கணிதம்

தரம் 11

பகுதி III

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்

முதலாம் பதிப்பு - 2015
இரண்டாம் பதிப்பு - 2016
மூன்றாம் பதிப்பு - 2017
நான்காம் பதிப்பு - 2018
ஐந்தாம் பதிப்பு - 2019
ஆறாம் பதிப்பு - 2020

ISBN 978-955-25-0308-5

இந்நூல், கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களத்தினால்
அரசாங்க அச்சகக் கூட்டுத்தாபனத்தில்
அச்சிடப்பட்டு, வெளியிடப்பட்டது.

Published by: Educational Publications Department
Printed by: State Printing Corporation

தேசிய கீதம்

சிறீ லங்கா தாயே - நம் சிறீ லங்கா
நமோ நமோ நமோ நமோ தாயே

நல்லெழில் பொலி சீரணி
நலங்கள் யாவும் நிறை வான்மணி லங்கா
ஞாலம் புகழ் வள வயல் நதி மலை மலர்
நறுஞ்சோலை கொள் லங்கா
நமதுறு புகலிடம் என ஒளிர்வாய்
நமதுதி ஏல் தாயே
நம தலை நினதடி மேல் வைத்தோமே
நமதுயிரே தாயே - நம் சிறீ லங்கா
நமோ நமோ நமோ நமோ தாயே

நமதாரருள் ஆனாய்
நவை தவிர் உணர்வானாய்
நமதேர் வலியானாய்
நவில் சுதந்திரம் ஆனாய்
நமதிளமையை நாட்டே
நகு மடி தனையோட்டே
அமைவுறும் அறிவுடனே
அடல் செறி துணிவருளே - நம் சிறீ லங்கா
நமோ நமோ நமோ நமோ தாயே

நமதார் ஒளி வளமே
நறிய மலர் என நிலவும் தாயே
யாமெலாம் ஒரு கருணை அனைபயந்த
எழில்கொள் சேய்கள் எனவே
இயலுறு பிளவுகள் தமை அறவே
இழிவென நீக்கிடுவோம்
ஈழ சிரோமணி வாழ்வுறு பூமணி
நமோ நமோ தாயே - நம் சிறீ லங்கா
நமோ நமோ நமோ நமோ தாயே

ஒரு தாய் மக்கள் நாமாவோம்
ஒன்றே நாம் வாழும் இல்லம்
நன்றே உடலில் ஓடும்
ஒன்றே நம் குருதி நிறம்

அதனால் சகோதரர் நாமாவோம்
ஒன்றாய் வாழும் வளரும் நாம்
நன்றாய் இவ் இல்லினிலே
நலமே வாழ்தல் வேண்டுமன்றோ

யாவரும் அன்பு கருணையுடன்
ஒற்றுமை சிறக்க வாழ்ந்திடுதல்
பொன்னும் மணியும் முத்துமல்ல - அதுவே
யான்று மழியாச் செல்வமன்றோ.

ஆனந்த சமரக்கோன்
கவிதையின் பெயர்ப்பு.

முன்னுரை

உலகம் நாளுக்கு நாள் விருத்தி அடைந்து செல்கின்றது. அதற்கேற்பக் கல்வித் துறையும் எப்போதும் புதுப்பொழிவு பெறுகின்றது. அதனால், எதிர்காலச் சவால்களுக்குச் சிறப்பாக முகங்கொடுக்க முடியுமான மாணவர் சமுதாயமொன்றை உருவாக்க வேண்டுமாயின், எமது கற்றல் கற்பித்தல் செயற்பாடுகளும் வினைத்திறன் மிக்கதாக அமைய வேண்டும். அதற்கு வலுவூட்டி நவீன உலக அறிவை வழங்கும் அதேவேளை உலகிற்கு நற்பண்புகள் நிறைந்த பிரசைகளை உருவாக்குவதற்கு உதவுவதும் எமது பொறுப்பாகும். தேசத்தின் பிள்ளைகளின் அறிவுத் தீபத்தை ஏற்றும் உன்னத நோக்கத்துடன் எமது திணைக்களம் கற்றல் சாதனங்களை உருவாக்கும் செயற்பாட்டில் செயலூக்கத்துடன் ஈடுபட்டு அதற்குப் பங்களிப்பு வழங்குகின்றது.

பாடநூல்கள் அறிவு நிறைந்த களஞ்சியங்களாகும். அவை சில வேளைகளில் எங்களை இரசனை உலகிற்கு அழைத்து செல்வதுடன் தர்க்கரீதியாகச் சிந்திக்கும் ஆற்றலையும் வளர்க்கின்றது. மறைந்துள்ள ஆற்றல்களை வெளிக்கொணர்கின்றது. எதிர்காலத்தில் எப்போதாவது, இந்தப் பாடநூல்கள் தொடர்பான சில ஞாபகங்களை மீட்கும்போது அவை உங்கள் மனதுக்கு இதமானதாக அமையும். இந்தப் பெறுமதி வாய்ந்த கற்றல் சாதனத்தின் மூலம் சிறந்த பயன்பெறும் அதேவேளை மேன்மேலும் சிறந்த அறிவு மூலங்களை நெருங்குவதும் உங்களுக்குப் பயனுள்ளதாக அமையும். இலவசக் கல்வியின் பெறுமதிமிக்க ஒரு பரிசாக இப்பாடநூல் உங்களுக்கு இலவசமாக வழங்கப்படுகின்றது. பாடநூல்களுக்காக அரசாங்கம் செலவிட்டுள்ள பெருந் தொகைப் பணத்திற்கு, உங்களால் மாத்திரமே பெறுமதி சேர்க்க முடியும். இப்பாடநூலை சிறப்பாகப் பயன்படுத்தி சிறந்த அறிவும் பண்பாடும் கொண்ட பிரசைகளாகி நாளைய உலகிற்கு ஒளியூட்டுவதற்கு உங்கள் அனைவருக்கும் ஆற்றலும் தைரியமும் கிடைக்க வேண்டுமென்று வாழ்த்துகின்றேன்.

இப்பாடநூலை உருவாக்குவதில் அளப்பரிய பங்களிப்பு வழங்கிய எழுத்தாளர் மற்றும் பதிப்பாசிரியர் குழுக்களின் அங்கத்தவர்களுக்கும் கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களத்தின் உத்தியோகத்தர்கள் அனைவருக்கும் எனது மனமார்ந்த நன்றிகளைத் தெரிவித்துக் கொள்கிறேன்.

பீ. என். அயிலப்பெரும
கல்வி வெளியீட்டு ஆணையாளர் நாயகம்
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்
இசுருபாய
பத்தரமுல்ல
2020. 06. 26

கண்காணிப்பும் மேற்பார்வையும்

பீ. என். அயிலப்பெரும - கல்வி வெளியீட்டு ஆணையாளர் நாயகம் கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

வழிகாட்டல்

டபிள்யூ. ஏ. நிர்மலா பியசீலி - ஆணையாளர் (அபிவிருத்தி) கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

இணைப்பாக்கம்

அ. குலரத்தினம் - பிரதி ஆணையாளர் கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

எழுத்தாளர் குழு

கலாநிதி ரோசன மீகஸ்டும்புர	- சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர் பெராதெனியப் பல்கலைக்கழகம்.
கலாநிதி ஜே. கே. ரத்னாயக்கா	- சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர் இலங்கை தொடர்பாடல் தொழினுட்ப நிறுவகம்.
என். வாகீசமூர்த்தி	- பணிப்பாளர் (ஓய்வு நிலை)
ஆர். எஸ். ஈ. புஸ்பராஜன்	- உதவிப் பணிப்பாளர் (ஓய்வு நிலை) வலையக் கல்விப் பணிமனை, புத்தளம்.
வி. முரளி	- விரிவுரையாளர் ஆசிரியர் மத்திய நிலையம், வவுனியா வடக்கு.
எச். எம். ஜயசேன.	- ஆசிரிய ஆலோசகர் வலயக் கல்விப் பணிமனை, அம்பலாங்கொட
வி. வி. ஆர். விதாரம	- ஆசிரிய ஆலோசர் வலயக் கல்விப் பணிமனை, தெகியோவிட்ட.
டபிள்யூ. எம். டபிள்யூ. சீவலிசிங்க	- உதவிப் பணிப்பாளர் வலையக் கல்விப் பணிமனை, புத்தளம்.
அஜித் ரணசிங்க	- ஆசிரிய ஆலோசர் வலயக் கல்விப் பணிமனை, கேகாலை
வீ. எம். பி. லால் விஜயகாந்த	- ஆசிரிய ஆலோசகர் சாந்த தோமஸ் கல்லூரி கல்கிஸ்சை.
அனுர வீரசிங்க	- ஆசிரிய ஆலோசகர் (பிரிவேனா)

பதிப்பாசிரியர் குழு

கலாநிதி ரோமைன் ஜயவர்த்தன	- *சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர்* *கணிதத்துறை, கொழும்புப்* *பல்கலைக்கழகம்.*
கலாநிதி பீ. கே. மல்லவ ஆராச்சி	- *சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர்* *கணிதத்துறை, களனிப் பல்கலைக்கழகம்.*
கலாநிதி த. ஸ்ரீதரன்	- *சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர்* *கொழும்புப் பல்கலைகழகம்.*
சித்தானந்த வியாங்வெல	- *பணிப்பாளர்* *கணிதக் கிளை, கல்வி அமைச்சு.*
பீ. ஜெகத்குமார	- *சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர்* *கணிதத்துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.*
அ. குலரத்தினம்	- *பிரதி ஆணையாளர்.* *கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.*
தனுஜா மைத்திரி விதாரண	- *உதவி ஆணையாளர்.* *கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.*

மொழி பதிப்பாசிரியர்

பீ. ராஜசேகரன்	- *ஆசிரிய ஆலோசகர் (ஓய்வு நிலை)*

சரவை பார்ப்பு

கே. கருணேஸ்வரன்	- *ஆசிரிய ஆலோசகர்* *வலயக் கல்விப் பணிமனை, கொழும்பு.*

கணினி வடிவமைப்பு

முத்தையா காந்தரூபன்	- *கணினி வடிவமைப்பாளர்* *கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.*

உள்ளடக்கம்

எழுத்தாளர், பதிப்பாசிரியர் குழுக்களின் அறிவுறுத்தல்

2015 ஆண்டிலிருந்து நடைமுறைக்கு வரும் புதிய பாடத்திட்டத்திற்கேற்ப இப்பாடநூல் எழுதப்பட்டுள்ளது. பாடநூல் மாணவர்களுக்காகவே தயாரிக்கப்படுகின்றது. எனவே நீங்கள் தனித்து வாசித்தேனும் விளங்கிக்கொள்ளத்தக்க வகையில் எளிமையாகவும் விபரமாகவும் அதனைத் தயாரிக்க முயற்சித்தோம்.

பாட எண்ணக்கருக்களைக் கவர்ச்சியான வகையில் முன்வைப்பதற்காகவும் உறுதிபடுத்துவதற்காகவும் விபரித்தல், செயற்பாடு மற்றும் உதாரணங்கள் போன்று வெவ்வேறு முறைகளைப் பின்பற்றினோம். பயிற்சிகளைச் செய்வதன் விருப்பு விருத்தியடையும் வகையில் எளிமையிலிருந்து கடினம் வரை முறையாக ஒழுங்குபடுத்தப்பட்டுள்ளன.

கணிதப் பாடத்துக்குரிய எண்ணக்கருக்களைக் குறிக்கும் சொற்களை அரச கரும மொழித் திணைக்களம் தயாரித்துள்ள கணிதப் பாடக் கலைச் சொல் அகராதிக்கேற்பப் பயன்படுத்தினோம்.

பாடத்திட்டத்தில் தரம் 11 இற்குரிய பாடப்பகுதிகளைக் கற்பதற்கு, முன்னைய தரங்களில் நீங்கள் கற்ற சிற்சில விடயங்கள் தேவைப்படும். எனவே அம்முன்னறிவை ஞாபகப்படுத்துவதற்காக மீட்டற் பயிற்சிகள் தேவையான அத்தியாத்தின் தொடக்கத்திலும் தரப்பட்டுள்ளன. அவற்றின்மூலம் தரம் 11 இற்குரிய பாடவிடயங்களுக்காக நீங்கள் தயார்படுத்தப்படுவீர்கள்.

வகுப்பில் ஆசிரியர் கற்பிப்பதற்கு முன்னர் நீங்கள் இவ்வத்தியாயங்களை வாசிப்பதன் மூலமும் ஒவ்வோர் அத்தியாத்தில் வரும் மீட்டற் பயிற்சிகளை செய்வதன் மூலமும் இப்பாடநூலைப் பயன்படுத்தி உச்ச பயன்களைப் பெறலாம்.

கணிதக் கல்வியானது மகிழ்ச்சிகரமானதாகவும் பயனுடையதாகவும் அமைய நாங்கள் ஆசி கூறுகின்றோம்.

நூலாக்கக் குழுவினர்.

17

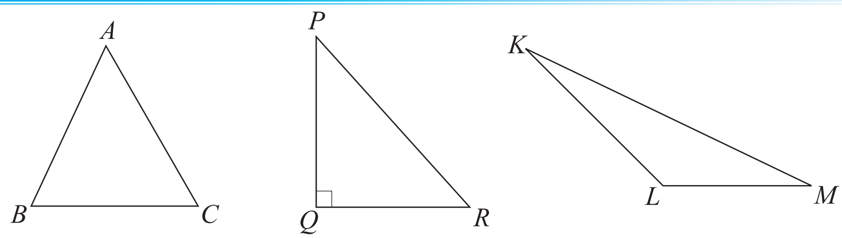
பைதகரசின் தேற்றம்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- பைதகரசின் தேற்றத்தை அறிந்துகொள்வதற்கும்
- பைதகரசின் தேற்றத்தைக் கொண்டு கணிப்புகளைச் செய்வதற்கும் ஏறிகளை நிறுவுவதற்கும்
- பைதகரசின் மும்மையை இனங்காண்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

17.1 அறிமுகம்

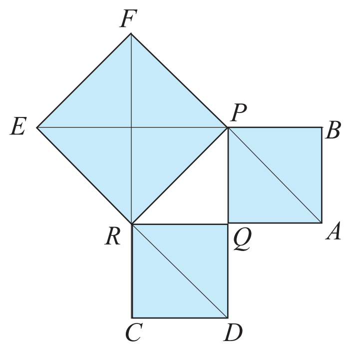


உருவில் காணப்படும் ABC, PQR, KLM ஆகிய முக்கோணிகள் முறையே கூர்ங்கோண, செங்கோண, விரிகோண முக்கோணிகள் ஆகும். அவற்றின் அகக் கோணங்களில் பெரிய கோணத்திற்கு (அல்லது கோணங்களுக்கு) ஏற்ப அவ்வாறு வகைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. இதற்கமைய முக்கோணி PQR இல் செங்கோணமான $P\hat{Q}R$ அம்முக்கோணியின் மிகப்பெரிய கோணம் ஆகும். இக்கோணத்திற்கு எதிரேயுள்ள பக்கம் PR ஆனது முக்கோணியின் நீளமான பக்கமாகும். இது செம்பக்கம் எனவும் எஞ்சிய இரு பக்கங்களான PQ, QR ஆகியன செங்கோணத்தை ஆக்கும் இரு பக்கங்கள் எனவும் அழைக்கப்படுவதை நாம் அறிவோம்.

ஆதிகாலத்திலிருந்து மனிதன் முக்கோணிகளின் கேத்திரகணித இயல்புகள் பற்றி அறிந்திருந்தான் என்பதற்கு இன்னும் சான்றுகள் உள்ளன. கி.மு. 3000 இல் எகிப்தில் அமைக்கப்பட்ட பிரமிட்டும் (கூம்பகங்கள்) அபூர்வமான அமைப்புகள் என்பதை அனைவரும் ஏற்றுக்கொண்டுள்ளனர். அவ்வமைப்புகளுக்காகக் கேத்திரகணித அறிவு விசேடமாக முக்கோணிகளின் பல்வேறு இயல்புகள் பற்றிய அறிவு கட்டாயமானதாகும். கி.மு. 1650 இல் அமைக்கப்பட்ட ''றைன்ட் பவறஸ்'' இல் முக்கோணி உருவங்களே அதிக அளவில் காணப்படுகின்றன. இவ்வாறு இனங்காணப்பட்டிருந்த கேத்திர கணித அறிவிலிருந்து செங்கோண முக்கோணிகளின் பக்கங்களின் நீளங்களிடையே உள்ள அபூர்வ தொடர்பு கி.மு. ஆறாம் நூற்றாண்டில் பைதகரஸ் என்ற கிரேக்கக் கணித

வியலாளரினால் எடுத்துரைக்கப்பட்டது. இக்காலத்திற்கு முன்னர் இருந்தே சீனா, இந்தியா போன்ற கீழைத்தேய நாடுகளில் இருந்தும் வேறு நாகரீகங்களுக்கிடையேயும் இத்தொடர்பு அறியப்பட்டமைக்குச் சான்றுகள் இருந்தபோதிலும் இத்தொடர்பு டைமையை முதன்முதலாகக் கேத்திரகணித முறையாகப் பைதகரஸ் நிறுவியதாக நம்பப்படுகின்றது. பின்னர் கி.மு. 3 ஆம் நூற்றாண்டில் யூக்கிலிட்டு என்ற கணிதவியலாளர் இம்முடிபை நிறுவலுடன் ஒரு தேற்றமாகத் தமது The Elements என்னும் வரலாற்றுப் புகழ்பெற்ற நூலில் உள்ளடக்கினார்.

17.2 பைதகரசின் தேற்றம்



ஒரே அளவான இருசமபக்கச் செங்கோண முக்கோணி வடிவமுள்ள பீங்கான் ஓடுகள் பதிக்கப்பட்ட வீட்டுத் தளத்தின் ஒரு பகுதி உருவில் காணப்படுகின்றது. அதில் இருசமபக்கச் செங்கோண முக்கோணப் பகுதி PQR ஐக் கருதுவோம். இங்கு PQ ஒரு பக்கமாகவுடைய சதுரம் $PQAB$ யும் RQ ஐ ஒரு பக்கமாகவுடைய சதுரம் $RCDQ$ வும் (நீல நிறத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள பிரதேசம்) வரையப்பட்டுள்ளன. பக்கம் PQ மீது உள்ள ஒரு சதுரத்திற்கு இரு பீங்கான் ஓடுகளினால் மூடப்படும் பரப்பளவும் பக்கம் QR மீது உள்ள சதுரத்திற்கு இரு பீங்கான் ஓடுகளினால் மூடப்படும் பரப்பளவும் உள்ளன. அதே வேளை செம்பக்கம் PR மீது உள்ள சதுரம் $PREF$ இற்கு நான்கு பீங்கான் ஓடுகளினால் மூடப்படும் பரப்பளவும் உள்ளது. இதற்கேற்பச் செங்கோண முக்கோணி PQR இன் மூன்று பக்கங்களிலும் இருக்கும் சதுரங்களுக்கு

$$\begin{array}{c}\text{சதுரம் } PQAB \text{ யின்}\\ \text{பரப்பளவு}\end{array} + \begin{array}{c}\text{சதுரம் } RCDQ \text{ யின்}\\ \text{பரப்பளவு}\end{array} = \begin{array}{c}\text{சதுரம் } PREF \text{ இன்}\\ \text{பரப்பளவு}\end{array}$$

என்னும் தொடர்புடைமை பொருந்துவதாகத் தெரிகின்றது.

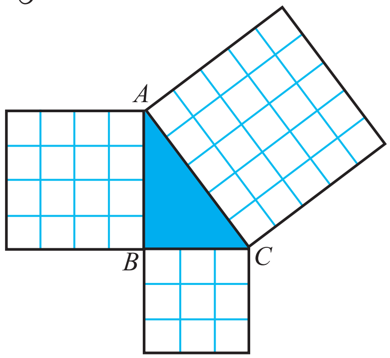
இத்தொடர்புடைமையைப் பின்வரும் செயற்பாட்டின் மூலம் உறுதிப்படுத்திக் கொள்வோம்.

செயற்பாடு

ஒரு சதுரக் கோட்டுத் தாளில் பின்வரும் அளவுகளுள்ள மூன்று சதுரங்களையும் ஒரு செங்கோண முக்கோணியையும் வெட்டியெடுக்க.

(i) ஒரு பக்கம் மூன்று கட்டங்கள் நீளமுள்ள ஒரு சதுர வடிவம்
(ii) ஒரு பக்கம் நான்கு கட்டங்கள் நீளமுள்ள ஒரு சதுர வடிவம்
(iii) ஒரு பக்கம் ஐந்து கட்டங்கள் நீளமுள்ள ஒரு சதுர வடிவம்
(iv) செங்கோணத்தை அடங்கியுள்ள பக்கங்களில் 3 கட்டங்களும் 4 கட்டங்களும் உள்ள செங்கோண முக்கோணி வடிவம்.

ஒரு வெள்ளைத் தாளில் செங்கோண முக்கோணி வடிவத்தை ஒட்டி, அதன் ஒவ்வொரு பக்கத்தின் மீதும் சதுர வடிவங்களைப் பின்வரும் உருவில் காணப்படுகின்றவாறு வைத்து ஒட்டுக.



செங்கோண முக்கோணி ABC யின் பக்கம் AB மீது
உள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு = 16 கட்டங்கள்

பக்கம் BC மீது உள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு = 9 கட்டங்கள்

பக்கம் AC மீது உள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு = 25 கட்டங்கள்

இதற்கேற்பச் செங்கோண முக்கோணி ABC யில் செங்கோணத்தை ஆக்கும் பக்கங்களாகிய AB, BC ஆகிய பக்கங்களின் மீது
உள்ள சதுரங்களின் மொத்தப் பரப்பளவு = 16 + 9 கட்டங்கள்

AB, BC ஆகிய பக்கங்களின் மீது உள்ள சதுரங்களின்
மொத்தப் பரப்பளவு = 25 கட்டங்கள்

செங்கோண முக்கோணி ABC யின் செம்பக்கம்
AC இன் மீதுள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு = 25 கட்டங்கள்

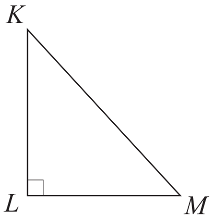
ஆகவே செங்கோண முக்கோணி ABC யில் செங்கோணத்தை ஆக்கும் பக்கங்களாகிய AB, BC ஆகியவற்றின் மீது உள்ள சதுரங்களின் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் செம்பக்கம் AC இன் மீது உள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு சமம்.

செங்கோண முக்கோணி தொடர்பாக ஆதிகாலத்திலிருந்தே அறியப்பட்டிருந்த இத்தொடர்புடைமையை ஒரு தேற்றமாகப் பின்வருமாறு எடுத்துரைக்கலாம்.

பைதகரசின் தேற்றம்

ஒரு செங்கோண முக்கோணியின் செம்பக்கத்தின் மீது வரையப்பட்டுள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவானது செங்கோணத்தை ஆக்கும் பக்கங்களின் மீது வரையப்பட்டுள்ள சதுரங்களின் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாகும்.

உருவில் காணப்படும் செங்கோண முக்கோணி KLM இன் செம்பக்கம் KM ஆகவும் செங்கோணத்தை ஆக்கும் பக்கங்கள் KL, LM ஆகவும் இருக்கும்போது



பக்கம் KL இன் மீது உள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு $= KL^2$

பக்கம் LM இன் மீது உள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு $= LM^2$

பக்கம் KM இன் மீது உள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு $= KM^2$

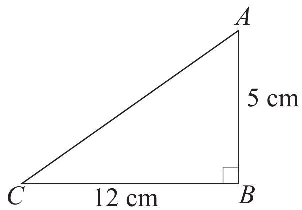
அப்போது பைதகரசின் தேற்றத்திற்கேற்ப

$$\boxed{KL^2 + LM^2 = KM^2}$$

பைதகரசின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திக் கணிப்புகள் செய்யப்படும் விதம் பற்றி இப்போது ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

ஒரு செங்கோண முக்கோணி ABC யில் $\hat{B} = 90^\circ$, $AB = 5$ cm, $BC = 12$ cm உம் ஆகும். பக்கம் AC யின் நீளத்தைக் கணிக்க.



பைதகரசின் தேற்றத்திற்கேற்ப

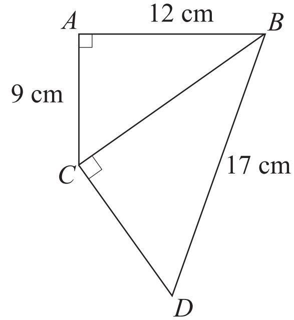
$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= 5^2 + 12^2 \\ &= 25 + 144 \\ &= 169 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad AC = \sqrt{169} = 13$$

$\therefore$ பக்கம் AC யின் நீளம் 13 cm ஆகும்.

உதாரணம் 2

உருவில் காணப்படும் தகவல்களுக்கேற்ப CD யின் நீளத்தைக் காண்க.



உருவிற்கேற்ப முக்கோணி ABC யைக் கருதிப் பைதகரசின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= 12^2 + 9^2 \text{ (பிரதியிடும்போது)} \\ &= 144 + 81 \\ &= 225 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad BC = \sqrt{225} = 15$$

மீண்டும் செங்கோண முக்கோணி BCD யைக் கருதிப் பைதகரசின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது

$$CD^2 + BC^2 = BD^2$$
$$CD^2 + 15^2 = 17^2$$
$$CD^2 + 225 = 289$$
$$\therefore \quad CD^2 = 289 - 225$$
$$= 64$$
$$\therefore \quad CD = 8$$

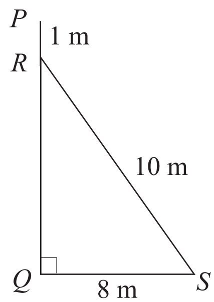
$\therefore$ CD யின் நீளம் 8 cm ஆகும்.

இப்போது நடைமுறைப் பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்குப் பைதகரசின் தேற்றம் பயன்படுத்தப்படும் விதம் பற்றி ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 3

ஒரு நிலைக்குத்தான மின் கம்பத்தின் உச்சியிலிருந்து 1 m கீழேயுள்ள ஒரு வளையத்தில் கட்டப்பட்டுள்ள ஒரு கம்பியின் மற்றையை நுனி கம்பத்தின் அடியிலிருந்து 8 m தூரத்தில் பொருத்தப்பட்டுள்ள இன்னுமொரு வளையத்தில் கட்டப்பட்டுள்ளது. இரு வளையங்களுக்குமிடையே உள்ள கம்பியின் நீளம் 10 m எனின், கம்பத்தின் உயரத்தைக் காண்க. (கம்பி நன்றாக இழுக்கப்பட்டுள்ளதெனக் கொள்க).

தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப உருவை வரைவோம்.



கம்பம் PQ நிலைக்குத்தானது ஆகையால் அது கிடைத் தளத்துடன் ஒரு செங்கோணத்தை உண்டாக்குகின்றது. அதாவது $P\hat{Q}S = 90^{\circ}$ ஆகும்.

QRS ஒரு செங்கோண முக்கோணி ஆகையால்,
பைதகரசின் தேற்றத்திற்கேற்ப

$$QR^2 + QS^2 = RS^2$$
$$QR^2 + 8^2 = 10^2$$
$$QR^2 + 64 = 100$$
$$\therefore \quad QR^2 = 100 - 64$$
$$QR^2 = 36$$
$$\therefore \quad QR = 6$$

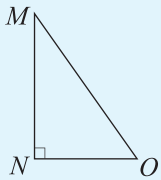
$\therefore$ கம்பத்தின் உயரம் $= QR + PR$
$= 6 + 1$
$= 7$

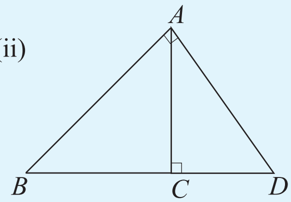
$\therefore$ கம்பத்தின் உயரம் 7 m ஆகும்.

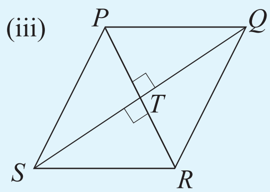
இப்போது பைதகரசின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் பயிற்சியைச் செய்வோம்.

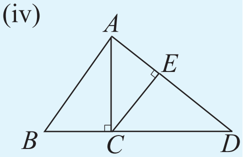
பயிற்சி 17.1

1. பின்வரும் உருக்களைப் பயன்படுத்தி கீழே தரப்பட்டுள்ள வெற்றிடங்களை நிரப்புக.

(i)


(ii)


(iii)


(iv)


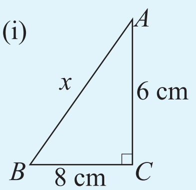
$MO^2 = ... + ...$

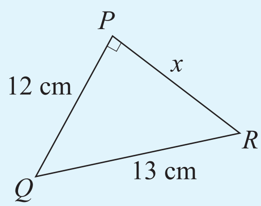
$BD^2 = ... + ...$
$.... = AC^2 + CD^2$
$AB^2 = AC^2 + ...$

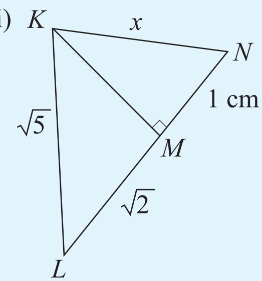
$PQ^2 = ... + ...$
$QR^2 = ... + ...$

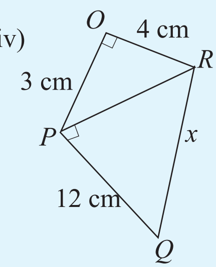
$AB^2 = ... + AC^2$
$.... = AE^2 + EC^2$
$AD^2 = AC^2 + ...$

2. பின்வரும் செங்கோண முக்கோணிகள் ஒவ்வொன்றிலும் x இனால் காட்டப்படும் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i)


(ii)


(iii)


(iv)


3. ஒரு சமபக்க முக்கோணி ABC யில் உச்சி A யிலிருந்து பக்கம் BC யிற்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்தின் அடி D ஆகும். முக்கோணியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 2 cm எனின், பக்கம் AD யின் நீளத்தைக் காண்க. (விடையைச் சேடு வடிவத்தில் காட்டுக.)

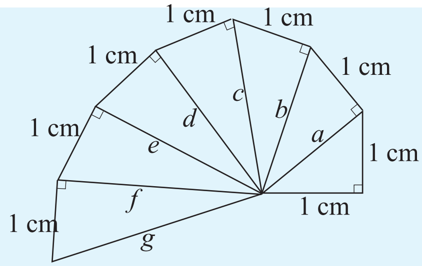
4. கிடை நிலத்தின் மீது இருக்கும் ஒருவர் ஒரு புள்ளி P யிலிருந்து வடக்கு நோக்கி 15 m சென்று அவ்விடத்திலிருந்து கிழக்கு நோக்கி 8 m செல்வதன் மூலம் புள்ளி Q வை அடைகின்றார்.

(i) மேற்குறித்த தகவல்களை ஒரு பரும்படிப் படத்தில் காட்டுக.

(ii) தூரம் PQ வைக் காண்க.

5. ஒரு சாய்சதுரத்தின் இரு மூலைவிட்டங்களின் நீளங்கள் 12 cm, 16 cm ஆகும். அதன் ஒரு பக்கத்தின் நீளத்தைக் காண்க.

6. உருவில் ஆக்கிமீடிஸ் சுருளி எனப்படும் விசேட அமைப்பு காணப்படுகின்றது. அதில் தரப் பட்டுள்ள அளவீடுகளுக்கேற்ப ஒவ்வொரு செங்கோண முக்கோணியையும் கொண்டு a, b, c, d, e, f, g ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க. (விடையைச் சேடு வடிவத்தில் காட்டுக.)

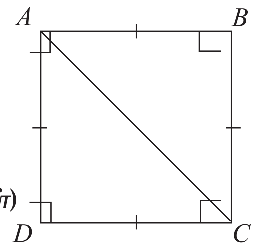


17.3 பைதகரசின் தேற்றத்தின் பயன்பாடுகள் (மேலும்)

பைதகரசின் தேற்றத்துடன் தொடர்புபட்ட ஏறிப் பிரசினங்கள் தீர்க்கப்படும் விதம் பற்றி இப்போது பார்ப்போம்.

உதாரணம் 1

$ABCD$ ஒரு சதுரம் ஆகும். $AC^2 = 2AB^2$ என நிறுவுக.



நிறுவல்: $A\hat{B}C = 90^{\circ}$ ஆகையால்

ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணியாகும் முக்கோணி

ABC யிற்குப் பைதகரசின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = AB^2 + AB^2$ ($AB = BC$, சதுரத்தின் பக்கங்கள்)

$\therefore \; AC^2 = 2AB^2$

உதாரணம் 2

ஒரு சாய்சதுரம் $ABCD$ யில் AC, BD ஆகிய மூலைவிட்டங்கள் O வில் இடைவெட்டுகின்றன. $AC^2 + BD^2 = 4\,AB^2$ என நிறுவுக.

நிறுவல்: $ABCD$ ஒரு சாய்சதுரம் ஆகையால் மூலைவிட்டங்கள் செங்கோணங்களில் இருசமகூறிடுகின்றன. (உருவைப் பார்க்க)

$\therefore \; A\hat{O}B = 90^{\circ}$, $AO = OC$, $BO = OD$ ஆகும்.

பைதகரசின் தேற்றத்திற்கேற்ப செங்கோண முக்கோணி AOB யில்

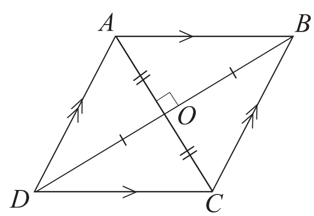
$$AO^2 + OB^2 = AB^2$$

$$\left(\frac{1}{2}AC\right)^2 + \left(\frac{1}{2}BD\right)^2 = AB^2$$

$$\frac{1}{4}AC^2 + \frac{1}{4}BD^2 = AB^2$$

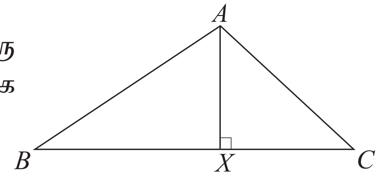
$$\frac{1}{4}(AC^2 + BD^2) = AB^2$$

$$\therefore \; AC^2 + BD^2 = 4\,AB^2$$



உதாரணம் 3

ஒரு முக்கோணி ABC யில் கோணம் $B\hat{A}C$ ஒரு விரிகோணமாகும். A யிலிருந்து BC யிற்குச் செங்குத்தாக AX வரையப்பட்டுள்ளது.
$AB^2 - AC^2 = BX^2 - CX^2$ என நிறுவுக.



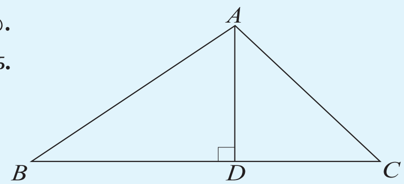
நிறுவல்: செங்கோண முக்கோணி AXB யில் பைதகரசின் தேற்றத்திற்கேற்ப
$AB^2 = AX^2 + BX^2$ —— ①
செங்கோண முக்கோணி AXC யில் பைதகரசின் தேற்றத்திற்கேற்ப
$AC^2 = AX^2 + CX^2$ —— ②

① − ② ; $AB^2 - AC^2 = AX^2 + BX^2 - (AX^2 + CX^2)$
$= AX^2 + BX^2 - AX^2 - CX^2$
$= BX^2 - CX^2$

மேற்குறித்த உதாரணங்களில் காணப்படுகின்றவாறு பின்வரும் ஏறிகளை நிறுவுவோம்.

பயிற்சி 17.2

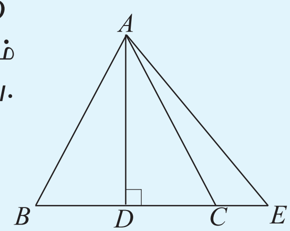
1. உருவில் முக்கோணி ABC யில் AD குத்துயரமாகும்.
$AD = DC$ எனின், $AB^2 = BD^2 + DC^2$ என நிறுவுக.



2. முக்கோணி ABC யில் AD செங்குத்துயரமாகும். $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$ என நிறுவுக.

3. சமபக்க முக்கோணி ABC யில் AD குத்துயரமாகும். $4\,AD^2 = 3BC^2$ என நிறுவுக.

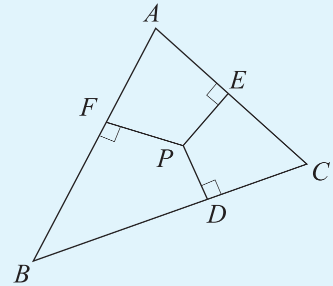
4. உருவில் காணப்படும் சமபக்க முக்கோணி ABC யில் AD செங்குத்துயரமாகும். $DC = CE$ ஆக இருக்குமாறு பக்கம் BC ஆனது E வரைக்கும் நீட்டப்பட்டுள்ளது. $AE^2 = 7\,EC^2$ என நிறுவுக.



5. நாற்பக்கல் $ABCD$ யில் மூலைவிட்டங்கள் O வில் செங்கோணத்தில் இடை வெட்டுகின்றன $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ என நிறுவுக.

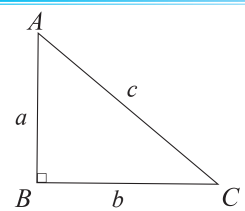
6. O என்பது செவ்வகம் $ABCD$ யின் உள்ளே உள்ள ஒரு புள்ளியாகும். $AO^2 + CO^2 = BO^2 + DO^2$ என நிறுவுக.
(உதவி: O இனூடாக செவ்வகத்தின் பக்கம் ஒன்றிக்கு சமாந்தரம் வரைக.)

7. முக்கோணி ABC யின் உள்ளே புள்ளி P உள்ளது. P யிலிருந்து BC, AC, AB ஆகிய பக்கங்களுக்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்துகளின் அடிகள் முறையே D, E, F ஆகும்.
(i) $BP^2 - PC^2 = BD^2 - DC^2$ எனவும்
(ii) $BD^2 + CE^2 + AF^2 = CD^2 + AE^2 + BF^2$ எனவும்
நிறுவுக.



8. நேர்கோடு ABC யின் ஒரே பக்கத்தில் $ABXY$, $BCPQ$ என்னும் இரு சதுரங்கள் உள்ளன. $PX^2 + CY^2 = 3\,(AB^2 + BC^2)$ என நிறுவுக.

17.4 பைதகரசின் மும்மை



உருவில் காணப்படும் செங்கோண முக்கோணி ABC யில் செங்கோணத்தை ஆக்கும் பக்கங்களின் நீளங்கள் a ஆகவும் b ஆகவும் செம்பக்கத்தின் நீளம் c ஆகவும் இருக்கும்போது பைதகரசின் தேற்றத்திற்கேற்ப $a^2 + b^2 = c^2$ என்பதை நாம் அறிவோம். இவ்வாறு சமன்பாடு $a^2 + b^2 = c^2$ ஐத் திருப்தியாக்கும் a, b, c ஆகிய பெறுமானங்கள் பைதகரசின் மும்மை எனப்படும்.

$3^2 + 4^2 = 5^2$ ஆகையால் (3, 4, 5) ஆகியன பைதகரசின் மும்மை ஆகும். (3, 4, 5) என்ற மும்மையின் எந்த ஒரு மடங்கும் பைதகரசின் மும்மையாகும்.

உதாரணம் : (3, 4, 5) இன் இருமடங்கு (6, 8, 10) ஆகும்.

$6^2 + 8^2 = 10^2$ ஆகையால் (6, 8, 10) உம் பைதகரசின் மும்மையாகும். (3, 4, 5) இன் மும்மடங்கு (9, 12, 15) ஆகும். இங்கு $9^2 + 12^2 = 15^2$. ஆகவே (9, 12, 15) உம் பைதகரசின் மும்மையாகும். இத்தகைய (3, 4, 5) இன் மடங்குகள் தவிர்ந்த வேறு பைதகரசின் மும்மைகளும் உள்ளன.

உதாரணம் : $5^2 + 12^2 = 13^2$ ஆகையால் (5, 12, 13) பைதகரசின் மும்மையாகும்.
$8^2 + 15^2 = 17^2$ ஆகையால் (8, 15, 17) பைதகரசின் மும்மையாகும்.

மேலே கூறியது போன்று இவற்றின் மடங்குகளும் பைதகரசின் மும்மைகளாகும்.

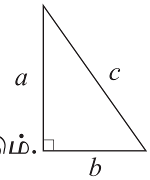
பைதகரசின் மும்மைகளைப் பெறுவதற்கு யூக்கிலிட்டு என்னும் கணிதவியலாளர் ''பரிமாணச் சமன்பாடுகளை'' அறிமுகஞ் செய்தார். x, y என்னும் எவையேனும் இரு எண்கள் $a = x^2 - y^2$, $b = 2xy$, $c = x^2 + y^2$ என அமையுமாறு இருக்கும்போது a, b, c ஆகியவற்றுக்குப் பைதகரசின் மும்மை கிடைக்கின்றது.

உதாரணம் : $x = 6, y = 5$ ஆக இருக்கும்போது

$a = x^2 - y^2 = 6^2 - 5^2 = 11$

$b = 2xy = 2 \times 6 \times 5 = 60$

$c = x^2 + y^2 = 6^2 + 5^2 = 61$ எனப் பெறப்படும்.

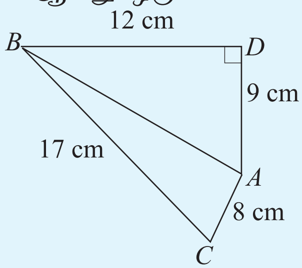


அப்போது, (11, 60, 61) பைதகரசின் மும்மையாகும்.

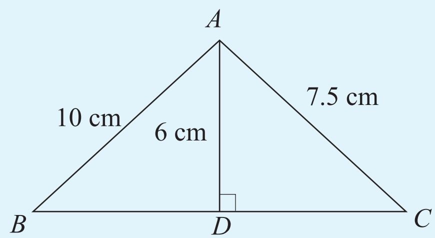
பயிற்சி 17.3

1. இரு முக்கோணிகளின் பக்கங்களின் அளவுகள் (i) (8, 15, 17) (ii) (14, 18, 25) எனக் காட்டப்பட்டுள்ளன. இம்முக்கோணிகளிலிருந்து செங்கோண முக்கோணியைத் தெரிந்தெடுக்க. அதற்கேற்ப பைதகரசின் மும்மையை எழுதுக.

2. (i), (ii) ஆகிய உருக்களில் காணப்படும் அளவுகளுக்கேற்ப ஒவ்வோர் உருவிலும் $B\hat{A}C$ ஆனது ஒரு செங்கோணமெனக் காட்டுக.



(i)



(ii)

3. பின்வரும் அட்டவணையைப் பூர்த்திசெய்து பைதகரசின் மும்மையைக் காண்க.

x	y	x^2	y^2	a	b	c	பைதகரசின் மும்மை
				$x^2 - y^2$	$2xy$	$x^2 + y^2$	
2	1						
5	4						
4	3						
6	5						
7	5						

பலவினப் பயிற்சி

1. O வை மையமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 9 cm தூரத்தில் இருக்கும் ஒரு நாண் AB யின் நீளம் 24 cm ஆகும். வட்டத்தின் ஆரையைக் காண்க.

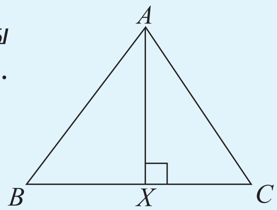
2. $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm, $\hat{B}$ செங்கோணம் ஆகவுள்ள முக்கோணி ABC யை அமைக்க. நீர் வரைந்த முக்கோணியைக் கொண்டு $\sqrt{13}$ இன் பெறுமானத்தை முதலாம் தசம தானத்திற்குக் காண்க.

3. பின்வரும் நீளங்கள் ஒவ்வொன்றையும் கொண்ட நேர்கோட்டுத் துண்டங்களை அமைக்க.

(i) $\sqrt{8}$ cm (ii) $\sqrt{10}$ cm (iii) $\sqrt{41}$ cm

4. ABC என்பது ஒரு சமபக்க முக்கோணியாகும். AB யின் நடுப்புள்ளி D யும் CD யின் நடுப்புள்ளி E யும் ஆகும். $16\ AE^2 = 7AB^2$ என நிறுவுக.

5. முக்கோணி ABC யில் $\hat{B}$ ஒரு கூர்ங்கோணமாகும். A யிலிருந்து BC யிற்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்தின் அடி X ஆகும். $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\ BC.BX$ என நிறுவுக.



18 திரிகோணகணிதம்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன்மூலம் நீங்கள்

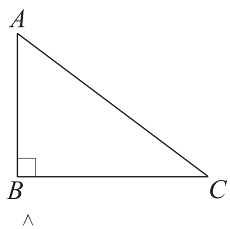
- திரிகோணகணித விகிதங்களான சைன், கோசைன், தான்சன் ஆகியவற்றை அறிந்து கொள்ளவும்
- சைன், கோசைன், தான்சன் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி முக்கோணிகள் தொடர்பான கணித்தல்களைச் செய்யவும்
- திரிகோணகணிதப் பிரசினங்களின் தீர்வுகளைப் பரீட்சிப்பதற்காக விஞ்ஞான கணிகருவியைப் பயன்படுத்தவும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

18.1 செங்கோண முக்கோணிகள்

ஒரு செங்கோண முக்கோணியில் இரண்டு பக்கங்களின் நீளங்கள் தரப்படும்போது எஞ்சிய பக்கத்தின் நீளத்தைக் காண்பதற்குப் பைதகரசின் தொடர்பைப் பயன்படுத்த முடியும் என்பதை நாம் அறிவோம்.

ஒரு செங்கோண முக்கோணியில் ஒரு பக்கத்தின் நீளமும் செங்கோணத்தைத் தவிர வேறொரு கோணத்தின்பருமனும் தரப்படும் போது முக்கோணியின் எஞ்சிய பக்கங்களின் நீளங்களைப் பைதகரசின் தொடர்பின் மூலம் பெற்றுக்கொள்ள முடியாது. அதற்கான ஒரு முறையை அறிந்து கொள்வதற்காக முதலில் ஒரு செங்கோண முக்கோணியிலுள்ள பக்கங்களைப் பெயரிடும் முறையை அறிந்து கொள்வோம்.



செங்கோண முக்கோணி ABC இல் $\hat{B}$ செங்கோணமாகும். அப்போது $\hat{A}$, $\hat{C}$ ஆகியன இரண்டும் கூர்ங்கோணங்களாகும். செங்கோணமாகிய $\hat{B}$ யிற்கு எதிரே உள்ள பக்கம் AC செம்பக்கம் எனப்படும். முக்கோணியின் மற்றைய இரண்டு கோணங்களிலும் ஒன்றாகிய $\hat{C}$ ஐக் கருதினால், அதற்கு எதிரே அமைந்துள்ள பக்கம் AB ஆனது $\hat{C}$ இன் எதிர்ப் பக்கம் என அழைக்கப்படும். மேலும் $\hat{C}$ இன் இரு பக்கங்களில் ஒன்றாகிய முக்கோணியின் செம்பக்கமல்லாத பக்கமாகிய BC ஆனது $\hat{C}$ இன் அயற் பக்கம் என அழைக்கப்படும்.

இதற்கேற்ப, $\hat{A}$ ஐக் கருதினால், முன்னர் போன்றே, அதற்கு எதிரே அமைந்துள்ள பக்கம் BC ஆனது A இன் எதிர்ப்பக்கமாகும். முக்கோணியில் செம்பக்கமல்லாத $\hat{A}$ இன் ஒரு புயமாகிய AB ஆனது அயற்பக்கம் ஆகும்.

அதற்கேற்ப உருவிலுள்ள செங்கோண முக்கோணி PQR இல்

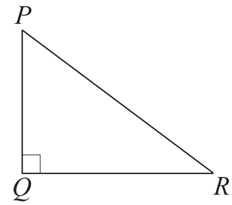
செம்பக்கம் $= PR$

$Q\hat{R}P$ ஐக் கருதினால், எதிர்ப்பக்கம் $= PQ$

அயற்பக்கம் $= QR$

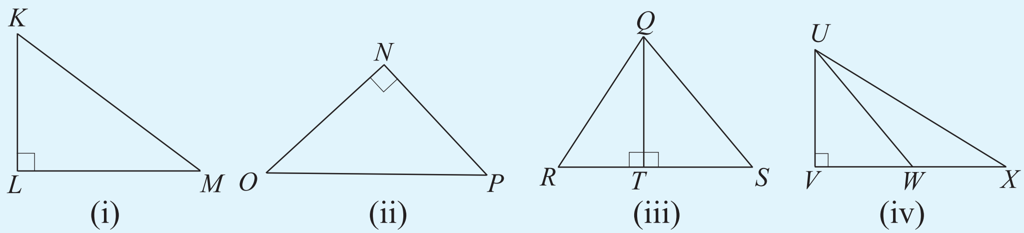
$Q\hat{P}R$ ஐக் கருதினால், எதிர்ப்பக்கம் $= QR$

அயற்பக்கம் $= PQ$



பயிற்சி 18.1

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வோர் உருவிலிருந்தும் தரப்பட்ட அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.



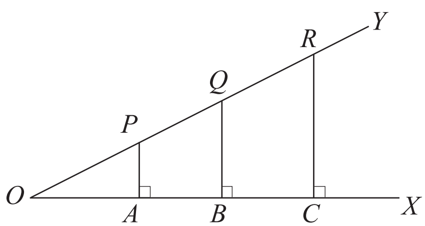
	செங்கோண முக்கோணி	செம் பக்கம்	கருதும் கோணம்	எதிர்ப் பக்கம்	அயற் பக்கம்
(i)	KLM	KM	$L\hat{K}M$ $L\hat{M}K$		
(ii)	PNO		$N\hat{O}P$ $O\hat{P}N$		
(iii)	QRT QTS		$R\hat{Q}T$ $T\hat{Q}S$		
(iv)	UVX UVW		$V\hat{U}X$ $U\hat{W}V$		

18.2 திரிகோணகணித விகிதங்கள்

ஒரு செங்கோண முக்கோணியின் ஒரு கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களுக் கிடையிலான தொடர்புகள் பற்றி ஆராய்வதற்காகக் கீழே உள்ள செயற்பாட்டில் ஈடுபடுக.

செயற்பாடு

- XO, OY ஆகிய புயங்கள் ஒவ்வொன்றும் 11 cm ஆக இருக்கத்தக்கதாக 30° ஆகவுள்ள $X\hat{O}Y$ ஐ வரைக.
- பக்கம் OY வழியே O இலிருந்து 2 cm, 4 cm, 7 cm தூரங்களில் முறையே P, Q, R ஆகிய புள்ளிகளைக் குறிக்க.
- மூலைமட்டத்தைப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறுமுறையில் P, Q, R ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து கோடு OX இற்குச் செங்குத்து கோடுகள் வரைந்து அவை கோடு OX ஐ சந்திக்கும் புள்ளிகளை முறையே A, B, C எனப் பெயரிடுக.
- அப்போது கீழே தரப்பட்டுள்ளதைப் போன்று ஓர் உருவைப் பெறுவீர்கள்.

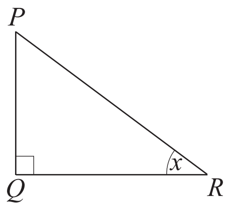


- ஒவ்வொரு செங்கோண முக்கோணியிலும் பக்கங்களை அளந்து கீழேயுள்ள அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக. (கடைசி நிரல்களிலுள்ள வகுத்தல்களை முதலாம் தசமதானத்திற்குப் பெறுக.)

செங் கோண முக்கோணி	செம் பக்கம் (cm)	30° கோணத் தின் எதிர்ப் பக்கம் (cm)	30° கோணத் தின் அயற் பக்கம் (cm)	$\frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}}$	$\frac{\text{அயற் பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}}$	$\frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அயற் பக்கம்}}$
AOP	2	1	1.7	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{1.7}{2} = 0.9$	$\frac{1}{1.7} = 0.6$
BOQ						
COR						

செயற்பாட்டில் பெற்ற அளவுகளைக் கொண்டு தயாரிக்கப்பட்ட அட்டவணையின் படி 30° கோணத்திற்கு அனைத்து முக்கோணிகளிலும் $\dfrac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}}$ என்பதற்கு 0.5 உம், $\dfrac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அயற்பக்கம்}}$ என்பதற்கு 0.6 உம் $\dfrac{\text{அயற் பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}}$ என்பதற்கு 0.9 உம் பெறப்பட்டுள்ளன.

இவ்வாறு செங்கோண முக்கோணிகளில் ஒவ்வொரு பக்கங்களுக்கிடையிலான விகிதங்களுக்கு ஒரு மாறாப் பெறுமானம் பெறப்படுவதற்கான காரணம் அவை இயல்பொத்தவையாயிருப்பது என்பதை நீங்கள் அவதானிக்கலாம். இவை திரிகோணகணித விகிதங்கள் என அழைக்கப்படும். இத்திரிகோணகணித விகிதங்கள் அதனுடன் தொடர்புடைய பக்கங்களுக்கேற்ப சைன் 30°, தான்சன் 30°, கோசைன் 30° எனப் பெயரிடப்படும். சைன் ஐக் குறிப்பிடுவதற்காக "sin" உம் தான்சனைக் குறிப்பிடுவதற்காக "tan" உம் கோசைனைக் குறிப்பிடுவதற்காக "cos" உம் இடப்படும். இதற்கேற்ப 30° கோணத்தின் சைன் "$\sin 30^\circ$" உம் 30° கோணத்தின் கோசைன் "$\cos 30^\circ$" உம் 30° கோணத்தின் தான்சன் "$\tan 30^\circ$" உம் ஆகும்.



