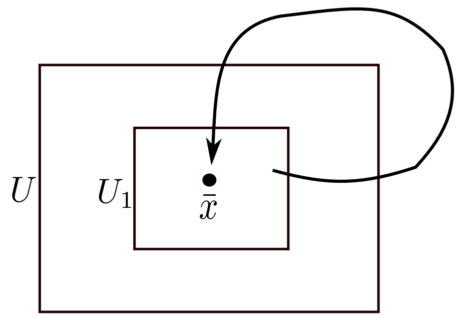
Γεωμετρική Θεωρία Ελέγχου

2η Σειρά Ασκήσεων
Βασίλας Νικόλαος

Άσκηση 2016/17 1. Βρείτε δύο διαφορετικά παραδείγματα συστημάτων στο επίπεδο με σημείο ισορροπίας στο $(0,0)$ το οποίο ενώ έχει γειτονιά $N_\epsilon(0)$ τέτοια ώστε $x \in N_\epsilon(0) \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \phi(x,t) = 0$, δεν είναι ευσταθές κατά Lyapunov. Εξηγήστε γιατί τέτοια παραδείγματα είναι κατ' ανάγκην μη-γραμμικά.

Λύση 2016/17 1. Το σημείο $\bar{x}$ είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας αν για κάθε γειτονιά U του $\bar{x}$, υπάρχει γειτονιά U_1 του $\bar{x}$ τέτοια ώστε κάθε λύση $x(t)$ με $x(0)$ στο U_1, να υπάρχει και να ορίζεται στο U για κάθε $t > 0$. Αν το U_1 μπορεί να επιλεχθεί έχοντας τις ιδιότητες που περιγράφηκαν και ακόμα ισχύει $\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}$, τότε το $\bar{x}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Στην άσκηση μας δίνεται ότι η λύση είναι συγκλίνουσα στο 0 και μας δίνεται μία γειτονιά του 0 που οι λύσεις είναι συγκλίνουσες. Αυτό όμως δεν προϋποθέτει ότι το σημείο είναι ευσταθές στη γενική περίπτωση, καθώς τίποτα δε μας διασφαλίζει ότι για κάθε U, που θα φράζει τη $x(t)$, θα μπορούμε να βρούμε λύσεις που ξεκινούν στη $N_\epsilon(0)$ και θα παραμένουν εντός του συνόλου U. Συνεπώς, μπορούμε κάλλιστα να έχουμε μία συμπεριφορά όπως αυτή που απεικονίζεται στο σχήμα 1.



Σχήμα 1: Ασταθές, συγκλίνων σημείο.

Ένα παράδειγμα που παρουσιάζει αυτή τη συγκλίνουσα αλλά ασταθή συμπεριφορά είναι το παρακάτω.

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_2^2$$
$$\dot{x}_2 = 2x_1^2 x_2^2.$$

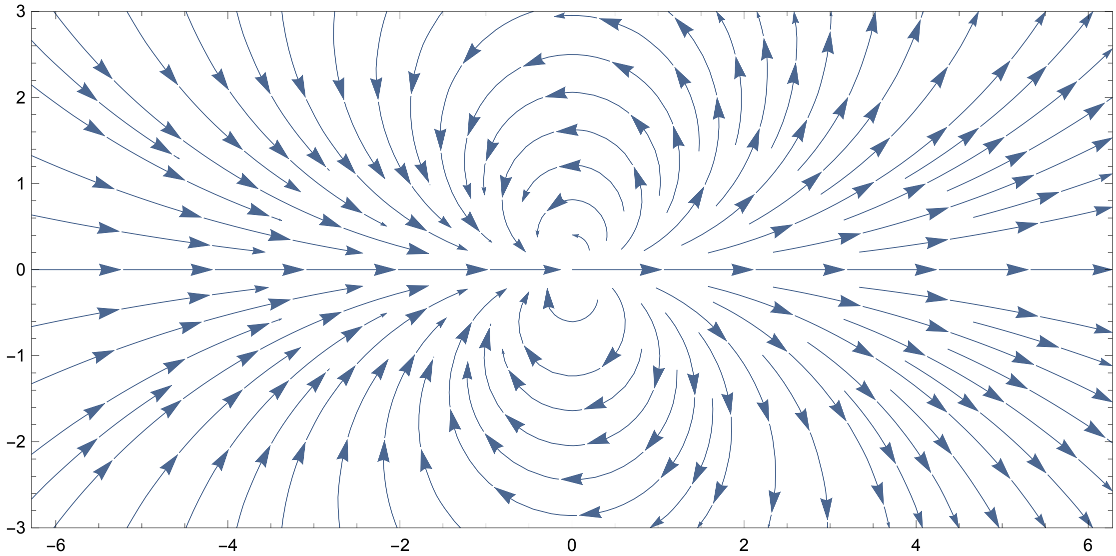
Το σημείο ισορροπίας του συστήματος είναι το $(0,0)$. Κάθε τροχιά του συστήματος τείνει στην αρχή των αξόνων καθώς $t \to \infty$, εκτός από τις τροχιές που ξεκινούν στον άξονα x_1, οι οποίες παραμένουν εκεί για κάθε χρόνο. Στο σχήμα 2 βλέπουμε το διάγραμμα του διανυσματικού πεδίου για το παράδειγμά μας.

Τέτοια παραδείγματα είναι κατ' ανάγκην μη-γραμμικά. Η ευστάθεια ενός γραμμικού συστήματος της μορφής

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0,$$

εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από τη φασματική δομή του πίνακα A. Επίσης, το σύστημα έχει τη γνωστή λύση

$$x(t) = e^{At} x_0.$$



Σχήμα 2: Παράδειγμα ασταθούς, συγκλίνουν σημείου.

