Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών
Θεωρητική Πληροφορική και Θεωρία Συστημάτων και Ελέγχου

Εργασία για το μάθημα

Εύρωστος Έλεγχος

Νίκος Β. Βασίλας

Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 2017

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

Κεφάλαιο **1**

Εισαγωγικά στο MATLAB

Για να κατανοήσουμε και να ελέγξουμε διάφορα πολύπλοκα συστήματα πρέπει να καταφύγουμε σε κάποιο μαθηματικό μοντέλο των συστημάτων αυτών. Η σύνθεση του μαθηματικού μοντέλου προκύπτει από τις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος. Τα περισσότερα συστήματα παρουσιάζουν μη-γραμμική συμπεριφορά. Η προσέγγιση που ακολουθούμε στα συστήματα αυτομάτου ελέγχου περιλαμβάνει τη γραμμικοποίηση των μη-γραμμικών διαφορικών εξισώσεων γύρω από ένα σημείο ισορροπίας και έτσι λαμβάνεται το αντίστοιχο προσεγγιστικό γραμμικό μοντέλο. Στη συνέχεια χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός Laplace όπου μετατρέπουμε τις διαφορικές εξισώσεις, από το πεδίο του χρόνου, σε αλγεβρικές, στο πεδίο της συχνότητας, που λύνονται πολύ πιο εύκολα. Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού καταλήγουμε σε μία σχέση εισόδου-εξόδου του συστήματος, που καλείται συνάρτηση μεταφοράς. Η συνάρτηση μεταφοράς αποτελεί ένα μέσο για τη μελέτη της συμπεριφοράς του συστήματος για διάφορα σήματα εισόδου που επιδρούν στο σύστημα. Για περισσότερες πληροφορίες για τα θέματα του αυτομάτου ελέγχου προτείνονται τα βιβλία [3] και [8].

1.1 Συναρτήσεις μεταφοράς

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι της μορφής

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)},$$

όπου $Y(s)$ και $U(s)$ είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των χρονικών συναρτήσεων εξόδου και εισόδου αντίστοιχα. Γενικά τα συστήματα ελέγχου είναι ιδιαίτερα πολύπλοκα, για και η μελέτη τους γίνεται με εξειδικευμένα λογισμικά, όπως το MATLAB. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε βασικές εντολές του MATLAB για τη δημιουργία, την ανάλυση και την παρουσίαση συστημάτων ελέγχου. Αυτό θα γίνει με τη μορφή παραδειγμάτων και την παράθεση του αντίστοιχου κώδικα και την επεξήγηση αυτού.

Η δημιουργία συνάρτησης μεταφοράς στο MATLAB γίνεται με την εντολή `tf` και συντάσσεται

sys = tf(num, den)

όπου οι είσοδοι της συνάρτησης είναι οι πίνακες `num` και `den`, που δηλώνουν τα πολυώνυμα του αριθμητή και παρανομαστή αντίστοιχα και η έξοδος `sys` είναι η συνάρτηση μεταφοράς. Οι εντολές για τη δήλωση των παραπάνω στο MATLAB φαίνονται παρακάτω.

```
num = [1, 2];
den = [1, 3, 5];
sys = tf(num, den);
```

Μία άλλη χρήσιμη δυνατότητα είναι η γρήγορη εύρεση των μηδενικών και των πόλων του συστήματος. Μηδενικά ονομάζονται οι όροι που μηδενίζουν τον αριθμητή της συνάρτησης μεταφοράς και πόλοι οι όροι που μηδενίζουν τον παρανομαστή. Είναι γνωστό ότι αν πόλοι βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο τότε το σύστημα είναι ευσταθές. Μιας και ασχολούμαστε με γραμμικά συστήματα, η ευστάθεια είναι του συστήματος είναι ανεξάρτητη της διέγερσης. Με την εντολή `pzmap(sys)` θα δημιουργηθεί διάγραμμα με τον άξονα x να είναι ο άξονας των πραγματικών αριθμών και τον άξονα y να είναι ο άξονας των φανταστικών αριθμών. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το εξής.

```
sys = tf([2, 5, 1], [1, 3, 5]);
pzmap(sys);
grid on;
```

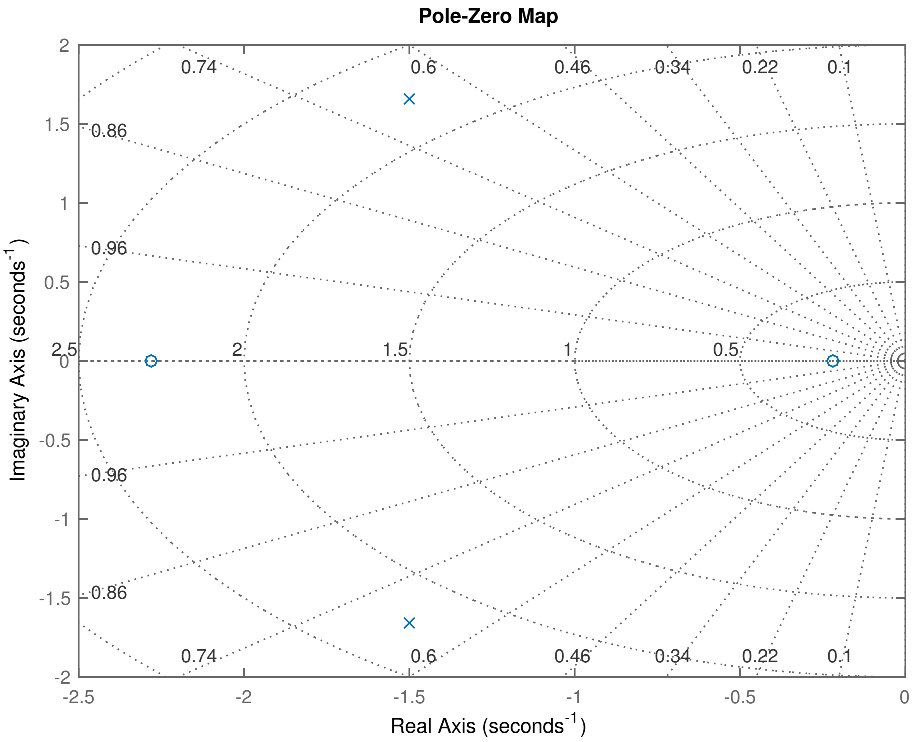
Το διάγραμμα που παίρνουμε φαίνεται στο σχήμα 1.1. Οι πόλοι συμβολίζονται με το σύμβολο x και τα μηδενικά με το σύμβολο o. Βλέπουμε πως οι πόλοι βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο και άρα το σύστημα είναι ευσταθές.

Με το MATLAB μπορούμε να δηλώσουμε ένα σύστημα κλειστού βρόχου με την εντολή `feedback`. Με την ανάδραση σε ένα σύστημα κλειστού βρόχου μπορούμε να συγκρίνουμε την έξοδο του συστήματος με την είσοδο του συστήματος, έτσι ώστε η επιθυμητή δράση ελέγχου να αποτελεί συνάρτηση της εξόδου και της εισόδου του συστήματος. Η σύνταξη στο MATLAB είναι

sys = feedback(sys1, sys2)

όπου `sys1` είναι η συνάρτηση μεταφοράς του ανοιχτού βρόχου και `sys2` είναι συνάρτηση μεταφοράς του κλάδου της ανάδρασης. Αξίζει να σημειωθεί ότι από προεπιλογή η εντολή `feedback` θεωρεί αρνητική ανάδραση. Φυσικά έχουμε την επιλογή να αλλάξουμε τη συμπεριφορά αυτή αν το επιθυμούμε. Για περαιτέρω ο ενδιαφερόμενος παραπέμπεται στη βοήθεια του MATLAB. Στη συνέχεια παρουσιάζεται παράδειγμα με τις απαραίτητες εντολές, που έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{4}{s^2 + 2s + 3},$$



Σχήμα 1.1: Διάγραμμα πόλων-μηδενικών

και θέλουμε μοναδιαία ανάδραση.

```
sys1 = tf([4], [1, 2, 3]);
sys2 = 1;
sys = feedback(sys1, sys2);
```

Αν το σύστημα που πρόκειται να ελέγξουμε είναι μη-γραμμικό ή χρονικά μεταβαλλόμενο ή έχει πολλαπλές εισόδους και εξόδους τότε είναι δύσκολο, αν όχι αδύνατον, να εξαχθεί η συνάρτηση μεταφοράς του μοντέλου. Για αυτόν το λόγο χρησιμοποιούμε το μοντέλο μεταβλητών κατάστασης για να περιγράψουμε το σύστημα.

