Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Ο αλγόριθμος του Karmarkar

Κυρτή Βελτιστοποίηση

Βασίλας Νικόλαος

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών

Θεωρητική Πληροφορική
και Θεωρία Ελέγχου

Κανονική Μορφή του Karmarkar

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^T x \\ \text{subject to} \quad & Ax = 0 \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$x = [x_1, \ldots, x_n]^T$$

Εισάγοντας τους συμβολισμούς

- Μοναδιαίο διάνυσμα

$$e = [1, \ldots, 1]^T$$

- Μηδενοχώρος του A

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$$

- Σύμπλοκο στο $\mathbb{R}^n$

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n : e^T x = 1, x \geq 0\}$$

- Κέντρο του συμπλόκου $a_0 \in \Delta$

$$a_0 = \frac{e}{n} = \left[\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right]^T$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^T x \\ \text{subject to} \quad & x \in \Omega \cap \Delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega \cap \Delta &= \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0, e^T x = 1, x \geq 0\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^n : \begin{bmatrix} A \\ e^T \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x \geq 0\right\} \end{aligned}$$

Το πρόβλημα του Karmarkar υπό περιορισμούς

Υποθέσεις

1. Το κέντρο a_0 του συμπλόκου Δ είναι εφικτό σημείο, δηλαδή $a_0 \epsilon \Omega$.

2. Η ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στο εφικτό σύνολο είναι μηδέν.

3. Ο $(m+1) \times n$ πίνακας

$$\begin{pmatrix} A \\ e^T \end{pmatrix}$$

   έχει βαθμό $(m+1)$.

4. Μας δίνεται παράμετρος τερματισμού $q > 0$ τέτοια ώστε αν βρούμε εφικτό σημείο που ικανοποιεί

$$\frac{c^T x}{c^T a_0} \leq 2^{-q}$$

   τότε το πρόβλημα έχει λυθεί.

Μετασχηματισμός στην κανονική μορφή του Karmarkar

Τυπική μορφή γραμμικού προγράμματος

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^T x \\ \text{subject to} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Ορίζουμε $c' = (c^T, 0)^T$

$$A' = (A, -b)$$

Προβολικός μετασχηματισμός

$$y = (y_1, \ldots, y_{n+1})^T \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$y_i = \frac{x_i}{x_1 + \cdots + x_n + 1}, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{x_1 + \cdots + x_n + 1}.$$

$\Rightarrow$

$$c^T x = 0 \Leftrightarrow c'^T y = 0$$

$$Ax = b \Leftrightarrow A' y = 0$$

$$x \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$$

Ισοδύναμο πρόβλημα στην κανονική μορφή του Karmarkar

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c'^T y \\ \text{subject to} \quad & A' y = 0 \\ & e^T y = 1 \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

Αλγόριθμος

Απαιτούμενα

- Προβλήματα της κανονικής μορφής του Karmarkar.
- Να ικανοποιούνται οι τέσσερις υποθέσεις.
- Αρχικό σημείο $x^{(0)}$.
- Παράμετρος q.

Αν ικανοποιούνται τα παραπάνω δημιουργείται ακολουθία $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(N)}$.

Require: 1. **Όρισε**: $k := 0, x^{(0)} = a_0 = e/n$

repeat

2. **Ανανέωσε**: Θέσε $x^{(k+1)} := \Psi(x^{(k)})$ όπου Ψ είναι ο πίνακας ανανέωσης
3. **Επανέλαβε**: Θέσε $k := k+1$

until 4. **Κριτήριο τερματισμού**: Να ικανοποιείται $c^T x^{(k)} / c^T x^{(0)} \leq 2^{-q}$

Περιγραφή εύρεσης νέου σημείου

Διαδικασία για τον υπολογισμό της ανανέωσης $x^{(k+1)} = \Psi(x^{(k)})$

1. Υπολόγισε τους πίνακες

$$D_k = \operatorname{diag}\left(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right), \quad B_k = \begin{pmatrix} AD_k \\ e^T \end{pmatrix}$$

2. Υπολόγισε τον πίνακα προβολής στο μηδενοχώρο του B_k

$$P_k = I_n - B_k^T (B_k B_k^T)^{-1} B_k$$

3. Υπολόγισε την κανονικοποιημένη ορθογώνια προβολή του c στο μηδενοχώρο του B_k

$$\hat{c}^{(k)} = \frac{P_K D_k c}{\|P_k D_k c\|}$$

4. Υπολόγισε το διάνυσμα διεύθυνσης

$$d^{(k)} = -r\hat{c}^{(k)}, \quad \text{όπου } r = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$$

5. Υπολόγισε $\bar{x}^{(k+1)}$ με προκαθορισμένο $\alpha \epsilon (0,1)$

$$\bar{x}^{(k+1)} = a_0 + \alpha d^{(k)}$$

6. Υπολόγισε $x^{(k+1)}$ εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό U_k^{-1}

$$x^{(k+1)} = U_k^{-1}(\bar{x}^{(k+1)}) = \frac{D_k \bar{x}^{(k+1)}}{e^T D_k \bar{x}^{(k+1)}}$$

Υλοποίηση αλγορίθμου

```
function [x_opt, f_opt] = karmarkar()
    c = [1; -3; 3];
    A = [1, -3, 2];
    p = struct('a', 0.25, 'q', 100, 'n', size(A, 2),...
  'x_0', [1/size(A, 2); 1/size(A, 2); 1/size(A, 2)]);
    [x_opt, f_opt] = algorithm(A, c, p);
end

function [x_knew, f_opt] = algorithm(A, c, p)
    x_knew = p.x_0;
    while c'*x_knew/(c'*p.x_0) > 2^(-p.q)
  x_k = x_knew;
  x_knew = psi_map(A, c, x_k, p);
    end
    f_opt = c'*x_knew;
end

function x_knew = psi_map(A, c, x_k, p)
    e = ones(p.n, 1);
    D_k = diag(x_k);
    B_k = [A*D_k; e'];

    P_k = eye(p.n) - B_k'*((B_k*B_k')\B_k);
    c_hatk = P_k*D_k*c/norm(P_k*D_k*c);

    r = 1/sqrt(p.n*(p.n - 1));
    d_k = -r*c_hatk;

    xbar = p.x_0 + p.a*d_k;

    x_knew = D_k*xbar/(e'*D_k*xbar);
end
```

Παράδειγμα

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\
\text{subject to} \quad & x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

Μετά από 47 επαναλήψεις βρίσκουμε τη βέλτιστη λύση

$$x^* = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$f^* = -7.4093e-09$$

Βιβλιογραφία

[1] E. K. P. Chong and S. H. Zak. *An introduction to optimization, 2nd edition*. Wiley India Pvt. Limited, 2010.

[2] N. Karmarkar. *A new polynomial-time algorithm for linear programming*. In: *Combinatorica* 4.4 (1948), pp. 373-395.

[3] Y. Nesterov and A. Nemirovskii. *Interior-point Polynomial Algorithms in Convex Programming*. Studies in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.

[4] Π. Σαραβάκος. *Αλγόριθμοι Εσωτερικού Σημείου: Θεωρία και Εφαρμογές*. Μεταπτυχιακή διατριβή, Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης, 2011.