளவு $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 12$

$= 264$

வட்டவடிவத் தளமேற்பரப்பின் பரப்பளவு $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

$= 154$

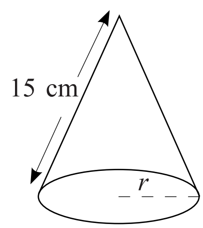
$\therefore$ கூம்பின் மொத்த மேற்பரப்பளவு $= 264 + 154$

$= 418$

$\therefore$ கூம்பின் மேற்பரப்பளவு 418cm^2 ஆகும்.

உதாரணம் 2

வட்ட அடியின் பரிதி 88 cm ஆகவுள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் சாயுயரம் 15 cm எனின், அதன் வளைபரப்பின் பரப்பளவைச் சதுர சென்ரிமீற்றரில் காண்க.



வட்ட அடியின் பரிதி $= 88$

அதற்கேற்ப $2\pi r = 88$

$2 \times \frac{22}{7} \times r = 88$

$r = \frac{88 \times 7}{2 \times 22}$

$r = 14 \text{ cm}$

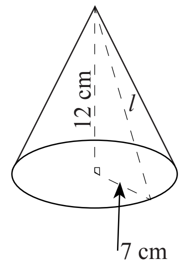
கூம்பின் வளைபரப்பின் பரப்பளவு $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 15$

$= 660$

$\therefore$ கூம்பின் வளைபரப்பின் பரப்பளவு 660 cm^2 ஆகும்.

உதாரணம் 3



ஆரை 7 cm ஆகவும் செங்குத்து உயரம் 12 cm ஆகவும் உள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின்
(i) சாயுயரம்
(ii) வளைபரப்பின் பரப்பளவு
(iii) மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு
ஆகியவற்றை ஒரு தசமதானத்திற்குச் சரியாகக் காண்க.

செவ்வட்டக் கூம்பின் சாயுயரம் l cm எனக் கொள்வோம்.
பைதகரசின் தேற்றத்திற்கேற்ப

(i)
$$l^2 = 7^2 + 12^2$$
$$= 49 + 144$$
$$= 193$$
$$l = \sqrt{193}$$
$= 13.8$ (வர்க்க மூலத்தைக் காண்பதற்கான வகுத்தல் முறையின் மூலம்)

$\therefore$ செவ்வட்டக் கூம்பின் சாயுயரம் அண்ணளவாக 13.8 cm ஆகும்.

(ii) வளைபரப்பின் பரப்பளவு $= \pi rl$
$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 13.8$$
$$= 303.6$$

$\therefore$ வளைபரப்பின் பரப்பளவு 303.6 cm^2 ஆகும்.

(iii) வட்டத்தின் பரப்பளவு $= \pi r^2$
$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$
$$= 154$$

மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $= 303.6 + 154$
$$= 457.6$$

$\therefore$ மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு 457.6 cm^2 ஆகும்.

பயிற்சி 4.2

1. வட்ட அடியின் ஆரை 14 cm ஆகவும் சாயுயரம் 20 cm ஆகவும் உள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் வளைபரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.

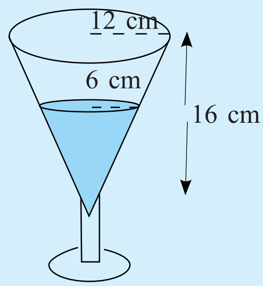
2. வட்ட அடியின் ஆரை 7 cm ஆகவும் உயரம் 24 cm ஆகவும் உள்ள ஒரு திண்மச் செவ்வட்டக் கூம்பின்
(i) சாயுயரம்
(ii) வளைபரப்பின் பரப்பளவு
ஆகியவற்றைக் காண்க.

3. வட்ட அடியின் பரிதி 44 m ஆகவுள்ள ஒரு கூம்பு வடிவ மணற் குவியலின் சாயுயரம் 20 m எனின்
(i) அடியின் ஆரை
(ii) வளைபரப்பின் பரப்பளவு
ஆகியவற்றைக் காண்க.

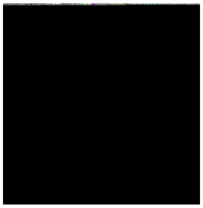
4. வட்ட அடியின் ஆரை 10.5 cm ஆகவும் சாயுயரம் 15 cm ஆகவும் உள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.

5. செவ்வட்டக் கூம்பு வடிவத் திண்மம் ஒன்றின் சாயுயரம் 14 cm ஆகும். அதன் வளைபரப்பின் பரப்பளவு 396 cm^2 எனின்,
(i) கூம்பின் ஆரையைக் கணிக்க.
(ii) செங்குத்து உயரத்தைக் கணிக்க.

6. செவ்வட்டக் கூம்பு வடிவமுள்ள ஒரு மெல்லிய கண்ணாடிப் பாத்திரத்தில் அரைப் பங்குக்குப் பானம் இடப்பட்டுள்ள விதம் உருவில் காணப்படுகின்றது. பாத்திரத்தின் ஆரை 12 cm உம் உயரம் 16 cm உம் ஆகும். பானம் இருக்கும் பகுதியின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க



கோளம்

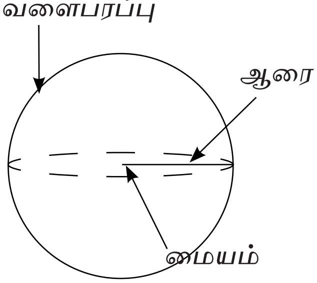


குண்டு

டெனிஸ் பந்து

கால்பந்து

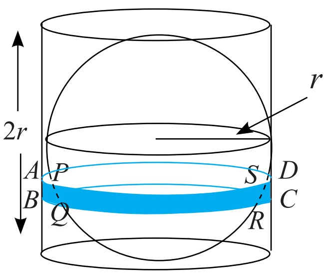
கோளத்தின் பண்புகள் பற்றிய விளக்கம் உங்களிடம் இருக்கும் என்பதில் ஐயமில்லை. கணிதத்தில் ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து மாறாத் தூரத்தில் முப்பரிமாண வெளியில் இருக்கும் புள்ளித் தொடை கோளம் எனப்படும். அந்நிலைத்த புள்ளி கோளத்தின் மையம் எனவும் மாறாத் தூரம் ஆரை எனவும் அழைக்கப்படும். கோளத்திற்கு ஒரு வளைபரப்பு மாத்திரம் இருக்கும் அதே வேளை விளிம்புகளோ உச்சிகளோ இல்லை.



ஒரு கோளத்தின் ஆரை பொதுவாக r இனால் காட்டப்படும்.

4.3 கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு

கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் கணிப்பதற்கு உதவும் ஆக்கிமிடீசினால் அவதானிக்கப்பட்ட ஒரு தோற்றப்பாட்டைப் பின்வருமாறு விவரிக்கலாம்.



கோளத்தின் ஆரைக்குச் சமமான ஆரையையும் கோளத்தின் விட்டத்திற்குச் சமமான உயரத்தையும் கொண்ட ஒரு உருளை அக்கோளத்தின் சுற்றுருளை எனப்படும். அக்கோளம் உருளையினுள்ளே இருக்கும்போது உருளையின் வட்டத் தள முகத்திற்குச் சமாந்தரமாக வெட்டப்பட்ட எவையேனும் இரு வெட்டுகளின் மூலம் கோளத்திலிருந்தும் உருளையிலிருந்தும் வெட்டப்படும் பகுதிகளின் வளைபரப்புகளின் பரப்பளவுகள் சமமெனக் கிறீசில் வாழ்ந்த ஆக்கிமிடீஸ் என்ற கணிதவியலாளர் கி.மு. 225 ஆம் ஆண்டளவில் காட்டினார்.

இதற்கேற்ப மேற்குறித்த உருவில் காணப்படும் கோளத்தின் வளைபரப்பின் பகுதி $PQRS$ இன் பரப்பளவு உருளையின் வளைபரப்பின் பகுதி $ABCD$ இன் பரப்பளவுக்குச் சமம்.

ஆகவே ஆக்கிமிடீஸ் எடுத்துரைத்த மேற்குறித்த தொடர்புடைமைக்கேற்பக் கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு சுற்றுருளையின் வளைபரப்பின் பரப்பளவுக்குச் சமம்.

சுற்றுருளையின் வளைபரப்பின் பரப்பளவைக் காண்பதற்குச் சூத்திரம் $2\pi rh$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது

சுற்றுருளையின் வளைபரப்பின் பரப்பளவு $= 2\pi r \times 2r$

$= 4\pi r^2$

எனவே கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $= 4\pi r^2$

$$\boxed{\boldsymbol{A = 4\pi r^2}}$$

உதாரணம் 1

7 cm ஆரையுள்ள ஒரு கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைச் சதுர சென்ரிமீற்றரில் காண்க.

கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

$= 616$

$\therefore$ கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு 616 cm^2 ஆகும்.

உதாரணம் 2

ஒரு கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு 1386 cm^2 எனின், அதன் ஆரையைக் கணிக்க.

கோளத்தின் ஆரை r cm எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $4\pi r^2 = 1386$

$$4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 1386$$

$$r^2 = \frac{1386 \times 7}{4 \times 22}$$

$$= \frac{441}{4}$$

$$r = \sqrt{\frac{441}{4}}$$

$$= \frac{21}{2}$$

$$= 10.5$$

$\therefore$ கோளத்தின் ஆரை 10.5 cm ஆகும்.

பயிற்சி 4.3

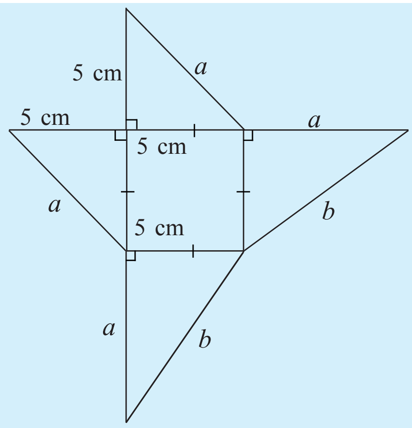
1. 3.5 cm ஆரையுள்ள ஒரு கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.
2. 14 cm ஆரையுள்ள ஒரு கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.
3. மேற்பரப்பின் பரப்பளவு 5544 cm^2 ஆகவுள்ள ஒரு கோளத்தின் ஆரையைக் காண்க.
4. 7 cm ஆரையுள்ள ஒரு பொள் அரைக்கோளத்தின் புற வளைபரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.
5. 0.5 cm விட்டமுள்ள ஒரு திண்ம அரைக்கோளத்தின் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.
6. மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு 1386 cm^2 ஆகவுள்ள ஒரு திண்ம அரைக் கோளத்தின் ஆரையைக் காண்க.

பொழிப்பு

- சதுர அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் $\boldsymbol{a}$ ஆகவும் முக்கோண முகத்தின் செங்குத்து உயரம் $\boldsymbol{l}$ ஆகவும் உள்ள சதுரச் செங்கூம்பத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $\boldsymbol{A = a^2 + 2al}$ இனால் தரப்படும்.
- வட்ட அடியின் ஆரை $\boldsymbol{r}$ ஆகவும் சாய்யுரம் $\boldsymbol{l}$ ஆகவும் உள்ள ஒரு திண்ம செவ்வட்டக் கூம்பின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $\boldsymbol{A = \pi rl + \pi r^2}$ இனால் தரப்படும்.
- ஆரை $\boldsymbol{r}$ ஆகவுள்ள ஒரு கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $\boldsymbol{A = 4\pi r^2}$ இனால் தரப்படும்.

பலவினப் பயிற்சி

1. ஒரு கூம்பகத்தைத் தயாரிப்பதற்குப் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள மாதிரியுரு கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

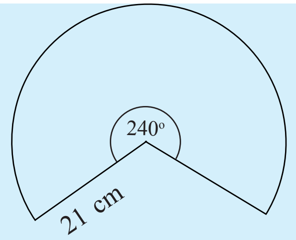


   (i) இங்கு a, b என்பவற்றின் மூலம் தரப்பட்டுள்ள பெறுமானங்களைக் கணிக்க.

   (ii) இம்மாதிரியுருவைப் பயன்படுத்திச் செய்யப்படும் கூம்பகம் ஒரு செங்கூம்பகமாக இல்லாதிருப்பதற்கான காரணம் யாது ?

   (iii) கூம்பகத்தின் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.

2. உலோகத்தகட்டிலிருந்து வெட்டியெடுக்கப்பட்ட ஆரைச்சிறையைப் பயன்படுத்தி செவ்வட்டக் கூம்பு ஒன்று தயாரிக்கப்பட்டது.



(i) உலோகத்தகட்டிலிருந்து வெட்டி எடுக்கப்பட்ட அடிவட்டம் பொருத்தப்பட்டது. அதன் ஆரையைக் காண்க.

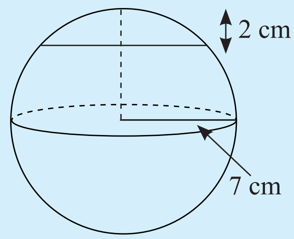
(ii) அதன் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.

3. ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் சாயுயரம், செங்குத்துயரம் என்பவற்றுகிடையிலான விகிதம் 5 : 4 ஆகும். அதன் அடியின் ஆரை 6 cm ஆயின்,

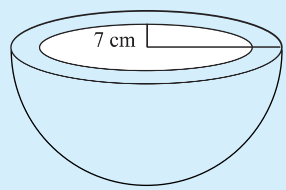
(i) செவ்வட்டக் கூம்பின் சாயுயரத்தைக் காண்க.

(ii) செவ்வட்டக் கூம்பின் வளைமேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.

4. 7 cm ஆரையை உடைய ஒரு கோளத்தின் மேல் மூலையிலிருந்து 2 cm வரை கீழ்நோக்கி நிறப் பூச்சு பூசப்பட்டுள்ளதாயின், நிறப் பூச்சு பூசப்பட்டுள்ள பகுதியின் பரப்பளவைக் கணிக்க. (உதவி சுற்றுருளை பற்றிய அறிவைப் பயன்படுத்துக.)



5. அரைக்கோள வடிவான ஒரு களிமண் பாத்திரத்தின் உள் ஆரை 7 cm உம் வெளி ஆரை 7.7 cm உம் ஆயின் பாத்திரத்தின் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.



5 திண்மங்களின் கனவளவு

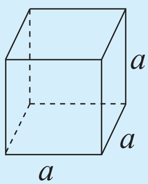
இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- அடி சதுரமாக உள்ள செங்கூம்பகம், செவ்வட்டக் கூம்பு, திண்மக் கோளம் என்பவற்றின் கனவளவைக் காண்பதற்குத்

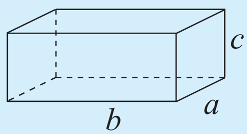
தேவையான ஆற்றலைப் பெறுவீர்கள்.

மீட்டற் பயிற்சி

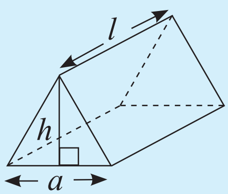
1. முன்னர் நீங்கள் கற்ற சில திண்மங்களின் வரிப்படங்கள் கீழே காணப்படுகின்றன. அவற்றின் கனவளவைக் கணித்த விதத்தை நினைவுகூர்ந்து தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.



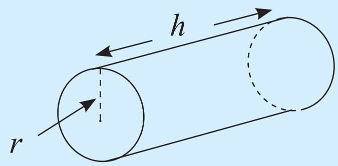
சதுரமுகி



கனவுரு



முக்கோண அரியம்



உருளை

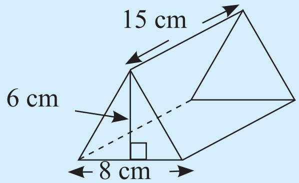
பொருள்	குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவு	கனவளவு
சதுரமுகி		
கனவுரு		
முக்கோண அரியம்		
உருளை		

2. ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 10 cm ஆகவுள்ள ஒரு சதுரமுகியின் கனவளவைக் கணிக்க.

3. 15 cm நீளமும் 10 cm அகலமும் 8 cm உயரமும் உள்ள ஒரு கனவுருவின் கனவளவைக் கணிக்க.

4. 7 cm ஆரையும் 20 cm உயரமும் உள்ள ஓர் உருளையின் கனவளவைக் கணிக்க.

5. உருவில் உள்ள அரியத்தின் கனவளவைக் கணிக்க.

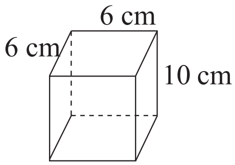


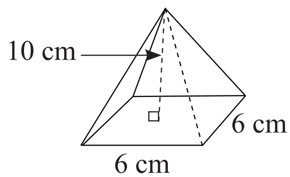
5.1 அடி சதுரமாக உள்ள செங்கூம்பகத்தின் கனவளவு

சதுர அடி உள்ள ஒரு கூம்பகத்தின் கனவளவைக் காண்பதற்கான ஒரு சூத்திரத்தை உருவாக்குவதில் இப்போது கவனத்தைச் செலுத்துவோம். இதற்காகப் பின்வரும் செயற்பாட்டில் ஈடுபடுக.

