HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

VŨ GIA TÊ (Chủ biên), NGUYỄN THỊ DUNG, ĐỖ PHI NGA

GIẢI TÍCH 1

(Dùng cho sinh viên ngành Điện tử - Viễn thông - CNTT)

HÀ NỘI - 2008

CHƯƠNG I. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Trong nhiều vấn đề lý thuyết cũng như thực tế, người ta phải xét những đại lượng mà trong quá trình biến thiên đại lượng đó lấy những giá trị rời rạc rất gần đến một hằng số a nào đấy. Trong quá trình này, ta nhận được dãy số dần đến a hay có giới hạn là a. Thực tế, hầu hết các dãy số có giới hạn là một số a nào đó không bao giờ đạt được giá trị a, điều này trong quá trình tìm giới hạn không cần quan tâm đến. Chẳng hạn, ta xét dãy số $\{u_n\}$ trong đó $u_n = \frac{n}{n+1}$. Quá trình n tăng lên mãi thì u_n tăng dần về số rất gần 1. Nói rằng dãy số có giới hạn là 1 khi n tăng lên vô cùng . Ta xét thêm bài toán 'lợi nhuận đầu tư ' như sau : Giả sử có 10.000 USD đầu tư để thu lãi 8% năm. Sau 1 năm thì vốn trở thành 10.000.(1,08) = 10800 USD. Nếu lãi suất 8% được tính thành 6 tháng với lãi suất 4% thì sau 1 năm vốn trở thành $10.000.\left(1,04^2\right) = 10816USD$. Nếu vẫn lãi suất 8% nhưng lãi được nhập vốn hàng ngày thì tổng số vốn sau 1 năm sẽ nhiều hơn, cụ thể là $10.000\left(1+\frac{8}{100.365}\right)^{365} = 10832,78USD$. Rõ ràng tiền tăng nhanh hơn nếu thời gian lãi nhập vốn ngắn đi. Tổng quát số vốn A đầu tư với lãi suất r% năm và lãi nhập vốn n lần trong năm, sẽ trở thành $A\left(1+\frac{r}{100n}\right)^n$ USD . Đây là một dãy số đáng quan tâm

Giới hạn là một khái niệm khó của toán học. Khái niệm giới hạn được cho bởi từ "gần", để mô tả định tính. Còn định nghĩa chính xác của nó cho bởi cụm từ " bé hơn ε" hoặc "lớn hơn M" để mô tả định lượng sẽ được giới thiệu trong chương này. Khi đã hiểu được khái niệm giới hạn thì sẽ dễ dàng hiểu được các khái niệm đạo hàm, tích phân. Bởi vì các phép toán đó đều xuất phát từ phép tính giới hạn.

Trước khi đi đến khái niệm về giới hạn cần hiểu được vai trò thực sự của số vô tỉ. Nhờ tính chất đầy của tập số thực mà người ta có thể biểu diễn tập số thực trên trục số - gọi là trục thực và nói rằng tất cả các số thực lấp đầy trục số. Nói khác đi có sự tương ứng 1-1 giữa các số thực và các điểm trên trục số. Chương này cũng đề cập đến trường số phức, đó là trường số thực mở rộng. Vai trò và ý nghĩa của số phức về mặt lý thuyết cũng như ứng dụng sau này trong kỹ thuật, đặc biệt trong kỹ thuật điện tử là rất lớn.

1.1. SỐ THỰC

1.1.1. Các tính chất cơ bản của tập số thực.

A. Sự cần thiết mở rộng tập số hữu tỉ $\mathbb{Q}$.

Do nhu cầu đòi hỏi của cuộc sống, tập các số tự nhiên $\mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$, cơ sở của phép đếm đã được mở rộng sang tập các số nguyên $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2,...\}$. Sau đó, do trong $\mathbb{Z}$ không có các phần tử mà tích với 2 hoặc 3 bằng 1, nên người ta đã xây dựng tập các số hữu tỉ, đó là tập gồm các số có thể được biểu diễn bởi tỉ số của hai số nguyên, tức là số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn. Nếu chỉ dừng lại trên tập $\mathbb{Q}$ thì trong toán học gặp phải nhiều điều hạn chế, đặc biệt là gặp khó khăn trong việc giải thích các hiện tượng của cuộc sống. Chẳng hạn, việc tính đường chéo của hình vuông có kích thước đơn vị. Đường chéo đó là $\sqrt{2}$ không thể mô tả bởi số hữu tỉ. Thật vậy nếu $\sqrt{2} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ trong đó ƯSCLN (m,n) = 1 thì $m^2 = 2n^2$ $\Rightarrow m = 2p$ và $4p^2 = 2n^2 \Rightarrow n = 2q$. Điều này vô lí vì lúc này m, n có ước chung là 2. Chứng tỏ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Những số xuất hiện và được dùng thường xuyên trong giải tích như e, π cũng không phải là số hữu tỉ.

B. Số vô tỉ.

Một số biểu diễn dưới dạng thập phân vô hạn không tuần hoàn, hay không thể biểu diễn dưới dạng tỉ số của hai số nguyên được gọi là số vô tỉ.

C. Số thực.

Tất cả các số hữu tỉ và số vô tỉ tạo thành tập hợp số thực. Kí hiệu tập số thực là $\mathbb{R}$.

Vậy tập số vô tỉ là $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Người ta có thể xây dựng tập số thực $\mathbb{R}$ nhờ vào một hệ suy diễn hay nói cách khác nhờ vào một hệ tiên đề. Chúng ta không trình bày ở đây mà coi rằng tập hợp số thực $\mathbb{R}$ là quá quen thuộc và chỉ kiểm tra sự thoả mãn tiên đề đó. Chúng ta coi đó là các tính chất của tập hợp số thực $\mathbb{R}$.

Tính chất 1: *Tập $\mathbb{R}$ là một trường giao hoán với hai phép cộng và nhân: ($\mathbb{R}$, + , .).*

1. $\forall a,b \in \mathbb{R},\ a+b \in \mathbb{R},\ a.b \in \mathbb{R}$.

2. $\forall a,b,c \in \mathbb{R},\ (a+b)+c = a+(b+c),\ (a.b)c = a(bc)$.