Σύμφωνα με το βιβλίο [6], το μοντέλο μεταβλητών κατάστασης ενός συστήματος ορίζεται ως ο ελάχιστος αριθμός μεταβλητών, όπου η γνώση των οποίων σε οποιοδήποτε χρόνο σε συνδυασμό με την πληροφορία της εισόδου που εφαρμόζεται στο χρόνο αυτό, είναι ικανή συνθήκη για να προσδιορίσουμε την κατάσταση του συστήματος για κάθε μελλοντικό χρόνο. Συνήθως χρησιμοποιούμε ένα διάνυσμα διάστασης n για να συμβολίσουμε τις μεταβλητές κατάστασης, $x \in \mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιούμε το διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^m$ για να συμβολίσουμε τις m μεταβλητές εισόδου και $y \in \mathbb{R}^p$ για να συμβολίσουμε τις p μεταβλητές εξόδου. Η γενική μορφή ενός μοντέλου στο χώρο των καταστάσεων είναι της μορφής

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, t)\\ y &= g(x, u, t).\end{aligned}$$

Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις f, g είναι ανεξάρτητες του χρόνου t αλλά είναι και γραμμικές, τότε το μοντέλο μεταβλητών κατάστασης γράφεται στη μορφή

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Η δημιουργία μοντέλου μεταβλητών κατάστασης στο MATLAB γίνεται με την εντολή `ss`.

$$\text{sys} = \text{ss}(\text{A}, \text{B}, \text{C}, \text{D})$$

Οι είσοδοι της συνάρτησης είναι οι πίνακες A, B, C, D, όπως φαίνονται στις σχέσεις (1.1). Παρακάτω παρατίθεται ένα παράδειγμα με τις αντίστοιχες εντολές του MATLAB.

```
A = [0, 1; 2, 1];
B = [0; 1];
C = [1, 1];
sys = ss(A, B, C, [])
```

1.2 Απόκριση συστήματος

Μπορούμε να διερευνήσουμε την απόκριση του συστήματος στο πεδίο του χρόνου χρησιμοποιώντας στη συνάρτηση `step`. Η συνάρτηση αυτή είναι από τις πιο χρήσιμες συναρτήσεις του MATLAB για το σχεδιασμό συστημάτων ελέγχου. Δοθέντος ενός συστήματος, λαμβάνουμε την απόκριση σε μοναδιαία είσοδο, χωρίς την ανάγκη να λύσουμε ως προς το χρόνο το σύστημα. Η συνάρτηση `step` μπορεί να περιγράφει ως η αλλαγή στην είσοδο από το μηδέν στο ένα στο χρόνο ένα. Η σύνταξη είναι

$$\text{step}(\text{sys})$$

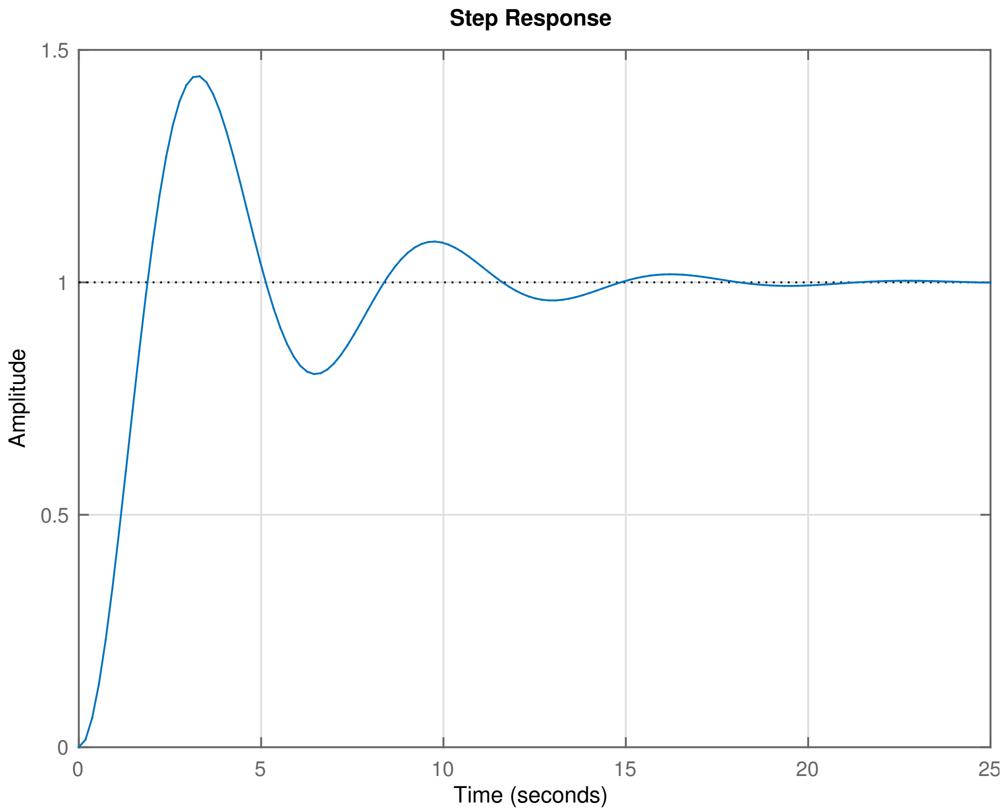
όπου `sys` είναι δυναμικό σύστημα, για παράδειγμα θα μπορούσε να είναι κάποιο από τα παραπάνω παραδείγματα. Αν πάρουμε για παράδειγμα ένα σύστημα δεύτερης τάξης

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2},$$

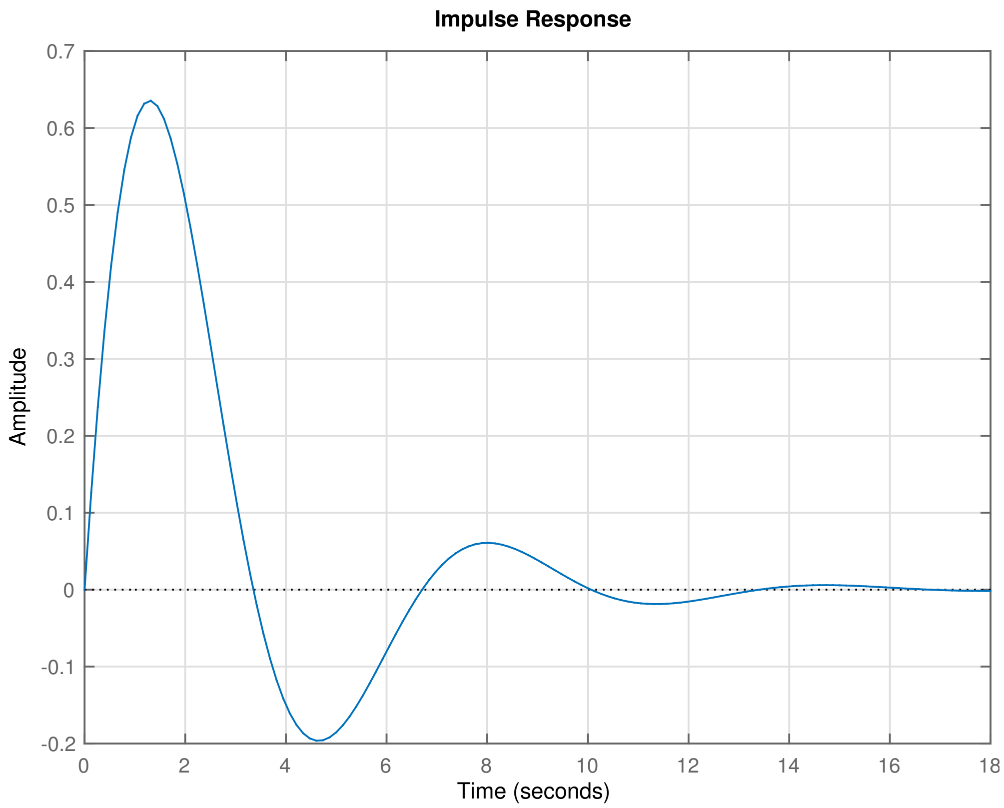
με $\omega_n = 1$ και $\zeta = 0.25$ και τρέξουμε τις ακόλουθες εντολές στο MATLAB θα λάβουμε το σχήμα 1.2.

```
sys = tf([1], [1, 0.5, 1]);
step(sys);
grid on;
```