செயற்பாடு

உருவில் காணப்படுகின்றவாறு ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 6 cm ஆக இருக்கும் சதுர அடியைக் கொண்ட 10 cm உயரமுள்ள பொட் கனவுருவையும் ஒரு பக்க நீளம் 6 cm ஆகவுள்ள சதுர அடியைக் கொண்ட 10 cm உயரமுள்ள ஒரு பொட் கூம்பகத்தையும் மெல்லிய அட்டைத்தாளைப் பயன்படுத்தித் தயாரிக்க.





தயாரித்த கூம்பக வடிவப் பாத்திரத்தில் நுண் மணலை முற்றாக நிரப்புக. அவ்வாறு நிரப்பிய நுண் மணலை முற்றாகக் கனவுரு வடிவமுள்ள பாத்திரத்தில் இடுக. கனவுரு வடிவமுள்ள பாத்திரத்தை நிரப்புவதற்கு இவ்வாறு கூம்பு வடிவப் பாத்திரத்தினால் எத்தனை தடவை மணலை இடவேண்டும் என்பதை அவதானிக்க.

மேற்குறித்த செயற்பாட்டில் கனவுரு வடிவமுள்ள பாத்திரத்தை முற்றாக நிரப்புவதற்குக் கூம்பக வடிவமுள்ள பாத்திரத்தினால் முற்றாக மூன்று தடவைகள் மணலை நிரப்ப வேண்டுமென நீங்கள் அவதானிப்பீர்கள்.

இதற்கேற்ப

செங்கூம்பகத்தின் கனவளவு $\times 3$ = கனவுருவின் கனவளவு

$\therefore$ செங்கூம்பகத்தின் கனவளவு $= \frac{1}{3} \times$ கனவுருவின் கனவளவு

$= \frac{1}{3} \times$ அடியின் பரப்பளவு $\times$ செங்குத்து உயரம்

சதுர அடியின் ஒரு பக்க நீளம் a cm ஆகவும் செங்குத்து உயரம் h cm ஐயும் கொண்ட செங்கூம்பகத்தின் செங்குத்துயரத்தைக் கண்போம்.

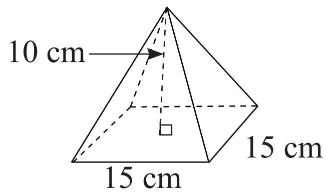
$$= \frac{1}{3} \times (a \times a) \times h$$

$$= \frac{1}{3} a^2 h$$

செங்கூம்பகத்தின் கனவளவு $= \frac{1}{3} a^2 h$

உதாரணம் 1

சதுர அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 15 cm ஆகவும் உயரம் 10 cm ஆகவும் உள்ள ஒரு செங்கூம்பகத்தின் கனவளவைக் கன சென்ரிமீற்றரில் காண்க.



$$\text{கூம்பகத்தின் கனவளவு} = \frac{1}{3} a^2 h$$
$$= \frac{1}{3} \times 15 \times 15 \times 10$$
$$= 750$$

$\therefore$ கோளத்தின் கனவளவு 750 cm^3 ஆகும்.

உதாரணம் 2

சதுர அடியைக் கொண்ட ஒரு செங்கூம்பகத்தின் கனவளவு 400 cm^3 ஆகும். அதன் உயரம் 12 cm எனின், அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளத்தைக் காண்க.

அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் a cm எனக் கொள்வோம்.

$$\text{கூம்பகத்தின் கனவளவு} = \frac{1}{3} a^2 h$$
$$\therefore \frac{1}{3} a^2 h = 400$$
$$\frac{1}{3} a^2 \times 12 = 400$$
$$\therefore 4a^2 = 400$$
$$\therefore a^2 = 100$$
$$= 10^2$$
$$\therefore a = 10$$

$\therefore$ அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 10 cm ஆகும்.

பயிற்சி 5.1

1. சதுர அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 5 cm ஆகவுள்ள ஒரு செங்கூம்பகத்தின் உயரம் 9 cm எனின், அதன் கனவளவைக் காண்க.

2. சதுர அடியின் பரப்பளவு 36 cm^2 ஆகவுள்ள ஒரு செங்கூம்பகத்தின் உயரம் 10 cm எனின், அதன் கனவளவைக் காண்க.

3. ஒரு செங்கூம்பகத்தின் உயரம் 12 cm ஆகவும் அதன் கனவளவு 256 cm^3 ஆகவும் இருப்பின், சதுர அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளத்தைக் காண்க.

4. ஒரு செங்கூம்பகத்தின் செங்குத்து உயரம் 5 cm ஆகவும் அதன் கனவளவு 60 cm^3 ஆகவும் இருப்பின், அக்கூம்பகத்தின் அடியின் பரப்பளவைக் காண்க.

5. அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 9 cm ஆகவுள்ள ஒரு சதுரச் செங்கூம்பகத்தின் கனவளவு 216 cm^3 எனின், அதன் செங்குத்து உயரத்தைக் காண்க.

6. அடியின் பரப்பளவு 16 cm^2 ஆகவுள்ள ஒரு சதுரச் செங்கூம்பகத்தின் கனவளவு 216 cm^3 எனின், அதன் செங்குத்து உயரத்தைக் காண்க.

7. சதுர அடியைக் கொண்ட ஒரு கூம்பகத்தின் அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 12 cm உம் விளிம்பின் நீளம் 10 cm உம் ஆகும். கூம்பகத்தின்
 (i) செங்குத்து உயரம்
 (ii) கனவளவு
 ஆகியவற்றைக் காண்க.

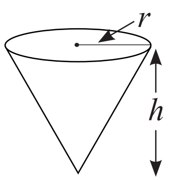
8. சதுர அடியைக் கொண்ட ஒரு கூம்பகத்தின் அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 10 cm உம் சாயுயரம் 13 cm உம் ஆகும். கூம்பகத்தின்
 (i) செங்குத்து உயரம்
 (ii) கனவளவு
 ஆகியவற்றைக் காண்க.

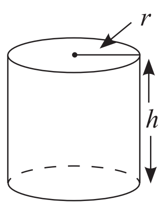
5.2 செவ்வட்டக் கூம்பின் கனவளவு

ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் கனவளவைக் காண்பதற்கான ஒரு சூத்திரத்தை உருவாக்குவதில் இப்போது எமது கவனத்தைச் செலுத்துவோம். இதற்காக செவ் வட்டக் கூம்பு ஒன்றையும் செவ்வட்ட உருளை ஒன்றையும் பயன்படுத்திப் பின்வரும் செயற்பாட்டில் ஈடுபடுக.

செயற்பாடு

உருவில் காணப்படுகின்றவாறு சம ஆரையும் சம உயரமும் உள்ள அடி இல்லாத ஒரு கூம்பையும் அடி உள்ள ஆனால் மூடி இல்லாத ஓர் உருளையையும் அட்டைத் தாளைப் பயன்படுத்தித் தயாரித்துக் கொள்க.





தயாரித்த கூம்பு வடிவமுள்ள பாத்திரத்தில் நுண்மணலை முற்றாக நிரப்புக. அவ்வாறு நிரப்பிய நுண்மணலை முற்றாக உருளைப் பாத்திரத்தில் இடுக. உருளைப் பாத்திரத்தை நிரப்புவதற்கு இவ்வாறு கூம்பு வடிவமுள்ள பாத்திரத்தின் மூலம் எத்தனை தடவை மணலை இடவேண்டும் என்பதை அவதானிக்க.

மேற்குறித்த செயற்பாட்டில் உருளையை முற்றாக நிரப்புவதற்கு கூம்பு வடிவப் பாத்திரத்தினால் முற்றாக மூன்று தடவைகள் மணலை நிரப்ப வேண்டும் என அவதானித்திருப்பீர்கள்.

இதற்கேற்ப கூம்பின் கனவளவு $\times 3 =$ உருளையின் கனவளவு

கூம்பின் கனவளவு $= \frac{1}{3} \times$ உருளையின் கனவளவு

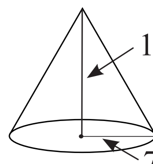
ஆரை r ஐயும் உயரம் h ஐயும் உடைய ஓர் உருளையின் கனவளவை $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ இன் மூலம் பெறலாமென நீங்கள் கற்றுள்ளீர்கள்.

செவ்வட்டக் கூம்பின் கனவளவு $(V) = \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

இப்பாடத்தில் π இன் பெறுமானம் $\frac{22}{7}$ எனக் கொள்க.

உதாரணம் 1

7 cm ஆரையும் 12 cm உயரமும் உள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் கனவளவைக் கன சென்ரிமீற்றரில் காண்க.



கூம்பின் கனவளவு $= \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

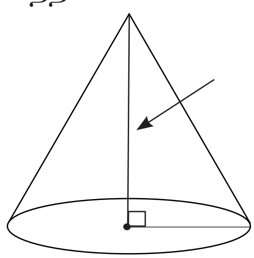
$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 12$

$= 616$

$\therefore$ கூம்பின் கனவளவு 616 cm^3 ஆகும்.

உதாரணம் 2

அடியின் பரிதி 44 cm ஆகவுள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் செங்குத்து உயரம் 21 cm எனின், செவ்வட்டக் கூம்பின் கனவளவைக் கன சென்ரிமீற்றரில் காண்க.



அடியின் பரிதி = 44 cm

$2\pi r = 44$

கூம்பின் அடியின் ஆரையை r cm எனக் கொள்வோம்.

$2 \times \frac{22}{7} \times r = 44$

$r = \frac{44 \times 7}{2 \times 22}$

$r = 7$

$\therefore$ கூம்பின் ஆரை 7 cm ஆகும்.

கூம்பின் கனவளவு $= \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 21$$

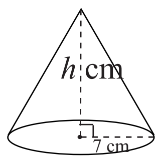
$$=1078$$

$\therefore$ கூம்பின் கனவளவு 1078 cm^3 ஆகும்.

உதாரணம் 3

7 cm ஆரையும் 25 cm சாயுயரமும் உள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின்
(i) உயரம்
(ii) கனவளவு
ஆகியவற்றைக் காண்க.

கூம்பின் உயரத்தை h cm இனால் காட்டுவோம். பின்வரும் உருவில் காணப்படும் முக்கோணிக்குப் பைதகரசின் தேற்றத்தைப் பிரயோகித்து h ஐக் காண்போம்.



(i) $h^2 + 7^2 = 25^2$

$$h^2 + 49 = 625$$

$$h^2 = 625 - 49$$

$$h = \sqrt{576}$$

$$h = 24$$

$\therefore$ செங்குத்து உயரம் 24 cm ஆகும்.

(ii) கூம்பின் கனவளவு $= \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24$$

$$= 1232$$

$\therefore$ கூம்பின் கனவளவு 1232 cm^3 ஆகும்.

உதாரணம் 4

3.5 cm ஆரையும் 154 cm^3 கனவளவும் உள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் செங்குத்து உயரத்தைக் காண்க.
கூம்பின் செங்குத்து உயரத்தை h cm இனால் காட்டுவோம்.

கூம்பின் கனவளவு $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$\therefore 154 = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times h$ ($3.5 = \frac{7}{2}$ ஆகையால்)

$$h = \frac{154 \times 3 \times 7 \times 2 \times 2}{22 \times 7 \times 7}$$

$$= 12$$

$\therefore$ கூம்பின் செங்குத்து உயரம் 12 cm ஆகும்.

பயிற்சி 5.2

1. 7 cm ஆரையும் 12 cm செங்குத்து உயரமும் உள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் கனவளவைக் கணிக்க.

2. 21 cm விட்டமும் 25 cm செங்குத்து உயரமும் உள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் கனவளவைக் கணிக்க.

3. 13 cm சாயுயரமும் 5 cm அடியின் ஆரையும் உள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் கனவளவைக் காண்க.

4. 12 cm விட்டமும் 10 cm சாயுயரமும் உள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் கனவளவைக் காண்க.

5. 616 cm^3 கனவளவு உள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் உயரம் 12 cm எனின், செவ்வட்டக் கூம்பின் ஆரையைக் கணிக்க.

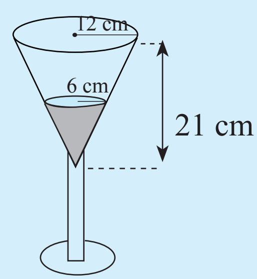
6. 6468 cm^3 கனவளவுள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் செங்குத்து உயரம் 14 cm எனின், செவ்வட்டக் கூம்பின் விட்டத்தைக் கணிக்க.

7. அடியின் பரிதி 44 cm ஆகவுள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் சாயுயரம் 25 cm ஆகும். கூம்பின்
(i) அடியின் ஆரை
(ii) உயரம்
(iii) கனவளவு
ஆகியவற்றைக் காண்க.

8. ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பு வடிவத் தாங்கியின் அடியின் பரிதி 88 cm ஆகவும் செங்குத்து உயரம் 12 cm ஆகவும் இருப்பின், தாங்கியின் கனவளவைக் காண்க.

9. ஆரை 14 cm ஐயும் உயரம் 30 cm ஐயும் உடைய திண்ம உலோக உருளை ஒன்றை உருக்கி 7 cm ஆரையும் 15 cm உயரமும் உள்ள எத்தனை திண்மச் செவ்வட்டக் கூம்புகளைச் செய்யலாம்?

10. ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் வடிவத்தில் உள்ள பாத்திரத்தின் ஆரை 12 cm உம் உயரம் 21 cm உம் ஆகும். அதன் உயரத்தில் அரைப்பங்கிற்கு நீர் இருப்பின், பாத்திரத்தை முற்றாக நிரப்புவதற்கு மேலும் எவ்வளவு கனவளவு நீரை இடவேண்டுமெனக் காண்க.

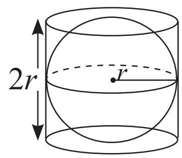


5.3 கோளத்தின் கனவளவு

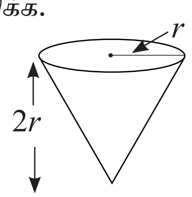
ஒரு கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்பதற்குப் பயன்படுத்திய சுற்றுருளை என்னும் உபகரணத்தைக் கொண்டு ஒரு கோளத்தின் கனவளவைக் காண்பதற்கான ஒரு முறையை ஆக்கிமிடீஸ் விளக்கினார். அதற்கேற்பத் திட்டமிடப்பட்டுள்ள பின்வரும் செயற்பாட்டைக் கொண்டு ஒரு கோளத்தின் கனவளவைக் காண்பதற்கான ஒரு சூத்திரத்தை உருவாக்குவோம்.

செயற்பாடு

இதற்காக ஒரு சிறிய கோளத்தை எடுத்துக் கொள்க. கோளத்தின் ஆரைக்குச் சமமான ஆரையையும் கோளத்தின் விட்டத்திற்குச் சமமான உயரத்தையும் கொண்ட இரு பக்கங்களிலும் திறந்துள்ள ஓர் உருளையை ஒரு மெல்லிய அட்டைத்தாளைப் பயன்படுத்திச் செய்க. அதன் பின்னர் கோளத்தை உருளையினுள்ளே மெதுவாகப் புகுத்துக.



அப்போது கோளம் உருளையினுள்ளே முழு வெளியையும் எடுக்காது என்பதும் வெறும் வெளி எஞ்சியிருக்கும் என்பதும் தெளிவாகும். அவ்வெறும் வெளியின் கனவளவைக் காண்பதற்குச் சுற்றுருளையின் மேற்பகுதியை நுண் மணலினால் நிரப்புக. அம்மணலை வெளியே செல்லாதவாறு ஓர் அட்டைத்தாளை இறுக்கி வைத்துக் கொண்டு கீழ்ப் பகுதியை மேலே திருப்புக. இப்போது அப்பகுதியையும் முற்றாக மூடுமாறு நுண் மணலினால் நிரப்புக. பின்னர் சுற்றுருளையின் ஆரைக்குச் சமமானதும் $2r$ உயரம் உள்ளதுமான ஒரு பொட் கூம்பை ஒரு மெல்லிய அட்டைத் தாளைப் பயன்படுத்தித் தயாரிக்க.



இப்போது சுற்றுருளையில் நிரப்பப்பட்டுள்ள நுண் மணலை வீணாகாதவாறு முற்றாக அகற்றி மேலே தயாரித்த பொட் கூம்பினுள்ளே இடுக. அப்போது அம்மணல் பொட் கூம்பினுள்ளே முற்றாக நிரம்பியிருப்பதை நீங்கள் காணலாம்.

இச்செயற்பாட்டிற்கேற்பச்

சுற்றுருளையின் கனவளவு $=$ கோளத்தின் கனவளவு $+$ கூம்பின் கனவளவு

என்பது உங்களுக்குத் தெளிவாகும். அதற்கேற்பச் சுற்றுருளையின் கனவளவிலிருந்து கூம்பின் கனவளவைக் கழிக்கும்போது கோளத்தின் கனவளவு கிடைக்கும் என்பது தெளிவாகும்.

அதாவது

கோளத்தின் கனவளவு = சுற்றுருளையின் கனவளவு − கூம்பின் கனவளவு

$$= \pi r^2 h - \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$$

$$= \frac{2}{3} \pi r^2 h$$

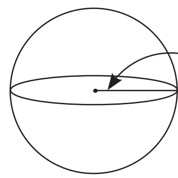
$$= \frac{2}{3} \pi r^2 \times 2r \quad (h = 2r \text{ என்பதால்})$$

$$= \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\boxed{\textbf{கோளத்தின் கனவளவு} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}} \pi \boldsymbol{r}^3}$$

உதாரணம் 1

21 cm ஆரையுள்ள ஒரு கோளத்தின் கனவளவைக் கன சென்ரிமீற்றரில் காண்க.



