

Теория игр

2019/2020 учебный год

(Л. Н. Сысоева, Н. А. Василенок, Н. Е. Сахарова,
Д. А. Дагаев, К. И. Сонин, И. А. Хованская)

Семинарский листик 9

(19/22 ноября 2019 года)

Задача 1. Рассмотрим следующую однократную игру двух лиц G :

| | t_1 | t_2 |
|-------|-------|-------|
| s_1 | 5;0 | 0;1 |
| s_2 | 0;0 | 3;1 |
| s_3 | 1;4 | 2;3 |

а) Найдите все равновесия Нэша в чистых стратегиях в игре G .

Теперь представим, что два игрока играют в игру G 3 периода подряд (обозначение G_3). Фактор дисконтирования δ равен $\frac{3}{4}$.

б) Опишите, как выглядят стратегии игроков в игре G_3 .

в) Найдите платежи обоих игроков в игре G_3 , если игрок A придерживается стратегии всегда играть s_3 , а игрок B в первом периоде играет t_2 , а во всех остальных периодах играет t_1 .

г) Является ли профиль стратегий, описанный в предыдущем пункте, равновесием Нэша в игре G_3 ?

д) Является ли в игре G_3 равновесием Нэша, совершенным на подыграх, профиль, в котором первый и второй игрок независимо ни от чего в каждом периоде играют стратегии s_2 и t_2 соответственно?

е) Рассмотрим игру G_{10} . Найдите все равновесия Нэша, совершенные на подыграх, в этой игре.

Задача 2. Рассмотрим следующую однократную игру двух лиц G :

| | t_1 | t_2 | t_3 | t_4 |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| s_1 | 7;7 | -2;9 | 0;0 | 0;0 |
| s_2 | 9;-2 | 1;1 | 0;0 | 0;0 |
| s_3 | 0;0 | 0;0 | 5;3 | 2;2 |
| s_4 | 0;0 | 0;0 | 1;1 | 3;5 |

а) На что похожа эта игра?

б) Найдите все равновесия Нэша в чистых стратегиях в игре G .

Теперь представим, что два игрока играют в игру G бесконечно много периодов подряд (обозначение G_∞). Фактор дисконтирования δ равен $\frac{1}{2}$.

г) Является ли в игре G_∞ равновесием Нэша, совершенным на подыграх, профиль, в котором первый и второй игрок независимо ни от чего в каждом периоде играют стратегии s_2 и t_2 соответственно?

- д) Существуют ли в игре G_∞ другие равновесия Нэша в чистых стратегиях?
- е) Существует ли в игре G_∞ равновесие Нэша, состоящее из стратегий типа Grim Trigger? А из стратегий типа Tit for Tat?
- ж) Найдите все значения фактора дисконтирования δ (напомним, что $0 \leq \delta \leq 1$, а для бесконечных игр $\delta \neq 1$), при которых профиль стратегий (GT, GT) в игре G_∞ является равновесием Нэша.

Задача 3. Рассмотрим следующую однократную игру двух лиц G :

| | t_1 | t_2 | t_3 |
|-------|-------|-------|-------|
| s_1 | 5;5 | -1;-1 | 0;-1 |
| s_2 | 0;0 | 7;7 | -1;9 |
| s_3 | -1;0 | 9;0 | 1;1 |

- а) Найдите SPNE в игре G_3 при $\delta = \frac{2}{3}$, в котором игроки получают максимальный возможный суммарный выигрыш. Докажите, что суммарный выигрыш действительно максимальный из возможных.
- б) Найдите все значения фактора дисконтирования δ , при которых в игре G_3 кооперироваться выгоднее, чем хоть раз обмануть не прощающего противника, который изначально предлагал кооперацию.

Задача 4.¹ Средиземноморский купец хочет отправить свое судно с некоторым товаром на противоположный берег Средиземного моря, где его товар очень востребован. Он не может поехать сам: для этого ему нужен агент. Если купец не нанимает агента, то его товар не будет продан, а прибыль не будет получена. Если купец нанимает агента и отправляет судно в дорогу, то он инвестирует 1 единицу в подготовку экспедиции. Если агент добросовестно выполняет свою работу, то купец получает выручку от продажи товара в размере 4 единиц и по результатам экспедиции платит некоторую зарплату w агенту. Однако агент может обмануть купца и присвоить товар себе: в таком случае он получит выигрыш в размере 2 единиц. Если агент не будет нанят на работу, то его выигрыш составит 1 единицу товара от торговли апельсинами на городском рынке.

- а) Предположим, что взаимодействие между купцом и агентом повторяется 1 раз. Нарисуйте дерево игры. Найдите все SPNE, в котором агент не будет обманывать купца, а купец решит нанимать агента.
- б) Предположим, что взаимодействие повторяется бесконечное количество раз с фактором дисконтирования δ . Купец играет триггерную стратегию: если агент обманывает его хотя бы один раз, то купец больше не будет нанимать этого агента. Как значение параметра w , при котором агент не будет обманывать купца, зависит от δ ? Какую содержательную интерпретацию можно дать этому результату?

¹По мотивам: Greif A. (1994). Cultural Beliefs and the Organization Of Society: A Historical and Theoretical Reflection on Collectivist and Individualist Societies. *Journal of Political Economy*. Vol. 102. N. 5.

- в) Предположим, что взаимодействие повторяется бесконечное количество раз с фактором дисконтирования δ . Купец играет смущающую стратегию: если агент его обманул, он с вероятностью 0.5 не будет нанимать его снова, а с вероятностью 0.5 – все равно наймет. Найдите, при каких значениях параметра w агент не будет обманывать купца.
- г) Разные стратегии, которые играютя купцами, могут быть проинтерпретированы как разные культурные нормы, принятые в различных обществах. Эти культурные нормы могут влиять на экономическое развитие и распределение благосостояния в обществе. Сравните, при какой стратегии, играющейя купцом в повторяющейся игре, выигрыш агента будет больше.