3. $\forall a,b \in \mathbb{R},\ a+b = b+a,\ ab = ba$.

4. $\mathbb{R}$ có phần tủ trung hoà đối với phép cộng là 0 và đối với phép nhân là 1

$\forall a \in \mathbb{R},\ a+0 = 0+a = a,\ \ a.1 = 1.a = a$.

5. Phép nhân có tính phân phối đối với phép cộng

$\forall a,b,c \in \mathbb{R},\ a(b+c) = ab+ac$,

$(b+c)a = ba+ca$.

6. Tồn tại phần tử đối của phép cộng

$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists(-a),\ a+(-a) = 0$.

Tồn tại phần tử nghịch đảo của phép nhân

$\forall a \in \mathbb{R}^*,\ (\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}),\ \exists a^{-1},\ a.a^{-1} = 1$.

Tính chất 2*: Tập $\mathbb{R}$ được xếp thứ tự toàn phần. Ngoài ra tập các số thực dương có tính đóng kín, nghĩa là:*

1. $\forall a,b \in \mathbb{R},\ a < b$ hoặc $a = b$ hoặc $a > b$.

2.

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R},\ a \le b \Rightarrow a+c \le b+c,$$
$$\forall a,b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}_+,\ a \le b \Rightarrow ac \le bc.$$

3. $\forall a,b \in \mathbb{R}_+^*,\ a+b \in \mathbb{R}_+^*,\ ab \in \mathbb{R}_+^*$, ở đây $\mathbb{R}_+^*$ được kí hiệu là tập các số thực dương.

Tính chất 3: *Tập $\mathbb{R}$ là một tập đầy.*

Một tập E được gọi đầy nếu thỏa mãn điều kiện sau đây:

Mọi tập con X không rỗng của E bị chặn trên trong E đều có một cận trên đúng thuộc E và mọi tập con không rỗng X của E bị chặn dưới trong E đều có một cận dưới đúng thuộc E. Vậy có thể phát biểu tính chất 3 như sau:

Mọi tập con X không rỗng của $\mathbb{R}$ bị chặn trên trong $\mathbb{R}$ đều có một cận trên đúng thuộc $\mathbb{R}$ và mọi tập con không rỗng X của $\mathbb{R}$ bị chặn dưới trong $\mathbb{R}$ đều có một cận dưới đúng thuộc $\mathbb{R}$.

Cho $X \subset \mathbb{R}$ và $a \in \mathbb{R}$. Người ta gọi a là một cận trên của X trong $\mathbb{R}$ nếu $x \le a, \forall x \in X$.

Tương tự gọi a là một cận dưới của X trong $\mathbb{R}$ nếu $x \ge a,\ \forall x \in X$.

Gọi tập X là bị chặn trên trong $\mathbb{R}$, (bị chặn dưới) khi và chỉ khi tồn tại ít nhất một cận trên (cận dưới) của X trong $\mathbb{R}$.

Người ta gọi số nhỏ nhất trong các cận trên của X trong $\mathbb{R}$ (nếu có) là cận trên đúng của X trong $\mathbb{R}$, kí hiệu số đó là M^* hay SupX (đọc là Suprémum của X).

Gọi số lớn nhất trong các cận dưới của X trong $\mathbb{R}$ (nếu có) là cận dưới đúng của X trong $\mathbb{R}$, kí hiệu số đó là m^* hay InfX (đọc là Infimum của X).

Nếu $M^* \in X$ thì nói rằng M^* là phần tử lớn nhất của X, kí hiệu M^* = SupX = MaxX.

Nếu $m^* \in X$ thì nói rằng m^* là phần tử nhỏ nhất của X, kí hiệu m^* = InfX = MinX.

Gọi X là bị chặn trong $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi X đồng thời bị chặn trên và bị chặn dưới trong $\mathbb{R}$.

Chú ý:

a. Tập $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ không đóng kín đối với phép cộng và phép nhân, chẳng hạn

$\pm\sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nhưng $\begin{matrix} \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) \notin \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \\ \sqrt{2}.\sqrt{2} \notin \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{matrix}$

b. $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$$xy \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},$$
$$\frac{1}{x} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.$$

c. M^* = SupX nghĩa là : với mọi số $\varepsilon > 0$ bé tùy ý, bao giờ cũng tìm được tương ứng số $\alpha \in X$ để có bất đẳng thức $M^* - \varepsilon < \alpha$.

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \alpha \in X \Rightarrow M^* - \varepsilon < \alpha)$$

m^* = InfX nghĩa là $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \alpha \in X \Rightarrow m^* + \varepsilon > \alpha)$

Nếu M là một cận trên của tập X thì SupX $\leq$ M

Nếu m là một cận dưới của tập X thì InfX $\geq$ m.

Ví dụ 1.1: Chứng minh $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}) \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$

Giải: Giả sử q = $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6} \in \mathbb{Q} \Rightarrow (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = (q-\sqrt{6})^2$ hay $q^2+1 = 2(q+1)\sqrt{6}$, dễ dàng chứng minh $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$ (tương tự như chứng minh $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$). Theo chú ý trên suy ra q + 1= 0 và q^2 + 1 = 0. Điều này là mâu thuẫn .Vậy q $\notin \mathbb{Q}$.

Ví dụ 1.2: Tìm các cận dưới đúng và cận trên đúng trong $\mathbb{R}$ nếu chúng tồn tại của tập sau:

$$X = \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\} = \left\{ u_n,\ n \in \mathbb{N}^* \right\},\ \mathbb{N}^* = \left\{ 1, 2, ... \right\}$$

Giải:

$\forall p \in \mathbb{N}^*$ ta có:

$$u_{2p} = \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{2p} \Rightarrow 0 < u_{2p} \leq u_2 = \frac{3}{4}$$

$$u_{2p+1} = \frac{1}{2^{2p+1}} - \frac{1}{2p+1} \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq -\frac{1}{2p+1} \leq u_{2p+1} \leq \frac{1}{2^{2p+1}} \leq \frac{1}{8}$$

$$u_1 = -\frac{1}{2}$$

Từ đó suy ra $\forall n \in \mathbb{N}^*$ có $-\frac{1}{2} = u_1 \leq u_n \leq u_2 = \frac{3}{4}$

InfX = MinX = $-\frac{1}{2}$, SupX = MaxX = $\frac{3}{4}$.

