

காரணிகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- * நான்கு உறுப்புகள் உள்ள அட்சரகணிதக் கோவைகளின் இரு உறுப்புகளாகப் பொதுக் காரணிகளை வேறுபடுத்துவதன் மூலம் கோவையை இரு காரணிகளின் பெருக்கமாக எடுத்துரைத்தல்
- * இருபடிக் கோவையின் காரணிகளைச் சரியாக எடுத்துரைத்தல்
- * இரு வர்க்கங்களின் வித்தியாசத்தின் காரணிகளை எடுத்துரைத்தல் என்னும் தேர்ச்சிகளை அடைவீர்கள்.

தரம் 8 இல் கற்ற காரணிகள் பற்றிய அறிவைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் அட்சரகணிதக் கோவைகளின் காரணிகளை எழுதுக.

பயிற்சி 7.1

(i) $2k - 12$

(iii) $2ab - 8a + 4a^2$

(v) $30y^2 - 6y - 6$

(vii) $12a^3 - 36a^2b - 24ab^2$

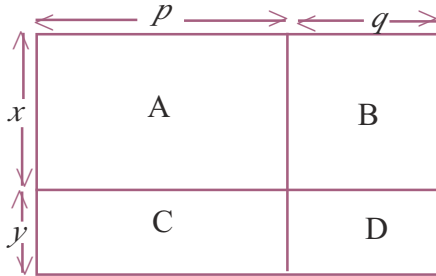
(ii) $3x^2 - 5xy$

(iv) $5x^2 - 15xy - 20xy^2$

(vi) $8c^2 - 6cd + 2c$

(viii) $6p - 24p^2 + 30p^3$

7.1 நான்கு உறுப்புகள் உள்ள அட்சரகணிதக் கோவைகளின் காரணிகள்



உருவில் காணப்படும் செவ்வகத்தின் பரப்பளவானது A, B, C, D என்னும் நான்கு செவ்வகங்களின் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமம்.

பகுதிகளின் மொத்தத்தைக் கொண்டு பரப்பளவைக் காணல்

$A + B + C + D$ பகுதிகளின் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகை

முழு உருவினதும் மொத்த நீளம்

அகலம்

மொத்தப் பரப்பளவு

ஆகவே $px + qx + py + qy$

$$= px + qx + py + qy$$

$$= p + q$$

$$= x + y$$

$$= (p + q)(x + y)$$

$$= (p + q)(x + y) \text{ ஆகும்.}$$

அட்சரகணிதக் கோவைகள் பற்றி ஆராயும்போது $px + qx + py + qy$ என்னும் கோவையின் காரணிகள் $(p + q), (x + y)$ என எடுத்துரைக்கலாம்.

$(p + q)(x + y)$ ஐ விரிப்பதன் மூலமும் நீங்கள் இதன் உண்மையை மேலும் விளங்கிக்கொள்ளலாம்.

$$\begin{aligned}(p + q)(x + y) &= p(x + y) + q(x + y) \\ &= px + py + qx + qy\end{aligned}$$

இரு உறுப்புகளாக எடுத்துப் பொதுக் காரணிகளை நீக்கி எழுதுவதன் மூலம்

$$\begin{aligned}px + py + qx + qy \\ &= p(x + y) + q(x + y) \\ &= (p + q)(x + y) \text{ ஐப் பெறலாம்.}\end{aligned}$$

உதாரணம் 7.1

$3a - 6c + 2ak - 4ck$ யின் காரணிகளைக் காண்க.