Επομένως, ο μόνος τρόπος ώστε η παραπάνω να ικανοποιεί το $\lim_{t\to\infty}\phi(x,t)$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος. Αυτό εύκολα φαίνεται αν πάρουμε τη μορφή Jordan του πίνακα A, έτσι στη διαγώνιο θα έχουμε τις ιδιοτιμές και το ζητούμενο όριο θα ικανοποιείται μόνο όταν είναι αρνητικές. Αυτό σημαίνει ότι, για τα γραμμικά συστήματα αν ικανοποιείται το όριο τότε αυτό σημαίνει και ασυμπτωτική ευστάθεια.

Άσκηση 2016/17 2. *Το σύστημα του Duffing*: Το σύστημα

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= -\zeta y + x - x^3, \quad \zeta \geq 0\end{aligned}$$

στο επίπεδο είναι η κανονική μορφή της αυτόνομης Δ.Ε.

$$\ddot{x} + \zeta\dot{x} + x^3 - x = 0.$$

περιγράφει ένα σύστημα με απόσβεση που κινείται σε συμμετρικό δυναμικό με δύο ελάχιστα (γιατί;)

(α΄) Θα μελετήσουμε πρώτα την περίπτωση $\zeta = 0$. Το σύστημα είναι συντηρητικό (Χαμιλτονιανό), της μορφής $\dot{x} = y, \dot{y} = -\nabla U(x)$. Επαληθεύστε ότι ισχύει αυτό, δώστε την Χαμιλτονιανή συνάρτηση $H(x, y)$ και το διάγραμμα ροής (πορτρέτο κίνησης ή φάσεων).

(β΄) Τώρα περνάμε στην περίπτωση $\zeta > 0$. Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και την (τοπική) τους συμπεριφορά. Δείξτε ότι, κατάλληλα μετατοπισμένη, η H είναι συνάρτηση Lyapunov και εξηγήστε γιατί αποτελεί υποσύνολο της περιοχής έλξης κάθε Σ.Ι. Δείξτε ότι εάν *τρέξουμε* τα σύνολα αυτά προς τα πίσω (σε αρνητικό χρόνο) θα πάρουμε τη συνολική έλξης. Προσπαθήστε να δώσετε ένα διάγραμμα των περιοχών αυτών για διάφορες τιμές του ζ. Πόσες καμπύλες/τροχιές αποτελούν το διαχωριστικό σύνολο των δύο περιοχών έλξης;

Λύση 2016/17 2. 1. Οι εξισώσεις του συστήματος χωρίς απόσβεση είναι

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= x - x^3.\end{aligned}$$

Τα σημεία ισορροπίας υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$
\begin{aligned}
0 &= y \\
0 &= x - x^3,
\end{aligned}
$$

και από τη δεύτερη σχέση έχουμε

$$x(1 - x^2) = 0,$$

που σημαίνει $x = 0$ ή $x = \pm 1$. Άρα έχουμε τα σημεία ισορροπίας είναι $(0, 0), (1, 0), (-1, 0)$.

Επειδή δεν έχουμε απόσβεση, έχουμε Χαμιλτονιανό δυναμικό σύστημα με $q = x, p = y$ και θέλουμε

$$\frac{\partial H}{\partial y} = y, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -x + x^3.$$

Έτσι θέλουμε

$$H(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + U(x), \tag{1}$$

με συνάρτηση δυναμικού

$$
\begin{aligned}
U(x) &= -\int_0^x \left(\bar{x} - \bar{x}^3\right) \, d\bar{x} \\
&= -\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} x^4.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Μάλιστα μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι είναι Χαμιλτονιανό καθώς έχουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} &= y\dot{y} - x\dot{x} + x^3\dot{x} \\
&= y(x - x^3) - xy + x^3 y = 0.
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, το σύστημα είναι της μορφής

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= y \\
\dot{y} &= -\nabla U(x) = -\nabla \left(-\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} x^4 \right),
\end{aligned}
$$

ή τελικά

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= y \\
\dot{y} &= x - x^3.
\end{aligned}
$$

Από τη σχέση (1), διαπιστώνουμε ότι οι λύσεις του συστήματος, είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα των τετμημένων, καθώς η συνολική ενέργεια $H(x, y)$ είναι σταθερή. Έτσι κάθε λύση ή τροχιά ανήκει σε μία ισοϋψή καμπύλη που εξαρτάται από την αρχική ενέργεια h_0. Έτσι οι λύσεις είναι

$$y = \pm \sqrt{2h_0 + x^2 - \frac{1}{2} x^4}.$$

Η κλίση των τροχιών στο επίπεδο φάσεων είναι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - x^3}{y}.$$

Από τη σχέση της συνάρτησης δυναμικού (2) καθώς από την παραπάνω σχέση φαίνεται ότι η συνάρτηση δυναμικού παρουσιάζει ακρότατο στα σημεία ισορροπίας. Αυτό συμβαίνει διότι εκεί ισχύει

$$\begin{aligned} 0 &= U'(x) \\ &= x^3 - x, \end{aligned}$$

και έτσι επιβεβαιώνεται ότι τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης είναι τα $0, \pm 1$.

Για να χαρακτηρίσουμε τα σημεία ισορροπίας, γράφουμε τις εξισώσεις που διέπουν το σύστημα στη μορφή

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x - x^3 \end{pmatrix}.$$

Αν πάρουμε τη γραμμικοποίηση, θα έχουμε

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Για το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ ισχύει

$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

που συνεπάγεται

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1.$$

Από το θεώρημα Hartman–Grobman, επειδή το σημείο είναι υπερβολικό, και επειδή έχουμε σάγμα στο $(0,0)$ στο γραμμικοποιημένο σύστημα, θα έχουμε σάγμα στο $(0,0)$ και για το αρχικό μη-γραμμικό σύστημα.