Ví dụ 1.3: Cho A, B là hai tập không rỗng của $\mathbb{R}$ và bị chặn trên.

a. Chứng minh Sup($A \cup B$) = Max(Sup(A),Sup(B)).

b. Gọi A+B = $\left\{ x \in R,\ \exists (a,b) \in A \times B,\ x = a+b \right\}$, chứng minh Sup(A+B) = Sup(A) + Sup(B).

Giải:

a. Kí hiệu $\alpha = \mathrm{Sup}A,\ \beta = \mathrm{Sup}B,\ \gamma = \mathrm{Max}(\alpha, \beta)$ .Vậy tập hợp các cận trên của $A \cup B$ chính là X =$\{x,\ x \geq \alpha$ và $x \geq \beta\}$ hay X=$\left\{ x,\ x \geq \gamma \right\}$ suy ra $\gamma = \mathrm{Sup}(A \cup B)$.

b.

$$\begin{matrix} \forall a \in A,\ a \leq \mathrm{Sup}A \\ \forall b \in B,\ b \leq \mathrm{Sup}B \end{matrix} \Rightarrow \forall a+b \in A+B,\ a+b \leq \mathrm{Sup}A + \mathrm{Sup}B$$

$$\Rightarrow M^* = \mathrm{Sup}(A+B)$$

$$(\forall \varepsilon > 0)\begin{array}{l}(\exists a \in A \Rightarrow \ a > \text{Sup}A - \dfrac{\varepsilon}{2})\\ (\exists b \in B \Rightarrow \ b > \text{Sup}B - \dfrac{\varepsilon}{2})\end{array}$$

$$(\exists a + b \in A + B \Rightarrow \ a + b > \text{Sup}A + \text{Sup}B - \varepsilon)$$
$$\Rightarrow \exists M^* = \text{Sup}A + \text{Sup}B = \text{Sup}(A + B)$$

1.1.2. Tập số thực mở rộng

Người ta thêm vào tập số thực $\mathbb{R}$ hai phần tử kí hiệu là $-\infty$ và $+\infty$. Tập số thực mở rộng được kí hiệu là $\overline{\mathbb{R}}$, tức là $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, các phép toán cộng (+) và nhân (.), quan hệ ~~thứ~~ tự được định nghĩa như sau:

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty,\ x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty.$

2. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty,\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty.$

3. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$

$$x(+\infty) = (+\infty)x = +\infty,\ x(-\infty) = (-\infty)x = -\infty.$$

$\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ \mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R},\ x < 0\}$

4. $x(+\infty) = (+\infty)x = -\infty,\ x(-\infty) = (-\infty)x = +\infty.$

$$(+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty,\ (+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty.$$

5. $\forall x \in \mathbb{R},\ -\infty < x < +\infty,\ -\infty \le -\infty,\ +\infty \le +\infty.$

$$-\infty < x < +\infty,\ -\infty \le -\infty,\ +\infty \le +\infty.$$

1.1.3. Các khoảng số thực

Cho $a, b \in \mathbb{R}$ và $a \le b$. Trong $\mathbb{R}$ có chín loại khoảng sau đây:

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \le x \le b\}$ được gọi là đoạn hay khoảng đóng bị chặn

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R},\ a \le x < b\}$
$(a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \le b\}$ được gọi là khoảng nửa đóng hoặc nửa mở

$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R},\ a \le x\}$

$(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R},\ x \le a\}$

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$ được gọi là các khoảng mở

$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R},\ a < x\}$

$(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R}; x < a\}$

Các số thực a, b gọi là các đầu mút của khoảng.

1.1.4. Giá trị tuyệt đối của số thực

A. Định nghĩa: Giá trị tuyệt đối của số thực x, được kí hiệu $|x|$, là số thực không âm xác định như sau:

$$|x| = \begin{cases} x & khi\ x \geq 0 \\ -x & khi\ x \leq 0 \end{cases}$$

B. Tính chất

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = \text{Max}\{x, -x\}$.
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
3. $$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |xy| = |x||y|,$$ $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \forall x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbb{R},\ \left|\prod_{i=1}^{n} x_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |x_i|,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x^n| = |x|^n.$$
4. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\quad \left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{|x|}$.
5. $$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x + y| \leq |x| + |y|,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R},\ \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$
6. $$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \text{Max}(x, y) = \frac{1}{2}\left(x + y + |x - y|\right),\ \text{Min}(x, y) = \frac{1}{2}\left(x + y - |x - y|\right).$$
7. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.

1.1.5. Khoảng cách thông thường trong $\mathbb{R}$

A. Định nghĩa: Khoảng cách trong $\mathbb{R}$ được xác định nhờ ánh xạ

$$\begin{aligned} d:\ & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & (x, y) \mapsto |x - y| \end{aligned}$$

Đó là hình ảnh trực quan về khoảng cách giữa 2 điểm x và y trên trục số thực $\mathbb{R}$.

B. Tính chất

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ d(x, y) = d(y, x)$.

3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$.

4. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ \left| d(x,y) - d(x,z) \right| \le d(y,z)$.

1.2. SỐ PHỨC

Chúng ta đã biết rằng trong trường số thực $\mathbb{R}$ không thể phân tích thành thừa số tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ khi $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Tuy nhiên sẽ rất tiện lợi nếu có thể thừa số hoá tam thức này thành dạng $a(x-\alpha)(x-\beta)$ trong đó $\alpha, \beta \notin \mathbb{R}$ .Nhằm mục đích này, thêm vào $\mathbb{R}$ một phần tử mới, được kí hiệu là i (được gọi là đơn vị ảo) kết hợp với các cặp số thực $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ để tạo ra các số phức.