Η απόκριση του συστήματος ανοιχτού βρόχου, είναι η αναμενόμενη διότι η απόσβεση είναι μικρή και έτσι έχουμε ταλαντώσεις αλλά και αργή σύγκλιση.



Σχήμα 1.2: Μοναδιαία βηματική απόκριση



Σχήμα 1.3: Κρουστική απόκριση

Ένα άλλο εργαλείο που μας παρέχει το MATLAB για τη διερεύνηση της απόκρισης του συστήματος είναι η συνάρτηση `impulse`. Η συνάρτηση αυτή υπολογίζει την απόκριση του συστήματος που υπόκειται σε κρουστική είσοδο, δηλαδή στη συνάρτηση $\delta(t)$ του Dirac. Η σύνταξη είναι όμοια με αυτή της `step` που παρουσιάσαμε παραπάνω. Παρακάτω παρουσιάζονται οι εντολές του MATLAB για την απόκριση του προηγούμενου παραδείγματος, αλλά με $\zeta = 0.7$ σε κρουστική είσοδο και η συμπεριφορά του συστήματος εμφανίζεται στο σχήμα 1.3. Παρατηρούμε πως η συγκεκριμένη τιμή του ζ μας δίνει καλύτερα δυναμικά χαρακτηριστικά, δηλαδή μικρότερες ταλαντώσεις και γρηγορότερη σύγκλιση στη μόνιμη κατάσταση.

```
sys = tf([1], [1, 0.7, 1]);
impulse(sys);
grid on;
```

Εκτός από τις συναρτήσεις `step` και `impulse` έχουμε τη δυνατότητα να μελετήσουμε την απόκριση του συστήματος για οποιοδήποτε σήμα εισόδου επιθυμούμε. Αυτό γίνεται με τη συνάρτηση `lsim` που συντάσσεται

lsim(sys, u, t)

όπου `sys` είναι το σύστημα, `u` είναι συνάρτηση της εισόδου που επιθυμούμε και `t` είναι ο χρονικός ορίζοντας. Σαν παράδειγμα μπορούμε να δούμε πως ανταποκρίνεται ένα σύστημα δεύτερης τάξης σε "τετραγωνικό" σήμα.

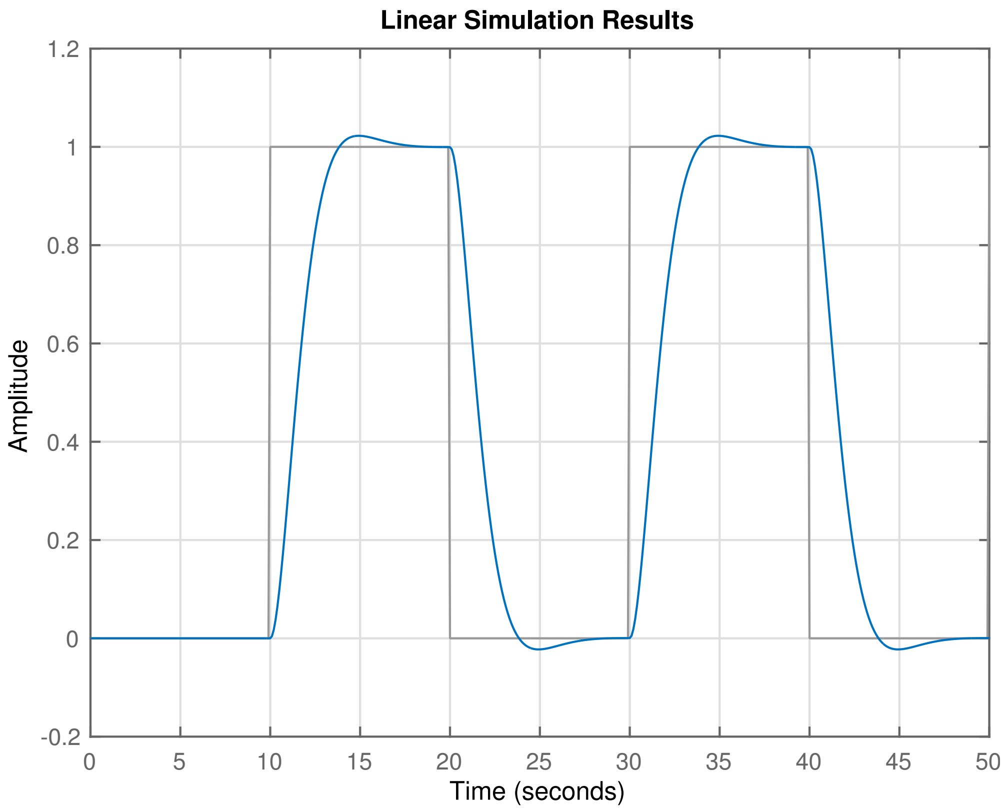
```
sys = tf([1], [1, 1.54, 1]);
[u, t] = gensig('square', 20, 50, 0.1);
lsim(sys, u, t);
grid on;
```

Στο παράδειγμα έχουμε φυσική συχνότητα $\omega_n = 1$, συντελεστή απόσβεσης $\zeta = 0.77$ και τετραγωνικό σήμα εισόδου. Στο σχήμα 1.4, με τη μπλε γραμμή εμφανίζεται η απόκριση του συστήματος και με τη γκρι το σήμα εισόδου, δηλαδή η επιθυμητή τροχιά. Με τη συνάρτηση `gensig` μπορούμε να δημιουργήσουμε διάφορα σήματα εισόδου. Φυσικά όμως έχουμε τη δυνατότητα να ορίσουμε οπουδήποτε συνάρτηση εισόδου u επιθυμούμε και να τη χρησιμοποιήσουμε με την `lsim`.

