08

நேர்கோடுகள், சமாந்தரக் கோடுகள் ஆகியவற்றுடன் தொடர்புபட்ட கோணங்கள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- ✸ நேர்கோடுகளுடன் தொடர்புபட்ட கோணங்கள்
- ✸ குத்தெதிர்க் கோணங்களுடன் தொடர்புபட்ட தேற்றத்தின் நிறுவலும் பயன்பாடும்
- ✸ சமாந்தரக் கோடுகளுடன் தொடர்புபட்ட கோணங்கள் பற்றிய தேற்றத்தின் பயன்பாடு

என்னும் தேர்ச்சிகளை அடைவீர்கள்.

8.1 வெளிப்படையுண்மைகளும் தேற்றமும்

இதற்கு முந்திய தரங்களில் பல்வேறு வகைக் கோணங்கள் பற்றி நீங்கள் கற்றீர்கள். அவற்றைப் பற்றி மேலும் விடயங்களைக் கற்றல் இப்பாடத்திலிருந்து எதிர்பார்க்கப்படுகின்றது. அதற்கு முக்கியத்துவம் வாய்ந்த சில வெளிப்படையுண்மைகள் பற்றி முதலில் வாய்ப்புப் பார்ப்போம்.

வெளிப்படையுண்மை 1

இரு சம கணியங்களுடன் ஒரே கணியத்தைக் கூட்டும்போது கிடைக்கும் கணியங்களும் சமம்.

அதாவது $a = b$ எனின்,

$a + c = b + c$ ஆகும்.

வெளிப்படையுண்மை 2

இரு சம கணியங்களிலிருந்து ஒரே கணியத்தைக் கழிக்கும்போது கிடைக்கும் கணியங்களும் சமம்.

அதாவது $a = b$ எனின்,

$a - c = b - c$ ஆகும்.

வெளிப்படையுண்மை 3

இரு சம கணியங்களை ஒரே கணியத்தினால் பெருக்கும்போது கிடைக்கும் கணியங்களும் சமம்.

அதாவது $a = b$ எனின்,

$na = nb$ ஆகும்.

வெளிப்படையுண்மை 4

இரு சம கணியங்களை ஒரே பூச்சியமல்லாத கணியத்தினால் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் கணியங்களும் சமம்.

அதாவது $a = b$ எனின்,

$$\frac{a}{n} = \frac{b}{n} \text{ ஆகும். } (n \neq 0)$$

வெளிப்படையுண்மை 5

ஒரே கணியத்திற்குச் சமமான கணியங்களும் சமம்.

அதாவது, $a = b$, $a = c$ எனின்

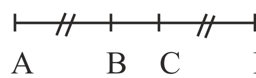
$b = c$ ஆகும்.

மேற்படி வெளிப்படையுண்மைகளைக் கேத்திரகணிதத்தில் பயன்படுத்தலாம்.

உதாரணம் 8.1

உருவில் AB = CD எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

AC = BD எனக் காட்டுக.



AB = CD ஆகையால்

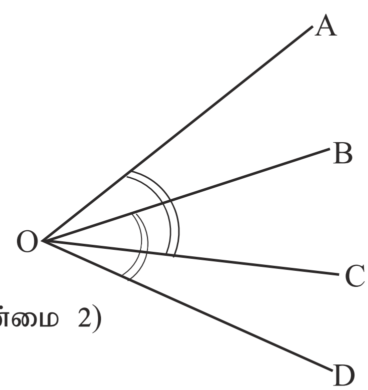
AB + BC = CD + BC (வெளிப்படையுண்மை 1)

AC = BD

உதாரணம் 8.2

உருவில் $A\hat{O}C = B\hat{O}D$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$A\hat{O}B = C\hat{O}D$ எனக் காட்டுக.



$A\hat{O}C = B\hat{O}D$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$A\hat{O}C - B\hat{O}C = B\hat{O}D - B\hat{O}C$ (வெளிப்படையுண்மை 2)

$A\hat{O}B = C\hat{O}D$

பயிற்சி 8.1

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள தொடர்புடைமைகளுக்கேற்ப வெளிப்படையுண்மைகளைக் கொண்டு அடையத்தக்க முடிபை எழுதுக.