கோளத்தின் கனவளவு $= \frac{4}{3} \pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 21$$

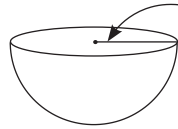
$$= 38\ 808$$

∴ கோளத்தின் கனவளவு 38 808 cm^3 ஆகும்.

உதாரணம் 2

7 cm ஆரையுள்ள ஒரு திண்ம அரைக்கோளத்தின் கனவளவை கன சென்ரிமீற்றரில் காண்க.

அரைக்கோளத்தின் கனவளவு $= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi r^3$



$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7$$

$$= 718.67$$

∴ அரைக்கோளத்தின் கனவளவு 718.67 cm^3 ஆகும்.

உதாரணம் 3

$113\frac{1}{7}$ cm^3 கனவளவுள்ள ஒரு சிறிய கண்ணாடிப் பந்தின் ஆரையைக் காண்க.

கோளத்தின் கனவளவு $= \frac{4}{3} \pi r^3$

$$\therefore \quad \frac{4}{3} \pi r^3 = 113\frac{1}{7}$$

$$\therefore \quad r^3 = \frac{792}{7} \times \frac{3}{4} \times \frac{22}{7}$$

$$= 27$$

$$= 3^3$$

$$\therefore \quad r = 3$$

$\therefore$ கோளத்தின் ஆரை 3 cm ஆகும்.

பயிற்சி 5.3

1. 7 cm ஆரையுள்ள ஒரு கோளத்தின் கனவளவைக் காண்க.

2. 9 cm விட்டமுள்ள ஒரு கோளத்தின் கனவளவு $381\frac{6}{7}$ cm^3 எனக் காட்டுக.

3. ஒரு கோள வடிவக் கோளின் ஆரை 2.1 km எனின், கோளின் கனவளவைக் காண்க.

4. 10.5 cm ஆரையுள்ள ஒரு திண்ம அரைக்கோளத்தின் கனவளவைக் காண்க.

5. ஒரு கோளத்தின் கனவளவு $11498\frac{2}{3}$ cm^3 எனின், அதன் ஆரையைக் கணிக்க.

6. 7 cm ஆரையுள்ள 8 உலோகக் கோளங்களை உருக்கி உலோகம் வீணாகாதவாறு ஒரு தனி உலோகக் கோளம் செய்யப்பட்டுள்ளது. அதன் ஆரையைக் கணிக்க.

7. 12 cm ஆரையுள்ள ஒரு திண்ம அரைக்கோள உலோகக் குற்றியை உருக்கி 3 cm வீதம் ஆரையுள்ள 32 சிறிய திண்ம உலோகக் கோளங்களைச் செய்யலாம் எனக் காட்டுக.

பொழிப்பு

- அடி சதுரமாகவும் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் a ஆகவும் செங்குத்து உயரம் h ஆகவும் உள்ள ஒரு சதுரச் செங்கூம்பகத்தின் கனவளவு V எனின், $V = \frac{1}{3}a^2h$ ஆகும்.
- அடியின் ஆரை r ஆகவும் உயரம் h ஆகவும் உள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் கனவளவு V எனின், $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ஆகும்.
- ஆரை r ஆகவுள்ள ஒரு கோளத்தின் கனவளவு V எனின், $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ஆகும்.

பலவினப் பயிற்சி

1. ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 12 cm ஆகவுள்ள சதுரக் குறுக்குவெட்டைக் கொண்ட 22 cm நீளமுள்ள ஓர் உலோகக் குற்றியை உருக்கி 3 cm ஆரையுள்ள கோளங்கள் செய்யப்படுமெனின், செய்யத்தக்க கோளங்களின் மொத்த எண்ணிக்கை யாது?

2. 3.5 cm ஆரையுள்ள ஓர் உலோகக் கோளத்தை உருக்கி அதிலிருந்து அதே ஆரையுள்ள ஒரு கூம்பு செய்யப்பட்டது. உலோகம் வீணாவதில்லையெனக் கருதிக் கூம்பின் உயரத்தைக் கணிக்க.

6 ஈருறுப்புக் கோவைகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையின் கனத்தை விரிப்பதற்குத்

தேவையான ஆற்றலைப் பெறுவீர்கள்.

$x + y$ வடிவத்தில் உள்ள ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையின் வர்க்கம் $(x + y)^2$ இனால் காட்டப்படும் எனவும் இதன் கருத்து $(x + y)$ $(x + y)$ என்னும் பெருக்கம் எனவும் அப்பெருக்கத்தை விரிக்கும்போது $x^2 + 2xy + y^2$ எனக் கிடைக்கும் எனவும் முன்னர் கற்றீர்கள். மேலும் $(x - y)^2$ ஐ விரிக்கும்போது $x^2 - 2xy + y^2$ எனக் கிடைக்கும் என்பதும் உங்கள் நினைவில் இருக்கும். ஈருறுப்புக் கோவைகளின் வர்க்கத்தின் விரி தொடர்பாக இதுவரைக்கும் கற்ற விடயங்களை நினைவுகூர்வதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியைச் செய்க.

மீட்டற் பயிற்சி

1. பின்வரும் கோவைகளில் உள்ள வெற்றிடங்களை நிரப்புக.

a. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + ...$ **b.** $(a - b)^2 = ... - 2ab + b^2$

c. $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + ...$ **d.** $(y + 3)^2 = y^2 + ...\ + 9$

e. $(a - 5)^2 = ...\ - 10a + 25$ **f.** $(b - 1)^2 = b^2\ .....\ + ...$

g. $(4 + x)^2 = 16 + ...\ .....$ **h.** $(7 - t)^2 = 49\ .....\ + t^2$

i. $(2x + 1)^2 = 4x^2\ .....\ + 1$ **j.** $(3b - 2)^2 = ... - 12b\ ......$

2. பின்வரும் வர்க்கங்கள் ஒவ்வொன்றையும் விரிக்க.

a. $(2m + 3)^2$ **b.** $(3x - 1)^2$ **c.** $(5+2x)^2$

d. $(2a + 3b)^2$ **e.** $(3m - 2n)^2$ **f.** $(2x + 5y)^2$

3. ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையின் வர்க்கமாக எழுதுவதன் மூலம் பின்வரும் வர்க்கங்கள் ஒவ்வொன்றினதும் பெறுமானத்தைக் கணிக்க.

a. 32^2 **b.** 103^2 **c.** 18^2 **d.** 99^2

6.1 ஈருறுப்புக் கோவைகளின் கனம்

$a + b$ வடிவத்தில் உள்ள ஈருறுப்புக் கோவையின் கனம் $(a + b)^3$ இனால் காட்டப்படும். அதாவது $(a + b)$ இன் முப்படியாகும். அதாவது $(a + b)^2$ ஐ $(a + b)$ இனால் பெருக்குவதாகும். பின்வரும் கோவைகள் மூன்றாம் வலுவாக எழுதப்பட்டுள்ள விதத்தை நன்றாக அவதானிக்க.

$$3^3 = 3 \times 3^2 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$
$$x^3 = x \times x^2 = x \times x \times x$$
$$(2x)^3 = (2x) \times (2x)^2 = (2x) \times (2x) \times (2x) = 8x^3$$

அவ்வாறே,

$$(x + 1)^3 = (x + 1)(x + 1)^2 \quad = (x + 1)\ (x + 1)\ (x + 1)$$
$$(a - 2)^3 = (a - 2)(a - 2)^2 = (a - 2)\ (a - 2)\ (a - 2)$$
$(3 + m)^3 = (3 + m)(3 + m)^2 = (3 + m)\ (3 + m)\ (3 + m)$ எனவும் எழுதலாம்.

ஈருறுப்புக் கோவைகளின் வர்க்கத்தை விரித்த அதே விதமாக ஈருறுப்புக் கோவைகளின் கனங்களையும் விரிக்கலாம். அதனைப் பற்றிப் பின்வரும் உதாரணங்களைக் கொண்டு ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

$$(x + y)^3 = (x + y)\ (x + y)^2$$
$$= (x + y)\ \ (x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$$
$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

இதற்கேற்ப வடிவம் $(x + y)$ இல் உள்ள ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையின் கனத்தின் விரிவை ஒரு சூத்திரமாக நினைவில் வைத்துக் கொள்வதற்குப் பின்வரும் கோலத்தைப் பயன்படுத்துவோம்.

$$\boxed{(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}$$

முதல் உறுப்பின் கனம்

இரண்டாம் உறுப்பின் கனம்

முதல் உறுப்பின் வர்க்கத்தினதும்
இரண்டாம் உறுப்பினதும்
பெருக்கத்தின் மூன்று மடங்கு

முதல் உறுப்பினதும்
இரண்டாம் உறுப்பின் வர்க்கத்தினதும்
பெருக்கத்தின் மூன்று மடங்கு

இதற்கேற்ப

$(m + n)^3 = m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$ என எழுதலாம்.

அவ்வாறே $(a + 2)^3 = a^3 + 3a^2 \times 2 + 3a \times 2^2 + 2^3$ என எழுதி, இதனை மேலும் $a^3 + 6a^2 + 12a + 8$ எனச் சுருக்கலாம்.

இப்போது மேற்குறித்த கோலத்திற்கேற்ப $(x - y)^3$ இன் விரிவைப் பெறும் விதத்தைக் கருதுவோம்.

$$(x-y)^3 = (x-y)\,(x-y)^2$$
$$= (x-y)\quad(x^2-2xy+y^2)$$
$$= x^3-2x^2y+xy^2-x^2y+2xy^2-y^3$$
$$= x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$$

$(x-y)^3$ இன் விரியை வேறு விதமாகவும் பெறுவோம்.

இங்கு $x-y$ ஐ $x+(-y)$ எனவும் எழுதலாம். அப்போது நீங்கள் அதனை முன்னர் கண்ட வடிவத்திலான ஒரு கோவையாகக் கருதலாம். அதற்கேற்ப $(x-y)^3$ ஐ $\{x+(-y)\}^3$ என எழுதிக் காட்டலாம். இப்போது இக்கனத்தின் விரிவைக் கருதுவோம்.

$$\{x+(-y)\}^3 = x^3+3\times x^2\times(-y)+3\times x\times(-y)^2+(-y)^3$$
$$= x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$$

மேற்குறித்த உறுப்புகளைச் சுருக்குகையில் $(-y)^2=y^2$, $(-y)^3=-y^3$ என்னும் இயல்புகள் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளமையை அவதானிக்க.

இதற்கேற்ப $(m-n)^3 = m^3-3m^2n+3mn^2-n^3$

$(p-q)^3 = p^3-3p^2q+3pq^2-q^3$ என எழுதலாம்

மேற்குறித்த இரு விதங்களிலும் $(x-y)^3$ இன் விரியைப் பெறத்தக்கதாக இருக்கும் அதே வேளை முதல் முறையைப் பின்பற்றுதல் எளிது என்பதை நீங்கள் விளங்கிக் கொள்வீர்கள்.

இப்போது எண்கள் இடம்பெறும் சில ஈருறுப்புக் கோவைகளின் கனங்கள் விரிக்கப்படும் விதத்தைப் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 2

$$(x+5)^3 = x^3+3\times x^2\times 5+3\times x\times 5^2+5^3$$
$$= x^3+15x^2+75x+125$$

உதாரணம் 3

$$(1+x)^3 = 1^3+3\times 1^2\times x+3\times 1\times x^2+x^3$$
$$= 1+3x+3x^2+x^3$$

உதாரணம் 4

$$(y-4)^3 = y^3+3\times y^2\times(-4)+3\times y\times(-4)^2+(-4)^3$$
$$= y^3-12y^2+48y-64$$

அல்லது

$$(y-4)^3 = y^3-3\times y^2\times 4+3\times y\times 4^2-4^3$$
$$= y^3-12y^2+48y-64$$

உதாரணம் 5

$$(5-a)^3 = 5^3 + 3 \times 5^2 \times (-a) + 3 \times 5 \times (-a)^2 + (-a)^3$$
$$= 125 - 75a + 15a^2 - a^3$$

உதாரணம் 6

$$(-2+a)^3 = (-2)^3 + 3 \times (-2)^2 \times a + 3 \times (-2) \times a^2 + a^3$$
$$= -8 + 12a - 6a^2 + a^3$$

உதாரணம் 7

$$(-3-b)^3 = (-3)^3 + 3 \times (-3)^2 \times (-b) + 3(-3) \times (-b)^2 + (-b)^3$$
$$= -27 - 27b - 9b^2 - b^3$$

அல்லது

$$(-3-b)^3 = (-1)^3 (3+b)^3 = -1\,(27 + 27b + 9b^2 + b^2)$$
$$= -27 - 27b - 9b^2 - b^3$$

உதாரணம் 8

$(x-3)^3$ என்னும் கோவையை விரித்து எழுதி $4^3 - 3^2 \times 4^2 + 3^3 \times 4 - 3^3 = 1$ ஐ வாய்ப்புப் பார்க்க.

$(x-3)^3 = x^3 - 3 \times x^2 \times 3 + 3 \times x \times 3^2 - 3^3$

$x = 4$ என்பதை பிரதியிடும்போது

வ.ப $= (4-3)^3$
$= 1$

இ.ப $= x^3 - 3 \times x^2 \times 3 + 3 \times x \times 3^2 - 3^3$
$= 4^3 - 3^2 \times 4^2 + 3^3 \times 4 - 3^3$
$= 1$

$(4-3)^3 = 4^3 - 3 \times 4^2 \times 3 + 3 \times 4 \times 3^2 - 3^3$ ஆகும்.

பயிற்சி 6.1

1. உகந்த அட்சரகணித உறுப்புகளை அல்லது எண்களை அல்லது அட்சரகணிதக் குறிகளைப் (+ அல்லது –) பயன்படுத்தி வெற்றிடங்களை நிரப்புக.

a. $(x+3)^3 = x^3 + 3 \times x^2 \times 3 + 3 \times x \times 3^2 + 3^3 = x^3 + \square + \square + 27$

b. $(y+2)^3 = y^3 + 3 \times \square \times \square + 3 \times \square \times \square + 2^3 = y^3 + 6y^2 + \square + \square$

c. $(a-5)^3 = a^3 + 3 \times a^2 \times (-5) + 3 \times a \times (-5)^2 + (-5)^3 = a^3 - \square + \square - 125$

d. $(3+t)^3 = \square + 3 \times \square \times \square + 3 \times \square \times \square + \square = \square + 27t + \square + t^3$

e. $(x-2)^3 = x^3 \square 3 \times \square \times \square + 3 \times \square \times \square + (-2)^3 = x^3 \square \square + 12x - \square$

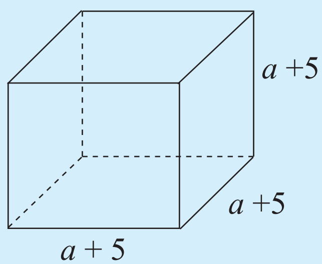
2. விரித்தெழுதுக.

a. $(m+2)^3$ **b.** $(x+4)^3$ **c.** $(b-2)^3$ **d.** $(t-10)^3$
e. $(5+p)^3$ **f.** $(6+k)^3$ **g.** $(1+b)^3$ **h.** $(4-x)^3$
i. $(2-p)^3$ **j.** $(9-t)^3$ **k.** $(-m+3)^3$ **l.** $(-5-y)^3$
m. $(ab+c)^3$ **n.** $(2x+3y)^3$ **o.** $(3x+4y)^3$ **p.** $(2a-5b)^3$

3. பின்வரும் அட்சரகணிதக் கோவைகள் ஒவ்வொன்றையும் ஈருறுப்புக் கோவையின் கனமாக எழுதுக.

a. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ **b.** $c^3-3c^2d+3cd^2-d^3$
c. $x^3+6x^2+12x+8$ **d.** $y^3-18y^2+108y-216$
e. $1+3x+3x^2+x^3$ **f.** $64-48x+12x^2-x^3$

4. கீழே காணப்படும் சதுரமுகியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் $(a+5)$ அலகுகள் ஆகும். அதன் கனவளவுக்கான ஒரு கோவையை எழுதி அக்கோவையை விரித்தெழுதுக.



5. $(x+5)^3$ ஐ விரித்து

(i) $x=2$
(ii) $x=4$

ஆகும்போது சந்தர்ப்பங்களில் விடையை வாய்ப்புப் பார்க்க.

6. கனம் பற்றிய அறிவைப் பயன்படுத்தித் தரப்பட்டுள்ள எண் கோவைகளின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) $64-3\times16\times3+3\times4\times9-27$
(ii) $216-3\times36\times5+3\times6\times25-125$

7. பின்வரும் ஒவ்வொன்றினதும் பெறுமானத்தை ஈருறுப்புக் கோவையின் கனமாக எழுதிக் காண்க.

(i) 21^3 (ii) 102^3 (iii) 17^3 (iv) 98^3

8. ஒரு பக்கத்தின் நீளம் $2a-5$ ஆகவுள்ள ஒரு சதுரமுகியின் கனவளவை a இன் சார்பிற் காண்க.

9. $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ ஐ ஒரு கனமாக எழுதி, அதிலிருந்து $25^3-3\times25^2\times23+3\times25\times23^2-23^3$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

7 அட்சரகணிதப் பின்னங்கள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- அட்சரகணிதப் பின்னங்களின் பெருக்கலையும் வகுத்தலையும் செய்வதற்குத் தேவையான ஆற்றலைப் பெறுவீர்கள்.