Με αντίστοιχη διαδικασία, για το σημείο ισορροπίας $(1,0)$ ισχύει

$$DF(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

που συνεπάγεται

$$\lambda = \pm i\sqrt{2}.$$

Στην περίπτωση αυτή, έχουμε φανταστικές ιδιοτιμές και έτσι δεν μπορούμε να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα από το θεώρημα Hartman-Grobman. Παρόλο αυτά έχουμε συμπεριφορά κέντρου στο $(1,0)$ για το γραμμικοποιημένο σύστημα.

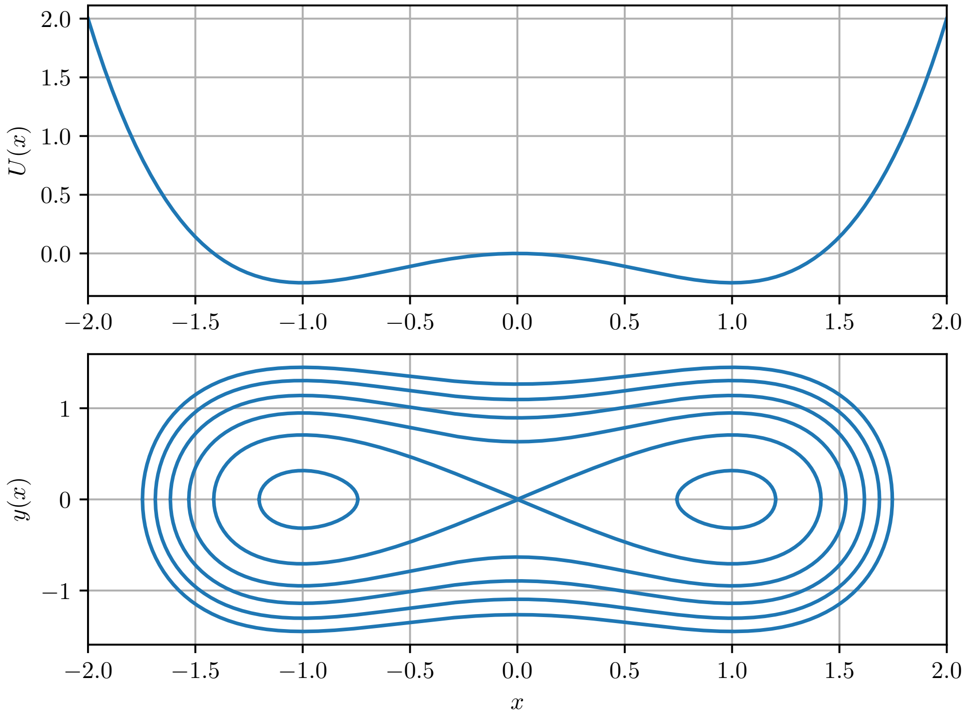
Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και για το σημείο ισορροπίας $(-1,0)$, καθώς ο όρος που σχετίζεται με τη μεταβλητή x στον πίνακα γραμμικοποίησης είναι τετραγωνικός.

Η ακριβής φύση των κρίσιμων σημείων, μπορεί να καθοριστεί από τη συνάρτηση δυναμικού και από την τιμή της δεύτερης παραγώγου στα σημεία αυτά. Έτσι

$$U''(x) = 3x^2 - 1.$$

Στα σημεία 1 και -1, η συνάρτηση δυναμικού παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, $U''(1) = U''(-1) = 2 > 0$, ενώ στο σάγμα $U''(0) = -1 < 0$ τοπικό μέγιστο.

Στο επάνω σχήμα της 3 βλέπουμε τη συνάρτηση δυναμικού και στο κάτω το πορτρέτο φάσεων του ταλαντωτή Duffing χωρίς απόσβεση. Όπως παρατηρούμε, η συνάρτηση δυναμικού παρουσιάζει τα ακρότατα στα σημεία ισορροπίας. Στα σημεία $(-1,0)$ και $(1,0)$ παρατηρούμε ότι έχουμε συμπεριφορά κέντρου, και στο σημείο $(0,0)$ έχουμε σάγμα. Στο σχήμα 4 παρουσιάζεται η συμπεριφορά του διανυσματικού πεδίου.



Σχήμα 3: Συνάρτηση δυναμικού και ταλαντωτής Duffing χωρίς απόσβεση.

2. Στην περίπτωση όπου το $\zeta > 0$, οι εξισώσεις θα είναι

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -\zeta y + x - x^3 \end{pmatrix}.$$

Τα σημεία ισορροπίας υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} 0 &= y \\ 0 &= -\zeta y + x - x^3, \end{aligned}$$

και από τη δεύτερη σχέση έχουμε

$$x(1 - x^2) = 0,$$

που σημαίνει $x = 0$ ή $x = \pm 1$, και άρα έχουμε τα σημεία ισορροπίας παραμένουν τα ίδια και είναι $(0, 0), (1, 0), (-1, 0)$.