1.3 Επίλυση συστημάτων βέλτιστου ελέγχου

Τέλος, με τη βοήθεια του MATLAB είναι πολύ εύκολη η επίλυση συστημάτων βέλτιστου ελέγχου. Με την εντολή

[K, S, e] = lqr(A, B, Q, R, N)



Σχήμα 1.4: Απόκριση σε τετραγωνικό σήμα εισόδου

υπολογίζουμε το βέλτιστο νόμο ελέγχου K. Πιο συγκεκριμένα, για ένα σύστημα ελέγχου συνεχούς χρόνου, ο βέλτιστος νόμος ελέγχου $u = -Kx$ είναι αυτός που ελαχιστοποιεί την τετραγωνική αντικειμενική συνάρτηση

$$J = \int_0^\infty \left(x^T Q x + u^T R u + 2x^T N u \right),\ dt$$

όπου Q, R είναι τα μητρώα στάθμισης των μεταβλητών κατάστασης και των μεταβλητών ελέγχου και N είναι το μητρώο στάθμισης των μεταβλητών κατάστασης συναρτήσει των μεταβλητών ελέγχου. Η ελαχιστοποίηση της παραπάνω γίνεται δεδομένου ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις της δυναμικής του συστήματος

$$\dot{x} = Ax + Bu.$$

Τελικά, καταλήγουμε στην αλγεβρική εξίσωση Riccati

$$A^T + SA - (SB + N)R^{-1}(B^T S + N^T) + Q = 0,$$

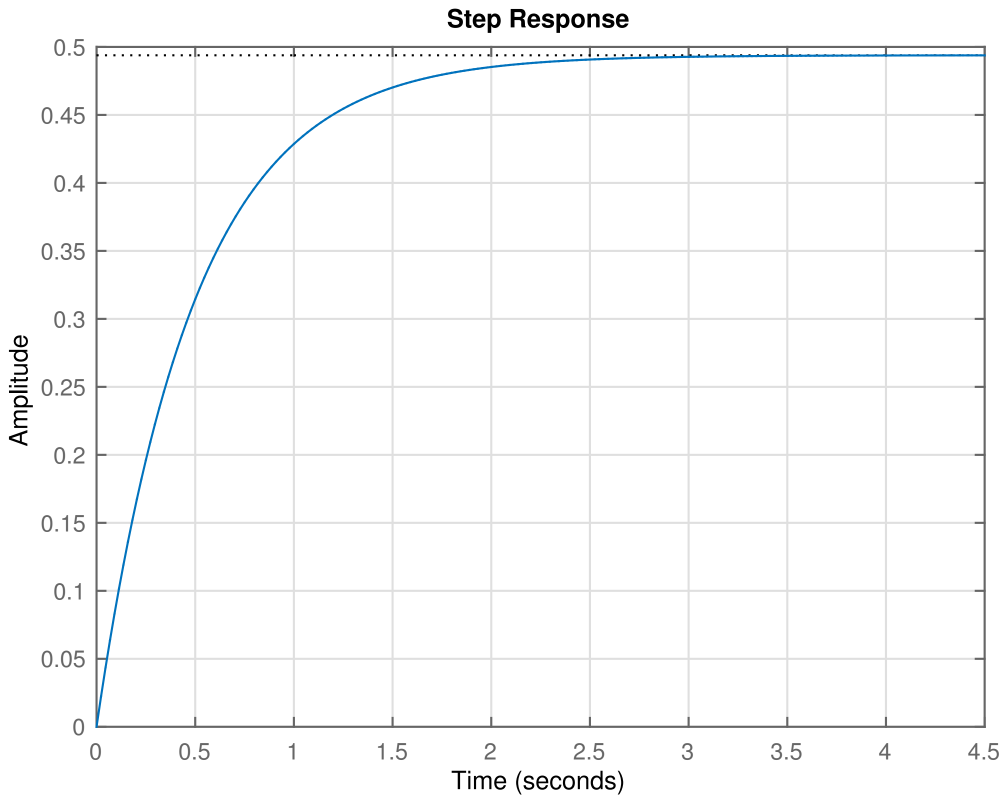
της οποίας τη λύση βρίσκουμε με την εντολή `lqr`. Σαν παράδειγμα θα δούμε το σύστημα μεταβλητών κατάστασης που είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα. Οι ιδιοτιμές του μητρώου A είναι $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$ και συνεπώς είναι ασταθές. Με τις παρακάτω εντολές κατασκευάζουμε βέλτιστο ελεγκτή με μοναδιαία στάθμιση στις μεταβλητές κατάστασης $Q = I_2$, στάθμιση στη μεταβλητή εισόδου $R = 10$ και $N = 0$.

```
A = [0, 1; 2, 1];
B = [0; 1];
C = [1, 1];
[K, s, e] = lqr(A, B, eye(2), 10, []);
step(ss(A - B*K, B, C, []));
grid on;
```

Το κέρδος υπολογίζεται

$$K = \begin{pmatrix} 4.0248 & 4.0248 \end{pmatrix},$$

και η μοναδιαία βηματική απόκριση του βέλτιστου τετραγωνικού ελεγκτή παρουσιάζεται στο σχήμα 1.5.



Σχήμα 1.5: Μοναδιαία βηματική απόκριση βέλτιστου τετραγωνικού ελεγκτή

Κεφάλαιο 2

Ευστάθεια

Τα συστήματα σχεδιάζονται ώστε να εκτελούν κάποιες εργασίες. Αν ένα σύστημα δεν είναι ευσταθές τότε το σύστημα μπορεί να χαλάσει, μπορεί να αποτύχει να εκτελέσει την εργασία ή να εκτελεσθεί μερικώς. Επομένως στην πράξη ένα ασταθές σύστημα δεν είναι αξιοποιήσιμο και η ευστάθεια είναι μία βασική προδιαγραφή που πρέπει κάθε σύστημα να ικανοποιεί.

Η έννοια της ευστάθειας που συναντάται συνήθως στη μελέτη των δυναμικών συστημάτων και της θεωρίας ελέγχου είναι η ευστάθεια κατά Lyapunov και αυτή θα παρουσιάσουμε. Οι μαθηματικοί ορισμοί που θα ακολουθήσουν είναι από το βιβλίο [5].

Θεωρούμε ότι η δυναμική συμπεριφορά ενός συστήματος μοντελοποιείται μαθηματικά από τις λύσεις του δυναμικού συστήματος

$$\dot{x} = f(x), \quad f : U \to \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

Ενδιαφερόμαστε για την μακροπρόθεσμη συμπεριφορά των τροχιών της παραπάνω. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα σημεία ισορροπίας. Τέτοια σημεία $\bar{x} \in U$ είναι αυτά που δεν αλλάζουν με το χρόνο. Μαθηματικά, αυτό σημαίνει ότι η σταθερή απεικόνιση $t \to \bar{x}$ είναι λύση του δυναμικού συστήματος, ή ισοδύναμα, $f(\bar{x}) = 0$. Έτσι ορίζουμε *σημείο ισορροπίας* της (2.1) το σημείο $\bar{x} \in U$ τέτοιο ώστε $f(\bar{x}) = 0$.

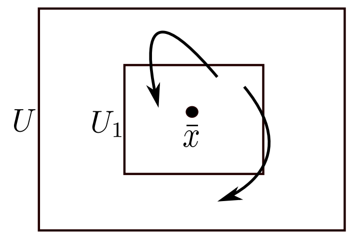
2.1 Ευστάθεια κατά Lyapunov

Θεωρούμε ότι ένα σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές αν λύσεις που ξεκινούν "κοντά σε αυτό", παραμένουν "κοντά σε αυτό" για κάθε μελλοντικό χρόνο. Ο μαθηματικοί ορισμοί της ευστάθειας κατά Lyapunov διατυπώνονται παρακάτω.

Ορισμός 1 (Ευστάθεια κατά Lyapunov, των Hirsch και Smale [5]). Έστω $\bar{x} \in W$ σημείο ισορροπίας της διαφορικής εξίσωσης

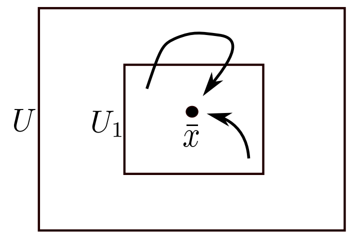
$$\dot{x} = f(x),$$

όπου $f : W \to E$ είναι C^1 συνάρτηση από το ανοιχτό σύνολο W του διανυσματικού χώρου E στο E. Τότε το $\bar{x}$ είναι *ευσταθές* σημείο ισορροπίας αν για κάθε γειτονιά U του $\bar{x}$ του W υπάρχει γειτονιά U_1 του $\bar{x}$ στο U τέτοια ώστε κάθε λύση $x(t)$ με $x(0)$ στο U_1 να ορίζεται στο U για κάθε $t > 0$.