அட்சரகணிதப் பின்னங்களைக் கூட்டலும் கழித்தலும் பற்றி நீங்கள் முன்னர் கற்ற விடயங்களை மீட்பதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. பின்வரும் அட்சரகணிதப் பின்னங்களைச் சுருக்குக.

a. $\dfrac{a}{5} + \dfrac{2a}{5}$ **b.** $\dfrac{8}{x} - \dfrac{3}{x}$ **c.** $\dfrac{7}{3m} + \dfrac{3}{4m} - \dfrac{8}{m}$

d. $\dfrac{9}{x+2} + \dfrac{1}{x}$ **e.** $\dfrac{1}{m+2} - \dfrac{2}{m+3}$ **f.** $\dfrac{a+3}{a^2-4} + \dfrac{1}{a+2}$

g. $\dfrac{2}{x^2-x-2} - \dfrac{1}{x^2-1}$ **h.** $\dfrac{1}{x^2-9x+20} - \dfrac{1}{x^2-11x+30}$

7.1 அட்சரகணிதப் பின்னங்களைப் பெருக்கல்

ஒரு பின்ன எண்ணை வேறொரு பின்ன எண்ணினால் பெருக்கும் அதே விதத்திலேயே ஓர் அட்சரகணிதப் பின்னத்தை வேறோர் அட்சரகணிதப் பின்னத்தினால் பெருக்கலைச் செய்யலாம். இதனை உதாரணங்களின் மூலம் விளங்கிக்கொள்ளலாம்.

$$\frac{x}{2} \times \frac{x}{3}$$

என்னும் பெருக்கலைக் கவனிப்போம். இரு பின்னங்களைப் பெருக்கல் என்பது அப்பெருக்கத்தை ஒரு தனி அட்சரகணிதப் பின்னமாகக் காட்டல் என்பதை நினைவில் வைத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

இரு பின்னங்களின் பகுதியில் உள்ள உறுப்புகளையும் தொகுதியில் உள்ள உறுப்புகளையும் வேறு வேறாகப் பெருக்கி ஒரு தனிப் பின்னம் பெறப்படும்.

அதாவது $\dfrac{x}{2} \times \dfrac{x}{3} = \dfrac{x \times x}{2 \times 3}$

$= \dfrac{x^2}{6}$ எனப் பெருக்கப்படும்.

பகுதியிலும் தொகுதியிலும் உள்ள உறுப்புகளை மேலும் சுருக்க முடியுமெனின் அவற்றைச் சுருக்கி மிக எளிய விதத்தில் காட்டலாம். இவ்வாறு சுருக்கலைப் பின்னங்களைப் பெருக்குவதற்கு முன்னர் அல்லது பெருக்கிய பின்னர் செய்யலாம். இத்தகைய சுருக்கல் உள்ள ஒரு பிரசினத்தைத் தீர்க்கும் விதம் பற்றி இப்போது ஆராய்வோம்.

$\frac{8}{a} \times \frac{3}{2b}$ பெருக்கப்படும் விதம் பற்றி இப்போது பார்ப்போம்.

இங்கு தொடக்கத்தில் உள்ள பின்னத்தின் தொகுதியில் உள்ள 8 இற்கும் இரண்டாம் பின்னத்தின் பகுதியில் உள்ள $2b$ இற்கும் பொதுக் காரணியாகிய 2 ஆல் வகுக்கலாம். அதனை இவ்வாறு சுருக்குவோம்.

$$\frac{8}{a} \times \frac{3}{2b} = \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{a} \times \frac{3}{\underset{1}{\cancel{2}}b}$$

இப்போது இரு பின்னங்களிலும் தொகுதியிலும் பகுதியிலும் உள்ள பெறுமானங்களை வேறுவேறாகப் பெருக்குவோம்.

அப்போது

$$\frac{8}{a} \times \frac{3}{2b} = \frac{4 \times 3}{a \times b}$$

$$= \frac{12}{ab}$$

பின்னங்களைப் பெருக்கிய பின்னரும் பொதுக் காரணிகளால் வகுக்கலாம். பின்வரும் உதாரணத்தைப் பார்க்க.

$$\frac{3}{2a} \times \frac{2b}{3} = \frac{6b}{6a}$$

$$= \frac{b}{a}$$

எனப் பெருக்கலாம். எனினும் பெருக்குவதற்கு முன்னர் பொதுக் காரணிகளால் வகுப்பதன் மூலம் நீண்ட செய்கைகளைத் தவிர்க்கலாம். ஆகையால் அவ்வாறு செய்தல் மிகவும் உகந்தது.

பின்வரும் அட்சரகணிதப் பின்னங்களைச் சுருக்கியுள்ள விதத்தைப் பார்க்க.

உதாரணம் 1

$$\frac{x}{y} \times \frac{4}{5x}$$

$$= \frac{\cancel{x}}{y} \times \frac{4}{5\cancel{x}} \quad \text{(பொதுக் காரணி } x \text{ ஆல் வகுத்தல்)}$$

$$= \frac{1 \times 4}{y \times 5}$$

$$= \frac{4}{5y}$$

தொகுதியில் அல்லது பகுதியில் அல்லது அவை இரண்டிலும் அட்சரகணிதக் கோவைகள் இடம்பெறும் அட்சரகணிதப் பின்னங்களைப் பெருக்கும்போது முதலில் காரணிகளை வேறுபடுத்த வேண்டும். அங்கு பொதுக் காரணிகள் இருப்பின் அவற்றை நீக்க வேண்டும். இப்போது அத்தகைய ஓர் உதாரணத்தைப் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 2

சுருக்குக. $\dfrac{2}{x+3} \times \dfrac{x^2+3x}{5}$

$$\frac{2}{x+3} \times \frac{x^2+3x}{5} = \frac{2}{x+3} \times \frac{x(x+3)}{5}$$ (x^2+3x காரணிகளாக வேறுபடுத்தல்)

$$= \frac{2}{x+3} \times \frac{x(x+3)}{5}$$ [$(x+3)$ என்னும் பொதுக் காரணியால் வகுத்தல்]

$$= \frac{2x}{5}$$

இப்போது சிறிதளவு சிக்கலான ஒரு பிரசினத்தைப் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 3

சுருக்குக.

$$\frac{a^2-9}{5a} \times \frac{2a^2-4}{a^2+a-6}$$

$\{a^2+a-6=(a+3)(a-2)$ ஆகையால்$\}$

$$\frac{a^2-9}{5a} \times \frac{2a^2-4}{a^2+a-6} = \frac{a^2-3^2}{5a} \times \frac{2(a-2)}{(a+3)(a-2)}$$

$$= \frac{(a-3)(a+3)}{5a} \times \frac{2(a-2)}{(a+3)(a-2)}$$

$$= \frac{2(a-3)}{5a}$$

பயிற்சி 7.1

1. பின்வரும் அட்சரகணிதப் பின்னங்களைச் சுருக்குக.

a. $\dfrac{6}{x} \times \dfrac{2}{3x}$ **b.** $\dfrac{x}{5} \times \dfrac{3}{xy}$

c. $\dfrac{2a}{15} \times \dfrac{5}{9}$ **d.** $\dfrac{4m}{5n} \times \dfrac{3}{2m}$

e. $\dfrac{x+1}{8} \times \dfrac{2x}{x+1}$ **f.** $\dfrac{3a-6}{3a} \times \dfrac{1}{a-2}$

g. $\dfrac{x^2}{2y+5} \times \dfrac{4y+10}{3x}$ **h.** $\dfrac{m^2-4}{m+1} \times \dfrac{m^2+2m+1}{m+2}$

i. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-1} \times \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$ **j.** $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2} \times \dfrac{2a-2b}{a^2+ab}$

7.1 ஓர் அட்சரகணிதப் பின்னத்தை வேறோர் அட்சரகணிதப் பின்னத்தினால் வகுத்தல்

ஒரு பின்னத்தை வேறொரு பின்னத்தினால் வகுக்கும்போது தொடக்கப் பின்னத்தை இரண்டாம் பின்னத்தின் நிகர்மாற்றினால் பெருக்கி விடையைப் பெற்ற விதம் உங்கள் நினைவில் இருக்கும் என்பதில் ஐயமில்லை. அவ்வாறே ஓர் அட்சரகணிதப் பின்னத்தினால் வகுக்கும்போது நிகர்மாற்றினால் பெருக்கலாம்.

அட்சரகணிதப் பின்னங்களை வகுத்தல் பற்றிக் கற்குமுன்னர் ஓர் அட்சரகணிதப் பின்னத்தின் நிகர்மாற்றுப் பற்றி ஆராய்வோம்.

அட்சரகணிதப் பின்னத்தின் நிகர்மாற்று

இரு எண்களைப் பெருக்கும்போது பெருக்கம் 1 எனின், அவற்றில் ஓர் எண் மற்றைய எண்ணின் நிகர்மாற்று அல்லது பெருக்கல் நேர்மாறு என முன்னர் கற்றீர்கள். அதற்கேற்ப ஓர் எண்ணின் நிகர்மாற்றுப் பற்றி நாம் கற்ற விடயங்களை நினைவுகூர்வோம்.

$2 \times \frac{1}{2} = 1$ ஆகையால் 2 இன் நிகர்மாற்று $\frac{1}{2}$ உம் $\frac{1}{2}$ இன் நிகர்மாற்று 2 உம் ஆகும்.

$\frac{1}{3} \times 3 = 1$ ஆகையால் $\frac{1}{3}$ இன் நிகர்மாற்று 3 உம் 3 இன் நிகர்மாற்று $\frac{1}{3}$ உம் ஆகும்.

$\frac{4}{5} \times \frac{5}{4} = 1$ ஆகையால் $\frac{4}{5}$ இன் நிகர்மாற்று $\frac{5}{4}$ உம் $\frac{5}{4}$ இன் நிகர்மாற்று $\frac{4}{5}$ உம் ஆகும்.

ஓர் அட்சரகணிதப் பின்னத்தின் நிகர்மாற்றும் மேற்குறித்தவாறே விவரிக்கப்படும். அதாவது ஓர் அட்சரகணிதப் பின்னத்தை வேறோர் அட்சரகணிதப் பின்னத்தினால் பெருக்கும்போது பெருக்கம் 1 எனின், அவ்வோர் அட்சரகணிதப் பின்னம் மற்றைய அட்சரகணிதப் பின்னத்தின் நிகர்மாற்று ஆகும்.

$\frac{5}{x}, \frac{x}{5}$ என்னும் அட்சரகணிதப் பின்னங்களைப் பெருக்குவோம்.

$$\frac{5}{x} \times \frac{x}{5} = \frac{1}{1} = 1$$

ஆகவே $\frac{5}{x}$ இன் நிகர்மாற்று $\frac{x}{5}$ உம் $\frac{x}{5}$ இன் நிகர்மாற்று $\frac{5}{x}$ உம் ஆகும்.

இவ்வாறே

$\frac{x+1}{y} \times \frac{y}{x+1} = 1$ ஆகையால்,

$\frac{x+1}{y}$ இன் நிகர்மாற்று $\frac{y}{x+1}$ உம் $\frac{y}{x+1}$ இன் நிகர்மாற்று $\frac{x+1}{y}$ உம் ஆகும்.

ஓர் எண்ணின் நிகர்மாற்றைக் காணும்போது அதன் தொகுதியையும் பகுதியையும் பரிமாற்றி எழுதுவதன் மூலம் நிகர்மாற்று பெறப்படும். அதே விதத்தில் ஓர் அட்சர கணிதப் பின்னத்தின் பகுதியையும் தொகுதியையும் பரிமாற்றி எழுதுவதன் மூலம் அவ்வட்சரகணிதப் பின்னத்தின் நிகர்மாற்றைப் பெறலாம் என்பது இதிலிருந்து தெளிவாகின்றது.

கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்சரகணிதப் பின்னங்களையும் அவற்றின் நிகர்மாற்றுகளையும் அவதானிக்க.

அட்சரகணிதப் பின்னம்	நிகர்மாற்று
$\frac{m}{4}$	$\frac{4}{m}$
$\frac{a}{a+2}$	$\frac{a+2}{a}$
$\frac{x-3}{x^2+5x+6}$	$\frac{x^2+5x+6}{x-3}$

இப்போது நாம் ஓர் அட்சரகணிதப் பின்னம் வேறோர் அட்சரகணிதப் பின்னத்தினால் வகுக்கப்படும் விதம் பற்றிக் கற்போம்.

உதாரணம் 1

சுருக்குக. $\frac{3}{x} \div \frac{4y}{x}$

$\frac{3}{x} \div \frac{4y}{x} = \frac{3}{x} \times \frac{x}{4y}$ ($\frac{4y}{x}$ இனால் வகுப்பதற்குப் பதிலாக அதன் நிகர்மாற்றாகிய $\frac{x}{4y}$ இனால் பெருக்கல்)

$= \frac{3}{\cancel{x}} \times \frac{\cancel{x}}{4y}$ (பொதுக் காரணியாகிய x ஆல் வகுத்தல்)

$= \frac{3}{4y}$ (பகுதியையும் தொகுதியையும் வேறுவேறாகப் பெருக்கல்)

வேறு சில உதாரணங்களையும் ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 2

சுருக்குக. $\frac{a}{b} \div \frac{ab}{4}$

$\frac{a}{b} \div \frac{ab}{4} = \frac{a}{b} \times \frac{4}{ab}$ (நிகர்மாற்றினால் பெருக்கல்)

$= \frac{\cancel{a}}{b} \times \frac{4}{\cancel{a}b}$ (பொதுக் காரணியாகிய a ஆல் வகுத்தல்)

$= \frac{4}{b^2}$

பகுதியில் அல்லது தொகுதியில் அட்சரகணிதக் கோவைகள் இருக்கும்போது முதலில் அக்கோவைகளைக் காரணிகளாக வேறுபடுத்திப் பின்னர் பொதுக் காரணிகளை நீக்கிச் சுருக்கலாம்.

உதாரணம் 3

சுருக்குக. $\dfrac{3x}{x^2 + 2x} \div \dfrac{5x}{x^2 - 4}$

$$\frac{3x}{x^2 + 2x} \div \frac{5x}{x^2 - 4}$$

$$= \frac{3x}{x^2 + 2x} \times \frac{x^2 - 4}{5x}$$ (நிகர்மாற்றினால் பெருக்கல்)

$$= \frac{3x}{x(x+2)} \times \frac{(x-2)(x+2)}{5x}$$ (கோவைகளைக் காரணிகளாக வேறுபடுத்தலும் பொதுக் காரணிகளினால் வகுத்தலும்)

$$= \frac{3(x-2)}{5x}$$

உதாரணம் 4

சுருக்குக. $\dfrac{x^2 + 3x - 10}{x} \div \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5x}$

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x} \div \frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} = \frac{x^2 + 3x - 10}{x} \times \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25}$$

$$= \frac{(x+5)(x-2)}{x} \times \frac{x(x-5)}{{}_1(x-5)(x+5)}$$

$$= \frac{x-2}{1}$$

$$= x - 2$$

பயிற்சி 7.2

1. பின்வரும் அட்சரகணிதப் பின்னங்களைச் சுருக்குக.

a. $\dfrac{5}{x} \div \dfrac{10}{x}$ **b.** $\dfrac{m}{3n} \div \dfrac{m}{2n^2}$ **c.** $\dfrac{x+1}{y} \div \dfrac{2(x+1)}{x}$

d. $\dfrac{2a-4}{2a} \div \dfrac{a-2}{3}$ **e.** $\dfrac{x^2+4x}{3y} \div \dfrac{x^2-16}{12y^2}$ **f.** $\dfrac{p^2+pq}{p^2-pr} \div \dfrac{p^2-q^2}{p^2-r^2}$

g. $\dfrac{m^2-4}{m+1} \div \dfrac{m+2}{m^2+2m+1}$ **h.** $\dfrac{x^2y^2+3xy}{4x^2-1} \div \dfrac{xy+3}{2x+1}$

i. $\dfrac{a^2-5a}{a^2-4a-5} \div \dfrac{a^2-a-2}{a^2+2a+1}$ **j.** $\dfrac{x^2-8x}{x^2-4x-5} \times \dfrac{x^2+2x+1}{x^3-8x^2} \div \dfrac{x^2+2x-3}{x-5}$

8 சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள தளவுருவங்களின் பரப்பளவு

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- ஒரே இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே ஒரே அடியில் இருக்கும் முக்கோணியின் பரப்பளவுக்கும் இணைகரத்தின் பரப்பளவுக்குமிடையே உள்ள தொடர்புடைமை பற்றிய தேற்றங்களை இனங்காண்பதற்கும் அவற்றுடன் தொடர்புபட்ட பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

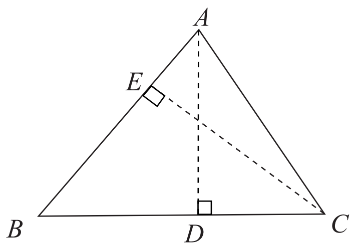
தேவையான ஆற்றலைப் பெறுவீர்கள்.