இக்கோவையில் 2 உறுப்புகள் வீதம் எடுத்துப் பொதுக் காரணிகளை நீக்கும்போது $3(a - 2c) + 2k(a - 2c)$ என எழுதலாம்.

$$\begin{aligned}3a - 6c + 2ak - 4ck &= 3(a - 2c) + 2k(a - 2c) \\ &= (a - 2c)(3 + 2k) \quad [(a - 2c) \text{ பொதுக் காரணியாகையால்}] \\ (a - 2c)(3 + 2k) &\text{ என்னும் கோவைகளைப் பெருக்கி இக்காரணிகளின் செம்மையைச் சோதிக்கலாம்.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a - 2c)(3 + 2k) \\ &= a(3 + 2k) - 2c(3 + 2k) \\ &= 3a + 2ak - 6c - 4ck\end{aligned}$$

உதாரணம் 7.2

$c^2 - 3c + bc - 3b$ யின் காரணிகளைக் காண்க.

$$\begin{aligned}c^2 - 3c + bc - 3b &= c(c - 3) + b(c - 3) \\ &= (c - 3)(c + b)\end{aligned}$$

உதாரணம் 7.3

$x^2 + xy - x - y$ யின் காரணிகளைக் காண்க.

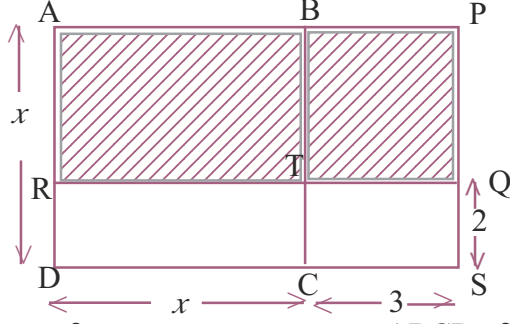
$$\begin{aligned}x^2 + xy - x - y &= x(x + y) - 1(x + y) \\ &= (x + y)(x - 1)\end{aligned}$$

பயிற்சி 7.2

இவ்விரண்டு உறுப்புகளாக வேறாக்கிப் பொதுக் காரணிகளைக் காண்பதன் மூலம் பின்வரும் கோவைகளின் காரணிகளைக் காண்க. அக்காரணிகளைப் பெருக்குவதன் மூலம் செம்மையைச் சோதிக்க.

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| 1. $ab + ac + 2b + 2c$ | 2. $p^2 - pq + 3pr - 3qr$ |
| 3. $ax - ay - bx + by$ | 4. $pr + pt - qr - qt$ |
| 5. $2pq + 6ps - 5q - 15s$ | 6. $x^2 + 2xy - 3x - 6y$ |
| 7. $2ab - 2ac + b - c$ | 8. $x^2 - 3xy - 6x + 18y$ |
| 9. $4 - 4a + c - ac$ | 10. $k - kl - l + l^2$ |

7.2 இருபடிக் கோவைகளின் காரணிகள்



உருவில் காணப்படும் சதுரம் ABCD யின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் x அலகுகள் ஆகும். BP யின் நீளம் 3 அலகுகள் ஆகும். QS இன் நீளம் 2 அலகுகள் ஆகும். செவ்வகம் APQR இன் பரப்பளவு பற்றி ஆராய்வோம்.

$$\text{நீளம் } AP = x + 3$$

$$\text{அகலம் } AR = x - 2$$

$$\text{APQR இன் பரப்பளவு} = (x + 3)(x - 2)$$

$$\begin{aligned} \text{APQR இன் பரப்பளவு} &= \text{APSD இன் பரப்பளவு} - \text{SDRQ இன் பரப்பளவு} \\ &= x(x + 3) - 2(x + 3) \\ &= x^2 + 3x - 2x - 6 \\ &= x^2 + x - 6 \end{aligned}$$

இப்பரப்பளவைப் பின்வருமாறும் காணலாம்.

$$\begin{aligned} \text{APQR இன் பரப்பளவு} &= \text{ABTR இன் பரப்பளவு} + \text{BPQT இன் பரப்பளவு} \\ &= x(x - 2) + 3(x - 2) \\ &= x^2 - 2x + 3x - 6 \\ &= x^2 + x - 6 \end{aligned}$$

எல்லாக் கோவைகளையும் கருதும்போது

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2) \text{ எனத் தெளிவாகிறது.}$$

இதற்கேற்ப $x^2 + x - 6$ இன் காரணிகள் $(x + 3)$, $(x - 2)$ ஆகும்.