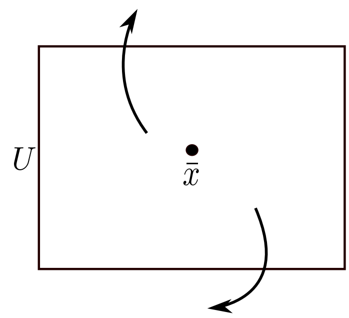
Σχήμα 2.1: Ευσταθές σημείο ισορροπίας

Ορισμός 2 (Ασυμπτωτική ευστάθεια κατά Lyapunov, των Hirsch και Smale [5]). Αν το U_1 μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε να ισχύουν τα όσα περιγράφηκαν στον παραπάνω ορισμό και $\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}$, τότε το $\bar{x}$ είναι *ασυμπτωτικά ευσταθές*.



Σχήμα 2.2: Ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας

Ορισμός 3 (Αστάθεια κατά Lyapunov, των Hirsch και Smale [5]). Ένα σημείο ισορροπίας $\bar{x}$ που δεν είναι ευσταθές είναι *ασταθές*. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει γειτονιά U του $\bar{x}$ τέτοια ώστε για κάθε γειτονιά U_1 του $\bar{x}$ στο U, υπάρχει τουλάχιστον μία λύση $x(t)$ που ξεκινάει από το $x(0) \in U_1$ και δε βρίσκεται στο U.



Σχήμα 2.3: Ασταθές σημείο ισορροπίας

Πρέπει να σημειωθεί ότι μόνο η σύγκλιση στο σημείο ισορροπίας στον δεύτερο ορισμό, δεν αρκεί για να χαρακτηριστεί το σημείο ασυμπτωτικά ευσταθές για γενική συνάρτηση f της σχέσης (2.1). Παρόλο αυτά αποδεικνύεται ότι αν το υπό μελέτη σύστημα είναι γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο τότε η έννοια της σύγκλισης συμπίπτει με την έννοια της ασυμπτωτικής ευστάθειας. Με τους παραπάνω ορισμούς μπορούμε να χαρακτηρίσουμε ένα σημείο ισορροπίας ως προς την ευστάθεια του μέσω των ιδιοτιμών της γραμμικοποίησης. Παρόλο αυτά με την τεχνική αυτή, η ευστάθεια δε μπορεί να διαπιστωθεί για κάθε περίπτωση. Ο Ρώσος μαθηματικός και μηχανικός Lyapunov στη διδακτορική του διατριβή μας έδωσε ένα χρήσιμο κριτήριο περί ευστάθειας. Προτού διατυπώσουμε το θεώρημα θα δώσουμε κάποιους συμβολισμούς.

Έστω $V : V \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση σε μία γειτονιά $U \subset W$ του $\bar{x}$. Συμβολίζουμε με $\dot{V} : U \to \mathbb{R}$ τη συνάρτηση που ορίζεται

$$\dot{V}(x) = DV(x)(f(x)).$$

Το δεξί μέλος της παραπάνω είναι απλώς ο τελεστής $DV(x)$ εφαρμοσμένος στο διάνυσμα $f(x)$. Τότε αν $\phi_t(x)$ είναι η λύση της (2.1) που περνάει από το x όταν $t = 0$, προκύπτει

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}V(\phi_t(x))\Big|_{t=0},$$

από τον κανόνα της αλυσίδας. Συνεπώς, αν $\dot{V}(x)$ είναι αρνητικό, τότε η V μειώνεται συναρτήσει της λύσης της (2.1) ως προς το x. Ο ορισμός του θεωρήματος ευστάθειας του Lyapunov διατυπώνεται παρακάτω.

Θεώρημα 1 (Άμεση μέθοδος Lyapunov, των Hirsch και Smale [5]). *Έστω $\bar{x} \in W$ σημείο ισορροπίας της* (2.1). *Έστω $V : U \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε μία γειτονιά $U \subset W$ του x, διαφορίσιμη στο $U - \bar{x}$, τέτοια ώστε*

(α) $V(\bar{x}) = 0$ *και* $V(x) > 0$ *αν* $x \neq \bar{x}$,

(β) $\dot{V} \leq 0$ *στο* $U - \bar{x}$.

Τότε το $\bar{x}$ είναι ευσταθές. Επιπλέον, αν ακόμη

(γ) $\dot{V} < 0$ *στο* $U - \bar{x}$,

τότε το $\bar{x}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Συνάρτηση V που ικανοποιεί τα *(α)* και *(β)* ονομάζεται συνάρτηση Lyapunov για το $\bar{x}$. Αν ακόμη ικανοποιεί για το *(γ)*, τότε ονομάζεται αυστηρή συνάρτηση Lyapunov.

Το πλεονέκτημα του θεωρήματος του Lyapunov είναι ότι μπορεί να εφαρμοστεί χωρίς να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση. Από την άλλη, δεν υπάρχει κάποια συγκεκριμένη μέθοδος για να βρούμε συναρτήσεις Lyapunov. Σε περιπτώσεις μηχανολογικών και ηλεκτρικών συστημάτων, η συνάρτηση της συνολική ενέργεια είναι καλή υποψήφια συνάρτηση Lyapunov. Για περαιτέρω παραπέμπουμε στις δημοσιεύσεις του Lyapunov [7] και στα βιβλία [5].

2.2 Ευστάθεια αυτόνομου γραμμικού αναλλοίωτου συστήματος

Το παραπάνω θεώρημα του Lyapunov απλοποιείται σημαντικά στην περίπτωση που έχουμε γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο σύστημα της μορφής

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0. \tag{2.2}$$

Γνωρίζουμε ότι το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν όλες οι ιδιοτιμές του A έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος. Ο πίνακας A τότε λέγεται Hurwitz πίνακας. Έτσι έχουμε την πρόταση:

Πρόταση 2 (Πρόταση 2.1 των Dullerud και Paganini [4]). *Το αυτόνομο σύστημα* (2.2) *είναι εσωτερικά ευσταθές αν και μόνο αν ο πίνακας A είναι Hurwitz.*

Το ισοδύναμο θεώρημα του Lyapunov για το παραπάνω σύστημα σύμφωνα με το βιβλίο [2], είναι το εξής:

Θεώρημα 3 (Θεώρημα 5.5 του Chen [2]). *Όλες οι ιδιοτιμές του A έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος αν και μόνο αν για κάποιον θετικά ορισμένο συμμετρικό πίνακα N, η συνάρτηση Lyapunov*

$$A^T M + MA = -N,$$

έχει μοναδική συμμετρική λύση M και ο M είναι θετικά ορισμένος.

Επίσης, για τον υπολογισμό του πίνακα M προκύπτει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4 (Θεώρημα 5.6 του Chen [2]). *Αν όλες οι ιδιοτιμές του A έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, τότε η συνάρτηση Lyapunov*

$$A^T M + MA = -N,$$

έχει μοναδική λύση για κάθε N, και η λύση μπορεί να εκφραστεί ως

$$M = \int_0^\infty e^{A^T t} N e^{At}\, dt.$$

Όσα αναφέραμε παραπάνω αφορούν αυτόνομα συστήματα της μορφής (2.1). Στα συστήματα ελέγχου συνήθως, η είσοδος έχει μορφή ανάδρασης της κατάστασης, δηλαδή συνάρτηση του x. Έτσι με τους παραπάνω ορισμούς και θεωρήματα έχοντας την είσοδο ως $u(x)$ μπορούμε να αποφανθούμε για την ευστάθεια του συστήματος.