இனி உருவில் தரப்பட்டுள்ள செங்கோண முக்கோணி PQR இற்கான திரிகோணகணித விகிதங்களை மேலே குறிப்பிட்ட குறியீடுகளைக் கொண்டு எழுதுவோம்.

x இன் சார்பில்;

$$\sin x = \frac{x \text{ இன் எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}} = \frac{PQ}{PR}$$

$$\cos x = \frac{x \text{ இன் அயற் பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}} = \frac{QR}{PR}$$

$$\tan x = \frac{x \text{ இன் எதிர்ப் பக்கம்}}{x \text{ இன் அயற் பக்கம்}} = \frac{PQ}{QR}$$

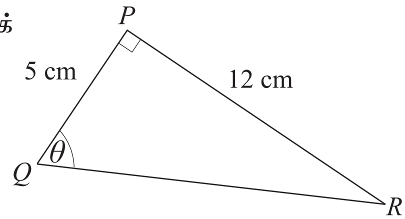
இம்மூன்று திரிகோணகணித விகிதங்களையும் பயன்படுத்திக் கணித்தல்கள் செய்யும் முறையைக் கீழேயுள்ள உதாரணங்களிலிருந்து ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

உருவில் தரப்பட்டுள்ள முக்கோணி PQR இல் $\hat{P}$ ஒரு செங்கோணமாகும். $PQ = 5$ cm உம் $PR = 12$ cm உம் ஆகும். $P\hat{Q}R = \theta$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

(i) பக்கம் QR இன் நீளத்தைக் காண்க.
(ii) கீழே தரப்பட்டுள்ளவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(a) $\sin\theta$ **(b)** $\cos\theta$ **(c)** $\tan\theta$



(i) பைதகரசின் தேற்றத்தின்படி:

$$\begin{aligned} QR^2 &= PQ^2 + PR^2 \\ &= 5^2 + 12^2 \\ &= 25 + 144 \\ \therefore \quad QR &= \sqrt{169} \\ &= 13 \end{aligned}$$

$\therefore$ பக்கம் QR இன் நீளம் 13 cm ஆகும்

(ii) **(a)** $\sin\theta = \dfrac{PR}{QR} = \dfrac{12}{13} = 0.9230$

(b) $\cos\theta = \dfrac{PQ}{QR} = \dfrac{5}{13} = 0.3846$

(c) $\tan\theta = \dfrac{PR}{PQ} = \dfrac{12}{5} = 2.4$

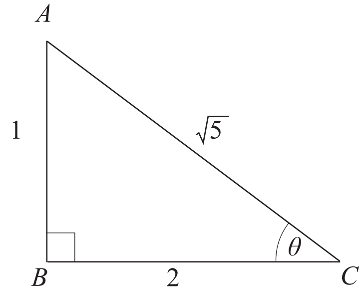
உதாரணம் 2

$\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ ஆயின் $\sin\theta$, $\cos\theta$ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ ஆயின்

θ இன் எதிர்ப்பக்கம் 1 அலகும் θ இன் அயற்பக்கம் 2 அலகும் ஆகும்.

இத்தகவல்களை ஓர் உருவில் குறிப்போம்.



அப்போது பைதகரசின் தேற்றப்படி முக்கோணி ABC இல்

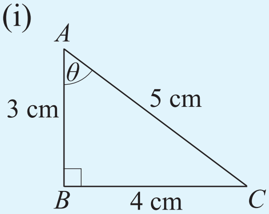
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= 1^2 + 2^2$$
$$AC^2 = 5$$
$$\therefore \quad AC = \sqrt{5}$$

அப்போது; $\sin\theta = \dfrac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ $\cos\theta = \dfrac{\text{அயற் பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

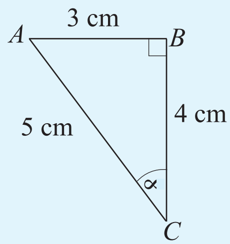
பயிற்சி 18.2

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வோர் உருவிலும் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப கீழே தரப்பட்டுள்ள கோவைகளில் கீறிட்ட இடங்களை நிரப்புக.

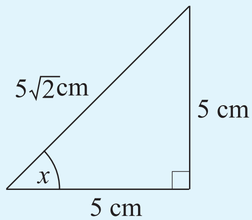
(i)



(ii)



(iii)



$\sin\theta =$ ....
$\cos\theta =$ ....
$\tan\theta =$ ....

$\sin\alpha =$ ....
$\cos\alpha =$ ....
$\tan\alpha =$ ....

$\sin x =$ ....
$\cos x =$ ....
$\tan x =$ ....

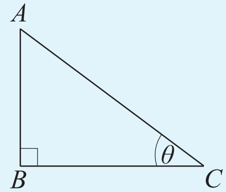
2. $\sin\theta = \dfrac{5}{13}$ ஆயின்,
(i) $\tan\theta$
(ii) $\cos\theta$
ஆகியவற்றின் பெறுமானம் காண்க.

3. உருவிலுள்ள முக்கோணி ABC இல் $\hat{B}$ செங்கோணமாகும். $\hat{C} = \theta$ எனக் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது.

(i) $B\hat{A}C$ யை θ இன் சார்பில் தருக.

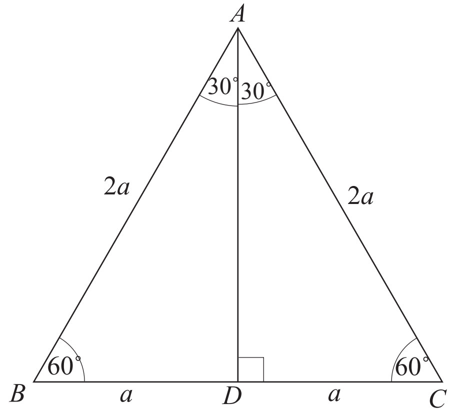
(ii) $\sin\theta = \cos(90 - \theta)$ எனக் காட்டுக.

(iii) $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$ எனக் காட்டுக.



18.3 30°, 45°, 60° ஆகிய கோணங்களின் திரிகோணகணித விகிதங்கள்

ஒரு பக்கத்தின் நீளம் $2a$ ஆகவுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணியிலிருந்து 60°, 30° கோணங்களின் திரிகோணகணித விகிதங்களைப் பெற்றுக்கொள்ளலாம்.



உருவில் சமபக்க முக்கோணி ABC தரப்பட்டுள்ளது. அதன் ஒவ்வொரு கோணமும் 60° ஆகும். உச்சி A இலிருந்து பக்கம் BC இற்கு செங்குத்து AD ஐ வரைவதால் D ஆனது பக்கம் BC யின் நடுப்புள்ளி ஆவதுடன் $B\hat{A}C$ என்னும் கோணமானது இருசமகூறிடப்படுகின்றது என்பதை நாம் அறிவோம்.
அப்போது $B\hat{A}D = 30^\circ$ ஆகும்.

செங்கோண முக்கோணி ABD இல் பக்கம் AD இன் நீளத்தை a இன் சார்பில் காண்போம்.
பைதகரசின் தேற்றப்படி,

$$\begin{aligned}
BD^2 + AD^2 &= AB^2 \\
a^2 + AD^2 &= (2a)^2 \\
AD^2 &= 4a^2 - a^2 \\
&= 3a^2 \\
AD &= \sqrt{3}a
\end{aligned}$$

செங்கோண முக்கோணி ABD ஐக் கருதும்போது,

$$\sin 60^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

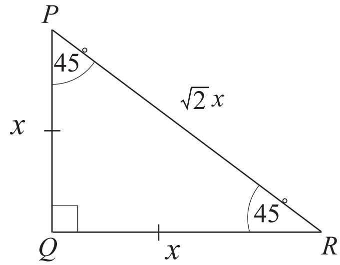
$$\tan 60^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

செங்கோண முக்கோணி ABD ஐக் கருதும்போது,

$$\sin 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

இதேபோன்று 45° கோணத்தின் திரிகோணகணித விகிதங்களைப் பெற்றுக் கொள்வதற்காக இருசமபக்கச் செங்கோண முக்கோணி PQR ஐப் பயன்படுத்துவோம். அதில் செங்கோணத்தை அடக்கும் பக்கங்களின் நீளங்கள் x எனக் கொண்டால்,

பைதகரசின் தேற்றப்படி
$$PR^2 = x^2 + x^2$$
$$= 2x^2$$
$$\therefore\ PR = \sqrt{2}x$$



அதற்கேற்ப
$$\sin 45^\circ = \frac{PQ}{PR} = \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos 45^\circ = \frac{QR}{PR} = \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \tan 45^\circ = \frac{PQ}{QR} = \frac{x}{x} = 1$$

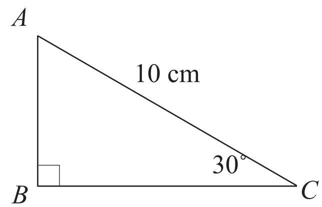
30°, 45°, 60° கோணங்களுக்குப் பெறப்பட்ட விகிதங்கள் கீழே உள்ள அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

உதாரணம் 1

முக்கோணி ABC இல் $\hat{B}$ செங்கோணமும் $A\hat{C}B = 30^\circ$ உம் பக்கம் AC இன் நீளம் 10cm உம் ஆகும். AB, BC ஆகிய பக்கங்களின் நீளங்களைக் காண்க.

உருவின்படி $\sin 30^\circ = \dfrac{AB}{AC}$



$$\frac{1}{2} = \frac{AB}{10} \quad (\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ என்பதால்})$$

$$AB = 5$$

$\therefore$ பக்கம் AB யின் நீளம் 5 cm ஆகும்.

$$\cos 30^\circ = \frac{BC}{AC}$$

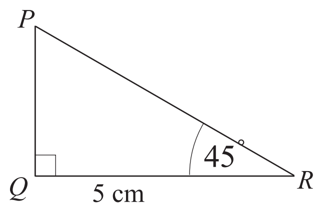
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{10}$$

$$\therefore \quad BC = 5\sqrt{3}$$

$\therefore$ பக்கம் BC யின் நீளம் $5\sqrt{3}$ cm ஆகும்.

உதாரணம் 2

செங்கோண முக்கோணி PQR இல் செம்பக்கத்தின் நீளத்தைக் காண்க.



$$\cos 45^\circ = \frac{QR}{PR}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5}{PR}$$

$$\therefore \quad PR = 5\sqrt{2}$$

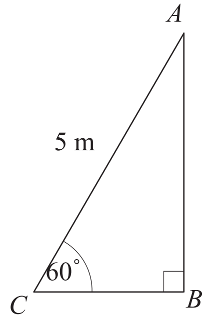
$\therefore$ செம்பக்கத்தின் நீளம் $5\sqrt{2}$ cm ஆகும்.

உதாரணம் 3

5 m நீளமான ஓர் ஏணி கிடையுடன் 60° கோணத்தை அமைக்கும் வகையில் நிலைக்குத்தான ஓர் சுவரில் சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஏணியின் மேல் முனையானது கிடைத்தளத்திலிருந்து எவ்வளவு உயரத்தில் தொட்டுக்கொண்டிருக்கும் எனக் காண்க.

நிலைக்குத்துச் சுவருக்கும் கிடைத் தரைக்கும் இடையிலுள்ள கோணம் 90° என்பதால் உருவில் $A\hat{B}C = 90^\circ$ ஆகும்.

செங்கோண முக்கோணி ABC இல்,



$$\frac{AB}{AC} = \sin 60^\circ$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore AB = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$= 4.325$ ($\sqrt{3} = 1.73$ எனக் கொள்வதால்)

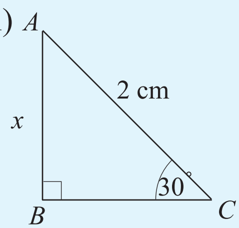
$\therefore$ ஏணியின் மேல் முனையானது கிடைத்தளத்திலிருந்து 4.33 m உயரத்தில் சுவரைத் தொட்டுக்கொண்டிருக்கும்.

இனி, மேற்குறித்த அட்டவணையிலுள்ள பெறுமானங்களைப் பயன்படுத்திக் கீழேயுள்ள பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

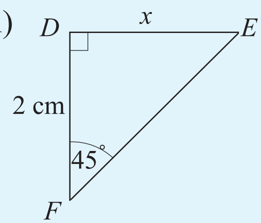
பயிற்சி 18.3

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப முக்கோணிகளில் x இனால் காட்டப்படும் நீளத்தைக் காண்க.

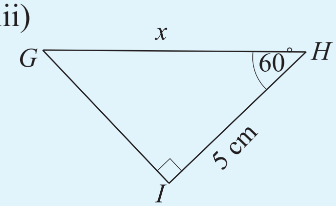
(i)



(ii)



(iii)



2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோவையினதும் பெறுமானங்களை மேற்குறித்த அட்டவணையிலுள்ள விகிதங்களைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

a. $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ$ **c.** $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ + \tan 60^\circ$

b. $\sin 45^\circ + \cos 45^\circ + \tan 60^\circ$ **d.** $\cos 30^\circ + \sin 60^\circ + \tan 60^\circ$

3. கீழே தரப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளை வாய்ப்புப் பார்க்க.

(i) $\sin 30^\circ \ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \ \sin 60^\circ = 1$

(ii) $\cos 60^\circ \ \cos 30^\circ - \sin 60^\circ \ \sin 30^\circ = 0$

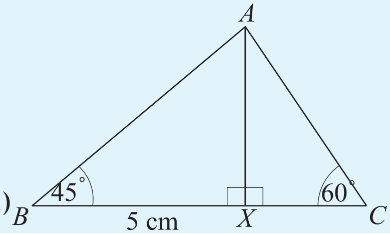
(iii) $\tan 30^\circ = \dfrac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ}$

4. தரப்பட்டுள்ள உருவிலுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப

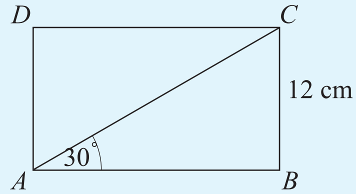
(i) AX இன் நீளம்

(ii) AC யின் நீளம்

ஆகியவற்றைக் காண்க. ($\sqrt{3} = 1.7$ எனக் கொள்க.)



5. செவ்வகம் $ABCD$ இன் பக்கம் BC ஆனது 12 cm ஆகும். மூலைவிட்டத்தின் நீளத்தைக் காண்க.



6. அன்ரனா கோபுரமொன்றை நிலைக்குத்தாக வைத்திருப்பதற்காக, அதன் மேல் முனையிலிருந்து 50 cm கீழே கட்டப்பட்டுள்ள ஒரு கம்பியின் மற்றைய முனை கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து 5 m தூரத்தில் கிடைத் தரையில் அமைந்துள்ள ஓர் ஆப்புடன் இறுக்கமாகக் கட்டப்பட்டுள்ளது. கம்பியின் நீளம் 10 m ஆயின்

(i) இத்தகவல்களை ஒரு பருமட்டான உருவில் தருக.

(ii) $\sqrt{3} = 1.7$ எனக் கொண்டு கோபுரத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

18.4 திரிகோணகணித அட்டவணை

இதுவரை 30°, 45°, 60° ஆகிய கோணங்களுக்கான திரிகோணகணித விகிதங்கள் பற்றி மாத்திரம் கவனத்தில் கொண்டோம். ஆயினும் 0° தொடக்கம் 90° வரையிலான கோணங்களுக்கும் இவ்வாறான விகிதங்கள் உள்ளன. அக்கோணங்களின் திரிகோணகணித விகிதங்கள் அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. சைன், கோசைன், தான்சன் என்பவற்றுக்காக மூன்று அட்டவணைகள் வெவ்வேறாகத் தயாரிக்கப்பட்டுள்ளன. அட்டவணையில் உட்படுத்தப்பட்டிருப்பவை கோணங்களின் விகிதங்கள் என்பதால் கோணமொன்றின் அளவீடாகிய பாகை என்பது கலை என்னும் சிறு பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு பாகை 60 கலைகளுக்குச் சமனாகும். அதாவது $1^\circ = 60'$

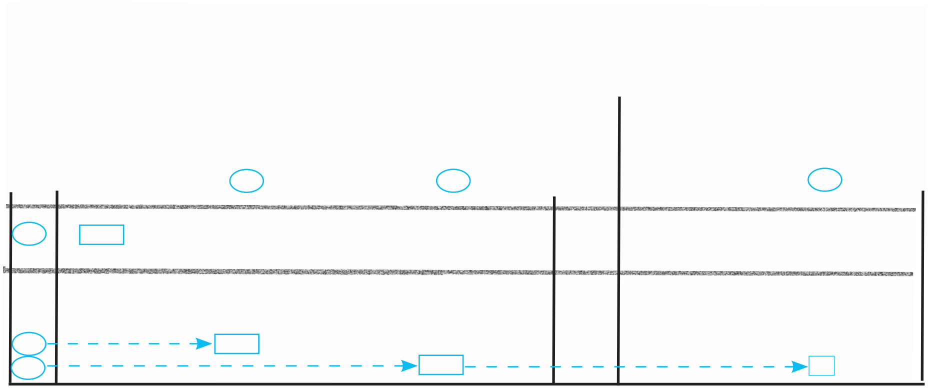
சைன், கோசைன், தான்சன் ஆகிய எந்தவோர் அட்டவணையிலும் முதலாம் நிரலில் 0° இருந்து 90° வரையிலான கோணங்களின் பெறுமானங்கள் தரப்பட்டுள்ளன. கீழே ஒரு தான்சன் அட்டவணையின் ஒரு பகுதி தரப்பட்டுள்ளது.

மேற்குறித்த முதலாவது நிரலில் பாகைகளின் அளவு 0 இலிருந்து 90° வரை குறிக்கப்பட்டுள்ளதுடன் (இங்கு அட்டவணையின் ஒரு பகுதி என்பதால் 0 இலிருந்து 4 வரையான பாகைகள் தரப்பட்டுள்ளன.) மேல் நிரையில் $0', 10', 20', ... 60'$ எனவும் இடைவித்தியாசங்கள் $1', 2', ... 9'$ எனவும் ஒரு பாகையின் பகுதிகளான கலைப் பெறுமானங்கள் தரப்பட்டுள்ளன. யாதாயினுமொரு கோணத்தின் விகிதத்தைப் பெற்றுக் கொள்வதற்கு மடக்கை அட்டவணையைப் போன்றே நிரையினதும் நிரலினதும் எண் வழியே உள்ள பெறுமானமும் இடைவித்தியாசங்கள் நிரையிலுள்ள பெறுமானமும் தொடர்புபடுத்திக் கொள்ளப்படும்.

இப்போது மேற்குறிப்பிட்ட திரிகோணகணித அட்டவணைகளை வெவ்வேறாகக் கவனத்தில் கொள்வோம்.

தான்சன் அட்டவணை

இவ்வட்டவணையிலுள்ள விகிதங்கள் 0.0000 இல் தொடங்கி படிப்படியாக அதிகரித்து 1.0000 ஐத் தாண்டிச் சென்று 90° வரை அடையும்போது மிகப்பெரிய பெறுமானத்தை எடுக்கின்றது. கீழே தான்சன் அட்டவணையிலிருந்து பெறப்பட்ட ஒரு பகுதி தரப்பட்டுள்ளது.



முதலில் $\tan 43^\circ$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்போம். $\tan 43^\circ$ இற்குரிய பெறுமானமானது 43° பாகை அடங்கியுள்ள நிரை வழியே 0 நிரலிலுள்ள பெறுமானமாகும்.
அதற்கேற்ப, $\tan 43^\circ = 0.9325$ ஆகும்.

இனி அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி $\tan 48^\circ 20'$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்போம்.

அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி அதற்காக 48° அடங்கியுள்ள நிரை வழியே $20'$ உள்ள நிரல் வரை செல்ல வேண்டும். அங்குள்ள 0. 1237 ஐப் பெறுக. மேலும் $20'$ அடங்கியுள்ள நிரலில் மேலேயுள்ள எண்ணாகிய 1.0117 இல் முழுவெண்பகுதி 1 உள்ளதால் அந்நிரலிலுள்ள எல்லா எண்களுக்கும் முழுவெண்பகுதியை எடுக்க வேண்டும். (அவ்வாறு முதலாவது நிரையில் மாத்திரம் முழுவெண்பகுதி குறிப்பிடப்படுவது அட்டவணையின் தெளிவிற்காக ஆகும்.)

இதற்கேற்ப $\tan 48^\circ 20'$ இன் பெறுமானம் 1. 1237 ஆகும்.

இவ்வாறே tan $49^\circ\ 57'$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்போம். முதலில் $49^\circ\ 50'$ இன் தான்சன் பெறுமானத்தைக் காண வேண்டும்.

அது tan $49^\circ\ 50' = 1.1847$ எனக் கிடைக்கும்.

$57'$ ஆவதற்கு இடைவித்தியாசப் பகுதியில் $7'$ ஐ எடுக்க வேண்டும். அதற்கேற்ப $7'$ இற்குரிய இடைவித்தியாசம் ஆகிய 0.0048 (இங்கு ஒரு நியமமாக இடைவித்தியாசமானது 4 தசம தானங்களைக் கொண்ட ஒரு பெறுமானத்தைக் கருதி அதன் பூச்சியமல்லாத பகுதி மாத்திரம் குறிக்கப்பட்டுள்ளது.) என்னும் பெறுமானம் 1.1847 உடன் கூட்டப்பட வேண்டும். அப்போது

$$\tan 49^\circ\ 57' = 1.1847 + 0.0048$$
$$= 1.1895$$ எனப் பெறப்படும்.

உதாரணம் 1

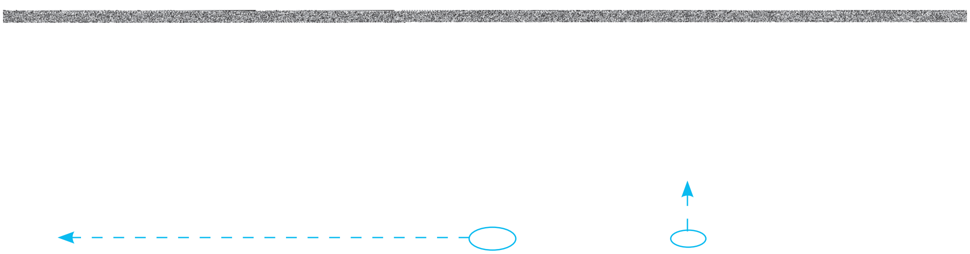
(i) $\tan 34^\circ\ 30' = 0.6873$

(ii) $\tan 44^\circ\ 42' = 0.9884 + 0.0011$
$= 0.9895$

(iii) $\tan 79^\circ\ 25' = 5.309 + 0.044$
$= 5.353$

யாதாயினுமொரு கோணத்தின் விகிதத்திலிருந்து ஒத்த கோணத்தைப் பெற்றுக் கொள்வது மடக்கை அட்டவணையில் முரண் மடக்கையைப் பெற்றுக்கொள்ளும் முறையிலேயே செய்யப்படும்.

tan $\theta = 1.1054$ ஆகவுள்ள கோணம் θ வைப் பெற்றுக் கொள்வோம்.



1.1054 இற்குக் கிட்டிய அதிலும் குறைந்த ஒரு பெறுமானத்தை 1.1041 ஐ அட்டவணையிலிருந்து பெற்றுக்கொள்ளும்போது அது $47^\circ\ 50'$ என்பதைக் காணலாம். அது 1.1054 ஐப் பெறுவதற்கு 1.1041உடன் மேலும் 0.0013 ஐக் கூட்ட வேண்டியுள்ளது. எனவே 0.0013 (அதாவது, இடைவித்தியாசப் பகுதியில் 13 உள்ள எண் பெறுமானத்திற்கு) இற்கு ஒத்த கலைப் பெறுமானத்தை இப்பாகையின் எண்ணிக்கையுடன் கூட்ட வேண்டும். அப்பெறுமானம் $2'$ ஆகும். எனவே தான்சன் 1.1054 இற்குரிய கோணமானது $47^\circ\ 50' + 2' = 47^\circ\ 52'$ ஆகும்.
எனவே $\theta = 47^\circ\ 52'$ ஆகும்.

உதாரணம் 2

(i) $\tan\theta = 0.3706$ ஆகும்போது

$\theta = 20^\circ\ 20'$

(ii) $\tan\theta = 0.4774$ ஆகும்போது

$\theta = 25^\circ\ 30' + 1'$

$= 25^\circ\ 31'$

(iii) $\tan\theta = 0.8446$ ஆகும்போது

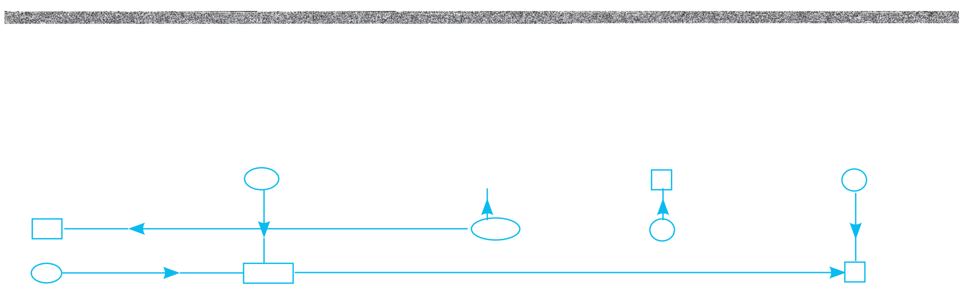
$\theta = 40^\circ\ 11'$

சைன் அட்டவணை

இவ்வட்டவணையில் 0.0000 இருந்து 1.0000 வரையிலான பெறுமானங்கள் உள்ளன. தான்சன் அட்டவணையைப் போன்று இங்கும் முதலாம் நிரலில் எண்கள் கோணத்தின் பெறுமானம் 0° இலிருந்து 90° வரை நீண்டு செல்கிறது. மேலேயுள்ள நிரையில் எண்கள் $0', 10', 20', 30', \ldots, 60'$ எனவும் இடைவித்தியாச நிரையில் $1', 2', 3', \ldots, 9'$ கோணத்தின் கலைப் பெறுமானங்கள் தரப்பட்டுள்ளன. தான்சன் அட்டவணையைப் பயன்படுத்திய முறையிலேயே இவ்வட்டவணையும் பயன்படுத்தப்படும்.

குறிப்பு : தான்சன் அட்டவணையில் பெறுமானங்கள் 0 இலிருந்து மிகப்பெரிய பெறுமானங்கள் வரை அதிகரித்துச் சென்றாலும் சைன் அட்டவணையில் 0 இலிருந்து 1 வரையுள்ள பெறுமானங்கள் மாத்திரமே உள்ளன. இதற்குக் காரணம் ஒரு முக்கோணியில் கோணமொன்றின் சைன் விகிதம் எப்போதும் 0 இற்கும் 1 இற்கும் இடையில் அமைந்திருப்பதாகும்.

$\sin 33^\circ\ 27'$ இன் பெறுமானத்தை அட்டவணையிலிருந்து பெற்றுக் கொள்வோம்.



முதலில் $\sin 33^\circ\ 20' = 0.5495$ எனக் குறித்துக்கொண்டு மீதி $7'$ ஐப் பெற்றுக் கொள்வதற்காக 33° நிரையில் இடைவித்தியாசத்தில் $7'$ இற்கு ஒத்த பெறுமானமாகிய 0.0017 ஐக் கூட்டுக.

அப்போது $\sin 33^\circ 27' = 0.5495 + 0.0017$

$= 0.5512$

உதாரணம் 3

(i) $\sin 75^\circ\ 44' = 0.9689 + 0.0003$
$= 0.9692$

(ii) $\sin 45^\circ\ 34' = 0.7133 + 0.0008$
$= 0.7141$

(iii) $\sin 39^\circ\ 50' = 0.6406$

தற்போது யாதாயினும் sin பெறுமானத்திற்குரிய பொருத்தமான கோணத்தைப் பெற்றுக்கொள்வதற்கு அட்டவணையைப் பயன்படுத்துவோம். அதுவும் தான்சன் அட்டவணையைப் பயன்படுத்திய முறையிலேயே ஆகும்.

$\sin\theta = 0.5075$ ஆகும் கோணம் θ வை முதலில் காண்போம். இப்பெறுமானம் அட்டவணையில் 30° நிரையிலும் 30 நிரலிலும் உண்டு. அதற்கேற்ப $\theta = 30^\circ\ 30'$. ஆகும். இனி இன்னொரு கோணத்தின் பெறுமானத்தை அட்டவணை யிலிருந்து காண்போம். $\sin\theta = 0.5277$ ஆகவுள்ள கோணம் θ வைக் காண்பதற்கு 0.5277 இல்லாததால் அதற்குக் கிட்டிய சிறிய எண்ணை அட்டவணையிலிருந்து 0.5275 எனப் பெறலாம். இதற்கு ஒத்த கோணம் $31^\circ\ 50'$ ஆகும். எஞ்சிய 0.0002 இற்கு ஒத்ததான கலைப் பெறுமானத்தைக் காண்பதற்கு அதே நிரையிலுள்ள இடைவித்தியாசப் பகுதியைப் பார்க்க. அங்கு 2 என்னும் பெறுமானதுக்கு ஒத்த கலை 1 ஆகும். எனவே சைன் பெறுமானம் 0.5277 ஆகவுள்ள கோணம் $31^\circ\ 51'$ ஆகும்.
அதாவது $\sin\theta = 0.5277$ ஆயின் $\theta = 31^\circ\ 51'$ ஆகும்.

உதாரணம் 4

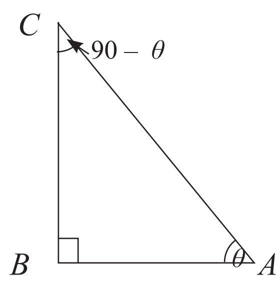
பின்வரும் சைன் பெறுமானங்களுக்குரிய θ வின் பெறுமானம் காண்க.

(i) $\sin\theta = 0.5831$ (ii) $\sin\theta = 0.7036$ (iii) $\sin\theta = 0.9691$

(i) $\therefore\ \theta = 35\ 40'$ (ii) $\therefore\ \theta = 44^\circ\ 43'$ (iii) $\therefore\ \theta = 75^\circ\ 43'$

கோசைன் அட்டவணை

கீழே தரப்பட்டுள்ள முக்கோணியைக் கருதுக.



இது $A\hat{B}C = 90^\circ$ ஆகவுள்ள செங்கோண முக்கோணி ஆகும். இம்முக்கோணியில் $B\hat{A}C = \theta$ எனக் கொள்வோம். அப்போது முக்கோணியின் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° என்பதால் $A\hat{C}B = 90^\circ - \theta$ ஆகும்.

$A\hat{C}B$, $B\hat{A}C$ ஆகிய கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 90° ஆகும். இவ்வாறான கோணச் சோடிகளை நிரப்பு கோணங்கள் என அழைப்பதை முன்னைய வகுப்புகளில் கற்றுள்ளீர்கள்.

இந்த முக்கோணி ABC ஐக் கருதினால்,

$$\cos\ \theta = \frac{\hat{A} \text{ யிற்கு எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}} = \frac{AB}{AC} \text{ ஆகும்.}$$

அவ்வாறே

$$\sin(90 - \theta) = \frac{\hat{C} \text{ யிற்கு எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}} = \frac{AB}{AC} \text{ ஆகும்.}$$

இதற்கேற்ப $\cos\theta = \sin(90 - \theta)$ என எமக்குக் கிடைகின்றது.

இத்தொடர்பைப் பயன்படுத்தி ஒரு முக்கோணியின் ஒரு கோணத்தின் கோசைனைக் கணிக்கலாம்.

உதாரணம் 5

$\cos 58^\circ$ இன் பெறுமானம் காண்க.

$\cos 58^\circ = \sin(90 - 58)$ (மேலே பெற்ற தொடர்பின்படி)
$= \sin 32$
$= 0.5299$ (மேலே பகுதியில் தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையின்படி)

உதாரணம் 6

$\cos 56^\circ\ 18'$ இன் பெறுமானம் காண்க.

முதலில் $90 - 56^\circ\ 18'$ இன் பெறுமானம் காண்போம். அது $33^\circ\ 42'$ ஆகும். எனவே

$\cos 56^\circ\ 18' = \sin(90 - 56^\circ\ 18') = \sin 32^\circ 42'$
$= 0.5549$

இவ்வாறே கோசைன் தரப்பட்டுள்ளபோது உரிய கோணத்தையும் காணலாம். அதற்கான ஓர் உதாரணத்தைப் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 7

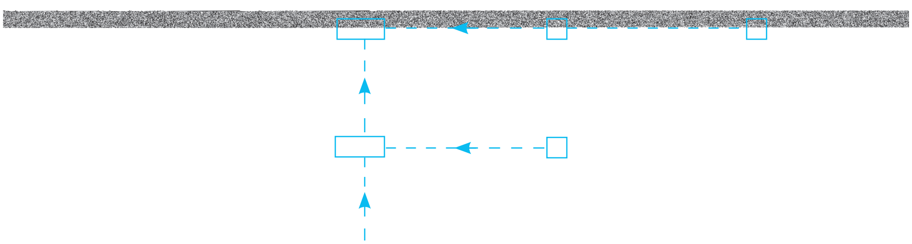
$\cos\theta = 0.5175$ ஆயின் θ இன் பெறுமானம் காண்க.

இதனை $\sin(90 - \theta) = 0.5175$ என எழுதுவோம். பின்னர் சைன் பெறுமானம் 0.5175 ஆகும் கோணத்தைக் காண்போம். அட்டவணையின்படி அது $31^\circ\ 10'$ ஆகும். எனவே $90 - \theta = 31^\circ\ 10'$ என எழுதலாம்.

இச்சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பதால் θ வின் பெறுமானம் காணலாம். அப்போது $\theta = 90 - 31^\circ\ 10' = 58^\circ\ 50'$ என θ வின் பெறுமானம் பெறப்படும்.

குறிப்பு ஒரு முக்கோணியின் கோணத்தின் கோசைனும் எப்போதும் சைனைப் போன்று 0 இற்கும் 1 இற்கும் இடையிலுள்ள பெறுமானமாகும். மேற்குறித்த உதாரணங்களில் தரப்பட்ட முறைகளுக்கு மேலதிகமாக சைன் அட்டவணையிலிருந்தும் ஒரு கோணத்தின் கோசைனைக் காணலாம். சைன் அட்டவணையில் இடை வித்தியாசங்களுக்கு முன்னே உள்ள நிரலில் தரப்பட்டுள்ளவை அட்டவணையில் முதலாவது நிரலில் உள்ள கோணங்களை 90 பாகையிலிருந்து கழிக்கப்பட்ட பெறுமானங்களே என்பதை அவதானிக்கவும். இப்பெறுமானங்களைப் பயன்படுத்தியும் கோசைனைக் காணலாம். ஆயினும் இடைவித்தியாசத்தைக் கணிக்கும்போது உரிய பெறுமானங்களைக் கழிக்க வேண்டும். இது சற்றுக் கடினமானதும் சிக்கலானதும் என்பதால் இயலுமான எல்லாச் சந்தர்ப்பங்களிலும் மேலேயுள்ள உதாரணங்களில் தரப்பட்டுள்ளவாறு நிரப்பிக் கோணத்தின் சைன் பெறுமானத்தைக் கண்டு கோசைன் பெறுமானத்தைக் காண்பது பொருத்தமானது.

கோசைன் அட்டவணையைப் பயன்படுத்திக் கோணங்களைக் காணும் முறையை இப்போது ஆராய்வோம்.



உதாரணம் 8

அட்டவணையிலிருந்து $\cos 4^{\circ}\ 20'$ இன் பெறுமானம் காண்போம். வலதுபக்க "பாகை" நிரலில் 4° ஐயும் கீழே கலை நிரலில் $20'$ ஐயும் எடுக்க வேண்டும். 4° கோணத்துக்குரிய நிரலில் அதற்கு இடதுபக்கத்திலுள்ள $20'$ எடுக்கும்போது $\cos 4^{\circ}\ 20' = 0.9971$ ஆகும்.

உதாரணம் 9

தற்போது $\cos 9^{\circ}\ 26'$ இன் பெறுமானம் காண்போம்.

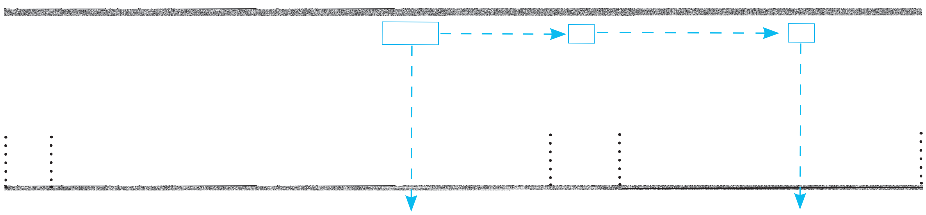
அப்போது $\cos 9^{\circ}\ 20' = 0.9868$ அதே நிரையில் $6'$ இற்கு ஒத்த பெறுமானம் 0.0003 ஆகும்.

இனிக் கோசைன் பெறுமானத்தைப் பெற்றுக்கொள்ளும்போது இடைவித்தியாச நிரல்களிலுள்ள பெறுமானங்களைக் கழிக்க வேண்டும். அதற்கேற்ப

$$\begin{aligned} \cos 9^{\circ}\ 26' &= 0.9868 - 0.0003 \\ &= 0.9865 \end{aligned}$$

உதாரணம் 10

$\cos \theta = 0.4374$ ஆகவுள்ள கோணத்தைக் காண்போம்.



அட்டவணையில் 0.4374 இற்குக் குறைந்த கிட்டிய பெறுமானம் 0.4358 ஆகும். அது $64^{\circ}\ 10'$ ஆகும்.

0.4374 ஆவதற்குக் குறைவாக உள்ள 0.0016 ஆனது அமைந்திருப்பது இடை வித்தியாசம் $6'$ இலாகும். இக்கலை எண்ணிக்கையைக் கழிக்கும்போது

$$64^{\circ}\ 10' - 6' = 64^{\circ}\ 4'$$

$$\therefore \ \cos \theta = 0.4374 \text{ எனின் } \theta = 64^{\circ}\ 4'$$

பயிற்சி 18.4

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு பெறுமானத்தையும் தான்சன் அட்டவணையைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

a. $\tan 25^{\circ}$ **b.** $\tan 37^{\circ}$ **c.** $\tan 40^{\circ}\ 54'$

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தான்சன் பெறுமானத்திற்குரிய θ வைக் காண்க.

a. $\tan \theta = 0.3214$ **b.** $\tan \theta = 0.7513$ **c.** $\tan \theta = 0.9432$

3. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு பெறுமானத்தையும் சைன் அட்டவணையைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

a. $\sin 10^{\circ}\ 30'$ **b.** $\sin 21^{\circ}\ 32'$ **c.** $\sin 25^{\circ}\ 57'$

4. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சைன் பெறுமானத்திற்குமுரிய θ வைக் காண்க.

a. $\sin \theta = 0.5000$ **b.** $\sin \theta = 0.4348$ **c.** $\sin \theta = 0.6437$

5. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொன்றின் பெறுமானத்தையும் கோசைன் அட்டவணையைப் பயன்படுத்திக் காண்க. விடையின் செவ்வைத் தன்மையை சைன் அட்டவணையைப் பயன்படுத்திப் பரீட்சித்துப் பார்க்க.

a. $\cos 5^{\circ}\ 40'$ **b.** $\cos 29^{\circ}\ 30'$ **c.** $\cos 44^{\circ}\ 10'$

6. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோசைன் பெறுமானத்திற்கும் பொருத்தமான θ வின் பெறுமானம் காண்க.

a. $\cos \theta = 0.4358$ **b.** $\cos \theta = 0.6450$ **c.** $\cos \theta = 0.9974$

18.5 திரிகோணகணித அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி பிரசினங்களைத் தீர்த்தல்

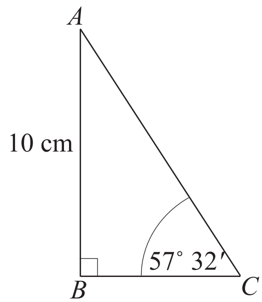
இதற்கு முன்னர் $30^{\circ}, 45^{\circ}, 60^{\circ}$ கோணங்களுடன் மாத்திரம் நாம் பிரசினம் தீர்த்தாலும் இப்பொழுது எந்தவொரு கோணம் இருப்பினும் தீர்க்கலாம். திரிகோணகணிதம் தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்க்கும்போது கீழே தரப்பட்டுள்ள விடயங்களைக் கவனத்தில்கொள்வது முக்கியமானதாகும்.

1. பொருத்தமான ஒரு செங்கோண முக்கோணியைக் கருதுதல்
2. அம்முக்கோணியில் பொருத்தமான ஒரு கோணத்தைத் தெரிந்தெடுத்தல்
3. அக்கோணத்திற்கான பொருத்தமான திரிகோணகணித விகிதமொன்றைப் பயன்படுத்தல்

இதற்கான சில உதாரணங்களை ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

உருவில் தரப்பட்டுள்ள செங்கோண முக்கோணி ABC இல் உள்ள அளவீடுகளுக்கேற்ப பக்கம் AC இன் நீளத்தைக் காண்க.



முக்கோணியில் தரப்பட்டுள்ள கோணம் C ஆகும். அதற்கு எதிரேயுள்ள பக்கம் தரப்பட்டுள்ளதுடன் செம்பக்கத்தின் நீளத்தைக் காணவேண்டும். எனவே எதிர்ப் பக்கம், செம்பக்கம் தொடர்பான சைன் விகிதத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

$$\sin 57^\circ\, 32' = \frac{AB}{AC}$$

$$0.8437 = \frac{10}{AC}$$

$$\therefore \quad AC = \frac{10}{0.8437}$$

மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி இவ்வகுத்தலைச் செய்யலாம்.

$$AC = \frac{10}{0.8437}$$

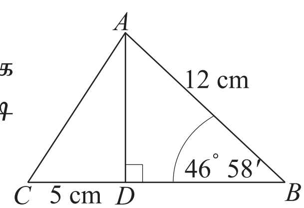
அப்போது, $\lg AC = \lg \dfrac{10}{0.8437}$

$$= \lg 10 - \lg 0.8437$$
$$= 1 - \bar{1}.9262$$
$$= 1.0738$$
$$\therefore AC = \text{antilog } 1.0738$$
$$\therefore AC = 11.85$$

எனவே, AC இன் நீளம் (இரண்டு தசம தானங்களுக்குத் திருத்தமாக) 11.85 cm ஆகும்.

உதாரணம் 2

முக்கோணி ABC யில் பக்கம் BC யிற்குச் செங்குத்தாக AD வரையப்பட்டுள்ளது. உருவிலுள்ள தகவல்களின்படி $A\hat{C}B$ இன் பெறுமானம் காண்க.



இங்கு கோணம் $A\hat{C}B$ ஐக் காண்பதற்காகக் கருத்திற் கொள்ளவேண்டிய முக்கோணி ADC ஆகும். அம்முக்கோணியின் இரண்டு பக்கங்களின் நீளங்கள் தெரியுமாயின் கோணம் $A\hat{C}B$ ஐக் காணலாம்.

இங்கு ஒரு பக்கத்தின் நீளமாகிய CD இன் நீளம் 5 cm எனத் தரப்பட்டுள்ளது. இன்னொரு பக்கத்தின் நீளத்தைக் காண வேண்டும். இதற்கு முக்கோணி ADB ஐக் கருதி AD ஐக் காணவேண்டும். எனவே முக்கோணி ADB இற்கு சைன் விகிதத்தைப் பிரயோகித்து AD யின் நீளத்தை முதலில் காண்போம்.

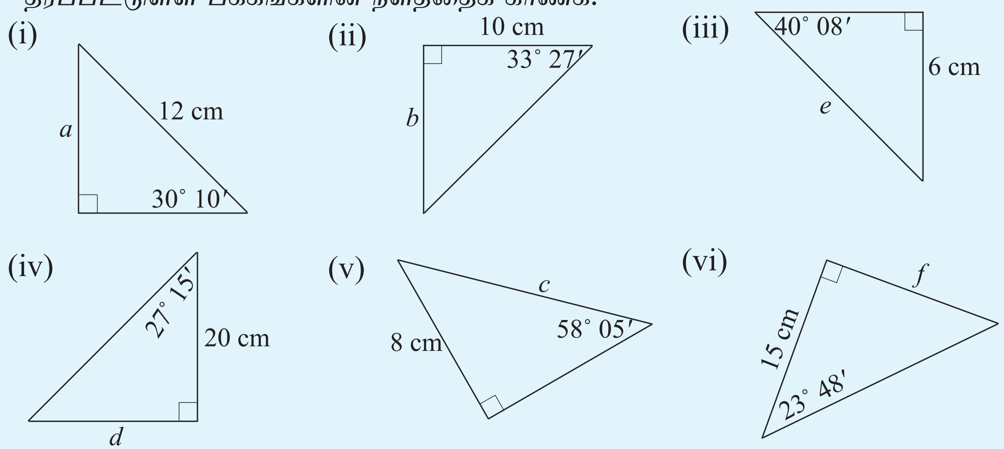
$$\sin 46^\circ 58' = \frac{AD}{AB}$$
$$0.7310 = \frac{AD}{12}$$
$$12 \times 0.7310 = AD$$
$$\therefore \quad AD = 8.7720 \text{ cm}$$

இனி, செங்கோண முக்கோணி ACD யில், $\tan A\hat{C}D = \frac{AD}{CD}$

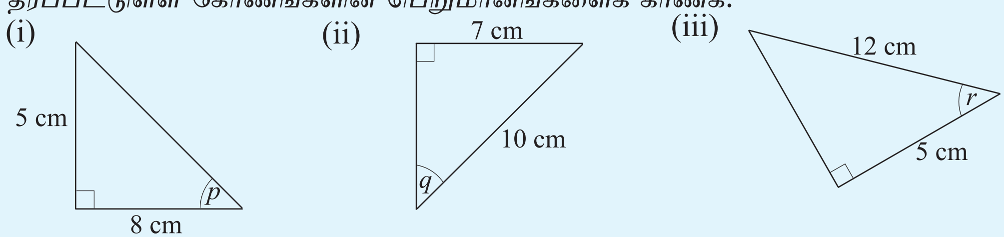
$$= \frac{8.7720}{5}$$
$$\therefore \quad \tan A\hat{C}D = 1.7544$$
$$\therefore \quad A\hat{C}D = 60^\circ 18'$$

பயிற்சி 18.5

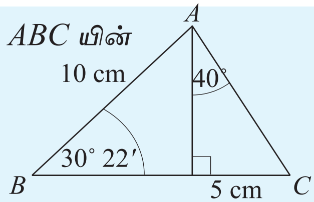
1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு முக்கோணியிலும் ஆங்கில அட்சரங்களினால் தரப்பட்டுள்ள பக்கங்களின் நீளத்தைக் காண்க.



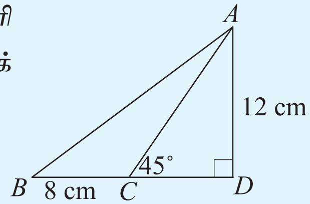
2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு முக்கோணியிலும் ஆங்கில அட்சரங்களினால் தரப்பட்டுள்ள கோணங்களின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



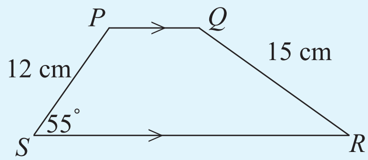
3. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப முக்கோணி ABC யின்
(i) சுற்றளவு
(ii) பரப்பளவு
ஆகியவற்றைக் காண்க.



4. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப, முக்கோணி ABC இல், $A\hat{B}C$ இன் பெறுமானம் $30^\circ\ 58'$ எனக் காட்டுக.

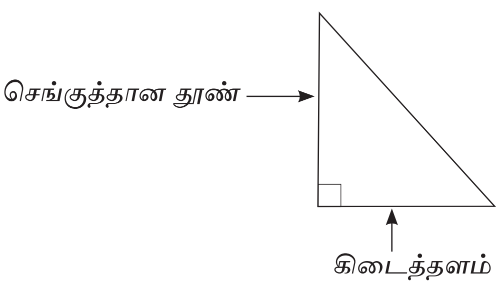


5. சரிவகம் $PQRS$ இல் $SR > PQ$ ஆகும். $PS = 12\,\text{cm}$ உம் $QR = 15\,\text{cm}$ உம் ஆயின் $Q\hat{R}S$ இன் பெறுமானம் காண்க.



18.6 நிலைக்குத்துத் தளத்தின் கோணங்கள்

தரைக்குச் சமாந்தரமான தளம் கிடைத்தளமாகும். கிடைக்குச் செங்குத்தான தளம் நிலைக்குத்துத் தளமாகும். நிலத்துக்குச் செங்குத்தாக நாட்டப்பட்டுள்ள ஒரு தூண் நிலைக்குத்துத் தூணாகும். அவ்வாறான ஓர் அமைப்பு உருவில் தரப்பட்டுள்ளது.



ஏற்றக் கோணம், இறக்கக் கோணம் என்பவை உட்பட்ட அளவிடைப் படங்களிலிருந்து ஒரு பொருளின் அமைவைக் காண்பது பற்றி தரம் 10 இல் நீங்கள் கற்றுள்ளீர்கள். திரிகோணகணித விகிதங்களிலிருந்து ஒரு பொருளின் அமைவைக் காண்பது தொடர்பாகக் கற்போம். அதற்காகக் கீழேயுள்ள உதாரணத்தை ஆராய்ந்து பார்ப்போம்.

உதாரணம் 1

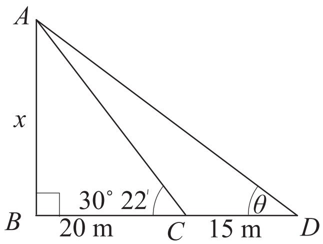
AB என்னும் நிலைக்குத்தான ஒரு கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து 20 m தொலைவிலுள்ள புள்ளி C இல் நிற்கும் ஒருவர் கோபுரத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணத்தை $30^\circ\ 22'$ எனக் காண்கின்றார். அவர் கோபுரத்திற்கு எதிர்த்திசையில் ஒரு நேர்கோட்டு வழியில் 15 m தூரம் சென்று மீண்டும் கோபுரத்தின் உச்சியை அவதானிக்கின்றார்.

(i) இத்தகவல்களை ஒரு பருமட்டான படத்தில் தருக.

(ii) கோபுரத்தின் உயரத்தைக் கிட்டிய மீற்றரில் காண்க.

(iii) இரண்டாவது அவதானிப்பின்போது கோபுரத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணத்தைக் காண்க.

(i)



(ii) கோபுரத்தின் உயரத்தை x எனக் கொள்வோம்.

அப்போது செங்கோண முக்கோணி ABC இல்,

$$\frac{AB}{BC} = \tan 30^\circ\ 22'$$

$$\frac{x}{20} = \tan 30^\circ\ 22'$$

$$x = 20 \tan 30^\circ\ 22'$$

$$= 20 \times 0.5859$$

$$= 11.718$$

$\therefore$ கோபுரத்தின் உயரம் அண்ணளவாக 12 m ஆகும்.

(iii) D இலிருந்து கோபுரத்தின் உச்சி தெரிகின்ற ஏற்றக் கோணம் θ என்போம்.

அப்போது செங்கோண முக்கோணி ABD இல்,

$$\frac{AB}{BD} = \tan\theta$$

$$\frac{12}{35} = \tan\theta$$

$$0.3428 = \tan\theta$$

$$\tan\theta = 0.3428$$

$$\therefore \quad \theta = 18^\circ\ 55'$$

$\therefore$ இரண்டாவது அவதானிப்பின்போது கோபுரத்தின் உச்சி தெரிகின்ற ஏற்றக் கோணம் $18^\circ\ 55'$ ஆகும்.

உதாரணம் 2

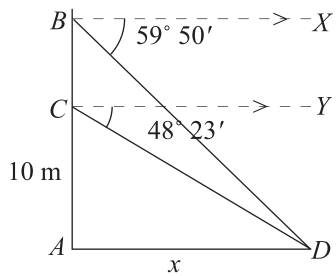
சில மாடிகளைக் கொண்ட ஒரு நிலைக்குத்தான கட்டடமொன்றின் தரை மட்டத்திலிருந்து 10 m உயரத்திலுள்ள ஒரு யன்னலின் வழியாக வெளியே பார்க்கும் ஒருவருக்கு கட்டடம் அமைந்துள்ள நிலத்தில் தொலைவில் நிறுத்தப்பட்டுள்ள ஒரு மோட்டார் சைக்கிள் $48^\circ\, 23'$ இறக்கக் கோணத்தில் தெரிகின்றது. அதே சந்தர்ப்பத்தில் அவர் கட்டடத்தின் மேல் மாடிக்குச் சென்று அங்குள்ள ஒரு யன்னலினூடாக முன்னர் அவதானித்த மோட்டார் சைக்கிளை அவதானித்தபோது அதை $59^\circ\, 50'$ இறக்கக் கோணத்தில் காண்கின்றார்.

(i) இத்ததகவல்களை ஒரு பருமட்டான படத்தில் தருக.

(ii) கட்டடத்திலிருந்து மோட்டார் சைக்கிள் நிறுத்தி வைக்கப்பட்டுள்ள தூரம் யாது?

(iii) கட்டடத்தின் மேல் மாடி யன்னல் வரையிலான உயரத்தைக் கணிக்க.

(i)



(ii) உருவில் ACD ஒரு செங்கோண முக்கோணியாகும். கட்டடத்திலிருந்து மோட்டார் சைக்கிள் வரையிலான தூரம் x எனக் கொள்வோம்.

$Y\hat{C}D = 48^\circ\, 23'$ ஆகும்போது $A\hat{D}C = 48^\circ\, 23'$ (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்)

அப்போது செங்கோண முக்கோணி ADC இல்

$$\frac{AC}{AD} = \tan 48^\circ\, 23'$$

$$\frac{10}{x} = \tan 48^\circ\, 23'$$

$$\therefore \frac{10}{\tan 48^\circ\, 23'} = x$$

அதாவது $x = \dfrac{10}{1.1257}$

$= 8.883$

x இன் பெறுமானத்தை மடக்கை அட்டவணை மூலம் பெறல்.