இவ் அட்சரகணிதக் கோவையின் காரணியாக்கலை பின்வருமாறும் ஆராய்வோம்.

$x^2 + x - 6$ என்னும் அட்சரகணிதக் கோவையை ஆராயும்போது உறுப்பு x^2 இனதும் மாறாப் பெறுமானத்தினதும் பெருக்கம் $-6x^2$ ஆகும்.

$-6x^2$ இன் எல்லாக் காரணிகளையும் எழுதும்போது பின்வரும் காரணிச் சோடிகள் கிடைக்கும்.

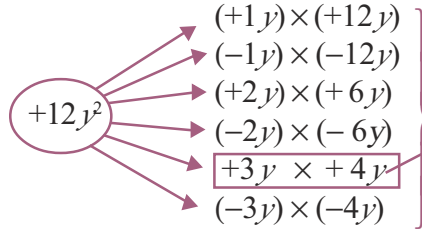
$$\begin{array}{l} \nearrow (-6x) \times (+x) \\ \nearrow 6x \times (-x) \\ \rightarrow (+3x) \times (-2x) \leftarrow 3x + (-2x) = x \\ \searrow (-3x) \times 2x \end{array}$$

காரணிச் சோடியின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை கோவையின் நடு உறுப்பாகிய $+x$ ஆவதற்குப் பெற வேண்டிய காரணிச் சோடி $+3x, -2x$ ஆகும்.

அப்போது கோவை $x^2 + x + 6$ ஐ $x^2 + 3x - 2x - 6$ என எழுதலாம்.

$$\begin{aligned} x^2 + x - 6 &= x^2 + 3x - 2x - 6 \\ &= x(x+3) - 2(x+3) \\ &= (x+3)(x-2) \end{aligned}$$

உதாரணம் 7.4



$y^2 + 7y + 12$ இன் காரணிகளை எழுதுக.

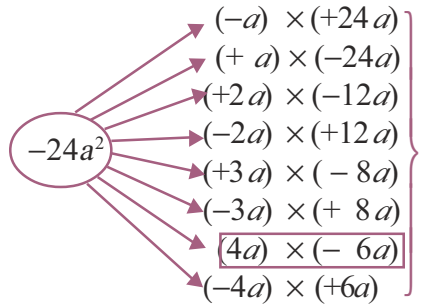
உறுப்பு y^2 இனதும் மாறா உறுப்பினதும் பெருக்கம் $+12y^2$ ஆகும்.

இக்காரணிச் சோடிகளிடையே கோவையின் நடு உறுப்பாகிய $+7y$ அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகையாகக் கிடைப்பது $+3y, +4y$ என்னும் காரணிச் சோடியிலிருந்து மாத்திரமேயாகும்.

ஆகவே,

$$\begin{aligned} y^2 + 7y + 12 &= y^2 + 3y + 4y + 12 \\ &= y(y+3) + 4(y+3) \\ &= (y+3)(y+4) \end{aligned}$$

உதாரணம் 7.5



$a^2 - 2a - 24$ இன் காரணிகளைக் காண்க

a^2 இனதும் மாறா உறுப்பினதும் பெருக்கம் $-24a^2$ ஆகும்.

இக்காரணிச் சோடிகளிடையே நடு உறுப்பு $(-2a)$ யைப் பெற உகந்த காரணிச் சோடி $+4a, -6a$ ஆகும்.

$$\begin{aligned} a^2 - 2a - 24 &= a^2 + 4a - 6a - 24 \text{ எனக் கோவையைத் தயார் செய்ய வேண்டும்.} \\ &= a(a+4) - 6(a+4) \\ &= (a+4)(a-6) \end{aligned}$$

உதாரணம் 7.6

$30 - 17k + k^2$ ஐக் காரணிகளாக வேறுபடுத்துக.

மாறா உறுப்பினதும் உறுப்பு k^2 இனதும் பெருக்கம் $+30 k^2$ ஆதும்.

இக்காரணிச் சோடிகளிடையே நடு உறுப்பு $-17k$ ஐப் பெற உகந்த காரணிச் சோடி $-2k, -15k$ ஆதும்.