Η γραμμικοποίηση, είναι

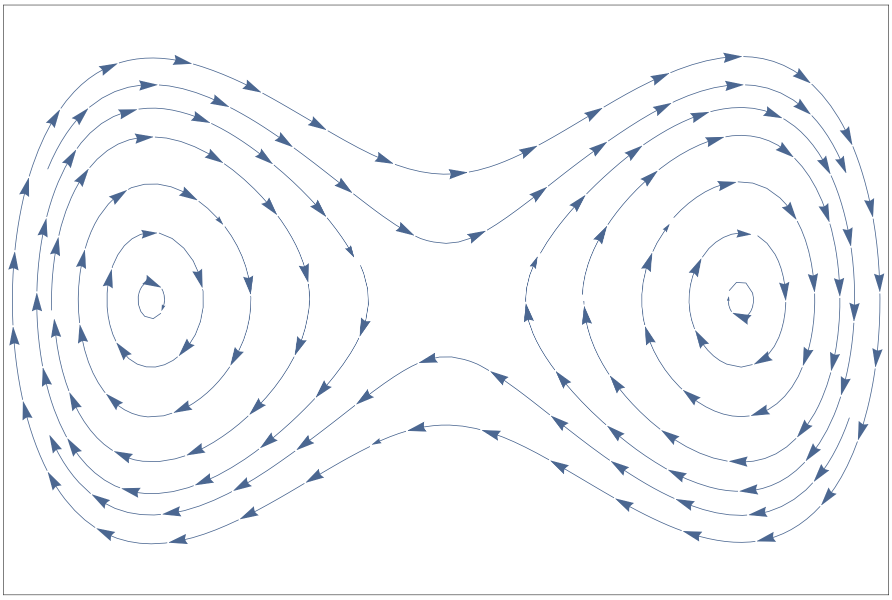
$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & -\zeta \end{pmatrix}$$

και για το σημείο ισορροπίας $(0, 0)$ ισχύει

$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\zeta \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές της γραμμικοποίησης στο $(0, 0)$ είναι

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\zeta - \lambda \end{pmatrix}.$$



Σχήμα 4: Πορτρέτο κίνησης ταλαντωτή Duffing χωρίς απόσβεση.

που σημαίνει ότι

$$\lambda^2 + \zeta\lambda - 1 = 0,$$

και μας δίνει τις λύσεις

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 + 4}\right).$$

Αν συμβολίσουμε με λ_1 την ιδιοτιμή που προκύπτει από το θετικό πρόσημο που είναι μπροστά από την τετραγωνική ρίζα και αντίστοιχα με λ_2 την άλλη ιδιοτιμή, παρατηρούμε ότι $\lambda_1 > 0$. Γιατί αν ίσχυε $\lambda_1 \leq 0$ τότε

$$\begin{aligned} -\zeta + \sqrt{\zeta^2 + 4} &\leq 0 \\ \sqrt{\zeta^2 + 4} &\leq \zeta \\ \zeta^2 + 4 &\leq \zeta^2, \end{aligned}$$

άτοπο. Επίσης, είναι ξεκάθαρο ότι $\lambda_2 < 0$ διότι $\zeta > 0$ και άρα έχουμε σάγμα για τη γραμμικοποίηση. Συνεπώς, από το θεώρημα Hartman–Grobman, επειδή το σημείο είναι υπερβολικό, θα έχουμε σάγμα στο $(0, 0)$ και για το αρχικό μη-γραμμικό σύστημα.

Για το σημείο ισορροπίας $(1, 0)$ ισχύει

$$DF(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -\zeta \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές της γραμμικοποίησης στο $(1, 0)$ είναι

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\zeta - \lambda \end{pmatrix}.$$

που σημαίνει ότι

$$\lambda^2 + \zeta\lambda + 2 = 0,$$

και μας δίνει τις λύσεις

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 8}\right).$$

Συμβολίζουμε με λ_1 την ιδιοτιμή με προκύπτει από το θετικό πρόσημο που είναι μπροστά από την τετραγωνική ρίζα και αντίστοιχα με λ_2 την άλλη ιδιοτιμή. Οι ρίζες της διακρίνουσας είναι $-2\sqrt{2}$ και $2\sqrt{2}$. Όμως η απόσβεση είναι αυστηρά θετική και έτσι η διακρίνουσα είναι αρνητική για $\zeta \in (0, 2\sqrt{2})$ και θετική για $\zeta > 2\sqrt{2}$.

Στην περίπτωση όπου το $\zeta \in (0, 2\sqrt{2})$ τότε επειδή το πραγματικό μέρος είναι πάντα αρνητικό, το σημείο ισορροπίας $(1, 0)$, από το θεώρημα Hartman-Grobman, είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και έχει τη μορφή ευσταθούς εστίας.

Στην περίπτωση όπου το $\zeta > 2\sqrt{2}$ τότε φυσικά η $\lambda_2 = 1/2\left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 8}\right) < 0$, αλλά και η $\lambda_1 = 1/2\left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 8}\right) < 0$. Γιατί αν $\lambda_1 \geq 0$ τότε

$$\begin{aligned} -\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 8} &\geq 0 \\ \zeta^2 - 8 &\geq \zeta^2, \end{aligned}$$

άτοπο.

Άρα στην περίπτωση όπου το $\zeta > 2\sqrt{2}$ τότε το σημείο ισορροπίας $(1, 0)$, από το θεώρημα Hartman-Grobman, είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και έχει τη μορφή ευσταθούς κόμβου.

Τέλος, για $\zeta = 2\sqrt{2}$ έχουμε διπλή ρίζα και στο σημείο ισορροπίας $(1, 0)$, από το θεώρημα Hartman-Grobman, έχουμε ασυμπτωτική ευστάθεια, αλλά τείνουμε στο σημείο ισορροπίας με διαφορετική μορφή σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση.

Ακριβώς στα ίδια αποτελέσματα καταλήγουμε και για το σημείο ισορροπίας $(-1, 0)$, καθώς ο όρος που σχετίζεται με τη μεταβλητή x στον πίνακα γραμμικοποίησης είναι τετραγωνικός.

Άρα ανακεφαλαιώνοντας, για τα σημεία ισορροπίας $(1, 0)$ και $(-1, 0)$ για θετική απόσβεση θα έχουμε πάντα ασυμπτωτική ευστάθεια.

Θεωρώ τη συνάρτηση

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}, \tag{3}$$

ως υποψήφια συνάρτηση Lyapunov.