2.3 Ευστάθεια γραμμικού αναλλοίωτου συστήματος ελέγχου

Δοθέντος συστήματος της μορφής

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \tag{2.3}$$

με $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m$, τότε ονομάζουμε τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

πίνακα ελεγξιμότητας. Όταν ο πίνακας έχει πλήρη βαθμό n, τότε λέμε ότι το ζεύγος (A, B) είναι ελέγξιμο, ή αντίστοιχα ότι το σύστημα είναι ελέγξιμο. Αν βρούμε ένα νόμο ανάδρασης της μορφής $u(t) = Fx(t)$ με F σταθερό πίνακα στο $\mathbb{R}^{m\times n}$, τότε η παραπάνω γίνεται

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t), \quad x(0) = x_0.$$

Τότε έχουμε το παρακάτω θεώρημα.
Θεώρημα 5 (Θεώρημα 2.19 των Dullerud και Paganini [4]). *Οι ιδιοτιμές του $A + BF$ είναι ελεύθερα επιλέξιμες, επιλέγοντας τον πίνακα $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$, αν και μόνο αν το ζεύγος (A, B) είναι ελέγξιμο.*

Στην πράξη, πολύ συχνά μελετούμε γραμμικά αναλλοίωτα συστήματα της μορφής (2.3), όπου η ανάδραση είναι γραμμική συνάρτηση των καταστάσεων. Στις περιπτώσεις αυτές έχουμε μία ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να μετατρέψουμε το πιθανόν ασταθές αυτόνομο σύστημα σε ευσταθές ή να επιλέξουμε σύμφωνα με κάποια κριτήρια τις ιδιοτιμές του κλειστού συστήματος με κατάλληλη επιλογή του πίνακα F.

Πολλές φορές όταν η είσοδος είναι μη μηδενική συναντούμε συχνά δύο τύπους ευστάθειας. Σύμφωνα με το βιβλίο [1] οι ορισμοί είναι:
Ορισμός 4 (Ορισμός 10.3 του Brogan [1]). Αν υπάρχει ένας σταθερός, πεπερασμένος και σταθερός K τέτοιος ώστε $\|u\| \leq K$ για κάθε χρόνο t, τότε η είσοδος λέμε ότι είναι φραγμένη. Αν για κάθε φραγμένη είσοδο, και για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη $x(t_0)$, υπάρχει θετικό βαθμωτό $\delta(K, t_0, x(t_0))$ τέτοιο ώστε η επακόλουθη κατάσταση να ικανοποιεί $\|x\| \leq \delta$, τότε το σύστημα λέμε ότι είναι φραγμένης εισόδου, φραγμένης κατάστασης ευσταθές, γνωστό και ως BIBS.

Οι παραπάνω ορισμοί της ευστάθειας αντιμετωπίζουν τη συμπεριφορά του διανύσματος κατάστασης ως προς ένα σημείο ισορροπίας. Πολλές φορές, το βασικό ενδιαφέρον είναι η συμπεριφορά της εξόδου του συστήματος. Έτσι έχουμε τον ακόλουθο ορισμό περί ευστάθειας.
Ορισμός 5 (Ορισμός 10.4 του Brogan [1]). Έστω u φραγμένη είσοδος με K_m το ελάχιστο πάνω φράγμα. Αν υπάρχει βαθμωτό a τέτοιο ώστε για κάθε χρόνο t, η έξοδος ικανοποιεί $\|y\| \leq aK_m$, τότε το σύστημα λέμε ότι είναι φραγμένης εισόδου, φραγμένης εξόδου ευσταθές,

γνωστό και ως BIBO.

Η έννοια της ευστάθειας εισόδου, εξόδου γενικεύονται και ορίζεται μέσω των χώρων L_p. Για περαιτέρω παραπέμπουμε στο βιβλίο [9].

Κεφάλαιο **3**

Αβεβαιότητες

Έστω ότι μας δίνεται ένα φυσικό σύστημα και επιθυμούμε να σχεδιάσουμε ένα σύστημα ελέγχου. Το πρώτο βήμα στο σχεδιασμό του συστήματος ελέγχου, είναι να περιγράψουμε μαθηματικά το σύστημα βασιζόμενοι στους φυσικούς νόμους που διέπουν τη συμπεριφορά του. Πολλές φορές, εμφανίζονται δυσκολίες που δυσχεραίνουν την ανάλυση του μοντέλου, π.χ. μη γραμμικό σύστημα. Για το λόγο αυτό προσεγγίζουμε το σύστημα με γραμμικό και σταθερών συντελεστών μοντέλο, που εκτιμούμε ότι προσεγγίζει ικανοποιητικά το πραγματικό σύστημα. Τα συστήματα ελέγχου δηλαδή, σχεδιάζονται χρησιμοποιώντας μαθηματικά μοντέλα τα οποία είναι μόνο προσεγγίσεις του πραγματικού συστήματος. Οι αποκλίσεις μεταξύ του συστήματος και της μαθηματικής του περιγραφής μπορεί να οδηγήσουν σε μη αποδεκτές επιδόσεις, ή ακόμα και σε αστάθεια του κλειστού συστήματος. Για να περιγραφούν οι αποκλίσεις αυτές χρησιμοποιείται ο όρος *αβεβαιότητα.* Έτσι είναι απαραίτητο στοιχείο του σχεδιασμού να συμπεριληφθούν οι αβεβαιότητες του συστήματος και η μοντελοποίηση ουσιαστικά, είναι ολοκληρωμένη μονάχα όταν έχουν ληφθεί υπόψιν οι αβεβαιότητες αυτές.

Υπάρχουν διάφοροι λόγοι που μπορεί να εμφανιστούν αβεβαιότητες, κάποιοι από αυτούς είναι:

(α) Δεν γνωρίζουμε με ακρίβεια τις παραμέτρους του συστήματος που θέλουμε να ελέγξουμε.

(β) Η δυναμική του συστήματος μπορεί να μεταβάλλεται με το χρόνο, και η μεταβολή αυτή να μην έχει ληφθεί στη μοντελοποίηση.

(γ) Τα περισσότερα συστήματα ελέγχου κατά το σχεδιασμό θεωρούνται γραμμικά και χρονικά αναλλοίωτα. Αυτό απλοποιεί μεν την ανάλυση και τον έλεγχο του συστήματος άλλα, στην πραγματικότητα όμως τα πραγματικά συστήματα είναι μη γραμμικά. Έτσι το γραμμικό σύστημα είναι απλά μία προσέγγιση του πραγματικού.

(δ) Πολλές φορές εμφανίζονται συστήματα που είναι πολύπλοκη η περιγραφή της συμπεριφορά τους. Συνεπώς, δεν έχουμε άλλη επιλογή από το να χρησιμοποιήσουμε κάποια προσέγγιση αυτού.

(ε) Εξωτερικές διαταραχές που δε δύναται να προβλεφθούν.

Σύμφωνα με το βιβλίο [10], οι αβεβαιότητες που εμφανίζονται σε ένα σύστημα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, τις *δομημένες αβεβαιότητες* και τις *μη δομημένες αβεβαιότητες*. Η μαθηματική περιγραφή των δομημένων αβεβαιοτήτων είναι τέτοια ώστε γνωρίζουμε πως επηρεάζουν το σύστημα, και συνήθως περιγράφονται στο πεδίο του χρόνου. Όσον αφορά τις μη δομημένες αβεβαιότητες, καμία πληροφορία δεν είναι διαθέσιμη για το πως επιδρούν στο σύστημα. Συνήθως περιγράφονται στο πεδίο της συχνότητας και η απόκλιση από κάποια ονομαστική τιμή είναι φραγμένη από κάποιο άνω όριο. Ένα παράδειγμα δομημένης αβεβαιότητας είναι κάποια παραμετρική μεταβολή στη δυναμική του μοντέλου, που έχει ως αποτέλεσμα τη μεταβολή στα μηδενικά και στους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς του μοντέλου. Παραδείγματα μη δομημένης αβεβαιότητας περιλαμβάνουν αβεβαιότητες σχετικά με τη συχνότητα, όπως υψηλές συχνότητες που συνήθως αγνοούμε κατά τη μοντελοποίηση ενός ταλαντωτή. Ένα ακόμα παράδειγμα μη δομημένης αβεβαιότητας είναι η γραμμικοποίηση του μη γραμμικού συστήματος για να λάβουμε ένα γραμμικό απλούστερο μοντέλο.