(i) PQ = RS
PQ = ST

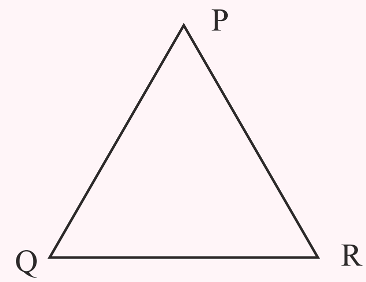
(ii) $x + y = 180^{o}$
$p + q = 180^{o}$

(iii) $P\hat{O}Q = 30^{o}$
$R\hat{S}T = 30^{o}$

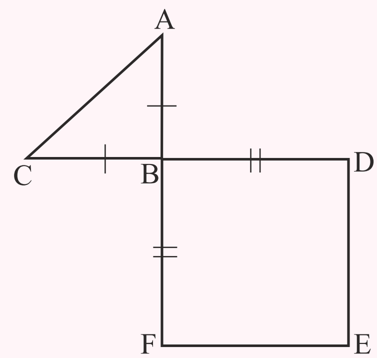
(iv) LM = 3.5 cm
MN = 3.5 cm

2. பின்வரும் தரவுகளைக் கொண்டு எடுக்கக்கூடிய முடிபுகள் யாவை?

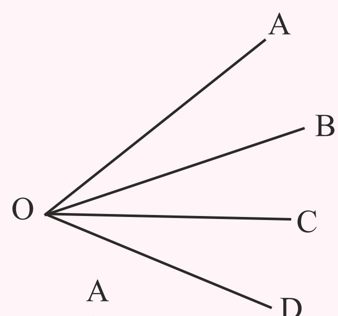
(i) முக்கோணி PQR இல்
$PQ = PR$
$PR = QR$



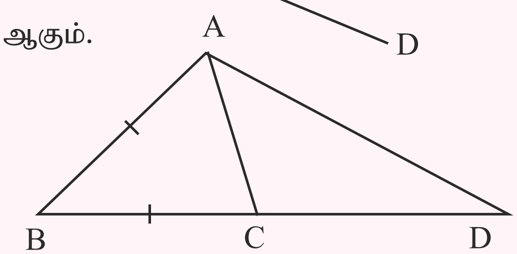
(ii) உருவில்
$AB = BC$
$BD = BF$



(iii) உருவில்
$A\hat{O}B = B\hat{O}C$
$C\hat{O}D = B\hat{O}C$



(iv) முக்கோணி ABDயில்
BD யின் நடுப்புள்ளி C ஆகும்.
$BC = BA$ ஆகும்.

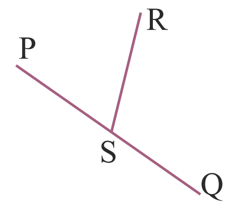


8.2 அடுத்துள்ள கோணங்களும் குத்தெதிர்க் கோணங்களும்

உருவில் காணப்படும் கோடு PQ ஆனது நேர்கோடு RS ஐச் சந்திக்கின்றது. இங்கு உண்டாகும் $P\hat{S}R$, $R\hat{S}Q$ ஆகிய கோணங்கள் மிகைநிரப்பும் அடுத்துள்ள கோணங்களென மேலே கற்றீர்கள்.

அதாவது,

$$P\hat{S}R + R\hat{S}Q = 180^{\circ}$$



இதனை ஒரு தேற்றமாக எழுதிக் காட்டலாம்.

கி.மு. 300 ஆம் ஆண்டில் வாழ்ந்த யூக்கிளிட்டு **(Euclid)** என்ற கணிதவியலாளர் கேத்திரகணிதத்தில் பயன்படுத்தத்தக்க பல தேற்றங்களை ஒழுங்காகக் குறிப்பிட்டு **Elements** என்னும் நூலை உருவாக்கினார். நாம் தற்போது கேத்திரகணிதத்தில் இத்தேற்றங்களைப் பயன்படுத்துகின்றோம். வெளிப்படையுண்மைகளைக் கொண்டு தர்க்கரீதியான காரணங்களுடன் உண்மையெனக் காட்டத்தக்க கூற்றுகள் தேற்றங்கள் எனப்படும்.

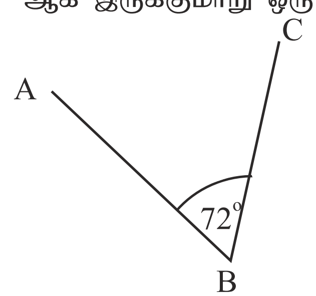
இது ஓர் அடிப்படைத் தேற்றமாகக் கருதப்படுகின்றமையால் இத்தேற்றத்தை நிறுவுவதற்கு வெளிப்படையுண்மைகளைப் பயன்படுத்துகின்றோம்.

தேற்றம் 1

ஒரு நேர்கோடு வேறொரு நேர்கோட்டினைச் சந்திக்கும்போது உண்டாகும் இரு அடுத்துள்ள கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை இரு செங்கோணங்களுக்குச் சமம்.

செயற்பாடு

உருவில் காணப்படுகின்றவாறு $A\hat{B}C = 72^{\circ}$ ஆக இருக்குமாறு ஒரு கோணத்தை வரைக.