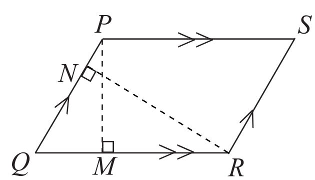
அறிமுகம்

பல்வேறு தள உருவங்களைப் பற்றியும் சில விசேட விதத்தில் உள்ள தள உருவங்களின் பரப்பளவுகளைக் காணும் விதம் பற்றியும் நீங்கள் கற்றுள்ளீர்கள். அவற்றில் முக்கோணிகளினதும் இணைகரங்களினதும் பரப்பளவைப் பெற்றுள்ள விதத்தை நினைவுகூர்வோம்.

முக்கோணிகளினதும் இணைகரங்களினதும் பரப்பளவுகளைக் காணும்போது **செங்குத்துயரம்**, **அடி** என்னும் பதங்கள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இப்பதங்களினால் கருதப்படுபவற்றை முதலில் நினைவுகூர்வோம்.

கீழே முக்கோணி ABC உம் இணைகரம் $PQRS$ உம் தரப்பட்டுள்ளன.





முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவைக் காணும்போது விருப்பமான ஒரு பக்கத்தை அடியாகக் கருதலாம். உதாரணமாகப் பக்கம் BC யை அடியாகக் கொள்ளலாம். அப்போது ஒத்த செங்குத்துயரமாகக் கோட்டுத் துண்டம் AD கருதப்படுகின்றது. அதாவது, A யிலிருந்து BC யிற்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்தாகும்.

இப்போது

முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times BC \times AD$ எனக் கற்றுள்ளோம்.

பக்கம் AB யை அடியாகக் கருதினால், ஒத்த குத்துயரம் கோடு CE ஆகும்.

அதற்கேற்ப முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times AB \times CE$ எனவும் கருதலாம். இவ்வாறே AC யை அடியாகக் கருதி B யிலிருந்து ஒத்த செங்குத்துயரத்தை வரையும் போது முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவைக் காணலாம்.

இப்போது இணைகரம் $PQRS$ ஐக் கருதுவோம். இங்கும் எந்தவொரு பக்கத்தையும் அடியாகக் கொண்டு பரப்பளவைக் காணலாம். அதில் பக்கம் QR ஐ அடியாகக் கருதினால், ஒத்த செங்குத்துயரம் கோடு PM ஆகும். அதாவது, QR இற்கும் அதன் எதிர்ப் பக்கம் PS இற்குமிடையே உள்ள செங்குத்துத் தூரம்.

அப்போது இணைகரம் $PQRS$ இன் பரப்பளவு $= QR \times PM$ என நாம் கற்றுள்ளோம்.

பக்கம் PQ வை அடியாகக் கருதினால் ஒத்த செங்குத்துயரம் RN ஆகும்.

அப்போது இணைகரம் $PQRS$ இன் பரப்பளவு $= PQ \times RN$ எனவும் எழுதலாம்.

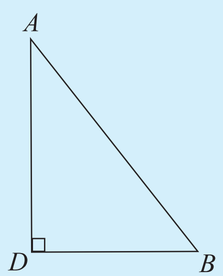
குறிப்பு

ஒரு முக்கோணியின் அல்லது இணைகரத்தின் செங்குத்துயரத்தின் நீளமும் பெரும்பாலும் செங்குத்துயரம் எனப்படும். இவ்விடயங்களைக் கொண்டு முன்னர் கற்ற முக்கோணிகளினதும் இணைகரங்களினதும் பரப்பளவைக் காணல் பற்றிக் கற்ற விடயங்களை நினைவுகூர்வதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியைச் செய்க.

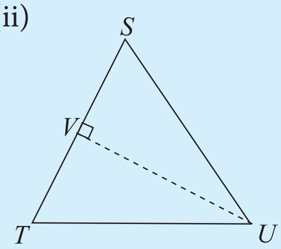
மீட்டற் பயிற்சி

1. பின்வரும் உருக்கள் ஒவ்வொன்றிலும் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளைக் கொண்டு அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

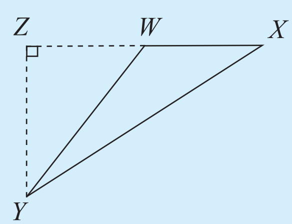
(i)

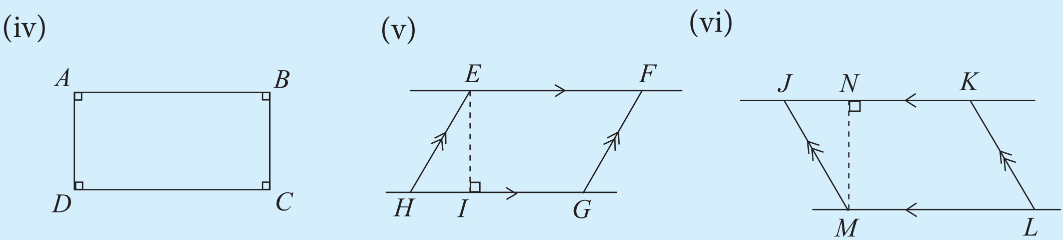


(ii)



(iii)

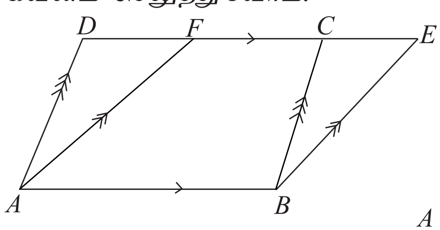




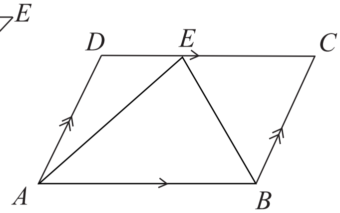
உருவம்	அடி	செங்குத்து உயரம்	பரப்பளவு (பக்கங்களின் பெருக்கமாக)
(i) முக்கோணி ABD (ii) முக்கோணி STU (iii) முக்கோணி WXY (iv) செவ்வகம் $ABCD$ (v) இணைகரம் $EFGH$ (vi) இணைகரம் $JKLM$			

8.1 ஒரே இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே ஒரே அடியைக் கொண்ட இணைகரங்களும் முக்கோணிகளும்

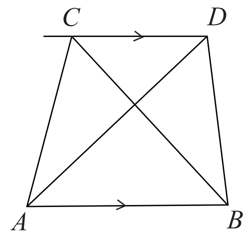
முதலில் ஒரே சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே, ஒரே அடி மீது உள்ள இணைகரங்களும் முக்கோணிகளும் என்பதன் கருத்தை அறிவதற்குப் பின்வரும் வரிப்படங்களில் கவனம் செலுத்துவோம்.



உரு (i)



உரு (ii)



உரு (iii)

உரு (i) இல் காணப்படும் $ABCD$, $ABEF$ ஆகிய இரு இணைகரங்களும் AB, DE என்னும் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே உள்ளன. இங்கு ''இடையே'' என்பதன் கருத்து ஒவ்வோர் இணைகரத்தினதும் இரு எதிர்ப் பக்கங்களும் இரு சமாந்தரக் கோடுகளின் மீது உள்ளன என்பதாகும். மேலும் அவ்விரு இணைகரங்களுக்கும் பக்கம் AB பொதுவாகும். இத்தகைய ஓர் அமைவில் அவ்விரு இணைகரங்களும் ஒரே சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையேயும் ஒரே அடியிலும் இருக்கின்றன எனப்படும். இங்கு பொதுப் பக்கம் AB ஆனது இரு இணைகரங்களுக்கும் அடியாகக் கருதப்பட்டுள்ளது.

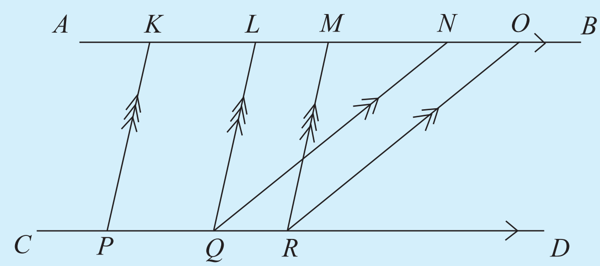
அப்பொது அடிக்கு ஒத்ததாக இரு இணைகரங்களும் ஒரே செங்குத்துத் தூரத்தில் இருக்கின்றன என்பது தெளிவாகும். அச்செங்குத்துத் தூரம் AB, DE ஆகிய இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள தூரமாகும்.

உரு (ii) இல் ஓர் இணைகரமும் ஒரு முக்கோணியும் ஒரே சமாந்தரச் சோடிகளுக்கிடையே ஒரே அடியில் இருக்கும் விதம் காணப்படுகின்றது. அவை இணைகரம் $ABCD$ யும் முக்கோணி ABE யும் ஆகும். இங்கு பொதுப் பக்கம் AB ஆகும். இங்கு முக்கோணியின் ஒரு பக்கமும் அதற்கு எதிரான உச்சியும் இரண்டு சமாந்தரக் கோடுகளின் மீது அமைவதை அவதானிக்க.

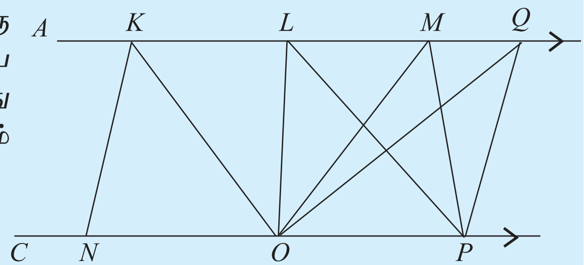
உரு (iii) இல் ஒரே சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே ஒரே அடி மீது இருக்கும் இரு முக்கோணிகள் உள்ளன. அவை ABC, ABD ஆகிய முக்கோணிகளுமாகும்.

பயிற்சி 8.1

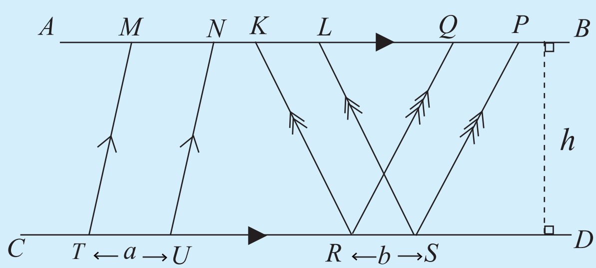
1. தரப்பட்டுள்ள உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப
   (i) நான்கு இணைகரங்களைப் பெயரிடுக.
   (ii) AB, CD ஆகிய இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே இருக்கும் பக்கம் QR ஐ அடியாகக் கொண்ட இரண்டு இணைகரங்களைப் பெயரிடுக.



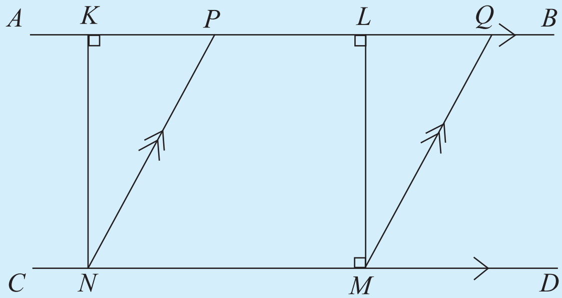
2. உருவில் AQ, CP ஆகிய இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக்கு மிடையே இருக்கும் ஒரே அடி OP இன் மீது உள்ள எல்லா முக்கோணிகளையும் எழுதுக.



3. உருவில் தரப்பட்டுள்ள AB, CD என்னும் சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிகளுக்கிடையே உள்ள செங்குத்துத் தூரம் h இனாலும் ஒவ்வோர் இணைகரத்தினதும் அடியின் நீளங்கள் a, b யினாலும் காட்டப்பட்டுள்ளன. அக்குறியீடுகளைக் கொண்டு $PQRS$, $KLSR$, $MNUT$ ஆகிய இணைகரங்களின் பரப்பளவுகளைக் காண்க.



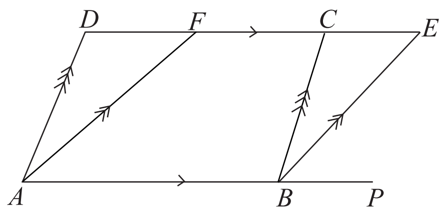
4. உருவில் AB, CD ஆகிய சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே செவ்வகம் $KLMN$ உம் இணைகரம் $PQMN$ உம் அமைந்துள்ளன. $NM = 10$ cm உம் $LM = 8$ cm உம் ஆகும்.



(i) செவ்வகம் $KLMN$ இன் பரப்பளவைக் காண்க.
(ii) இணைகரம் $PQMN$ இன் பரப்பளவைக் காண்க.
(iii) செவ்வகம் $KLMN$ இன் பரப்பளவுக்கும் இணைகரம் $PQMN$ இன் பரப்பளவுக்குமிடையே உள்ள தொடர்புடைமை யாது?

8.2 ஒரே இரு சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே ஒரே அடி மீது இருக்கும் இணைகரங்களின் பரப்பளவு

அடுத்ததாக நாம் ஒரே இரு சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே அடியின்மீது இருக்கும் இணைகரங்களின் பரப்பளவுகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பைக் கருதுவோம். உருவில் தரப்பட்டுள்ள இரு இணைகரங்களையும் கருதுவோம்.



இங்கு $ABCD$, $ABEF$ ஆகிய இரு இணைகரங்களின் பரப்பளவுகள் சமமாவெனப் பார்ப்போம். அதற்காக முதலில்

இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு = சரிவகம் $ABCF$ இன் பரப்பளவு + முக்கோணி AFD யின் பரப்பளவு

என்பதையும்

இணைகரம் $ABEF$ யின் பரப்பளவு = சரிவகம் $ABCF$ இன் பரப்பளவு + முக்கோணி BEC யின் பரப்பளவு

என்பதையும் அவதானிக்க.

ஆகவே, முக்கோணி AFD யின் பரப்பளவு = முக்கோணி BEC யின் பரப்பளவு ஆக இருந்தால் இரு இணைகரங்களினதும் பரப்பளவுகள் சமமாக இருத்தல் வேண்டுமெனக் காண்பீர்கள்.

உண்மையில் இவ்விரு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசைகின்றன. ஆகவே அவற்றின் பரப்பளவுகளும் சமமாகும். இவ்விரு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசைகின்றனவென ப.கோ.ப சந்தர்ப்பத்தைக் கருதி இவ்வாறு காட்டலாம்.

முக்கோணிகள் AFD, BEC என்பவற்றில்

$AD = BC$ (இணைகரத்தின் $ABCD$ இன் எதிர்ப் பக்கங்கள்)

$AF = BE$ (இணைகரத்தின் $ABEF$ இன் எதிர்ப் பக்கங்கள்)

மேலும் $D\hat{A}B = C\hat{B}P$ (ஒத்த கோணங்கள் $AD // BC$)

$F\hat{A}B = E\hat{B}P$ (ஒத்த கோணங்கள் $AF // BE$ ஆகையால்)

இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் கழிக்கும்போது $D\hat{A}F = C\hat{B}E$

இதற்கேற்ப, ப.கோ.ப. சந்தர்ப்பத்தின் கீழ், AFD, BEC ஆகிய இரு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசைகின்றன. இதிலிருந்து, மேலே ஆராய்ந்தவாறு

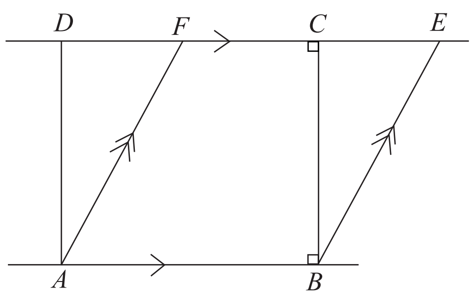
இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு = இணைகரம் $ABEF$ இன் பரப்பளவு எனக் கிடைக்கும். இப்பேற்றை ஒரு தேற்றமாகப் பின்வருமாறு எழுதிக் காட்டுவோம்.

தேற்றம் : ஒரே அடியின் மீது, ஒரே இரு சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே இருக்கும் இணைகரங்கள் பரப்பளவில் சமமாகும்.

இப்போது இத்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி ஒரு முக்கியமான பேறைப் பெறுவோம் ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பளவைக் காண்பதற்குப் பின்வரும் சூத்திரத்தை நீங்கள் முன்னைய தரங்களில் பயன்படுத்தியுள்ளீர்கள்.

ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பளவு $=$ அடி $\times$ செங்குத்து உயரம்.

இப்போது இப்பேறு எங்ஙனம் கிடைத்தது என்பது பற்றி நீங்கள் முன்னர் சிந்தித்துப் பார்த்திருக்கிறீர்களா? இப்போது நாம் மேற்குறித்த தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி இச்சூத்திரத்தை நிறுவிக் காட்டலாம்.



இங்கே ஒரே இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே, ஒரே அடி மீது இருக்கும் செவ்வகம் $ABCD$ யும் (அதாவது அது ஓர் இணைகரம்) ஓர் இணைகரம் $ABEF$ உம் உள்ளன. மேற்குறித்த தேற்றத்திற்கேற்ப அவற்றின் பரப்பளவுகள் சமம்.