1.2.1.Định nghĩa và các dạng số phức

A. Định nghĩa:

Cho $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, một số biểu diễn dưới dạng z = x + iy, trong đó $i^2 = -1$ được gọi là một số phức. Tập các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$.

x được gọi là phần thực của z, kí hiệu Rez = x, y là phần ảo của z, kí hiệu là Imz = y

Gọi môđun của z, được kí hiệu là $|z|$ xác định bởi số thực không âm

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r \ge 0$$

Gọi Acgumen của z , được kí hiệu là Argz xác định bởi số thực

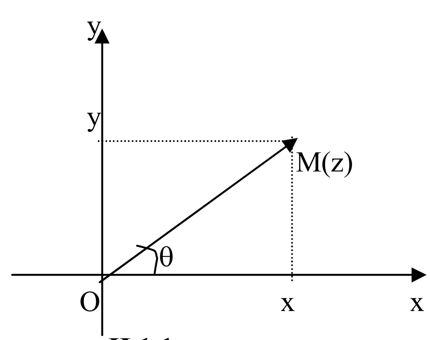
$$\text{Argz} = \theta\ ; \left\{ \theta \in \mathbb{R}; \cos\theta = \frac{x}{|z|} \text{ và } \sin\theta = \frac{y}{|z|} \right\}, \quad \text{với } z \ne 0$$

Như vậy Acgumen của z sai khác nhau $k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và Arg0 không xác định.

Vậy số phức z có thể viết dưới các dạng:

1. z = x + iy gọi là dạng chính tắc hay dạng đại số của số phức z. (1.1)
2. z = $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ gọi là dạng lượng giác của số phức z. (1.2)

B. Biểu diễn hình học của các số phức



H.1.1

Xét mặt phẳng Oxy với hệ toạ độ trực chuẩn.

Ánh xạ φ: $\mathbb{C} \to Oxy$, nghĩa là đặt mỗi số phức z = x + iy ứng với điểm M có toạ độ (x,y) trên mặt phẳng Oxy. Vậy φ là song ánh. Người ta gọi mặt phẳng Oxy là mặt phẳng phức. $\forall z \in \mathbb{C}$, $\varphi(z)$ gọi là ảnh của z trên Oxy. $\forall M \in Oxy, \varphi^{-1}(M)$ gọi là toạ vị của M, đó là số phức $z \in \mathbb{C}$. Ngoài ra $\overrightarrow{OM}$ cũng được gọi là véctơ biểu diễn số phức z. Như vậy $\left|\overrightarrow{OM}\right| = |z|$ và $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right)$ = Argz

Trên mặt phẳng phức Oxy ta nhận thấy:

Trục Ox biểu diễn các số thực $z = x \in \mathbb{R}$, trục này gọi là trục thực. Trục Oy biểu diễn các số phức dạng $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$ (được gọi là các số ảo thuần tuý), được gọi là trục ảo.

1.2.2. Các phép toán trên tập $\mathbb{C}$

A. Phép so sánh bằng nhau

$$\forall (x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4,\ x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \tag{1.3}$$

$$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \end{cases} \qquad (1.3)'$$

B. Phép lấy liên hợp

Cho $z = x + iy \in \mathbb{C}$, liên hợp của z, được kí hiệu là $\overline{z}$ và cho bởi $\overline{z} = x - iy$. (1.4)

Vậy $$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow \overline{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) \qquad (1.4)'$$

C. Phép lấy số phức đối

Cho $z = x + iy \in \mathbb{C}$, số phức đối của z, được kí hiệu là $(-z)$ (đọc là trừ z) được xác định bằng công thức:

$$(-z) = -x - iy \tag{1.5}$$

Vậy ta có $$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow (-z) = r(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)) \qquad (1.5)'$$

D. Phép cộng, phép trừ

Cho $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, tổng của z_1 và z_2, được kí hiệu là $z_1 + z_2$ và được xác định như sau: $$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \tag{1.6}$$

Cho $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, hiệu của z_1 và z_2, được kí hiệu là $z_1 - z_2$ và được xác định như sau: $$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2), \tag{1.7}$$

E. Phép nhân, phép chia

Cho $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, tích của z_1 và z_2, được kí hiệu là $z_1.z_2$ và được xác định như sau: $$z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 - x_2y_1), \tag{1.8}$$

Vậy nếu $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

thì $$z_1z_2 = r_1r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right). \qquad (1.8)'$$

Cho $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, thương của z_1 và z_2, với $z_2 \neq 0$ được kí hiệu là $\frac{z_1}{z_2}$, xác định như sau: $\frac{z_1}{z_2}.z_2 = z_1$, từ đó ta suy ra :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(x_1x_2+y_1y_2)-i(x_1y_2-y_1x_2)}{x_2^2+y_2^2}, \qquad (1.9)$$

Vậy nếu $z_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)$, $z_2 = r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$

thì $$\frac{z_1}{z_2} = r_1r_2\left(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right). \qquad (1.9)'$$

Từ các phép toán trên, nhận được các tính chất dưới đây của phép lấy liên hợp:

1. $\forall z \in \mathbb{C}, \overline{\overline{z}} = z.$

2. $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\ \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ **.**

3. $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C},\ \overline{\sum_{i=1}^{n} z_i} = \sum_{i=1}^{n}\overline{z_i},\ \ \overline{\prod_{i=1}^{n} z_i} = \prod_{i=1}^{n}\overline{z_i}. \qquad (1.10)$$

4. $\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}^*, \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

5. $\forall z \in \mathbb{C}$, $\quad \overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

$\overline{z} = -z \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}, i\mathbb{R} = \{iy, y \in \mathbb{R}\}$.

6. $\forall z \in \mathbb{C} \quad z.\overline{z} = |z|^2$.

F. Phép luỹ thừa, công thức Moavrờ (Moivre)

Cho số phức $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$, $\quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Lũy thừa bậc k của số phức đã cho được kí hiệu là z^k và được tính theo công thức:

$$z^n = z.z....z\,,\quad z^{-n} = \frac{1}{z.z....z}\,,\ n \in \mathbb{N}^*$$

Từ các công thức (1.8)', (1.9)' và bằng qui nạp, ta có thể chứng minh được:

$$z^k = r^k\left(\cos k\theta + i\sin k\theta\right) \qquad (1.11)$$

Công thức (1.11) được gọi là công thức Moivre.