$A\hat{B}C$ யின் மிகைநிரப்பும் அடுத்துள்ள கோணத்தின் பருமனைக் கணிக்க.

அது $180^{\circ} - 72^{\circ} = 108^{\circ}$ எனக் கிடைக்கும்.

CB ஒரு புயமாகவும் B உச்சியாகவும் இருக்குமாறு 108°கோணத்தை $A\hat{B}C$ யை அடுத்து வரைக.

அதனை $C\hat{B}D$ எனப் பெயரிடுக.

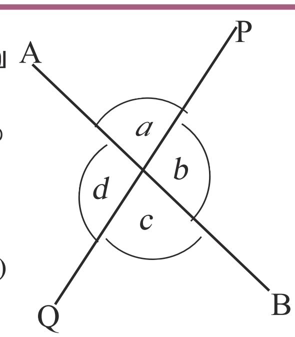
இப்போது நேர் விளிம்பைப் பயன்படுத்தி ABDஒரு நேர்கோடாவெனச் சோதிக்க. நீர் எடுக்கக்கூடிய முடிவு யாது?

AB, PQ என்னும் இரு நேர்கோடுகள் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டுகின்றன.

a, b, c, d ஆகியவற்றின் மூலம் உண்டாகும் கோணங்களின் பருமன்கள் காட்டப்படுகின்றன.

இப்போது AB ஒரு நேர்கோடு ஆகையால்

$a + b = 180^{\circ}$ — (1) (மேற்குறித்த தேற்றம் 1 இற்கேற்ப)



அவ்வாறே, PQ ஒரு நேர்கோடு ஆகையால்

$b + c = 180^\circ$ — (2)

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து

$a + b = b + c$ (வெளிப்படையுண்மை 5 இற்கேற்ப)

$a + b - b = b + c - b$ (வெளிப்படையுண்மை 2 இற்கேற்ப)

$\therefore a = c$

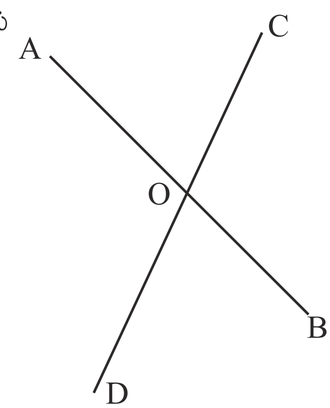
இதற்கேற்ப இரு நேர்கோடுகள் இடைவெட்டும்போது உண்டாகும் குத்தெதிர்க் கோணங்கள் சமமெனத் தர்க்கரீதியான காரணங்களின் மூலம் காட்டலாம். என்பது உங்களுக்குத் தெளிவாக இருக்கும். இச்செயன்முறை தேற்றத்தை நிறுவலாகும்.

நிறுவல்

நிறுவல் என்பதால் கருதப்படுவது வெளிப்படை உண்மை, அதற்குமுன்னர் பயன்படுத்திய தேற்றங்கள் என்பவற்றிலிருந்து தர்க்க ரீதியாக காரணங்களை முன்வைத்து ஒரு முடிபுக்கு வருதலாகும்.

தேற்றம் 2

இரு நேர்கோடுகள் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டும்போது உண்டாகும் குத்தெதிர்க் கோணங்கள் சமம்.



தரவு :- AB,CD என்னும் நேர்கோடுகள் O இல் இடைவெட்டுகின்றன.

நிறுவ வேண்டியது:- $A\hat{O}C = D\hat{O}B$ அத்தோடு

$A\hat{O}D = C\hat{O}B$

நிறுவல் :- $A\hat{O}C + C\hat{O}B = 180^\circ$ --- (1)

(AB நேர்கோடாகையால்)

$C\hat{O}B + B\hat{O}D = 180^\circ$ --- (2)

(CD நேர்கோடாகையால்)

(1), (2) ஆகியவற்றுக்கேற்ப

$A\hat{O}C + C\hat{O}B = C\hat{O}B + B\hat{O}D$ (வெளிப்படையுண்மை 5 இற்கேற்ப)

$A\hat{O}C = B\hat{O}D$ (வெளிப்படையுண்மை 2 இற்கேற்ப)

இவ்வாறே

$C\hat{O}B + B\hat{O}D = 180^\circ$ --- (2) (CD நேர்கோடாகையால்)

$A\hat{O}D + B\hat{O}D = 180^\circ$ ------ (4) (AB நேர்கோடாகையால்)