$\lg x = \lg 10 - \lg 1.1257$

$= 1 - 0.0515$

$\therefore x = \text{antilog } 0.9485$

$= 8.883$

$\therefore$ கட்டடத்திலிருந்து மோட்டார் சைக்கிளுக்குள்ள தூரம் 8.883 m ஆகும்.

(iii) செங்கோண முக்கோணி ABD இல் $A\hat{D}B = 59^\circ\ 50'$

$$\frac{AB}{AD} = \tan 59^\circ\ 50'$$

$$\frac{AB}{8.883} = \tan 59^\circ\ 50'$$

$$AB = 8.883 \times 1.7205$$
$$= 15.28$$

$\therefore$ கட்டடத்தின் மேல்மாடி யன்னலுக்கான உயரம் 15.28 m ஆகும்.

மேற்குறித்த உதாரணங்களிற்கேற்ப கீழேயுள்ள பயிற்சிகளில் ஈடுபடுக.

பயிற்சி 18.6

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள தகவல்களிலிருந்து பருமட்டான படங்களை வரைக.

(i) AB என்னும் நிலைக்குத்தான ஒரு கோபுரத்தின் உச்சி A ஆகும். கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து சமதளத்தில் 20 m தூரத்தில் நிற்கும் ஓர் அவதானிக்கு கோபுரத்தின் உச்சி $55^\circ\ 20'$ ஏற்றக் கோணத்தில் தெரிகின்றது. அவதானியின் உயரம் 1.5 m ஆகும்.

(ii) 35 m உயரமுடைய ஒரு தற்காலிகக் கூரையின் உச்சியிலிருந்து அதனை சீரமைக்கும் ஒரு தொழிலாளி தற்காலிகக் கூரை அமைந்துள்ள நிலத்தில் தொலைவில் நிறுத்தப்பட்டுள்ள ஒரு வாகனத்தை 50° இறக்கக் கோணத்தில் காண்கின்றார்.

(iii) நிலைக்குத்தான ஒரு கட்டடத்தின் இரண்டாம் மாடியில் நிற்கும் ஒருவர் கட்டடத்திலிருந்து 75 m தூரத்தில் உள்ள ஒரு வெளிச்ச வீட்டின் உச்சியை $27^\circ\ 35'$ ஏற்றக் கோணத்திலும் அதன் அடியை $41^\circ\ 15'$ இறக்கக் கோணத்திலும் காண்கின்றார்.

(iv) ஒரு பிள்ளை நிலைக்குத்தான கோபுரமொன்றின் உச்சியை 30° ஏற்றக் கோணத்தில் காண்கின்றது. கோபுரத்தை நோக்கி 25 m நடந்த பின்னர் மீண்டும் கோபுரத்தைப் பார்க்கும்போது அதன் உச்சி 50° ஏற்றக் கோணத்தில் தெரிகின்றது. (பிள்ளையின் உயரத்தைப் புறகணிக்க).

2. 20 m உயரமுடைய ஒரு வெளிச்ச வீட்டின் உச்சியிலுள்ள யன்னலினூடாக வெளியே பார்க்கும் ஒரு பாதுகாப்பு அதிகாரி கடலில் பயணிக்கும் ஒரு கப்பல் $30^\circ\ 15'$ இறக்கக் கோணத்தில் இருப்பதாக அவதானிக்கின்றார். வெளிச்ச வீட்டிலிருந்து கப்பலுக்கு உள்ள தூரத்தைக் காண்க.

3. நிலைக்குத்தான ஒரு கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து அதே மட்டத்தில் 20 m தொலைவிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து பார்க்கும்போது கோபுரத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் $35^\circ\ 12'$ ஆகும். கோபுரத்தை நிலைக்குத்தாக வைத்திருப்பதற்காக கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து 20 m தூரத்தில் ஒரு கம்பியை நன்கு இறுக்கமாக கட்ட வேண்டியுள்ளது. அதற்குத் தேவையான கம்பியின் நீளத்தைக் காண்க. (பார்வையாளரின் உயரத்தை புறக்கணிக்க, கட்டுவதற்காக கம்பியின் அரை மீற்றர் நீளம் தேவை எனக் கொள்க.)

4. நிலைக்குத்தான மின்கம்பத்தின் அடியிலிருந்து அதே மட்டத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து பார்க்கும்போது கம்பத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் 50° ஆகும். கம்பத்தின் உயரம் 12 m ஆயின் கம்பத்தின் அடியிலிருந்து அவதானிப்புப் புள்ளிக்கு உள்ள தூரத்தைக் காண்க. (அவதானியின் உயரத்தைப் புறக்கணிக்க)

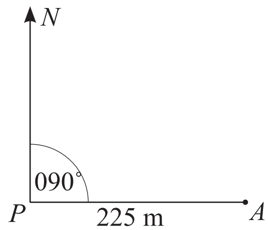
5. ஒரு கிடைத்தரையில் A, B ஆகிய இரண்டு தூண்கள் 200 m இடைவெளியில் அமைந்துள்ளன. தூண் A இன் உச்சியிலிருந்து தூண் B இன் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் $4^\circ\ 10'$ உம் B இன் அடியின் இறக்கக் கோணம் $8^\circ\ 15'$ உம் ஆகத் தெரிகின்றது.
- (i) இத்தகவல்களைப் பருமட்டான படத்தில் தருக.
- (ii) A, B ஆகிய தூண்களின் உயரங்களை வெவ்வேறாகக் கிட்டிய மீற்றரில் காண்க.
- (iii) தூண் A இன் அடியிலிருந்து தூண் B இன் உச்சியின் ஏற்றக் கோணத்தைக் காண்க.

6. ஒன்றுக்கொன்று 20 m தூரத்தில் அமைந்துள்ள நிலைக்குத்தான இரண்டு தூண்களுக்கிடையில் நடுவே நிற்கும் ஒருவருக்கு ஒரு தூணின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் 60° எனவும் மற்றைய தூணின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் 30° எனவும் தெரிகின்றது. (அவதானியின் உயரத்தைப் புறக்கணிக்க)
- (i) இரண்டு தூண்களினதும் உயரங்களை வெவ்வேறாகக் காண்க.
- (ii) ஒரு தூணின் உச்சியில் கட்டப்பட்ட ஒரு கம்பி மற்றைய தூணின் உச்சி யுடன் நன்கு இழுத்துக் கட்டப்பட்டுள்ளது. முடிச்சுகளுக்குப் பயன்படுத்திய பகுதிகளைப் புறக்கணித்து அக்கம்பியின் நீளத்தைக் காண்க. (அவதானியின் உயரத்தைப் புறக்கணிக்க)

18.7 கிடைத்தளத்தின் கோணங்கள்

கிடைத்தளத்தின் அமைவுகளின் திசைகளைக் குறிப்பதற்காகத் திசைகோள்களைப் பயன்படுத்துகின்றோம் என்பதை முன்னர் கற்றுள்ளீர்கள். திசைகோள் எனப்படுவது வடக்கிலிருந்து ஆரம்பித்து வலஞ்சுழியாக அளவிடும் கோண அளவொன்றாகும். இதனைக் குறிப்பதற்கு மூன்று இலக்கங்களில் எழுதுவது பொதுவான முறையாகும். நவீன நில அளவைக் கருவிகளில் திசைகோளுகளுடன் தூரமும் குறிக்கப்படும்.

புள்ளி P இலிருந்து பார்க்கும்போது கிழக்குத் திசையில் அமைந்துள்ள A இன் திசைகோள் 090° உம் தூரம் 225 m உம் ஆகும். இவ்விபரத்தை இவ்வாறு ஓர் உருவில் காட்டலாம்.



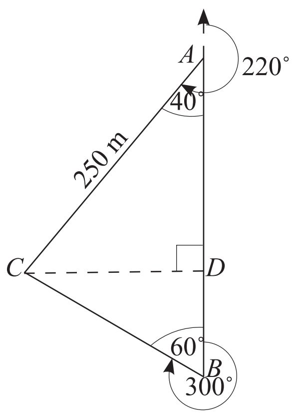
திசைகோளுடனான உருவங்களில் கணித்தல்களைத் திரிகோணகணித விகிதங்களைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்கும் முறையை ஓர் உதாரணத்தின் மூலம் அவதானிப்போம்.

உதாரணம் 1

வடக்குத் தெற்காக அமைந்துள்ள நேரான ஒரு பாதையில் A என்னும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து பார்க்கும்போது C என்னும் ஒரு புள்ளியிலுள்ள ஒரு தூண் A யிற்கு நேர் கீழே அடி 220° திசைகோளிலும் 250 m தூரத்திலும் தெரிகின்றது. நேரான பாதையில் B என்னும் வேறொரு புள்ளியிலிருந்து பார்க்கும்போது C ஆனது 300° திசைகோளில் தெரிந்தது.

(i) இத்தகவல்களை ஒரு பரும்படிப் படத்தில் தருக.
(ii) தூணின் அடி C இலிருந்து பாதை AB இற்குள்ள (குறுகிய) தூரத்தைக் காண்க.
(iii) AB இன் நீளத்தைக் காண்க.

(i)



(ii) A இலிருந்து C தெரிகின்ற திசைகோள் 220° எனபதால் $D\hat{A}C = 220^\circ - 180^\circ$
$= 40^\circ$

அப்போது, செங்கோண முக்கோணி ACD இல், $\dfrac{CD}{AC} = \sin 40^\circ$

$$CD = AC \sin 40^\circ$$
$$CD = 250 \sin 40^\circ$$
$$= 250 \times 0.6428$$
$$= 160.7000$$

$\therefore$ C இலிருந்து பாதை AB இற்குள்ள குறுகியதூரம் 160.7 m ஆகும்.

(iii) பாதை AB இன் நீளம் $= AD + DB$

செங்கோண முக்கோணி ACD இல் $\dfrac{AD}{AC} = \cos 40$

$$AD = AC \cos 40^\circ$$
$$= 250 \times 0.7660$$
$$= 191.5000$$
$$= 191.5 \text{ m}$$

செங்கோண $\Delta\, BDC$ யில் $\tan 60^\circ = \dfrac{CD}{DB}$

$$DB = \frac{CD}{\tan 60^\circ}$$
$$= \frac{160.7}{1.732}$$
$$= 92.78 \text{ m}$$

$\therefore$ AB இன் நீளம் $= 191.5 + 92.78$ m
$= 284.28$ m

பயிற்சி 18.7

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்பப் பரும்படிப் படங்களை வரைக.
   (i) A இலிருந்து 080° திசைகோளில் 12 m தூரத்தில் B அமைந்துள்ளது.
   (ii) P இலிருந்து 120° திசைகோளில் 50 m தூரத்தில் Q உம், Q இலிருந்து 040° திசைகோளில் 25 m தூரத்தில் R உம் அமைந்துள்ளன.
   (iii) X இலிருந்து 150° திசைகோளில் 30 m தூரத்திலும் Y உம், Y இலிருந்து 200° திசைகோளில் 100 m தூரத்தில் Z உம், Z இலிருந்து 080° திசைகோளில் 50 m தூரத்தில் A உம் அமைந்துள்ளன.

2. A என்னும் இடத்திலிருந்து பயணத்தைத் தொடங்கும் ஒரு மோட்டார் சைக்கிளோட்டி, கிழக்குத் திசையில் 8 km தூரம் சென்று, அங்கிருந்து வடக்குத் திசைக்குத் திரும்பி 6 km சென்று B என்னும் இடத்தில் தனது பயணத்தைதை முடித்தான்.
   (i) இத்தகவல்களை ஒரு பரும்படிப் படத்தில் தருக.
   (ii) B இலிருந்து A இன் திசைகோளைக் காண்க.
   (iii) A, B ஆகியவற்றுக்கிடையிலுள்ள குறுகிய தூரத்தைக் காண்க.

3. ஒரு கப்பல் A என்னும் துறைமுகத்திலிருந்து புறப்பட்டு 040° திசைகோளில் 150 km பயணம் செய்து துறைமுகம் B ஐ அடைகிறது. துறைமுகம் B ஆனது
   (i) துறைமுகம் A இலிருந்து எவ்வளவு தூரம் வடக்கே அமைந்துள்ளது ?
   (ii) துறைமுகம் Aஇலிருந்து எவ்வளவு தூரம் கிழக்கே அமைந்துள்ளது ?

4. ஓர் ஆற்றின் அகலத்தை அளக்க முயற்சிசெய்யும் ஒரு மாணவன் அங்கு நேர்கோடாக உள்ள ஓர் இடத்தில் ஒரு கரையில் நின்று அதற்குச் செங்குத்தாக மறு கரையிலுள்ள ஒரு மரத்தைத் தெரிந்தெடுத்தான். அவன் நிற்கும் புள்ளியை A எனப் பெயரிட்டு, அங்கிருந்து கரையோரமாக 75 m சென்று பார்த்தபோது மரம் அமைந்துள்ள திசைகோள் 210° என அவதானித்தான். திசைக்கோளுடன் பரும்படிப் படமொன்றை வரைந்து திரிகோணகணித விகிதங்களைப் பயன்படுத்தி ஆற்றின் அகலத்தைக் காண்க.

5. வனப் பாதுகாப்பை மேற்கொள்ளும் ஒரு படை அணியினர் வனத்தின் தொலை தூரத்தில் தீயின் அடையாளத்தைக் கண்டு பரிசோதனையை மேற்கொண்டனர். அவர்கள் அவ்வேளையில் பெற்றுக்கொண்ட தகவல்களின்படி, முகாம் C யிலிருந்து 070° திசைகோளில் A என்னும் பிரதான பாதை வழியே 2.5 km தூரம் சென்று P என்னும் இடத்தையும் அவ்விடத்திலிருந்து 340° திசைகோளில் 1.5 km தூரம் சென்று F என்னும் தீ காணப்பட்ட இடத்தை அடைகின்றனர்.
   (i) இத்தகவலை ஒரு பருமட்டான உருவில் காட்டுக.
   (ii) படையணியினர் பிரதான பாதையிலிருந்து தீ காணப்பட்ட இடத்திற்கு விரைவாகச் செல்வதற்குப் பிரதான பாதையிலிருந்து P என்னும் இடத்தைத் திரும்பும் இடமாகத் தேர்ந்தெடுப்பது பொருத்தமானது என்பதை காரணங்களுடன் காட்டுக.
   (iii) படையினர் தங்களது முகாமிலிருந்து முதலில் தீயை அவதானித்த திசைகோள் யாது ?

18.8 கணிகருவியைப் பயன்படுத்தி திரிகோணகணித விகிதங்களைக் காணல்

விஞ்ஞானக் கணிகருவியைப் பயன்படுத்தி திரிகோணகணித விகிதங்கள் தொடர்புபட்ட கணித்தல்களை எவ்வாறு செய்யலாம் எனப்பார்ப்போம். அதற்கு கணிகருவியில் MODE சாவியைப் பயன்படுத்தி காட்சிதிரையில் "*DEG*" எனக் காணப்பட வேண்டும். உதாரணங்களின் மூலம் இக்கணித்தல்களை அவதானிப்போம்.

உதாரணம் 1

(i) $\tan 35^\circ$ (ii) $\sin 35^\circ$ (iii) $\cos 35^\circ$ ஆகிய பெறுமானங்களை இயக்க வேண்டிய முறையை ஒரு பாய்ச்சற்கோட்டுப் படம் மூலம் தருக.

(i) $\tan 35^\circ$ $\boxed{\text{ON}}$ — $\boxed{\tan}$ — $\boxed{3}$ — $\boxed{5}$ — $\boxed{=}$ $\longrightarrow$ $\boxed{0.7002}$

(ii) $\sin 35^\circ$ $\boxed{\text{ON}}$ — $\boxed{\sin}$ — $\boxed{3}$ — $\boxed{5}$ — $\boxed{=}$ $\longrightarrow$ $\boxed{0.5736}$

(iii) $\cos 35^\circ$ $\boxed{\text{ON}}$ — $\boxed{\cos}$ — $\boxed{3}$ — $\boxed{5}$ — $\boxed{=}$ $\longrightarrow$ $\boxed{0.8192}$

உதாரணம் 2

(i) $\tan\theta = 1.2131$ (ii) $\sin\theta = 0.7509$ (iii) $\cos\theta = 0.5948$ ஆகவுள்ளபோது ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் θஇன் பெறுமானத்தைக் காண்பதற்கு சாவிகளை இயக்க வேண்டிய முறையை ஒரு பாய்ச்சற் கோட்டுப்படம் மூலம் தருக.

(i) $\boxed{\text{ON}} - \boxed{\text{SHIFT}} - \boxed{\tan} - \boxed{1} - \boxed{.} - \boxed{2} - \boxed{1} - \boxed{3} - \boxed{1} - \boxed{=} \longrightarrow \boxed{50.5^\circ}$

(ii) $\boxed{\text{ON}} - \boxed{\text{SHIFT}} - \boxed{\sin} - \boxed{0} - \boxed{.} - \boxed{7} - \boxed{5} - \boxed{0} - \boxed{4} - \boxed{=} \longrightarrow \boxed{48.66^\circ}$

(iii) $\boxed{\text{ON}} - \boxed{\text{SHIFT}} - \boxed{\cos} - \boxed{0} - \boxed{.} - \boxed{5} - \boxed{9} - \boxed{4} - \boxed{8} - \boxed{=} \longrightarrow \boxed{53.5^\circ}$

குறிப்பு : கோணங்கள் பாகைகளில் மட்டும் பெறப்பட்டுள்ளதை அவதானிக்கவும் உதாரணம் $50.5^\circ = 50^\circ\ 30'$

பயிற்சி 18.8

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள கோணங்களின் பெறுமானங்களுக்கு (a) tan பெறுமானம் (b) sin பெறுமானம் (c) cos பெறுமானம் ஆகியவற்றைக் கணிகருவியைப் பயன்படுத்திப் பெறுவதற்கு இயக்க வேண்டிய சாவிகளைப் பாய்ச்சற் கோட்டுப் படம் மூலம் தருக.

a. 40° **b.** 75° **c.** 88° **d.** 43°

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் θ இன் பெறுமானத்தைப் பெற்றுக் கொள்ள கணிகருவியை இயக்க வேண்டிய முறையைப் பாய்ச்சற் கோட்டுப் படம் மூலம் தருக.

a. $\sin\theta = 0.9100$ **d.** $\cos\theta = 0.1853$ **g.** $\tan\theta = 0.5736$
b. $\sin\theta = 0.7112$ **e.** $\cos\theta = 0.7089$ **h.** $\tan\theta = 0.7716$
c. $\sin\theta = 0.1851$ **f.** $\cos\theta = 0.4550$ **i.** $\tan\theta = 0.9827$

பலவினப் பயிற்சி

1. P, Q ஆகிய இரண்டு கப்பல்கள் ஒரே துறைமுகத்திலிருந்தும் ஒரே தடவையில் புறப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு கப்பலும் மணிக்கு 18 கிலோமீற்றர் என்னும் சமனான வேகத்தில் பயணிக்கின்றன. P ஆனது துறைமுகத்திலிருந்து 010° திசைகோளிலும் Q ஆனது துறைமுகத்திலிருந்து 320° திசைகோளிலும் பயணிக்கின்றன. ஒரு மணித்தியாலத்தின் பின்னர் இரண்டு கப்பல்களுக்குமிடையிலுள்ள தூரத்தைக் காண்க.

2. ஒரு பாதையின் இருமருங்கிலுள்ள இரண்டு கட்டடங்களில் ஒன்று மற்றையதிலும் 9 m உயரமானதாகும். உயரம் கூடிய கட்டடத்தின் அடியிலிருந்து பார்க்கும்போது மற்றைய கட்டடத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் $42^\circ\ 20'$ ஆகும். உயரம் குறைந்த கட்டடம் 15 m உயரமுடையதாயின், அவதானியின் உயரத்தைப் புறக்கணித்து,

(i) இரண்டு கட்டடங்களுக்குமிடையிலுள்ள தூரத்தைக் காண்க.

(ii) உயரம் குறைந்த கட்டடத்தின் அடியிலிருந்து உயரம் கூடிய கட்டடத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணத்தைக் காண்க.

3. முக்கோணி ABC இல், $AB = 10$ cm, $BC = 7$ cm, $A\hat{B}C = 30^\circ\ 26'$, A இலிருந்து BC இற்கு வரைந்த செங்குத்து AX ஆகும். ABC இன் பரப்பளவைக் காண்க.

4. கிடைத்தரையிலுள்ள இரண்டு புள்ளிகளில் கொடிக் கம்பங்கள் நடப்பட்டுள்ளன இரண்டு புள்ளிகளையும் இணைக்கும் கோட்டின் மீது A, B என்னும் இரண்டு புள்ளிகள் உள்ளன. A இலிருந்து பார்க்கும்போது கொடிக்கம்பங்களின் உச்சிகளின் ஏற்றக்கோணங்கள் 30°, 60° ஆகும். B இலிருந்து பார்க்கும்போது அவற்றின் ஏற்றக் கோணங்கள் முறையே 60°, 45° ஆகும். AB இன் நீளம் 10 m ஆயின்,

(i) இரண்டு கொடிக்கம்பங்களினதும் உயரங்களை வெவ்வேறாகக் காண்க.

(ii) இரண்டு கொடிக்கம்பங்களுக்குமிடையிலுள்ள தூரத்தைக் காண்க.

இப்பயிற்சியைக் கணிக்கருவியைப் பயன்படுத்தி வாய்ப்புப் பார்க்க.

19 தாயங்கள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- ஒரு தாயத்தை அறிந்து கொள்வதற்கும்
- ஒரு தாயத்தின் மூலகங்களையும் வரிசையையும் அறிந்து கொள்வதற்கும்
- தாயங்களைக் கூட்டவும் கழிக்கவும்
- ஒரு தாயத்தை ஒரு நிறைவெண்ணால் பெருக்கவும்
- ஒரு தாயத்தை இன்னொரு தாயத்தால் பெருக்கவும்
- தாயங்கள் தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்க்கவும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்

19.1 தாயங்கள் அறிமுகம்

தாயங்கள் தொடர்பான கருத்தை 1854 இல் பிரித்தானியக் கணிதவியலாளரான ஆதர் கேலி அறிமுகம் செய்தார். ஓர் எளிய உதாரணம் மூலம் தாயங்களை அறிந்து கொள்வோம்.

ஒரு தவணைப் பரீட்சையில் கணிதம், விஞ்ஞானம் ஆகிய பாடங்களில் விமலன், பாரூக், ராதா ஆகியோர் பெற்ற புள்ளிகள் கீழேயுள்ள அட்டவணையில் தரப் பட்டுள்ளன.

	கணிதம்	விஞ்ஞானம்
விமலன்	75	66
பாரூக்	72	70
ராதா	63	81

அட்டவணையிலுள்ள எண்ரீதியான பெறுமானங்களை ஒரு தாயத்தில் பின்வரும் முறையில் காட்டலாம்.

$$\begin{pmatrix} 75 & 66 \\ 72 & 70 \\ 63 & 81 \end{pmatrix}$$

இங்கு நிரல்களினால் பாடங்களும் நிரைகளினால் மாணவர்களும் குறிக்கப்படுகின்றனர். இதனைப் பின்வருமாறும் தாயவடிவில் காட்டலாம்.

$$\begin{pmatrix} 75 & 72 & 63 \\ 66 & 70 & 81 \end{pmatrix}$$

இங்கு நிரல்களினால் மாணவர்களும் நிரைகளினால் பாடங்களும் குறிக்கப்படுகின்றன. இவ்வாறு நிரைகள், நிரல்கள் வடிவில் அமைக்கப்பட்ட ஓர் எண் கூட்டம் தாயம் எனப்படும்.
அவ்வாறான சில தாயங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

(i) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (v) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (vi) $\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 9 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

ஒரு தாயத்திலுள்ள எண்களை தாயத்தின் மூலகங்கள் என அழைப்போம். மூலகங்கள் எண் வடிவிலும் அட்சரகணிதக் குறியீடு அல்லது கோவை வடிவிலும் இருக்கலாம்.

ஒரு தாயமானது ஆங்கிலப் பெரிய எழுத்துகளால் (Capital letters) பெயரிடப்படும். அட்சரகணிதக் குறியீடுகளை இடும் சந்தர்ப்பங்களில் தாயத்தின் மூலகங்கள் ஆங்கில சிறிய எழுத்துக்களால் (Simple letters) குறிக்கப்படும்.

உதாரணம் 1

கீழே மூன்று தாயங்கள் பெயரிடப்பட்டுள்ள முறை தரப்பட்டுள்ளது.

$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 2 & c \\ a & b \end{pmatrix}$

உதாரணம்2

ஓர் ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் அமைந்துள்ள A, B ஆகிய புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் (0, 5) (4, 3) ஆகும். இத்தகவல்களை ஒரு தாயத்தில் தருக. அதனைப் P எனப் பெயரிடுக.

அட்டவணையாக

	A	B
x	0	4
y	5	3

தாயமாக

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

ஒரு தாயத்தின் வரிசை

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$ என்னும் தாயத்தைக் கருதுக.

தாயம் A இலுள்ள நிரைகளின் எண்ணிக்கை 2 ஆகும். நிரல்களின் எண்ணிக்கை 3 ஆகும். தாயத்தின் வரிசையானது நிரைகள், நிரல்களிலிருந்து 2×3 எனத் தரப்படும். A ஆனது "**இரண்டின் மூன்றின்**" தாயம் எனப்படும்.

இது

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$ எனச் சில சந்தர்ப்பங்களில் எழுதப்படும்.

உதாரணம் 1

கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தாயத்திலும்

(i) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

தாயத்தின் நிரைகளின் எண்ணிக்கை $= 3$
நிரல்களின் எண்ணிக்கை $= 2$
தாயத்தின் வரிசை $= 3 \times 2$

(ii) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

நிரைகளின் எண்ணிக்கை $= 1$
நிரல்களின் எண்ணிக்கை $= 3$
தாயத்தின் வரிசை $= 1 \times 3$

(iii) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

நிரைகளின் எண்ணிக்கை $= 2$
நிரல்களின் எண்ணிக்கை $= 1$
தாயத்தின் வரிசை $= 2 \times 1$

(iv) $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

நிரைகளின் எண்ணிக்கை $= 2$
நிரல்களின் எண்ணிக்கை $= 2$
தாயத்தின் வரிசை $= 2 \times 2$

நிரைத் தாயம், நிரல் தாயம், சதுரத் தாயம்

ஒரு நிரை மாத்திரம் உள்ள தாயம் **நிரைத் தாயம்** எனவும் ஒரு நிரல் மாத்திரம் உள்ள தாயம் **நிரல்தாயம்** எனவும் நிரைகளினதும் நிரல்களினதும் எண்ணிக்கை சமனான தாயம் **சதுரத் தாயம்** எனவும் அழைக்கப்படும்.

உதாரணமாக

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ என்பது நிரைத் தாயமாகும்.

$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ என்பது நிரல் தாயமாகும்.

$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ என்பது சதுரத் தாயம்.

அலகுத் தாயமும் சமச்சீர்த் தாயமும்

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

மேலேயுள்ள சதுரத் தாயத்தில் கட்டமிடப்பட்டுக் காட்டப்பட்டிருப்பது பிரதான மூலைவிட்டமாகும். இடது பக்க மேல் மூலையிலிருந்து வலது பக்க கீழ் மூலை வரையுள்ள மூலகத் தொகுதி பிரதான மூலைவிட்டம் எனப்படும்.

குறிப்பு: பிரதானமூலைவிட்டமானது சதுரத்தாயத்திற்கு மாத்திரம் எடுத்துரைக்கப்படும். பிரதான மூலைவிட்டமானது பெரும்பாலும் எளிதாக மூலைவிட்டம் என்ற பெயரிலும் அழைக்கப்படும்.

கீழே வரிசை இரண்டாகவுள்ள ஒரு சதுரத் தாயத்தின் பிரதான மூலைவிட்டம் கட்டமிடப்பட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ளது.

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

கீழே தரப்பட்டுள்ள தாயம் விசேட வடிவிலான சதுரத் தாயமாகும்.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

தாயம் A இன் பிரதான மூலைவிட்டத்தில் அமைந்துள்ள எல்லா மூலகங்களினதும் பெறுமானம் 1 ஆகும். மூலைவிட்டத்திலுள்ள மூலகங்கள் தவிர எஞ்சிய சகல மூலகங்களும் 0 ஆகும். அவ்வாறான தாயம் **அலகுத் தாயம்** எனப்படும். A என்பது வரிசை 3×3 ஆகவுள்ள அலகுத் தாயமாகும். கீழே வரிசை 2×2 உடைய ஓர் அலகுத் தாயம் தரப்பட்டுள்ளது.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

அலகுத் தாயங்களைப் பெயரிடுவதற்கு எழுத்து I பயன்படுத்தப்படும். n நிரைகளையும் n நிரல்களையும் உடைய அலகுத் தாயம் $I_{n \times n}$ இன் மூலம் எழுதப்படும். இதற்கேற்ப

$$I_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ என எழுதப்படும்.

கீழே தரப்பட்டுள்ள தாயத்தில் உள்ள சிறப்பை உங்களால் அவதானிக்க முடிகின்றதா?

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

தாயம் X இல் தாய மூலைவிட்டத்தைச் சுற்றியுள்ள மூலகங்களை அவதானிக்க. தாய மூலைவிட்டத்தைச் சுற்றியுள்ள சமனான பெறுமானங்களைக் கொண்ட மூலகங்கள் சமச்சீராக அமைந்துள்ளன. இவ்வாறான தாய மூலைவிட்டத்தைச் சுற்றி சமனான மூலகங்களைச் சமச்சீராகக் கொண்டுள்ள தாயங்கள் **சமச்சீர்த் தாயங்கள்** என அழைக்கப்படும்.

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y, I ஆகிய தாயங்களில் பிரதான மூலைவிட்டத்தைச் சுற்றி சமனான மூலகங்கள் சமச்சீராக அமைந்துள்ளன. எனவே Y, I ஆகியன சமச்சீர் தாயங்களாகும்.

குறிப்பு: சமச்சீர் தாயமும் சதுரத் தாயத்தில் மாத்திரம் எடுத்துரைக்கப்படும்.

பயிற்சி 19.1

1. ஒரு பழக்கடையில் அஸ்கா 2 தோடம்பழங்களையும் 3 மாம்பழங்களையும் கமலன் 4 தோடம்பழங்களையும் 1 மாம்பழத்தையும் ராஜன் 1 தோடம்பழத்தையும் 5 மாம்பழங்களையும் வாங்கினர்.

(i) அஸ்கா வாங்கிய பழங்களை ஒரு நிரைத் தாயத்தில் குறிக்க.
(ii) கமலன் வாங்கிய பழங்களை ஒரு நிரைத் தாயத்தில் குறிக்க.
(iii) ராஜன் வாங்கிய பழங்களை ஒரு நிரைத் தாயத்தில் குறிக்க.
(iv) அஸ்கா, கமலன், ராஜன் ஆகியோர் வாங்கிய பழங்களின் எண்ணிக்கைகள் நிரையாக உள்ள ஒரு தாயத்தை உருவாக்குக.

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தாயத்தினதும் வரிசையை எழுதுக.

(i) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ (ii) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (iii) $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

(iv) $D = \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix}$ (v) $E = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ (vi) $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

3. கீழே தரப்பட்டுள்ள தாயங்களிலிருந்து நிரை, நிரல் தாயங்களைத் தெரிந்து எழுதுக.

(i) $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (ii) $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (iii) $R = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}$

(iv) $S = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (v) $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (vi) $U = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. கீழே தரப்பட்டுள்ள தாயங்களிலிருந்து
(i) சதுரத் தாயம்
(ii) சமச்சீர்த் தாயம்
(iii) அலகுத் தாயம் என்பவற்றைத் தெரிந்து எழுதுக.
சதுரத் தாயங்களில் மூலைவிட்டங்களைக் கட்டமிடுக.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

19.2 தாயங்களைக் கூட்டலும் கழித்தலும்

எண்களைக் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் ஆகிய கணிதச் செய்கைகளை நாம் கற்றுள்ளோம். அவ்வாறான கணிதச் செய்கைகளைப் பயன்படுத்திப் பெரும்பாலான செயன்முறைப் பிரசினங்களை இலகுவில் தீர்துக்கொள்ளலாம் என்பதை நாம் அனுபவத்தில் கண்டுள்ளோம். தாயங்களுக்கும் இவ்வாறான கணிதச் செய்கைகளைப் பிரயோகிக்கலாம்.

கீழே தரப்பட்டுள்ள A, B ஆகிய தாயங்களைக் கருதுக.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

இந்த இரண்டு தாயங்களும் ஒரே வரிசையையுடைய தாயங்களாகும். அவ்வரிசை 3×2 ஆகும். A, B ஆகிய தாயங்களின் கூட்டுத்தொகையாகக் கருதப்படுவது A, B ஆகியவற்றின் ஒத்த மூலகங்களைக் கூட்டுவதால் பெறப்படும் தாயமாகும்.
இதற்கேற்ப

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 9 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}$$

எனப் பெறப்படும். இங்கு ஒத்த மூலகங்கள் எனப்படுவது ஒரே இடத்தில் அமைந்துள்ள மூலகங்களாகும். உதாரணமாக தாயம் A இல் முதலாம் நிரைக்கும் இரண்டாம் நிரலுக்குமுரிய மூலகம் 1 ஆகும். தாயம் B இல் அதற்கு ஒத்த மூலகம் 6 ஆகும். அதாவது தாயம் B இல் முதலாம் நிரைக்கும் இரண்டாம் நிரலுக்கும் உரிய மூலகமாகும். இனி அட்சரகணிதக் குறியீடுகளையுடைய ஓர் உதாரணத்தைக் கவனிப்போம்.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \text{ ஆயின் } X + Y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 & x_4 + y_4 \end{pmatrix}$$

தாயங்களைக் கூட்டலானது ஒரே வரிசையைக் கொண்ட தாயங்களின் கூட்டல் ஆகும். இதற்கேற்ப வரிசை வேறாகவுடைய தாயங்களுக்குத் தாயக் கூட்டல் பொருத்தமற்றதாகும்.

தாயக் கூட்டலைப் பயன்படுத்தக்கூடிய முறையை ஓர் உதாரணத்திலிருந்து இப்போது பார்ப்போம். இவ்வுதாரணம் மிக இலகுவாயினும் செயன்முறைப் பிரயோகங்களில் தாயத்தைப் பயன்படுத்தும் முறை இதன் மூலம் நன்கு தெளிவாகின்றது.

உதாரணம் 1

ரபீக், வினோத் ஆகியோர் ஒரு பாடசாலைக் கிரிக்கெற் குழுவிலுள்ள இரண்டு பந்து வீச்சாளர்கள் ஆவர். 2014, 2015 ஆகிய ஆண்டுகளில் நடைபெற்ற ஒருநாள், இரண்டு நாள் பாடசாலைகளுக்கிடையிலான போட்டிகளில் அவர்கள் இருவரும் பெற்ற விக்கெற்றுகளின் எண்ணிக்கைகள் பற்றிய விபரங்கள் கீழேயுள்ள இரண்டு அட்டவணைகளில் தரப்பட்டுள்ளன.

	2014	2015
ரபீக்	21	23
வினோத்	15	16

ஒரு நாள் போட்டிகளில் பெற்ற விக்கெற்றுகள்

	2014	2015
ரபீக்	14	16
வினோத்	9	19

இரண்டு நாள் போட்டிகளில் பெற்ற விக்கெற்றுகள்

ஒரு நாள் போட்டிகளுக்கான விபரங்களைத் தரும் தாயத்தை A எனவும் இரண்டு நாள் விபரங்களைத் தரும் தாயத்தை B எனவும் பெயரிடுவோம். அப்போது

$A = \begin{pmatrix} 21 & 23 \\ 15 & 16 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 19 \end{pmatrix}$ என எழுதலாம். இத்தாயங்களின் நிரல்கள் மூலம் ஆண்டுகளும் நிரைகள் மூலம் பந்துவீச்சாளர்களும் காட்டப்படுகின்றனர். $A + B$ என்னும் தாயத்தைக் காண்போம்.

$$A + B = \begin{pmatrix} 35 & 39 \\ 24 & 35 \end{pmatrix}$$

இத்தாயம் $A + B$ இனால் தரப்படுவது யாது என எண்ணிப் பார்க்க. இதன் மூலம் ரபீக், வினோத் ஆகியோர் 2014, 2015 ஆண்டுகளில் ஒரு நாள், இரண்டு நாள் போட்டிகளில் பெற்ற மொத்த விக்கெற்றுகள் தொடர்பான தகவல் காட்டப்படுகின்றது. இதனை ஓர் அட்டவணை வடிவில் இவ்வாறு காட்டலாம்.

	2014	2015
ரபீக்	35	39
வினோத்	24	35

ஒரு தாயத்திலிருந்து இன்னொரு தாயத்தைக் கழிப்பதையும் கூட்டலைப் போலவே செய்யலாம். இங்கு ஒத்த மூலகங்களைக் கழிப்பது இடம்பெறுகின்றது. இதற்கும் இரண்டு தாயங்களும் ஒரே வரிசையுடையதாயிருத்தல் வேண்டும். ஓர் உதாரணமாக

$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ எனின் $A - B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

இன்னோர் உதாரணத்தைக் கருதுவோம்.

X என்பது வரிசை 3×3 ஆகவும் எல்லா மூலகங்களும் 2 ஆகவுமுள்ள ஒரு தாயமும் Y என்பது வரிசை 3×3 ஆகவுள்ள அலகுத்தாயமும் ஆயின் தாயம் $X - Y$ ஐக் காண்க.

$X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ஆகும்.

எனவே,

$$X - Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

இரண்டு தாயங்களின் சமதன்மை

இரண்டு தாயங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமனானவை என்பதை ஆராய்வோம்.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

A, B ஆகிய தாயங்கள் சமனாவதற்கு $a = 2, b = 3, c = 10, d = 9$ ஆக இருத்தல் வேண்டும். அதாவது ஒரு தாயத்தின் ஒவ்வொரு மூலகமும் மற்றைய தாயத்தின் ஒத்த மூலகங்களுக்கு சமனாக வேண்டும். அவ்வாறான சந்தர்ப்பங்களில் இரண்டு தாயங்களும் சமமானவை எனப்படும்.

பயிற்சி 19.2

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள தாயங்களைச் சுருக்குக.

(i) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

(vi) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(vii) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(viii) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள தாயங்களைச் சுருக்குக.

(i) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(vi) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ ஆயின் a, b, c ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

4. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ஆயின் a, b, c, d ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

5. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 2 & -1 \\ y & 1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ஆயின் x, y, z ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

6. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 3 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ஆயின் x, y ஆகியவற்றைக் காண்க.

19.3 ஒரு தாயத்தை ஓர் எண்ணால் பெருக்கல்

இனி நாம் ஒரு தாயத்தை ஓர் எண்ணால் பெருக்குதல் பற்றிப் பார்ப்போம். ஒரு தாயத்தை ஓர் எண்ணால் பெருக்கல் என்பதால் கருதப்படுவது தாயத்தின் எல்லா மூலகங்களும் அவ்வெண்ணால் பெருக்கப்படுவதாகும். தாயம் A ஐ k என்னும் எண்ணால் பெருக்கும்போது பெறப்படும் தாயம் kA என எழுதப்படும். இங்கு தாயமொன்றை நிறைவெண்ணால் பெருக்குதல் பற்றி கவனிப்போம். உதாரணமாக

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

தாயத்தை 5 ஆல் பெருக்கும்போது பெறப்படுவது

$$5A = \begin{pmatrix} 5\times 3 & 5\times 1 & 5\times 0 \\ 5\times(-2) & 5\times 8 & 5\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 5 & 0 \\ -10 & 40 & 5 \end{pmatrix}$$ என்னும் தாயமாகும்.

தாயத்தை -3 ஆல் பெருக்கும்போது பெறப்படுவது

$$-3A = \begin{pmatrix} -3\times 3 & -3\times 1 & -3\times 0 \\ -3\times -2 & -3\times 8 & -3\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -3 & 0 \\ 6 & -24 & -3 \end{pmatrix}$$ என்னும் தாயமாகும்.

குறிப்பு: தாயம் A, k என்னும் நிறைவெண்ணால் பெருக்கும்போது பெறப்படும் தாயத்தின் வரிசையும் A இன் வரிசையே ஆகும்.

உதாரணமாக $X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ஆயின் $3X - 2Y$ ஐக் காண்க.

$$3X - 2Y = 3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 16 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

பயிற்சி 19.3

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள தாயங்களைச் சுருக்குக

(i) $3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $4\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (iii) $3\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(iv) $2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ (v) $3\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (vi) $-2\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

2. $3\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ ஆயின் a, b, c, d ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

3. $4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix}$ ஆயின் x, y, z ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

4. $2\begin{pmatrix} 5 & x \\ -2 & 9 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} y & -5 \\ 4 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ ஆயின் x, y, a, b ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

19.4 தாயங்களின் பெருக்கம்

மேலே கூறப்பட்ட தாயங்களின் கூட்டல், கழித்தல், ஒரு தாயத்தை எண்ணொன்றால் பெருக்கல் ஆகிய கணிதச் செய்கைகள் எண்களுக்கான கணிதச்செய்கையின் முறையிலேயே செய்யப்பட்டன என்பதை நீங்கள் விளங்கிக் கொண்டிருப்பீர்கள். ஆயினும் தாயங்களைப் பெருக்குதல் ஓரளவு வித்தியாசமான முறையில் எடுத்துரைக்கப்படுகின்றது. தாயங்களைப் பெருக்கலை பின்வருமாறு விபரிக்கலாம்.

முதலில் நிரைத்தாயமொன்றை நிரல்தாயமொன்றினால் பெருக்கும் முறையைக் கவனிப்போம். A என்பது வரிசை $1 \times \mathrm{m}$ ஆகவுள்ள ஒரு நிரைத்தாயமாகும். B என்பது $\mathrm{m} \times 1$ ஆகவுள்ள ஒரு நிரல் தாயமும் ஆகும்போது AB யினால் தாயங்களின் பெருக்கம் தரப்படும். இதன் வரிசை 1×1 ஆகும். இப்பெருக்கலை எடுத்துரைக்கப்படும் முறையை விபரிப்பதற்காக உதாரணமாக,

$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ எனவும் $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ எனவும் கொள்வோம். A என்பது வரிசை 1×2 உடைய தாயமாகும். B என்பது வரிசை 2×1 உடைய தாயமும் ஆகும். அப்போது

$$AB = (a_1b_1 + a_2b_2\ )_{\ 1 \times 1}$$

எனப் பெருக்கம் AB கருத்துரைக்கப்படும்.

உதாரணம் 1

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ஆயின் AB ஐக் காண்க.

$$AB = (5 \times 3 + 2 \times 1) = (17)$$

எந்த ஒரு தாயத்தையும் ஓர் எண்ணால் பெருக்க முடியும் என்பதை நாம் மேலே கற்றோம். ஆனால் கூட்டலையும் கழித்தலையும் வரிசைகள் சமனாக உள்ளபோது மாத்திரம் செய்யமுடியும் எனவும் நாம் கற்றோம். தாயப் பெருக்கலையும் சில சந்தர்ப்பங்களில் மாத்திரம் செய்யலாம். மேலே நாம் ஒரு நிரைத் தாயத்தை ஒரு நிரல் தாயத்தினால் பெருக்கும் முறையைக் கண்டோம். ஆயினும் அதிலும் வேறுபட்ட வரிசைகளையுடைய தாயங்களையும் பெருக்கலாம். மிகப் பொதுவானதாக A என்பது $m \times n$ ஆகவுள்ள தாயமும் B என்பது வரிசை $n \times p$ ஐ உடைய தாயமுமாயின் A இன் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் B இன் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமனாகுமாயின் பெருக்கம் AB ஐக் காணலாம். அது எவ்வாறு என்பதை இப்போது பார்ப்போம்.

உதாரணமாக $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$

ஆயின் பெருக்கம் AB ஐக் காணும் முறையை ஆராய்ந்து பார்ப்போம்.

மேலே நிரைத்தாயத்தையும் நிரல் தாயத்தையும் பெருக்கிய முறையில் A யின் ஒவ்வொரு நிரையையும் B யின் ஒவ்வொரு நிரலினால் பெருக்குக.

$$= \begin{pmatrix} (2\ \ 4)\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} & (2\ \ 4)\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} \\ (3\ \ 5)\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} & (3\ \ 5)\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 4 \times 6 & 2 \times 8 + 4 \times 7 \\ 3 \times 1 + 5 \times 6 & 3 \times 8 + 5 \times 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 26 & 44 \\ 33 & 59 \end{pmatrix}$$ (ஒவ்வொரு பெருக்கத்தையும் காண்பதால்)

மேலே பெருக்கத்தாயம் AB யின் மூலகங்கள் எடுத்துரைக்கப்பட்ட முறையை இவ்வாறு விபரிக்கலாம்.

- AB யின் முதலாம் நிரைக்கும் முதலாம் நிரலுக்கும் உரித்தாகும் மூலகத்தைப் பெறுவது A இன் முதலாம் நிரையை (நிரைத்தாயம்) B யின் முதலாவது நிரலால் (நிரல் தாயத்தால்) பெருக்குவதன் மூலமாகும்.

- AB யின் முதலாவது நிரைக்கும் இரண்டாவது நிரலுக்கும் உரிய மூலகத்தைப் பெறுவது A யின் முதலாவது நிரையை (நிரைத்தாயம்) B யின் இரண்டாம் நிரலினால் (நிரல்தாயத்தினால்) பெருக்குவதால் ஆகும்.

- AB இன் இரண்டாம் நிரைக்கும் முதலாம் நிரலுக்கும் உரிய மூலகத்தைப் பெறுவது A இன் இரண்டாம் நிரையை (நிரைத்தாயம்) B யின் முதலாம் நிரலினால் (நிரல் தாயத்தினால்) பெருக்குவதால் ஆகும்.

- AB யின் இரண்டாம் நிரைக்கும் இரண்டாம் நிரலுக்கும் உரிய மூலகத்தைப் பெறுவது A இரண்டாவது நிரையை B யின் இரண்டாவது நிரலினால் பெருக்குவதால் ஆகும்.

இம்முறையில் எந்தவொரு பெருக்கக்கூடிய இரண்டு தாயங்களையும் பெருக்கலாம். மேலும் சில உதாரணங்களை ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 2

$X = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ ஆயின் XY வரைவிலக்கணப்படுத்தப்படுகின்றது. எனக் காட்டி XY யைக் காண்க. தாயம் YX கருத்துடையதாகுமா?

X இன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை $= 2$ உம் Y யின் நிரல்களின் எண்ணிக்கை $= 2$ உம் ஆகும்.

அதாவது X இன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை Y யின் நிரைகளுக்கு எண்ணிக்கைக்குச் சமனாகும். எனவே பெருக்கம் XY இனால் எடுத்துரைக்கப்படும்.

இனி

$$XY = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

X இன் ஒவ்வொரு நிரலையும் Y யின் ஒவ்வொரு நிரலினால் பெருக்குவதால்

$$= \begin{pmatrix} 4 \quad 6 & \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \\ 2 \quad 3 & \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 1 + 6 \times 7 \\ 2 \times 1 + 3 \times 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 46 \\ 23 \end{pmatrix}$$

இனி பெருக்கம் YX ஆனது கருத்துரைக்கப்படுகின்றதா என ஆராய்வோம்.

Y யில் நிரல்கள் 1 உம் X இல் நிரைகள் 2 உம் உள்ளன. அதாவது Y யின் நிரல்களின் எண்ணிக்கை X இன் நிரல்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமன் அல்ல. எனவே YX என்னும் பெருக்கம் கருத்தற்றது.

$P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \end{pmatrix}$ எனக் கொள்வோம். தாயப் பெருக்கத்தின் கீழ் முதலில் நாம் QP வடிவிலான முறையில் பெருக்கத்தை கருத்துரைத்தோம். அதனை மேற்குறித்த கருத்துரைப்பின்படியும் காணலாம்.

அதாவது Q வின் எல்லா நிரைகளையும் P யின் எல்லா நிரல்களினாலும் பெருக்கு வதால் மூலகங்களைக் காண்பதன் மூலமாகும்.

$$QP = \begin{pmatrix} 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

அதாவது தனி மூலகமொன்றுடனான தாயமாகும். தனி மூலகமொன்றுடனான தாயம் ஓர் எண் எனப்படும். எனவே $QP = 9$ என எழுதப்படும்.

மேலும் இங்கு PQ உம் வரைவிலக்கணப்படுத்தப்படுகின்றது. PQ இன் மூலம் பெறப்படவேண்டிய வரிசை 2×2 ஐ உடைய ஒரு தாயமாகும்.

$$PQ = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 6 & 2 \times 3 \\ (-1) \times 6 & (-1) \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

பயிற்சி 19.4

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள தாயங்களைச் சுருக்குக.

(i) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (vi) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(vii) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (viii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(ix) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ (x) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ ஆயின் a, b ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

3. A , B, C ஆகிய மூன்று தாயங்களும் $A \times B = C$ ஆகுமாறு உள்ளது. கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையில் வெற்றிடங்களை நிரப்புக.

தாயம் A இன் வரிசை	தாயம் B இன் வரிசை	தாயம் C இன் வரிசை
1×2	2×1	....
2×2	.... $\times 1$	....
....$\times 2$	.... $\times 1$	1×1
... $\times$	$1 \times$	2×2
....$\times 1$	.... $\times 2$	$1 \times$ .....

4. $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ஆயின்,

(i) $P \times Q$
(ii) $P \times R$
(iii) $Q \times R$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ஆயின்

(i) AB ஐக் காண்க.
(ii) BA ஐக் காண்க.
(iii) AB, BA ஆகியவற்றுக்கிடையிலான தொடர்பு யாது?

6. $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ஆயின்

(i) CD ஐக் காண்க.
(ii) DC ஐக் காண்க.

20 சமனிலிகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- $ax + b \gtreqless cx + d$ என்னும் வடிவிலான சமனிலிகளைத் தீர்க்கவும் தீர்வுகளை எண்கோட்டின் மீது குறிக்கவும்
- அன்றாட வாழ்வுடன் தொடர்புடைய பிரசினங்களை சமனிலிகள் மூலம் காட்டவும் அப்பிரசினங்களைத் தீர்க்கவும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

தரம் 10 இல் கற்ற $ax+b \gtreqless c$ என்னும் வடிவிலான சமனிலிகளைத் தீர்க்கும் முறையை நினைவுகூர்வதற்குக் கீழே உள்ள மீட்டற் பயிற்சியில் ஈடுபடுக .

மீட்டற் பயிற்சி

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சமனிலியையும் தீர்க்க.

a. $3x - 2 > 4$ **b.** $\frac{x}{2} + 5 \leq 7$ **c.** $5 - 2x > 11$

d. $\frac{x}{-2} + 3 \leq 5$ **e.** $\frac{5x}{6} + 4 \geq 14$ **f.** $3 - 2x \geq 9$

20.1 $ax + b \gtreqless cx + d$ என்னும் வடிவிலான சமனிலிகளைத் தீர்த்தல்

$ax + b \gtreqless cx + d$ என்னும் வடிவிலான சமனிலிகளை அட்சரகணிதரீதியில் தீர்க்கும் முறையையும் அத்தீர்வுகளைக் கேத்திரகணிதரீதியில் வகைகுறிக்கும் முறையையும் உதாரணங்களின் மூலம் ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

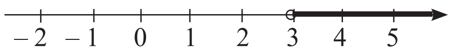
$3x - 2 > 2x + 1$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்த்து தீர்வுகளை ஓர் எண் கோட்டின் மீது குறிக்க.

இங்கு $3x - 2 > 2x + 1$ என்னும் சமனிலியில் x இலான உறுப்புகளை ஒரு பக்கத்திற்கும் எண்களை மற்றைய பக்கத்திற்கும் (சமன்பாடு தீர்ப்பது போன்றே) கொண்டு செல்ல வேண்டும்.

$$3x - 2 > 2x + 1$$
$3x - 2 + 2 > 2x + 1 + 2$ (இரு பக்கமும் 2 ஐக் கூட்டுவதால்)
$$3x > 2x + 3$$

$$3x - 2x > 2x + 3 - 2x \quad \text{(இரு பக்கத்திலிருந்தும் } 2x \text{ ஐக் கழிப்பதால்)}$$
$$x > 3$$

இது சமனிலியின் தீர்வாகும். சொற்களில் விபரிப்பதாயின், தீர்வுகள் 3 இலும் கூடிய எல்லா மெய்யெண்களும் ஆகும். இத்தீர்வுகளை ஓர் எண் கோட்டின் மீது பின்வருமாறு குறிக்கலாம்.



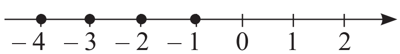
இங்கு 3 உரித்தாகாது என்பதைக் காட்டுவதற்காக 3 ஐக் காட்டும் புள்ளியைச் சுற்றி நிழற்றப்படாத ஒரு வட்டம் வரையப்படும்.

உதாரணம் 2

$5x + 3 \leq 3x + 1$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்த்து x எடுக்கத்தக்க நிறைவெண் தீர்வுகளை ஓர் எண் கோட்டின் மீது குறிக்க.

$$5x + 3 \leq 3x + 1$$
$$5x + 3 - 3 \leq 3x + 1 - 3 \quad \text{(இரு பக்கமும் 3 ஐக் கழிப்பதால்)}$$
$$5x \leq 3x - 2$$
$$5x - 3x \leq 3x - 2 - 3x \quad \text{(இரு பக்கமும் } 3x \text{ ஐக் கழிப்பதால்)}$$
$$\frac{2x}{2} \leq \frac{-2}{2} \quad \text{(இரு பக்கமும் 2 ஆல் வகுப்பதால்)}$$
$$x \leq -1$$

இதற்கேற்ப தீர்வுகளாவன -1 உம் அதற்குக் குறைந்த எல்லா நிறைவெண்களாகும். அதாவது $-1, -2, -3$ ஆகிய எண்களாகும். ஓர் எண் கோட்டின் மீது இத்தீர்வுகளை பின்வருமாறு குறிக்கலாம்.



