Úvod do Intuicionistické logiky a konstruktivismu

Bc. Viet Bach Nguyen

Vysoká škola ekonomická v Praze

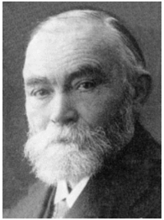
nguv03@vse.cz

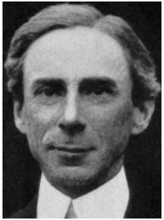
14. prosince 2016

Obsah

Historie

- 2. pol. 19. stol. – matematická krize
  - Pokusy o re-stabilizaci:
    - Gottlob Frege (1848–1925) (DE),
    - Bertrand Russel (1872–1970) (GB)
  - Nestabilní základy připouštějí různé matematické paradoxy
    - Holič ze Sevilly
    - Uvažujme množinu množin, které nejsou prvkem sama sebe. Je tato množina svým prvkem?
- Co je tím správným základem pro matematiku? Logika?
  - Co je to axiom?
  - Jednoduchá tvrzení, která se „nemusí dokázat“
  - Nelze dokázat úplně všechno dokola





Historie

- David Hilbert (1862–1943) (DE):
- Axiomatické systémy, které k absurditám nevedly
- Nestabilní základy připouštějí různé matematické paradoxy
- Soubor axiomů, na jejichž základě nelze dokázat pravdivost $A \wedge \neg A$, je bezespornou teorií

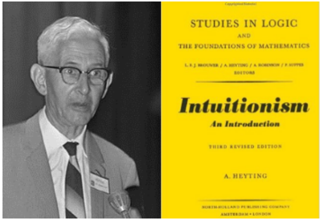
„Není pravda, že existuje jen jedna správná matematika“

Historie

- Luitzen Brouwer (1881–1966) (NL)
- Axiomatické budování matematiky je zcela **mylné**
- Zakladatel matematického intuicionicismu
- Základem matematiky má být *intuice*
  - přirozená čísla, matematická indukce
  - operace jako sčítání, násobení apod. se nazývají *konstrukce*
  - matematika je vědou o konstrukcích v matematikově mysli
  - neoprávněné matematické postupy vycházejí z matematického **platonismu**
  - např. důkaz sporem je neintuitivní a neoprávněný, protože nedává návod, jak najít objekt, který má existovat
- Ve skutečnosti odmítal budovat matematiku pomocí jakékoli logiky, protože logika zachycuje pouze vlastnosti našeho jazyka

Intuicionistická logika

- Chceme-li dokázat existenci objektu, musíme jej zkonstruovat
- Může se stát, že neumíme zkonstruovat objekt ani dokázat jeho neexistenci
- Zde **neplatí** zákon vyloučeného třetího!
  - $A \vee B$ je dokázána pouze v případě, že je dokázán alespoň jeden z výroků A, B
  - $A \vee \neg A$ nemusí být vždy pravdivé jako v klasické logice, tj. když není pravdivý ani A, ani $\neg A$

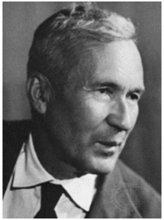


- Arend Heyting (1898–1980) (NL)
- „nikdy nebude možno matematicky přesně dokázat, že daná soustava axiómů skutečně obsahuje všechny platné metody důkazu"

Kolmogorova logika problému

- Andrey Kolmogorov (1903–1987) (RU)
- Neuvažovat o výrocích, nýbrž problémech

$\neg A$	problém A je neřešitelný
$A \wedge B$	oba problémy, A i B, jsou řešitelné
$A \vee B$	A je řešitelný nebo B je řešitelný
$A \Rightarrow B$	je-li vyřešen problém A, je vyřešen i problém B
$A \Leftrightarrow B$	zkratka za $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$



- „řešitelný“ zn. „umíme zkonstruovat řešení“
- „neřešitelný“ zn. „umíme dokázat, že žádné řešení neexistuje“
- „nevím“ zn. „problém vyřešit neumíme, ani nevíme, jestli má řešení“
- neplatí zákon vyloučeného třetího!

Inuticionistická logika – příklad

- Uvažujme jednoduchou formuli $A \Leftrightarrow \neg\neg A$
- Tj. $(A \Rightarrow \neg\neg A) \wedge (\neg\neg A \Rightarrow A)$
- První implikace
  - je-li A pravdivé, známe způsob, jak nalézt řešení problému A
  - ovšem tím je dokázáno, že není neřešitelný
  - tzn., že je dokázáno, že problém $\neg A$ je neřešitelný
  - takže celá první implikace platí
- Druhá implikace
  - $\neg\neg A$ říká, že umíme dokázat, že nelze dokázat neřešitelnost problému A
  - ale z toho však ještě nijak neplyne, že problém A už umíme vyřešit!
- Takže **celá formule** v Kolmogorově interpretaci **neplatí**

Inuticionistická logika – shrnutí

- vychází pouze z toho, co opravdu víme (intuice), drží se přísně jen aktuálního vědění
- zatímco u klasické logiky i když zrovna nevím, zda tvrzení je či není pravdivé, ono pravdivé nebo nepravdivé je

A	existuje konstrukce důkazu pro A (A je dokazatelná důkazem)
$\neg A$	oba problémy, A i B, jsou řešitelné
$A \vee \neg A$	nemusí být vždy pravdivé, tj. musí být alespoň jeden člen disjunkce pravdivý
$\neg\neg A$	není dokázána negace A, to ale neznamená, že je dokázána A

Inuticionistická logika – shrnutí

- IL připouští, že jsou tvrzení, která nemají ani jednu pravdivostní hodnotu, a jelikož tuto hodnotu neznáme, není zkonstruován ani jejich důkaz ani jejich vyvrácení
- má snadno zdůvodnitelné principy
- jenže není možné v ní dokázat mnoho věcí, které v klasické logice dokázat lze

Reference

- http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/~ansa/neklasiky/intuic.pdf
- https://mks.mff.cuni.cz/archive/26/9.pdf
- https://www.esf.kfi.zcu.cz/logika/opory/lof/prezentace/13.pdf
- https://plato.stanford.edu/entries/logic-intuitionistic/
- https://www.illc.uva.nl/Research/Publications/Reports/PP-2006-25.text.pdf
- http://aleteya.cs.buap.mx/~jlavalle/papers/van%20Dalen/Intuitionistic%20Logic.pdf

Děkuji za pozornost