Ασκήσεις Γεωμετρικής Θεωρίας Ελέγχου

Βασίλας Νικόλαος

4 Δεκεμβρίου 2016

Άσκηση 1. Για τα σημεία που είναι στο βόρειο και στο ανατολικό ημισφαίριο της μοναδιαίας σφαίρας έχουμε δύο χάρτες ψ_{z+} και ψ_{y+}. Να δείξετε ότι $\psi_{y+}^{-1}\circ\psi_{z+}$ είναι C^k.

Λύση 1. Η μοναδιαία σφαίρα $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ περιγράφεται από

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Μπορούμε να ορίσουμε τους χάρτες (U_{y^+}, ϕ_{y^+}) και (U_{z^+}, ϕ_{z^+}) όπου

$$U_{y^+} = \{(x, y, z) \in S^2 : y > 0\}, \quad \psi_{y^+}(x, y, z) = (x, z),$$

και

$$U_{z^+} = \{(x, y, z) \in S^2 : z > 0\}, \quad \psi_{z^+}(x, y, z) = (x, y).$$

Για να δείξω ότι ψ_{z+} και ψ_{y+} είναι ομοιομορφισμοί, αρκεί να βρω τις αντίστροφες συναρτήσεις και να δείξω ότι είναι συνεχείς. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
\psi_{y^+}^{-1}(x, z) &= \left(x, \sqrt{1 - x^2 - z^2}, z\right) \in S^2,\\
\psi_{z^+}^{-1}(x, y) &= \left(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right) \in S^2,
\end{aligned}$$

όπου είναι συνεχείς συναρτήσεις και άρα ομοιομορφισμοί, αλλά και παραγωγίσιμες C^∞ συναρτήσεις. Συνεπώς, αφού ψ_{z+}, ψ_{y+} καθώς και $\psi_{z^+}^{-1}$, $\psi_{y^+}^{-1}$ είναι C^∞ συναρτήσεις τότε και η σύνθεση $\psi_{y^+}^{-1} \circ \psi_{z+}$ θα είναι C^∞.

Άσκηση 2. Αν M είναι λεία πολλαπλότητα, TM είναι η εφαπτόμενη δέσμη της M, $\pi : TM \to M$ είναι η απεικόνιση προβολής και $X : M \to TM$ διανυσματικό πεδίο, τότε να δείξετε ότι $\pi \circ X = id_M$.

Λύση 2. Σύμφωνα με το [1], ένα διανυσματικό πεδίο X κλάσης C^r σε μία πολλαπλότητα M είναι μία συνάρτηση η οποία σε κάθε σημείο $p \in M$ αντιστοιχεί ένα εφαπτόμενο διάνυσμα $X_p \in T_pM$ του οποίου οι συνιστώσες ως προς κάποιο

[1] Boothby, W.M., *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, 1975

τοπικό χάρτη (U,ϕ) είναι συναρτήσεις κλάσης C^r στο πεδίο ορισμού U των συντεταγμένων. Επομένως, $\pi \circ X = id_M$ είναι άμεση συνέπεια του ορισμού καθώς $(\pi \circ X)(p) = \pi(X_p) = p$ και προφανώς ισχύει μόνο για διανυσματικά πεδία αφού το πεδίο ορισμού της π είναι TM. Πολλές φορές όπως για παράδειγμα στο βιβλίο [2], το διανυσματικό πεδίο ορίζεται ως μία συνεχής συνάρτηση $X : M \to TM$ με την ιδιότητα $\pi \circ X = id_M$.