Παρατηρούμε ότι στα ευσταθή σημεία ισορροπίας $(\pm 1, 0)$ ισχύει

$$V(1, 0) = V(-1, 0) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0.$$

Επίσης, βλέπουμε από τη σχέση (3), ότι η συνάρτηση V μπορεί να γραφτεί

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right),$$

που σημαίνει ότι είναι θετική για κάθε $(x, y) \neq (\pm 1, 0)$. Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης V είναι

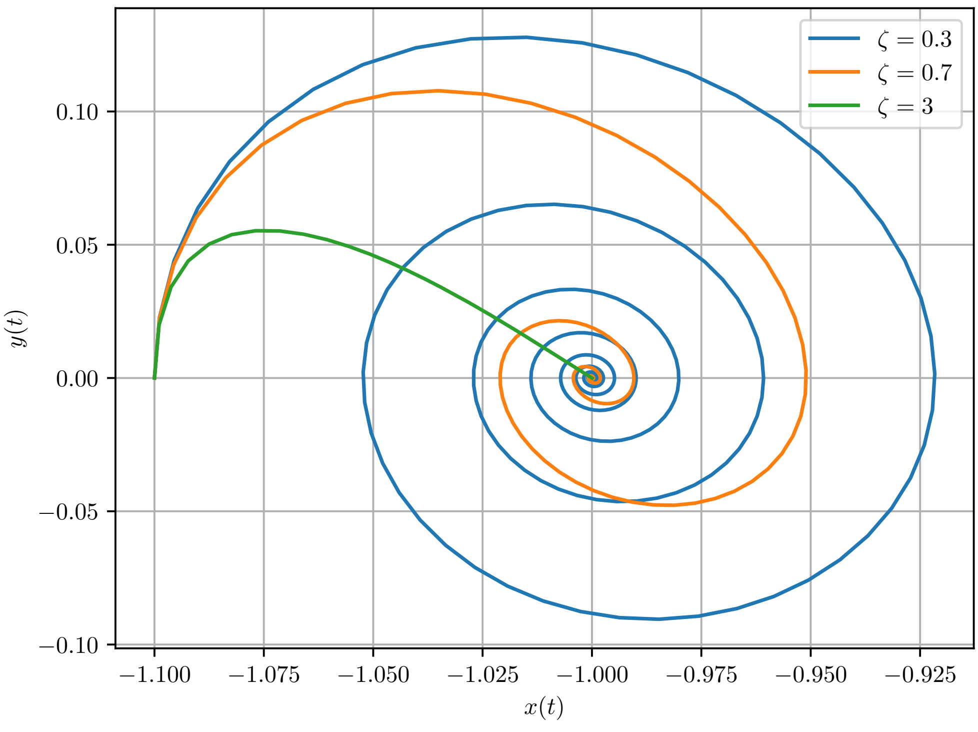
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V\left(x(t), y(t)\right) &= y\dot{y} - x\dot{x} + x^3\dot{x} \\ &= y\left(-\zeta y + x - x^3\right) - xy + x^3 y \\ &= -\zeta y^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Τα παραπάνω επιβεβαιώνουν ότι η V είναι συνάρτηση Lyapunov και επιβεβαιώνεται η ευστάθεια, αλλά όχι η ασυμπτωτική ευστάθεια, των σημείων ισορροπίας $(\pm 1, 0)$. Άρα, η μετατοπισμένη H είναι συνάρτηση Lyapunov, αφού ισχύει

$$V(x, y) = H(x, y) + \frac{1}{4}.$$

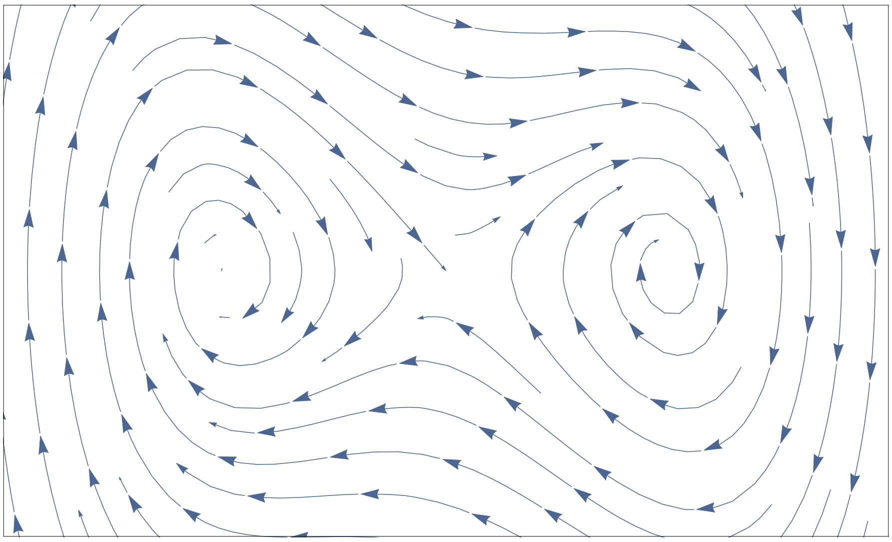
Έτσι η (3) ορίζεται στο διάστημα $U = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\} \times \mathbb{R}$ και $V = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\} \times \mathbb{R}$ για τα σημεία ισορροπίας $(1, 0)$ και $(-1, 0)$ αντίστοιχα. Όμως από την ανάλυση που κάναμε μέσω της γραμμικοποίησης, καταλήξαμε ότι στα σημεία $(1, 0)$ και $(-1, 0)$, έχουμε ασυμπτωτική ευστάθεια. Επομένως, αποτελεί σίγουρα υποσύνολο της συνολικής περιοχής έλξης καθώς τα σημεία ± 1 δεν περιλαμβάνονται στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης Lyapunov.