குறிப்பு: சிறப்பாக நிறைவெண் தீர்வுகள் பிரசினத்தில் வினவப்படாவிடின், தீர்வுகளாக மெய்யெண்களையே கருத வேண்டும்.

உதாரணம் 3

$2x - 5 \geq 4x - 4$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்த்து x எடுக்கத்தக்க தீர்வுகளை ஓர் எண் கோட்டின் மீது குறிக்க.

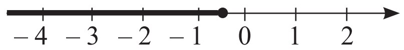
$$2x - 5 \geq 4x - 4$$
$$2x - 5 + 5 \geq 4x - 4 + 5 \quad \text{(இரு பக்கமும் 5 ஐக் கூட்டுவதால்)}$$
$$2x \geq 4x + 1$$

$2x - 4x \geq 4x + 1 - 4x$ (இரு பக்கமும் $4x$ ஐக் கழிப்பதால்)

$-2x \geq 1$

$\frac{-2x}{-2} \leq \frac{1}{-2}$ (இரு பக்கமும் -2 ஆல் வகுப்பதால்)

$x \leq \frac{-1}{2}$



குறிப்பு: மறை எண்ணொன்றால் வகுக்கும்போது சமனிலிக் குறியீட்டை மாற்ற வேண்டும் என்பதை நினைவில் கொள்க. ஒரு மறை எண்ணால் வகுத்தல் வராதவாறு இப்பிரசினத்தைத் தீர்க்கும் முறையை ஆராய்ந்து பார்க்க.

பயிற்சி 20.1

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சமனிலியையும் தீர்க்க. நிறைவெண் தீர்வுகளை ஓர் எண் கோட்டின் மீது குறிக்க.

a. $3x - 4 > 2x$ **b.** $6x + 5 \geq 5x$

c. $2x - 9 \leq 5x$ **d.** $8 - 3x > x$

e. $5 - 2x \leq 3x$ **f.** $12 - x > 3x$

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சமனிலியையும் தீர்த்து x எடுக்கத்தக்க எல்லா தீர்வுகளையும் ஓர் எண் கோட்டின் மீது குறிக்க.

a. $2x - 4 > x + 3$ **b.** $3x + 5 < x + 1$

c. $3x + 8 \geq 3 - 2x$ **d.** $5x + 7 \geq x - 5$

e. $3x - 8 \leq 5x + 2$ **f.** $2x + 3 \geq 5x - 6$

g. $x - 9 > 6x + 1$ **h.** $5x - 12 \leq 9x + 4$

i. $\frac{3x + 2}{2} > x + 3$ **j.** $2x - 5 \leq \frac{3x - 4}{-2}$

20. 2 சமனிலிகள் மூலம் பிரசினம் தீர்த்தல்

உதாரணம் 1

சமனான திணிவுடைய 8 தேயிலைப் பைக்கற்றுகளும் 1kg சீனி பைக்கற்றுகள் 3 உம் ஒரு பையினுள் இடப்பட்டுள்ளன. பை தாங்கக்கூடிய உச்ச திணிவு 5 kg ஆகும்.

(i) ஒரு தேயிலைப் பைக்கற்றின் திணிவு x எனக் கொண்டு x இலான ஒரு சமனிலியை உருவாக்குக.

(ii) சமனிலியைத் தீர்த்து ஒரு தேயிலைப் பைக்கற்றின் உச்ச திணிவைக் காண்க.

அனைத்தையும் கிராமிற்கு மாற்றிக் கொள்வது கணித்தலுக்கு இலகுவானது.

(i) ஒரு தேயிலைப் பைக்கற்றின் திணிவு கிராமில் $= x$
$\therefore$ 8 தேயிலைப் பைக்கற்றுகளின் திணிவு கிராமில் $= 8x$
சீனியின் திணிவு கிராமில் $= 3 \times 1000$
$= 3000$
பை தாங்கக்கூடிய உச்ச திணிவு கிராமில் $= 5 \times 1000$
$= 5000$

தரப்பட்டுள்ள தரவுகளின் படி $8x + 3000 \leq 5000$
இதுவே தேவையான சமனிலியாகும்.

(ii) $8x + 3000 \leq 5000$

$$8x + 3000 - 3000 \leq 5000 - 3000$$
$$\frac{8x}{8} \leq \frac{2000}{8}$$
$$x \leq 250$$

$\therefore$ ஒரு தேயிலை பைக்கற்றின் உச்ச திணிவு 250g ஆகும்.

உதாரணம் 2

உதயன் 5 அப்பியாசப் புத்தகங்களையும் 3 பேனாக்களையும் கமலினி 3 அப்பியாசப் புத்தகங்களையும் 11 பேனாக்களையும் வாங்கினர். உதயன் செலவழித்த பணம் கமலினி செலவழித்த பணத்திலும் பார்க்கக் கூடியது அல்லது சமனானது ஆகும். அவர்கள் வாங்கிய ஒரு பேனாவின் விலை ரூ. 10 ஆகும்.

(i) ஒரு அப்பியாசப் புத்தகத்தின் விலை ரூ. x எனக் கொண்டு x இலான ஒரு சமனிலியை உருவாக்குக.

(ii) சமனிலியைத் தீர்த்து ஓர் அப்பியாசப் புத்தகத்தின் அதிகுறைந்த விலையைக் காண்க.

(i) உதயன் வாங்கிய அப்பியாசப் புத்தகங்களின் விலை = ரூ. $5x$
உதயன் செலவு செய்த தொகை = ரூ. $5x + 30$
அவ்வாறே கமலினி செலவு செய்த தொகை = ரூ. $3x + 110$

தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப,

$$5x + 30 \geq 3x + 110$$

இதுவே தேவையான சமனிலியாகும்.

(ii) $5x + 30 \geq 3x + 110$

$5x + 30 - 30 \geq 3x + 110 - 30$

$5x \geq 3x + 80$

$5x - 3x \geq 3x + 80 - 3x$

$\frac{2x}{2} \geq \frac{80}{2}$

$x \geq 40$

$\therefore$ ஓர் அப்பியாசப் புத்தகத்தின் இழிவு விலை ரூ. 40 ஆகும்.

பயிற்சி 20.2

1. ஒரு சிறிய உழவு இயந்திரத்தில் ஒன்று 50kg உடைய 5 சீமெந்து பைக்கெற்றுகளும் சமனான திணிவுடைய 30 கம்பிகளும் ஏற்றப்பட்டுள்ளன. உழவு இயந்திரத்தில் கொண்டு செல்லக்கூடிய உச்ச திணிவின் அளவு 700kg ஆகும்.

(i) ஒரு கம்பியின் திணிவு x kg எனக் கொண்டு மேலேயுள்ள தகவல்களிலிருந்து ஒரு சமனிலியை உருவாக்குக.

(ii) ஒரு கம்பியின் உச்ச திணிவைக் காண்க.

2. A என்னும் ஒரு பெட்டியில் 12 சிறிய விசுக்கோத்துப் பைக்கற்றுகளும் 200g வீதமுள்ள 5 விசுக்கோத்துப் பைக்கற்றுகளும் B என்னும் இன்னொரு பெட்டியில் 4 சிறிய பைக்கற்றுகளும் 200g விசுக்கோத்துப் பைக்கற்றுகள் 9 உம் அடுக்கப்பட்டுள்ளன. பெட்டி A இலுள்ள விசுக்கோத்துகளின் திணிவு பெட்டி B இலுள்ள விசுக்கோத்துகளின் திணிவிலும் குறைவானது அல்லது சமனானது ஆகும்.

(i) சிறிய விசுக்கோத்துப் பைக்கற்று ஒன்றின் திணிவு x கிராம் எனக் கொண்டு தரப்பட்டுள்ள தகவல்களிலிருந்து x இலான ஒரு சமனிலியை எழுதுக.

(ii) ஒரு சிறிய விசுக்கோத்துப் பைக்கற்றின் உச்ச திணிவைக் காண்க.

3. ஒரு வேலைத்தளத்தில் பயிற்றப்பட்ட, பயிற்றப்படாத தொழிலாளர்கள் பணியாற்றுகின்றனர். ஒரு பயிற்றப்பட்ட தொழிலாளியின் ஒரு நாட் சம்பளம் ரூ. 1200 ஆகும். 5 பயிற்றப்பட்ட தொழிலாளர்களினதும் 7 பயிற்றப்படாத தொழிலாளர்களினதும் ஒரு நாட் சம்பளத்துக்குச் செலவாகும் தொகை 7 பயிற்றப்பட்ட தொழிலாளர்களினதும் 4 பயிற்றப்படாத தொழிலாளர்களினதும் சம்பளத்துக்குச் சமனாகும் அல்லது அதிகமாகும்.

(i) பயிற்றப்படாத ஒரு தொழிலாளியின் ஒரு நாட் சம்பளம் ரூ. x எனக் கொண்டு மேலேயுள்ள தகவல்களிலிருந்து x இலான ஒரு சமனிலியை உருவாக்குக.

(ii) சமனிலியைத் தீர்த்து பயிற்றப்படாத ஒரு தொழிலாளியின் ஒரு நாளின் இழிவுச் சம்பளத்தைக் காண்க.

4. நிறையில் சமனான 5 தேயிலை பைக்கற்றுகளும் 3kg சீனியின் திணிவானது 25 தேயிலைப் பைக்கெற்றுகளின் திணிவுக்குச் சமனான திணிவையோ அதனிலும் கூடிய திணிவையே உடையது. இத்தகவல்களிலிருந்து ஒரு சமனிலியை உருவாக்கி ஒரு தேயிலைப் பைக்கற்றின் உச்ச திணிவைக் காண்க.

5. இரண்டு அறைகளில் தரையோடுகள் பதிப்பதற்தாக இரண்டு அளவுகளிலான சதுர வடிவிலான தரையோடுகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. பெரிய தரையோட்டின் பரப்பளவு $900\ \mathrm{cm}^2$ ஆகும். அறை A இல் பதிப்பதற்காக சிறிய தரையோடுகள் 100 உம் பெரிய தரையோடுகள் 10 உம் அறை B இற்கு சிறிய தரையோடுகள் 20 உம் பெரிய தரையோடுகள் 30 உம் தேவைப்பட்டன. அறை B இன் நிலத்தின் பரப்பளவு A இன் நிலத்தின் பரப்பளவுக்குச் சமன் அல்லது கூடியது எனின் ஒரு சமனிலியிலிருந்து ஒரு சிறிய தரையோட்டின் ஒரு பக்கத்தின் உச்ச நீளத்தைக் காண்க.

6. ஒரு தாங்கியானது 5 l கொள்ளளவுடைய ஒரு பெரிய வாளியினாலும் மேலுமொரு சிறிய வாளியினாலும் நீரினால் நிரப்படுகின்றது. பெரிய வாளியினால் 12 தடவைகளும் சிறிய வாளியினால் 4 தடவைகளும் நீரை ஊற்றியபோது தாங்கி முற்றாக நிரம்பியது. பெரிய வாளியினால் 9 தடவைகளும் சிறிய வாளியினால் 9 தடவைகளும் நீரை ஊற்றியபோது தாங்கி நிரம்பவில்லை. ஒரு சமனிலியிலிருந்து சிறிய வாளியின் உச்சக் கொள்ளளவைக் காண்க.

21 வட்ட நாற்பக்கல்கள்

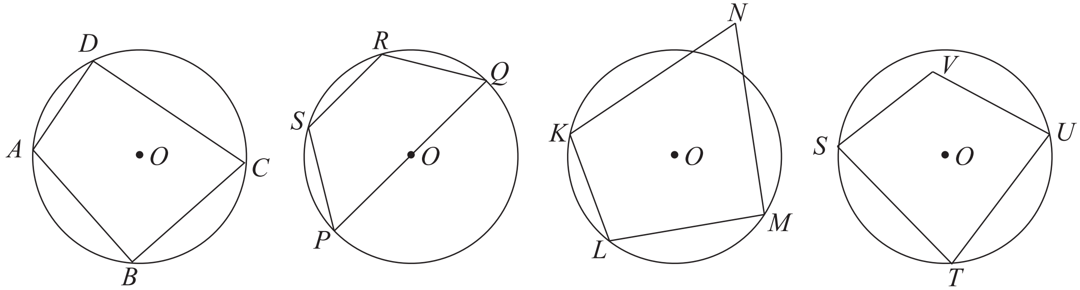
இப்பாடத்தைக் கற்பதன்மூலம் நீங்கள்

- வட்ட நாற்பக்கலை அறிந்து கொள்வதற்கும் ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் எதிர்க் கோணங்கள் மிகைநிரப்பிகளாகும் என்னும் தேற்றத்தையும் அதன் மறுதலையையும் அறிந்துகொள்ளவும்
- ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் ஒரு புறக் கோணம் அதன் அகத்தெதிர்க் கோணத்திற்கு சமனாகும் என்னும் தேற்றத்தையும் அதன் மறுதலையையும் அறிந்து கொள்ளவும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

21.1 வட்ட நாற்பக்கல்

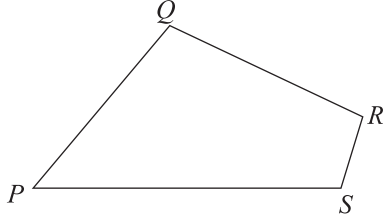
ஒரு நாற்பக்கலின் நான்கு உச்சிகளும் ஒரு வட்டத்தின் மீது அமைந்திருப்பின் அந்நாற்பக்கல் ஒரு **வட்ட நாற்பக்கல்** எனப்படும்.



(i) (ii) (iii) (iv)

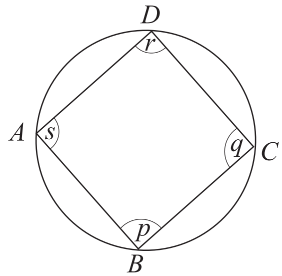
மேலேயுள்ள உருக்களில் தரப்பட்டுள்ளவாறு (i), (ii) ஆகிய உருக்களில் உள்ள $ABCD$, $PQRS$ ஆகியன **வட்ட நாற்பக்கல்கள்** என்பதும் (iii), (iv) ஆகிய உருக்களில் உள்ள நாற்பக்கல்கள் **வட்ட நாற்பக்கல்கள்** அல்ல என்பதும் தெளிவாகும்.

ஒரு வட்ட நாற்பக்கலில் யாதாயினுமொரு கோணத்தின் எதிர்க் கோணம் எனப்படுவது அதற்கு எதிரே உள்ள கோணமாகும். உதாரணமாக கீழே தரப்பட்டுள்ள நாற்பக்கல் $PQRS$ இல் $\hat{P}$ யின் எதிர்க் கோணம் $\hat{R}$ உம் $\hat{Q}$ வின் எதிர்க்கோணம் $\hat{S}$ உம் ஆகும்.



ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் எதிர்க்கோணங்களுக்கிடையிலான தொடர்பைப் பின்வரும் செயற்பாட்டில் ஈடுபட்டு விளங்கிக் கொள்வோம்.

செயற்பாடு 1



- உருவிலுள்ளவாறு ஒரு வட்ட நாற்பக்கலை வரைந்து கொள்க.
- வட்ட நாற்பக்கலின் கோணங்களை வெட்டி வேறாக்கிக் கொள்க.
- வேறாக்கிய கோணங்களில் p, r என்பன மூலம் தரப்படும் கோணச் சோடியையும் q , s என்பன மூலம் தரப்படும் கோணச் சோடியையும் வெவ்வேறாக அடுத்துள்ள கோணங்கள் ஆகுமாறு ஒரு தாளில் ஒட்டிக் கொள்க. அவை மிகைநிரப்பிகளா? (அதாவது கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகின்றதா) என அளந்து பார்க்க.
- இதன் மூலம் ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் எதிர்க் கோணங்கள் தொடர்பாக நீர் எடுக்கக்கூடிய முடிபு யாது?

$p + r = 180^{\circ}$ உம் $q + s = 180^{\circ}$ உம் ஆகின்றதென்பது உங்களுக்கு விளங்கும். இத்தொடர்பைக் கீழே உள்ளவாறு ஒரு தேற்றமாக முன்வைக்கலாம்.

தேற்றம்:
ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் எதிர்க் கோணங்கள் மிகைநிரப்பிகளாகும்.

மேற்குறித்த தேற்றத்தைத் தரப்பட்டுள்ள உருவிற்கேற்பப் பின்வருமாறு முன்வைக்கலாம்.

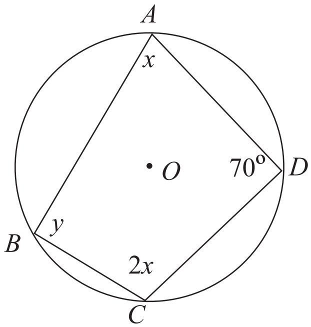
$$A\hat{B}C + C\hat{D}A = 180^{\circ}$$

$$D\hat{C}B + D\hat{A}B = 180^{\circ}$$

மேற்குறிப்பிட்ட தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி கணித்தல்களைச் செய்யும் முறையை ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

தரப்பட்டுள்ள உருவிலுள்ள வட்ட நாற்பக்கல் $ABCD$ இல் x, y ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் எதிர்க் கோணங்கள் மிகைநிரப்பிகள் என்பதால்,

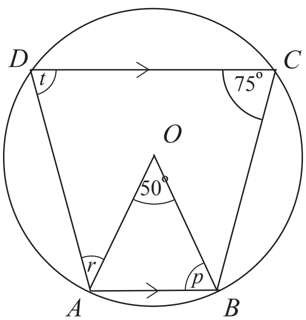
$$70^\circ + y = 180^\circ$$
$$\therefore \quad y = 180^\circ - 70^\circ$$
$$y = 110^\circ$$

ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் எதிர்க் கோணங்கள் மிகைநிரப்பிகள் என்பதால்,

$$x + 2x = 180^\circ$$
$$3x = 180^\circ$$
$$\therefore \quad x = 60^\circ$$

உதாரணம் 2

உருவிலுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்தில் $AB//CD$ ஆகும். குறியீடுகள் மூலம் தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோணத்தினதும் பருமனைக் காண்க.



$O\hat{A}B = O\hat{B}A$ ($OA=OB$ ஆகியன ஒரே வட்டத்தின் ஆரைகள் என்பதால் சமனானவை)

$\therefore \quad p + p + 50^\circ = 180^\circ$ (முக்கோணி OAB யின் அகக் கோணங்கள்)

$$p = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2}$$
$$= 65^\circ$$

$D\hat{C}B + D\hat{A}B = 180^\circ$ (வட்ட நாற்பக்கலின் எதிர்க் கோணங்கள்)

$$75^\circ + D\hat{A}B = 180^\circ$$
$$D\hat{A}B = 180^\circ - 75^\circ$$
$$= 105^\circ$$

$B\hat{A}O + O\hat{A}D = 105^{\circ}$

$\therefore \quad 65^{\circ} + r = 105^{\circ}$

$r = 105^{\circ} - 65^{\circ}$

$r = 40^{\circ}$

நேயக் கோணச் சோடியின் கூட்டுத்தொகை 180° என்பதால்

$t + 105^{\circ} = 180^{\circ}$

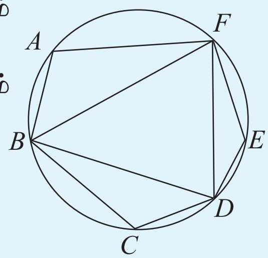
$\therefore \quad t = 180^{\circ} - 105^{\circ}$

$t = 75^{\circ}$

பயிற்சி 21.1

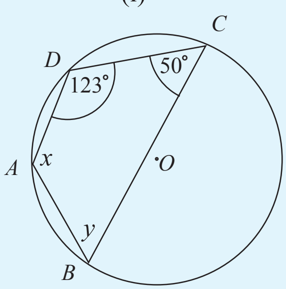
1. (i) உருவிலுள்ள எல்லா வட்ட நாற்பக்கல்களையும் எழுதுக.

(ii) மேலே பெயரிட்ட ஒவ்வொரு வட்ட நாற்பக்கலினதும் இரண்டு எதிர்க்கோணச் சோடிகளை எழுதுக.

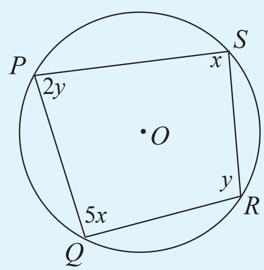


2. தரப்பட்டுள்ள தகவல்களைப் பயன்படுத்திக் குறியீடுகளால் தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோணத்தின் பருமனைக் காண்க. உருக்களில் மையம் O எனப் பெயரிடப்பட்டுள்ளது.

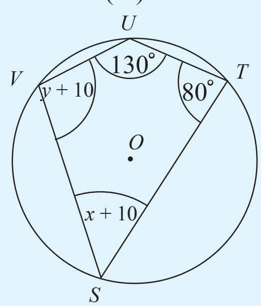
(i)



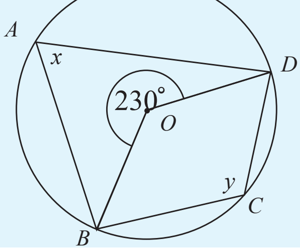
(ii)



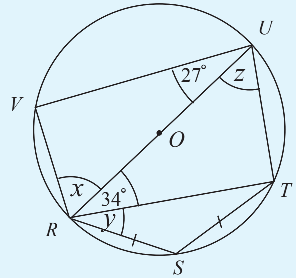
(iii)



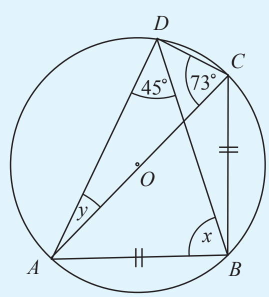
(iv)



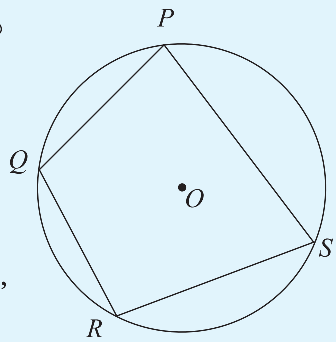
(v)



(vi)



3. உருவில் O வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டம் தரப்பட்டுள்ளது.



a. $\hat{P} = 60^{\circ}, \hat{S} = 125^{\circ}$, ஆயின் $\hat{R}, \hat{Q}$ இன் பெறுமானம்

b. $\hat{P} : \hat{R} = 2 : 3$ ஆயின் $\hat{P}, \hat{R}$ இன் பெறுமானம்

c. $\hat{Q} - \hat{S} = 120^{\circ}$ ஆயின் $\hat{S}, \hat{Q}$ இன் பெறுமானம்

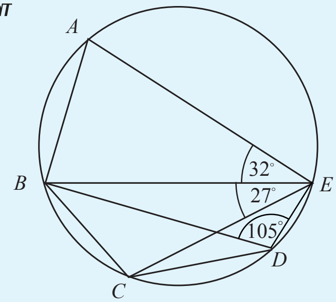
e. $2\hat{P} = \hat{R}$ ஆயின் $\hat{P}$ இன் பெறுமானம்

f. $\hat{P} = 2x + y, \hat{Q} = x + y, \hat{R} = 60^{\circ}, \hat{S} = 90^{\circ}$ ஆயின் x, y இன் பெறுமானம்

ஆகியவற்றைக் காண்க.

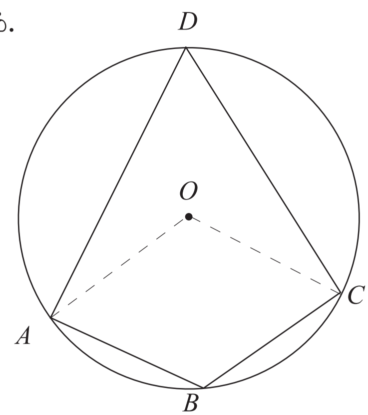
4. யாதாயினுமொரு வட்டத்தின் பரிதியின் மீது A, B, C, D, E, F ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன.
$F\hat{A}B + B\hat{C}D + D\hat{E}F$ இன் பெறுமானம் காண்க.

5. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்பக் கீழேயுள்ள ஒவ்வொரு கோணத்தின் பெறுமானத்தையும் காண்க.



a. $B\hat{A}E$ **b.** $C\hat{B}A$ **c.** $C\hat{B}E$

மேலே குறிப்பிட்ட ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் எதிர்க்கோணங்கள் மிகைநிரப்பிகளாகும் என்னும் தேற்றத்தை நிறுவும் முறையை நாம் ஆராய்வோம்.



தரவு: $ABCD$ ஒரு வட்ட நாற்பக்கலாகும். O மையமாகும்.

நி.வே: $A\hat{B}C + A\hat{D}C = 180^{\circ}$
$D\hat{A}B + D\hat{C}B = 180^{\circ}$

அமைப்பு: OA, OC ஆகியவற்றை இணைக்க.

நிறுவல்:

$A\hat{O}C = 2\,A\hat{D}C$ (மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணம் பரிதியில் எதிரமைக்கும் கோணத்தின் இருமடங்காகும்.)

$A\hat{O}C$ (பின்வளை) $= 2\,A\hat{B}C$ (மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணம் பரிதியில் எதிரமைக்கும் கோணத்தின் இருமடங்காகும்.)

$\therefore\ A\hat{O}C + A\hat{O}C$ (பின்வளை) $= 2\,A\hat{D}C + 2\,A\hat{B}C$

ஆனால் $A\hat{O}C + A\hat{O}C$ (பின்வளை) $= 360^{\circ}$ (ஒரு புள்ளிக் கோணம்)

$\therefore\ 2\,A\hat{D}C + 2\,A\hat{B}C = 360^{\circ}$

அப்போது $A\hat{D}C + A\hat{B}C = 180^{\circ}$

இவ்வாறு OB, OD ஆகியவற்றை இணைப்பதன் மூலம்

$\therefore\ D\hat{A}B + D\hat{C}B = 180^{\circ}$ எனக் காட்டலாம்.

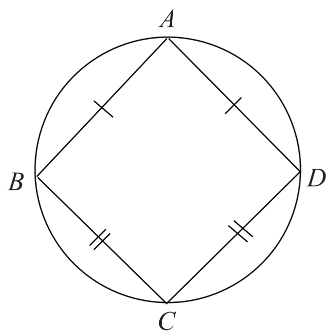
$\therefore$ ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் எதிர்க் கோணங்கள் மிகை நிரப்பிகளாகும்.

இத்தேற்றத்தின் மறுதலையும் உண்மையானதாகும். அதாவது ஒரு நாற்பக்கலின் எதிர்க் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆயின் அந்நாற்பக்கலின் உச்சிகள் ஒரு வட்டத்தின் மீது அமைந்திருக்கும். அதனை ஒரு தேற்றமாக கீழே உள்ளவாறு முன்வைக்கலாம்.

தேற்றம் : ஒரு நாற்பக்கலின் ஒரு சோடி எதிர்க் கோணங்கள் மிகை நிரப்பிகளாயின் அந்நாற்பக்கல் ஒரு வட்ட நாற்பக்கலாகும்.

மேற்குறித்த தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி ஏறிகளை நிறுவும் விதத்தை இப்போது பார்போம்.

உதாரணம் 1



உருவில் தரப்பட்டுள்ள வட்ட நாற்பக்கல் $ABCD$ இல் $AB = AD$ உம் $CB = CD$ உம் ஆகும்.

(i) $\Delta ABC \equiv \Delta ACD$ எனக் காட்டுக.

(ii) AC ஆனது ஒரு விட்டம் என்பதை உய்த்தறிக.

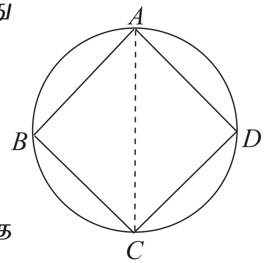
(i) ABC, ADC ஆகிய முக்கோணிச் சோடிகளைக் கருதும்போது

$AB = AD$ (தரவு)

$BC = DC$ (தரவு)

AC பொதுப் பக்கம்

$\therefore \ \Delta ABC \equiv \Delta ACD$ (ப.ப.ப.)



(ii) $A\hat{B}C = A\hat{D}C$ (ஒருங்கிசைவான முக்கோணிகளில் ஒத்த உறுப்புகள் சமனானவை)

ஆனால் $A\hat{B}C + A\hat{D}C = 180^{\circ}$ (ஒரு வட்ட நாற்பக்கலில் எதிர்க் கோணங்கள் மிகைநிரப்பிகளாகும்)

$\therefore \ A\hat{B}C + A\hat{B}C = 180^{\circ}$ ($\because \ A\hat{B}C = A\hat{D}C$)

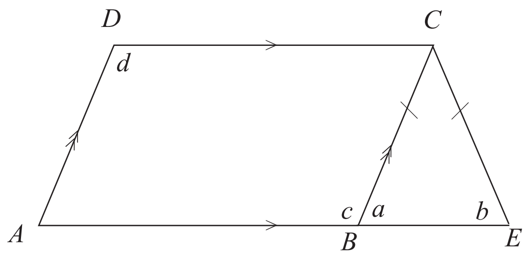
$2\,A\hat{B}C = 180^{\circ}$

$\therefore \ A\hat{B}C = 90^{\circ}$

$\therefore$ AC ஆனது விட்டம் ஆகும். (அரைவட்டக் கோணம் 90° என்பதால்)

உதாரணம் 2

இணைகரம் $ABCD$ இல் $CB = CE$ ஆகுமாறு பக்கம் AB ஆனது E வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது. $AECD$ ஒரு வட்ட நாற்பக்கல் எனக் காட்டுக.



$a = b$ ($CE = CB$ என்பதால்)

$c = 180^{\circ} - a$ (நேர்கோணம்)

$c = 180^{\circ} - b$ ($a = b$ என்பதால்) ——— 1

$c = d$ (இணைகரம் $ABCD$ யின் எதிர்க் கோணங்கள்) ——— 2

1, 2 இலிருந்து

$d = 180^{\circ} - b$

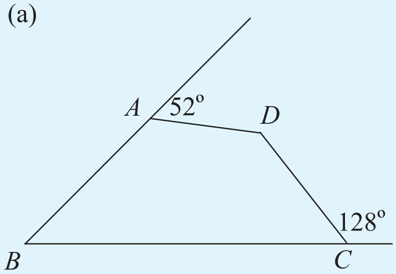
$\therefore b + d = 180^{\circ}$

நாற்பக்கல் $AECD$ இல் எதிர்க் கோணச் சோடியின் கூட்டுத்தொகை 180° என்பதால் அந்நாற்பக்கல் வட்ட நாற்பக்கலாகும்.

பயிற்சி 21.2

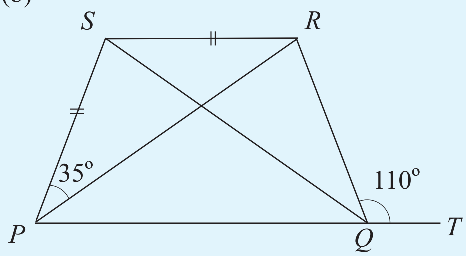
1. கீழே ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் தரப்பட்டுள்ள நாற்பக்கல் வட்ட நாற்பக்கல் ஆகுமா, இல்லையா? என்பதைக் காரணங்களுடன் விளக்குக.

(a)



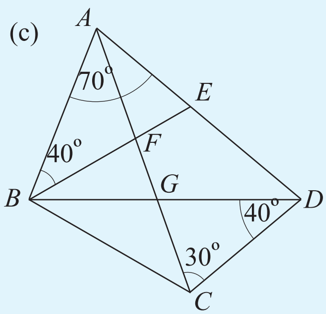
நாற்பக்கல் $ABCD$

(b)



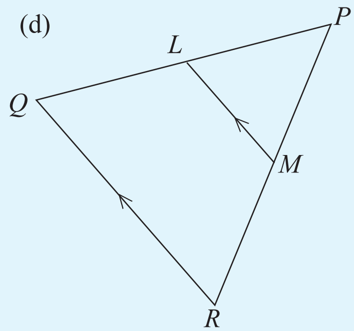
நாற்பக்கல் $PQRS$

(c)



நாற்பக்கல் $FGDE$

(d)



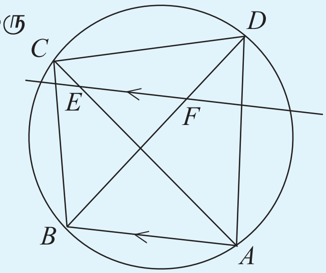
$PQ = PR$ ஆயின் நாற்பக்கல் $QRML$

2. நாற்பக்கல் $PQRS$ இல் $\hat{P} = \hat{Q}$ உம் $\hat{R} = \hat{S}$ உம் ஆகும். $PQRS$ ஒரு வட்ட நாற்பக்கல் எனக் காட்டுக.

3. வட்ட நாற்பக்கல் $ABCD$ இல் AC இணைக்கப்பட்டுள்ளது. $B\hat{A}C = A\hat{D}C - A\hat{C}B$ எனக் காட்டுக.

4. நாற்பக்கல் $ABCD$ இல் $A\hat{B}D + A\hat{D}B = D\hat{C}B$ ஆகுமாயின் A, B, C, D ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே வட்டத்தின் மீது அமையும் எனக் காட்டுக.

5. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களிலிருந்து $CDFE$ ஒரு வட்ட நாற்பக்கல் என நிறுவுக.

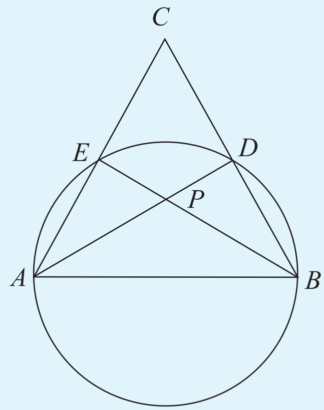


6. தரப்பட்டுள்ள உருவில் AB விட்டமாயின்

(i) $A\hat{P}B = C\hat{A}B + A\hat{B}C$ எனவும்

(ii) $CDPE$ ஒரு வட்ட நாற்பக்கல் எனவும்

நிறுவுக.

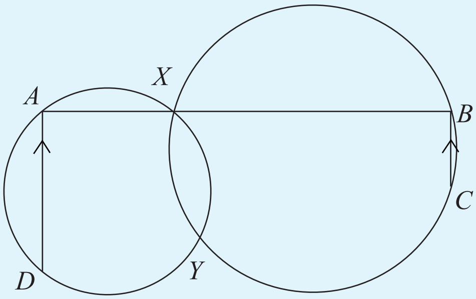


7. முக்கோணி PQR இல் பக்கம் PQ ஆனது S வரையும் பக்கம் PR ஆனது T வரையும் நீட்டப்பட்டுள்ளன. $S\hat{Q}R$, $Q\hat{R}T$ ஆகியவற்றின் இருசமகூறாக்கிகள் X இலும் $P\hat{Q}R$, $P\hat{R}Q$ ஆகியவற்றின் இருசமகூறாக்கிகள் Y இலும் ஒன்றையொன்று சந்திக்கின்றன.

(i) $QXRY$ ஒரு வட்ட நாற்பக்கல் எனவும் XY ஆனது ஒரு விட்டம் எனவும் காட்டுக.

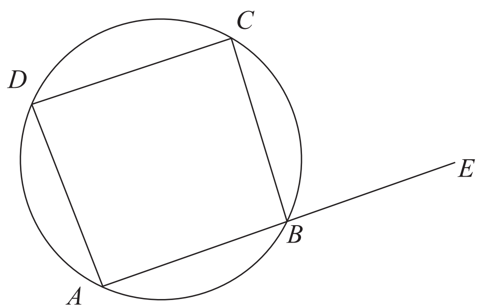
(ii) $Q\hat{P}R = 40^\circ$ ஆயின் $Q\hat{X}R$ இன் பெறுமானம் காண்க.

8. உருவிலுள்ள இரண்டு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று X, Y என்பவற்றில் இடைவெட்டுகின்றன. X இனூடாக வரையப்பட்ட நேர்கோடானது இரண்டு வட்டங்களையும் A, B ஆகியவற்றில் சந்திக்கின்றது. AD, BC ஆகியன சமாந்தரமாகுமாறு D, C ஆகிய புள்ளிகள் வட்டத்தின் மீது அமைந்துள்ளன. DYC ஓர் நேர்கோடு எனக் காட்டுக.

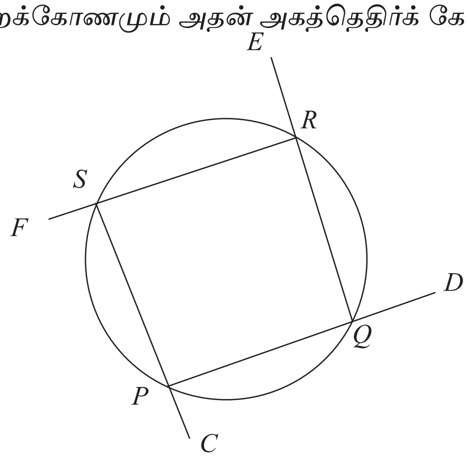


21.3 ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் புறக் கோணத்திற்கும் அகத்தெதிர்க் கோணத்திற்கும் இடையிலான தொடர்பு

தரப்பட்ட உருவில் உள்ள வட்ட நாற்பக்கல் $ABCD$ இல் பக்கம் AB ஆனது E வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது.



இங்கு $C\hat{B}E$ ஆனது புறக்கோணமும் அதன் அகத்தெதிர்க் கோணம் $A\hat{D}C$ உம் ஆகும்.

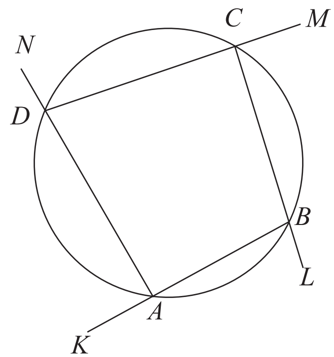


மேலேயுள்ள உருவில் தரப்பட்டுள்ள வட்ட நாற்பக்கல் $PQRS$ ஐக் கருதும்போது, கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்தலாம்.

நீட்டப்பட்ட பக்கம்	புறக் கோணம்	அகத்தெதிர்க் கோணம்
PQ	$D\hat{Q}R$	$P\hat{S}R$
QR	$E\hat{R}S$	$Q\hat{P}S$
RS	$F\hat{S}P$	$P\hat{Q}R$
SP	$Q\hat{P}C$	$Q\hat{R}S$

ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் புறக்கோணம், அகத்தெதிர்க் கோணம் ஆகிய வற்றுக்கிடையிலுள்ள தொடர்பு கீழேயுள்ள தேற்றத்தில் முன்வைக்கப்படுகின்றது.

தேற்றம்
ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் ஒரு பக்கத்தை நீட்ட உண்டாகும் புறக் கோணம் அதன் அகத்தெதிர்க் கோணத்திற்குச் சமனாகும்.



இத்தேற்றத்திற்கேற்ப மேலேயுள்ள உருவின்படி பின்வருமாறு கோணங்கள் சமப்படும்.

$$D\hat{A}K = B\hat{C}D$$
$$A\hat{B}L = C\hat{D}A$$
$$B\hat{C}M = B\hat{A}D$$
$$C\hat{D}N = A\hat{B}C$$ ஆகும்.

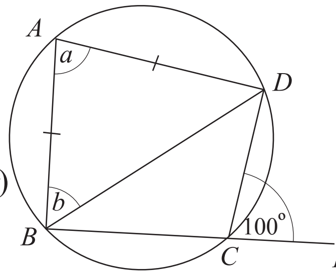
இத்தேற்றம் ஏன் உண்மையாகின்றது என்பதை ஆராய்வோம். உதாரணமாக மேலேயுள்ள உருவில்

$D\hat{A}B$, $B\hat{C}M$ ஆகிய கோணங்கள் சமனாவதற்கான காரணத்தை ஆராய்வோம். $ABCD$ ஒரு வட்ட நாற்பக்கல் என்பதால் $D\hat{A}B + B\hat{C}D = 180^\circ$ ஆகும். அவ்வாறே DCM ஒரு நேர்கோடு என்பதால்

$B\hat{C}D + B\hat{C}M = 180^\circ$, $D\hat{A}B + B\hat{C}D = B\hat{C}D + B\hat{C}M$ ஆகும். இருபக்கமும் $B\hat{C}D$ ஐக் கழிக்கும்போது $D\hat{A}B = B\hat{C}M$ எனப் பெறப்படும்.

உதாரணம் 1

தரப்பட்டுள்ள உருவிலுள்ள a, b ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் புறக் கோணம் அகத்தெதிர்க் கோணத்திற்குச் சமன் என்பதால்

$a = 100^\circ$

$A\hat{D}B = b$ ($AB = AD$ என்பதால்)

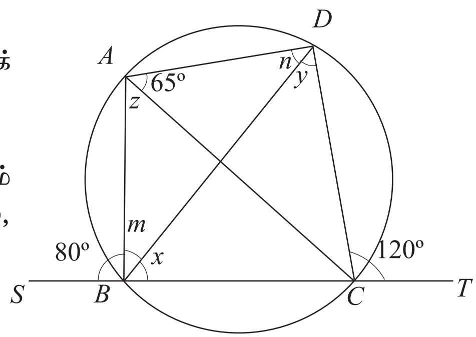
$a + b + b = 180^\circ$ (ஒரு முக்கோணியின் அகக் கோணங்கள்)

$100^\circ + 2b = 180^\circ$

$b = 40^\circ$

உதாரணம் 2

தரப்பட்டுள்ள உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள x, y, z, n, m ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



$x = 65^\circ$ (ஒரே துண்டக் கோணம்)

ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் புறக் கோணம் அகத்தெதிர்க் கோணத்துக்குச் சமன் என்பதால்,

$B\hat{A}D = D\hat{C}T$

$B\hat{A}D = 120^\circ$

$z + 65^\circ = 120^\circ$

$z = 55^\circ$

$z = y$ (ஒரே துண்டக் கோணங்கள்)

$\therefore\ y = 55^\circ$

ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் புறக்கோணம் அகத்தெதிர்க் கோணத்துக்குச் சமன் என்பதால்,

$A\hat{D}C = A\hat{B}S = 80^\circ$

$\therefore\ n + y = 80^\circ$

$n + 55^\circ = 80^\circ$

$n = 80^\circ - 55^\circ$

$\therefore\ n = 25^\circ$

$80^\circ + m + x = 180^\circ$ (நேர்கோட்டில் அடுத்துள்ள கோணங்கள்)

$C\hat{A}D = x$ (ஒரே வட்டத் துண்டக் கோணங்கள்)

$80^\circ + m + 65^\circ = 180^\circ$

$m = 180^\circ - 145^\circ$

$m = 35^\circ$

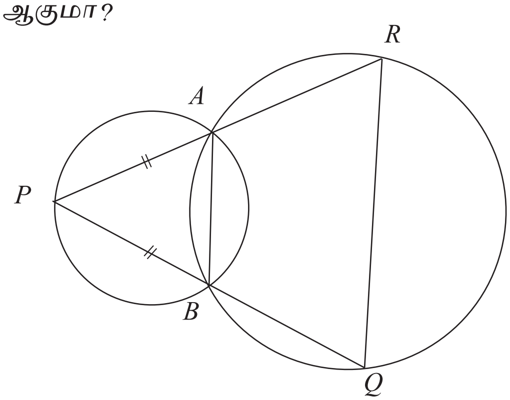
உதாரணம் 3

உருவில்தரப்பட்டுள்ளஇரண்டுவட்டங்களும்A, Bஆகியவற்றில்இடைவெட்டுவதுடன் $PA = PB$ ஆகும்.

$A\hat{P}B = 70^\circ$ ஆயின்

(i) $A\hat{R}Q$ இன் பெறுமானம் காண்க.

(ii) $AB // RQ$ ஆகுமா?



(i) முக்கோணி APB இல்

$P\hat{A}B = P\hat{B}A$ ($PA = PB$ என்பதால்)

$\therefore \; P\hat{A}B = P\hat{B}A = \dfrac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ$

மேலும் $A\hat{B}P = A\hat{R}Q$ (வட்ட நாற்பக்கல் $ABQR$ இல் புறக் கோணம் = அகத்தெதிர்க் கோணம்)

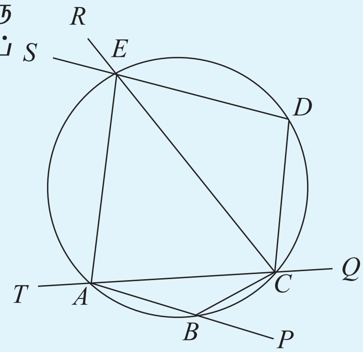
$\therefore \; A\hat{R}Q = 55^\circ$

(ii) $P\hat{A}B = A\hat{R}Q = 55^\circ$ ஆகும்.

$\therefore \; AB // RQ$ ஆகும். (ஒத்த கோணங்கள் சமன் என்பதால்)

பயிற்சி 21.3

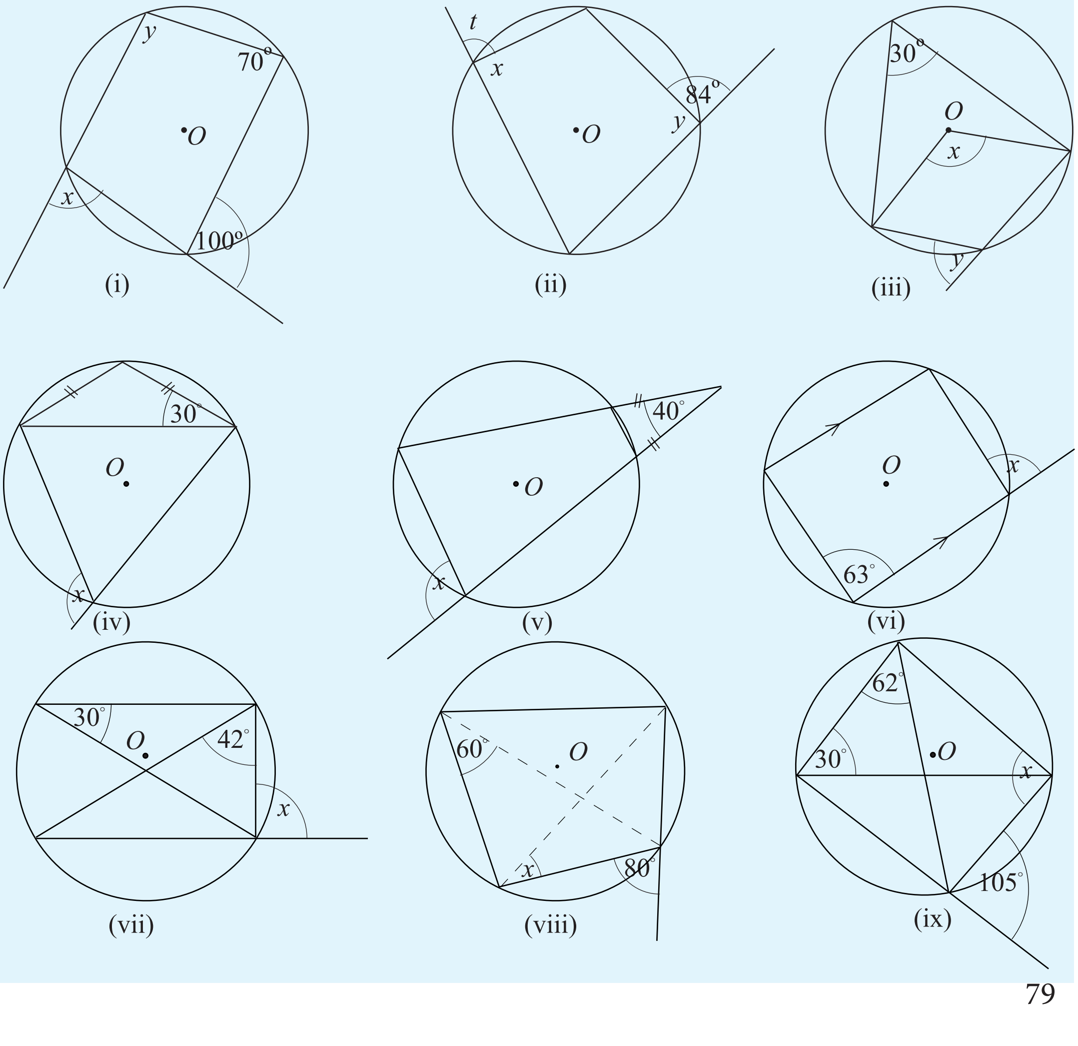
1. உருவிலிருந்து கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோணத்துக்கும் சமனான ஒரு கோணத்தைப் பெயரிடுக.

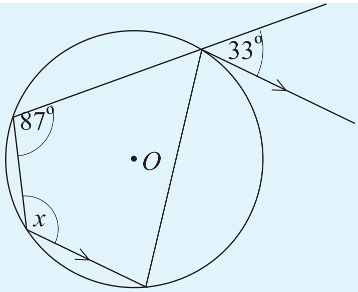


(i) $C\hat{B}P$ (ii) $D\hat{C}Q$ (iii) $R\hat{E}A$

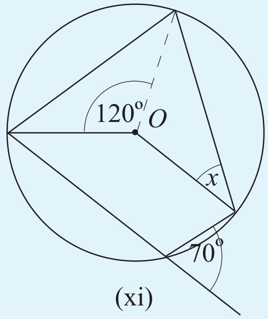
(iv) $S\hat{E}A$ (v) $E\hat{A}T$

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள உருவங்களில் O எனப் பெயரிடப்பட்டுள்ளது உரிய வட்டத்தின் மையம். அட்சரகணிதக் குறியீடுகளினால் தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோணத்தினதும் பருமனைக் காண்க.

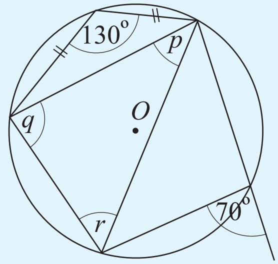




(x)



(xi)

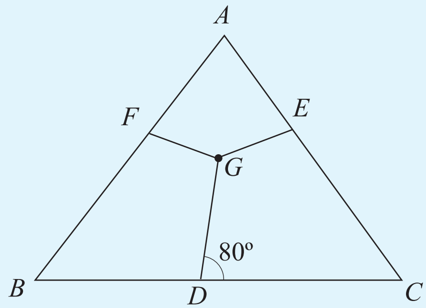


(xii)

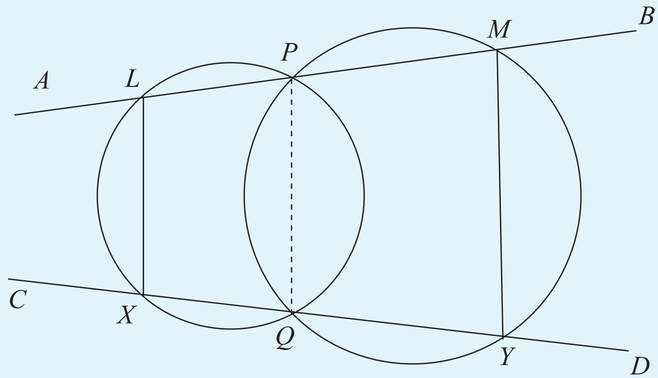
3. முக்கோணி ABC இல் BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களின் மீது முறையே D, E, F ஆகிய புள்ளிகள் $BDGF$, $DCEG$ ஆகியன வட்ட நாற்பக்கல்கள் ஆகுமாறும் $G\hat{D}C = 80^\circ$ ஆகுமாறும் அமைந்துள்ளன ஆயின்,

(i) $A\hat{F}G$, $A\hat{E}G$ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) $AFGE$ ஒரு வட்ட நாற்பக்கல் எனக் காட்டுக.



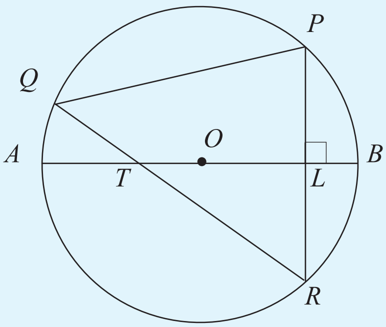
4. உருவில் தரப்பட்டுள்ள வட்டங்கள் P, Q ஆகியவற்றில் இடைவெட்டுகின்றன. நேர்கோடு APB ஆனது L, M இலும் நேர்கோடு CQD ஆனது X, Y இலும் வட்டங்களை வெட்டிச் செல்கின்றன.



(i) $A\hat{L}X = 105^\circ$ ஆயின் $B\hat{M}Y$ இன் பெறுமானம் காண்க.

(ii) LX உம் MY உம் சமாந்தரமானவை எனக் காட்டுக.

5. உருவிலுள்ளவாறு வட்டத்தின் மையம் O ஆவதுடன் விட்டம் AB உம் நாண் PR உம் ஒன்றையொன்று L இல் செங்குத்தாக இடைவெட்டுகின்றன. QR, AB ஆகிய நேர்கோட்டுத் துண்டங்கள் T இல் இடைவெட்டுகின்றன.



a. $Q\hat{T}A = x$ ஆயின் x இன் சார்பில்

(i) $L\hat{R}T$ இன் பெறுமானம்

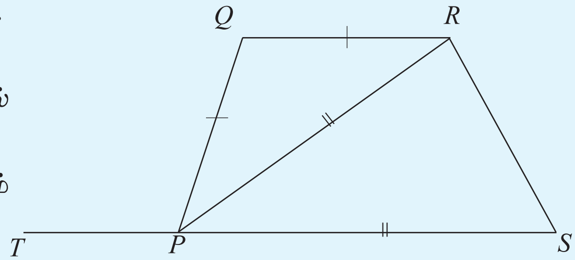
(ii) $O\hat{P}Q$ இன் பெறுமானம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

b. $QTOP$ ஒரு வட்ட நாற்பக்கல் எனக் காட்டுக.

