

**Теория игр**

2019/2020 учебный год

(Л. Н. Сысоева, Н. А. Василенок, Н. Е. Сахарова,  
Д. А. Дагаев, К. И. Сонин, И. А. Хованская)

**Семинарский листик 9**

(19/22 ноября 2019 года)

**Задача 1.** Рассмотрим следующую однократную игру двух лиц  $G$ :

	$t_1$	$t_2$
$s_1$	5;0	0;1
$s_2$	0;0	3;1
$s_3$	1;4	2;3

а) Найдите все равновесия Нэша в чистых стратегиях в игре  $G$ .

Теперь представим, что два игрока играют в игру  $G$  3 периода подряд (обозначение  $G_3$ ). Фактор дисконтирования  $\delta$  равен  $\frac{3}{4}$ .

б) Опишите, как выглядят стратегии игроков в игре  $G_3$ .

в) Найдите платежи обоих игроков в игре  $G_3$ , если игрок  $A$  придерживается стратегии всегда играть  $s_3$ , а игрок  $B$  в первом периоде играет  $t_2$ , а во всех остальных периодах играет  $t_1$ .

г) Является ли профиль стратегий, описанный в предыдущем пункте, равновесием Нэша в игре  $G_3$ ?

д) Является ли в игре  $G_3$  равновесием Нэша, совершенным на подыграх, профиль, в котором первый и второй игрок независимо ни от чего в каждом периоде играют стратегии  $s_2$  и  $t_2$  соответственно?

е) Рассмотрим игру  $G_{10}$ . Найдите все равновесия Нэша, совершенные на подыграх, в этой игре.

**Задача 2.** Рассмотрим следующую однократную игру двух лиц  $G$ :

	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$
$s_1$	7;7	-2;9	0;0	0;0
$s_2$	9;-2	1;1	0;0	0;0
$s_3$	0;0	0;0	5;3	2;2
$s_4$	0;0	0;0	1;1	3;5

а) На что похожа эта игра?

б) Найдите все равновесия Нэша в чистых стратегиях в игре  $G$ .

Теперь представим, что два игрока играют в игру  $G$  бесконечно много периодов подряд (обозначение  $G_\infty$ ). Фактор дисконтирования  $\delta$  равен  $\frac{1}{2}$ .

в) Является ли в игре  $G_\infty$  равновесием Нэша, совершенным на подыграх, профиль, в котором первый и второй игрок независимо ни от чего в каждом периоде играют стратегии  $s_2$  и  $t_2$  соответственно?

- г) Существуют ли в игре  $G_\infty$  другие равновесия Нэша в чистых стратегиях?
- д) Существует ли в игре  $G_\infty$  равновесие Нэша, состоящее из стратегий типа Grim Trigger? А из стратегий типа Tit for Tat?
- е) Найдите все значения фактора дисконтирования  $\delta$  (напомним, что  $0 \leq \delta \leq 1$ , а для бесконечных игр  $\delta \neq 1$ ), при которых профиль стратегий  $(GT, GT)$  в игре  $G_\infty$  является равновесием Нэша.

**Задача 3.** Рассмотрим следующую однократную игру двух лиц  $G$ :

	$t_1$	$t_2$	$t_3$
$s_1$	5;5	-1;-1	0;-1
$s_2$	0;0	7;7	-1;9
$s_3$	-1;0	9;0	1;1

- а) Найдите SPNE в игре  $G_3$  при  $\delta = \frac{2}{3}$ , в котором игроки получают максимальный возможный суммарный выигрыш. Докажите, что суммарный выигрыш действительно максимальный из возможных.
- б) Найдите все значения фактора дисконтирования  $\delta$ , при которых в игре  $G_3$  кооперироваться выгоднее, чем хоть раз обмануть не прощающего противника, который изначально предлагал кооперацию.

**Задача 4.**<sup>1</sup> Средиземноморский купец хочет отправить свое судно с некоторым товаром на противоположный берег Средиземного моря, где его товар очень востребован. Он не может поехать сам: для этого ему нужен агент. Если купец не нанимает агента, то его товар не будет продан, а прибыль не будет получена. Если купец нанимает агента и отправляет судно в дорогу, то он инвестирует 1 единицу в подготовку экспедиции. Если агент добросовестно выполняет свою работу, то купец получает выручку от продажи товара в размере 4 единиц и по результатам экспедиции платит некоторую зарплату  $w$  агенту. Однако агент может обмануть купца и присвоить товар себе: в таком случае он получит выигрыш в размере 2 единиц. Если агент не будет нанят на работу, то его выигрыш составит 1 единицу товара от торговли апельсинами на городском рынке.

- а) Предположим, что взаимодействие между купцом и агентом повторяется 1 раз. Нарисуйте дерево игры. Найдите все SPNE, в котором агент не будет обманывать купца, а купец решит нанимать агента.
- б) Предположим, что взаимодействие повторяется бесконечное количество раз с фактором дисконтирования  $\delta$ . Купец играет триггерную стратегию: если агент обманывает его хотя бы один раз, то купец больше не будет нанимать этого агента. Как значение параметра  $w$ , при котором агент не будет обманывать купца, зависит от  $\delta$ ? Какую содержательную интерпретацию можно дать этому результату?

<sup>1</sup>По мотивам: Greif A. (1994). Cultural Beliefs and the Organization Of Society: A Historical and Theoretical Reflection on Collectivist and Individualist Societies. *Journal of Political Economy*. Vol. 102. N. 5.

- в) Предположим, что взаимодействие повторяется бесконечное количество раз с фактором дисконтирования  $\delta$ . Купец играет смущающую стратегию: если агент его обманул, он с вероятностью 0.5 не будет нанимать его снова, а с вероятностью 0.5 – все равно наймет. Найдите, при каких значениях параметра  $w$  агент не будет обманывать купца.
- г) Разные стратегии, которые играют купцами, могут быть проинтерпретированы как разные культурные нормы, принятые в различных обществах. Эти культурные нормы могут влиять на экономическое развитие и распределение благосостояния в обществе. Сравните, при какой стратегии, играющей купцом в повторяющейся игре, выигрыш агента будет больше.