G. Phép khai căn bậc n của $z \in \mathbb{C}^*$.

Cho $n \in \mathbb{N}^*, z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Gọi $\varsigma \in \mathbb{C}^*$ là căn bậc n của z, được kí hiệu $\sqrt[n]{z}$, xác định như sau: $\varsigma^n = z$

Nếu gọi $\rho = |\varsigma|$ và $\Phi = \operatorname{Arg}\varsigma$ thì từ định nghĩa trên suy ra

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\Phi = \theta + 2k\pi \end{cases} \text{ hay là } \rho = r^{\frac{1}{n}} \text{ và } \Phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

$$(k = 0, 1, 2, 3, ..., n-1)$$

Vậy số $z \neq 0$ có đúng n căn bậc n của nó, đó là các số phức có dạng:

$$\varsigma = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0,1,2,...,n-1 \qquad (1.12)$$

Chú ý:

a. Trong chương IV, sau khi đã có công thức khai triển của các hàm số sơ cấp, ta sẽ nhận được dạng luỹ thừa của số phức z :

$$z = re^{i\theta}$$

Khi đó công thức (1.11) sẽ là: $z^k = r^k e^{ik\theta}$, $\quad k \in \mathbb{Z}$ (1.11)'

và công thức (1.12) sẽ là: $\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1, ..., n-1,\ n \in \mathbb{N}^*$ (1.12)'

b. Căn bậc n của đơn vị

Ta xét số phức $z = 1$, như vậy $|z| = 1$, Argz $= 0$. Suy ra căn bậc n của 1 sẽ là n số phức dạng

$$\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \qquad k = 0,1,2,...,n-1$$

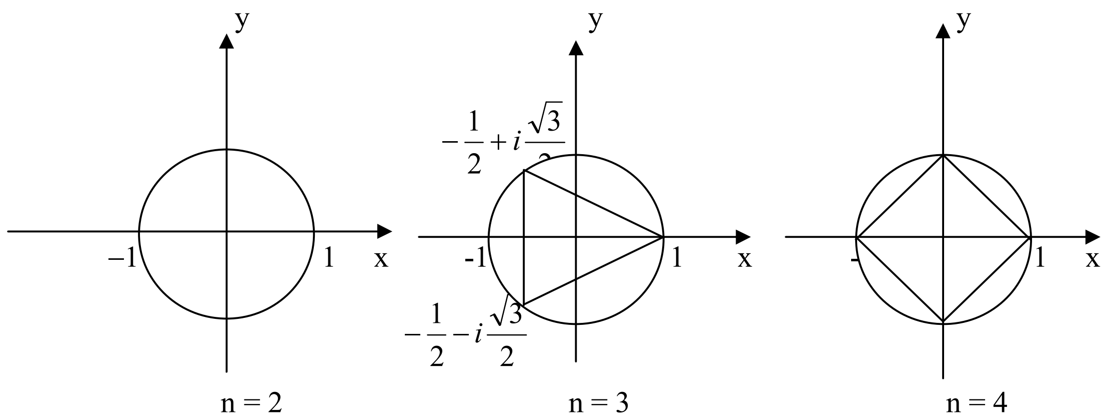
Vì $e^{\pm 2\pi i} = 1$ nên các số phức ω_k có những tính chất sau:

1. $\forall k \in \{0,1,2,...,n-1\}, \qquad \overline{\omega_k} = \omega_{n-k}$.

2. $\forall k \in \{0,1,2,...,n-1\}, \qquad \omega_k = \omega_1^k$.

3. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_1^k = \frac{1 - \omega_1^n}{1 - \omega_1} = 0.$

4. Các số phức ω_k biểu diễn trên mặt phẳng phức bởi các đỉnh của một đa giác đều n cạnh nội tiếp trong đường tròn lượng giác và một trong các đỉnh là điểm có toạ vị bằng 1. Đa giác này nhận Ox làm trục đối xứng, chẳng hạn với n = 2 ,n = 3, n = 4, biểu diễn hình học các số ω_k được cho trên hình 1.2



H.1.2.

Ví dụ 1.4: Hãy tìm tất cả các ánh xạ f : $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ sao cho:

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) + zf(-z) = 1 + z$$

Giải:

Nếu tồn tại f thì f(-z) – zf(z) = 1-z . Sau khi nhân cả hai vế với –z, cộng vế với vế, ta nhận được

$$\left(1+z^2\right)f(z) = 1+z^2$$, chứng tỏ f(z) = 1 nếu $z \neq \pm i$.

Đặt $f(i) = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ thì $f(-i) = 1 - i + i\alpha - \beta$

Kiểm tra
$$f:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$$
$$z \mapsto \begin{cases} 1 & \text{khi } z \neq \pm i \\ \alpha + i\beta & \text{khi } z = i \\ 1-\beta + i(\alpha - 1) & \text{khi } z = -i \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Ta sẽ thấy các ánh xạ trên thoả mãn điều kiện đặt ra.

Ví dụ 1.5: Tính các số phức: **a**. $(1-i)(1-\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+i)$, **b**. $\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}$, **c.** $\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i}$.

Giải:

a. Đặt $z = z_1 z_2 z_3$ trong đó $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$, $z_3 = \sqrt{3} + i$

Ta đi tìm môđun và acgumen của các số phức này

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},\ \theta_1 = A\text{rg}\, z_1, \text{ trong đó } \begin{cases} \text{tg}\,\theta_1 = -1 \\ \cos\theta_1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{4}$$

Tương tự nhận được: $r_2 = 2, \theta_2 = -\dfrac{\pi}{3}, r_3 = 2, \theta_3 = \dfrac{\pi}{6}$

Vậy $z = 4\sqrt{2}.e^{-i.\frac{5\pi}{12}} = 4\sqrt{2}\left[\cos(-\dfrac{5\pi}{12}) + i\sin(-\dfrac{5\pi}{12})\right]$

b. Đặt $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ trong đó $z_1 = \sqrt{3} - i, z_2 = 1 + i$

$$r_1 = |z_1| = 2, \theta_1 = \text{Arg} z_1 = -\frac{\pi}{6}$$

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{2}, \theta_2 = \text{Arg} z_2 = \frac{\pi}{4}$$

Vậy $z = \sqrt{2} e^{i(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2} e^{-i\frac{5\pi}{12}}$

c. Đặt $\xi_k = \sqrt[4]{z}, k = 0,1,2,3$

---

trong đó $z = -1 + \sqrt{3} i \Rightarrow \begin{cases} r = |z| = 2 \\ \varphi = \text{Arg} z = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$

Vậy $z = 2(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3})$

$$\xi_0 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt[4]{\frac{1}{8}}(\sqrt{3} + i)$$

$$\xi_1 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = \sqrt[4]{\frac{1}{8}}(-1 + i\sqrt{3})$$

$$\xi_2 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) = -\sqrt[4]{\frac{1}{8}}(\sqrt{3} + i)$$

$$\xi_3 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = \sqrt[4]{\frac{1}{8}}(1 - i\sqrt{3})$$

Ví dụ 1.6: Tìm môđun và acgumen của số phức $z = \dfrac{(1-i)^{100}}{(\sqrt{3}+i)^{200}}$.