இதற்கேற்ப

$$\begin{aligned} & 30 - 17k + k^2 \\ &= 30 - 2k - 15k + k^2 \quad [\text{எனக் கோவையைத் தயார் செய்ய வேண்டும்.}] \\ &= 2(15 - k) - k(15 - k) \quad [2, -k \text{ ஆகியவற்றைப் பொதுக் காரணிகளாக எடுக்கும்போது}] \\ &= (15 - k)(2 - k) \end{aligned}$$

இருபடிக் கோவை ஒரு பொதுக் காரணியுடன் தரப்படும்போது முதலில் பொதுக் காரணியை அடைப்புக் குறிகளுக்கு வெளியே குறிப்பிட வேண்டும். பின்னர் அடைப்புக் குறிகளுக்குள்ளே இருபடிக் கோவையைக் காரணிகளாக வேறுபடுத்த வேண்டும்.

உதாரணம் 7.7

$18 + 15a - 3a^2$ இன் காரணிகளை வேறுபடுத்துக.

$$\begin{aligned} & 18 + 15a - 3a^2 \\ &= 3(6 + 5a - a^2) \end{aligned}$$

இருபடிக் கோவையின் உறுப்பு a^2 இனதும் மாறா உறுப்பினதும் பெருக்கம் $-6a^2$ ஆதும்.
 $-6a^2$ இற்கு எல்லாக் காரணிகளையும் எடுப்போம்.

ஆகவே,

$-6a^2$ இன் காரணிச் சோடிகளிடையே நடு உறுப்பு $+5a$ ஐப் பெற உகந்த காரணிச் சோடி $-a, +6a$ ஆதும்.

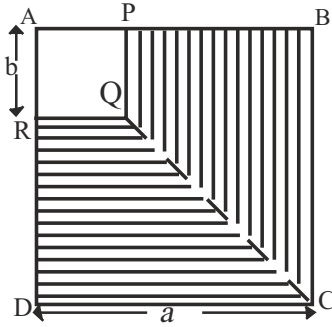
$$\begin{aligned} & 18 + 15a - 3a^2 \\ &= 3[6 + 5a - a^2] \\ &= 3[6 + 6a - a - a^2] \\ &= 3[6(1 + a) - a(1 + a)] \\ &= 3[(1 + a)(6 - a)] \\ &= 3(1 + a)(6 - a) \end{aligned}$$

பயிற்சி 7.3

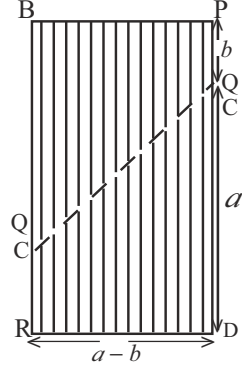
பின்வரும் இருபடிக் கோவைகளின் காரணிகளை எழுதுக. காரணிகளின் பெருக்கத்தை எழுதுவதன் மூலம் காரணிகளின் செம்மையைச் சோதிக்க.

- | | | |
|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1. $a^2 + 8a + 12$ | 2. $y^2 + 3y - 18$ | 3. $p^2 - 3p - 40$ |
| 4. $q^2 - 11q + 24$ | 5. $r^2 - r - 30$ | 6. $l^2 - 19l + 18$ |
| 7. $s^2 + 3s - 70$ | 8. $c^2 + 9c + 20$ | 9. $36 + 15k + k^2$ |
| 10. $16 + 6x - x^2$ | 11. $30 - 7c - c^2$ | 12. $45 - 18y + y^2$ |
| 13. $24 + 23x - x^2$ | 14. $42 - 11z - z^2$ | 15. $54 + 15d - d^2$ |
| 16. $54 - 15f + f^2$ | 17. $3x^2 - 24x + 36$ | 18. $45 + 30y + 5y^2$ |
| 19. $72 - z - z^2$ | 20. $48 - 14g + g^2$ | |

7.3 இரு வர்க்கங்களின் வித்தியாசத்தின் காரணிகள்



ஒரு பக்கத்தின் நீளம் a ஆகவுள்ள ஒரு சதுரம் ABCD யினுள்ளே ஒரு பக்கத்தின் நீளம் b ஆகவுள்ள சதுரம் APQR அமைந்துள்ள விதம் உருவில் காணப்படுகின்றது. இங்கு கோடுகள் வரையப்பட்டுள்ள பகுதியின் பரப்பளவைக் கணிப்போம்.