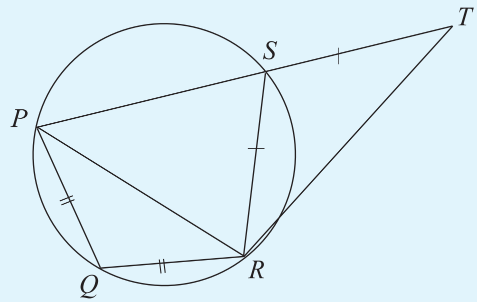
6. $PQ = QR$ உம் $PR = PS$ உம் ஆகும். $P\hat{R}S = 2\,Q\hat{R}P$ ஆயின்,

(i) $PSRQ$ ஒரு வட்ட நாற்பக்கல் எனவும்

(ii) $Q\hat{P}T : P\hat{R}S = 3 : 2$ எனவும் காட்டுக.



7. வட்ட நாற்பக்கல் $PQRS$ இல் $PQ = QR$ ஆகும். $RS = ST$ ஆகுமாறு பக்கம் PS ஆனது T வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது. $S\hat{R}T = 32^{o}$ ஆகுமாயின்



(i) $Q\hat{R}P$ இன் பெறுமானம் காண்க.

(ii) QS, RT ஆகிய பக்கங்கள் சமாந்தரமானவை எனக் காட்டுக.

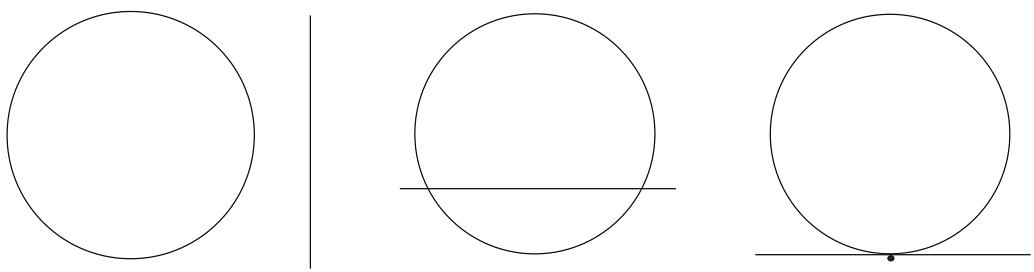
22 தொடலிகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட ஒரு தொடலியையும் அதன் பண்புகளையும் அறிந்துகொள்வதற்கும்
- புறத்தே உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்துக்கு வரையப்படும் தொடலிகளின் பண்புகளை அறிந்துகொள்வதுக்கும்
- ஒன்றுவிட்ட துண்டத்திலுள்ள கோணத்தை அறியவும் அது தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்க்கவும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

22.1 தொடலிகள்



உரு (i) உரு (ii) உரு (iii)

உரு (i) இலுள்ள வட்டத்துக்கும் நேர்கோட்டுக்கும் பொதுவான புள்ளிகள் இல்லை. இப்போது நேர்கோடானது வட்டத்துக்குப் புறத்தே அமைந்துள்ளது.

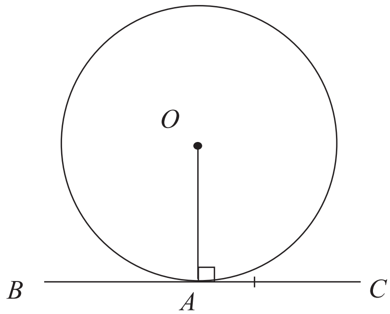
உரு (ii) இல் நேர்கோட்டினால் வட்டமானது இரண்டு புள்ளிகளில் இடைவெட்டப்படுகின்றது. நேர்கோட்டுக்கும் வட்டத்துக்கும் இரண்டு பொதுப் புள்ளிகள் உள்ளன. இப்போது நேர்கோடானது வட்டத்தின் **இடைவெட்டி** எனப்படும்.

உரு (iii) இல் நேர்கோட்டுக்கும் வட்டத்துக்கும் ஒரு பொதுப் புள்ளி மாத்திரம் உண்டு. இப்போது நேர்கோடானது வட்டத்தைத் தொடுகின்றது எனக் கூறப்படுவதுடன் நேர்கோடானது வட்டத்தின் **தொடலி** எனப்படும்

தொடலிக்கும் வட்டத்துக்கும் உள்ள பொதுப் புள்ளி **தொடுபுள்ளி** எனப்படும்.

ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் ஆரைக்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்ட கோடு

வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் ஆரைக்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்ட கோடு பற்றிய விடயங்களைக் கற்பதற்காகக் கீழேயுள்ள விடயங்களில் கவனத்தைச் செலுத்துவோம்.



மேலேயுள்ள உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி A யில் வரையப்பட்ட ஆரை OA ஆகும். OA இற்குப் புள்ளி A யில் வரைந்த செங்குத்து BC ஆகும். இங்கு BC என்னும் கோட்டுத் துண்டம் வட்டத்தை A யில் தொடுகின்றது என்பதும் தெளிவாகும்.

அதாவது,

வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளி A யில் ஆரை OA யிற்குச் செங்குத்தாக வரைந்த கோட்டுத் துண்டம் BC ஆனது இவ்வட்டத்துக்கு ஒரு தொடலி ஆகும். இப்பேற்றை ஒரு தேற்றமாக இப்போது முன்வைக்கலாம்.

தேற்றம் : ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியினூடாக ஆரைக்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்ட கோடு வட்டத்தின் தொடலி ஆகும்.

மேலும் இத்தேற்றத்தின் மறுதலையும் உண்மையாகும்.

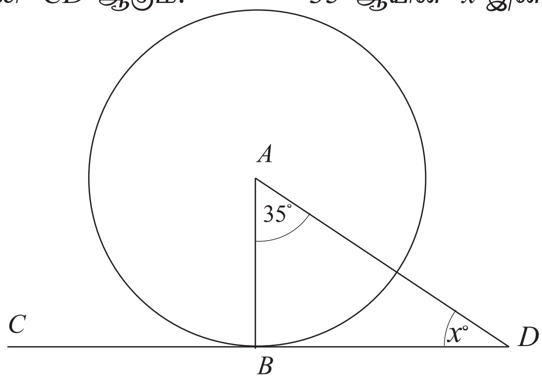
அதாவது வட்டத்தின் மீதுள்ள எந்தவொரு புள்ளியிலும் ஒரு தொடலியை வரைந்து தொடுபுள்ளியிலேயே ஆரையும் வரையும்போது அத்தொடலியும் ஆரையும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகும்.

இப்பேற்றை ஒரு தேற்றமாக இவ்வாறு முன்வைக்கலாம்.

தேற்றத்தின் மறுதலை : ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடலி, தொடுபுள்ளியில் வரைந்த ஆரைக்குச் செங்குத்தாகும்.

உதாரணம் 1

மையம் A ஆகவுடைய வட்டதின் மீது அமைந்துள்ள புள்ளி B யில் வரையப்பட்ட தொடலி CD ஆகும். $B\hat{A}D = 35^{o}$ ஆயின் x இன் பெறுமானம் காண்க.

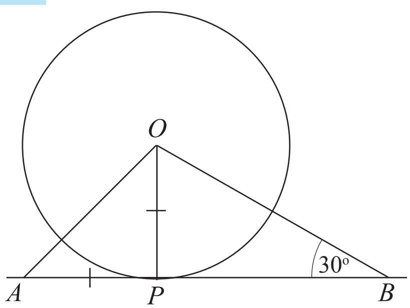


$A\hat{B}D = 90^{o}$ (ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடலியானது தொடுபுள்ளியினூடாக வரையப்பட்ட ஆரைக்குச் செங்குத்து என்பதால்)

ஒரு முக்கோணியின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180^{o} என்பதால்

$$35^{o} + 90^{o} + x^{o} = 180^{o}$$
$$x = 180^{o} - 35^{o} - 90^{o}$$
$$x = 55^{o}$$

உதாரணம் 2



உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்துக்கு P யில் வரையப்பட்ட தொடலி AB ஆகும். $OP = AP$, $O\hat{B}P = 30^{o}$ ஆயின் $A\hat{O}B$ யின் பெறுமானம் காண்க.

$O\hat{P}A = 90^{o}$ (ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடலியானது தொடுபுள்ளியினூடாக வரைப்பட்ட ஆரைக்குச் செங்குத்து என்பதால்)

$OP = AP$ (தரவு)

$\therefore P\hat{O}A = P\hat{A}O$ (ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியில் சமனான பக்கங்களுக்கு எதிரான கோணங்கள் சமன் என்பதால்)

$\Delta\ APO$ வில்

$P\hat{A}O + P\hat{O}A + O\hat{P}A = 180^{o}$ (ஒரு முக்கோணியின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180^{o} என்பதால்)

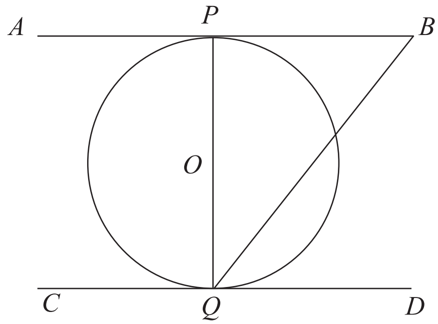
$$\therefore\ P\hat{A}O + P\hat{O}A + 90^{o} = 180^{o}$$
$$P\hat{A}O + P\hat{O}A = 180^{o} - 90^{o}$$
$$P\hat{A}O + P\hat{O}A = 90^{o}$$
$$\therefore 2\,P\hat{A}O = 90^{o}$$ ($P\hat{A}O = P\hat{O}A$ என்பதால்)
$$P\hat{A}O = \frac{90^{o}}{2}$$
$$= 45^{o}$$

முக்கோணி AOB

$A\hat{O}B + P\hat{A}O + P\hat{B}O = 180^{o}$ (ஒரு முக்கோணியின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180^{o} என்பதால்)

$$A\hat{O}B + 45^{o} + 30^{o} = 180^{o}$$
$$A\hat{O}B + 75^{o} = 180^{o}$$
$$A\hat{O}B = 180^{o} - 75^{o}$$
$$= 105^{o}$$

உதாரணம் 3



PQ எனப்படுவது O வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் விட்டமாகும். வட்டத்திற்கு P, Q ஆகியவற்றில் வரையப்பட்ட தொடலிகள் முறையே AB, CD ஆகும். $P\hat{B}Q = B\hat{Q}D$ எனக் காட்டுக.

ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடலியானது தொடுபுள்ளியினூடாக வரையப்பட்ட ஆரைக்குச் செங்குத்து என்பதால்

$Q\hat{P}B = 90^{\circ}$,

$P\hat{Q}D = 90^{\circ}$ ஆகும்.

$\therefore\ Q\hat{P}B + P\hat{Q}D = 90^{\circ} + 90^{\circ}$

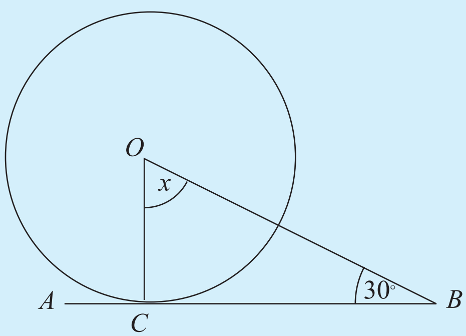
$= 180^{\circ}$

$\therefore\ AB \,//\, CD$ (நேயக் கோணங்களின் மிகை நிரப்பிகள் என்பதால்)

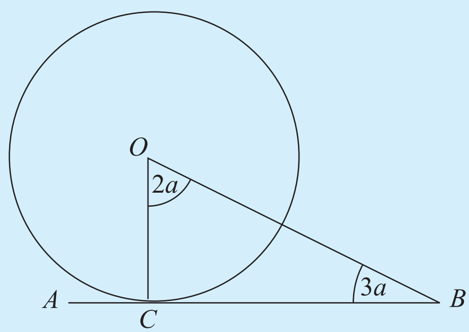
$\therefore\ P\hat{B}Q = B\hat{Q}D$ ($AB \,//\, CD$ ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்)

பயிற்சி 22.1

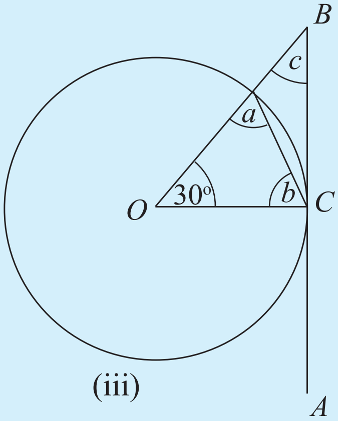
1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு வட்டத்திலும் மையம் O வும் AB என்பது வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளி C யில் வரையப்பட்ட தொடலியுமாகும். தரப் பட்டுள்ள தரவுகளின்படி அட்சரகணிதக் குறியீடுகளினால் தரப்படும் பெறுமானம் காண்க.



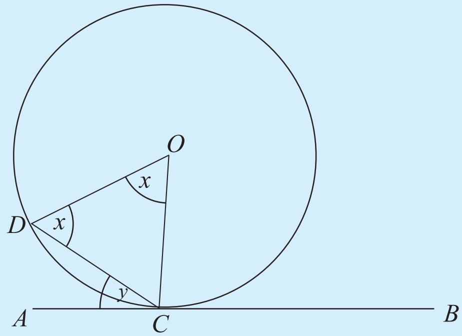
(i)



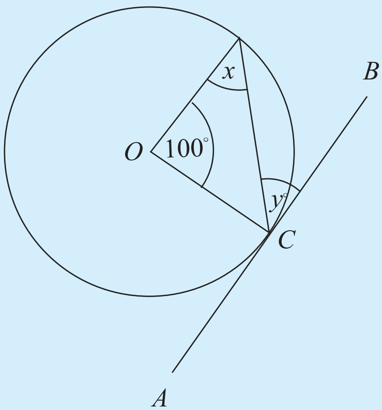
(ii)



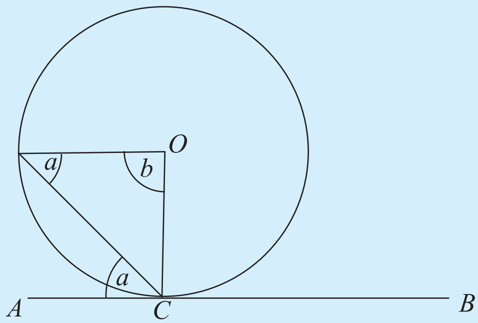
(iii)



(iv)

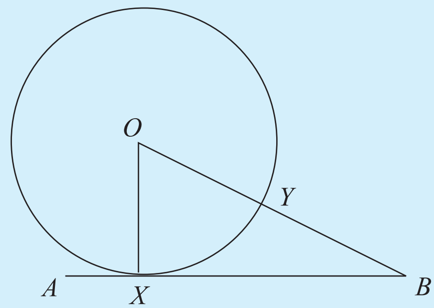


(v)

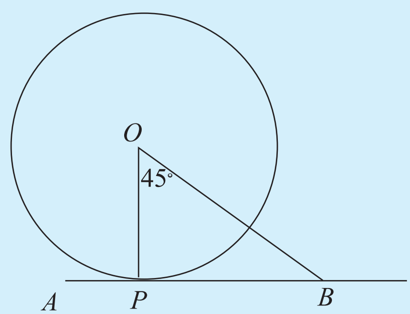


(vi)

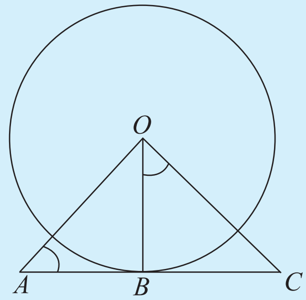
2. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்தின் அமைந்துள்ள புள்ளி X இல் வரையப்பட்ட தொடலி AB ஆகும். கோடு OB யினால் வட்டமானது புள்ளி Y யில் இடை வெட்டப்படுகின்றது. வட்டத்தின் ஆரை 6 cm, YB = 4 cm ஆயின் XB யின் நீளத்தைக் காண்க.



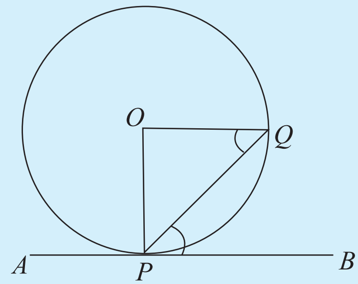
3. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்துக்கு P யில் வரையப்பட்ட தொடலி AB உம் $B\hat{O}P = 45^\circ$ உம் $PB = 6$ cm உம் ஆயின் வட்டத்தின் ஆரையைக் காண்க.



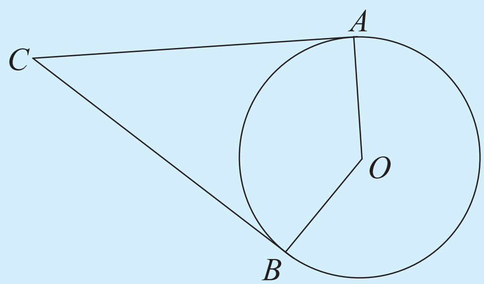
4. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்துக்கு புள்ளி B யில் வரைந்த தொடலி AC ஆகும். $O\hat{A}B = B\hat{O}C$ ஆயின் $A\hat{O}B = B\hat{C}O$ எனக் காட்டுக.



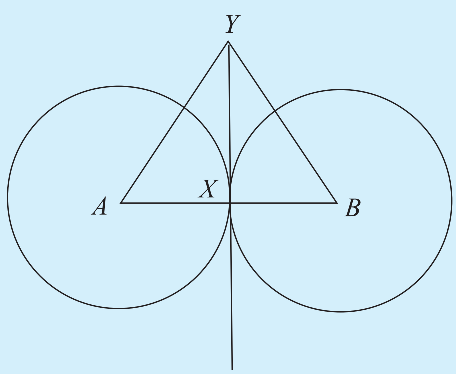
5. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்திலுள்ள புள்ளி P யில் வரையப்பட்ட தொடலி AB ஆகும். $O\hat{Q}P = Q\hat{P}B$ ஆகுமாறு புள்ளி Q ஆனது வட்டத்தின் மீது அமைந்தள்ளது. OQ செங்குத்து PO எனக் காட்டுக.



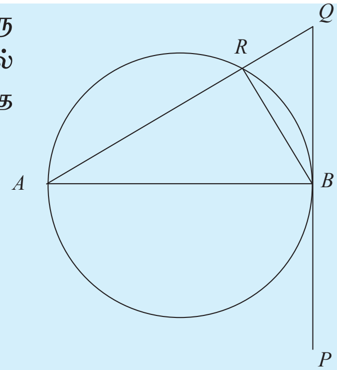
6. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்தின் மீதுள்ள A, B ஆகிய புள்ளிகளில் வரையப்பட்ட தொடலிகள் புள்ளி C யில் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டு கின்றன. $AOBC$ ஒரு வட்ட நாற்பக்கல் எனக் காட்டுக.



7. உருவில் A, B ஆகியவற்றை மையங்களாகவுடைய சமனான ஆரை களைக் கொண்ட இரண்டு வட்டங்கள் தரப்பட்டுள்ளன. புள்ளி Y ஆனது $AY = YB$ ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது. கோடு YX ஆனது இரண்டு வட்டங்களுக்கும் பொதுத் தொடலி ஆகின்றதெனக் காட்டுக.

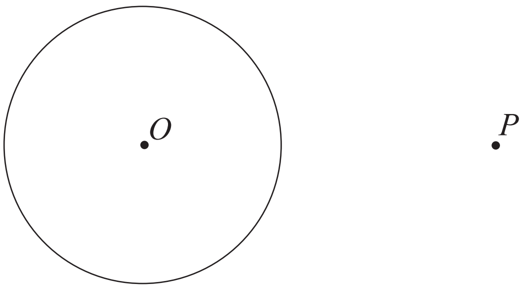


8. உருவில் தரப்பட்டுள்ள வட்டத்தில் AB ஆனது ஒரு விட்டமாவதுடன் PQ ஆனது புள்ளி B யில் வட்டத்தைத் தொடுகின்றது. AQ ஆனது வட்டத்தை R இல் சந்திக்கின்றது.
(i) $Q\hat{R}B = 90^\circ$ எனவும்
(ii) $A\hat{B}R = R\hat{Q}B$ எனவும்
நிறுவுக.

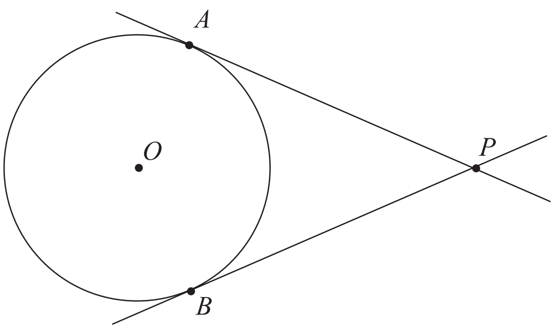


22.2 ஒரு புறப் புள்ளியிலிருந்து வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடலிகள்

O வை மையமாகடைய வட்டத்துக்குப் புறத்தே அமைந்துள்ள புள்ளி P யைக் கருதுவோம்.

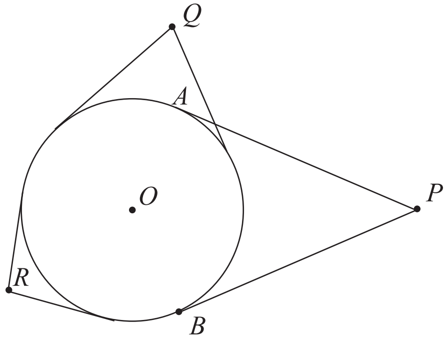


இப்புள்ளி P யிற்கூடாக வட்டத்தைத் தொடுகின்ற இரண்டு கோடுகளை வரையலாம். அவ்வாறு வரையப்பட்டுள்ள இரண்டு கோடுகள் உருவில் தரப்பட்டுள்ளன.



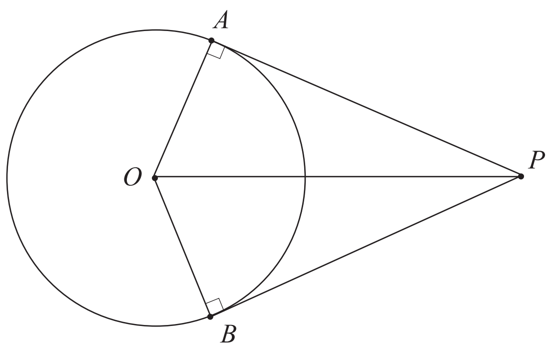
இந்த இரண்டு தொடலிகளும் புறப்புள்ளி P யிலிருந்து வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடலிகள் என அழைக்கப்படும்.

புள்ளி P ஆனது வட்டத்துக்கு புறத்தே எங்கே அமைந்திருப்பினும் இவ்வாறானத் தொடலிச் சோடியொன்றை வரைய முடியும் என்பதை விளங்கிக் கொள்க. கீழேயுள்ள உருவில் P, Q, R ஆகிய மூன்று புள்ளிகளிலிருந்து வரையப்பட்ட மூன்று சோடித் தொடலிகள் தரப்பட்டுள்ளன.



புறத்தே உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு வட்டத்துக்கு இவ்வாறு ஒரு சோடி தொடலிகளை வரையும்போது பெறப்படும் உருவிலுள்ள கேத்திரகணிதப் பண்புகளைப் பற்றி இப்போது ஆராய்வோம்.

தொடலிகள் இரண்டையும் AP, BP எனக் குறித்து ஆரைகளான OA, OB ஆகியவற்றையும் கோட்டுத் துண்டம் OP ஐயும் வரைவோம்.



மேலே பகுதி 22.1 இல் கற்றதற்கேற்பத் தொடலியும் தொடுபுள்ளியில் வரைந்த ஆரையும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை என்பதால் அது பற்றி உருவில் குறிக்கப்பட்டுள்ளது.

இவ்வுருவிலுள்ள முக்கோணிகளான OAP, OBP ஆகியவற்றை நோக்கும்போது சமச்சீரின்படி அவை ஒருங்கிசைகின்றன என்பதை ஊகிக்க முடியும். உண்மையிலேயே

அவை ஒருங்கிசைகின்ற முக்கோணி என்பதை இலகுவாக நிறுவலாம். அந்நிறுவலைச் செய்யும் முறையைப் பற்றி முதலில் விளங்கிக் கொள்வோம். அதற்கு அம்முக்கோணிகள் இரண்டும் செங்கோண முக்கோணிகள் என்பதை முதலில் அவதானிக்கவும். இதற்கேற்ப ஒரு முக்கோணியின் செம்பக்கத்தையும் இன்னொரு பக்கத்தையும் மற்றைய முக்கோணியின் செம்பக்கத்துக்கும் மற்றுமொரு பக்கத்துக்கும் சமனெனக் காட்டுவதன் மூலம் செ. ப. ப. என்ற சந்தர்ப்பத்தின் கீழ் இந்நிறுவலைச் செய்யலாம். இரண்டு முக்கோணிகளின் செம்பக்கம் OP என்னும் பொதுப் பக்கமாகும். மேலும் OA, OB என்பன ஆரைகள் என்பதால் அப்பக்கங்களும் சமனானவை ஆகும். அதற்கேற்ப இரண்டு முக்கோணிகளும் செ.ப.ப என்னும் சந்தர்ப்பத்தில் ஒருங்கிசை கின்றன. அவ்வாறு ஒருங்கிசைந்த பின்னர் ஒத்த உறுப்புகள் சமனாவதால்,

(i) $AP = BP$ ஆகும். அதாவது இரண்டு தொடலிகளும் நீளத்தில் சமனானவை.

(ii) $A\hat{P}O = B\hat{P}O$ ஆகும். அதாவது இரண்டு தொடலிகளுக்கும் இடையிலுள்ள கோணம் OP இனால் இருசமகூறிடுகின்றன.

(iii) $A\hat{O}P = B\hat{O}P$ ஆகும். அதாவது தொடலிகள் மையத்தில் சமனான கோணங்களை எதிரமைக்கின்றன.

இங்கு நாம் கரலந்துரையாடிய விடயங்கள் ஒரு தேற்றமாகக் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

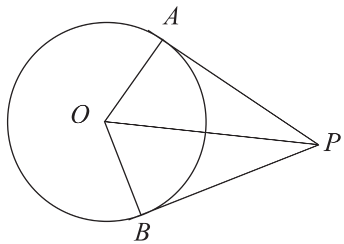
தேற்றம் : புறப் புள்ளியொன்றிலிருந்து ஒரு வட்டத்திற்கு இரண்டு தொடலிகள் வரையப்படின்

(i) இரண்டு தொடலிகளும் நீளத்தில் சமனானவை ஆகும்.

(ii) புறப் புள்ளியையும் வட்டத்தின் மையத்தையும் இணைக்கும் நேர்கோடு இரண்டு தொடலிகளுக்கும் இடையிலான கோணத்தை இருசமகூறிடும்.

(iii) தொடலிகள் மையத்தில் சமனான கோணங்களை எதிரமைக்கும்

இத்தேற்றத்தை முறையாக நிறுவும் முறையை ஆராய்வோம்.



தரவு : O வை மையமாகவுடைய வட்டதுக்குப் புறப்புள்ளி P யிலிருந்து வரையப்பட்ட தொடலிகள் முறையே A, B இல் வட்டத்தைத் தொடுகின்றன.

நிறுவ வேண்டியது :

$$\text{(i) } AP = BP$$
$$\text{(ii) } A\hat{P}O = B\hat{P}O$$
$$\text{(iii) } P\hat{O}A = P\hat{O}B$$

நிறுவல் : $O\hat{A}P = O\hat{B}P = 90^o$ (தொடலி ஆரைக்குச் செங்குத்து என்பதால்)

$\therefore$ POA, POB ஆகிய முக்கோணிகள் செங்கோண முக்கோணிகள் ஆகும்.

இனி POA, POB ஆகிய முக்கோணிகளில்

$OA = OB$ (ஒரே வட்டத்தின் ஆரைகள்)

OP பொதுப் பக்கம்.

$\therefore$ $\Delta POA \equiv \Delta POB$ (செ.ப.ப.)

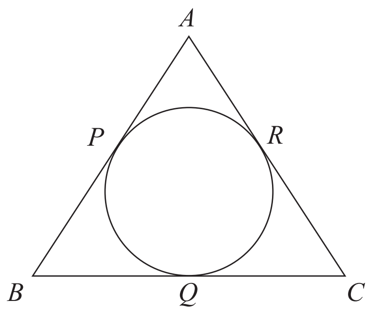
ஒருங்கிசைவான முக்கோணிகளில் ஒத்த உறுப்புகள் சமனாகும்.

$\therefore$ (i) $AP = BP$

$\therefore$ (ii) $A\hat{P}O = B\hat{P}O$

$\therefore$ (iii) $P\hat{O}A = P\hat{O}B$

உதாரணம் 1



உருவிலுள்ள வட்டத்தை முக்கோணி ABC யின் பக்கங்கள் P, Q, R ஆகிய புள்ளிகளில் தொடுகின்றன. $AB = 11$ cm, $CR = 4$ cm ஆயின் முக்கோணி ABC யின் சுற்றளவைக் காண்க.

புறப் புள்ளியொன்றிலிருந்து ஒரு வட்டதுக்கு இரண்டு தொடலிகள் வரையப்படும் போது தொடலிகள் நீளத்தில் சமனானவை ஆகும்.

$\therefore$ $AP = AR$ உம்

$BP = BQ$ உம்

$CR = CQ$ உம் ஆகும்.

முக்கோணி ABC யின் சுற்றளவு $= AB + BC + CA$

$= 11 + (BQ + QC) + (CR + RA)$

$= 11 + (BP + CR) + (4 + AP)$

$= 11 + (BP + 4) + (4 + AP)$

$= 19 + (BP + AP)$

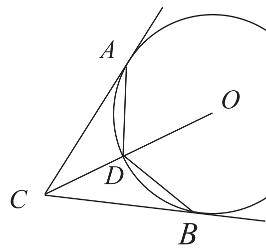
$= 19 + AB$

$= 19 + 11$

$= 30$

$\therefore$ முக்கோணி ABC யின் சுற்றளவு 30 cm ஆகும்.

உதாரணம் 2



உருவில் தரப்பட்டுள்ள வட்டத்துக்கு புறத்தே அமைந்துள்ள புள்ளி C யிலிருந்து வரையப்பட்ட தொடலிகள் A, B ஆகிய புள்ளிகளில் வட்டத்தை தொடுகின்றன. வட்டத்தின் மையம் O வையும் C யையும் இணைக்கும் கோடு D யில் வட்டத்தை வெட்டுகின்றது. $AD = BD$ எனக் காட்டுக.

ACD, BCD ஆகிய இரண்டு முக்கோணிகளையும் ஒருங்கிசையச் செய்வதன் மூலம் தேவையான விடையைப் பெறலாம்.

ACD, BCD ஆகிய முக்கோணிகளில்

$AC = BC$ (ஒரு புறப் புள்ளியிலிருந்து ஒரு வட்டத்திற்கு இரண்டு தொடலிகள் வரையப்படின் அத்தொடலிகள் நீளத்தில் சமனானவை)

$A\hat{C}O = B\hat{C}O$ (ஒரு புறப் புள்ளியிலிருந்து ஒரு வட்டத்திற்கு இரண்டு தொடலிகள் வரையப்படின் புறப் புள்ளியையும் வட்டத்தின் மையத்தையும் இணைக்கும் நேர்கோட்டினால் தொடலிகளுக்கு இடையிலான கோணம் இருசமகூறிடப்படும்.)

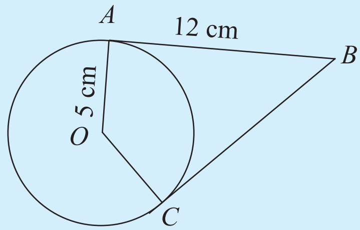
CD பொதுப்பக்கம்

$\therefore\ \Delta ACD \equiv \Delta BCD$ (ப.கோ.ப.)

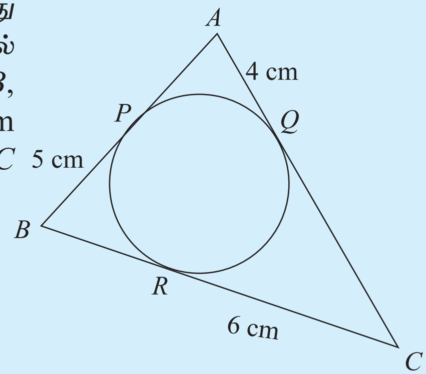
$\therefore\ AD = BD$ (ஒருங்கிசையும் முக்கோணிகளில் ஒத்த பக்கங்கள் சமன் என்பதால்)

பயிற்சி 22.2

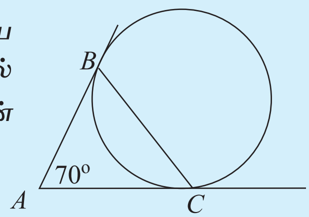
1. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்தின் மீதுள்ள A, C ஆகிய புள்ளிகளில் வரையப்பட்டுள்ள தொடலிகள் B யில் இடைவெட்டுகின்றன. வட்டத்தின் ஆரை 5 cm உம் $AB = 12$ cm உம் ஆயின் நாற்பக்கல் $ABCO$ வின் சுற்றளவைக் காண்க.



2. உருவில் தரப்பட்டுள்ள வட்டத்தின் மீது அமைந்துள்ள P, Q, R ஆகிய புள்ளிகளில் வரையப்பட்டுள்ள தொடலிகள் முறையே AB, AC, BC ஆகும். $RC = 6$ cm உம் $BP = 5$ cm உம் $AQ = 4$ cm உம் ஆகும். முக்கோணி ABC இன் சுற்றளவைக் காண்க.

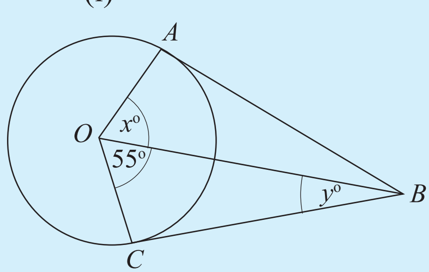


3. உருவில் தரப்பட்டுள்ள வட்டத்தின் மீதுள்ள B, C ஆகிய புள்ளிகளில் வரையப்பட்ட தொடலிகள் A இல் இடைவெட்டுகின்றன. $B\hat{A}C = 70^{o}$ ஆயின் $A\hat{B}C$ இன் பெறுமானம் காண்க.

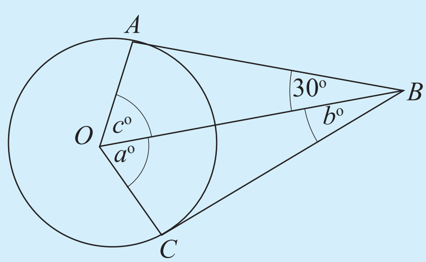


4. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு வட்டத்தினதும் மையம் O ஆகும். வட்டத்தில் உள்ள A, C ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடலிகள் புள்ளி B யில் சந்திக்கின்றன. தரப்பட்டுள்ள உருக்களில் அட்சரகணிதக் குறியீடுகளினால் காட்டப்படும் கோணங்களின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

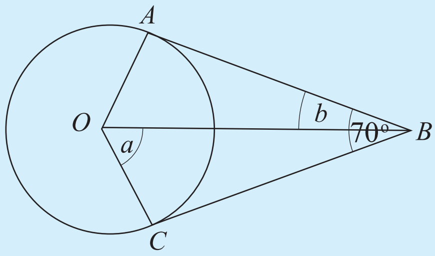
(i)



(ii)

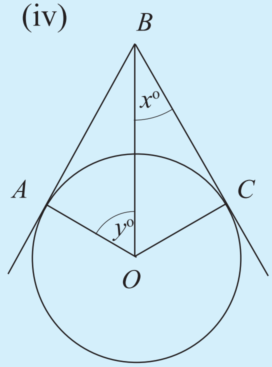


(iii)



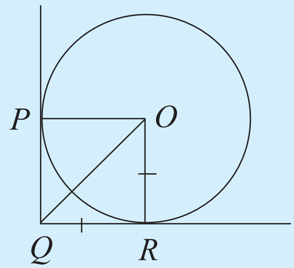
$A\hat{B}C = 70^{\circ}$

(iv)



$A\hat{O}C = 110^{\circ}$

5. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்தில் P, R ஆகிய புள்ளிகளில் வரையப்பட்டுள்ள தொடலிகள் Q வில் சந்திக்கின்றன. $QR = OR$ ஆயின் $PQRO$ என்பது ஒரு சதுரம் எனக் காட்டுக.

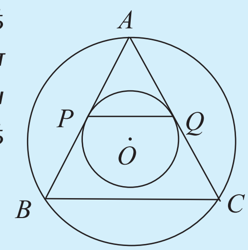


6. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்தின் A, B, C ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன. வட்டத்தின் உள்ளே O வை மையமாகக் கொண்டு அமைந்துள்ள சிறிய வட்டமானது P, Q ஆகிய புள்ளிகளில் AB, AC ஆகியவற்றைத் தொடுகின்றது.

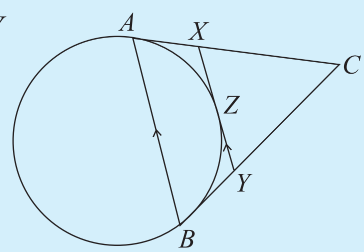
(i) APQ ஓர் இருசமபக்க முக்கோணி எனவும்

(ii) $BC \parallel PQ$ எனவும்

காட்டுக.



7. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப $XC = CY$ எனக் காட்டுக. இங்கு AC, BC, XY என்பன வட்டத்தின் தொடலிகள் ஆகும்.



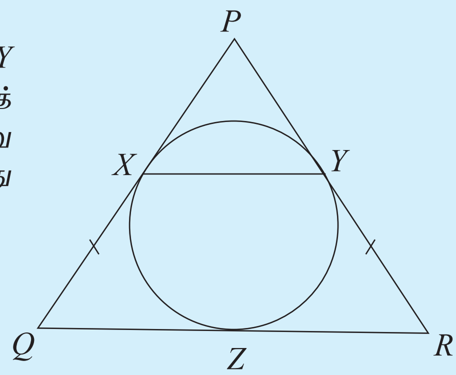
8. உருவில் தரப்பட்டுள்ள வட்டத்துக்கு P இலிருந்து வரையப்பட்ட தொடலிகள் X , Y ஆகிய புள்ளிகளில் வட்டத்தைத் தொடுகின்றன. $XQ = YR$ ஆகுமாறு வரையப்பட்ட நேர்கோடு QR ஆனது வட்டத்தை Z இல் தொடுகின்றது.

(i) $PR = PQ$ எனவும்

(ii) $QR = XQ + YR$ எனவும்

(iii) $XY \,//\, QR$ எனவும்

காட்டுக.



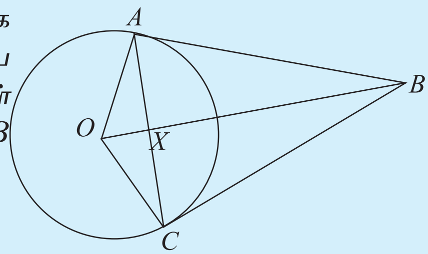
9. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாக வுடைய வட்டத்தின் மீதுள்ள A, C ஆகிய புள்ளிகளில் வரையப்பட்ட தொடலிகள் ஒன்றையொன்று B யில் சந்திக்கின்றது. OB ஆனது AC யை X இல் சந்திக்கின்றது.

(i) $\Delta OAX \equiv \Delta OCX$ எனவும்

(ii) கோடு OB ஆனது AC யின் செங்குத்து இருசமகூறாக்கி எனவும்

(iii) $A\hat{O}C = 2\,A\hat{C}B$ எனவும்

காட்டுக.

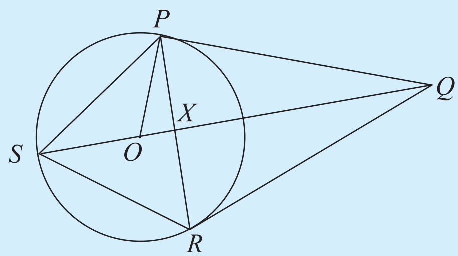


10. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்துக்கு Q விலிருந்து வரையப்பட்ட தொடலிகள் PQ, QR ஆகும். நீட்டப்பட்ட கோடு QO ஆனது வட்டத்தை S இல் சந்திக்கின்றது. PR உம் SQ வும் X இல் சந்திக்கின்றன.

(i) $\Delta PQS \equiv \Delta\, QRS$ எனவும்

(ii) $2\,O\hat{P}X = P\hat{Q}R$ எனவும்

காட்டுக.

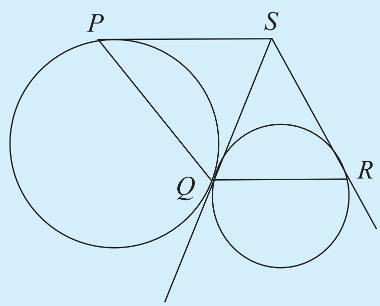


11. உருவிலுள்ள இரண்டு வட்டங்களும் Q வில் வெளிப்புறமாக தொடுகின்றன. QS ஆனது பொதுத் தொடலியாகும். S இல் இருந்து இரு வட்டங்களுக்கும் வரையப்பட்ட மற்றைய தொடலிகள் P, R இல் வட்டத்தைத் தொடுகின்றன.

(i) $PS = SR$ எனவும்

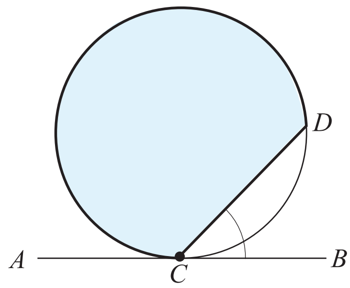
(ii) $P\hat{Q}R = S\hat{P}Q + S\hat{R}Q$ எனவும்

காட்டுக.



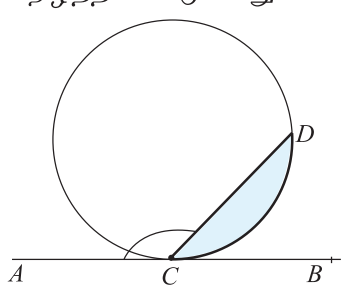
22.3 ஒன்றுவிட்ட வட்டத் துண்டக் கோணங்கள்

முதலில் ஒன்றுவிட்ட துண்டக் கோணம் என்பதால் கருதப்படுவது யாதென்பதை ஆராய்வோம். இதற்கு கீழேயுள்ள உருவின் மீது கவனத்தைச் செலுத்துவோம்.



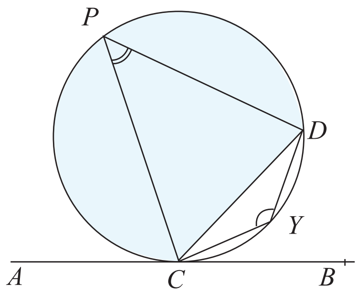
உருவிலுள்ளவாறு நேர்கோடு AB ஆனது வட்டத்தை C யில் தொடுகின்றது. CD ஒரு நாண் ஆகும். CD என்னும் நாணின் மூலம் வட்டம் இரண்டு வட்டத் துண்டங்களாப் பிரிக்கப்படுகின்றது. ஒரு துண்டம் உருவில் நீல நிறத்தினால் நிழற்றப்பட்டுள்ளப் பகுதியாகும். மற்றைய துண்டம் அவ்வாறு நிழற்றப்படாத சிறிய பகுதியாகும். தொடலி AB யின் மீது நாண் CD யினால் இரண்டு கோணங்கள் உருவாகின்றன. ஒரு கோணம் $A\hat{C}D$ ஆகும். மற்றையது $B\hat{C}D$ ஆகும். BCD கோணத்துக்கு ஒத்த, ஒன்றுவிட்ட துண்டமாக குறிப்பிடப்படுவது நீல நிறத்தினால் நிழற்றப்பட்டுள்ள வட்டத்துண்டமாகும். $B\hat{C}D$ என்னும் இக்கோணமானது அமைந்திருப்பது மற்றைய வட்டத்துண்டத்தினுள் என்பதை அவதானிக்க. அவ்வாறே கோணம் $A\hat{C}D$ இற்கு ஒத்த, ஒன்றுவிட்ட துண்டமாகக் குறிப்பிடப்படுவது நிழற்றப்படாத மற்றைய வட்டத் துண்டமாகும். $A\hat{C}D$ என்னும் அகக் கோணம் அமைந்திருப்பது மற்றைய (நீல நிறமுடைய) வட்டத் துண்டத்தில் என்பதையும் அவதானிக்க.

கீழே தரப்பட்டுள்ள உருவில் கோணம் $A\hat{C}D$ இற்கு ஒத்த ஒன்றுவிட்ட வட்டத் துண்டம் இளநீல நிறத்தினால் நிழற்றப்பட்டுள்ளது.



ஒன்றுவிட்ட வட்டத் துண்டத்தின் கோணங்கள் தொடர்பான தேற்றங்கள்

கீழே தரப்பட்டுள்ள உருவைப் பார்க்க. $C\hat{P}D$ அமைந்திருப்பது இளநீல நிறமுடைய பெரிய வட்டத் துண்டத்திலாகும். அதாவது கோணங்கள் $C\hat{P}D$, $D\hat{C}B$ ஆகியன ஒன்றுக்கொன்று எதிரான வட்டத் துண்டத்திலாகும். அதாவது கோணங்கள் $C\hat{Y}D$, $A\hat{C}D$ ஆகிய கோணங்களும் ஒன்றுக்கொன்று எதிரான வட்டத் துண்டங்களில் அமைந்துள்ளன.

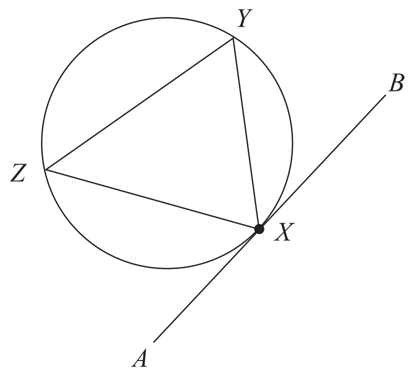


ஒரு வட்டத்தின் தொடலிகள் தொடர்பாக மிகமுக்கியமான ஒரு பேறு உண்டு. அப்பேறினால் கூறப்படுவது மேற்குறித்த உருவின்படி $D\hat{C}B$, $C\hat{P}D$ ஆகிய கோணங்கள் சமன் என்பதும் $A\hat{C}D$, $C\hat{Y}D$ ஆகிய கோணங்கள் சமன் என்பதும் ஆகும். வேறொரு விதமாகக் கூறுவதாயின் ஒரு வட்டத்தின் தொடலிக்கும் தொடு புள்ளியில் வரையப்பட்ட வட்டத்துண்டத்திலுள்ள கோணத்துக்கு அந்நாணினால் ஒன்றுவிட்ட வட்டத்துண்டத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணம் சமனாகும். இப்பேறானது மிக முக்கியமானது என்பதால் அதனை ஒரு தேற்றமாகக் கூறி நினைவில் வைத்திருப்போம்.

தேற்றம் : ஒரு வட்டத்துக்கு வரைந்த தொடலிக்கும் தொடுபுள்ளியில் வரைந்த நாணுக்கும் இடையிலுள்ள கோணம் ஒன்றுவிட்ட வட்டத் துண்டத்தில் அந்நாணினால் எதிரமைக்கப்படும் கோணத்திற்குச் சமனாகும்.

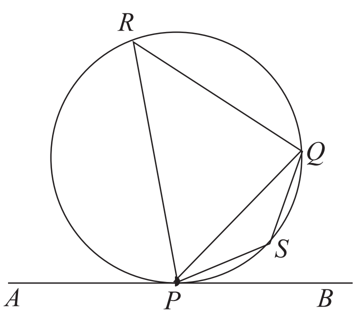
இத்தேற்றத்தின் உண்மையை உறுதிப்படுத்துவதற்காகக் கீழேயுள்ள செயற்பாடுகளில் ஈடுபடுக.

செயற்பாடு 1



- ஒரு வட்டம் வரைந்து அதன் மீது ஒரு புள்ளியைக் குறித்து அதனை X எனப் பெயரிடுக.
- புள்ளி X இல் வட்டத்தைத் தொடும் ஒரு நேர்கோட்டை வரைந்து (X இல் வட்டத்துக்கு ஓர் ஆரையை வரைந்து அதற்குச் செங்குத்தாக X இல் ஒரு நேர்கோடு வரைவதன் மூலம் இதனைச் செய்யலாம்.) அதனை AB எனப் பெயரிடுக.
- வட்டத்தின் மீது மேலும் இரண்டு புள்ளிகளைக் குறித்து அவற்றை Y, Z எனப் பெயரிடுக.
- உருவிலுள்ளவாறு X, Y, Z ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்க .
- பாகைமானியைப் பயன்படுத்தி $B\hat{X}Y$ மற்றும் அதற்கு ஒத்த, ஒன்றுவிட்ட வட்டதுண்டக் கோணமாகிய $X\hat{Z}Y$ இன் பெறுமானங்களை அளந்து அவை சமனாகின்றனவா என ஒப்பிட்டுப் பார்க்க.
- அவ்வாறே $A\hat{X}Z$ மற்றும் அதற்கு ஒத்த, ஒன்றுவிட்ட வட்டத் துண்டக் கோணமாகிய$X\hat{Y}Z$ இன் பெறுமானங்களை அளந்து அவை சமனாகின்றனவா என ஒப்பிட்டுப் பார்க்க.

செயற்பாடு 2

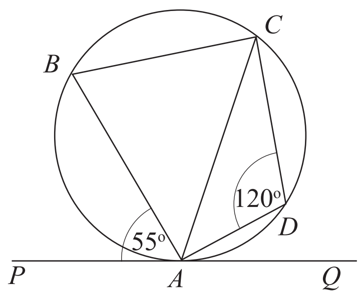


- ஒரு வட்டம் வரைந்து அதன் மீது ஒரு புள்ளியைக் குறித்து அதனை P எனப் பெயரிடுக. புள்ளி P இல் வட்டத்தைத் தொடும் ஒரு நேர்கோட்டை வரைந்து (P யில் ஓர் ஆரையை வரைந்து அதற்குச் செங்குத்தாக P யில் ஒரு கோட்டை வரைவதன் மூலம் இதனைச் செய்யலாம்) அதனை AB எனப் பெயரிடுக.

- புள்ளி P யிலிருந்து ஒரு நாணை வரைந்து அதனை PQ எனப் பெயரிடுக.
- நாண் PQ வின் இருபக்கங்களிலும் அமையுமாறு வட்டத்தின் மீது இரண்டு புள்ளிகளைக் குறித்து R, S எனப் பெயரிடுக.
- QR, QS, PS, PR ஆகிய கோட்டுத் துண்டங்களை வரைக.
- பாகைமானியைப் பயன்படுத்தி $B\hat{P}Q$ மற்றும் அதற்கு ஒத்த ஒன்றுவிட்டத் துண்டக் கோணமான $P\hat{R}Q$ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களை அளந்து அவை சமனாகின்றனவா என ஒப்பிட்டுப் பார்க்க.
- அவ்வாறே, $A\hat{P}Q$ மற்றும் அதற்கு ஒத்த ஒன்றுவிட்ட துண்டக் கோணமாகிய $P\hat{S}Q$ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களை அளந்து அவை சமனாகின்றனவா என ஒப்பிட்டுப் பார்க்க.

ஒரு வட்டத்தின் தொடலிக்கும் தொடுபுள்ளியிலுள்ள நாணுக்கும் இடையிலுள்ள கோணமானது ஒன்றுவிட்ட வட்டத் துண்டக் கோணத்துக்குச் சமனாகின்றது என்பதை மேற்குறித்த செயற்பாட்டின் மூலம் விளங்கிக் கொண்டிருப்பீர்கள்.

உதாரணம் 1



மேலே காட்டப்பட்டுள்ள உருவில் கோடு PQ ஆனது வட்டத்தை A யில் தொடுகின்றது. மேலும் B, C, D ஆகிய புள்ளிகளும் வட்டத்தில் அமைந்துள்ளன. $P\hat{A}B = 55^\circ$ யும் $A\hat{D}C = 120^\circ$ யும் ஆகும். $B\hat{A}C$ இன் பெறுமானம் காண்க.

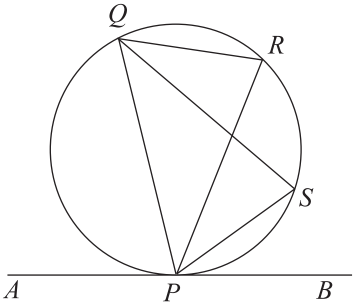
முதலில் $P\hat{A}C$ இன் பெறுமானம் காண்போம்.

$P\hat{A}C = A\hat{D}C$ (ஒன்றுவிட்ட வட்டத் துண்டக் கோணங்கள்)

$$P\hat{A}B + B\hat{A}C = 120^\circ$$
$$55^\circ + B\hat{A}C = 120^\circ$$
$$B\hat{A}C = 120^\circ - 55^\circ$$
$$= 65^\circ$$

உதாரணம் 2

நேர்கோடு AB ஆனது வட்டத்தை P யில் தொடுகின்றது. Q வும் R உம் வட்டத்தில் அமைந்துள்ளன. கோணம் $P\hat{Q}R$ இன் இருசமகூறாக்கி வட்டத்தை S இல் சந்திக்கின்றது. PS ஆனது $B\hat{P}R$ இன் இருசமகூறாக்கி எனக் காட்டுக.



$B\hat{P}S = P\hat{Q}S$ (ஒன்றுவிட்ட வட்டத் துண்டக் கோணங்கள்)

$R\hat{P}S = R\hat{Q}S$ (ஒரே துண்டக் கோணங்கள்)

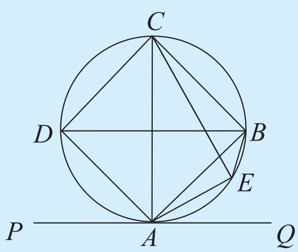
$P\hat{Q}S = R\hat{Q}S$ (தரவு QS ஆனது $P\hat{Q}R$ இல் இருசமகூறாக்கி)

$\therefore$ $B\hat{P}S = R\hat{P}S$

$\therefore$ PS ஆனது $B\hat{P}R$ இன் இருசமகூறாக்கியாகும்.