Giải: Đặt $z_1 = 1 - i,\ z_2 = \sqrt{3} + i$

Khi đó: $z = z_1^{100}.z_2^{-200}$ Bây giờ ta đi tính môđun và acgumen của các số phức z_1, z_2

$$|z_1| = \sqrt{2},\ \theta_1 = Arg z_1 = -\frac{\pi}{4}$$

$$|z_2| = 2,\ \theta_2 = Arg z_2 = \frac{\pi}{6}$$

Từ đó có $|z_1^{100}| = 2^{50},\ \text{Arg} z_1^{100} = -25\pi = -\pi,\ [2\pi]$.

$$|z_2^{-200}| = 2^{-200},\ \text{Arg} z_2^{-200} = -\frac{200\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi,\ [2\pi]$$

Cuối cùng ta được $|z| = 2^{50}.2^{-200} = 2^{-150}$, $\text{Arg}z = -\dfrac{\pi}{3}$.

Ví dụ 1.7: Chứng minh rằng $\forall z \in \mathbb{C}$ thì $\left[\begin{array}{l} |1+z| \geq \dfrac{1}{2} \\ |1+z^2| \geq 1 \end{array}\right.$

Giải:

Giả sử $\exists z = x + iy \in \mathbb{C}$ sao cho $\begin{cases} |1+z| < \dfrac{1}{2} \\ |1+z^2| < 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} (x^2+y^2)^2 + 2(x^2-y^2) < 0 \\ x^2+y^2+2x+\dfrac{3}{4} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 < y^2 \\ x^2+y^2+2x+\dfrac{3}{4} < 0 \end{cases} \Rightarrow 2x^2+2x+\frac{3}{4} < 0$$

$$\Delta'_x = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

Chứng tỏ mâu thuẫn. Vậy các bất đẳng thức được thỏa mãn.

Ví dụ 1.8: Cho a, b, $c \in \mathbb{C}$ và $|a| = |b| = |c| = 1,\ a \neq c,\ b \neq c$

Chứng minh

$$\text{Arg}\frac{c-b}{c-a} = \frac{1}{2}\text{Arg}\frac{b}{a},\ [\pi].$$

Giải:

Hãy xét số phức dưới đây: (để ý đến giả thiết, ta có $\dfrac{1}{a} = \bar{a}$, $\dfrac{1}{b} = \bar{b}$, $\dfrac{1}{c} = \bar{c}$)

$$\overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \frac{a}{b}} = \left(\frac{\frac{1}{c} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{c} - \frac{1}{a}}\right)^2 \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} = \left(\frac{b-c}{a-c}.\frac{a}{b}\right)^2 \frac{b}{a} = \left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \text{Arg}\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \frac{a}{b} = k\pi = 0,\ [\pi]$$

$$\Rightarrow 2\text{Arg}\frac{c-b}{c-a} + \text{Arg}\frac{a}{b} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Arg}\frac{c-b}{c-a} = \frac{1}{2}\text{Arg}\frac{b}{a},\ [\pi]$$

Ví dụ 1.9: Cho $a \in \mathbb{R}$, hãy tính căn bậc 4 trong tập $\mathbb{C}$ của số phức :

$$z = 8a^2 - \left(1+a^2\right)^2 + 4a(1-a^2)i$$

Giải:

Nhận xét: Biểu diễn z trong dạng $z = \left[2a + (1-a^2)i\right]^2$

Như vậy $\sqrt{z} = \pm\left[2a + (1-a^2)i\right]$

Tiếp tục nhận xét thấy:

$$2a + (1-a^2)i = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(1+a) + (1-a)i\right]\right\}^2$$

$$-2a - (1-a^2)i = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(1-a) - (1+a)i\right]\right\}^2$$

Ta suy ra 4 giá trị của $\sqrt[4]{z}$ sẽ là:

$$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\{(1+a) + (1-a)i\}, \qquad \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\{(1-a) - (1+a)i\}$$

Ví dụ 1.10: Giải phương trình với ẩn số $z \in \mathbb{C}$:

$$z^4 = z + \bar{z}$$

Giải:

Nhận xét ban đầu : $z_1 = 0$ là nghiệm

Ta xét $z \neq 0$ và đặt $z = \varsigma e^{i\theta}$, $\varsigma \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z^4 = z + \bar{z} \Leftrightarrow \varsigma^3(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 2\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varsigma^3 \cos 4\theta = 2\cos\theta \\ \sin 4\theta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\theta = 0, & [2\pi] \\ \cos\theta > 0 \\ \varsigma^3 = 2\cos\theta \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} 4\theta = \pi, & [2\pi] \\ \cos\theta < 0 \\ \varsigma^3 = -2\cos\theta \end{cases}$$

Ta lấy $\theta = 0 \Rightarrow \varsigma = 2^{\frac{1}{3}}$, $\theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \varsigma = 2^{\frac{1}{6}}$, $\theta = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \varsigma = 2^{\frac{1}{6}}$

Vậy các nghiệm $z \neq 0$ là:

$$z_2 = 2^{\frac{1}{3}},$$

$$z_3 = 2^{\frac{1}{6}}\left((\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2^{-\frac{1}{3}}(-1+i),$$

$$z_4 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2^{-\frac{1}{3}}(-1-i).$$