(2), (3) ஆகியவற்றுக்கேற்ப

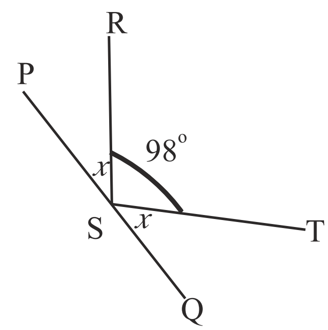
$C\hat{O}B + B\hat{O}D = A\hat{O}D + B\hat{O}D$ (வெளிப்படையுண்மை 5 இற்கேற்ப)

$C\hat{O}B = A\hat{O}D$ (வெளிப்படையுண்மை 2 இற்கேற்ப)

இதுவரைக்கும் கற்ற இரு தேற்றங்களையும் கொண்டு பின்வருமாறு பயிற்சிகளைச் செய்யலாம்.

உதாரணம் 8.3

உருவில் PQ, RS , ST ஆகியன நேர்கோடுகளாகும். x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



$x^{o} + 98^{o} + x^{o} = 180^{o}$ (PQ நேர்கோடாகையால்)

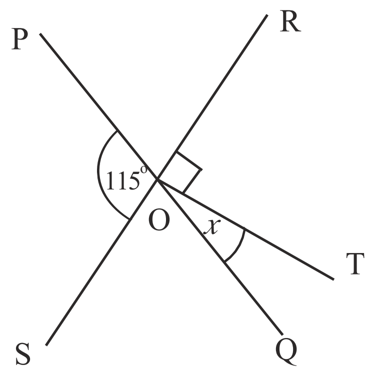
$2x = 180^{o} - 98^{o}$

$2x = 82^{o}$

$x = 41^{o}$

உதாரணம் 8.4

உருவில் PQ, RS ஆகிய நேர்கோடுகள் O இல் வெட்டுகின்றன. x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



$P\hat{O}S = R\hat{O}Q$ (குத்தெதிர்க்கோணங்கள்)

$P\hat{O}S = 115^{o}$

$\therefore R\hat{O}Q = 115^{o}$

ஆனால் $R\hat{O}Q = R\hat{O}T + T\hat{O}Q$

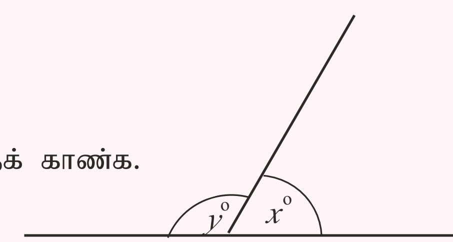
$115^{o} = 90 + x^{o}$

$90^{o} + x^{o} = 115^{o}$

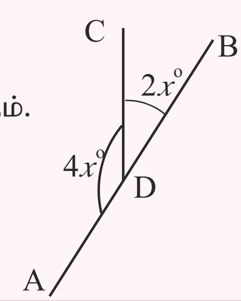
$x^{o} = 25^{o}$

பயிற்சி 8.2

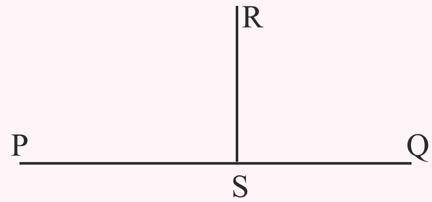
1. தரப்பட்டுள்ள உருவில் $x = 75$ எனின், y யின் பெறுமானத்தைக் காண்க.



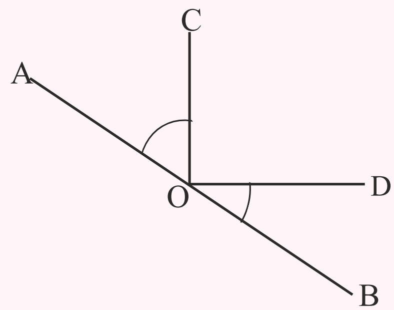
2. உருவில் AB, CD ஆகியன இரு நேர்கோடுகளாகும். $B\hat{D}C$, $A\hat{D}C$ ஆகியவற்றின் பருமனைக் காண்க.



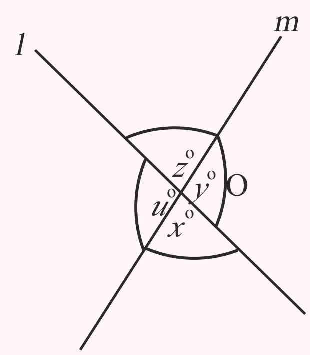
3. உருவில் PQ , RS ஆகியன இரு நேர்கோடுகளாகும்.
$P\hat{S}R = R\hat{S}Q$ எனின், $P\hat{S}R$ இன் பருமனைக் காண்க.