Έχουμε δύο περιοχές έλξης για το σύστημα. Μία για το σημείο ισορροπίας $(-1, 0)$ και μία για το σημείο $(1, 0)$. Αν κοιτάξουμε το Χαμιλτονιανό σύστημα 3, παρατηρούμε ότι υπάρχει μία κλειστή καμπύλη που περνάει από την αρχή και μοιάζει σαν τον αριθμό οκτώ περιστραμμένο κατά $90°$. Αυτό δημιουργεί δύο περιοχές. Στην περίπτωση που έχουμε απόσβεση, μπορούμε να πούμε ότι αυτές οι περιοχές αποτελούν τις περιοχές έλξης των δύο ευσταθών σημείων ισορροπίας. Φυσικά, με την προσθήκη της απόσβεσης, το μέγεθος αυτής εξαρτάται από την τιμή της απόσβεσης. Οπότε, ανεξαρτήτως των αρχικών συνθηκών, αν η τροχιά καταλήξει μέσα σε κάποια από τις δύο αυτές περιοχές τότε θα η τροχιά θα τείνει στο αντίστοιχο σημείο ισορροπίας. Όμως η περιγραφή αυτή δεν ισχύει γενικά, αλλά εξαρτάται από το ζ. Έτσι όταν έχουμε μιγαδικές ρίζες, δηλαδή $\zeta < 2\sqrt{2}$ παρουσιάζεται η συμπεριφορά αυτή. Για τις υπόλοιπες τιμές του ζ δεν έχουμε αυτή την ταλάντωση αλλά έχουμε τη συμπεριφορά που φαίνεται στο σχήμα, εάν τρέξουμε προς τα πίσω το χρόνο.



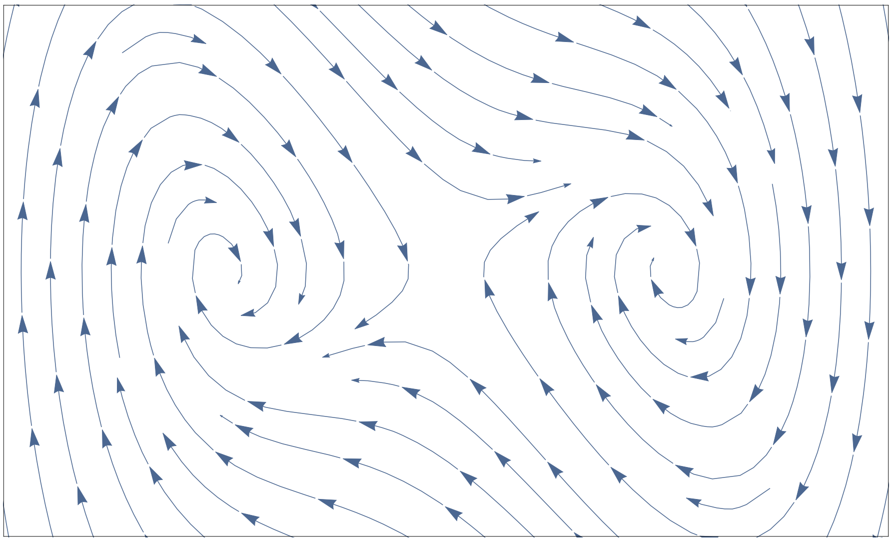
Σχήμα 5: Περιοχές έλξης για διάφορα ζ.

Παρακάτω παρουσιάζονται τα πορτρέτα κίνησης για μικρή απόσβεση, $\zeta = 0.3$ και μεγάλη $\zeta = 0.7$, και το πορτρέτο κίνησης για τις δύο τιμές του ζ. Στο σχήμα 8, με το μπλε χρώμα είναι το πεδίο για $\zeta = 0.3$ και με το καφέ χρώμα το πεδίο για $\zeta = 0.7$. Από το σχήμα αυτό, αλλά και από το σχήμα 5 είναι φανερό, ότι για μικρό ζ έχουμε μεγαλύτερες ταλαντώσεις, όπως ήταν αναμενόμενο. Επίσης, από τα διαγράμματα αυτά και μόνο είναι φανερό ότι η μεγάλη απόσβεση μας πηγαίνει στα σημεία ισορροπίας ταχύτερα. Για μεγαλύτερη έμφαση παρουσιάζεται στο σχήμα 9 η χρονική απόκριση των μεταβλητών για αποσβέσεις $\zeta = 0.3$



Σχήμα 6: Πορτρέτο κίνησης ταλαντωτή Duffing με απόσβεση, $\zeta = 0.3$.

και $\zeta = 0.7$ αλλά και επίσης για απόσβεση $\zeta = 2\sqrt{2}$ έτσι ώστε να φανεί η διαφορετική μορφή σύγκλισης.



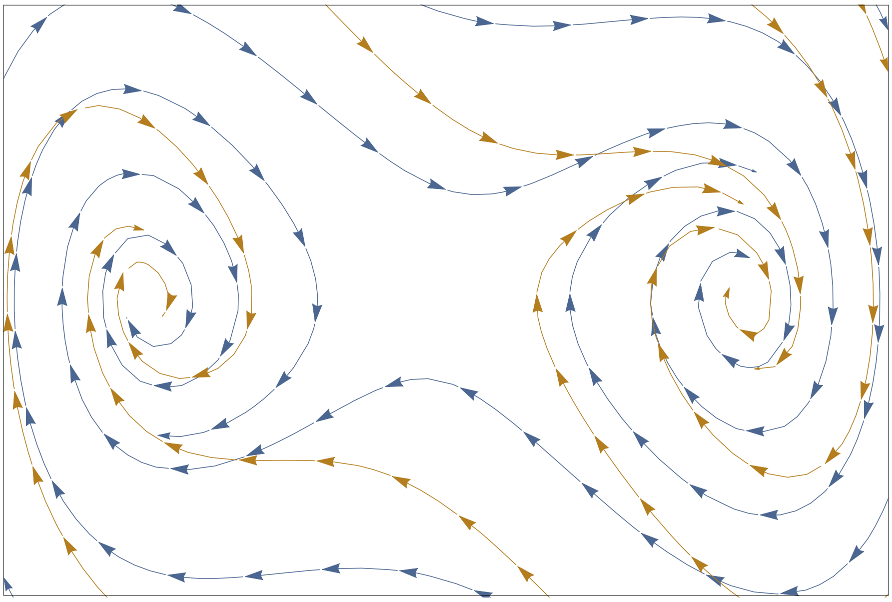
Σχήμα 7: Πορτρέτο κίνησης ταλαντωτή Duffing με απόσβεση, $\zeta = 0.7$.