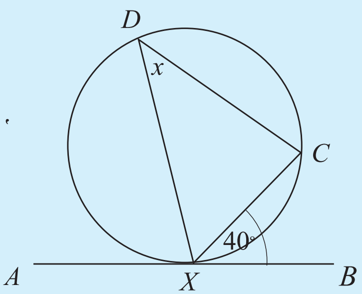
பயிற்சி 22.3

1. கோடு PQ ஆனது புள்ளி A யில் வட்டத்தைத் தொடுகின்றது. B, C, D, E ஆகிய புள்ளிகள் வட்டத்தின் மீது அமைந்துள்ளன.

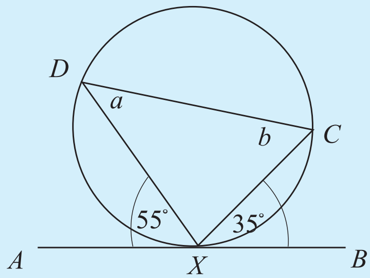


தொடலிக்கும் நாணுக்கும் இடையிலுள்ள கோணம்	ஒன்றுவிட்ட துண்டக் கோணங்கள்
$B\hat{A}Q$	....
$P\hat{A}B$	....
$P\hat{A}D$	....
$E\hat{A}Q$	....
....	$D\hat{B}A$
....	$D\hat{C}A$

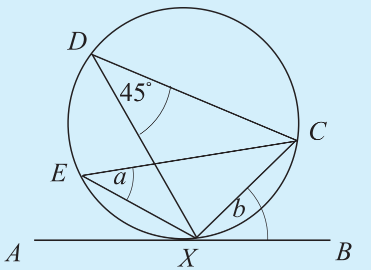
2. ஒவ்வோர் உருவிலும் AB எனக் காட்டப்படுவது புள்ளி X இல் வரையப்பட்டுள்ள தொடலி ஆகும். அட்சரகணிதக் குறியீடுகளால் தரப்பட்டுள்ளவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



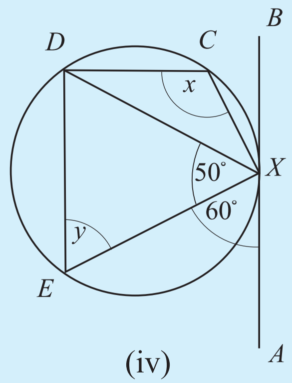
(i)



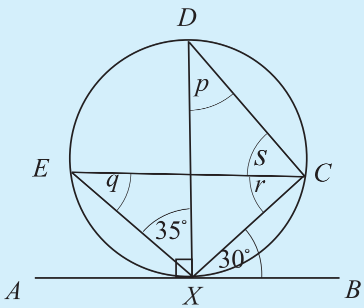
(ii)



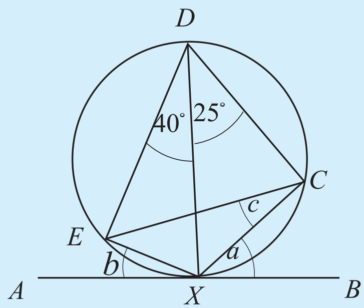
(iii)



(iv)

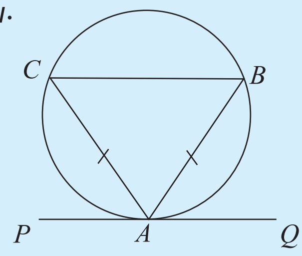


(v)



(vi)

3. PQ ஆனது வட்டத்தைப் புள்ளி A யில் தொடுக்கின்றது.
$AC = AB$ ஆயின்
(i) $C\hat{A}P = B\hat{A}Q$ எனவும்
(ii) $PQ \,//\, CB$ எனவும்
காட்டுக.



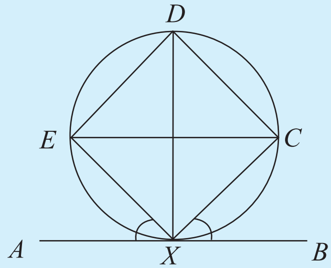
4. AB ஆனது புள்ளி X இல் வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடலி ஆகும். C, E ஆகிய புள்ளிகள் $B\hat{X}C = A\hat{X}E$ ஆகுமாறு வட்டத்தில் அமைந்துள்ளன. D என்பது வட்டத்தின் மீதுள்ள இன்னுமொரு புள்ளியாகும்.

(i) XD ஆனது $E\hat{D}C$ யின் கோண இருசமகூறாக்கி எனவும்

(ii) $EX = CX$ எனவும்

(iii) $AB \,//\, EC$ எனவும்

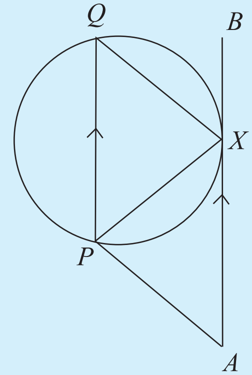
காட்டுக.



5. கோடு AB ஆனது வட்டத்தை Xஇல் தொடுகின்றது. $PQ \,//\, AB$ ஆகுமாறு நாண் PQ வரையப்பட்டுள்ளது.

(i) $B\hat{X}Q = A\hat{X}P$ என நிறுவுக.

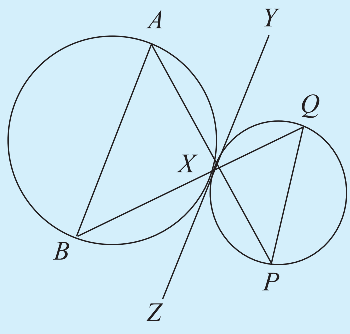
(ii) $PX = PA$ ஆயின் $AXQP$ ஓர் இணைகரம் எனக் காட்டுக.



6. இரண்டு வட்டங்கள் வெளிப் புறமாக புள்ளி X இல் தொடுகின்றன. YZ ஆனது பொதுத் தொடலி ஆகும். AB ஆனது ஒரு வட்டத்தின் நாண் ஆகும். நீட்டப்பட்ட AX, BX ஆகியவை மற்றைய வட்டத்தை முறையே P, Q என்பவற்றில் சந்திக்கின்றன.

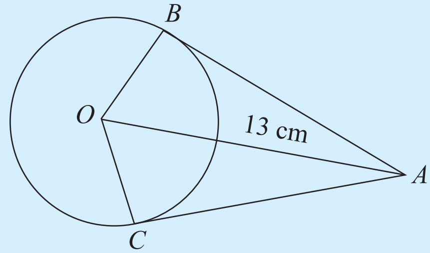
(i) $B\hat{X}Z = X\hat{P}Q$ எனக் காட்டுக.

(ii) $AB \,//\, PQ$ எனக் காட்டுக.

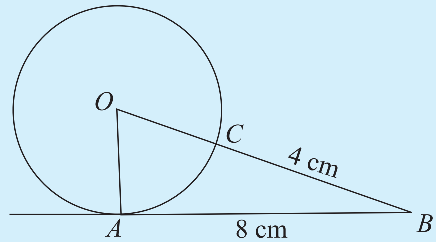


பலவினப் பயிற்சி

1. O வை மையமாகவுடைய வட்டத்துக்கு A இலிருந்து வரையப்பட்ட தொடலிகள் B, C ஆகியவற்றில் வட்டத்தைத் தொடுகின்றன. வட்டத்தின் ஆரை 5 cm, $OA = 13$ cm ஆயின் நாற்பக்கல் $OBAC$ இன் பரப்பளவைக் காண்க.



2. O வை மையமாகவுடைய வட்டத்துக்கு A இல் வரையப்பட்டுள்ள தொடலி AB ஆகும். OB ஆனது C யில் வட்டத்தை இடைவெட்டுகின்றது. $CB = 4$ cm, $AB = 8$ cm ஆகும். வட்டத்தின் ஆரையைக் காண்க.

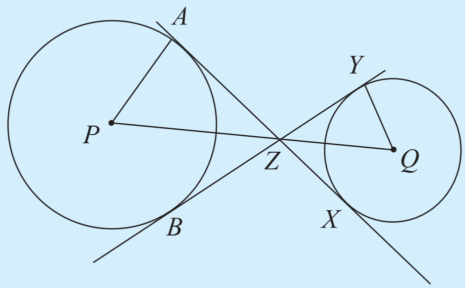


3. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள இரண்டு வட்டங்களிலும் மையங்கள் P, Q ஆகும். P யை மையமாகவுடைய பெரிய வட்டதிற்கு A, B ஆகிய புள்ளிகளுக்கூடாக வரைந்த இரண்டு தொடலிகள் சிறிய வட்டத்தை முறையே X, Y இல் தொடுகின்றது. மேலும் அவை இரண்டும் ஒன்றையொன்று Z இல் சந்திக்கின்றது எனின்

(i) $AX = BY$ எனவும்

(ii) $A\hat{P}Z = Y\hat{Q}Z$ எனவும்

நிறுவுக.



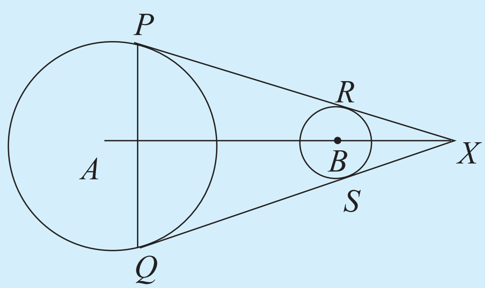
4. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தொடலிகள் PX உம் QX உம் வட்டங்களை P, R, Q, S என்னும் புள்ளிகளில் தொடுகின்றன. வட்டங்களின் மையங்கள் A, B ஆகும்.

(i) $PR = QS$ எனவும்

(ii) $PQ \parallel RS$ எனவும்

(iii) A, B, X ஒரு நேர்கோட்டில் அமைந்துள்ளன எனவும்

காட்டுக.



23 அமைப்புகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- நேர்கோடுகள், கோணங்கள் தொடர்பான அமைப்புகளை அமைப்பதற்கும்
- முக்கோணிகள் தொடர்பான வட்ட அமைப்புகளை அமைப்பதற்கும்
- வட்டத் தொடலிகளை அமைப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

23.1 நேர்கோடுகள், கோணங்கள் தொடர்பான அமைப்புகள்

இப்பாடத்தில் காணப்படும்
அமைப்புகளை வரைவதற்குப் பயன்படும் சில அமைப்புகளை இப்போது கற்போம். அவற்றை அமைப்பதற்குக் கவராயமும் நேர்விளிம்பும் மட்டும் பயன்படுத்தப்படும்.

1. ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டத்தின் செங்குத்து இருசம கூறாக்கியினை அமைத்தல்.

ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டத்தின் செங்குத்து இருசமகூறாக்கி என்பதால், நேர்கோட்டுத் துண்டத்தின் நடுப் புள்ளியினூடாக நேர்கோட்டுத் துண்டத்துக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு கருதப்படுகின்றது.

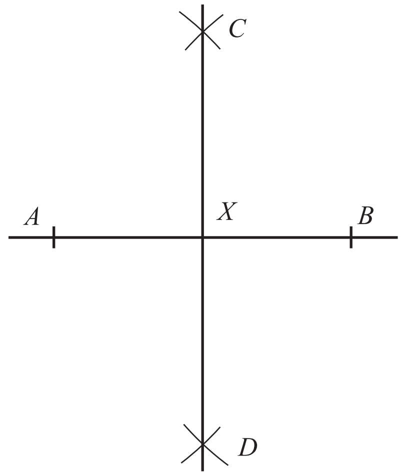
நேர்கோட்டுத் துண்டம் AB ஐக் கருதுவோம்.

படி 1: கோடு AB இன் நீளத்தில் அரைவாசியிலும் கூடிய ஓர் ஆரை பெறப்படும் வகையில் கவராயத்தைத் தயார்செய்க. புள்ளி A ஐ மையமாகக் கொண்டு நேர்கோட்டின் இரு புறமும் இரண்டு விற்களை வரைக.

படி 2: அதே ஆரையுடன் (அதாவது கவராயத்தின் இடைவெளியை மாற்றாது) புள்ளி B ஐ மையமாகக் கொண்டு, மேலே வரையப்பட்ட இரண்டு விற்களையும் வெட்டுமாறு மேலும் இரண்டு விற்களை வரைக.

படி 3: அவ்விற்கள் இடைவெட்டிய புள்ளிகளை C, D எனப் பெயரிட்டு C, D ஆகியவற்றினூடாகச் செல்லும் நேர்கோட்டை வரைக.

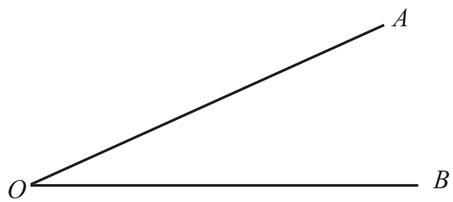
படி 4: வரைந்த நேர்கோட்டுத்துண்டம் கோடு AB ஐ இடைவெட்டும் புள்ளியை X எனப் பெயரிடுக.



CD ஆனது கோட்டுத்துண்டம் AB இன் செங்குத்து இரு சமகூறாக்கியாகும். பாகைமானியைப் பயன்படுத்தி $A\hat{X}C$, $B\hat{X}C$, $A\hat{X}D$, $B\hat{X}D$ ஆகிய கோணங்களை அளப்பதன் மூலமும் cm / mm அளவீடுடைய வரைகோல் ஒன்றைப் பயன்படுத்தி AX, BX ஆகியவற்றின் நீளங்களை அளப்பதன் மூலமும் அதனை உறுதிப்படுத்திக் கொள்க.

2. கோணமொன்றின் இருசமகூறாக்கியை அமைத்தல்.

கோணம் AOB ஐக் கருதுக.

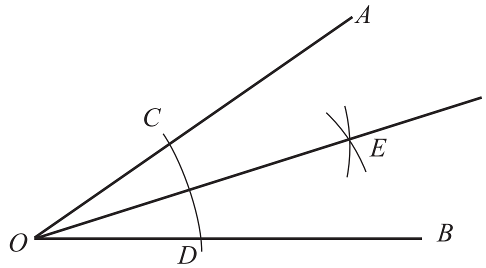


படி 1: OA, OB ஆகிய கோடுகளின் நீளத்திலும் குறைந்த ஆரை கொண்டதாக கவராயத்தை விரித்துப் பெறுக. O ஐ மையமாகக் கொண்டு OA, OB ஆகிய நேர்கோட்டுத்துண்டங்களை இடைவெட்டுமாறு ஒரு வட்ட வில் வரைக.

படி 2: வட்ட வில்லினால் OA, OB ஆகிய கோடுகள் இடைவெட்டப்படும் புள்ளிகளை முறையே C, D எனப் பெயரிடுக.

படி 3: கவராயத்தில் பொருத்தமான ஒரு தூரத்தை ஆரையாகக் கொண்டு C, D ஆகியவற்றை மையங்களாகக் கொண்டு ஒன்றையொன்று இடைவெட்டும் இரண்டு வட்ட விற்களை வரைக. வெட்டும் புள்ளியை E எனக் குறிக்க.

படி 4: O, E ஐ இணைக்க.



OE இன் மூலம் பெறப்படுவது $A\hat{O}B$ இன் கோண இருசமகூறாக்கி ஆகும். பாகை மானியைப் பயன்படுத்தி $A\hat{O}E$, $B\hat{O}E$ ஆகியவற்றை அளப்பதன் மூலம் அதனை உறுதிப்படுத்திக் கொள்க.

3. நேர்கோட்டுத் துண்டமொன்றில் அமைந்துள்ள தரப்பட்ட ஒரு புள்ளியில் ஒரு செங்குத்தை அமைத்தல்

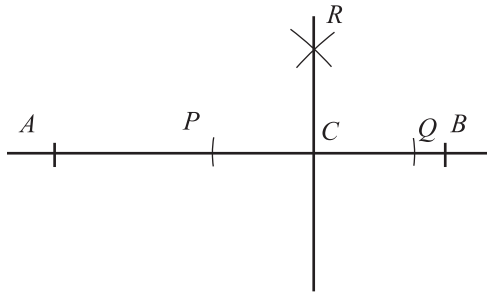
கோடு AB இன் மீதுள்ள புள்ளி C இல் ஒரு செங்குத்து வரைய வேண்டும் எனக் கொள்வோம்.

படி 1: பொருத்தமான ஓர் ஆரையை கவராயத்தில் எடுத்து புள்ளி C ஐ மையமாகக் கொண்டு புள்ளி C இன் இருபக்கங்களிலும் அமையுமாறு கோட்டுத் துண்டம் AB இன் மீது விற்களை வரைக.

படி 2: வரைந்த விற்களினால் கோட்டுத் துண்டம் AB இடைவெட்டப்படும் இடங்களை P, Q எனப் பெயரிடுக.

படி 3: P, Q ஆகிய புள்ளிகளை மையங்களாகக் கொண்டு ஒன்றையொன்று இடை வெட்டுமாறு ஒரே ஆரையை உடைய இரண்டு விற்களைக் கோட்டின் மேலே (அல்லது கீழே) வரைக.

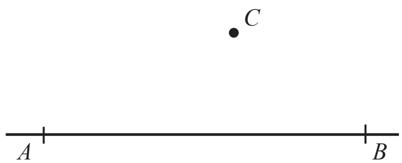
படி 4: வரைந்த இரண்டு விற்களும் இடைவெட்டும் புள்ளியை R எனப் பெயரிட்டு C, R ஆகியவற்றை இணைக்கும் நேர்கோட்டை வரைக.



CR இன் மூலம் C இல் AB இற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்து பெறப்படும். $A\hat{C}R$, $B\hat{C}R$ ஆகியவற்றின் பருமன்களை அளப்பதன் மூலம் அதனை உறுதிப்படுத்திக் கொள்க.

4. ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டத்துக்கு வெளியே அமைந்துள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அந்நேர்கோட்டுத் துண்டத்துக்கு ஒரு செங்குத்து அமைத்தல்.

தரப்பட்டுள்ள நேர்கோடு AB எனவும் வெளியே அமைந்துள்ள புள்ளி C எனவும் கொள்வோம்.

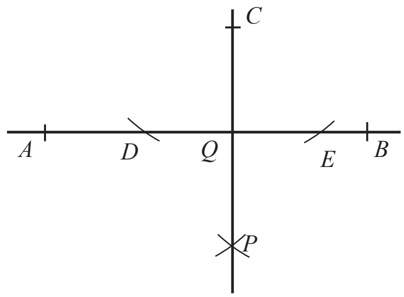


படி 1: C இலிருந்து AB இற்குள்ள தூரத்திலும் சிறிது கூடிய ஒரு தூரம் ஆரையாகப் பெறப்படுமாறு கவராயத்தை விரிக்க. C ஐ மையமாகக் கொண்டு கோட்டுத் துண்டம் AB யை இடைவெட்டுமாறு இரண்டு விற்களை வரைக.

படி 2: வரைந்த விற்களினால் கோட்டுத் துண்டம் AB ஆனது இடைவெட்டப்படும் புள்ளிகளை D, E எனப் பெயரிடுக.

படி 3: மேற்குறித்த ஆரையை (அல்லது வேறு பொருத்தமான ஆரை) கவராயத்தில் எடுத்து D, E ஆகியவற்றை மையங்களாகக் கொண்டு நேர்கோட்டுத் துண்டம் AB இற்கு C அமைந்துள்ள பக்கத்தின் எதிர்ப் பக்கத்தில் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டும் இரண்டு விற்களை வரைக.

படி 4: வரைந்த இரண்டு விற்களும் இடைவெட்டும் புள்ளியை P எனப் பெயரிட்டு CP ஐ இணைக்க. கோடு CP இனால் கோட்டுத் துண்டம் AB ஆனது இருசமகூறிடப்படும் புள்ளியை Q எனப் பெயரிடுக.



CP ஆனது புள்ளி C இலிருந்து கோட்டுத் துண்டம் AB இற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தாகும். பாகைமானியைப் பயன்படுத்தி $C\hat{Q}A$, $C\hat{Q}B$ ஆகியவற்றின் பருமன்களை அளப்பதன் மூலம் அதனை உறுதிப்படுத்துக.

பயிற்சி 23.1

1. $AB = 5.2$ cm ஆகவுள்ள கோட்டுத் துண்டம் AB இன் செங்குத்து இருசமகூறாக்கியை வரைக.

2. 90° கோணமொன்றை அமைத்து அதன் இருசமகூறாக்கியை வரைக.

3. $AB = 6$ cm, $A\hat{B}C = 60^{\circ}$, $BC = 5$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி ABC ஐ அமைக்க. AB இன் செங்குத்து இருசமகூறாக்கியையும் அமைக்க.

4. (i) $PQ = 7$ cm, $QR = 6.5$ cm, $PR = 5$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி PQR ஐ அமைக்க.
(ii) $Q\hat{P}R$, $P\hat{Q}R$ ஆகியவற்றின் இருசமகூறாக்கிகளை அமைக்க.

5. (i) $XY = 5.5$ cm ஆகவுள்ள ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டத்தை வரைக.
(ii) X இல் கோடு XY இற்கான ஒரு செங்குத்தை அமைக்க.
(iii) அச்செங்குத்தின் வழியே X இலிருந்து 4 cm தூரத்திலுள்ள Z என்னும் புள்ளியைக் குறித்து X இலிருந்து YZ இற்கு ஒரு செங்குத்தை அமைக்க.

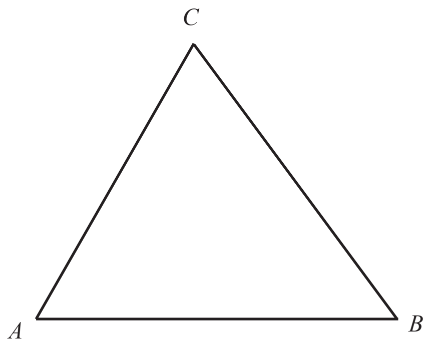
6. (i) ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 6 cm உடைய ABC என்னும் சமபக்க முக்கோணியொன்றை அமைக்க.
(ii) ஒவ்வோர் உச்சியிலிருந்தும் எதிர்ப்பக்கத்திற்குச் செங்குத்து வரைக.

23.2 முக்கோணிகள் தொடர்பான வட்ட அமைப்புகள்

ஒரு முக்கோணியின் பக்கங்களின் நீளங்களும் கோணங்களின் பருமன்களும் தரப்பட்டுள்ளபோது கவராயத்தையும் நேர்விளிம்மையும் பயன்படுத்தி முக்கோணி அமைப்புக்களைச் செய்யும் முறை பற்றி இதற்கு முன்னர் கற்றுள்ளீர்கள். இனி கவராயத்தையும் நேர்விளிம்பையும் மாத்திரம் பயன்படுத்தி முக்கோணிகள் தொடர்பான வட்ட அமைப்புகளைச் செய்யக்கூடிய மூன்று சந்தர்ப்பங்களைக் கற்போம்.

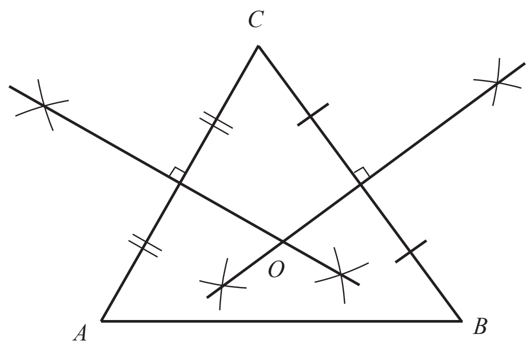
23.3 ஒரு முக்கோணியின் சுற்றுவட்டத்தை அமைத்தல்

ஒரு முக்கோணியை வரைந்து அதனை ABC எனப் பெயரிடுக.

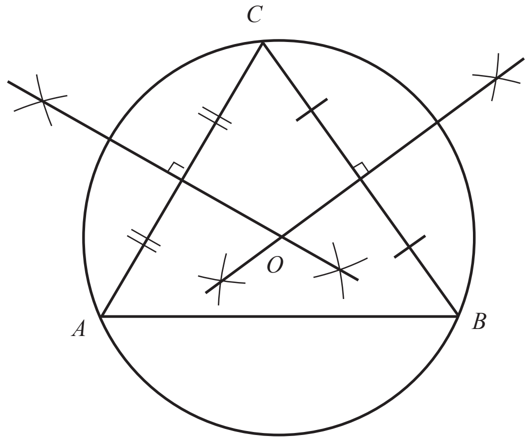


படி 1: கவராயத்தைப் பயன்படுத்தி முக்கோணி ABC இன் AB, BC, AC ஆகிய மூன்று பக்கங்களில் ஏதேனும் இரண்டு பக்கங்களின் செங்குத்து இருசமகூறாக்கிகளை அமைக்க.

படி 2: செங்குத்து இருசமகூறாக்கிகள் சந்திக்கும் புள்ளிகளை O எனப் பெயரிடுக.



படி 3: O வை மையமாகவும் O விலிருந்து யாதாயினுமோர் உச்சிக்குள்ள தூரத்தை ஆரையாகவும் கொண்டு வட்டமொன்றை வரைக.



மேலே அமைக்கப்பட்ட வட்டமானது முக்கோணி ABC யின் A, B, C ஆகிய மூன்று உச்சிகளுக்கூடாவும் செல்கிறது என்பதை காண்பீர்கள். இவ்வட்டமானது முக்கோணி ABC யின் **சுற்றுவட்டம்** எனப்படும். சுற்று வட்டத்தின் மையம் **சுற்று வட்ட மையம்** எனப்படும்.

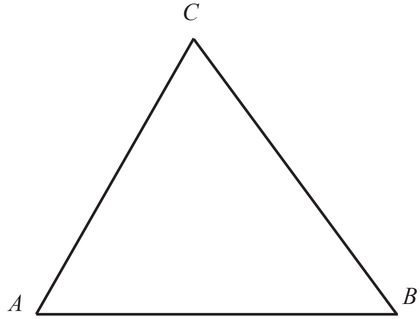
ஒரு செங்கோண முக்கோணியையும் ஒரு விரிகோண முக்கோணியையும் வரைந்து அம்முக்கோணிகளின் சுற்று வட்டங்களை அமைக்க.

அவ்வமைப்புக்களிலிருந்து கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

முக்கோணி	சுற்று வட்ட மையத்தின் அமைவிடம்		
	முக்கோணியின் உள்ளே	முக்கோணியின் ஒரு பக்கத்தின் மீது	முக்கோணியின் வெளியே
கூர்ங்கோண முக்கோணி	✓	✗	✗
செங்கோண முக்கோணி			
விரிகோண முக்கோணி			

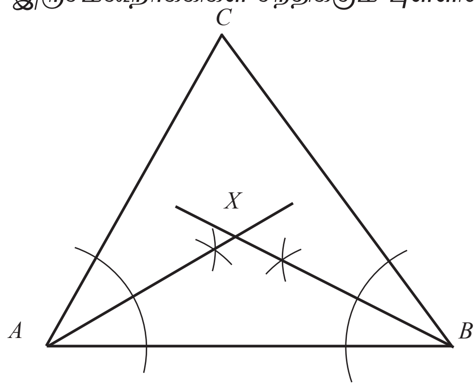
ஒரு முக்கோணியின் உள்வட்டத்தை அமைத்தல்

ஒரு முக்கோணியை வரைந்து அதனை ABC எனப் பெயரிடுக.

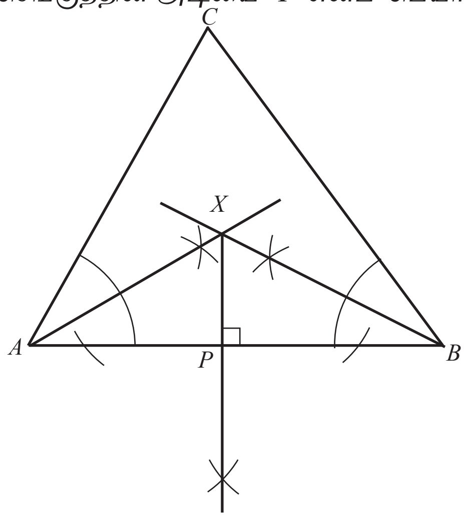


படி 1: கவராயத்தைப் பயன்படுத்தி $A\hat{B}C$, $B\hat{A}C$, $A\hat{C}B$ ஆகியவற்றில் ஏதேனும் இரண்டு கோணங்களின் இருசமகூறாக்கிகளை அமைக்க.

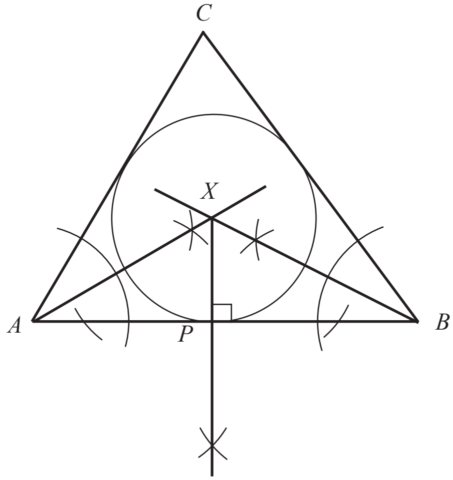
படி 2: கோணங்களின் இருசமகூறாக்கிகள் சந்திக்கும் புள்ளியை X எனப் பெயரிடுக.



படி 3: X இலிருந்து முக்கோணியின் ஏதேனும் ஒரு பக்கத்திற்குச் செங்குத்தொன்றை அமைக்க. அச்செங்குத்தின் அடியை P எனப் பெயரிடுக.



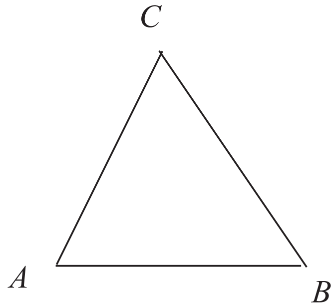
படி 4: X ஐ மையமாகக் கொண்டு XP ஐ ஆரையாகவுடைய வட்டத்தை வரைக.



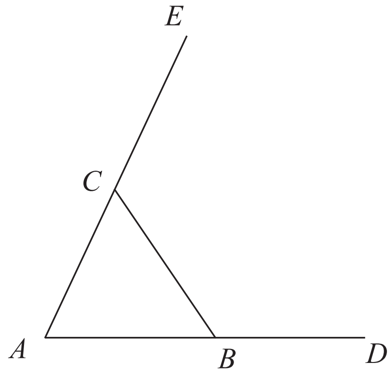
மேலே அமைத்த வட்டமானது முக்கோணியின் உள்ளே AB, BC, AC ஆகிய பக்கங்களைத் தொட்டுக் கொண்டு செல்கின்றதை நீங்கள் காண்பீர்கள். இதற்கேற்ப அவ்வட்டமானது முக்கோணி ABC இன் **உள்வட்டம்** எனப்படும். உள்வட்டத்தின் மையம் **உள்வட்ட மையம்** எனப்படும்.

ஒரு முக்கோணியின் வெளி வட்டத்தை அமைத்தல்

முக்கோணி ABC ஐக் கருதுவோம்.

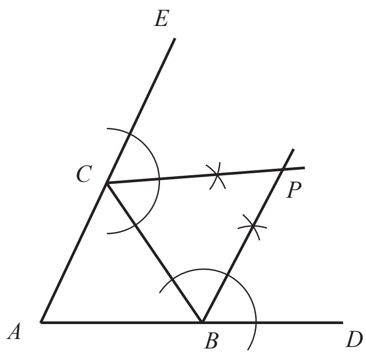


படி 1: பக்கம் AB ஐ D வரைக்கும் பக்கம் AC ஐ E வரைக்கும் நீட்டுக.

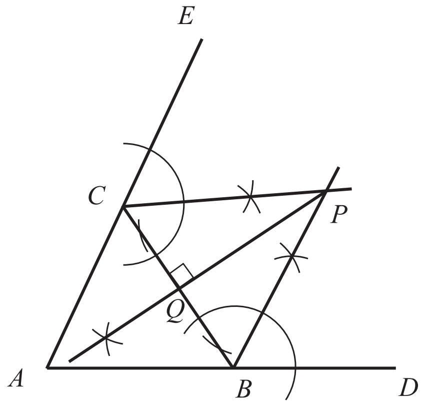


படி 2: கவராயத்தைப் பயன்படுத்தி $C\hat{B}D$, $B\hat{C}E$ ஆகிய கோணங்களின் இருசம கூறாக்கிகளை அமைக்க.

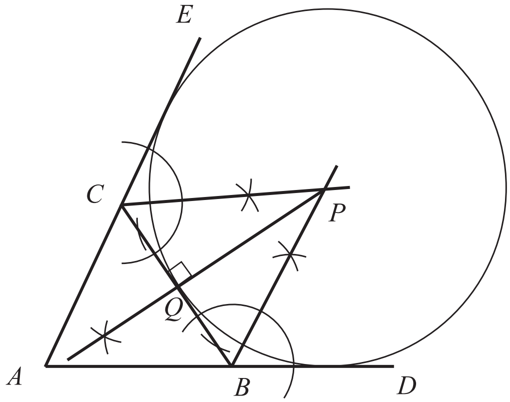
படி 3: கோணங்களின் இருசமகூறாக்கிகள் சந்திக்கும் புள்ளியை P எனப் பெயரிடுக.



படி 4: P இலிருந்து பக்கம் BC இற்கு (அல்லது கோட்டுத் துண்டங்கள் CE அல்லது BD இற்கு) ஒரு செங்குத்து அமைக்க. அச்செங்குத்தின் அடியை Q எனப் பெயரிடுக.



படி 5: P ஐ மையமாகவும் PQ ஐ ஆரையாகவும் உடைய ஒரு வட்டத்தை வரைக.



மேலே அமைத்த வட்டமானது நீட்டப்பட்ட AC, AB ஆகிய பக்கங்களையும் பக்கம் BC யை வெளிப்புறமாகவும் தொட்டுக் கொண்டு செல்கின்றது என்பதைக் காண்பீர்கள். அவ்வட்டமானது முக்கோணி ABC இன் **வெளிவட்டம்** எனப்படும். இவ்வட்டத்தின் மையம் **வெளிவட்ட மையம்** எனப்படும்.

குறிப்பு: மேற்குறித்த முக்கோணியில் நீட்டப்பட்ட CB, CA ஆகிய பக்கங்களைத் தொடும் வெளி வட்டத்தையும் நீட்டப்பட்ட BA, BC ஆகிய பக்கங்களைத் தொடும் வெளிவட்டத்தையும் அமைக்கலாம். இதற்கேற்ப, ஒரு முக்கோணிக்கு மூன்று வெளிவட்டங்கள் உள்ளன என்பதை அறிந்துகொள்க.

பயிற்சி 23.2

1. (i) $AB = 5$ cm, $BC = 4.5$ cm, $AC = 4$ cm ஆகுமாறு முக்கோணி ABC ஐ அமைக்க.

(ii) BC, AC ஆகிய பக்கங்களின் செங்குத்து இருசமகூறாக்கிகளை அமைக்க. அவை சந்திக்கும் புள்ளியை O எனப் பெயரிடுக.

(iii) முக்கோணி ABC இன் சுற்றுவட்டத்தை அமைக்க.

2. (i) $PQ = 6$ cm, $P\hat{Q}R = 90^{\circ}$, $QR = 4$ cm ஆகுமாறு முக்கோணி PQR ஐ அமைக்க.

(ii) முக்கோணி PQR இன் சுற்றுவட்டத்தை அமைக்க.

3. (i) $XY = 4.2$ cm, $Y\hat{X}Z = 120^{\circ}$, $X\hat{Y}Z = 30^{\circ}$ ஆகவுள்ள முக்கோணி XYZ ஐ அமைக்க.

(ii) முக்கோணி XYZ இன் சுற்றுவட்டத்தை அமைக்க.

(iii) சுற்று வட்டத்தின் ஆரையை அளந்து எழுதுக.

4. (i) $AB = 7$ cm, $BC = 6$ cm, $AC = 5.5$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி ABC ஐ அமைக்க.

(ii) $A\hat{B}C$, $B\hat{A}C$ ஆகிய கோணங்களின் கோண இருசமகூறாக்கிகளை அமைக்க.

(iii) கோணங்களின் இருசம கூறாக்கிகள் சந்திக்கும் புள்ளியை P எனப் பெயரிடுக.

(iv) முக்கோணி ABC இன் உள்வட்டத்தை அமைக்க.

5. (i) $KL = 6$ cm, $L\hat{K}M = 105^{o}$, $KM = 9$ cm ஆகுமாறு முக்கோணி KLM ஐ அமைக்க.

(ii) முக்கோணி KLM இன் உள் வட்டத்தை அமைத்து அதன் ஆரையை அளந்து எழுதுக.

6. (i) $CD = 5.5$ cm , $C\hat{D}E = 60^{o}$, $DE = 4$ cm ஆகுமாறு முக்கோணி CDE ஐ அமைக்க.

(ii) $DP = 2.8$ cm ஆகுமாறு பக்கம் CD ஐ P வரையும் $EQ = 2.5$ cm ஆகுமாறு CE ஐ Q வரையும் நீட்டுக.

(iii) $E\hat{D}P$, $D\hat{E}Q$ ஆகிய கோணங்களின் இருசம கூறாக்கிகளை அமைக்க அவை சந்திக்கும் புள்ளியை X எனப் பெயரிடுக.

(iv) X இலிருந்து DE இற்கு ஒரு செங்குத்தை அமைத்து அச்செங்குத்து DE ஐச் சந்திக்கும் புள்ளியை K எனப் பெயரிடுக.

(v) X ஐ மையமாகக் கொண்டு XK ஐ ஆரையாகவுடைய ஒரு வட்டத்தை அமைக்க.

7. (i) $AB = 6.2$ cm, $A\hat{B}C = 120^{o}$, $BC = 4.5$ cm ஆகவுள்ள இணைகரம் $ABCD$ யை அமைக்க.

(ii) AB, AC ஆகிய பக்கங்களை நீட்டி முக்கோணி ABC இன் வெளி வட்டத்தை அமைக்க.

(iii) வெளிவட்டத்தின் ஆரையை அளந்து எழுதுக.

23.3 ஒரு வட்டத்திற்கான தொடலியை அமைத்தல்

தொடலி தொடர்பான பாடத்தில் கற்ற வட்டத் தொடலிகள் பற்றிய இரண்டு தேற்றங்களை மீண்டும் நினைவுகூர்வோம்.

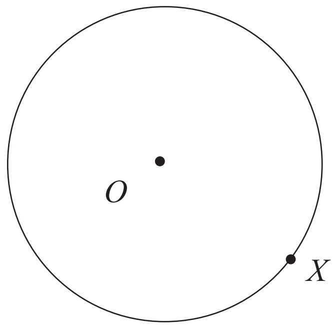
1. ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியிலுள்ள ஆரைக்குச் செங்குத்தாக வரையப்படும் நேர்கோட்டுத் துண்டம் வட்டத்தின் தொடலி ஆகும்.
2. ஒரு வட்டத்திற்கு புறப் புள்ளியொன்றிலிருந்து வரையப்படும் தொடலிகள் நீளத்தில் சமனானவை ஆகும்.

தற்போது மேற்குறித்த தேற்றங்களைப் பயன்படுத்தி வட்டத் தொடலிகளை அமைக்கும் முறையைக் கற்போம்.

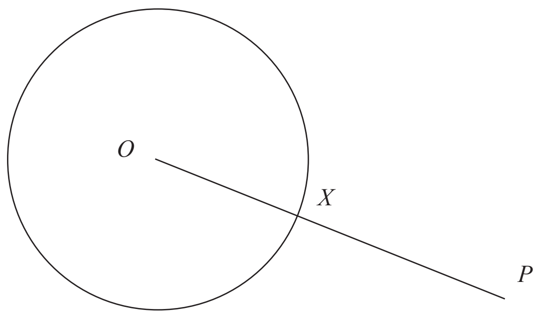
ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் ஒரு தொடலியை அமைத்தல்

இவ்வமைப்புக்காக, ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியிலுள்ள ஆரைக்குச் செங்குத்தாக வரையப்படும் நேர்கோட்டுத் துண்டம் வட்டத்தின் தொடலி ஆகும் என்னும் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துவோம்.

தரப்பட்ட வட்டத்தின் மையம் O எனவும் X எனப்படுவது வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி எனவும் கொள்வோம்.

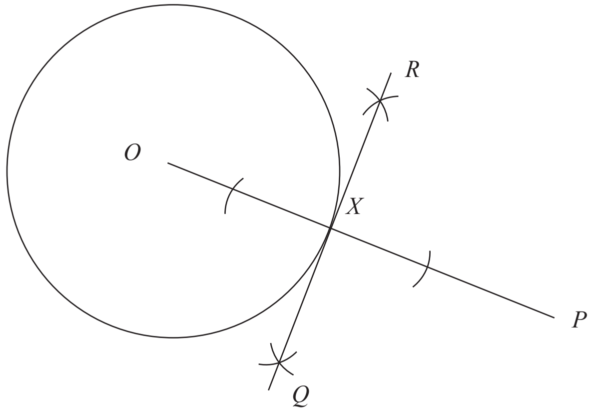


படி 1: OX ஐ இணைத்து அதனை நீட்டுக. நீட்டப்பட்ட OX இல் வட்டத்திற்கு வெளியே புள்ளி P ஐக் குறிக்க.



படி 2: கவராயத்தைப் பயன்படுத்தி X இல் கோட்டுத் துண்டம் OP இற்கு ஒரு செங்குத்தை அமைக்க. இதற்கு, ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் ஒரு செங்குத்து அமைக்கும் முறை பற்றி நீங்கள் கற்ற விடயங்களைப் பயன்படுத்துக.

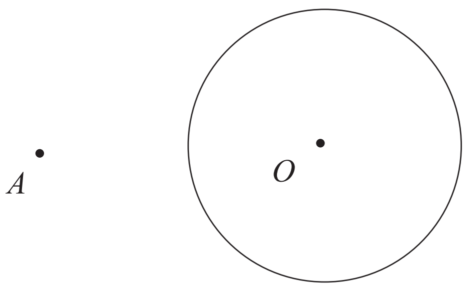
படி 3: அச்செங்குத்தை RQ எனப் பெயரிடுக.



வட்டத்திற்கு X இல் வரைந்த தொடலி RQ ஆகும்.

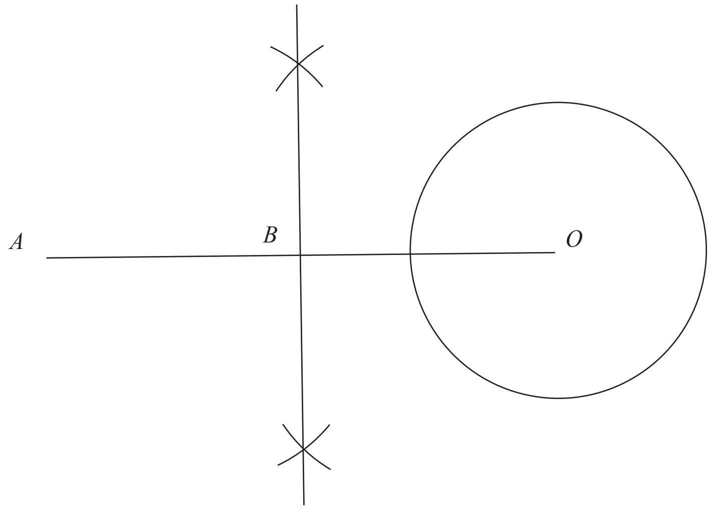
புறப்புள்ளியொன்றிலிருந்து ஒரு வட்டத்திற்குத் தொடலிகளை அமைத்தல்

தரப்பட்டுள்ள வட்டத்தின் மையம் O எனவும் வட்டத்துக்கு வெளியே அமைந்துள்ள ஒரு புள்ளி A எனவும் கொள்வோம்.



இவ்வமைப்பைச் செய்வதற்கு "ஒரு வட்டத்தின் புறத்தே உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடலிகள் நீளத்தில் சமனானவை" என்னும் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துவோம்.

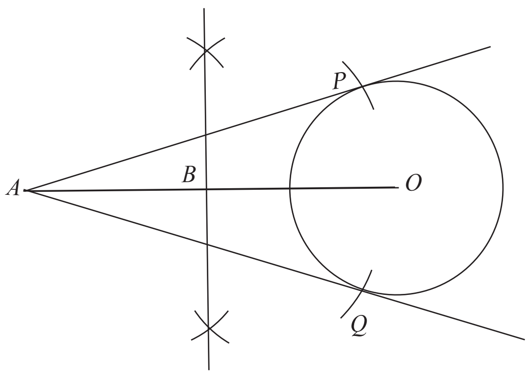
படி 1: கோடு OA ஐ வரைந்து கோட்டுத் துண்டம் OA இன் செங்குத்து இருசமகூறாக்கியை அமைத்து அது OA ஐ இடைவெட்டும் புள்ளியை B எனப் பெயரிடுக. இதற்கு ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டத்தின் செங்குத்து இருசமகூறாக்கியை அமைக்கும் முறை பற்றி நீங்கள் கற்ற விடயங்களைப் பயன்படுத்துக.



படி 2: B யை மையமாகக் கொண்டு BO (அல்லது BA) ஆரையுடைய இரண்டு விற்களை வட்டத்தின் மீது வரைக.

படி 3: தரப்பட்டுள்ள வட்டமும் விற்களும் இடைவெட்டும் இரண்டு புள்ளிகளைப் P, Q எனப் பெயரிடுக.

படி 4: AP, AQ ஆகிய கோடுகளை வரைக.



AP, AQ ஆகியவற்றின் மூலம் O வை மையமாகவுடைய வட்டத் தொடலிகள் பெறப்படுகின்றன. பாகைமானியைப் பயன்படுத்தி $A\hat{P}O$, $A\hat{Q}O$ ஆகியவற்றை அளந்து அவை 90^{o} வீதம் உள்ளது என்பதை உறுதிப்படுத்திக் கொள்க.

பயிற்சி 23.3

1. 3 cm ஆரையையுடைய ஒரு வட்டம் வரைக. வட்டத்தின் மீது A என்னும் புள்ளியைக் குறிக்க. A இல் வட்டத்துக்கு ஒரு தொடலியை அமைக்க.

2. (i) 3.5 cm ஆரையுடைய ஒரு வட்டம் வரைந்து அதன் மையத்தை O எனப் பெயரிடுக. வட்டத்தின் மீது P என்னும் ஒரு புள்ளியைக் குறித்து P இல் ஒரு தொடலியை அமைக்க.
   (ii) தொடலியின் மீது $PQ = 5$ cm ஆகுமாறு புள்ளி Q ஐக் குறிக்க.
   (iii) OQ இன் நீளத்தை அளந்து எழுதுக.
   (iv) பைதகரசின் தேற்றத்திலிருந்து OQ இன் நீளத்தைக் கணித்து நீங்கள் பெற்ற விடையின் செவ்வைத் தன்மையை ஆராய்க.

3. (i) ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 5 cm ஆகவுள்ள சமபக்க முக்கோணி ABC ஐ அமைக்க.
   (ii) கோடு AB ஐ B இல் தொடுவதும் C யினூடாகச் செல்வதுமான வட்டத்தை அமைக்க.
   (iii) அவ்வட்டத்தின் ஆரையை அளந்து எழுதுக.

4. (i) ஆரை 2.8 cm ஆகவும் O வை மையமாகவும் உடைய வட்டத்தை அமைக்க.
   (ii) வட்டத்தின் மீது A என்னும் ஒரு புள்ளியைக் குறித்து OA ஐ இணைக்க. நீட்டப்பட்ட OA யின் மீது $OB = 5$ cm ஆகுமாறு புள்ளி B ஐக் குறிக்க.
   (iii) B யிலிருந்து வட்டத்திற்குத் தொடலிகளை அமைக்க.
   (iv) தொடலிகளின் நீளங்களை அளந்து எழுதுக.

5. (i) $AB = 5$ cm, $AC = 3$ cm, $B\hat{A}C = 90^{\circ}$ ஆகுமாறு முக்கோணி ABC ஐ அமைக்க.
   (ii) முக்கோணி ABC இன் சுற்றுவட்டத்தை அமைக்க.
   (iii) மேற்குறித்த வட்டத்துக்கு A யிலிருந்து ஒரு தொடலி வரைக.
   (iv) A யில் அமைத்த தொடலியும் நீட்டப்பட்ட BC யும் சந்திக்கும் புள்ளியை P எனப் பெயரிடுக.
   (v) P யிலிருந்து வட்டதுக்கு வேறொரு தொடலியை அமைக்க.

6. (i) $KL = 9$ cm, $K\hat{L}M = 90^{\circ}$, $LM = 4$ cm ஆகுமாறு முக்கோணி KLM ஐ அமைக்க.
   (ii) $K\hat{M}L$ இன் கோண இருசமகூறாக்கியை அமைக்க. அது கோடு KL ஐ சந்திக்கும் புள்ளியை O எனப் பெயரிடுக.
   (iii) O வை மையமாகவும் OL ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டத்தை அமைக்க.
   (iv) $ML = MT$ ஆகுமாறு புள்ளி T யை KM இன் மீது குறிக்க.
   (v) $O\hat{T}M$ இன் பெறுமானம் காண்க.
   (vi) K இலிருந்து வட்டதுக்கு வேோறொரு தொடலியை அமைக்க.

பலவினப் பயிற்சி

1. (i) $AB = 6$ cm, $A\hat{B}C = 45^{\circ}$, $AC = 4$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி ABC யை அமைக்க.

(ii) A யினூடாக BC யிற்குச் சமாந்தரக் கோடொன்றை அமைக்க.

(iii) அச்சமாந்தரக் கோட்டின் மீது மையத்தை உடையதும் A, B ஆகிய புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்வதுமான வட்டத்தை அமைக்க.

2. (i) $PQ = 7$ cm, $P\hat{Q}R = 120^{\circ}$, $QR = 4.5$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி PQR ஐ அமைக்க.

(ii) $PQRS$ ஓர் இணைகரமாகும் வகையில் புள்ளி S ஐக் காண்க.

(iii) மூலைவிட்டம் QS ஐ வரைக.

(iv) முக்கோணி PQS இன் சுற்றுவட்டத்தை அமைக்க.

(v) முக்கோணி QRS இன் உள்வட்டத்தை அமைக்க.

3. $PQ = 4.8$ cm, $P\hat{Q}R = 90^{\circ}$, $QR = 6.5$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி PQR ஐ அமைக்க. பக்கம் PQ வை P இல் தொட்டுக்கொண்டு பக்கம் QR ஐயும் தொடும் ஒரு வட்டத்தை வரைக.

24 தொடைகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- மூன்று தொடைகள் காட்டப்பட்டுள்ள ஒரு வென் வரிப்படத்துக்குரிய தொடைப் பிரதேசங்களை இனங்காண்பதற்கும்
- அப்பிரதேசங்களைத் தொடைக் குறிப்பீட்டில் காட்டுவதற்கும்
- மூன்று தொடைகளைக் கொண்டு வகைகுறிக்கத்தக்க பிரசினங்களை வென் வரிப்படங்களைப் பயன்படுத்தித் தீர்ப்பதற்கும்

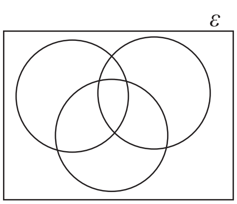
தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

வென் வரிப்படங்கள்

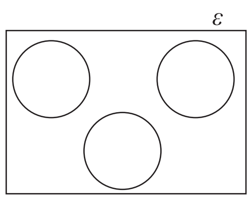
இரு தொடைகள் காட்டப்பட்டுள்ள வென் வரிப்படங்களுக்குரிய பிரதேசங்களை இனங்காண்பதையும் வென் வரிப்படத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ள ஒரு பிரதேசத்தினால் வகைகுறிக்கப்படும் தொடைகளைத் தொடைக் குறிப்பீட்டில் எழுதிக் காட்டுவதையும் பற்றி நீங்கள் தரம் 10 இல் கற்றுள்ளீர்கள். மூன்று தொடைகளையும் ஒரு வென் வரிப்படத்தில் வகைகுறிக்கலாம். இதற்கேற்ப ஒரு வென் வரிப்படத்தில் மூன்று தொடைகள் வகைகுறிக்கப்படும் விதம் பற்றி ஆராய்வோம்.

A, B, C என்பன வெறும் தொடை அல்லாத மூன்று தொடைகளெனின், அத்தொடைகள் ஒரு வென் வரிப்படத்தில் இருக்கத்தக்க சில சந்தர்ப்பங்கள் கீழே காணப்படுகின்றன.