ஆயினும் செவ்வகத்தின் பரப்பளவு = நீளம் $\times$ அகலம் என நாம் அறிவோம்.
இதற்கேற்ப இணைகரத்தின் பரப்பளவு = செவ்வகத்தின் பரப்பளவு

$= AB \times AD$

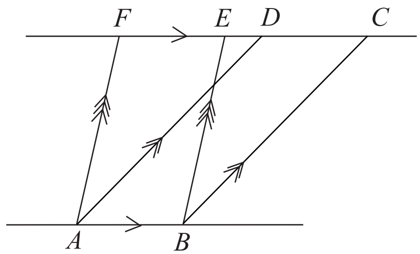
$= AB \times$ இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள செங் குத்துத் தூரம்

$=$ இணைகரத்தின் அடி $\times$ செங்குத்துத் தூரம்

இத்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திக் கணிப்புகள் நடைபெறும் விதத்தை இப்போது பார்ப்போம்.

உதாரணம் 1

உருவில் உள்ள இணைகரம் $ABEF$ இன் பரப்பளவு 80cm^2 உம் $AB = 8$ cm உம் ஆகும்.



(i) உருவில் ஒரே அடி மீது ஒரே இரு சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே இருக்கும் இணைகரங்களைப் பெயரிடுக.
(ii) இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு யாது?
(iii) AB, FC ஆகிய சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள செங்குத்து உயரத்தைக் காண்க.

(i) $ABEF$, $ABCD$
(ii) $ABEF$, $ABCD$ ஆகியன ஒரே அடி AB மீதும் AB, FC என்னும் இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையேயும் இருப்பதனால் இணைகரங்கள் $ABEF$ இனதும் $ABCD$ யினதும் பரப்பளவுகள் சமமாகும்.

$\therefore$ இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு 80cm^2 ஆகும்.

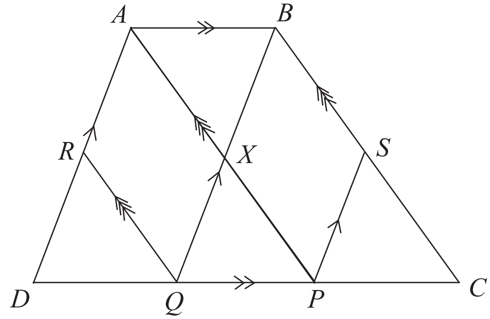
(iii) சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள செங்குத்து உயரம் h எனக் கொள்வோம்.
அப்போது $ABEF$ இன் பரப்பளவு $= AB \times h$

$80 = 8 \times h$

$h = 10$

$\therefore$ சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள செங்குத்து உயரம் 10 cm ஆகும்.
இனி, இத்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி நிறுவல்கள் செய்யப்படும் முறையை ஓர் உதாரணத்தின் மூலம் ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 2



உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப,

(i) $ABQD$, $ABCP$ ஆகியன இணைகரங்களெனக் காட்டுக.

(ii) $ABQD$, $ABCP$ ஆகியன பரப்பளவில் சமமான இணைகரங்களெனக் காட்டுக.

(iii) $\Delta SPC \equiv \Delta DQR$ என நிறுவுக.

(iv) இணைகரம் $AXQR$ இன் பரப்பளவு = இணைகரம் $BXPS$ இன் பரப்பளவு என நிறுவுக.

(i) நாற்பக்கல் $ABQD$ யில்

$AB//DQ$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$AD//BQ$ (தரப்பட்டுள்ளது)

நாற்பக்கலின் எதிர்ப் பக்கங்கள் சமாந்தரம் ஆகையால் $ABQD$ ஓர் இணைகரமாகும். அவ்வாறே $AB//PC$, $AP//BC$ ஆகையால் $ABCP$ உம் ஓர் இணைகரமாகும்.

(ii) $ABQD$, $ABCP$ ஆகிய இரு இணைகரங்களும் ஒரே அடி AB மீது, AB, DC ஆகிய ஒரே சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே இருப்பதனால், மேற்குறித்த தேற்றத்திற்கேற்ப அவை பரப்பளவில் சமமாகும்.

$\therefore$ இணைகரம் $ABQD$ யின் பரப்பளவு = இணைகரம் $ABCP$ யின் பரப்பளவு

(iii) உருவில் SPC, RDQ ஆகிய முக்கோணிகளில்

$S\hat{P}C = R\hat{D}Q$ ($SP//AD$, ஒத்த கோணங்கள்)

$S\hat{C}P = R\hat{Q}D$ ($SC//RQ$, ஒத்த கோணங்கள்)

$AB = PC$ (இணைகரம் $ABCP$ யின் எதிர்ப் பக்கங்கள்)

$AB = DQ$ (இணைகரம் $ABQD$ யின் எதிர்ப் பக்கங்கள்)

$PC = DQ$

$\therefore \Delta SPC \equiv \Delta DQR$ (கோ.கோ.ப.)

(iv) இணைகரம் $ABQD$ யின் பரப்பளவு $=$ இணைகரம் $ABCP$ யின் பரப்பளவு
(நிறுவப்பட்டது)

ΔRDQ இன் பரப்பளவு $= \Delta SPC$ யின் பரப்பளவு ($\Delta RDQ \equiv \Delta SPC$ ஆகையால்)

இணைகரம் $ABQD$ யின் பரப்பளவு $-$ ΔRDQ வின் பரப்பளவு $=$ இணைகரம் $ABCP$ யின் பரப்பளவு $-$ ΔSPC யின் பரப்பளவு

அப்போது உருவிற்கேற்பச் சரிவகம் $ABQR$ இன் பரப்பளவு $=$ சரிவகம் $ABSP$ யின் பரப்பளவு

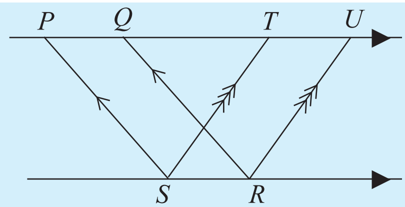
இருபக்கமும் ΔABX இன் பரப்பளவைக் கழிக்கும்போது

சரிவகம் $ABQR$ இன் பரப்பளவு $-$ ΔABX இன் பரப்பளவு $=$ $ABSP$ யின் பரப்பளவு $-$ ΔABX இன் பரப்பளவு

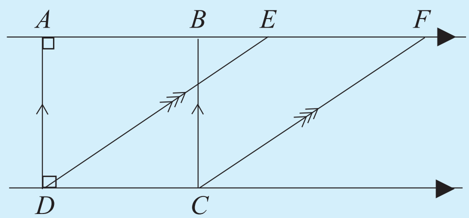
இணைகரம் $AXQR$ இன் பரப்பளவு $=$ இணைகரம் $BXPS$ இன் பரப்பளவு

பயிற்சி 8.2

1. உருவில் PU, SR என்னும் சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே இருக்கும் இரு இணை கரங்கள் உள்ளன. இணைகரம் $PQRS$ இன் பரப்பளவு 40 cm^2 ஆகும். இணைகரம் $TURS$ இன் பரப்பளவைக் கண்டு உங்கள் விடைக்குக் காரணங் காட்டுக.



2. தரப்பட்டுள்ள உருவில் $ABCD$ ஒரு செவ்வகமும் $CDEF$ ஓர் இணைகரமும் ஆகும். $AD = 7$ cm, $CD = 9$ cm எனின், $CDEF$ இன் பரப்பளவைக் காரணங் களுடன் எழுதுக.

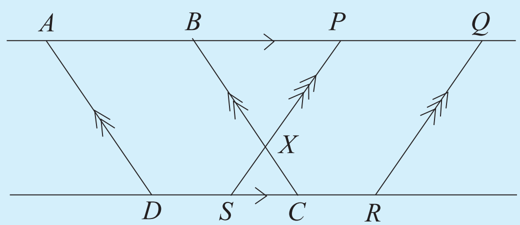


3. உருவில் AQ, DR ஆகிய சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே இருக்கும் $ABCD$, $PQRS$ என்னும் இரு இணை கரங்களில் $DS = CR$ எனின்,

(i) $DC = SR$ எனக் காட்டுக.

(ii) ஐங்கோணி $ABXSD$ யின் பரப்பளவு ஐங்கோணி $PQRCX$ இன் பரப்பளவுக்குச் சமமென நிறுவுக.

(iii) சரிவகம் $APSD$ யின் பரப்பளவு சரிவம் $BQRC$ யின் பரப்பளவிற்குச் சமமென நிறுவுக.

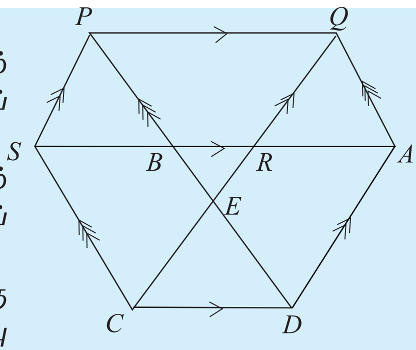


4. உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப,

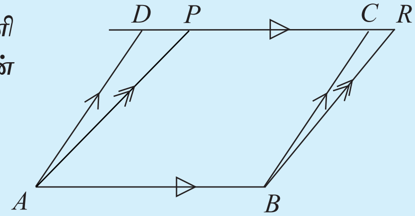
(i) இணைகரம் $PQRS$ இற்குப் பரப்பளவிற் சமமான இரு இணைகரங்களைப் பெயரிடுக.

(ii) இணைகரம் $ADCR$ இற்குப் பரப்பளவிற் சமமான இரு இணைகரங்களைப் பெயரிடுக.

(iii) இணைகரம் $PECS$ இன் பரப்பளவிற்கு இணைகரம் $QADE$ யின் பரப்பளவு சமமென நிறுவுக.



5. உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப முக்கோணி ADP யின் பரப்பளவு முக்கோணி BRC யின் பரப்பளவிற்குச் சமமென நிறுவுக.



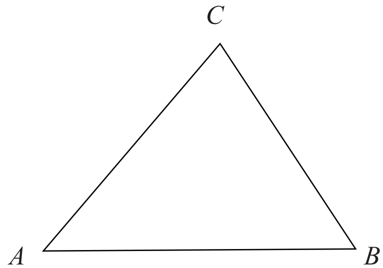
6. $AB = 6$ cm, $D\hat{A}B = 60^{\circ}$, $AD = 5$ cm ஆகவுள்ள இணைகரம் $ABCD$ யை அமைக்க. கோடு AB யில் இணைகரம் இருக்கும் பக்கத்தில் இருக்குமாறும் அதன் பரப்பளவிற்குச் சமமாக இருக்குமாறும் சாய்சதுரம் $ABEF$ ஐ அமைக்க. உங்கள் அமைப்பிற்கு நீங்கள் பயன்படுத்திய கேத்திரகணிதத் தேற்றத்தைக் குறிப்பிடுக.

8.3 ஒரே இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே ஒரே அடி மீது இருக்கும் இணைகரத்தினதும் முக்கோணியினதும் பரப்பளவுகள்

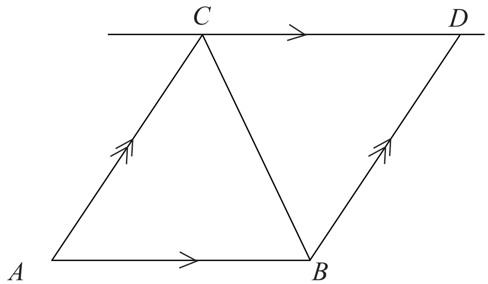
ஒரு முக்கோணியின் பரப்பளவைக் காண்பதற்குக் கீழே தரப்பட்டுள்ள சூத்திரத்தை முன்னைய தரங்களிலிருந்தே பயன்படுத்தியுள்ளீர்கள்.

ஒரு முக்கோணியின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times$ அடி $\times$ செங்குத்து உயரம்

இப்போது நாம் இச்சூத்திரம் ஏன் பொருத்தமானது என்பதை விளக்கத் தயாராகின்றோம். கீழே தரப்பட்டுள்ள முக்கோணி ABC யைக் கருதுவோம்.



அடுத்த உருவில் தரப்பட்டுள்ளவாறு C இற்கூடாக AB யிற்குச் சமாந்தரமாக ஒரு கோட்டை வரைந்து $ABDC$ இணைகரமாகுமாறு அச்சமாந்தரக் கோட்டின் மீது புள்ளி D ஐக் குறிப்போம். வேறுவிதமாக கூறுவதாயின் AB யிற்குச் சமந்தரமாக C யினூடாக வரையப்படும் கோடும் AC யிற்குச் சமாந்தரமாக C யினூடாக வரையப்படும் கோடும் இடைவெட்டும் புள்ளியை C எனப் பெயரிடுவோம்.



இப்போது முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவு இணைகரம் $ABDC$ இன் பரப்பளவின் அரைமடங்காகும். ஓர் இணைகரத்தில் மூலைவிட்டத்தினால் இணைகரமானது ஒருங்கிசைவான இரண்டு முக்கோணிகளாகப் பிரிக்கப்படுவதே இதற்குக் காரணமாகும். இது பற்றித் தரம் 10 இல் இணைகரங்கள் பாடத்தில் கற்றோம்.எனவே,

முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}$ இணைகரம் $ABDC$ இன் பரப்பளவு

$= \frac{1}{2} \times AB \times$ (AB, CD கோடுகளுக்கிடையே உள்ள செங்குத்துத் தூரம்)

$= \frac{1}{2} \times AB \times$ செங்குத்துத் தூரம்

அதாவது முக்கோணியின் பரப்பளவுக்காக நமக்குப் பரிச்சயமான சூத்திரம் கிடைத்துள்ளது.

இங்கு நாம் அவதானித்த முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times$ இணைகரம் $ABDC$ இன் பரப்பளவு

என்னும் பேற்றைத் திரும்பவும் கவனிக்க. இப்பாடத்தில் 8.2 இல் ஒரே இரு சமாந்தரக் கோடுகள் இரண்டிற்கிடையே ஒரே அடியின் மீதுள்ள இணைகரங்களின் பரப்பளவுகள் சமம் எனக் கற்றோம். எனவே மேற்குறித்த உருவிற்கேற்ப, AB, CD ஆகிய சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே அடி AB இன் மீதுள்ள வேறு எந்த இணைகரத்தினதும் பரப்பளவும் இணைகரம் $ABDC$ இன் பரப்பளவுக்குச் சமனாகும் அதாவது,

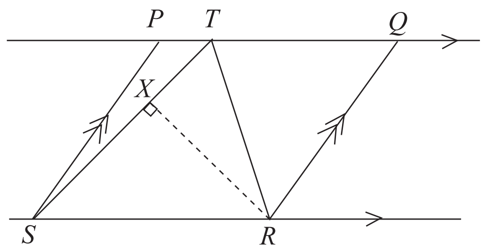
முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times$ (AB, CD சாமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே அடி AB மீதுள்ள எந்வோர் இணைகரத் தினதும் பரப்பளவு)

இப்பேறு ஒரு தேற்றமாகக் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

தேற்றம்: ஒரு முக்கோணியும் ஓர் இணைகரமும் ஒரே அடியின் மீதும் ஒரே இரு சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே இருப்பின், முக்கோணியின் பரப்பளவு அவ்விணைகரத்தின் பரப்பளவில் அரைப்பங்காகும்.

இத்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திக் கணிப்புகள் செய்யப்படும் விதம்பற்றி இப்போது ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1



உருவில் ஓர் இணைகரம் $PQRS$ உம் ஒரு முக்கோணி STR உம் ஒரே சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே ஒரே அடி மீது உள்ளன. இணைகரம் $PQRS$ இன் பரப்பளவு 60 cm^2 ஆகும்.

(i) முக்கோணி STR இன் பரப்பளவைக் காண்க. உங்கள் விடைக்குக் காரணம் தருக.
(ii) $ST = 6$ cm எனின், R இலிருந்து ST இற்கான செங்குத்துத் தூரத்தைக் காண்க.

(i) இணைகரம் $PQRS$ உம் முக்கோணி STR உம் ஒரே சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே இருப்பதோடு அதே வேளை ஒரே அடி மீதும் உள்ளன. ஆகவே முக்கோணி STR இன் பரப்பளவு இணைகரம் $PQRS$ இன் பரப்பளவில் அரைப்பங்காகும்.

$\therefore \Delta\, STR$ இன் பரப்பளவு $= 30 \text{ cm}^2$

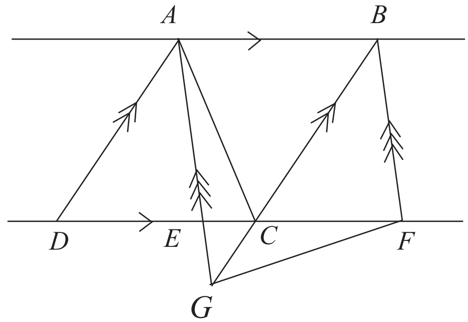
(ii) முக்கோணி STR இன் பரப்பளவு $= \dfrac{1}{2} \times ST \times RX$

$$30 = \frac{1}{2} \times 6 \times RX$$

$$RX = 10 \text{ cm}$$

$\therefore$ R இதிலிருந்து ST இற்கான செங்குத்துத் தூரம் 10 cm ஆகும்.

உதாரணம் 2



E ஆனது இணைகரம் $ABCD$ இன் பக்கம் DC மீது உள்ள ஒரு புள்ளியாகும். AE யிற்குச் சமாந்தரமாக B யிலிருந்து வரைந்த கோடு நீட்டப்பட்ட பக்கம் DC யை F இல் சந்திக்கின்றது. நீட்டப்பட்ட AE ஆனது நீட்டப்பட்ட கோடு BC யை G யிற் சந்திக்கின்றது.