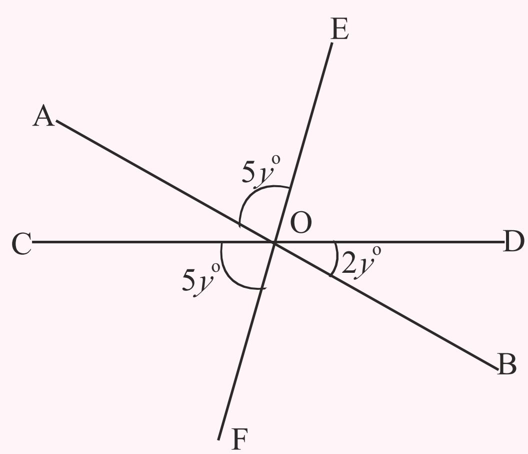
4. உருவில் AB, CO, OD ஆகியன நேர்கோடுகள். $A\hat{O}C + B\hat{O}D = 90^{o}$ ஆகும். $C\hat{O}D$ யின் பருமனைக் காண்க.



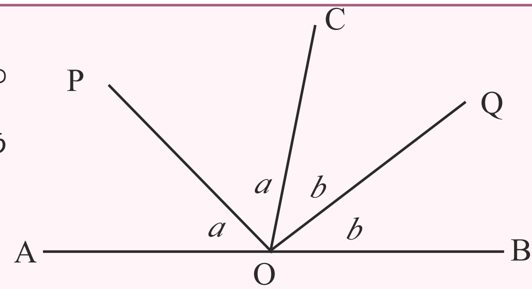
5. உருவில் l, m ஆகிய நேர்கோடுகள் O இல் இடைவெட்டுகின்றன. $x = 45^{o}$, எனின் y, z, u ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



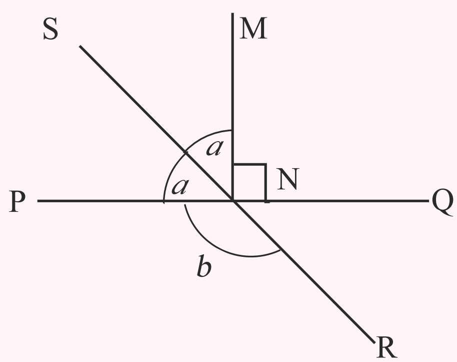
6. உருவில் AB, CD, EF ஆகிய நேர்கோடுகள் O இல் இடை வெட்டுகின்றன. y யின் பெறுமானத்தைக் காண்க.



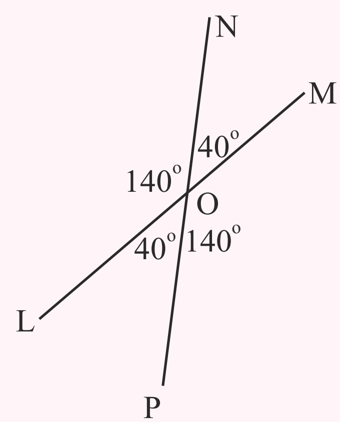
7. உருவில் OP யினால் $A\hat{O}C$ யும் OQ வினால் $C\hat{O}B$ யும் இரு சமகூறாக்கப்படுகின்றன. $P\hat{O}Q = 90^{o}$ எனக் காட்டுக.



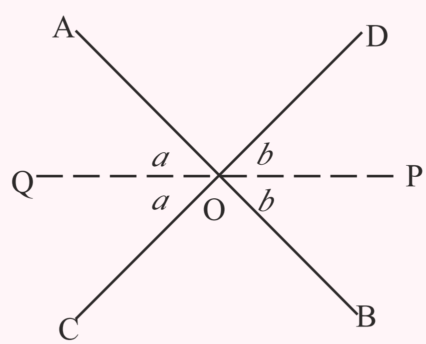
8 .



உருவில் PQ, SR, MN ஆகிய நேர்கோடுகள் N இல் சந்திக்கின்றன. a, b ஆகியவற்றின் பெறுமானத்தைக் காண்க.



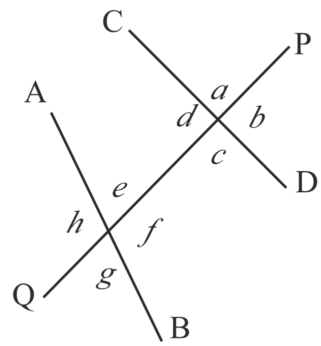
9. உருவில் NO, LO, PO, MO ஆகிய நேர்கோடுகள். O இல் சந்திக்கின்றன. கோணங்களின் பெறுமானங்களுக்கேற்ப மேலும் இரு நேர்கோடுகளைப் பெயரிடுக.