Θα κάνουμε μία απλή αναφορά στις επικρατέστερες περιγραφές και παραπέμπουμε στο βιβλίο [10] για περαιτέρω πληροφορίες.

Η περιγραφή στο πεδίο της συχνότητας, όπως αναφέραμε, είναι συνήθως μη δομημένες και κάποιες περιγραφές είναι η περιγραφή με αθροιστική αβεβαιότητα, η περιγραφή με πολλαπλασιαστική αβεβαιότητα στην είσοδο, η περιγραφή με πολλαπλασιαστική αβεβαιότητα στην έξοδο, η περιγραφή με αντίστροφη πολλαπλασιαστική αβεβαιότητα στην είσοδο, η περιγραφή με αντίστροφη πολλαπλασιαστική αβεβαιότητα στην έξοδο. Επίσης, είναι δυνατή και μία δομημένη περιγραφή της αβεβαιότητας.

Η περιγραφή ενός αβέβαιου συστήματος στο χώρο καταστάσεων είναι

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t)\\ y(t) &= (C + \Delta C)x(t) + (D + \Delta D)u(t),\end{aligned}$$

όπου οι πίνακες ΔA, ΔB, ΔC και ΔD περιγράφουν τις αβεβαιότητες, που είναι μεταβολές των παραμέτρων του μοντέλου. Θα θεωρήσουμε την περίπτωση όπου μόνο ο πίνακας κατάστασης είναι αβέβαιος.

Για την περίπτωση των μη δομημένων αβεβαιοτήτων έχουμε δύο περιγραφές. Τη *μη δομημένη παραμετρική αβεβαιότητα*. Ο πίνακας ΔA περιέχει όλες τις μεταβολές των παραμέτρων, χωρίς όμως να είναι γνωστή η δομή του, αλλά είναι γνωστό ένα άνω φράγμα $\|\Delta A\| \leq a$, όπου a κάποιο θετικό και βαθμωτό μέγεθος. Την *παραμετρική στοχαστική αβεβαιότητα*, όπου η αβεβαιότητα περιγράφεται από κάποια στατιστικό μοντέλο.

Για την περίπτωση της δομημένης αβεβαιότητας, η *δομημένη παραμετρική αβεβαιότητα* είναι η συνηθέστερη. Οι επικρατέστερες περιγραφές αυτής είναι οι ακόλουθες. Η *γραμμική παραμετρική αβεβαιότητα*, όπου οι αβεβαιότητες είναι της μορφής

$$\Delta A = \sum_{i=1}^{k} A_i p_i,$$

όπου οι πίνακες A_i προσδιορίζουν τον τρόπο που επηρεάζει η αβεβαιότητα στον πίνακα κατάστασης και p_i είναι μεταξύ ενός κάτω και ενός άνω ορίου. Η *πολυτοπική αβεβαιότητα*, όπου ο πίνακας κατάστασης ανήκει σε ένα πολύτοπο που ορίζεται

$$A \in D_A = \{A : A = \sum_{i=1}^{k} A_i a_i, a_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} a_i = 1\},$$

όπου k είναι ο αριθμός των κορυφών του πολυέδρου D_A. Άλλες περιγραφές αβεβαιότητας είναι η *αβεβαιότητα με φραγμένη νόρμα*, *πραγματική θετική αβεβαιότητα* και η *πραγματική φραγμένη αβεβαιότητα*.

3.1 Παράδειγμα αβέβαιου συστήματος

Έστω το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx, \end{aligned}$$

όπου οι πίνακες A, B, C είναι

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Το σύστημα είναι ασταθές, καθώς οι ιδιοτιμές του πίνακα κατάστασης A είναι $\lambda_{1,2,3} = -0.2757, 1.1378 + 1.5273i, 1.1378 - 1.5273i$ και έχουμε θετικό πραγματικό μέρος.

Για να σταθεροποιήσουμε το σύστημα θα κατασκευάσουμε ένα βέλτιστο τετραγωνικό ελεγκτή απείρου χρόνου που ελαχιστοποιεί το δείκτη επίδοσης

$$J = \int_0^{\infty} \left(x^T Q x + u^T R u \right), \; dt,$$

με $Q = I_3$ και $R = 1$. Τρέχοντας την παρακάτω εντολή στο MATLAB με τους πίνακες όπως έχουν οριστεί παραπάνω

[K, S, e] = lqr(A, B, Q, R, N)

υπολογίζουμε το βέλτιστο κέρδος

$$K = \begin{pmatrix} 0.4142 & 1.7127 & 4.9027 \end{pmatrix}.$$

Ο βέλτιστος νόμος ανάδρασης είναι $u = -Kx$ που οδηγεί στο κλειστό σύστημα με πίνακα κατάστασης

$$A_c = A - BK,$$

που είναι ευσταθές, καθώς οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_{1,2,3} = -0.3758, -1.2634 + 1.4720i, -1.2634 - 1.4720i$ και όλες έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.

Τώρα θεωρούμε ότι το σύστημα υπόκειται σε αβεβαιότητες που επηρεάζουν τον πίνακα κατάστασης. Έστω ακόμα ότι η δομή της αβεβαιότητας είναι τέτοια που ο πίνακας A γίνεται

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 + r_1 & 2 + r_2 \end{pmatrix},$$

όπου r_1, r_2 εκφράζουν το εύρος της αβεβαιότητας. Σύμφωνα με τα όσα είπαμε παραπάνω, βρισκόμαστε στην κατηγορία της γραμμικής παραμετρικής αβεβαιότητας. Ο νέος πίνακας κατάστασης με την είσοδο των αβεβαιοτήτων μπορεί να γραφτεί

$$A = A_0 + \Delta A_1 + \Delta A_2,$$

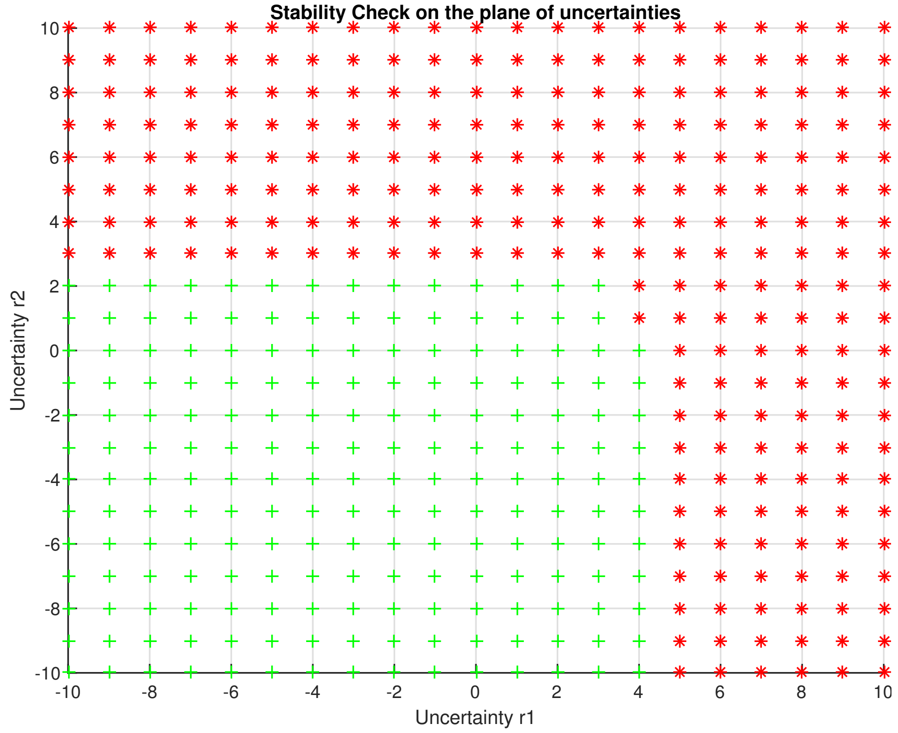
όπου ο πίνακας A_0 είναι ο ονομαστικός πίνακας κατάστασης, δηλαδή ο πίνακας του συστήματος χωρίς αβεβαιότητες και $\Delta A_1, \Delta A_2$ είναι οι αβεβαιότητες. Έτσι αντικαθιστώντας τους πίνακες στην παραπάνω σχέση προκύπτει