(i) $ABFE$ ஓர் இணைகரம் எனவும்
(ii) $ABCD$, $ABFE$ ஆகிய இணைகரங்கள் பரப்பளவிற் சமம் எனவும்
(iii) முக்கோணி ACD யின் பரப்பளவு = முக்கோணி BFG யின் பரப்பளவு எனவும் நிறுவுக.

நிறுவல்

(i) நாற்பக்கல் $ABFE$ யில்
$AE//BF$ (தரப்பட்டுள்ளது)
$AB//EF$ (தரப்பட்டுள்ளது)
$\therefore$ $ABFE$ ஓர் இணைகரம் (எதிர்ப் பக்கங்கள் சமாந்தரம் ஆகையால்)

(ii) $ABCD$, $ABFE$ ஆகிய இரு இணைகரங்களும் AB, DF ஆகிய ஒரே சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையேயும் ஒரே அடி AB இன் மீதும் உள்ளன.
$\therefore$ தேற்றத்திற்கேற்ப இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு = இணைகரம் $ABFE$ யின் பரப்பளவு

(iii) இணைகரம் $ABCD$ யும் முக்கோணி ACD யும் DC, AB ஆகிய சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்குமிடையேயும் ஒரே அடி DC மீதும் உள்ளன.
$\therefore$ தேற்றத்திற்கேற்ப $\frac{1}{2}$ இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு $= \Delta\, ACD$ யின் பரப்பளவு

அவ்வாறே இணைகரம் $ABFE$ யும் முக்கோணி BFG யும் BF, AG ஆகிய சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையேயும் ஒரே அடி BF மீதும் உள்ளன.

அப்போது $\frac{1}{2}$ இணைகரம் $ABFE$ யின் பரப்பளவு $= \Delta\, BFG$ யின் பரப்பளவு

ஆனால், இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு $=$ இணைகரம் $ABFE$ யின் பரப்பளவு

ஆகையால், $\frac{1}{2}$ இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}$ இணைகரம் $ABFE$ யின் பரப்பளவு

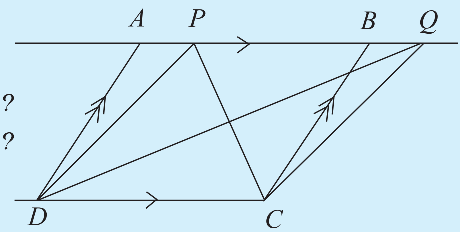
$\therefore$ முக்கோணி ACD யின் பரப்பளவு $=$ முக்கோணி BFG யின் பரப்பளவு

பயிற்சி 8.3

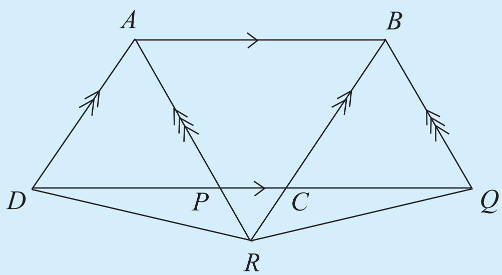
1. உருவில் உள்ள இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு $50\ \text{cm}^2$ ஆகும்.

(i) முக்கோணி PDC யின் பரப்பளவு யாது?

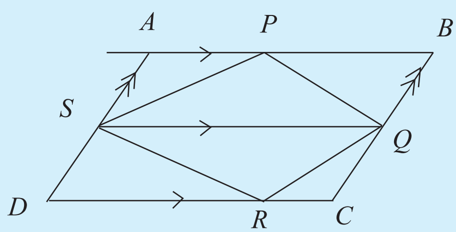
(ii) முக்கோணி DCQ வின் பரப்பளவு யாது?



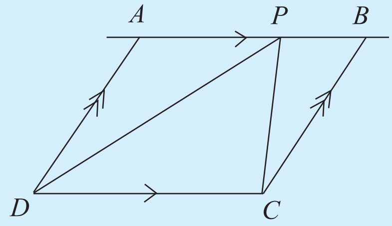
2. இணைகரம் $ABCD$ யில் பக்கம் DC மீது புள்ளி P உள்ளது. AP யிற்குச் சமாந்தரமாக B யினூடாக வரையப் பட்டுள்ள கோடு நீட்டப்பட்ட பக்கம் DC யை Q இற் சந்திக்கின்றது. நீட்டப் பட்ட AP யும் நீட்டப்பட்ட பக்கம் BC யும் R இற் சந்திக்கின்றன. முக்கோணி ADR இன் பரப்பளவு முக்கோணி BQR இன் பரப்பளவுக்குச் சமமென நிறுவுக.



3. உருவில் உள்ள இணைகரம் $ABCD$ யில் பக்கம் AD யை S இலும் பக்கம் BC யை Q இலும் சந்திக்குமாறு AB யிற்குச் சமாந்தரமாக SQ வரையப்பட்டுள்ளது. நாற்பக்கல் $PQRS$ இன் பரப்பளவு இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவின் அரைப்பங்கு என நிறுவுக.

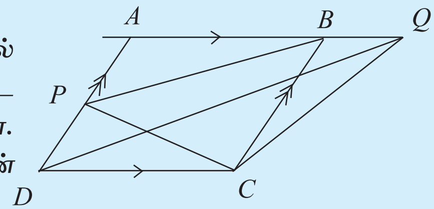


4. P ஆனது உருவில் உள்ள இணைகரம் $ABCD$ யின் பக்கம் AB மீது உள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளியாகும்.

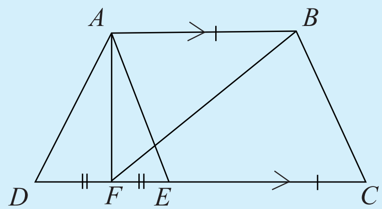


ΔAPD யின் பரப்பளவு $+$ ΔBPC யின் பரப்பளவு $=$ ΔDPC யின் பரப்பளவு என நிறுவுக.

5. உருவில் உள்ள இணைகரம் $ABCD$ யில் பக்கம் AD மீது புள்ளி P யும் நீட்டப்பட்ட பக்கம் AB மீது புள்ளி Q வும் உள்ளன. ΔCPB யின் பரப்பளவு $=$ ΔCQD யின் பரப்பளவு என நிறுவுக.



6. சரிவகம் $ABCD$ யில் $AB \,//\, CD$, $DC > AB$ ஆகும். $AB = CE$ ஆக இருக்குமாறு பக்கம் DC மீது புள்ளி E உள்ளது. முக்கோணி AFE யின் பரப்பளவு முக்கோணி ADF இன் பரப்பளவுக்குச் சமமாக இருக்குமாறு பக்கம் DE மீது புள்ளி F உள்ளது. சரிவகம் $ABFD$ யின் பரப்பளவு சரிவகம் $ABCD$ யின் பரப்பளவின் அரைப்பங்கென நிறுவுக.

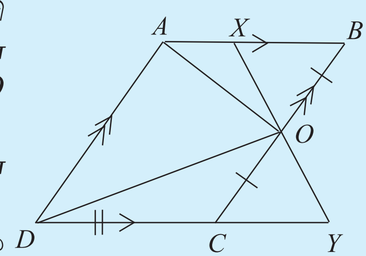


7. இணைகரம் $ABCD$ யின் பக்கம் BC யின் நடுப் புள்ளி O ஆகும். X என்பது பக்கம் AB மீது உள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளியாகும் நீட்டப்பட்ட XO வும் நீட்டப்பட்ட DC யும் Y யிற் சந்திக்கின்றன.

(i) ΔBOX இன் பரப்பளவு $=$ ΔCOY யின் பரப்பளவு எனவும்

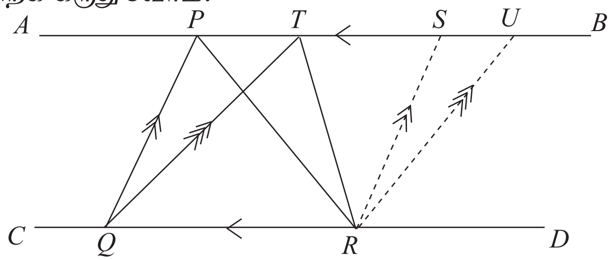
(ii) சரிவகம் $AXYD$ யின் பரப்பளவு $=$ சரிவகம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு எனவும்

(iii) சரிவகம் $AXYD$ யின் பரப்பளவு முக்கோணி ADO வின் பரப்பளவின் இரு மடங்கு எனவும் நிறுவுக.



8.4 ஒரே சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே, ஒரே அடி மீது உள்ள முக்கோணிகளின் பரப்பளவு

தரப்பட்டுள்ள உருவில் AB, CD ஆகிய சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையில் QR என்னும் ஒரே அடியைக் கொண்டு அமைந்திருக்கும் எந்தவொரு முக்கோணிகளுமான PQR, TQR என்பவற்றைக் கருதுவோம்.



முக்கோணி PQR இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}$ இணைகரம் $PQRS$ இன் பரப்பளவு

முக்கோணி TQR இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}$ இணைகரம் $TQRU$ இன் பரப்பளவு

ஆனால் ஒரே சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையேயும் QR ஒரே அடி மீதும் அமைந்துள்ளதால் தேற்றத்துக்கமைய

இணைகரம் $PQRS$ இன் பரப்பளவு = இணைகரம் $TQRU$ இன் பரப்பளவு

$\therefore$ $\frac{1}{2}$ இணைகரம் $PQRS$ யின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}$ இணைகரம் $TQRU$ யின் பரப்பளவு

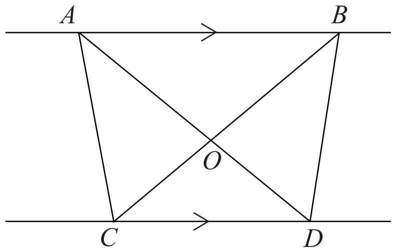
$\therefore$ முக்கோணி PQR இன் பரப்பளவு = முக்கோணி TQR இன் பரப்பளவு

QR ஒரே அடியைக் கொண்டு PU, QR என்னும் ஒரே இரு சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே அமைந்த முக்கோணி PQR, முக்கோணி TQR எனபவற்றின் பரப்பளவுகள் சமனாகின்றன. இதனைப் பின்வருமாறு ஒரு தேற்றமாகக் காட்டலாம்.

தேற்றம்: ஒரே அடி மீதும் ஒரே சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்குமிடையே இருக்கும் முக்கோணிகள் பரப்பளவிற் சமமாகும்.

இங்கு இனங்கண்ட தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திப் பிரசினங்கள் தீர்க்கப்படும் விதத்தைப் பின்வரும் உதாரணங்களைக் கொண்டு ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1



உருவில் $AB//CD$ ஆகும்.

(i) முக்கோணி ACD யிற்குப் பரப்பளவிற் சமமான ஒரு முக்கோணியைப் பெயரிடுவதற்கு ஏதுவான கேத்திரகணிதத் தேற்றத்தை எழுதுக.

(ii) முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவு 30 cm^2 எனின், முக்கோணி ABD யின் பரப்பளவைக் காண்க.

(iii) முக்கோணி AOC யின் பரப்பளவு, முக்கோணி BOD யின் பரப்பளவிற்குச் சமமெனநிறுவுக.

(i) முக்கோணி BCD

ஒரே சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே இருக்கும் முக்கோணிகளின் பரப்பளவுகள் சமம்.

(ii) முக்கோணி ABD யின் பரப்பளவு $= 30\ \text{cm}^2$

(iii) $\Delta ACD = \Delta BCD$ (ஒரே அடி CD ; $AB//CD$)

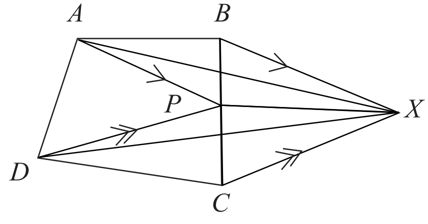
உருவிற்கேற்ப இவ்விரு முக்கோணிகளுக்கும் ΔCOD பொதுவாகும். அப்பகுதியை நீக்கும்போது

$$\Delta ACD - \Delta COD = \Delta BCD - \Delta COD$$
$$\therefore \Delta AOC = \Delta BOD$$

உதாரணம் 2

நாற்பக்கல் $ABCD$ யில் பக்கம் BC மீது புள்ளி P உள்ளது. AP யிற்குச் சமாந்தரமாக B யினூடாக வரையப்பட்டுள்ள கோடும் DP யிற்குச் சமாந்தரமாக C யினூடாக வரையப்பட்டுள்ள கோடும் X இற் சந்திக்கின்றன.

ΔADX இன் பரப்பளவு நாற்பக்கல் $ABCD$ இன் பரப்பளவிற்குச் சமமென நிறுவுக.



நிறுவல் : AP, BX ஆகிய சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே இருக்கும் அதேவேளை அடி AP மீது APB, APX ஆகிய முக்கோணிகள் இருக்கின்றமையால், தேற்றத்திற்கேற்ப

$\Delta APB = \Delta APX$ ——— (1)

அவ்வாறே $DP//CX$ ஆகையால்,

$\Delta DPC = \Delta DPX$ ——— (2)

(1) + (2), $\Delta ABP + \Delta DPC = \Delta APX + \Delta DPX$

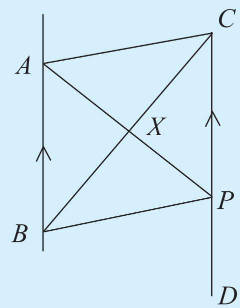
இரு பக்கங்களுடனும் ΔADP இன் பரப்பளவைக் கூட்டுவோம்.

அப்போது $\Delta ABP + \Delta DPC + \Delta ADP = \Delta APX + \Delta DPX + \Delta ADP$

நாற்பக்கல் $ABCD = \Delta ADX$

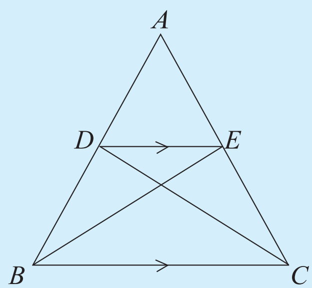
பயிற்சி 8.4

1. உருவில் உள்ள AB, CD ஆகிய இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே இருக்கும் முக்கோணி ABP யின் பரப்பளவு 25 cm^2 ஆகும்.



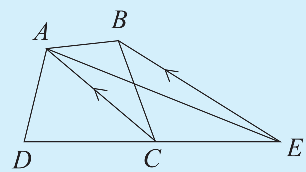
(i) முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவு யாது ?
(ii) முக்கோணி ABX இன் பரப்பளவு 10 cm^2 எனின், முக்கோணி ACX இன் பரப்பளவு யாது ?
(iii) ACX, BPX ஆகிய முக்கோணிகளின் பரப்பளவுகளுக் கிடையே உள்ள தொடர்பு யாது?

2. முக்கோணி ABC யில் பக்கம் AB யை D யிலும் பக்கம் AC யை E யிலும் சந்திக்குமாறு BC யிற்குச் சமாந்தரமாக DE வரையப்பட்டுள்ளது.



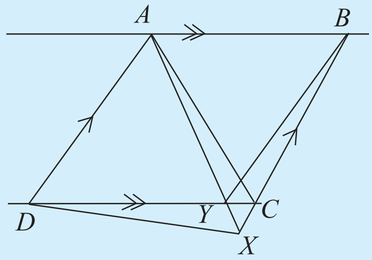
(i) ΔBED யிற்குப் பரப்பளவிற் சமமான ஒரு முக்கோணியைப் பெயரிடுக.
(ii) ΔABE யும் ΔADC யும் பரப்பளவிற் சமமென நிறுவுக.

3. நாற்பக்கல் $ABCD$ யில் மூலைவிட்டம் AC யிற்குச் சமாந்தரமாக B யினூடாக வரையப்பட்டுள்ள கோடு நீட்டப்பட்ட DC யை E யிற் சந்திக்கின்றது.



(i) ΔABC யிற்குப் பரப்பளவிற் சமமான ஒரு முக்கோணியைப் பெயரிடுக. விடைக்குக் காரணங் காட்டுக.
(ii) நாற்பக்கல் $ABCD$ யின் பரப்பளவு முக்கோணி ADE யின் பரப்பளவிற்குச் சமமென நிறுவுக.

4. இணைகரம் $ABCD$ யில் A யிலிருந்து வரையப்பட்டுள்ள யாதாயினும் ஒரு கோடு பக்கம் DC யை Y யிலும் நீட்டப்பட்ட பக்கம் BC யை X இலும் இடைவெட்டுகின்றது.



(i) ΔDYX, ΔAYC ஆகியன பரப்பளவிற் சமம் என நிறுவுக.

(ii) ΔBCY, ΔDYX ஆகியன பரப்பளவிற் சமம் என நிறுவுக.

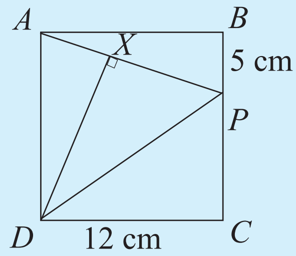
5. இணைகரம் $ABCD$ யில் பக்கம் BC மீது புள்ளி Y உள்ளது. நீட்டப்பட்ட கோடு AB யும் நீட்டப்பட்ட கோடு DY யும் X இற் சந்திக்கின்றன. முக்கோணி AXY இன் பரப்பளவு முக்கோணி BCX இன் பரப்பளவிற்குச் சமமென நிறுவுக.