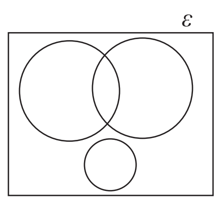
(i)



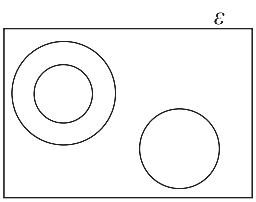
(ii)



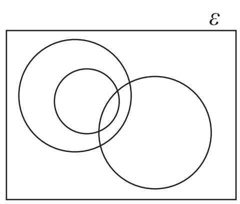
(iii)



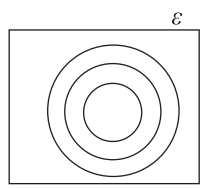
(iv)



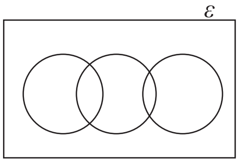
(v)



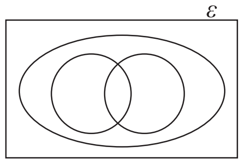
(vi)



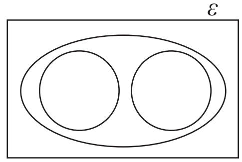
(vii)



(viii)

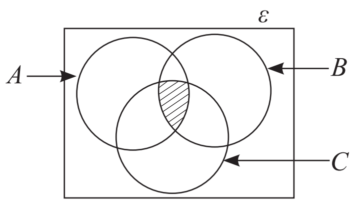


(ix)

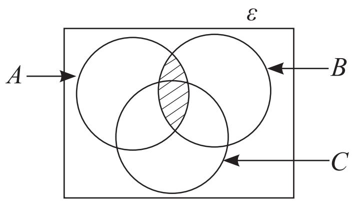


24.1 வென் வரிப்படத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ள பிரதேசத்தினால் வகைகுறிக்கப்படும் தொடைகளைத் தொடைக் குறிப்பீட்டினால் காட்டல்

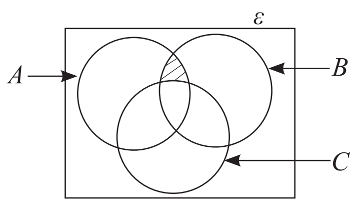
A, B, C என்பன வெறும் தொடை அல்லாத மூன்று தொடைகளாக இருக்கும்போது அவற்றை ஒரு வென் வரிப்படத்தில் காட்டி அதில் குறிக்கப்பட்டுள்ள பிரதேசங்களின் மூலம் வகைகுறிக்கப்படும் தொடைகளைத் தொடைக் குறிப்பீட்டில் காட்டுவோம். இதற்காகத் தொடைகளின் ஒன்றிப்பு, தொடைகளின் இடைவெட்டு, நிரப்பித் தொடை ஆகியன பயன்படுத்தப்படும்.



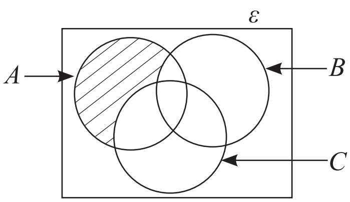
$A\cap B\cap C$



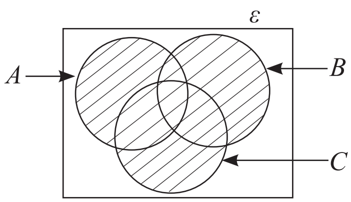
$A\cap B$



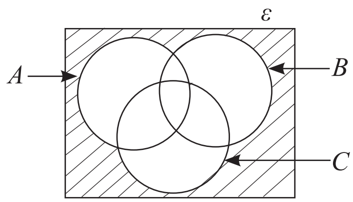
$(A\cap B)\cap C'$



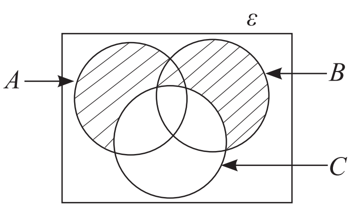
$A\cap(B\cup C)'$



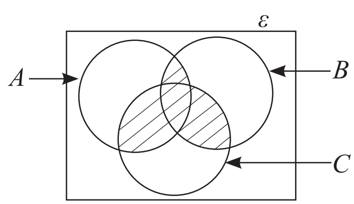
$A\cup B\cup C$



$(A\cup B\cup C)'$



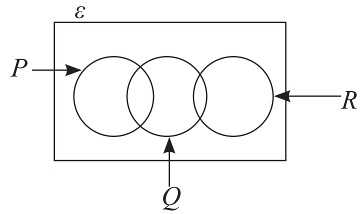
$(A\cup B)\cap C'$



$(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$

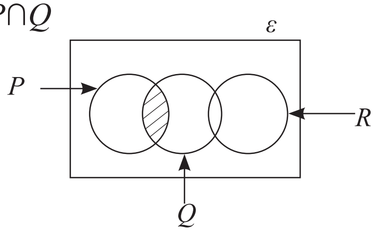
உதாரணம் 1

இவ்வென் வரிப்படத்திற்கேற்பப் பின்வரும் குறிப்பீடுகள் ஒவ்வொன்றிலும் காட்டப்பட்டுள்ள தொடைகளில் வகைகுறிக்கப்படும் பிரதேசத்தை நிழற்றுக.

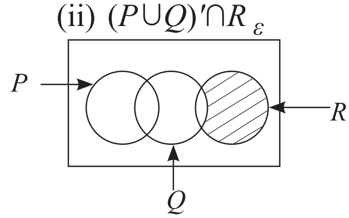


(i) $P\cap Q$ (ii) $(P\cup Q)'\cap R$ (iii) $(P\cup R)'\cap Q$ (iv) $(P\cup Q\cup R)'$

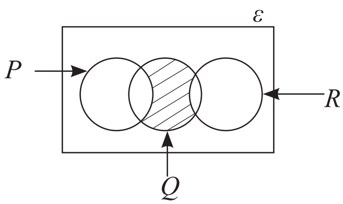
(i) $P\cap Q$



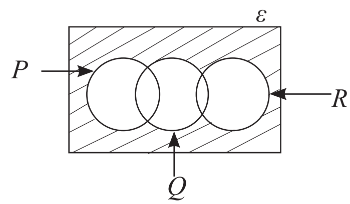
(ii) $(P\cup Q)'\cap R$



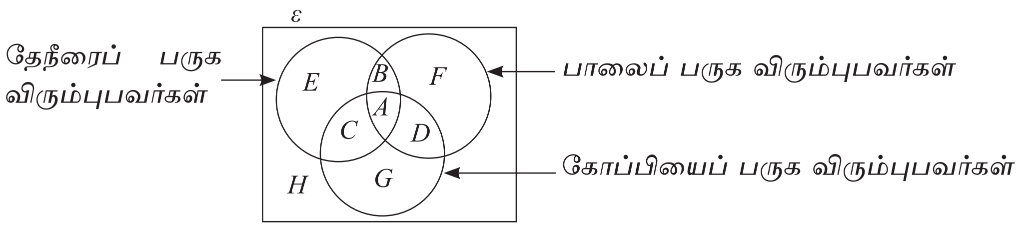
(iii) $(P\cup R)'\cap Q$



(iv) $(P\cup Q\cup R)'$



மாணவர் குழு ஒன்று விரும்பும் ஒரு பானம் பற்றிய தகவல்கள் பின்வரும் வென் வரிப்படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளன.



மேற்குறித்த வென் வரிப்படத்தைக் கொண்டு ஒவ்வோர் ஆங்கில எழுத்தினாலும் வகைகுறிப்படும் பிரதேசங்கள் உரித்தாவன,

A - தேநீர், கோப்பி, பால் ஆகிய மூன்று வகைகளையும் பருக விரும்புபவர்கள்.

B - தேநீர், பால் ஆகியவற்றை மாத்திரம் பருக விரும்புபவர்கள் (தேநீர், பால் ஆகியவற்றை பருக விரும்பும், ஆனால் கோப்பியைப் பருக விரும்பாதவர்கள்)

C - தேநீரையும் கோப்பியையும் மாத்திரம் பருக விரும்புபவர்கள்.

D - பால், கோப்பி ஆகியவற்றை மாத்திரம் பருக விரும்புபவர்கள்.

E - தேநீரை மாத்திரம் பருக விரும்புபவர்கள்.
F - பாலை மாத்திரம் பருக விரும்புபவர்கள்.
G - கோப்பியை மாத்திரம் பருக விரும்புபவர்கள்.
H - மேற்குறித்த மூன்று பானங்களில் எவற்றையும் பருக விரும்பாதவர்கள்.

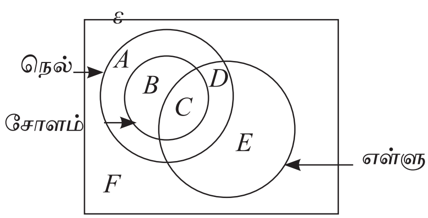
மேலும் மேற்குறித்த பிரதேசங்கள் சிலவற்றை சேர்ந்து எடுக்கும்போது அப்பிரதேசங்களின் மூலம் காட்டப்படும் சில தொடைகளை விபரிப்போம்.

A யும் B யும் – தேநீர், பால் ஆகிவற்றை பருக விரும்புபவர்கள்
B யும் C யும் D யும் – மேற்குறித்தவற்றில் இரு பானங்களை மாத்திரம் பருக விரும்புபவர்கள்
A யும் B யும்C யும் D யும் – மேற்குறித்த பானங்களில் குறைந்தது இரண்டையேனும் பருக விரும்புபவர்கள்
A யும் B யும் C யும் E யும் – தேநீரைப் பருக விரும்புபவர்கள்.
E யும் F வும் G யும் – இவற்றில் ஏதாவது ஒன்றை மட்டும் பருக விரும்புபவர்கள்.

உதாரணம் 2

விவசாயிகள் குழு ஒன்று பயிரிட்ட பயிர்கள் பற்றிய தகவல்கள் பின்வரும் வரிப்படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளன. அதில் ஆங்கில எழுத்துக்களின் மூலம் வகைகுறிக்கப்படும் பிரதேசங்களின் மூலம் காட்டப்படும் தொடைகளைச் சொற்களில் விபரிக்க. அத்துடன் கீழே காட்டப்பட்டுள்ள தொடைப் பிரிவுகளை விபரிக்க.

(i) B யும் C யும்
(ii) C யும் D யும்
(iii) A யும் D யும் E யும்



A - நெல்லை மாத்திரம் பயிரிடும் விவசாயிகள்
B - நெல், சோளம் ஆகியவற்றை மாத்திரம் பயிரிடும் விவசாயிகள்
C - நெல், சோளம், எள்ளு ஆகிய மூன்றையும் பயிரிடும் விவசாயிகள்
D - நெல், எள்ளு ஆகியவற்றை மாத்திரம் பயிரிடும் விவசாயிகள்
E - எள்ளை மாத்திரம் பயிரிடும் விவசாயிகள்
F - மேற்குறித்த மூன்று பயிர்களில் எவற்றையும் பயிரிடாத விவசாயிகள்.

அத்தடன்

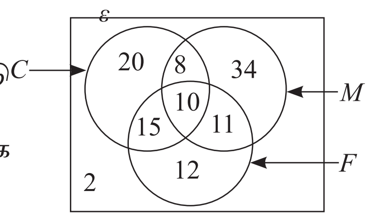
(i) B யும் C யும் - சோளத்தை பயிரிடும் விவசாயிகள்
(ii) C யும் D யும் - நெல்லையும் எள்ளையும் பயிரிடுவோர்கள்
(iii) A யும் D யும் E யும் - சோளம் தவிர்ந்த குறைந்தது ஒரு பயிரையாவது பயிரிடுபவர்கள்

உதாரணம் 3

ε = {வீடமைப்புத் திட்டம் ஒன்றில் உள்ள வீடுகள்}
C = {கார்கள் உள்ள வீடுகள் }
M = {மோட்டார் சைக்கிள்கள் உள்ள வீடுகள்}
F = {சைக்கிள்கள் உள்ள வீடுகள்}

மேற்குறித்த தொடைகள் பின்வரும் வென் வரிப்படத்தில் வகைகுறிக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு பிரதேசத்தினாலும் வகைகுறிக்கப்படும் தொடைகளின் மூலகங்களின் எண்ணிக்கைகள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.

இவ்வீடமைப்புத் திட்டத்தில்,



(i) கார் உள்ள வீடுகளின் எண்ணிக்கை யாது ?
(ii) மோட்டார் சைக்கிள் **மாத்திரம்** இருக்கும் வீடுகளின் எண்ணிக்கை யாது ?
(iii) சைக்கிள்கள் இல்லாத வீடுகளின் எண்ணிக்கை யாது ?
(iv) இரு வகை வாகனங்கள் மாத்திரம் இருக்கும் வீடுகளின் எண்ணிக்கை யாது ?
(v) இரு வகை வாகனங்களேனும் இருக்கும் வீடுகளின் எண்ணிக்கை யாது ?
(vi) ஒரு வகை வாகனம் மாத்திரம் இருக்கும் வீடுகளின் எண்ணிக்கை யாது ?

விடைகள்

(i) கார்கள் உள்ள வீடுகள் தொடை C யினால் குறித்துக் காட்டப்பட்டுள்ளது. ஆகவே C யில் உள்ள மூலகங்களின் மொத்த எண்ணிக்கையைக் காண்பதன்மூலம் கார் உள்ள வீடுகளின் எண்ணிக்கையைக் காணலாம்.
$\therefore$ கார் உள்ள வீடுகளின் எண்ணிக்கை $= 20 + 8 + 10 + 15 = 53$.

(ii) மோட்டார் சைக்கிள் உள்ள வீடுகள் தொடை M இனால் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. மோட்டார் சைக்கிள் **மாத்திரம்** உள்ள வீடுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்பதற்கு மோட்டார் சைக்கிள்களுடன் கார்கள் அடங்கும் பகுதியையும் சைக்கிள்கள் உள்ள பகுதியையும் தவிர்க்க வேண்டும். எனவே
$\therefore$ மோட்டார் சைக்கிள்கள் மட்டும் உள்ள வீடுகளின் எண்ணிக்கை $= 34$

(iii) சைக்கிள்கள் இல்லாத வீடுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்பதற்கு சைக்கிள்கள் உள்ள வீட்டைக் குறிக்கும் தொடை F இற்குரிய பகுதி தவிர்ந்த பகுதியில் உள்ள வீடுகளின் மொத்த எண்ணிக்கையைக் காண வேண்டும்.
$\therefore$ சைக்கிள்கள் இல்லாத வீடுகளின் எண்ணிக்கை $= 20 + 8 + 34 + 2 = 64$.

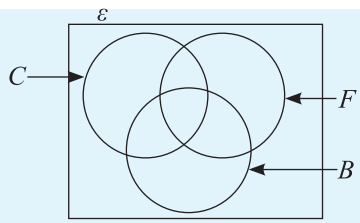
(iv) இரண்டு வகை வாகனங்கள் மட்டும் உள்ள பகுதிகளை காரும் மோட்டார் சைக்கிளும் சைக்கிளும் மோட்டார் சைக்கிளும் மாத்திரம் உள்ள பகுதிகளைக் கூட்ட வேண்டும்.
$\therefore$ இரண்டு வாகனங்கள் மாத்திரம் உள்ள வீடுகளின் எண்ணிக்கை $15 + 8 + 11 = 34$.

(v) இருவகை வாகனங்களேனும் உள்ள வீடுகளின் எண்ணிக்கை காண மேலே (iv) பெற்ற விடையுடன் மூன்று வாகனங்களும் உள்ள வீடுகளின் எண்ணிக்கையைக் கூட்ட வேண்டும். $34 + 10 = 44$.

(vi) ஒரு வகை வாகனம் மட்டும் உள்ள வீடுகளின் எண்ணிக்கையைக் காணத் தனித்தனியே ஒரு வாகனம் உள்ள பகுதிகளைக் கூட்டுவோம். $20 + 34 + 12 = 66$.

பயிற்சி 24.1

1. ஒரு பாடசாலையில் இருக்கும் மாணவர் குழு ஒன்றிடம் அவர்கள் விரும்பும் விளையாட்டுக்கள் தொடர்பில் பெற்ற தகவல்கள் பின்வரும் வென் வரிப் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளன.

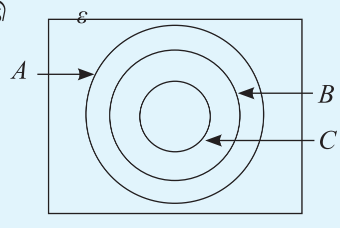


C = {கிறிக்கெற்றை விளையாட விரும்பும் மாணவர்கள்}
F = {உதைப்பந்தை விளையாட விரும்பும் மாணவர்கள்}
B = {கூடைப் பந்தாட்டத்தை விளையாட விரும்பும் மாணவர்கள்}

இவ்வென் வரிப்படத்தைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் குறிப்பீடுகள் ஒவ்வொன்றினாலும் காட்டப்பட்டுள்ள தொடைகளை வகைகுறிக்கும் பிரதேசத்தை நிழற்றிக் காட்டி அவற்றைச் சொற்களில் விபரித்து எழுதுக.

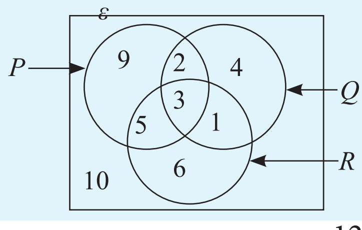
(i) $B\cap C\cap F$ (ii) $(C\cap F)\cap B'$ (iii) $(B\cup C)'\cap F$ (iv) $(B\cup C\cup F)'$

2. இவ்வென் வரிப்படத்தின் மாதிரியைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் குறிப்பீடுகள் ஒவ்வொன்றிலும் காட்டப்படும் தொடைப் பிரதேசங்களை தரப்பட்டுள்ள வென்வரிப்படத்தில் குறித்துக் காட்டுக.



(i) $A\cap B\cap C$ (ii) $B\cap C'$ (iii) $A\cap(B\cup C)'$
(iv) $(A\cup B\cup C)'$

3. இவ்வென் வரிப்படத்திற்கேற்பப் பின்வருவனவற்றைக் காண்க.



(i) $n\,(P\cap Q\cap R)$ (ii) $n\,(Q\cup R)'$
(iii) $n\,[(P\cap Q)\cap R')]$ (iv) $n\,[(Q\cup R)'\cap P]$
(v) $n\,(P\cup Q\cup R)'$

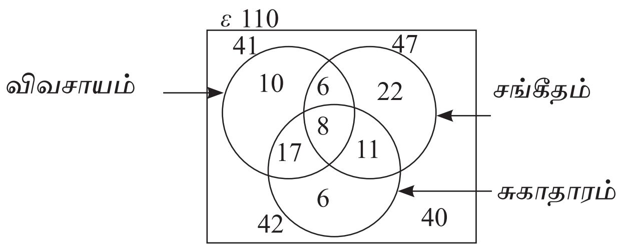
24.2 தொடைகள் தொடர்பான பிரசினங்கள் (மேலும்)

தொடைகள் தொடர்பான பிரசினங்களைத் எவ்வாறு தீர்ப்பது என்பதைச் சில உதாரணங்களின் மூலம் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 1

120 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு குழுவில் 41 மாணவர்கள் விவசாயத்தையும் 47 மாணவர்கள் சங்கீதத்தையும் 42 மாணவர்கள் சுகாதாரத்தையும் கற்கின்றனர். 14 மாணவர்கள் விவசாயத்தையும் சங்கீதத்தையும் 19 மாணவர்கள் சங்கீதத்தையும் சுகாதாரத்தையும் 25 மாணவர்கள் விவசாயத்தையும் சுகாதாரத்தையும் 8 மாணவர்கள் மூன்று பாடங்களையும் கற்கின்றனர். இத்தகவல்களை ஒரு வென் வரிப்படத்தில் காட்டிப் பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) விவசாயத்தை மாத்திரம் கற்கும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
(ii) ஒரு பாடத்தை மாத்திரம் கற்கும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
(iii) இரு பாடங்களையேனும் கற்கும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
(iv) ஒரு பாடத்தையேனும் கற்காத மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

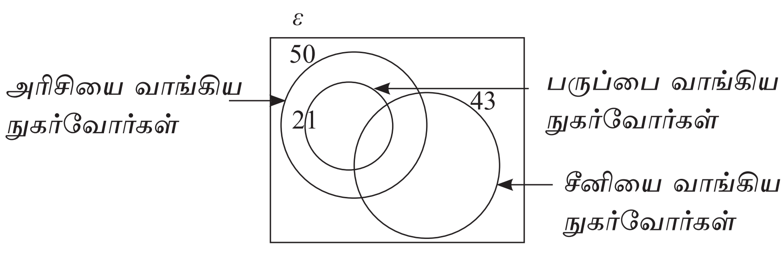


(i) 10
(ii) $10 + 22 + 6 \quad = 38$
(iii) $17 + 6 + 11 + 8 = 42$
(iv) 40

உதாரணம் 2

ஒரு குறித்த நாளில் ஒரு மணித்தியாலத்தில் ஒரு கடைக்கு வந்த நுகர்வோர்கள் தொடர்பாகச் சேகரிக்கப்பட்ட தகவல்களுக்கேற்ப 50 நுகர்வோர்கள் அரிசியையும் 21 நுகர்வோர்கள் பருப்பையும் 43 நுகர்வோர்கள் சீனியையும் வாங்கியுள்ளனர்.

மேலும் பருப்பை வாங்கிய எல்லோரும் அரிசியையும் வாங்கினர் எனின் இத்தகவல்கள் கீழே ஒரு வென் வரிப்படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளன.



(i) 23 நுகர்வோர்கள் அரிசியையும் சீனியையும் வாங்கினர். சீனியை மாத்திரம் வாங்கியவர்களின் எண்ணிக்கை யாது?

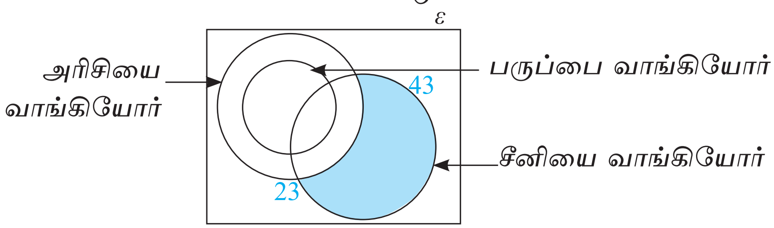
(ii) 12 நுகர்வோர்கள் மூன்று வகைப் பொருள்களையும் வாங்கினர் எனின் அரிசி, பருப்பு ஆகிய இரு வகைப் பொருள்களை மாத்திரம் வாங்கிய நுகர்வோர்களின் எண்ணிக்கை யாது?

(iii) அரிசியை மாத்திரம் வாங்கிய நுகர்வோர்களின் எண்ணிக்கை யாது?

(iv) அம்மணித்தியாலத்தில் வந்த நுகர்வோர்களின் மொத்த எண்ணிக்கை 90 எனின், வேறு பொருள்களை வாங்குவதற்கு வந்த நுகர்வோர்களின் எண்ணிக்கை யாது?

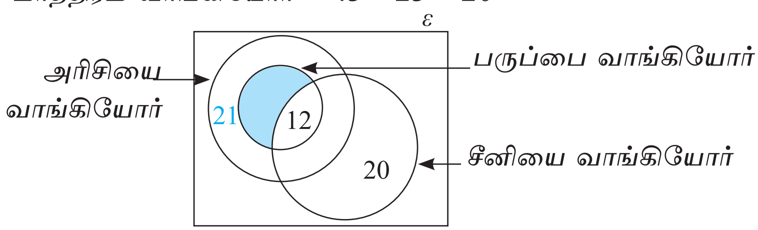
தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப ஒவ்வொரு தொடைப் பிரதேசங்களுக்குரிய மூலகங்களின் எண்ணிக்கையைக் காணவேண்டும்.

(i)



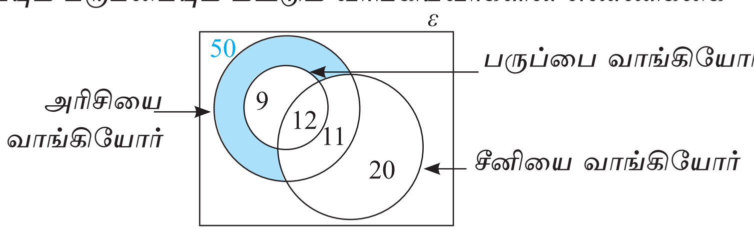
சீனியை மாத்திரம் வாங்கியோர் = 43 – 23 = 20

(ii)



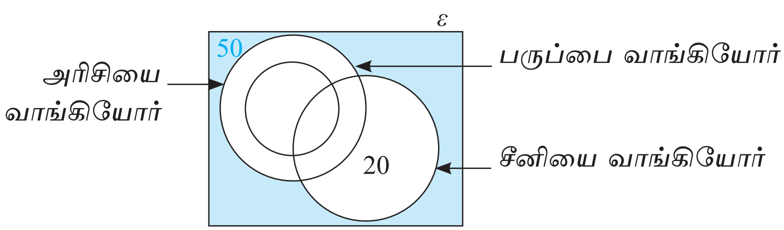
அரிசியையும் பருப்பையும் மட்டும் வாங்கியவர்களின் எண்ணிக்கை = 21 – 12 = 9

(iii)



அரிசியை மாத்திரம் வாங்கியவர்களின் எண்ணிக்கை = 50 – 9 – 12 – 11 = 18

(iv)



மேலே குறிப்பிடப்படாத வேறு பொருள்களை வாங்காதவர்களின் எண்ணிக்கை = 90 – 70 = 20

பயிற்சி 24.2

1. பாடசாலைக் காகிதாதிகள் விற்கப்படும் ஒரு கடைக்கு வருகைதந்த 20 பேர் பொருள்களை வாங்கிய விதம் பின்வருமாறாகும். 8 பேர் பென்சில்களையும் 11 பேர் பேனாக்களையும் 13 பேர் புத்தகங்களையும் வாங்கிய அதேவேளை பென்சில்களையும் புத்தகங்களை வாங்கிய 6 பேரில் 4 பேர் பேனாக்களை வாங்கவில்லை. 3 பேர் பேனா, பென்சில் ஆகிய இருவகைகளையும் வாங்கினர். 3 பேர் பேனாவை மாத்திரம் வாங்கினர். வென் வரிப்படத்தைப் பயன்படுத்தி இவற்றைக் காண்க.

(i) மேற்குறித்த பொருள்கள் எதனையும் வாங்காதவர்கள் எத்தனை பேர்?

(ii) பேனாவைவாங்காதவர்கள் எத்தனை பேர்?

(iii) கடைக்கு வந்தவர்களில் என்ன சதவீதம் இப்பொருள்களில் குறைந்தது இரு வகைகளையும் வாங்கினர்?

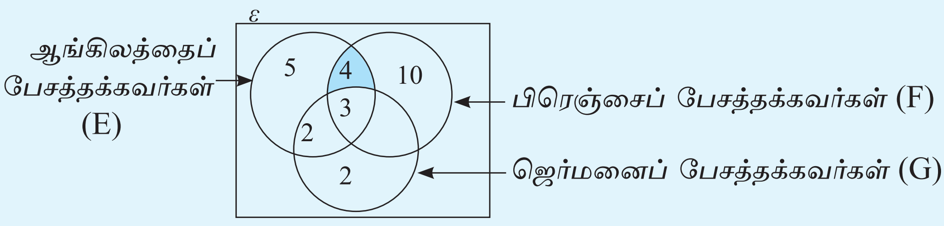
2. A, B, C என்னும் செய்தித் தாள்களை வாங்கல் தொடர்பாக ஒரு கிராமத்தில் மேற்கொள்ளப்பட்ட ஒரு கணிப்பீட்டில் பின்வரும் தகவல்கள் கிடைத்தன. 50% ஆனோர் செய்தித்தாள் A யையும் 67% ஆனோர் செய்தித்தாள் B யையும் 55% ஆனோர் செய்தித்தாள் C யையும் வாங்குகின்றனர். 10% ஆனோர் A, B ஆகிய செய்திதாள்களை மட்டும் வாங்குகின்றனர். 15% ஆனோர் செய்தித்தாள் A மாத்திரம் வாங்குகின்றனர். 5% ஆனோர் A, C ஆகிய செய்தித்தாள்களை வாங்குகின்றபோதிலும் செய்தித்தாள் B யை வாங்குவதில்லை. 17% ஆனோர் செய்தித்தாள் A யை வாங்காத போதிலும் B, C ஆகிய செய்தித்தாள்களை வாங்குகின்றனர். ஒரு வென் வரிப்படத்தின் மூலம் இவற்றைக் காண்க.

(i) மூன்று வகைச் செய்தித்தாள்களையும் வாங்குபவர்களின் சதவீதம் யாது?

(ii) செய்தித்தாள் A யை வாங்காத போதிலும் செய்தித்தாள் C யை வாங்குபவர்களின் சதவீதம் யாது?

(iii) இரு செய்தித்தாள்களை மாத்திரம் வாங்குபவர்களின் சதவீதம் யாது?

3. சீகிரியாவைப் பார்ப்பதற்கு வந்த வெளிநாட்டு உல்லாசப் பயணிகளின் குழு ஒன்று பேசத்தக்க மொழிகள் தொடர்பாக ஒரு பிரசுரத்தில் குறிப்பிடப்பட்ட தகவல்களைக் கொண்டு பின்வரும் வென் வரிப்படம் வரையப்பட்டுள்ளது.



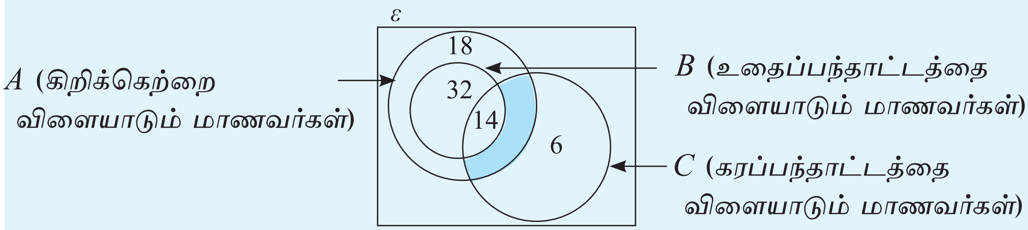
(i) தகவல் வழிகாட்டி ஆங்கிலத்தை மாத்திரம் பேசினால் அதற்குப் பதிலளிக்கத்தக்க அதனை விளங்கிக்கொள்ளத்தக்கவர்களின் எண்ணிக்கை யாது ?

(ii) ஜெர்மனைப் பேசத்தக்கவர்களின் எண்ணிக்கை 12 எனின், பிரெஞ்சையும் ஜெர்மனையும் மாத்திரம் பேசத்தக்கவர்களின் எண்ணிக்கை யாது ?

(iii) உருவில் நிழற்றப்பட்டுள்ள பிரதேசத்தினால் வகைகுறிக்கும் உல்லாசப் பயணிகளின் மொழி ஆற்றல் பற்றிச் சொற்களில் விவரிக்க. அதனைத் தொடைக் குறிப்பீட்டின் மூலம் எடுத்துரைக்க.

(iv) ஆங்கிலத்தைப் பேசத்தக்க எல்லோரும் ஆங்கில வழிகாட்டியுடனும் ஏனையோர் தமது மொழி ஆற்றலுக்கேற்பத் ஜெர்மன், பிரெஞ்சு ஆகிய இரு மொழிகளையும் பேசத்தக்க வழிகாட்டியிடமும் ஒப்படைக்கப்பட்டனர். இரண்டாமவரிடம் எத்தனை பேர் ஒப்படைக்கப்பட்டனர்.

4. ஒரு குறித்த பாடசாலையில் விளையாட்டுப் பயிற்சியைப் பெறும் மாணவர்கள் ஒவ்வொருவரும் கிறிக்கெற்று, உதைப்பந்தாட்டம், கரப்பந்தாட்டம் ஆகிய விளையாட்டுக்களில் ஒன்றில் அல்லது பலவற்றில் பங்குபற்றினர். அவர்கள் பற்றிய தகவல்கள் வென்வரிப்படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளன.



(i) இம்மூன்று விளையாட்டையும் விளையாடும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை யாது ?

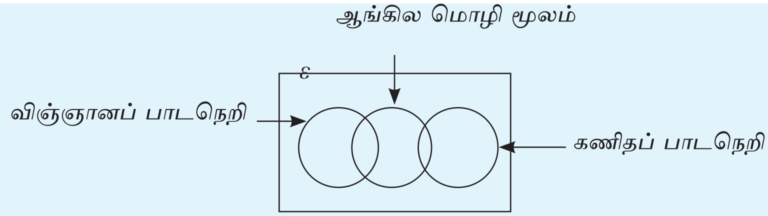
(ii) கிறிக்கெற்றில் மாத்திரம் பங்குபற்றும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை யாது ?

(iii) நிழற்றப்பட்ட பிரதேசத்தினால் எவ்விளையாட்டை விளையாடும் மாணவர்கள் காட்டப்படுகின்றனர் எனக் குறிப்பிட்டு அதனைத் தொடைக் குறிப்பீட்டில் காட்டுக.

(iv) கரப்பந்தாட்டத்தை விளையாடும் மாணவர்கள் 25 பேர் எனின் நிழற்றப்பட்ட பிரதேசத்துக்குரிய விளையாட்டு வீரர்களின் எண்ணிக்கை யாது ?

5. ஆசிரியர்களைப் பயிற்றுவிக்கும் ஒரு கல்விக் கல்லூரிக்காக ஓர் ஆண்டில் 400 மாணவர்கள் சேர்த்துக் கொள்ளப்பட்டுள்ளனர். அதில் கணிதத்திற்காக தமிழ், ஆங்கில மொழிமூலப் பாடநெறிகளும் விஞ்ஞானத்திற்காக தமிழ், ஆங்கில மொழிமூலப் பாட நெறிகளும் உடற்கல்விக்காகச் தமிழ், ஆங்கில மொழிமூலப் பாடநெறிகளும் நடைபெறுகின்றன.

(அ) தரப்பட்டுள்ள வென்வரிப்படத்தில் பின்வரும் தகவல்களை உரிய இடங்களில் குறித்து வென் வரிப்படத்தைப் பூரணப்படுத்துக.



(a) விஞ்ஞானப் படநெறியைக் கற்கும் 140 மாணவர்கள் இருக்கும் அதே வேளை அவற்றில் 100 மாணவர்கள் தமிழ் மொழிமூலப் பாடநெறியைக் கற்கின்றனர்

(b) 40 மாணவர்கள் ஆங்கில மொழிமூலக் கணிதப் பாடநெறியைக் கற்கின்றனர்.

(c) 110 மாணவர்கள் ஆங்கில மொழிமூலப் பாடநெறிகளைக் கற்கின்றனர்.

(d) கணிதப் பாடநெறியைக் கற்கும் மாணவர்களின் மொத்த எண்ணிக்கை 175 ஆகும்.

(ஆ)

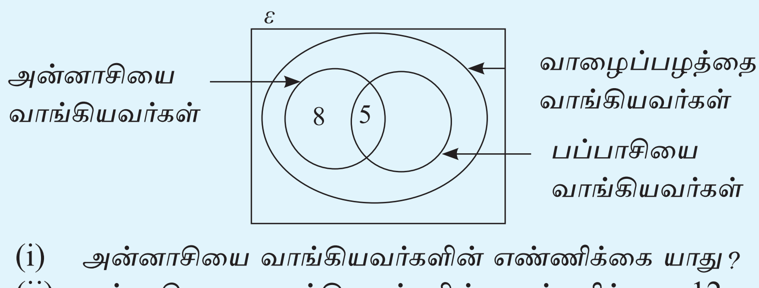
(i) தமிழ் மொழிமூலம் விஞ்ஞான பாடநெறியைக் கற்கும் மாணவர்கள் எண்ணிக்கை யாது ?

(ii) ஆங்கில மொழிமூலம் விஞ்ஞானப் பாடநெறியைக் கற்கும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை யாது ?

(iii) தமிழ் மொழிமூலக் கணிதப் பாடநெறியைக் கற்கும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை யாது ?

(iv) சேர்க்கப்பட்ட மாணவர்களில் ஒருவரை எழுமாறாகத் தெரிந்தால் அவர் தமிழ் மொழிமூல விஞ்ஞான பாடநெறியைக் கற்கும் மாணவராக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

6. ஒரு நாள் ஒரு பழக்கடைக்குப் பழங்களை வாங்க வந்த ஒரு குழு வாங்கிய பழங்களின் வகைகள் பற்றிய தகவல்கள் பின்வரும் வென் வரிப்படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளன. அன்று அன்னாசியை அல்லது பப்பாசியை வாங்கிய எல்லோரும் வாழைப்பழத்தையும் வாங்கினர்.



(i) அன்னாசியை வாங்கியவர்களின் எண்ணிக்கை யாது ?

(ii) பப்பாசியை வாங்கியவர்களின் எண்ணிக்கை 12 எனின், பப்பாசியை மாத்திரம் வாங்கியவர்களின் எண்ணிக்கை யாது ?

(iii) வாழைப்பழங்களை வாங்கியவர்களின் எண்ணிக்கை 40 எனின், வாழைப்பழங்களை மாத்திரம் வாங்கியவர்களின் எண்ணிக்கை யாது ?

(iv) மேலே குறிப்பிட்ட பொருள் எதனையும் வாங்காதவர்களின் எண்ணிக்கை 10 எனின், அத்தினத்தில் பழங்களை வாங்குவதற்கு வந்தவர்களின் எண்ணிக்கை யாது?

(v) பழக்கடைக்கு வந்தவர்களின் மொத்த எண்ணிக்கையில் எத்தனை பேர் இரு வகைப் பழங்களை மாத்திரம் வாங்கினர்?

(vi) பழக்கடைக்கு வந்தவர்களில் எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுத்த ஒருவர் மூன்று வகைப் பழங்களையும் வாங்கியவராக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

25

நிகழ்தகவு

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனை இரு படிமுறைகளைக் கொண்டிருக்கும்போது கிடைக்கும் நிகழ்ச்சிகள் தொடர்பான ஒரு பிரசினத்தைத் தீர்ப்பதற்கு
  - (i) நெய்யரி
  - (ii) மரவரிப் படம்

  ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்துவதற்குத்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

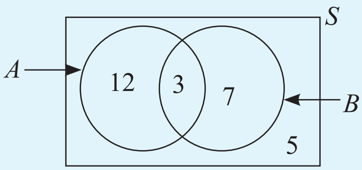
தரம் 10 இல் நீங்கள் கற்ற விடயங்களை நினைவுகூர்வதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. சமதகவுள்ள பேறுகள் இடம்பெறும் ஒரு மாதிரிவெளி S இல் உள்ள நிகழ்ச்சி A ஆகும். $n\,(A) = 23$, $n\,(S) = 50$எனின்,
   (i) $P\,(A)$
   (ii) $P\,(A')$ ஐக் காண்க.

2. ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் மாதிரிவெளி S ஆனது $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ஆகும். இங்கு ஒவ்வொரு பேறும் சமதகவுள்ளதெனின், பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடை தருக.
   (i) A ஆனது S இல் உள்ள ஓர் எளிய நிகழ்ச்சியாகும். A எடுக்கத்தக்க எல்லா நிகழ்ச்சிகளையும் எழுதுக.
   (ii) அந்நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் $P\,(A)$ ஐக் காண்க.
   (iii) B ஆனது S இல் உள்ள 4 மூலகங்கள் இடம்பெறும் ஒரு கூட்டு நிகழ்ச்சியாகும். B இற்கு ஓர் உதாரணத்தை எழுதுக.
   (iv) $P\,(B)$, $P\,(B')$ ஆகியவற்றைக் காண்க.
   (v) அதிலிருந்து $P\,(B) + P\,(B') = 1$ என்னும் தொடர்புடைமையை வாய்ப்புப் பார்க்க.
   (vi) X ஆனது வேறொரு மாதிரி வெளியில் $P(X) = 0.5$ஆகவுள்ள ஓர் நிகழ்ச்சியாகும். $P\,(X')$ ஐக் காண்க.

3. ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் மாதிரிவெளி S இல் உள்ள A, B என்னும் இரு நிகழ்ச்சிகளின் ஒவ்வொரு பிரதேசத்திற்கும் உரிய மூலக எண்ணிக்கைகள் பின்வரும் வென் வரிப்படத்தில் காணப்படுகின்றன. இதனைக் கொண்டு பின்வருவனவற்றைக் காண்க.



(i) $n(S)$ (ii) $P(A)$ (iii) $P(B)$
(iv) $P(A \cap B)$ (v) $P(A \cup B)$ (vi) $P(A \cap B')$
(vii) $P(A' \cap B)$ (viii) $P(A \cup B)'$

4. 1 தொடக்கம் 3 வரைக்கும் இலக்கம் இடப்பட்ட சம அளவுள்ள மூன்று அட்டைகளிடையே ஒன்றை எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுத்து அதன் இலக்கம் ஒற்றையா, இரட்டையா எனச் சோதித்து, அது திரும்பவும் இடப்படுகின்றது. அதன் பின்னர் வேறோர் அட்டை எழுமாற்றாக எடுக்கப்பட்டு அதன் இலக்கம் ஒற்றையா, இரட்டையா எனச் சோதிக்கப்படுகின்றது.

(i) மாதிரிவெளி S எனின் அதனை ஒரு தொடையாக எழுதி $n(S)$ ஐக் காண்க.
(ii) A யானது இரு தடவைகளிலும் இரட்டை எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி எனின், A யை ஒரு தொடையாக எழுதி $n(A)$ ஐக் காண்க.
(iii) இதிலிருந்து $P(A)$ ஐக் காண்க.
(iv) மேற்குறித்த மாதிரி வெளி S ஐ ஒரு நெய்யரியில் (தெக்காட்டின் தளத்தில்) வகைகுறிக்க.
(v) B ஆனது ஒரு தடவை மாத்திரம் ஓர் இரட்டை எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி எனின் உரிய புள்ளிகளை அடைப்பினுள் காட்டி $P(B)$ஐக் காண்க.
(vi) மேற்குறித்த மாதிரி வெளி S ஐ மர வரிப்படத்தில் காட்டி அதிலிருந்து குறைந்தபட்சம் ஒரு தடவையேனும் ஓர் இரட்டை எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

25.1 சாரா நிகழ்ச்சிகளும் சார் நிகழ்ச்சிகளும்

(i) சாரா நிகழ்ச்சிகள்

ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுகின்றமை அல்லது நடைபெறாமை வேறொரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுகின்றமையில் அல்லது நடைபெறாமையில் தாக்கம் செலுத்தாவிட்டால், இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் **சாரா நிகழ்ச்சிகள்** என நாம் தரம் 10 இல் கற்றோம். A, B ஆகிய இரண்டும் சாரா நிகழ்ச்சிகள் எனின் $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ என நாம் அறிவோம். இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளுக்கும் ஓர் உதாரணம் கீழே காணப்படுகின்றது.

இரு நாணயங்களை ஒரே தடவை மேலே எறிந்து அவை விழும் பக்கத்தைச் சோதிப்பதற்கான எழுமாற்றுப் பரிசோதனையைக் கருதுவோம். ஒரு நாணயம் விழும் பக்கம் மற்றைய நாணயத்தின் ஒரு குறித்த பக்கம் கிடைப்பதில் தாக்கம் செலுத்துவதில்லை. ஆகவே ஒரு நாணயத்தின் நிகழ்ச்சி மற்றைய நாணயத்தின் நிகழ்ச்சியைச் சாராதது.

(ii) சார் நிகழ்ச்சிகள்

ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுகின்றமை அல்லது நடைபெறாமை வேறொரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுகின்றமையை அல்லது நடைபெறாமையில் தாக்கம் செலுத்து மெனின், அவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் **சார் நிகழ்ச்சிகள்** ஆகும். அதாவது ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுகின்றமை அல்லது நடைபெறாமை மீது மற்றைய நிகழ்ச்சியின் நடை பெறுகின்றமையின் அல்லது நடைபெறாமையின் நிகழ்தகவில் மாற்றத்தை உண்டாக்குகின்றது.

பின்வரும் உதாரணங்களைக் கற்பதன் மூலம் சார் நிகழ்ச்சிகள் தொடர்பாக விளங்கிக் கொள்ளலாம்.

a. ஒரு கிறிக்கெற் குழுவில் திறமையான பந்துவீச்சாளர் போட்டியில் பங்குபற்றுகின்றமை, பங்குபற்றாமை அக்குழு வெற்றியீட்டுவதற்கான நிகழ்தகவில் மாற்றத்தை ஏற்படுத்துகின்றது. ஆகவே திறமையான பந்து வீச்சாளர் போட்டிக்கு முன்வருகின்றமை போட்டியில் பங்குபற்றுகின்றமை என்னும் இரு நிகழ்ச்சிகளும் சார் நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

b. எருதுகள், பசுக்கள் இருக்கும் மாட்டுப் பண்ணையிலிருந்து எழுமாற்றாக ஒரு மாட்டைத் தெரிந்தெடுத்தால், அது பசுவாக இருந்தால் பாலைப் பெறத்தக்கதாக இருக்கும் அதே வேளை அது எருதுவாக இருந்தால் பாலைப் பெற முடியாது. ஆகவே தெரிந்தெடுத்த மாடு பசுவாக இருத்தல் பசுவிலிருந்து பாலைப் பெறத்தக்கதாக இருத்தல் ஆகிய இரு நிகழ்ச்சிகளும் சார் நிகழ்ச்சிகளாகும்.

c. ஒரு பையில் ஒரே அளவுள்ள 7 வெள்ளைப் பந்துகளும் 3 கறுப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. இவற்றிலிருந்து எழுமாற்றாக ஒரு பந்தை தெரிந்தெடுத்து அதனைத் திரும்ப இடாமல் ஓர் இரண்டாம் பந்தை எடுக்கின்றமையால் இரண்டாம் பந்தை எடுக்கும்போது பையில் மொத்தப் பந்துகள் 10 இல் 9 பந்துகள் எஞ்சியிருக்கின்றன. அவ்வவ் நிறங்களில் எஞ்சியிருக்கும் பந்துகளின் எண்ணிக்கை முதலாவதாக எடுத்த பந்தின் நிறத்தைச் சார்ந்தது.

முதலாவது பந்து வெள்ளை நிறமாயின் இரண்டாவது பந்து வெள்ளைப் பந்தாக எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{6}{9}$

முதற் பந்து வெள்ளையன்று எனின் இரண்டாம் பந்து வெள்ளையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{7}{9}$

இவ்விரு நிகழ்தகவுகளும் சமமல்ல ஆகையால் இரண்டாவது பந்து வெள்ளையாக இருத்தல் என்பது முதலாவது பந்து வெள்ளையாக இருத்தல் என்பதில் தங்கியுள்ளது. ஆகவே இவை இரண்டும் சார் நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

25.2 நெய்யரியைப் பயன்படுத்திப் பிரசினங்களைத் தீர்த்தல்

இரு படிமுறைகளைக் கொண்ட ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையில் ஒரு படிமுறையின் நிகழ்ச்சி மற்றைய படிமுறையின் நிகழ்ச்சியை சாராமல் அல்லது சார்ந்து இருக்கலாம். சாராமல் இருக்கும் சந்தர்ப்பத்தில் பிரசினத்தைத் தீர்த்தல் பற்றித் தரம் 10 இல் ஆராய்ந்தோம். அதனை மீட்பதற்குப் பின்வரும் உதாரணங்களைப் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 1

ஒரு பையில் ஒரே அளவுள்ள 3 நீலநிறப் பந்துகளும் 2 சிவப்பு நிறப் பந்துகளும் உள்ளன. எழுமாற்றாக அவற்றிலிருந்து ஒரு பந்தை வெளியே எடுத்து அதனைத் திரும்பப் பையில் இட்டு ஓர் இரண்டாம் பந்தையும் எடுத்து நிறம் சோதிக்கப்படுகின்றது.

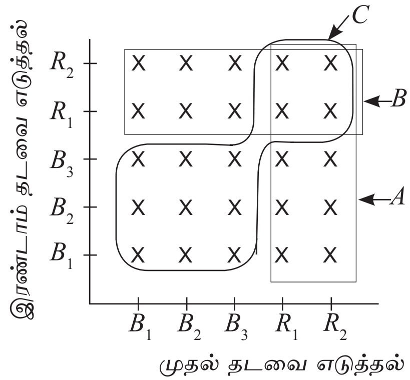
(i) இந்த எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் மாதிரி வெளியை ஒரு நெய்யரியில் வகை குறிக்க.

(ii) நெய்யரியைக் கொண்டு பின்வரும் நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றினதும் நிகழ்தகவைக் காண்க.

(a) முதற் பந்து சிவப்பு நிறமாக இருத்தல்.
(b) இரண்டாம் பந்து சிவப்பு நிறமாக இருத்தல்.
(c) இரு பந்துகளும் சிவப்பு நிறமாக இருத்தல்.
(d) இரு பந்துகளும் ஒரே நிறமுள்ளனவாக இருத்தல்.
(e) குறைந்தபட்சம் ஒரு பந்தேனும் சிவப்பு நிறமாக இருத்தல்.

(i) நெய்யரியை நிகழ்தகவுப் பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்குப் பயன்படுத்தும்போது இயலத்தக்க எல்லா நிகழ்ச்சித் தொடையையும் அல்லது மாதிரி வெளியையும் சமதகவுள்ள பேறுகளைக் கொண்டிருக்குமாறு அமைத்துக்கொள்ள வேண்டுமென நாம் முன்னர் கற்றோம். பையில் 3 நீலநிறப் பந்துகள் இருக்கும் அதே வேளை சிவப்பு நிறப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை அதிலும் பார்க்க 1 குறைவாக உள்ளது. ஆகவே பையிலிருந்து ஒரு நீலநிறப் பந்து கிடைத்தல், ஒரு சிவப்பு நிறப் பந்து கிடைத்தல் ஆகிய இரு நிகழ்ச்சிகளும் சமதகவுள்ளவை அல்ல.

ஆனால் பந்துகள் அளவில் சமமாகையால் யாதாயினும் ஒரு பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு சமமாகும். ஆகவே மாதிரி வெளியை நெய்யரியில் காட்டும்போது மூன்று நீலநிறப் பந்துகளை B_1, B_2, B_3 எனவும் இரு சிவப்பு நிறப் பந்துகளை R_1, R_2 எனவும் குறிப்போம்.



முதல் தடவை எடுக்கும்போது சமதகவுள்ள பேறைக் கிடை அச்சிலும் இரண்டாம் தடவை எடுக்கும்போது இயலத்தக்க பேறை நிலைக்குத்து அச்சிலும் கொண்டு குறிக்கப்படும் புள்ளிகளின் மூலம் மாதிரிவெளி காட்டப்படுகின்றது.

முதல் எடுத்த பந்தைத் திரும்ப இட்டு இரண்டாவது பந்து எடுக்கப்பட்டு சோதிக்கப் படுகின்றமையால் முதல் நிகழ்ச்சியும் இரண்டாவது நிகழ்ச்சியும் சாராத நிகழ்ச்சி களாகும்.

குறிப்பு: நெய்யரியைக் கொண்டு ஒரு நிகழ்தகவைக் காண்பதற்குத் தரப்பட்டுள்ள நிகழ்ச்சிக்குரிய புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையை மாதிரி வெளியில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையின் பின்னமாகக் காட்டுதல் வேண்டும்.

(ii)(a) முதற்பந்து சிவப்பு நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சிக்குரிய புள்ளிகள் நெய்ய ரியில் அடைப்பிட்டு A எனக் காட்டப்பட்டுள்ளன. அதில் 10 புள்ளிகள் உள்ளன. மாதிரிவெளியில் 25 புள்ளிகள் உள்ளன.

$\therefore$ முதற் பந்து சிவப்பு நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{\text{அடைப்பு } A \text{ யில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மாதிரி வெளியில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

(b) இரண்டாம் பந்து சிவப்பு நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சிக்குரிய புள்ளிகள் நெய்யரியில் அடைப்பிட்டு B எனக் காட்டப்பட்டுள்ளன.

$\therefore$ இரண்டாம் பந்து சிவப்பு நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{\text{அடைப்பு } B \text{ யில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மாதிரி வெளியில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

(c) இரு பந்துகளும் சிவப்பு நிறமாக இருப்பதற்கான புள்ளிகள் A, B என்னும் இரு அடைப்புகளுக்கும் பொதுவான புள்ளிகளாகும். அதில் 4 புள்ளிகள் உள்ளன.

$\therefore$ இரண்டு பந்துகளும் சிவப்பு நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{\text{இரு அடைப்புகளுக்கும் பொதுவான புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மாதிரி வெளியில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{4}{25}$$

(d) இரு பந்துகளும் ஒரே நிறத்தைக் கொண்டிருப்பதற்கு இரண்டும் நீல நிறமாக அல்லது இரண்டும் சிவப்பு நிறமாக இருத்தல் வேண்டும். அதற்குரிய புள்ளிகள் பிரதேசம் C இல் காட்டப்பட்டுள்ளன. அதில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை 13 ஆகும்.

$\therefore$ இரு பந்துகளும் ஒரே நிறத்தைக் கொண்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{\text{பிரதேசம் } C \text{ யில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மாதிரி வெளியில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{13}{25}$$

(e) குறைந்தபட்சம் ஒரு பந்தேனும் சிவப்புப் பந்தாக இருப்பின் ஒன்று அல்லது இரண்டும் சிவப்பு நிறமாக இருத்தல் வேண்டும். A, B ஆகிய இரு அடைப்புகளிலும் உள்ள எல்லாப் புள்ளிகளும் உரியனவாகும். அதில் 16 புள்ளிகள் இருக்கின்றமையால், குறைந்தப்பட்சம் ஒரு பந்தேனும் சிவப்பு நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{16}{25}$

தற்போது இரண்டு படிமுறைகளில் நடைபெறும் சார் நிகழ்ச்சியொன்றின் நிகழ்தகவை காண்பதை உதாரணமொன்றின் மூலம் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 2

ரிகானாவின் பென்சில் பெட்டியில் 2 பச்சை நிறப் பென்சில்களும் 3 கறுப்பு நிறப் பென்சில்களும் உள்ளன. இவற்றிலிருந்து எழுமாற்றாக ஒரு பென்சிலைத் தெரிந்தெடுத்துத் தனது நண்பி சங்கரிக்குக் கொடுக்கின்றார். அதன் பின்னர் ரிகானாவும் ஒரு பென்சிலை எழுமாற்றாகத் தேர்ந்தெடுக்கின்றார்.

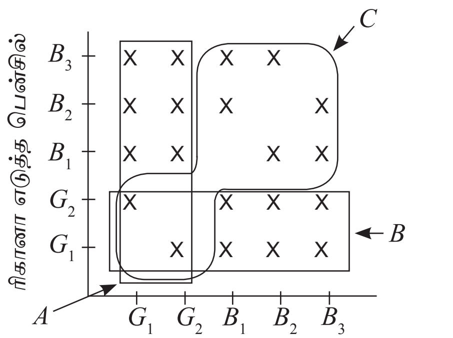
(i) மாதிரி வெளியை ஒரு நெய்யரியில் காட்டுக.