Άσκηση 3. Να αποδείξετε την ταυτότητα του Jacobi

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.$$

Λύση 3. Έστω δύο διανυσματικά πεδία X, Y σε μία πολλαπλότητα M^n και για μία συνάρτηση $f \in C^\infty(M^n)$ τότε η αγκύλη Lie είναι

$$[X,Y]f = YXf - XYf.$$

Σύμφωνα με το παραπάνω υπολογίζουμε τον πρώτο όρο της ταυτότητας του Jacobi να είναι

$$\begin{aligned} [X,[Y,Z]]f &= [Y,Z]Xf - X[Y,Z]f \\ &= (ZY - YZ)Xf - X(ZY - YZ)f \\ &= ZYXf - YZXf - XZYf + XYZf. \end{aligned} \tag{1}$$

Αντίστοιχα ο δεύτερος όρος είναι

$$\begin{aligned} [Y,[Z,X]]f &= [Z,X]Yf - Y[Z,X]f \\ &= (XZ - ZX)Yf - Y(XZ - ZX)f \\ &= XZYf - ZXYf - YXZf + YZXf, \end{aligned} \tag{2}$$

και ο τελευταίος είναι

$$\begin{aligned} [Z,[X,Y]]f &= [X,Y]Zf - Z[X,Y]f \\ &= (YX - XY)Zf - Z(YX - XY)f \\ &= YXZf - XYZf - ZYXf + ZXYf. \end{aligned} \tag{3}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1), (2) και (3) στην ταυτότητα του Jacobi παρατηρούμε ότι όλοι οι όροι διαγράφονται και επομένως η ταυτότητα ικανοποιείται.

Άσκηση 4. Για $B \in SO(3,\mathbb{R})$ δείξτε ότι έχει μία ιδιοτιμή $\lambda = 1$.

Λύση 4. Η ορθογώνια ομάδα ορίζεται

$$O(n,\mathbb{R}) = \{B \in GL(n,\mathbb{R}) : B^{-1} = B^T\},$$

[2] Lee, J.M., *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, 2003

και η ειδική ορθογώνια ομάδα, που είναι μία υποομάδα της ορθογώνιας ομάδας ορίζεται

$$SO(n, \mathbb{R}) = \{B \in O(n, \mathbb{R}) : \det(B) = 1\}.$$

Είναι γνωστό ότι για οποιοδήποτε $n \times n$ μητρώο ισχύει ότι

$$\det(B) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = 1,$$

όπου λ_i είναι οι ιδιοτιμές του B. Επίσης το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του μητρώου είναι

$$p(\lambda) = \det[\lambda I - B] = b_0 \lambda^n + b_1 \lambda_1^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\lambda + b_n. \tag{4}$$

Οι συντελεστές b_i της παραπάνω σχέσης είναι πραγματικοί αριθμοί και επομένως αν z είναι μία μιγαδική λύση που ικανοποιεί τη (4) τότε και η συζυγής μιγαδική λύση $\bar{z}$ θα ικανοποιεί τη (4). Αν $B \in O(n, \mathbb{R})$ τότε ο μετασχηματισμός που επιβάλει το μητρώο διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο. Για τα διανύσματα u, v το εσωτερικό γινόμενο είναι

$$u \cdot v = u^T v,$$

και η επίδραση του μητρώου B είναι

$$Bu \cdot Bv = (Bu)^T Bv = u^T B^T Bv = u^T v.$$

Έτσι σύμφωνα με το παραπάνω μπορούμε να πούμε ότι το μητρώο B δεν επηρεάζει το μέτρο ενός διανύσματος u καθώς αυτό ορίζεται ως $u = \sqrt{u \cdot u}$. Επομένως αν u είναι το ιδιοδιάνυσμα του μητρώου B τότε ισχύει

$$|Bu| = |u|,$$

και άρα ισχύει

$$|Bu| = |\lambda u| = |u|,$$

που σημαίνει ότι $|\lambda| = 1$. Τελικά, σύμφωνα με αυτά που αναφέρθηκαν παραπάνω, οι πιθανές ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι $(1, 1, 1)$ ή $(1, -1, -1)$ ή $(1, z, \bar{z})$, και άρα σίγουρα για μία ιδιοτιμή ισχύει ότι $\lambda = 1$.