சதுரங்களின் வர்க்கங்களின் வித்தியாசத்தைக் கருதும்போது கோடுகள் வரையப்பட்டுள்ள பகுதியின் பரப்பளவு $= a^2 - b^2$. கோடுகள் வரையப்பட்டுள்ள பகுதியைக் கோடு CQ வழியே இரு பகுதிகளாக வேறுபடுத்தி உருவில் காணப்படுகின்றவாறு தயார்செய்வதன் மூலம் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் $(a+b)$ ஆகவும் அகலம் $(a-b)$ ஆகவும் உள்ள ஒரு செவ்வகத்தைப் பெறலாம். இதற்கேற்பக் கோடுகள் வரையப்பட்டுள்ள பகுதியின் பரப்பளவு $= (a+b)(a-b)$ ஆகும்.

ஆகவே, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

இதற்கேற்ப $a^2 - b^2$ இன் காரணிகள் $(a+b)$, $(a-b)$ ஆகும்.

$$\begin{aligned} & (a+b)(a-b) \\ &= a^2 - ab + ab - b^2 \end{aligned}$$

$= a^2 - b^2$ ஈற்றுப்புப் பெருக்கத்தை எடுக்கும்போது கிடைக்கும் பேறு $a^2 - b^2$ எனக் காண்பீர்கள்.

உதாரணம் 7.8

$x^2 - 25$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$$\begin{aligned} x^2 - 25 \\ &= x^2 - 5^2 \\ &= (x+5)(x-5) \end{aligned}$$

உதாரணம் 7.9

$16x^2 - 9y^2$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$$\begin{aligned} 16x^2 - 9y^2 \\ &= (4x)^2 - (3y)^2 \\ &= (4x+3y)(4x-3y) \end{aligned}$$

உதாரணம் 7.10

$1 - 100p^2$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$$\begin{aligned} 1 - 100p^2 \\ &= 1^2 - (10p)^2 \\ &= (1+10p)(1-10p) \end{aligned}$$

உதாரணம் 7.11

$3 - 12q^2$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$$\begin{aligned} 3 - 12q^2 \\ &= 3(1 - 4q^2) \\ &= 3[1^2 - (2q)^2] \\ &= 3(1+2q)(1-2q) \end{aligned}$$

இப்பிரச்சினத்தை பின்வருமாறும் காரணிகளாக வேறுபடுத்தலாம்.

$$\begin{aligned} 3 - 12y^2 \\ &= 3(1 - 4y^2) \end{aligned}$$

அடைப்புக் குறிகளுக்குள்ளே இருக்கும் கோவையின் இரண்டாம் வலுவின் உறுப்பினதும் மாறாப் பெறுமானத்தினதும் பெருக்கம் $-4y^2$ ஆகும். y இடம்பெறும் உறுப்பு கோவையில் இல்லாமையால், $-4y^2$ இன் காரணிகளின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாக இருக்குமாறு காரணிகளைக் காண வேண்டும்.

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c} \nearrow \\ \rightarrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} y \times (-4y) \\ (-y) \times +4y \\ +2y \times (-2y) \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} (+2y, -2y \text{ என்னும் காரணிச் சோடியில் மாத்திரம்} \\ \text{காரணிகளின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை} \\ \text{பூச்சியமாகும்.}) \end{array}$$

ஆகவே,

$$\begin{aligned} & 3[1 - 4y^2] \\ &= 3[1 + 2y - 2y - 4y^2] \\ &= 3[1(1 + 2y) - 2y(1 + 2y)] \\ &= 3[(1 + 2y)(1 - 2y)] \\ &= 3(1 + 2y)(1 - 2y) \end{aligned}$$

பயிற்சி 7.4

பின்வரும் கோவைகளின் காரணிகளைத் தருக.