Άσκηση 2016/17 3. *Οι εξισώσεις Lorentz*: Όπως είναι γνωστό το παρακάτω απλό σύστημα σε τρεις διαστάσεις που μελετήθηκε το 1963 από τον E. Lorenz παρουσιάζει "χαοτική συμπεριφορά" για κάποιες τιμές των παραμέτρων του.

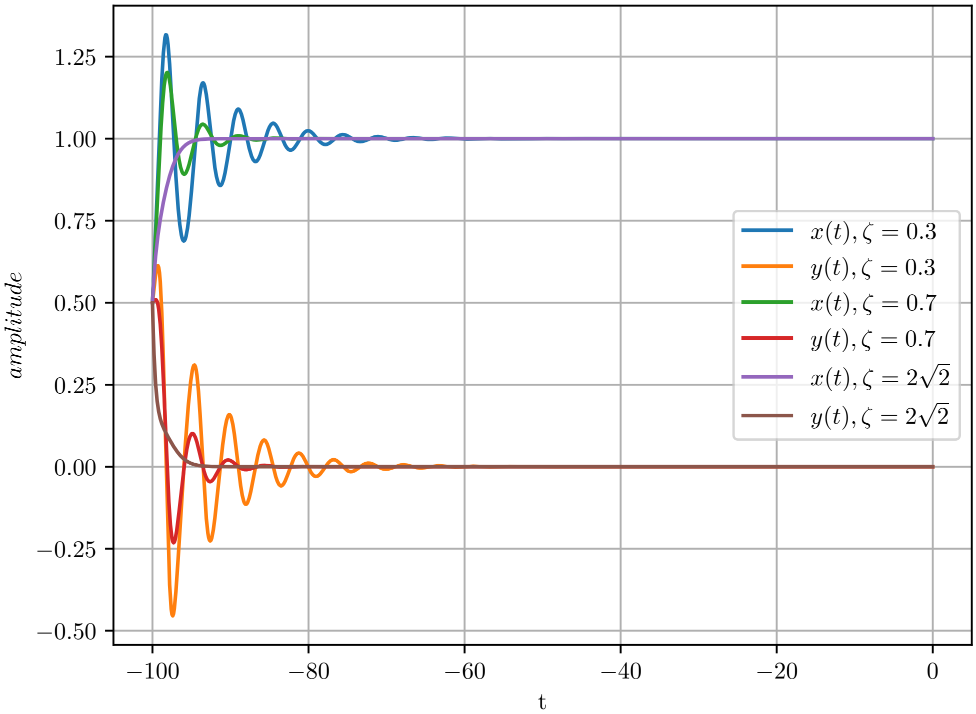
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz \\ \dot{z} &= \beta z + xy, \quad (\sigma, \rho, beta > 0). \end{aligned}$$

Προς το παρόν, θα δούμε κάποια βασικά χαρακτηριστικά του.

(α΄) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας του και την εξάρτησή τους από τις παραμέτρους.



Σχήμα 8: Πορτρέτο κίνησης ταλαντωτή Duffing για $\zeta = 0.3$ (μπλε χρώμα) και για $\zeta = 0.7$ (καφέ χρώμα).



Σχήμα 9: Απόκριση ταλαντωτή Duffing για διάφορα ζ.

(β′) Δείξτε ότι ο κάθετος άξονας z είναι αναλλοίωτη ευθεία για το σύστημα και περιγράψτε τη δυναμική πάνω του. Επίσης, δείξτε ότι το σύστημα έχει τη συμμετρία $(x, y, z) \to (-x, -y, z)$.

(γ′) Δείξτε ότι

(i) για $0 < \rho < 1$, το σημείο ισορροπίας στο 0 είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές, κάνοντας χρήση της συνάρτησης Lyapunov
$$V(x, y, z) = \rho x^2 + \sigma(y^2 + z^2).$$

(ii) για $\rho > 1$, το σημείο ισορροπίας 0 έχει μονοδιάστατη ασταθή πολλαπλότητα $W^u(0)$.

Λύση 2016/17 3. (α). Τα σημεία ισορροπίας υπολογίζονται από τις σχέσεις
$$\begin{aligned} 0 &= \sigma(y - x) \\ 0 &= \rho x - y - xz \\ 0 &= \beta z + xy \end{aligned}$$

Από την πρώτη σχέση προκύπτει
$$y = x.$$
Με αντικατάσταση αυτής στην τρίτη και λύνοντας ως προς z προκύπτει
$$z = \frac{x^2}{\beta}.$$

Τέλος, με αντικατάσταση των δύο παραπάνω σχέσεων στην δεύτερη έχουμε
$$0 = \rho x - x\frac{x^2}{\beta} = x\left(\rho - 1 - \frac{x^2}{\beta}\right),$$

που σημαίνει $x = 0$, ή
$$\begin{aligned} 0 &= \rho - 1 - \frac{x^2}{\beta} \\ x^2 &= \beta(\rho - 1), \end{aligned}$$

και για $\rho > 1$ προκύπτει $x = \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}$.

Τελικά, τα σημεία ισορροπίας είναι το $(0, 0, 0)$ και αν $\rho > 1$ έχουμε και τα σημεία $\left(\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1\right)$ και $\left(-\sqrt{\beta(\rho - 1)}, -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1\right)$.