10. AB, CD ஆகியன நேர்கோடுகள். OP, OQ ஆகியன முறையை $D\hat{O}B$, $A\hat{O}C$ ஆகியவற்றின் இருகூறாக்கிகளாகும். QOP ஒரு நேர்கோடெனக் காரணங்களுடன் காட்டுக.

8.3 சமாந்தரக் கோடுகளுடன் தொடர்புபட்ட கோணங்கள்

ஒரு குறுக்கோடியினால் இரு நேர்கோடுகள் இடைவெட்டப்படும்போது உண்டாகும் ஒத்த கோணங்கள், ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள், நேயக் கோணங்கள் என்பன பற்றி நீங்கள் தரம் 8 இல் கற்றீர்கள்.



உருவில் காணப்படும் AB, CD என்னும் இரு நேர்கோடுகள் ஒரு குறுக்கோடி PQ இனால் இடைவெட்டப்பட்டுள்ளன. a, b, c, d, e, f, g, h ஆகியவற்றினால் கோணங்களின் பருமன் காட்டப்பட்டுள்ளது.

(i) b, f ஆகியன ஓர் ஒத்த கோணச் சோடியாகும். வேறு மூன்று ஒத்த கோணச் சோடிகளைப் பெயரிடுக.

(ii) c, e ஆகியவற்றின் மூலம் ஓர் ஒன்றுவிட்ட கோணச் சோடி காட்டப்பட்டுள்ளது. வேறொரு ஒன்றுவிட்ட கோணச் சோடியைப் பெயரிடுக.

(iii) c, f ஆகியவற்றின் மூலம் ஒரு நேயக் கோணச் சோடி காட்டப்பட்டுள்ளது. வேறொரு நேயக் கோணச் சோடியைப் பெயரிடுக.

தேற்றம் 3

இரு நேர்கோடுகளை ஒருகுறுக்கோடி வெட்டும்போது உண்டாகும்

(i) ஒத்த கோணச் சோடிகள் சமமெனின் அல்லது

(ii) ஒன்றுவிட்ட கோணச் சோடிகள் சமமெனின் அல்லது

(iii) நேயக் கோணச் சோடியின் கூட்டுத்தொகை 180^{O} எனின், அவ்விரு நேர்கோடுகளும் ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரம்.

இத்தேற்றத்தையும் ஓர் அடிப்படைத் தேற்றமாகக் கருதி நிறுவலின்றிப் பயன்படுத்தலாம். உருவில் AB, CD ஆகிய இரு நேர்கோடுகளையும் குறுக்கோடி PQ இடைவெட்டும்போது உண்டாகும்

(i) ஒத்த கோணங்களாகிய

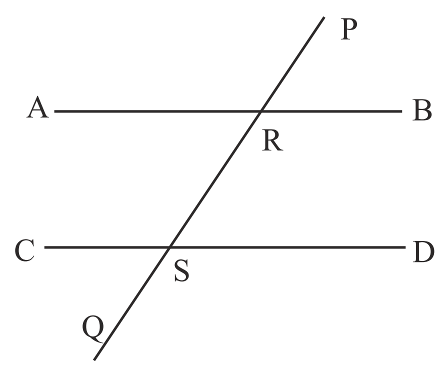
$P\hat{R}B$, $R\hat{S}D$

$B\hat{R}S$, $D\hat{S}Q$

$A\hat{R}S$, $C\hat{S}Q$

$A\hat{R}P$, $C\hat{S}R$

என்னும் நான்கு சோடிகளில் ஒன்று சமமெனின், AB, CD ஆகிய இரு கோடுகளும் சமாந்தரமாகும்.



(ii) ஒன்றுவிட்ட கோணங்களாகிய

$B\hat{R}S$, $C\hat{S}R$

$A\hat{R}S$, $R\hat{S}D$ என்னும் இரு சோடிகளில் ஒன்று சமமெனின்,

AB, CD ஆகிய இரு கோடுகளும் சமாந்தரம் ஆகும்.

(iii) நேயக் கோணங்களாகிய

$B\hat{R}S$, $R\hat{S}D$

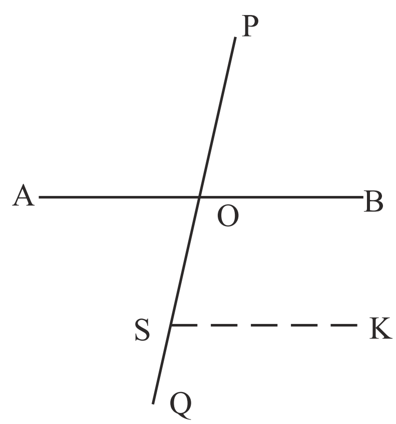
$A\hat{R}S$, $C\hat{S}R$ என்னும் இரு சோடிகளில் கூட்டுத்தொகை 180^{O} எனின், AB, CD ஆகிய இரு கோடுகளும் சமாந்தரம் ஆகும்.