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} r_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} r_2.$$

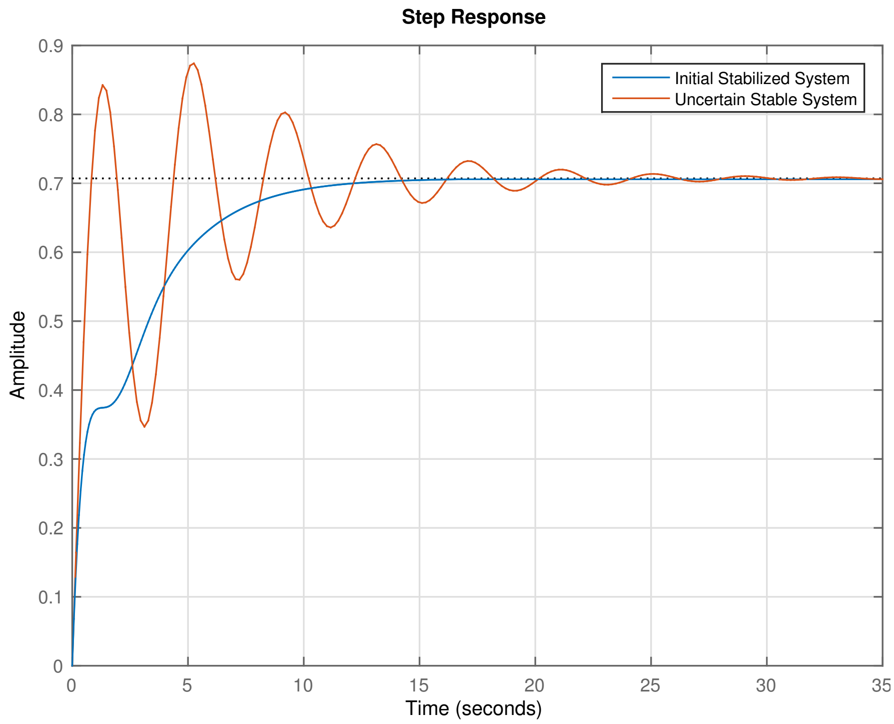
Μεταβάλλοντας τις αβεβαιότητες r_1, r_2 εντός του εύρους τιμών $[-10, 10]$ μπορούμε να διαπιστώσουμε την επίδραση του κάθε ζεύγους (r_1, r_2) στον πίνακα A, όπως φαίνεται παραπάνω, και ως εκ τούτου στο σύστημα.

Εφαρμόζοντας τη μεταβολή αυτή στο MATLAB, προκύπτει το σχήμα 3.1. Όπως παρατηρούμε τα ζεύγη τιμών κατά τα οποία μας δίνουν το πράσινο σταυρό, είναι αυτά τα ζεύγη r_1, r_2 που δεν μετατρέπουν το ευσταθές σύστημα σε ασταθές. Παρόλο αυτά με τη μεταβολή των αβεβαιοτήτων το σύστημα επηρεάζεται. Όσο αλλάζουν κατά απόλυτη τιμή τα r_1, r_2 τόσο αποκλίνει το σύστημα από τους στόχους, είτε αυτοί είναι γρήγορη σύγκλιση, μικρή υπερύψωση κτλ, μέχρι που καταλήγει να γίνει ασταθές.

Για να δούμε την επιρροή των αβεβαιοτήτων στο σύστημα παρουσιάζεται το σχήμα 3.2. Το



Σχήμα 3.1: Έλεγχος ευστάθειας συναρτήσει της μεταβολής των αβεβαιοτήτων r_1, r_2



Σχήμα 3.2: Μοναδιαία βηματική απόκριση ονομαστικού και αβέβαιου συστήματος

ζεύγος τιμών $(r_1, r_2) = (2, 2)$ δε μετατρέπει το αβέβαιο σύστημα σε ασταθές, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1. Παρόλο αυτά η επίδραση του στο σύστημα σε σχέση με το ονομαστικό είναι πολύ μεγάλη. Οι ταλαντώσεις που δημιουργούνται είναι πολύ ισχυρές και ο χρόνος αποκατάστασης μεγαλώνει αισθητά. Καταλαβαίνουμε δηλαδή ότι βρισκόμαστε κοντά σε ασταθή κατάσταση.

Παρακάτω παρατίθεται ο κώδικας στο MATLAB που χρησιμοποιήθηκε για το παράδειγμα.

```
%% Define the matrix A
A = [0 1 0; 0 0 1; -1 -3 2];
eig(A);
%Since the system is in cannonical controllability form B=[0 0 1]'
B = [0 0 1]';
C = [1 1 1];
D = 0;
%% Apply LQR with Q=eye(3) and R=1
Q = eye(3);
R = 1;

K = lqr(A, B, Q, R);
%The state matrix for the stabilized (Ac) system is A-BK
Ac = A - B*K;
eig(Ac);

%% Define the uncertainties
%Suppose uncertainties affect the elements in the positions
%(3,2) and (3,3) of the initial matrix A
%Thus the matrices that state the positions of each
%uncertainties in A are

A1 = [0 0 0;0 0 0; 0 1 0];
A2 = [0 0 0;0 0 0; 0 0 1];

%Also define the range of each uncertainty, namely r1 and r2.
r1 = 1;
r2 = 1;
%NOTE:
%Here the range does not affect the matrices A1 and A2, but
%this will now always be the case

%% Stability through uncertainties check
%Now check if K that was calculated for the matrix A,
%stabilizes all the uncertain systems that arise
figure(1)
title('Stability Check on the plane of uncertainties')
hold all
for i = -10:1:10
    for j = -10:1:10
        A_uncertain = A + A1*i + A2*j - B*K;
        eigvals = eig(A_uncertain)';
        %using max of eigenvalue vector > 0 means that at
        %least one of the eigenvalues are positive and
```

```
        %thus the system is unstable
        if max(real(eigvals)) >= 0
            plot(i, j, '*r')
        else
            plot(i, j, '+g')
        end
    end
end
grid on;
xlabel('Uncertainty r1');
ylabel('Uncertainty r2');

%% Plot the step responces for one of the stable systems
%that arise from certain values of uncertainties.
% Also plot the initial stabilized system and
%compare it with the uncertain one.
figure(2)
title('Step Responses')
hold all
sys1 = ss(Ac, B, C, D);
sys2 = ss(A + A1*2 + A2*2 - B*K, B, C, D);
step(sys1, sys2);
grid on;
legend('Initial Stabilized System','Uncertain Stable System')
```

Βιβλιογραφία

[1] W.L. Brogan. *Modern Control Theory*. Prentice Hall, 1991.

[2] C.T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Linear System Theory and Design. Oxford University Press, 1999.

[3] R.C. Dorf and R.H. Bishop. *Modern Control Systems*. Pearson Prentice Hall, 2011.

[4] G.E. Dullerud and F. Paganini. *A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2005.

[5] M.W. Hirsch and S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 1974.

[6] F. Lin. *Robust Control Design: An Optimal Control Approach*. Wiley, 2007.

[7] A.M. Lyapunov. *General Problem of the Stability Of Motion*. Control Theory and Applications Series. Taylor & Francis, 1992.

[8] K. Ogata. *Modern Control Engineering*. Pearson Education, 2011.

[9] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.

[10] Κοσμίδου, Ο. *Εύρωστος Έλεγχος Δυναμικών Συστημάτων*. Γκιούρδας Β., 2009.