- | | | |
|------------------|-------------------|----------------------|
| 1. $y^2 - 9$ | 2. $p^2 - 36$ | 3. $25 - a^2$ |
| 4. $4 - 9k^2$ | 5. $4x^2 - 36y^2$ | 6. $a^2b^2 - 1$ |
| 7. $18c^2 - 2$ | 8. $4z^2 - 100$ | 9. $125k^2 - 5$ |
| 10. $27d^2 - 48$ | 11. $3x^3 - 243x$ | 12. $5m^2 - 3125n^2$ |

காரணிகளுக்காக உறுப்புகள் மாற்றப்பட வேண்டிய சந்தர்ப்பங்களில் கோவையின் செம்மையைப் பாதுகாக்குமாறு உறுப்புகளை மாற்றி எழுத வேண்டும்.

உதாரணம் 7.12

$ax + by - ay - bx$ இங்கு முதல் இரு உறுப்புகளுக்கும் பொதுக் காரணி இல்லை. இரு இறுதி உறுப்புகளுக்கும் பொதுக் காரணி இல்லை.

3 ஆம் உறுப்பையும் 4 ஆம் உறுப்பையும் மாற்றி எழுதும்போது

$$\begin{aligned} & ax - ay - bx + by \\ &= a(x - y) - b(x - y) \\ &= (x - y)(a - b) \end{aligned}$$

உதாரணம் 7.13

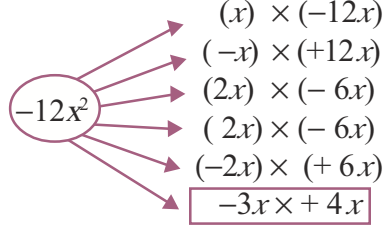
$pq - 6 + 3q - 2p$ இக்கோவையில் முதல் இரு உறுப்புகளுக்கும் பொதுக் காரணி இல்லை. இரு இறுதி உறுப்புகளுக்கும் பொதுக் காரணி இல்லை. மூன்றாம் உறுப்பை இரண்டாம் தானத்திலும் இரண்டாம் உறுப்பை நான்காம் தானத்திலும் இடும்போது

$$\begin{aligned} & pq + 3q - 2p - 6 \\ &= q(p + 3) - 2(p + 3) \\ &= (p + 3)(q - 2) \end{aligned}$$

உதாரணம் 7.14

$x - 12 + x^2$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

மூன்றாம் உறுப்பை முதலில் இடும்போது
 $x^2 + x - 12$



இங்கு நடு உறுப்பாகிய $+x$ அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகையாகக் கிடைக்கும் காரணிச் சோடி $-3x, +4x$ ஆகும்.

$$-3x + 4x = x$$

ஆகவே,

$$\begin{aligned} & x^2 + x - 12 \\ &= x^2 + 4x - 3x - 12 \\ &= x(x + 4) - 3(x + 4) \\ &= (x + 4)(x - 3) \end{aligned}$$

உதாரணம் 7.15

கோவை $-4(3y - 5) + y^2$ யின் காரணிகளை எழுதுக.

$$\begin{aligned} & -12y + 20 + y^2 \\ &= y^2 - 12y + 20 \\ &= y^2 - 10y - 2y + 20 \\ &= y(y - 10) - 2(y - 10) \\ &= (y - 10)(y - 2) \end{aligned}$$

பயிற்சி 7.5

பின்வரும் அட்சரகணிதக் கோவைகளின் காரணிகளை எழுதுக.

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| 1. $px^2 - 1 - x^2 + p$ | 2. $4 - k^2 - 3k$ |
| 3. $ax - by + ay - bx$ | 4. $3y - 28 + y^2$ |
| 5. $x^3 + 2 + 2x^2 + x$ | 6. $x^3 + 1 + x^2 + x$ |