செயற்பாடு

1. ஒன்றையொன்று இடைவெட்டும் AB, PQ என்னும் இரு கோடுகளை வரைக.

2. பாகைமானியினால் $P\hat{O}B$ யின் பருமனை அளக்க.

3. கோடு OQ மீது புள்ளி S ஐக் குறிக்க. $P\hat{O}B = O\hat{S}K$ ஆகுமாறு புள்ளி B இருக்கும் பக்கத்தில் புள்ளி K ஐக் குறிக்க. SK யைத் தொடுக்க.

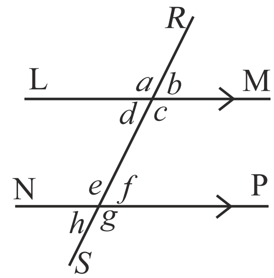


4. மூலைமட்டத்தைப் பயன்படுத்தி ABயும் SKயும் சமாந்தரமாவென வாய்ப்புப் பார்க்க.

தேற்றம் 4

இரு சமாந்தர நேர்கோடுகளை ஒரு குறுக்கோடி வெட்டும்போது உண்டாகும்
(i) ஒத்த கோணங்கள் சமம்
(ii) ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமம்
(iii) நேயக் கோணச் சோடியின் கூட்டுத்தொகை 180^{O} ஆகும்.
இது தேற்றம் 3 இன் மறுதலையாகும்.

கோடு RS இனால் LM, NP என்னும் இரு சமாந்தரக் கோடுகள் இடைவெட்டப்பட்டுள்ளன. ஒரே திசையில் இடப்பட்ட அம்புக் குறிகளின் மூலம் சமாந்தரம் காட்டப்பட்டுள்ளது.



(i) ஒத்த கோணச் சோடிகள் சமம்.

$a = e$

$b = f$

$c = g$

$d = h$

(ii) ஒன்றுவிட்ட கோணச் சோடிகள் சமம்.

$c = e$

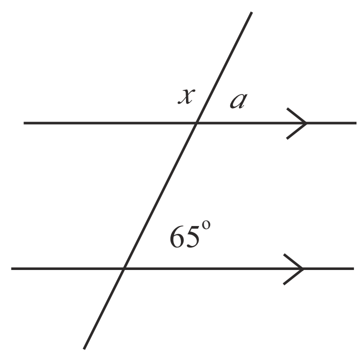
$d = f$

(iii) நேயக் கோணச் சோடியின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகும்.

$c + f = 180^{\circ}$

$d + e = 180^{\circ}$

உதாரணம் 8.5



x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$a = 65^{\circ}$ (ஒத்த கோணங்கள்)

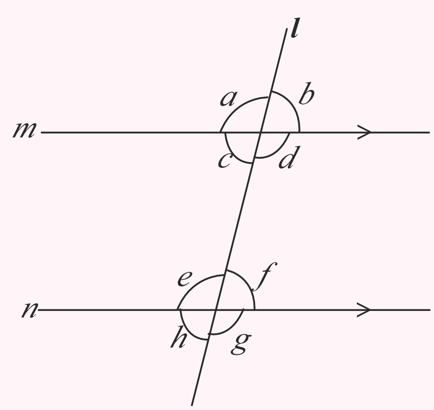
$x + a = 180^{\circ}$ (ஒரு நேர்கோட்டின் மீது உள்ள கோணங்கள்)

$\therefore x + 65^{\circ} = 180^{\circ}$

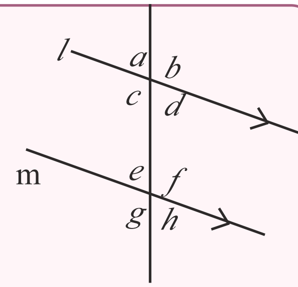
$\therefore x = 115^{\circ}$

பயிற்சி 8.3

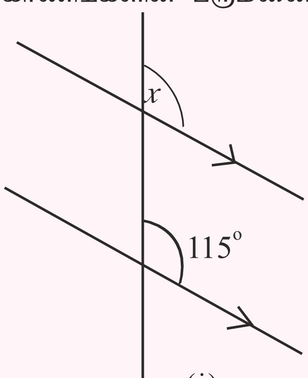
1. உருவில் l, m, n என்பன நேர்கோடுகளாகும். a, b, c, d, e, f, g, h ஆகியவற்றினால் கோணங்கள் காட்டப்பட்டுள்ளன. a இனால் 120° உம் f இனால் 60° உம் காட்டப்படுமெனின், நேர்கோடுகள் m, n ஆகியன சமாந்தரம் என்பதற்குக் காரணங்களைத் தருக.