Για να διαπιστώσουμε τη μορφή των σημείων ισορροπίας θα πάρουμε τη γραμμικοποίηση του συστήματος. Αν γράψουμε το σύστημα στη μορφή
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = F(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sigma(y - x) \\ \rho x - y - xz \\ \beta z + xy \end{pmatrix},$$

τότε η Ιακωβιανή είναι
$$DF(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix}.$$

Έτσι για την αρχή ισχύει
$$DF(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}.$$

Είναι εμφανές ότι μία ιδιοτιμή είναι $\lambda_1 = -\beta < 0$. Για να βρούμε τις άλλες δύο θα πάρουμε την ορίζουσα

$$\det\begin{pmatrix} -\sigma-\lambda & \sigma \\ \rho & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-\sigma-\lambda)(-1-\lambda) - \sigma\rho,$$

που τελικά δίνει

$$\lambda^2 + \lambda(\sigma+1) + \sigma(1-\rho) = 0.$$

Η διακρίνουσα της παραπάνω είναι

$$\Delta = (\sigma+1)^2 - 4\sigma(1-\rho),$$

και οι ιδιοτιμές είναι

$$\lambda_{2,3} = \frac{-(\sigma+1) \pm \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Αν λ_2 είναι η ιδιοτιμή που προκύπτει από το θετικό πρόσημο που είναι μπροστά από την τετραγωνική ρίζα και αντίστοιχα λ_3 η άλλη ιδιοτιμή, τότε προφανώς $\lambda_3 < 0$. Θα δούμε, για την ιδιοτιμή λ_2. Οι ρίζες της είναι

$$-(\sigma+1) + \sqrt{(\sigma+1)^2 - 4\sigma(1-\rho)} = 0,$$

όπου υψώνοντας στο τετράγωνο προκύπτει

$$(\sigma+1)^2 - 4\sigma(1-\rho) = (\sigma+1)^2,$$

ή

$$-4\sigma(1-\rho) = 0,$$

και επειδή $\sigma > 0$, προκύπτει $\rho = 1$.

Άρα $\lambda_2 < 0$, όταν $0 < \rho < 1$ και τότε, διότι $\lambda_1, \lambda_3 < 0$, από το θεώρημα Hartman-Grobman το $(0,0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Όταν $\rho > 1$, τότε $\lambda_2 > 0$ και επειδή $\lambda_1, \lambda_3 < 0$, η αρχή από το θεώρημα Hartman-Grobman είναι σάγμα. Αυτό αποδεικνύει το ερώτημα (γ) ii.

Όταν $\rho = 1$, τότε $\lambda_2 = 0$ και $\lambda_3 = -(\sigma+1)$ αλλά επειδή έχουμε μη υπερβολικό σημείο ισορροπίας δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Hartman-Grobman. Η αντίστοιχη ανάλυση για τα άλλα δύο σημεία ισορροπίας είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη και θα παραλειφθεί.

(β). Το σύστημα έχει τη συμμετρία $(x,y,z) \to (-x,-y,z)$ και φαίνεται εύκολα αν εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό. Έτσι

$$\begin{aligned} -\dot{x} &= \sigma(-y+x) \\ -\dot{y} &= -\rho x + y + xz \\ \dot{z} &= -\beta z + (-x)(-y), \end{aligned}$$

όπου όμως το παραπάνω ισούται με το αρχικό

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y-x) \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz \\ \dot{z} &= -\beta z + xy, \end{aligned}$$

και αυτό επιβεβαιώνει τη συμμετρία ως προς τον άξονα z.

Ένα σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$ είναι αναλλοίωτο για τη ροή ενός διανυσματικού πεδίου εάν $x \in K \Rightarrow \phi(x,t) \in K$. Επομένως, για να ένα σημείο $z \in (0,0,z)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= 0 \\
\dot{y} &= 0 \\
\dot{z} &= -\beta z,
\end{aligned}$$

και άρα η ροή του διανυσματικού πεδίου, για οποιοδήποτε σημείο πάνω στον άξονα z, παραμένει στον άξονα z για κάθε t και άρα είναι αναλλοίωτη ευθεία για το σύστημα.

(γ) i. Θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση Lyapunov

$$V(x,y,z) = \rho x^2 + \sigma(y^2 + z^2),$$

για $0 < \rho < 1$ και για το σημείο $(0,0,0)$. Αρχικά στο σημείο αυτό προφανώς ισχύει $V(0,0,0) = 0$ και για $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ βλέπουμε ότι $V(x,y,z) > 0$. Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης Lyapunov. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(x(t),y(t),z(t)) &= 2\rho x\dot{x} + 2\sigma y\dot{y} + 2\sigma z\dot{z} \\
&= 2\rho x(\sigma(y-x)) + 2\sigma y(\rho x - y - xz) + 2\sigma z(-\beta z + xy) \\
&= 2\rho x\sigma y - 2\rho\sigma x^2 + 2\sigma y\rho x - 2\sigma y^2 - 2\sigma yxz - 2\sigma\beta z^2 + 2\sigma zxy \\
&= -2\sigma\left(-2\rho xy + \rho x^2 + y^2 + \beta z^2\right) \\
&= -2\sigma\left(-2\rho xy + \rho x^2 + y^2 + \beta z^2 + \rho^2 x^2 - \rho^2 x^2\right) \\
&= -2\sigma\left[(\rho x - y)^2 + \beta z^2 + \rho x^2(1-\rho)\right].
\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι $0 < \rho < 1$, ισχύει $\dot{V} < 0$ καθώς όλοι οι όροι είναι τετραγωνικοί. Έτσι για κάθε $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ και συνεπώς είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Άσκηση 2016/17 4.

Λύση 2016/17 4.