1.2.3. Áp dụng số phức vào lượng giác

A. Khai triển $\cos n\theta,\ \sin n\theta,\ tgn\theta$

Cho $\theta \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*$. Ta ap dụng công thức Moivre và công thức nhị thức Newton, sẽ có

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos^{n-k}\theta . i^k \sin^k\theta$$

Tách phần thực và phần ảo, ta nhận được

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \cdots +$$
$$\sin n\theta = C_n^1\cos^{n-1}\theta\sin\theta - C_n^3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \cdots$$

Sau khi thay $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ vào các công thức trên sẽ có:

1. $\cos n\theta$ biểu diễn dưới dạng một đa thức của $\cos\theta$, gọi đó là đa thức Chebyshev loại

2. $\sin n\theta$ bằng tích của $\sin\theta$ với một đa thức của $\cos\theta$, gọi là đa thức Chebyshev loại

3. $\text{tg}n\theta = \dfrac{\sin n\theta}{\cos n\theta} = \dfrac{\dfrac{\sin n\theta}{\cos^n\theta}}{\dfrac{\cos n\theta}{\cos^n\theta}} = \dfrac{C_n^1\text{tg}\theta - C_n^3\text{tg}^3\theta + \cdots}{1 - C_n^2\text{tg}^2\theta + C_n^4\text{tg}^4\theta - \cdots}$

B. Tuyến tính hoá $\cos^p\theta,\ \sin^p\theta,\ \cos^p\theta\sin^p\theta$

Cho $\theta \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{N}^*, \omega = e^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} 2\cos\theta = \omega + \overline{\omega} = \omega + \dfrac{1}{\omega} \\ 2i\sin\theta = \omega - \overline{\omega} = \omega - \dfrac{1}{\omega} \end{cases}$

Vậy $2^p\cos^p\theta = \left(\omega + \dfrac{1}{\omega}\right)^p$ và $(2i)^p\sin^p\theta = \left(\omega - \dfrac{1}{\omega}\right)^p$

Sử dụng công thức nhị thức Newton và ta xét các trường hợp sau đây:

a. Trường hợp $p = 2m,\ m \in \mathbb{N}^*$

1.

$$2^{2m}\cos^{2m}\theta = \left(\omega^{2m} + \frac{1}{\omega^{2m}}\right) + C_{2m}^1\left(\omega^{2m-2} + \frac{1}{\omega^{2m-2}}\right) + \cdots + C_{2m}^m$$
$$= 2\cos 2m\theta + 2C_{2m}^1\cos 2(m-1)\theta` + \cdots + 2C_{2m}^{m-1}\cos 2\theta + C_{2m}^m$$
$$\cos^{2m}\theta = 2^{-(2m-1)}\left(\frac{1}{2}C_{2m}^m + \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k\cos 2(m-k)\theta\right)$$

2.

$$2^{2m}(-1)^m\sin^{2m}\theta=\left(\omega^{2m}+\frac{1}{\omega^{2m}}\right)-C_{2m}^{1}\left(\omega^{2m-2}+\frac{1}{\omega^{2m-2}}\right)+\cdots+(-1)^m C_{2m}^{m}$$
$$=2\cos 2m\theta-2C_{2m}^{1}\cos 2(m-1)\theta+\cdots+(-1)^m C_{2m}^{m}$$
$$\sin^{2m}\theta=2^{-(2m-1)}\left(-1\right)^m\left(\frac{(-1)^m}{2}C_{2m}^{m}+\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_{2m}^{k}\cos 2(m-k)\theta\right)$$

b. Trường hợp $p=2m+1,\ m\in\mathbb{N}$

1

$$2^{2m+1}\cos^{2m+1}\theta=\left(\omega^{2m+1}+\frac{1}{\omega^{2m+1}}\right)+C_{2m+1}^{1}\left(\left(\omega^{2m-1}+\frac{1}{\omega^{2m-1}}\right)\right)+\cdots+C_{2m+1}^{m}\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)$$

.

$$=2\cos(2m+1)\theta+2C_{2m+1}^{1}\cos(2m-1)\theta+\cdots+2C_{2m+1}^{m}\cos\theta$$
$$\cos^{2m+1}\theta=2^{-2m}\sum_{k=0}^{m}C_{2m+1}^{k}\cos(2m+1-2k)\theta$$

$$2^{2m+1}\cos^{2m+1}\theta=\left(\omega^{2m+1}+\frac{1}{\omega^{2m+1}}\right)+C_{2m+1}^{1}\left(\left(\omega^{2m-1}+\frac{1}{\omega^{2m-1}}\right)\right)+\cdots+C_{2m+1}^{m}\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)$$
$$=2\cos(2m+1)\theta+2C_{2m+1}^{1}\cos(2m-1)\theta+\cdots+2C_{2m+1}^{m}\cos\theta$$
$$\cos^{2m+1}\theta=2^{-2m}\sum_{k=0}^{m}C_{2m+1}^{k}\cos(2m+1-2k)\theta$$

2.

$$2^{2m+1}i(-1)^m\sin^{2m+1}\theta=\left(\omega^{2m+1}+\frac{1}{\omega^{2m+1}}\right)-C_{2m+1}^{1}\left(\omega^{2m+-}-\frac{1}{\omega^{2m-1}}\right)+\cdots$$
$$=2i\sin(2m+1)\theta-2i.C_{2m+1}^{1}\sin(2m-1)\theta+\cdots+2i(-1)^m C_{2m+1}^{m}\sin\theta$$
$$\sin^{2m+1}\theta=2^{-2m}\left(-1\right)^m\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_{2m+1}^{k}\sin(2m+1-2k)\theta$$

Để tuyến tính hoá $\cos^p\theta\sin^q\theta$ trước hết tuyến tính hoá từng thừa số $\cos^p\theta,\ \sin^q\theta$, sau đó thực hiện phép nhân rồi cùng tuyến tính hoá các số hạng thu được.