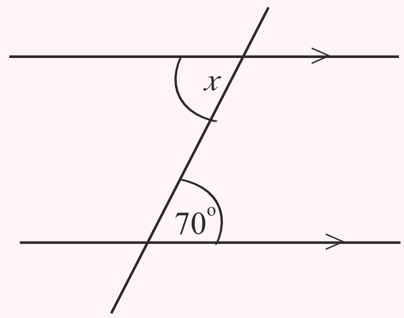
2. உருவில் l, m ஆகியன சமாந்தரக் கோடுகளாகும். $a = 47^{\circ}$ எனின், எஞ்சியுள்ள கோணங்கள் எல்லாவற்றினதும் பருமனைக் காண்க.



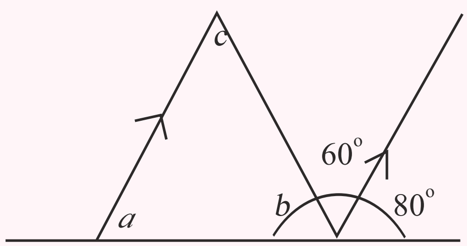
3. பின்வரும் உருக்களில் அட்சரகணிதக் குறியீடுகளின் மூலம் காட்டப்பட்டுள்ள கோணங்களின் பருமனைக் காட்டுக.



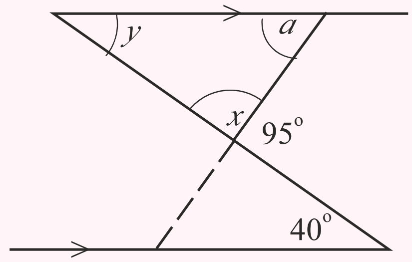
(i)



(ii)

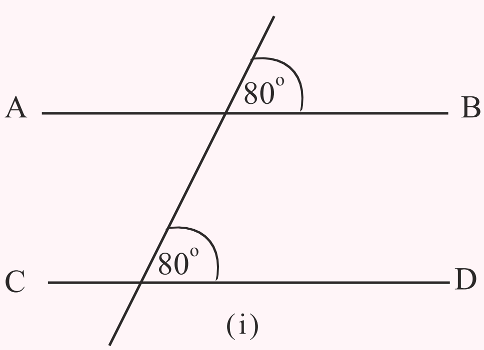


(iii)

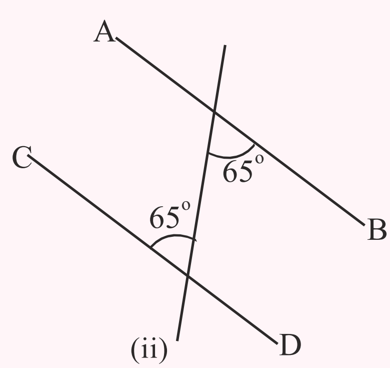


(iv)

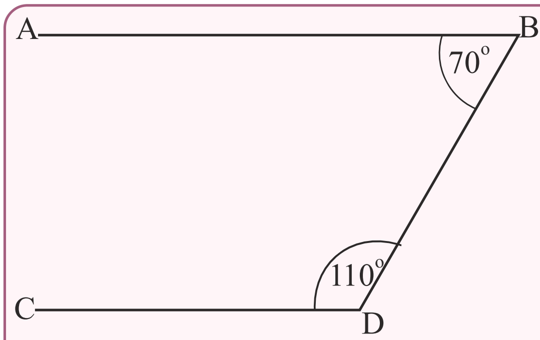
4. பின்வரும் உருக்கள் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள AB, CD ஆகிய நேர்கோடுகள் சமாந்தரமாகுமா என்பதைக் காரணங்களுடன் காட்டுக.



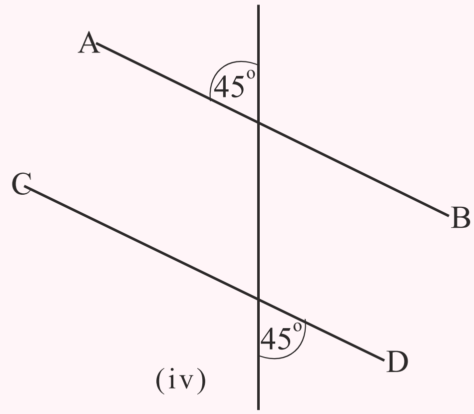
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

5. உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப AB யும் EF உம் சமாந்தரமெனக் காட்டுக.