6. BC என்பது 8 cm நீளமுள்ள ஒரு நிலைத்த நேர்கோட்டுத் துண்டமாகும். முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவு 40 cm^2 ஆக இருக்குமாறு புள்ளி A யின் ஒழுக்கை ஒரு பரும்படிப் படத்தின் மூலம் விவரிக்க.

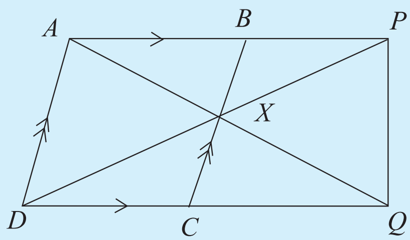
7. $AB = 8$ cm, $AC = 7$ cm, $BC = 4$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி ABC யை அமைக்க. AB யிலிருந்து C இருக்கும் பக்கத்தில் P இருக்குமாறும் பரப்பளவில் முக்கோணி ABC யிற்குச் சமமாக இருக்குமாறும் $PA = PB$ ஆக இருக்குமாறும் உள்ள முக்கோணி PAB யை அமைக்க.

பலவினப் பயிற்சி

1. சதுரம் $ABCD$ யின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 12 cm ஆகும். $BP = 5$ cm ஆக இருக்குமாறு பக்கம் BC மீது புள்ளி P உள்ளது. D யில் இருந்து AP யிற்கு வரைந்த செங்குத்தின் அடி X ஆகும். DX இன் நீளத்தைக் காண்க.



2. X என்பது இணைகரம் $ABCD$ யின் பக்கம் BC மீது உள்ள ஒரு புள்ளியாகும். நீட்டப் பட்ட DX ஆனது நீட்டப்பட்ட பக்கம் AB யை P யிலும் நீட்டப்பட்ட AX ஆனது நீட்டப்பட்ட DC யை Q விலும் சந்திக்கின்றன. முக்கோணி PXQ வின் பரப்பளவு இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவில் அரைப்பங்கென நிறுவுக.



3. இணைகரம் $PQRS$ இன் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று O இல் இடைவெட்டுகின்றன. பக்கம் SR மீது புள்ளி A உள்ளது. முக்கோணி POQ வினதும் முக்கோணி PAQ வினதும் பரப்பளவுகளுக்கிடையே உள்ள விகிதத்தைக் காண்க. (உதவி : பொருத்தமான அமைப்பைப் பயன்படுத்தவும்)

4. $ABCD$, $ABEF$ ஆகியன பக்கம் AB யின் இரு பக்கங்களிலும் வரையப்பட்ட பரப்பளவிற் சமமற்ற இரு இணைகரங்களாகும்.
   (i) $DCEF$ ஓர் இணைகரம் எனவும்
   (ii) இணைகரம் $DCEF$ இன் பரப்பளவு $ABCD$, $ABEF$ ஆகிய இணைகரங்களின் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமம் எனவும் நிறுவுக.

5. இணைகரம் $ABCD$ யில் பக்கம் AB யை E யிலும் பக்கம் AD யை F இலும் இடைவெட்டுமாறு BD யிற்குச் சமாந்தரமாக EF வரையப்பட்டுள்ளது. (உதவி : பொருத்தமான அமைப்பைப் பயன்படுத்தவும்)
   (i) ΔBEC யும் ΔDFC யும் பரப்பளவிற் சமம் எனவும்
   (ii) ΔAEC யும் ΔAFC யும் பரப்பளவிற் சமம் எனவும் நிறுவுக.

மீட்டற் பயிற்சி

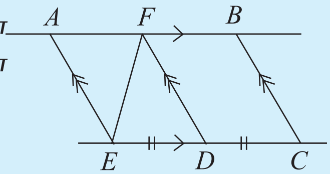
1 ஆம் தவணை

பகுதி I

1. பெறுமானங் காண்க. $2\sqrt{3} - \sqrt{3}$

2. $10^{0.5247} = 3.348$ ஆயின் $\lg 0.3348$ இன் பெறுமானங் காண்க.

3. உருவிலுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப முக்கோணி AFE இன் பரப்பளவானது உரு $ABCE$ பரப்பளவின் என்ன பின்னமாகும்?



4. $A^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2$ ஆயின் A இன் பெறுமானத்தை x, y என்பவற்றின் சார்பில் தருக.

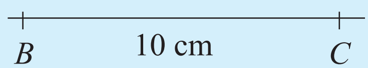
5. ஒரே அளவிலான இரண்டு சதுரச் செங்கூம்பகங்களின் சதுரவடிவ முகங்கள் ஒன்றுடனொன்று ஒட்டப்பட்டு ஒரு எண்முகி செய்யப்பட்டுள்ளது. அதன் மொத்த மேற்பரப்பளவு $384\ \text{cm}^2$ ஆயின், சதுரக் கூம்பகத்தின் ஒரு முக்கோண முகத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

6. சுருக்குக. $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{1-x}$

7. பெறுமானங் காண்க. $\log_3 27 - \log_4 16$

8. 1cm^3 இன் திணிவு 4g ஆகவுள்ள ஒரு விசேட பதார்த்தத்தினால் தயாரிக்கப்பட்ட ஒரு திண்மக் கோளத்தின் திணிவு 120 g ஆகும். அக்கோளத்தின் கனவளவைக் காண்க.

9. உருவில் ஒன்றுக்கொன்று 10 cm தூரத்தில் அமைந்துள்ள B, C என்னும் நிலையான புள்ளிகள் தரப்பட்டுள்ளன. முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவு $20\ \text{cm}^2$ ஆகுமாறு புள்ளி A இன் ஒழுக்கைப் பரும்படியாக வரைக.

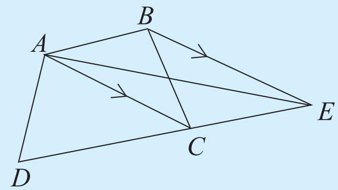


10. $\lg 5 = 0.6990$ எனின் $\lg 2$ இன் பெறுமானங் காண்க.

11. விட்டத்திற்குச் சமனான உயரத்தையுடைய ஓர் உருளையின் வளைந்த மேற் பரப்பின் பரப்பளவு அதே விட்டத்தையுடைய ஒரு கோளத்தின் கனவளவுக்குச் சமமானது எனக் காட்டுக.

12. $\sqrt{5} = 2.23$ எனக் கொண்டு $\sqrt{20}$ இன் பெறுமானங் காண்க.

13. உருவிலுள்ள நாற்பக்கல் $ABCD$ இன் பரப்பளவு முக்கோணி ADE இன் பரப்பளவுக்குச் சமமானது எனக் காட்டுக.



14. பெறுமானங் காண்க. $\sqrt{75} \times 2\sqrt{3}$

15. சுருக்குக. $\dfrac{3x}{x^2 - 1} \times \dfrac{x(x-1)}{3}$

பகுதி II

1. (i) $x + \dfrac{1}{x} = 3$ ஆயின் $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$ இன் பெறுமானங் காண்க.

   (ii) சுருக்குக. $\dfrac{m^2 - 4n^2}{mn(m + 2n)} \div \dfrac{m^2 - 4mn + 4n^2}{m^2n^2}$

2. (i) x இன் எப்பெறுமானத்திற்கு $2 \lg x = \lg 3 + \lg (2x - 3)$ ஆகும்?

   (ii) x இன் பெறுமானங் காண்க. $2 \lg x + \lg 32 - \lg 8 = 2$

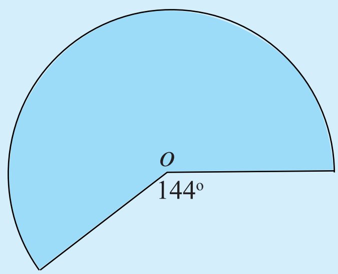
   (iii) மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தாது பெறுமானங் காண்க.

   $$\log_2 \frac{3}{4} - 2\log_2 \left(\frac{3}{16}\right) + \log_2 12 - 2$$

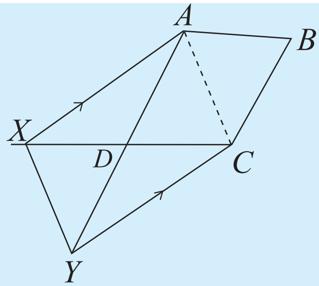
   (iv) மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திச் சுருக்கி விடையை இரண்டு தசமதானங்களுக்குத் தருக.

   $$\frac{\sqrt{0.835} \times 0.75^2}{4.561}$$

3. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள ஆரை r ஐயும் மையம் O வையும் உடைய உலோக அடரில் இருந்து சாயுயரம் r உம் உச்சி O வையும் உடைய செவ்வட்டக் கூம்பு ஒன்று ஆக்கப்பட்டுள்ளது. ஆரை r ஆகவுடைய n கோள வடிவ பனிக்கட்டிகள் (தலை கீழாகப் பிடிக்கப்பட்ட) இக்கூம்பினுள் இடப்படுகின்றது. பனிக்கட்டி உருகும்போது கூம்பு முற்றாக நீரினால் நிரம்புகின்றது எனின், $125na^3 = 9r^3$ எனக்காட்டுக.



4.(a) உருவிலுள்ள இணைகரம் $ABCD$ இன் பக்கம் CD ஆனது X வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது. AX இற்குச் சமாந்தரமாகுமாறு C இனூடாக வரைந்த கோட்டை நீட்டப்பட்ட AD ஆனது Y இல் சந்திக்கின்றது.



(i) முக்கோணி AXY இன் பரப்பளவிற்குச் சமனான பரப்பளவுடைய ஒரு முக்கோணியைப் பெயரிடுக. உமது விடைக்கான காரணத்தைத் தருக.

(ii) முக்கோணி XDY இன் பரப்பளவின் இருமடங்கானது இணைகரம் $ABCD$ இன் பரப்பளவு என நிறுவுக.

(b) கவராயம், நேர்விளிம்பு cm/mm ஆகியவற்றை மாத்திரம் பயன்படுத்தி

(i) $AB = 5.5$ cm, $A\hat{B}C = 60^{\circ}$, $BC = 4.2$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி ABC ஐ அமைக்க.

(ii) முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவின் இருமடங்கு பரப்பளவுடைய சாய்சதுரம் $ABPQ$ ஐ அமைக்க.

5. இணைகரம் $ABCD$ இல் O என்பது BC இன் மீது அமைந்துள்ள யாதாயினுமொரு புள்ளியாகும். DO இற்குச் சமாந்தரமாக A இனூடாக வரையப்பட்ட கோடு CB ஐ P இல் சந்திக்கின்றது. நீட்டப்பட்ட கோடு AO ஆனது நீட்டப்பட்ட கோடு DC ஐ Q இல் சந்திக்கின்றது.

(i) தரப்பட்டுள்ள தகவல்களை உள்ளடக்கி பருமட்டான ஒரு படம் வரைக.

(ii) இணைகரம் $ABCD$ இன் பரப்பளவிற்கும் முக்கோணி ADO இன் பரப்பளவிற்கும் இடையிலான தொடர்பை எழுதுக.

(iii) முக்கோணி ABP இன் பரப்பளவானது முக்கோாணி BOQ இன் பரப்பளவிற்குச் சமமானது என நிறுவுக.

6. ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் அடியின் ஆரை 7 cm உம் செங்குத்துயரம் 12 cm உம் ஆகும்.

(i) கூம்பின் கனவளவைக் காண்க.

(ii) கூம்பின் ஆரையை மாற்றாது செங்குத்துயரத்தை இருமடங்காக மாற்றினால் இக்கூம்பின் கனவளவு முன்னைய கூம்பின் கனவளவின் எத்தனை மடங்காகும்.

(iii) முன்னைய கூம்பின் செங்குத்துயரத்தை மாற்றாது அடியின் ஆரையை இருமடங்காக மாற்றினால், அக்கூம்பின் கனவளவு முன்னைய கூம்பின் கனவளவின் எத்தனை மடங்காகும்.

[redacted]

[redacted]

கலைச் சொற்கள்

அ

அட்சரகணிதப் பின்னங்கள்	වීජීය භාග	Algebraic fractions
அடி	පාදය	Base
அரியம்	ප්‍රිස්මය	Prism

ஆ

ஆரை	අරය	Radius

இ

இணைகரம்	සමාන්තරාස්‍රය	Parallelogram

ஈ

ஈருறுப்புக் கோவை	ද්විපද ප්‍රකාශන	Binomial expressions

உ

உறுப்பு	පදය	Term

ஒ

ஒரே அடி	එකම ආධාරකය	Same base

க

கனம்	ඝනායිතය	Cube
கனவளவு	පරිමාව	Volume
கூம்பகம்	පිරමීඩය	Pyramid
கூம்பு	කේතුව	Cone
கோளம்	ගෝලය	Sphere

ச

சதுர வடிவமான	සමචතුරස්‍රාකාර	Square shape
சமாந்தரக் கோடுகள்	සමාන්තර රේඛා	Parallel lines
சாயுயரம்	ඇළ උස	Slant height
சாவி	යතුර	Key
சிறப்பியல்பு	පූර්ණාංශය	Characteristic
சுட்டி	දර්ශක	Indices
செங்குத்து உயரம்	ලම්බ උස	Perpendicular height
செங்கூம்பகம்	ඍජු පිරමීඩය	Right pyramid
செவ்வட்டக்கூம்பு	ඍජු වෘත්ත කේතුව	Right circular cone
சேடு	කරණී	Surds

த

தசமக் கூட்டு	දශමාංශය	Mantissa
திரிகோணகணித விகிதங்கள்	ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත	Trignometric ratios
தேற்றம்	ප්‍රමේයය	Theorem
தொகுதி	ලවය	Numerater

ந

நிகர்மாற்று	පරස්පරය	Reciprocal
நிறைவெண்கள்	නිඛිල	Integers

ப

பகுதி	හරය	Denominator
பரப்பளவு	වර්ගඵලය	Area
பரிதி	පරිධිය	Circumference
பிரிகோடு	වියුති	Bar
பெருக்கல்	ගුණ කිරීම	Multiplication
பொது மடங்குகளுட் சிறியது	කුඩාම පොදු ගුණාකාරය	Least common multiple
பொதுப் பகுதி	පොදු හරය	Common denominator

ம

மடக்கை	ලඝුගණක	Logarithm
மடங்கு தசமம் (மீளும் தசமம்)	සමාවර්ත දශම	Recurring decimals
முக்கோண வடிவமான	ත්‍රිකෝණාකාර	Triangular
முக்கோணி	ත්‍රිකෝණය	Triangle
மெய் எண்கள்	තාත්වික සංඛ්‍යා	Real numbers
மேற்பரப்பளவு	පෘෂ්ඨ වර්ගඵල	Surface Area
முடிவில் தசமம்	අනන්ත දශම	Infinite decimals
முடிவுறு தசமம்	අන්ත දශම	Finite decimals
முழுமைச் சேடு	අඛිල කරණී	Entire surds

வ

வகுத்தல்	බෙදීම	Division
வட்ட வடிவான	වෘත්තාකාර	Circular
வர்க்கம்	වර්ගායිතය	Squared
வலு	බලය	Power
வளை மேற்பரப்பு	වක්‍ර පෘෂ්ඨය	Curved Surface
விகிதமுறா எண்கள்	අපරිමේය සංඛ්‍යා	Irrational numbers
விகிதமுறும் எண்கள்	පරිමේය සංඛ්‍යා	Rational numbers
விஞ்ஞான முறைக் கணிகருவி	විද්‍යාත්මක ගණක යන්ත්‍රය	Scientific calculator
விஞ்ஞான முறைக் குறிப்பீடு	විද්‍යාත්මක අංකනය	Scientific notation
விரிவு	ප්‍රසාරණය	Expansion

பாடத்திட்டம்

உள்ளடக்கம்	தேர்ச்சி மட்டம்
முதலாம் தவணை	
1. மெய்யெண்கள்	10
2. சுட்டிகளும் மடக்கைகளும் I	08
3. சுட்டிகளும் மடக்கைகளும் II	06
4. திண்மங்களின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு	05
5. திண்மங்களின் கனவளவு	05
6. ஈருறுப்புக் கோவைகள்	04
7. அட்சரகணிதப் பின்னங்கள்	04
8. சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையில் உள்ள	
தளவுருவங்களின் பரப்பளவு	12
இரண்டாம் தவணை	
09. சதவீதம்	06
10. பங்குகள்	05
11. நடுப்புள்ளித் தேற்றம்	05
12. வரைபுகள்	12
13. சமன்பாடுகள்	10
14. சமகோண முக்கோணிகள்	12
15. தரவுகளை வகைகுறித்தலும் விளக்கம்	12
கூறலும்	
16. பெருக்கல் விருத்தி	06
மூன்றாம் தவணை	
17. பைதகரஸ் தேற்றம்	04
18. திரிகோணகணிதம்	12
19. தாயங்கள்	08
20. சமனிலிகள்	06
21. வட்ட நாற்பக்கல்	10
22. தொடலிகள்	10
23. அமைப்புகள்	05
24. தொடைகள்	06
25. நிகழ்தகவு	07