(ii) நெய்யரியைக் கொண்டு பின்வரும் நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றினதும் நிகழ்தகவைக் காண்க.

(a) சங்கரிக்கு ஒரு பச்சை நிறப் பென்சிலைக் கொடுத்தல்
(b) ரிகானாவுக்கு ஒரு பச்சை நிறப் பென்சில் கிடைத்தல்
(c) இருவருக்கும் ஒரே நிறம் கிடைத்தல்
(d) சங்கரிக்கு மாத்திரம் ஒரு கறுப்பு நிறப் பென்சில் கிடைத்தல்

(i) ரிகானாவின் பென்சில் பெட்டியில் இருந்த இரு பச்சை நிறப் பென்சில்களையும் G_1, G_2 எனவும் மூன்று கறுப்பு நிறப் பென்சில்களையும் B_1, B_2, B_3 எனவும் கொள்வோம்.

சங்கரிக்குக் கொடுத்த பென்சில் G_1, G_2, B_1, B_2, B_3 ஆகியவற்றிற்கிடையே ஒன்றாகவும் ரிகானா எடுத்த பென்சிலும் அவற்றிடையே ஒன்றாகவும் இருக்கலாம்.ஆனால் சங்கரிக்குக் கிடைக்கும் பென்சில் ரிகானாவிற்குக் கிடைக்க முடியாது ஆகையால் (G_1, G_1), (G_2, G_2), (B_1, B_1), (B_2, B_2), (B_3, B_3) ஆகிய புள்ளிகளுக்குரிய நிகழ்ச்சிகள் இருக்க முடியாது. ஆகவே அந்த ஐந்து புள்ளிகளும் தவிர எஞ்சியுள்ள 20 புள்ளிகள் மாத்திரம் நெய்யரியில் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.



(ii) நெய்யரியைக் கொண்டு நிகழ்தகவைக் காண்பதற்குத் தரப்பட்டுள்ள நிகழ்ச் சிக்குரிய புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை மாதிரி வெளியில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை ஆகும்.

(a) சங்கரிக்கு ஒரு பச்சைப் பென்சிலைக் கொடுப்பதற்குரிய 8 புள்ளிகள் அடைப்பு A இல் உள்ளன.

$\therefore$ சங்கரிக்கு ஒரு பச்சை நிறப் பென்சிலைக் கொடுப்பதற்கான

நிகழ்தகவு $= \dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5}$

(b) ரிகானாவிற்கு ஒரு பச்சை நிறப் பென்சில் கிடைப்பதற்குரிய புள்ளிகள் அடைப்பு B யில் உள்ளன. அதில் 8 புள்ளிகள் இருக்கின்றன.

$\therefore$ ரிகானாவிற்கு ஒரு பச்சை நிறப் பென்சில் கிடைப்பதற்கான

நிகழ்தகவு $= \dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5}$

(c) இருவருக்கும் ஒரே நிறமுள்ள பென்சில்கள் கிடைப்பதற்குரிய புள்ளிகள் பிரதேசம் C இல் உள்ளன. அதாவது இருவருக்கும் பச்சை நிறம் அல்லது இருவருக்கும் கறுப்பு நிறம் கிடைக்க வேண்டும்.

$\therefore$ இருவருக்கும் ஒரே நிறம் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5}$

(d) சங்கரிக்கு மாத்திரம் ஒரு கறுப்பு பென்சில் கிடைப்பதற்குரிய புள்ளிகள் அடைப்பிட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ளன. சங்கரிக்கு மாத்திரம் கறுப்பு நிறமெனின் ரிகானாவுக்கு பச்சை நிறம் கிடைத்தல் வேண்டும். அத்தகைய 6 புள்ளிகள் உள்ளன.

$\therefore$ சங்கரிக்கு மாத்திரம் ஒரு கறுப்பு நிறப் பென்சில் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10}$

பயிற்சி 25.1

1. ஒரு பெட்டியில் ஒரே அளவான 3 வெள்ளை நிறப் பந்துகளும் 4 சிவப்பு நிறப் பந்துகளும் உள்ளன. இவற்றிலிருந்து எழுமாறாக ஒரு பந்து எடுக்கப்பட்டு அதன் நிறம் பரிசோதிக்கப்படுகின்றது.

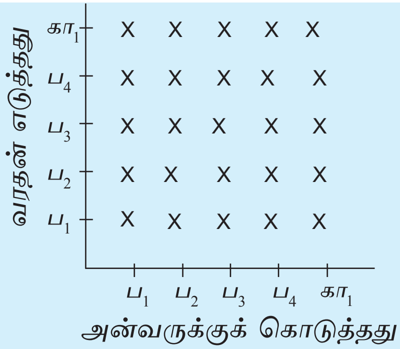
(a) சமதகவுள்ள பேறுகளை உள்ளடக்கிய மாதிரிவெளி S இன் மூலகங்களைத் தருக.

(b) முதலில் எடுத்த பந்தை மீண்டும் பெட்டியில் இட்டு இன்னுமொரு பந்து எழுமாறாக எடுக்கப்பட்டு நிறம் பரிசோதிக்கப்படுகின்றது எனின், சமதகவுள்ள எளிய நிகழ்ச்சிகள் உள்ளடங்கிய மாதிரி வெளியை நெய்யரியில் தருக.

(c) முதலில் எடுத்த பந்து மீண்டும் உள்ளே வைக்கப்படாமல் இரண்டாவது பந்து எழுமாறாக எடுக்கப்பட்டு நிறம் பரிசோதிக்கப்படுமாயின் மாதிரி வெளியை நெய்யரியில் குறிக்க.

(d) இரண்டு தடவைகளிலும் எடுத்த பந்துகள் இரண்டும் ஒரே நிறத்தைக் கொண்டவையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவை மேற்குறித்த (b), (c) ஆகிய சந்தர்ப்பங்களுக்குரியதாகக் காண்க.

2. ஒரு பையில் ஒரே அளவான 4 மாம்பழங்களும் 1 மாங்காயும் உண்டு. இவற்றிலிருந்து ஒன்றை எழுமாறாக எடுத்த வரதன் இதனை தனது நண்பனாகிய அன்வருக்குக் கொடுத்தான். பின்னர் வரதனும் ஒன்றை எடுத்தான் இதற்கென வரதன் தயாரித்த சம நேர்தகவுள்ள பேறுகளை உள்ளடக்கிய மாதிரிவெளி கீழே தரப்பட்டுள்ளது.



(a) இந்நெய்யரியில் ஒரு வழு உண்டு. அதனைச் சீர்செய்து மீண்டும் தயாரிக்க.
(b) சரியான நெய்யரியிலிருந்து கீழே தரப்பட்டுள்ள நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(i) இருவருக்கும் பழங்கள் கிடைத்தல்
(ii) அன்வருக்கு மாத்திரம் பழம் கிடைத்தல்
(iii) ஒருவருக்கு மட்டும் பழம் கிடைத்தல்

(c) இங்கு குறைந்தபட்சம் ஒருவருக்கேனும் பழமொன்று கிடைப்பது நிச்சயமான நிகழ்வு என குமார் கூறுகின்றார். இக்கூற்றின் செவ்வைத் தன்மையைக் காரணங்களுடன் விளக்குக.

3. ஒரு சுற்றுலா செல்வதற்குத் தயாரான பீற்றர் தனது ஆடைப்பெட்டியிலிருந்த 4 வெள்ளை நிற மேற்சட்டைகளிலும் 3 கறுப்பு நிற மேற்சட்டைகளிலிருந்து எழுமாறாக இரண்டு மேற்சட்டைகளை எடுத்தான்.
(a) வெள்ளை நிற மேற்சட்டைகள் நான்கையும் W_1, W_2, W_3, W_4 எனவும் கறுப்பு நிற மேற்சட்டைகள் மூன்றையும் B_1, B_2, B_3 எனவும் கொண்டு மாதிரி வெளியைத் தயாரிக்க.
(b) நெய்யரியிலிருந்து கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியினதும் நிகழ்தகவைக் காண்க.

(i) இரண்டு மேற்சட்டைகளும் வெள்ளையாக இருத்தல்.
(ii) ஒரு மேற்சட்டை மாத்திரம் வெள்ளையாக இருத்தல்.
(iii) குறைந்த பட்சம் ஒரு மேற்சட்டையேனும் வெள்ளையாக இருத்தல்.

4. ஒரு பாத்திரத்தில் ஒரே அளவும் வடிவமும் கொண்ட பாற்சுவையுள்ள 3 இனிப்புகளும் தோடம்பழச் சுவையுள்ள 3 இனிப்புக்களும் புளியம்பழச் சுவையுள்ள 1 இனிப்பும் உண்டு. ரியாஸ் இவற்றிலிருந்து ஓர் இனிப்பை எழுமாறாக எடுத்து சுவைத்துப் பார்த்தான். பின்னர் தனது நண்பியாகிய விஜிக்கும் ஓர் இனிப்பை எழுமாறாக எடுத்து வழங்கினான்.
(a) இனிப்புகளின் சுவைகளைக் கருத்திற் கொண்டு சமதகவுள்ள பேறுகளை உள்ளடக்கிய மாதிரி வெளியை நெய்யரியில் குறிக்க.

(b) நெய்யரியிலிருந்து கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியினதும் நிகழ்தகவைக் காண்க.

(i) இருவருக்கும் ஒரே சுவையுடைய இரண்டு இனிப்புகள் கிடைத்தல்
(ii) ஒருவருக்கு மட்டும் பாற்சுவையுடைய ஓர் இனிப்புக் கிடைத்தல்
(iii) விஜிக்குப் புளியம்பழச் சுவையுடைய ஓர் இனிப்புக் கிடைத்தல்

25.3 மரவரிப்படத்தைப் பயன்படுத்திப் பிரசினங்களைத் தீர்த்தல்

ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனை இரு படிமுறைகளைக் கொண்டிருக்கும்போது அவ்விரு படிமுறைகளுக்கும் உரிய இரு நிகழ்ச்சிகளுடனும் தொடர்புபட்ட ஒரு பிரசினத்தைத் தீர்ப்பதற்கு மரவரிப்படத்தைப் பயன்படுத்தலாம். பின்வரும் உதாரணங்களைக் கொண்டு அதனைப் பற்றிக் கற்க.
இரு நிகழ்ச்சிகள் சாரா நிகழ்ச்சிகளாக இருக்கும் சந்தர்ப்பத்திற்கு ஓர் உதாரணம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

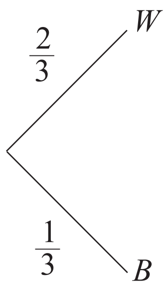
உதாரணம் 1

ஒரு பையில் ஒரே அளவுள்ள இரு வெள்ளை நிறப் பந்துகளும் ஒரு கறுப்பு நிறப் பந்தும் உள்ளன. இதிலிருந்து எழுமாற்றாக ஒரு பந்தை வெளியே எடுத்து அதன் நிறம் குறிக்கப்படுகின்றது. அதன் பின்னர் அதனைத் திரும்பப் பையில் இட்டு மறுபடியும் ஒரு பந்து எடுத்து நிறம் குறிக்கப்படுகின்றது.

(i) இந்த எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் மாதிரிவெளியை ஒரு மரவரிப்படத்தில் காட்டுக.
(ii) மரவரிப்படத்தைக் கொண்டு பின்வரும் நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவைக் காண்க.
(a) இரண்டு முறைகளும் வெள்ளை நிறப் பந்தைப் பெறல்
(b) முதலாம் முறை ஒரு வெள்ளை நிறப் பந்து கிடைத்தல்.
(c) ஒரு வெள்ளை நிறப் பந்து மாத்திரம் கிடைத்தல்.
(d) குறைந்தது ஒரு முறையேனும் ஒரு வெள்ளை நிறப் பந்து கிடைத்தல்.

(i) ஒரு பந்து வெள்ளை நிறமாக இருப்பதை W இனாலும் ஒரு பந்து கறுப்பு நிறமாக இருத்தலை B இனாலும் குறிப்போம். முதலில் எடுத்த பந்து வெள்ளை நிறமுள்ளதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{2}{3}$ உம் அது கறுப்பு நிறமுள்ளதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{3}$ உம் ஆகும். முதலில் எடுப்பதற்குரிய மரவரிப்படத்தின் பகுதியின் கிளை மீது உரிய நிகழ்தகவைக் குறிப்போம்.

முதலாவதாக எடுத்தல்



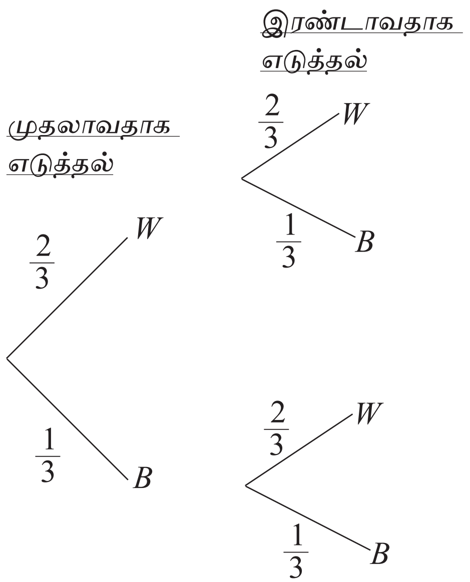
இவ்விரு கிளைகளின்மீதும் உள்ள நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத் தொகை

$= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$

$= 1$

குறிப்பு : மர வரிப்படத்தின் ஓர் இடத்திலிருந்து விரியும் கிளைகளின் மீது உள்ள நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத் தொகை 1 ஆகும்.

இப்போது மேற்குறித்த மரவரிப்படத்தை எழுமாற்று சோதனையின் இரண்டாம் படிமுறை வரைக்கும் விரிவுபடுத்துவோம்.



முதலாவதாக எடுத்த பந்தைத் திரும்பப் பையில் இட்டு இரண்டாம் பந்து எடுக்கப் படுகின்றமையால் இரண்டாம் பந்து எடுக்கப்படும்போது பையில் உள்ள பந்து களின் எண்ணிக்கை மாறுவதில்லை. ஆகவே இரண்டாவதாக எடுத்த ஒரு பந்தும் வெள்ளை நிறமாக அல்லது கறுப்பு நிறமாக இருப்பதற் குரிய நிகழ்தகவும் முதற் சந்தர்ப்பத்தில் எடுத்த பெறுமானங்களையே எடுக்கின்றன. அப்பெறுமானங்கள் உரிய கிளைகளின் மீது காட்டப்பட்டுள்ளன.

இச்சந்தர்ப்பத்தில் ஓர் இடத்திலிருந்து விரியும் கிளைகளின் மீது உள்ள நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத் தொகை 1 என்பதை உறுதிப்படுத்துக.

(ii) இரு சந்தர்ப்பங்களையும் கருத்திற்கொள்ளும்போது இயலத்தக்க நான்கு நிகழ்ச்சி கள் உள்ளன. அவை பின்வரும் அட்டவணையில் உரிய நிகழ்தகவுகளுடன் காட்டப்பட்டுள்ளன.

நிகழ்ச்சி	நிகழ்தகவு	
(W, W)	$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$
(W, B)	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$
(B, W)	$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$
(B, B)	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

இங்கு (W, W) மூலம் முதற்பந்து வெள்ளை நிறமாகவும் இரண்டாவதும் வெள்ளை நிறமுள்ளதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ காட்டப்படுகின்றது. இவை சாரா நிகழ்ச்சிகள் என்பதால் இவற்றை பெருக்குவதன் மூலம் நிகழ்தகவு பெறப்படுகின்றது. இவ்வாறு எடுத்துள்ள (W, W), (W, B), (B, W), (B, B) என்னும் நான்கு நிகழ்ச்சிகளும் தம்முள் புற நீக்குவனவாகும். அதற்குக் காரணம் இந்நான்கு நிகழ்ச்சிகளில் ஒன்று இரண்டு நிகழ்ச்சி கள் ஒரே நேரத்தில் நடைபெற மாட்டாது. இதற்கேற்ப இவ்வுதாரணத்திற்குரிய நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளைக் கீழே காட்டுவோம்.

(a) இரண்டு முறைகளிலும் வெள்ளைப் பந்துகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= P(W, W)$$
$$= \frac{4}{9} \text{ (அட்டவணையைக் கொண்டு)}$$

(b) முதலில் ஒரு வெள்ளைப் பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= P(W, W) + P(W, B)$$
$$= \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

(c) 1 வெள்ளை நிறப் பந்து மாத்திரம் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= P(W, B) + P(B, W)$$
$$= \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

(d) குறைந்த பட்சம் ஒரு வெள்ளைநிறப் பந்தேனும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= P(W, W) + P(W, B) + P(B, W)$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{2} = \frac{8}{9}$$

குறிப்பு : பகுதி (d) யின் விடையை $1 - P(B, B)$ இலிருந்தும் பெறலாம்.

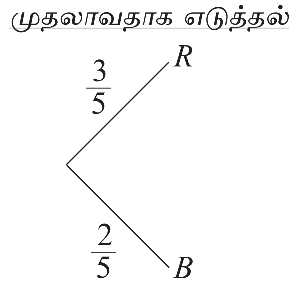
இரு நிகழ்ச்சிகளும் சார் நிகழ்ச்சிகளாக இருக்கும் சந்தர்ப்பத்திற்கு ஓர் உதாரணம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

உதாரணம் 2

ஒரு பையில் ஒரே அளவுள்ள 3 சிவப்பு நிறப் பந்துகளும் 2 நீல நிறப் பந்துகளும் உள்ளன. இவற்றிலிருந்து எழுமாற்றாக ஒரு பந்தை வெளியே எடுத்து அதனைத் திரும்பப் பையில் இடாமல் இரண்டாவது பந்தை எடுத்து நிறம் குறிக்கப்படுகின்றது.

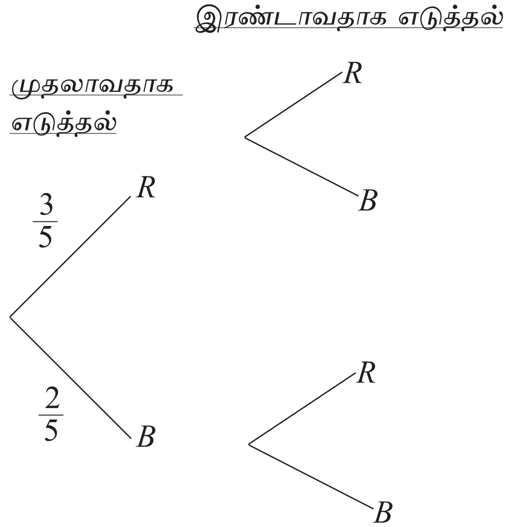
(i) மாதிரி வெளியை ஒரு மரவரிப்படத்தில் காட்டுக.
(ii) மரவரிப்படத்தைக் கொண்டு பின்வரும் நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.
  (a) இரு சந்தர்ப்பங்களிலும் ஒரு சிவப்பு நிறப் பந்து கிடைத்தல்.
  (b) ஒரு சந்தர்ப்பத்தில் மாத்திரம் ஒரு சிவப்பு நிறப் பந்து கிடைத்தல்.
  (c) குறைந்தது ஒரு சந்தர்ப்பத்திலேனும் ஒரு சிவப்பு நிறப்பந்து கிடைத்தல்.

(i) மரவரிப்படத்தின் முதற்பகுதி கீழே காணப்படுகின்றது.



இங்கு R இன் மூலம் பந்து சிவப்பு நிறமாக இருத்தலும் B இன் மூலம் நீலநிறமாக இருத்தலும் காட்டப்படுகின்றன. பையில் 3 சிவப்பு நிறப் பந்துகளும் 2 நீலநிறப் பந்துகளும் இருக்கின்றமையால் $P(R) = \frac{3}{5}, P(B) = \frac{2}{5}$ ஆகும்.

இந்நிகழ்வு மரவரிப்படத்தில் உரிய கிளைகளின்மீது குறிப்பிடப்படுகின்றது. இப்போது மரவரிப்படத்தின் முதற்பகுதியை விரிவுபடுத்துவதன் மூலம் இரண்டாவதாக எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவுகளைக் காட்டுவோம்.



இப்பகுதியில் கிளைகளின் மீது காட்டப்படும் நிகழ்தகவுகள் முதற்பகுதியில் உள்ள பெறுமானங்களிலிருந்து வேறுபட்டவையாகும். முதல் நிகழ்ச்சியைக் கருதி இரண்டாம் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவை எடுக்க வேண்டும்.

முதல் பந்து சிவப்பு நிறமானதெனின், பையில் 2 சிவப்பு நிறப் பந்துகளும் 2 நீலநிறப் பந்துகளும் எஞ்சியிருக்கும்.

$\therefore$ இரண்டாம் பந்து சிவப்பு நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{2}{4}$

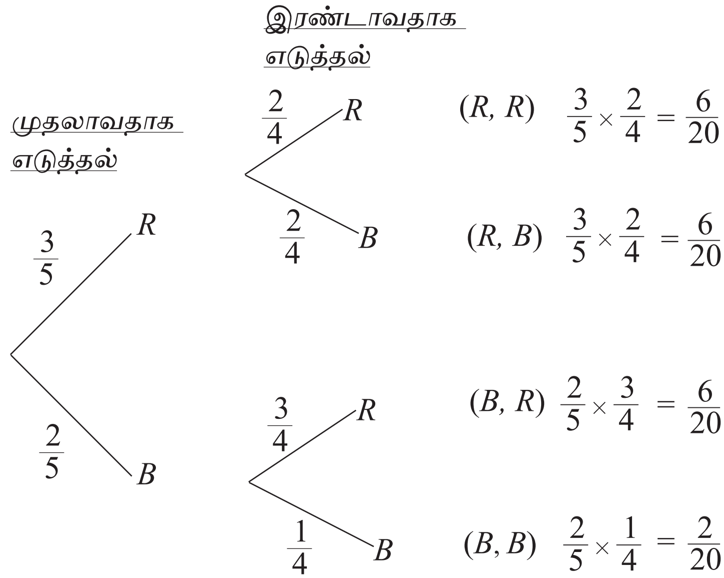
இரண்டாம் பந்து நீல நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{2}{4}$

முதற் பந்து நீலநிறமாக இருப்பின், பையில் 3 சிவப்பு நிறப் பந்துகளும் 1 நீல நிறப் பந்தும் எஞ்சியிருக்கும்.

$\therefore$ இரண்டாம் பந்து சிவப்பு நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{3}{4}$

இரண்டாம் பந்து நீல நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{4}$

இந்நிகழ்தகவுகளை மரவரிப்படத்தில் உரிய கிளைகளின் மீது குறித்து நிகழ்ச்சி அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துவோம். இந்நான்கு நிகழ்ச்சிகளினதும் நிகழ்வுகளின் மொத்தம் 1 என்பதை உறுதிப்படுத்துக.



நிகழ்ச்சி	நிகழ்தகவு	
(R, R)	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$	$\frac{6}{20}$
(R, B)	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$	$\frac{6}{20}$
(B, R)	$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$	$\frac{6}{20}$
(B, B)	$\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}$	$\frac{2}{20}$

இவ்வட்டவணையில் உள்ள (R, R), (R, B), (B, R), (B, B) ஆகிய நிகழ்ச்சிகள் தம்முள் புறநீக்குகின்றன. ஆகவே மரவரிப்படத்தைக் கொண்டு ஒரு குறித்த நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவைக் காண்பதற்கு நாம் அட்டவணையினூடாக அதற்குரிய நிகழ்ச்சிகளைத் தெரிந்தெடுத்து அவை நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத்தொகையைப் காணல் வேண்டும்.

(a) இரு சந்தர்ப்பங்களிலும் ஒரு சிவப்பு நிறப் பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= P(R, R)$$
$$= \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

(b) ஒரு சந்தர்ப்பத்தில் மாத்திரம் ஒரு சிவப்பு நிறப் பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= P(R, B) + P(B, R)$$
$$= \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

(c) குறைந்தப்பட்சம் ஒரு முறையேனும் ஒரு சிவப்பு நிறப்பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= P\,(R, B) + P\,(B, R) + P\,(R, R)$$

$$= \frac{6}{20} + \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

குறிப்பு : பகுதி (c) யின் விடையை $1 - P\,(B, B)$ இலிருந்தும் பெறலாம்.

பயிற்சி 25.2

1. ஒரே வகையான 10 மின்குமிழ்கள் உள்ள ஒரு பெட்டியில் 3 மின்குமிழ்கள் பழுதானவை ஆகும். நிமலன் அவற்றில் ஒரு குமிழை எழுமாற்றாக எடுத்து அது பழுத்துள்ளதாவெனச் சோதித்து அதனைத் மீண்டும் இடமால் இரண்டாம் மின்குமிழை எடுத்துச் சோதிக்கின்றான்.

(i) இந்த எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் மாதிரிவெளியை ஒரு மரவரிப் படத்தில் காட்டுக.

(ii) முதலில் ஒரு பழுதுள்ள மின்குமிழ்கள் கிடைத்தல், இரண்டாவதாகவும் ஒரு பழுதுள்ள மின்குமிழ் கிடைத்தல் என்னும் நிகழ்ச்சிச் சோடி சார் நிகழ்ச்சிகள் என நிமலன் கூறுகின்றான். அது சரியா, பிழையா எனக் காரணங்களுடன் காட்டுக.

(iii) மரவரிப்படத்தைக் கொண்டு பின்வரும் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(a) எடுத்த இரு மின்குமிழ்களும் பழுதுள்ளனவாக இருத்தல்.

(b) எடுத்த ஒரு மின்குமிழ் மாத்திரம் பழுதுள்ளதாக இருத்தல்.

(c) குறைந்தபட்சம் ஒரு மின்குமிழேனும் பழுதுள்ளதாக இருத்தல்.

2. A என்னும் ஓர் உதைப்பாந்தாட்ட வீரர் குறித்த ஒரு போட்டியில் விளையாடுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{3}{4}$ உம் வீரர் A அப்போட்டியில் விளையாடினால் வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{5}{8}$ உம் ஆவதுடன் விளையாடாவிடின் வெற்றி பெறுவதும் தோல்வியடைவதும் சமதகவுடையவனவாகும். இப்போட்டியானது வெற்றி, தோல்வி இன்றி நிறைவு பெற்றது.

(i) A என்னும் வீரர் இப்போட்டியில் விளையாடாதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(ii) A என்னும் வீரர் இப்போட்டியில் விளையாடாதிருப்பின் வெற்றி கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(iii) A என்னும் வீரர் விளையாடுவதையும் விளையாடாதிருப்பதையும் முதல் பகுதியிலும் போட்டியில் வெற்றி பெறுவதையும் தோல்வியடைவதையும் இரண்டாவது பகுதியிலும் கொண்டு மாதிரிவெளியை ஒரு மரவரிப் படத்தில் குறிக்க.

(iv) மரவரிப் படத்திலிருந்து இந்த உதைப்பந்தாட்டக் குழு போட்டியில் வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(v) A என்னும் வீரர் இப்போட்டியில் விளையாடுதல் கூடிய அனுகூலமுடையதா என்பதைக் காரணங்களுடன் தருக.

3. ஒரு பையில் ஒரே அளவுள்ள 4 விளாம்பழங்களும் 3 விளாங்காய்களும் உள்ளன. கண்ணன் இவற்றில் ஒன்றை எழுமாற்றாக எடுத்து அது பழமெனின் அதனைத் திரும்பப் பையில் இடாமல் இரண்டாவதை எடுத்தான். முதலில் எடுத்தது காய் எனின், அதனைத் திரும்பப் பையில் இட்டு இரண்டாவதை எடுத்தான்.

(i) இந்த எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் மாதிரிவெளியை ஒரு மரவரிப் படத்தில் காட்டுக.

(ii) கண்ணனின் பின்வரும் கூற்றுகளில் எவை பிழையெனக் காரணங்களுடன் காட்டுக.

(a) ''முதலில் எடுத்தது பழமாகவும் இரண்டாவதாக எடுத்தது பழமாகவும் இருத்தல் இரு சாரா நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.''

(b) ''முதலில் எடுத்தது காயாகவும் இரண்டாவதாக எடுத்தது காயாகவும் இருத்தல் இரு சார் நிகழ்ச்சிகள்.''

(iii) மரவரிப்படத்தைக் கொண்டு பின்வரும் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(a) எடுத்த இரண்டும் பழமாக இருத்தல்.

(b) இரண்டாவதாக எடுத்தது பழமாக இருத்தல்.

(c) எடுத்த இரண்டில் ஒன்று மாத்திரம் பழமாக இருத்தல்.

4. மோகனின் மாட்டுப் பண்ணையில் 5 எருதுகளும் 15 பசுக்களும் உள்ளன. நாதனின் மாட்டுப் பண்ணையில் 2 எருதுக்களும் 8 பசுக்களும் உள்ளன. மோகனும் நாதனும் ஒரு மாடு வீதம் பரிமாற்றிக் கொள்வதற்கு உடன்பட்டனர். முதலில் மோகன் எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுத்த ஒரு மாட்டை நாதனுக்கு அனுப்பிய பின்னர் நாதன் எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுத்த ஒரு மாட்டை மோகனுக்கு அனுப்பினார்.

(i) மாதிரி வெளியை ஒரு மரவரிப்படத்தில் காட்டுக.

(ii) அதனைக் கொண்டு பின்வரும் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(a) பரிமாறுகையால் மோகனின் மாட்டுப் பண்ணையில் ஓர் எருது குறைதல்.

(b) பரிமாறியமையால் மோகனின் மாட்டுப் பண்ணையில் ஓர் எருது அதிகரித்தல்.

(c) பரிமாறியமையால் இரு மாட்டுப் பண்ணைகளிலும் எருதுகளின் எண்ணிக்கையும் பசுக்களின் எண்ணிக்கையும் மாறாதிருத்தல்.

(iii) ஒரே நாளில் மோகனும் நாதனும் நமது மாட்டுப் பண்ணைகளிலிருந்து ஒரு மாடு வீதம் எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுத்து நண்பன் அப்துலின் வீட்டிற்குச் சென்று அங்கு இரு மாடுகளையும் பரிமாறிக் கொண்டு மாட்டுப் பண்ணை களில் விடுவித்தனர் எனின் மேலே (ii) இல் உள்ள நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

5. ஒரு நோய்க்கு வழங்கப்படும் X, Y ஆகிய மருந்துகள் முறையே 90%, 80% நோயைக் குணப்படுத்தின. ஒரு மருந்தினால் குணப்படுத்தாவிட்டால் மற்றைய மருந்து கொடுக்கப்படும். அதுவும் வெற்றி அளிக்காவிடின் அறுவைச் சிகிச்சை மேற்கொள்ளப்படும்.

(i) இருவகை மருந்துகளை வழங்கிய பின்னர் நோய் குணப்படுவதற்கான நிகழ்தகவை பின்னமாகத் தருக.

(ii) ஒரு நோயாளியில் அறுவை சிகிச்சையை மேற்கொள்வதற்கான நிகழ்தகவைத் தசமமாகக் காட்டுக.

(iii) முதலில் வழங்கும் மருந்திற்கு (X அல்லது Y) ஏற்ப உமது விடைகள் வேறுபடுவதற்கான காரணத்தைக் கலந்துரையாடுக.

6. ஒரு நிறுவனத்தில் பணியாற்றும் எழுதுநர் பதவியையும் தொழிலாளர் பதவியையும் வகிப்பவர்களின் தகவல்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் காணப்படுகின்றது.

பால் / பதவி	ஆண்	பெண்	மொத்தம்
எழுதுநர்	5	8	13
தொழிலாளர்	2	1	3
மொத்தம்	7	9	16

(i) இந்நிறுவனத்திலிருந்து எழுமாற்றாக தெரிந்தெடுத்த ஒருவர்
(a) தொழிலாளர் பதவியை வகிப்பவராக
(b) பெண் எழுதுனராக
(c) பெண் எனின் அவர் தொழிலாளர் பதவியை வகிப்பவராக
இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(ii) இந்நிறுவனத்திலிருந்து எழுதுநர் பதவியை வகிக்கும் ஒருவரும் தொழிலாளர் பதவி வகிக்கும் ஒருவரும் எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுக்கப்படுகின்றர்.
(a) இயலத்தக்க எல்லா பேறுகளையும் ஒரு மரவரிப்படத்தில் காட்டுக.
(b) அதிலிருந்து, தெரிந்தெடுத்த இருவரிடையே ஒருவரேனும் ஆணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

7. ஒரு பெட்டியில் ஒரே அளவுள்ள 2 வெள்ளை நிறப் பந்துகளும் 1 கறுப்பு நிறப் பந்தும் உள்ளன. இவற்றிலிருந்து எழுமாற்றாக ஒரு பந்தை வெளியே எடுத்து அதனை வெளியே இட்டு ஓர் இரண்டாம் பந்து எடுக்கப்படுகின்றது. இவ்வாறு எடுத்த இரு பந்துகளிடையே குறைந்தபட்சம் ஒன்றேனும் வெள்ளைப் பந்தாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

8. A என்னும் ஒரு பெட்டியில் 3 நீல நிற மாபிள்களும் 2 சிவப்பு நிற மாபிள்களும் உண்டு. B என்னும் ஒரு பெட்டியில் 4 நீல நீல நிற மாபில்களும் 5 சிவப்பு நிற மாபிள்களும் உண்டு. பெட்டி A இலிருந்து ஒரு மாபிளை எடுத்து பெட்டி B இலும் பெட்டி B இலிருந்து ஒரு மாபிளை எடுத்து பெட்டி A இலும் இடப்படுகின்றது. பெட்டி A இலுள்ள மாபிள்களின் நிறத் தொகுதி மாறாதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

9. ஒரு குறித்த மகாவித்தியாலயத்தின் தரம் 11 இல் மூன்று சமாந்தர வகுப்புகள் உள்ளன. இம்மூன்று வகுப்புகளிலும் மாணவர் எண்ணிக்கைகள் 2: 2: 3 என்னும் விகிதத்தில் உள்ளன. இம்மூன்று வகுப்புகளிலும் A, B, C என்ற மூன்று ஆசிரியர்கள் கணிதம் கற்பிக்கின்றனர். அதிபர் தமது நம்பிக்கையின் மீது பின்வரும் கூற்றை எடுத்துரைத்துள்ளார். " A கற்பிக்கும் வகுப்பில் 90%மாணவர்களும், B கற்பிக்கும் வகுப்பில் 80% மாணவர்களும் C கற்பிக்கும் வகுப்பில் 60% மாணவர்களும் எதிர்வரும் பரீட்சையில் சித்தியடைவார்கள்'' இக்கூற்றின்படி,

(i) அப்பாடசாலையின் தரம் 11 இலிருந்து எழுமாற்றாகத் தேர்ந்தெடுத்த ஒரு மாணவன் பரீட்சையில் சித்தியடைந்தவனாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

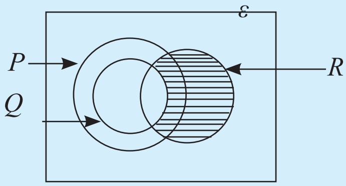
(ii) மேலே (i) இன் விடை மீது சித்தியடைந்த சதவீதத்தை மதிப்பிடுக.

மீட்டற் பயிற்சி
3 ஆம் தவணை

பகுதி I

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள சமனிலியைத் தீர்த்து, தீர்வுகளை ஓர் எண்கோட்டின் மீது குறிக்க.

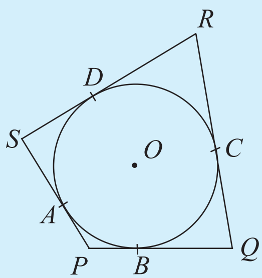
$2x + 5 \leq 15$

2. 

தரப்பட்டுள்ள வென் வரிப்படத்தில் நிழற்றப்பட்டுள்ள பிரதேசத்தைத் தொடைக் குறிப்பீட்டில் எழுதுக.

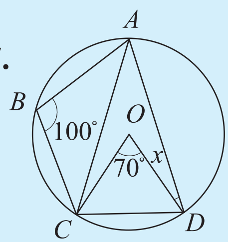
3. ஓர் இருசமபக்கச் செங்கோண முக்கோணியில் செம்பக்கத்தின் மீது வரையப்பட்ட சதுரத்தின் பரப்பளவு 64 cm^2 ஆகும். எஞ்சிய ஒரு பக்கத்தின் மீது வரையப்பட்ட ஒரு சதுரத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

4. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ q \end{pmatrix}$ எனின் p, q ஐ காண்க.

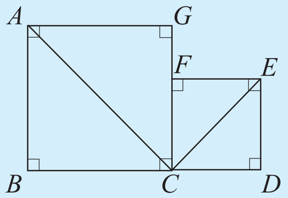
5. 

உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்தில் பரிதியின்மீது அமைந்துள்ள A, B, C, D ஆகிய புள்ளிகளில் வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடலிகள் உருவில் உள்ளவாறு P, Q, R, S என்பவற்றில் ஒன்றையொன்று சந்திக்கின்றன. $PQ + SR = 20$ cm ஆயின் $PQRS$ இன் சுற்றளவைக் காண்க.

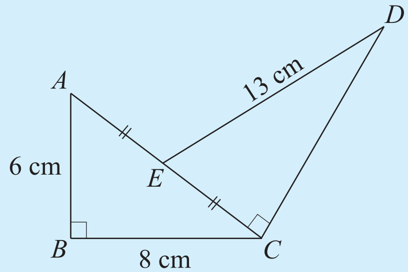
6. A , B ஆகியன ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையில் இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் ஆவதுடன் $P(A) = 0.4$ உம் $P(A \cup B) = 0.7$ உம் ஆகும். A, B ஆகியன சாரா நிகழ்ச்சிகள் ஆயின் $P(B)$ இன் பெறுமானம் காண்க.

7. 

உருவில் தரப்பட்டுள்ள O ஐ மையமாகவுடைய வட்டத்தில் $C\hat{O}D = 70^\circ$ உம் $C\hat{B}A = 100^\circ$ உம் ஆகும். $O\hat{D}A$ இன் பெறுமானம் காண்க.

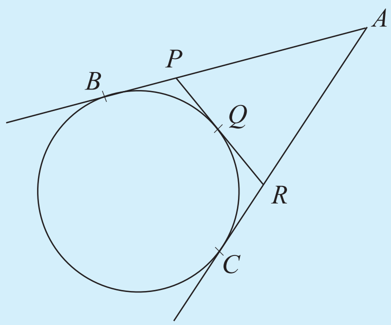
8. 

உருவில் தரப்பட்டுள்ள $ABCG$, $FCDE$ ஆகியன சதுரங்களாகும். $AC^2 = 12\text{ cm}^2$, $CE^2 = 6\text{ cm}^2$ ஆயின் உருவின் மொத்தப் பரப்பளவைக் காண்க.

9. 

உருவில் தரப்பட்டுள்ள ABC, ECD ஆகியன செங்கோண முக்கோணிகளாகும். உருவின் மொத்தப் பரப்பளவைக் காண்க.

10. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ஆயின் $-2A$ என்னும் தாயத்தை எழுதுக.

11. 

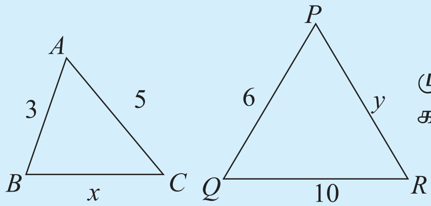
தரப்பட்டுள்ள உருவில் A இலிருந்து வட்டத்துக்கு வரையப்பட்டுள்ள தொடலிச் சோடி AB, AC ஆகும். Q இல் வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடலியானது AB , AC ஆகிய பக்கங்களை P, R ஆகியவற்றில் சந்திக்கின்றன. $\Delta\ APR$ இன் சுற்றளவு 18 cm ஆயின் AB இன் நீளத்தைக் காண்க.

12. வெற்றிடத்துக்குப் பொருத்தமான உருவின் எண்ணை எழுதுக.

(a) சுற்றுவட்டத்தின் மையமானது ஒரு பக்கத்தின் மீது அமைவது .... வகையிலான முக்கோணியில் ஆகும்.

(b) சுற்றுவட்டத்தின் மையமானது முக்கோணியின் வெளியே அமைவது .... வகையிலான முக்கோணியிலாகும்.

(c) சுற்றுவட்டத்தின் மையமானது முக்கோணியின் உள்ளே அமைவது .... வகையிலான முக்கோணியில் ஆகும்.

13. 

ΔABC, ΔPQR என்பன சமகோண முக்கோணிகள் எனின் x , y ஆகியவற்றைக் காண்க.

14. $4x + 3 \geq 8$ என்னும் சமனிலியைத் திருப்தி செய்யும் x இன் நிறைவெண் தீர்வுகளை ஓர் எண்கோட்டின்மீது குறிக்க.

15. $y = x^2 + 5x + 9$ என்னும் சார்பின் வரைபின் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை வரைபை வரையாது எழுதுக.

பகுதி II

1. செங்கோண முக்கோணி ABC இல் $A\hat{B}C = 90^\circ$ ஆகும்.

(i) P என்பது BC இன் நடுப்புள்ளி ஆகும்போது $4\,(AP^2 - AB^2) = BC^2$ எனக் காட்டுக.

(ii) Q என்பது பக்கம் AB இன் நடுப்புள்ளி ஆகும்போது $4\,(CQ^2 - BC^2) = AB^2$ எனக் காட்டுக.

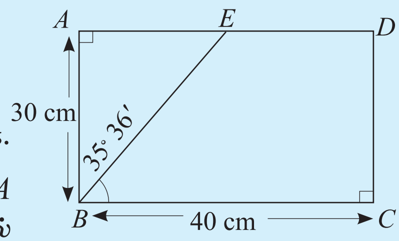
(iii) மேலே பெற்ற (i), (ii) ஆகியவற்றின் விடைகளைப் பயன்படுத்தி $4\,(AP^2 + CQ^2) = 5\,AC^2$ என உய்த்தறிக.

(iv) மேற்குறித்த முக்கோணி ABC இருசமபக்கச் செங்கோண முக்கோணி ஆகும்போது மேலே (iii) இல் பெற்ற விடையைப் பயன்படுத்தி $AP{:}QP = \sqrt{5} : \sqrt{2}$ எனக் காட்டுக.

2. (a) $ABCD$ ஒரு செவ்வகமாகும். திரிகோணகணித அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி

(i) AE இன் நீளத்தைக் காண்க.

(ii) சரிவகம் $BCDE$ இன் சுற்றளவைக் கணிக்க.



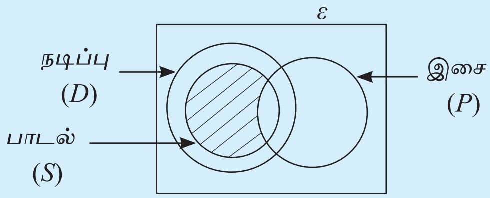
(b) A, B, C ஆகிய மூன்று நகரங்கள், நகரம் A இலிருந்து 040° திசைகோளில் 50 km தூரத்தில் நகரம் B உம், நகரம் B இலிருந்து 270° திசைகோளிலும் A இற்கு வடக்கேயும் நகரம் C உம் அமையுமாறு உள்ளன.

(i) பொருத்தமான பருமட்டான ஓர் உருவை வரைந்து மேலே தரப்பட்ட தகவல்களைக் குறிக்க.

(ii) நகரம் A இலிருந்து நகரம் C இற்குள்ள தூரத்தைக் காண்க.

(iii) இம்மூன்று நகரங்களுக்கும் நீரை வழங்குவதற்காக நீரைச் சேமிக்கக் கூடிய பாரிய ஒரு நீர்த்தாங்கியுடனான ஒரு கோபுரம் அமைக்க வேண்டியிருப்பதுடன், கோபுரத்திலிருந்து ஒவ்வொரு நகரத்துக்கும் நீரை வழங்கும் நீர்க்குளங்களின் நீளங்கள் சமனாகுமாறு அதனை அமைப்பதற்குப் பொருத்தமான இடத்தை மேற்குறித்த உருவில் T எனக் குறித்துக் காட்டுக.

3. 160 மாணவர்கள் கலந்து கொண்ட ஒரு கலை நிகழ்ச்சியில் பங்கேற்ற மாணவர் பற்றிய தகவல்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.



கலை நிகழ்ச்சியில் கலந்து கொண்டவர்களில் $\frac{1}{4}$ பங்கினர் நடிப்பு, பாடல், இசை ஆகியவற்றில் ஒன்றிலேனும் பங்கேற்றனர். இசை, நடிப்பு ஆகியவற்றில் பங்கேற்ற 16 பேரில் 6 பேர் பாடலிலும் பங்கேற்றனர். இசையில் மாத்திரம் பங்கேற்ற எண்ணிக்கையின் இரண்டு மடங்கினர் பாடலிலும் நடிப்பிலும் மட்டும் பங்கேற்றதுடன் ஐந்து மடங்கினர் நடிப்பில் மட்டும் கலந்துக் கொண்டனர்.

இங்கு முன்வைக்கப்பட்டுள்ள வென் உருவை உங்களது அப்பியாசக் கொப்பியில் பிரதிசெய்து உரிய வினாக்களுக்கு விடை தருக.

(i) மேலேயுள்ள தகவல்களை வென்னுருவில் சரியாகக் குறிக்க. நடிப்பு, பாடல், இசை ஆகிய மூன்றிலும் பங்கேற்றவர்கள் எத்தனைப் பேர்?

(ii) இசையில் மாத்திரம் பங்கேற்றவர்கள் எத்தனைப் பேர்?

(iii) ஓர் அம்சத்தில் மாத்திரம் பங்கேற்றவர்களின் எண்ணிக்கையை மொத்த மாணவரின் பின்னமாகத் தருக.

(iv) $(S' \cap D) \cap P$ இன் மூலம் குறிக்கப்படும் தொடைக்கு உரியவர்கள் எதில் கலந்து கொண்டனர் என்பதை விபரிக்க. அம்மாணவர்களின் எண்ணிக்கை யாது?

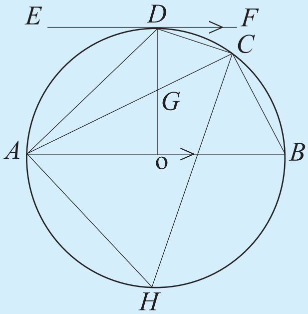
(v) வென்னுருவில் நிழற்றப்பட்டுள்ள பிரதேசத்தை உரிய தொடைக் குறிப்பீட்டில் எழுதுக.

4. A, B ஆகிய இரண்டு பாத்திரங்களில் வேறு நிறங்களிலான அளவில் சமனான பந்துகள் இடப்பட்டுள்ளன. பாத்திரம் A இல் 3 கறுப்பு பந்துகளும் 2 வெள்ளைப் பந்துகளும் பாத்திரம் B இல் 2 கறுப்பு பந்துகளும் 3 வெள்ளைப் பந்துகளும் உள்ளன. ஒருவர் பாத்திரம் A இலிருந்து ஒரு பந்தை எடுத்து பாத்திரம் B இல் இட்டு பின்னர் பாத்திரம் B இலிருந்து ஒரு பந்தை வெளியே எடுத்தார்.

(i) மேற்குறித்த நிகழ்ச்சிகளுக்குரிய நிகழ்தகவுகளைக் காட்டும் மர வரிப்படத்தை வரைக.

(ii) மரவரிப் படத்திலிருந்து இரண்டு தடவைகளிலும் ஒரே நிறத்திலான பந்துகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

5.



உருவில் உள்ளவாறு O ஐ மையமாகவுடைய வட்டத்தில் AB என்பது விட்டமாகும். வட்டத்துக்கு D இல் வரையப் பட்டுள்ள தொடலி EF ஆனது AB இற்குச் சமாந்தரமாகும்.

(i) $A\hat{B}D$ இற்குச் சமனான இரண்டு கோணங்களை எழுதுக.

(ii) $E\hat{D}O$ இன் பெறுமானம் காண்க.

(iii) $OBCG$ ஒரு வட்ட நாற்பக்கல் எனக் காட்டுக.

6. கவராயம் mm/cm அளவுத் திட்டத்தையுடைய நேர் விளிம்பு ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி அமைப்புக் கோடுகளைத் தெளிவாகக் காட்டி,

(i) $AB = 8$ cm, $A\hat{B}C = 90^\circ$, $BC = 4$ cm ஆகுமாறு முக்கோணி ABC ஐ அமைக்க.

(ii) $DC = 2$ cm உம் $DC \,//\, AB$ உம் ஆகுமாகுமாறு சரிவகம் $ABCD$ ஐ அமைக்க.

(iii) நீட்டப்பட்ட பக்கம் CB ஐ G இலும் பக்கம் CA ஐ E இலும் பக்கம் AB ஐ F இலும் வெளிபுறமாகத் தொட்டுச் செல்லும் வட்டத்தை வரைக.

கலைச் சொற்கள்

அயற் பக்கம்	බද්ධ පාදය	Adjacent side
அகத்தெதிர் கோணம்	අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණය	Interior opposite angle
அலகுத் தாயம்	ඒකක න්‍යාසය	Unit matrix
ஆரை	අරය	Radius
உள்வட்டம்	අන්තර්වෘත්තය	Inscribed circle
எதிர்க் கோணங்கள்	සම්මුඛ කෝණ	Opposite angles
எதிர்ப் பக்கங்கள்	සම්මුඛ පාදය	Opposite side
எதிரமை	ආපාතිත	Subtended
எழுமாற்றுப் பரிசோதனை	සසම්භාවී පරීක්ෂණ	Randam Experiments
ஏறிகள்	අනුමේයයන්	Riders
ஒரே துண்டக் கோணங்கள்	ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩය	Angles in the same segment
ஒழுக்கு	පථය	Locus
கோசைன்	කෝසයිනය	Cosine
சதுரத் தாயம்	සමචතුරස්‍ර න්‍යාසය	Square of a matrix
சமச்சீர்த் தாயம்	සමමිතීය න්‍යාසය	Symmetric matrix
சார் நிகழ்ச்சி	පරායත්ත සිද්ධි	Dependent Events
சாரா நிகழ்ச்சிகள்	ස්වායත්ත සිද්ධි	Independent events
சுற்று வட்டம்	පරිවෘත්තය	Circumcircle
செங்குத்து	ලම්භකය	Perpendicular
செங்கோண முக்கோணம்	සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණ	Right angled triangles
செம்பக்கம்	කර්ණය	Hypotenuse
சைன்	සයිනය	Sine
தாயங்கள்	න්‍යාස	Matrices
தாயத்தின் வரிசை	න්‍යාසයේ ගණය	Order of a matrix
தாயமொன்றின் மூலகங்கள்	න්‍යාසයක අවයව	Elements of a matrix
திரிகோணகணிதம்	ත්‍රිකෝණමිතිය	Trignometry

திரிகோணகணித விகிதங்கள்	ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත	Trignometric Ratios
தீர்வுத் தொடை	විසඳුම් කුලකය	Solution set
தொடலி	ස්පර්ශකය	Tangent
தொடை	කුලකය	Set
தொடைகளின் இடைவெட்டு	කුලක ඡේදනය	Intersection of sets
தொடைகளின் ஒன்றிப்பு	කුලක මේලය	Union of sets
நாண்	ජ්‍යාය	Chord
நிரற் தாயம்	තීර න්‍යාසය	Column matrix
நிரைத் தாயம்	පේළි න්‍යාසය	Row matrix
நெய்யரி	කොටු දැල	Grid
புள்ளி	ලක්ෂ්‍යය	Point
புறக்கோணம்	බාහිර කෝණය	Exterior angle
புறப்புள்ளி	බාහිර ලක්ෂ්‍යය	Exterior point
பைதகரசின் தேற்றம்	පයිතගරස් ප්‍රමේයය	Pythagoras' theorem
பைதகரசின் மும்மை	පයිතගරස් ත්‍රික	Pythagoras' triple
மரவரிப்படம்	රුක් සටහන	Tree Diagram
மாதிரிவெளி	නියැදි අවකාශය	Sample space
மிகை நிரப்புகின்ற	පරිපූරක	Supplementary
மூலகம்	අවයව	Element
மையம்	කේන්ද්‍රය	Centre
வட்டம்	වෘත්තය	Circle
வட்ட நாற்பக்கல்	වෘත්ත චතුරස්‍ර	Cyclic Quadrilateral
வட்டத்துத்துண்டம்	වෘත්ත ඛණ්ඩය	Segment of a circle
வெளி வட்டம்	බාහිර වෘත්තය	Outer Circle

பாடத்திட்டம்

உள்ளடக்கம்	தேர்ச்சி மட்டம்
முதலாம் தவணை	
1. மெய்யெண்கள்	10
2. சுட்டிகளும் மடக்கைகளும் I	08
3. சுட்டிகளும் மடக்கைகளும் II	06
4. திண்மங்களின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு	05
5. திண்மங்களின் கனவளவு	05
6. ஈருறுப்புக் கோவைகள்	04
7. அட்சரகணிதப் பின்னங்கள்	04
8. சமாந்தர கோடுகளுக்கிடையில் உள்ள தளவுருவங்களின் பரப்பளவு	12
இரண்டாம் தவணை	
09. சதவீதம்	06
10. பங்குச் சந்தை	05
11. நடுப்புள்ளித் தேற்றம்	05
12. வரைபுகள்	12
13. சமன்பாடுகள்	10
14. இயல்பொத்த முக்கோணிகள்	12
15. தரவுகளை வகைகுறித்தல்	12
16. பெருக்கல் விருத்தி	06
மூன்றாம் தவணை	
17. பைதகரசின்ள தேற்றம்	04
18. திரிகோண கணிதம்	12
19. தாயங்கள்	08
20. சமனிலிகள்	06
21. வட்ட நாற்பக்கல்	10
22. தொடலிகள்	10
23. அமைப்புகள்	05
24. தொடைகள்	06
25. நிகழ்தகவு	07