Ví dụ 1.11: Cho $(n,a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, tính các tổng:

$$C_n=\sum_{k=0}^{n}\cos(a+kb),\qquad S_n=\sum_{k=0}^{n}\sin(a+kb)$$

Giải:

Ta xét

$$C_n+iS_n=\sum_{k=0}^{n}e^{i(a+kb)}=e^{ia}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{ib}\right)^k$$

Nếu $b\in 2\pi\mathbb{Z}$ thì

$$C_n=(n+1)\cos a,\qquad S_n=(n+1)\sin a$$

Nếu $b\notin 2\pi\mathbb{Z}$ thì

$$C_n + iS_n = e^{ia}\frac{\left(e^{ib}\right)^{n+1}-1}{e^{ib}-1} = e^{ia}\frac{e^{i\frac{(n+1)b}{2}}2i\sin\frac{n+1}{2}b}{e^{i\frac{b}{2}}2i\sin\frac{b}{2}} = e^{i.\left(a+\frac{nb}{2}\right)}.\frac{\sin\frac{n+1}{2}.b}{\sin\frac{b}{2}}$$

Sau khi so sánh, ta có $C_n = \cos\left(a+\frac{nb}{2}\right)\frac{\sin\frac{n+1}{2}b}{\sin\frac{b}{2}}$, $S_n = \sin\left(a+\frac{nb}{2}\right)\frac{\sin\frac{n+1}{2}b}{\sin\frac{b}{2}}$

Ví dụ 1.12: Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n}|\sin k| \ge \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2\sin 1}$

Giải:

Vì sin0 = 0 và $|\sin k| \le 1$ nên

$$\sum_{k=1}^{n}|\sin k| = \sum_{k=0}^{n}|\sin k| \ge \sum_{k=0}^{n}\sin^2 k = \frac{1}{2}.\sum_{k=0}^{n}(1-\cos 2k)$$
$$= \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2}.\sum_{k=0}^{n}\cos 2k = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2}.\frac{\sin(n+1)}{\sin 1}.\cos n$$

Vì rằng $\left|\frac{\sin(n+1)}{\sin 1}.\cos n\right| \le \frac{1}{\sin 1}$ vậy ta có $\sum_{k=1}^{n}|\sin k| \ge \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2\sin 1}$

1.3. DÃY SỐ THỰC

Sau khi xem xét dãy số thực, chúng ta hoàn toàn có thể mở rộng cho dãy số phức vì rằng một dãy số phức $\{z_n\}$ được định nghĩa trong dạng

$$z_n = x_n + iy_n$$

trong đó $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ là các dãy số thực.

1.3.1. Các khái niệm cơ bản của dãy số

A. Định nghĩa

Một dãy số thực là một ánh xạ từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{R}$, tức là $u: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

hay đơn giản người ta thường kí hiệu $\{u_n\}$

Với $n = n_0 \in \mathbb{N}$ xác định, u_{n_0} được gọi là phần tử thứ n_0 của dãy, u_n thường là một biểu thức phụ thuộc vào n gọi là phần tử tổng quát của dãy, chẳng hạn cho các dãy sau đây:

$\{1\}$ (gọi là dãy số hằng), $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ (gọi là dãy điều hoà), $\left\{(-1)^n\right\}$, $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$, ….

B. Sự hội tụ, sự phân kì của dãy số

1. Dãy $\{u_n\}$ được gọi là hội tụ về $a \in \mathbb{R}$ nếu :

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (n > n_0 \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon)$$

Kí hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$, rõ ràng rằng dãy $\{u_n - a\}$ hội tụ về 0.

2. Dãy $\{u_n\}$ được gọi là hội tụ nếu có số $a \in \mathbb{R}$ để $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$

3. Dãy $\{u_n\}$ được gọi là phân kì nếu nó không hội tụ, nghĩa là:

$$(\forall a \in \mathbb{R})\ (\exists \varepsilon > 0)\ \ (\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \Rightarrow |u_{n_0} - a| \geq \varepsilon)$$

4. Dãy $\{u_n\}$ nhận $+\infty$ làm giới hạn nếu

$$(\forall A > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n > n_0 \Rightarrow u_n > A)$$

Kí hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$, đôi khi người ta nói rằng $\{u_n\}$ tiến tới $+\infty$.

5. Dãy $\{u_n\}$ nhận $-\infty$ làm giới hạn nếu

$$(\forall B < 0) \quad (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n > n_0 \Rightarrow u_n < B).$$

Kí hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$

Khi dãy có giới hạn là $+\infty$ hoặc $-\infty$ đều được gọi là phân kỳ.

C. Dãy số bị chặn

1. Ta nói rằng $\{u_n\}$ bị chặn trên bởi số $A \in \mathbb{R}$ nếu $(\forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ u_n \leq A)$.

2. Ta nói rằng $\{u_n\}$ bị chặn dưới bởi số $B \in \mathbb{R}$ nếu $(\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \ u_n \geq B)$.

3. Ta nói rằng $\{u_n\}$ là bị chặn nếu tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho $(\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \ |u_n| \leq M)$.

1.3.2. Tính chất của dãy hội tụ

A. Tính duy nhất của giới hạn

Định lí 1.1**:** *Dãy $\{u_n\}$ hội tụ về a thì a là duy nhất*

Chứng minh: Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a_1,\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = a_2,\ a_1 \neq a_2$

Ta lấy $\varepsilon = \frac{1}{3}|a_1 - a_2|$, theo định nghĩa thì

$$(\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N} \quad \begin{array}{l}(\forall n > n_1 \Rightarrow |u_n - a_1| < \varepsilon)\\ (\forall n > n_2 \Rightarrow |u_n - a_2| < \varepsilon)\end{array}$$

Ta gọi $n_0 = \text{Max}(n_1, n_2),\ \forall n > n_0$ sẽ có:

$|a_1 - a_2| \leq |u_n - a_1| + |u_n - a_2| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|a_1 - a_2|$. Điều này là mâu thuẫn.

Chứng tỏ giới hạn a là duy nhất.

B. Tính bị chặn

1. *Dãy $\{u_n\}$ hội tụ thì bị chặn trong tập* $\mathbb{R}$.

2. Dãy $\{u_n\}$ tiến đến $+\infty$ thì bị chặn dưới trong tập $\mathbb{R}$.

3. *Dãy $\{u_n\}$ tiến đến -∞ thì bị chặn trên trong tập* $\mathbb{R}$.

Chứng minh:

1. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a \Leftrightarrow (\exists n_0) \quad (\forall n > n_0 \Rightarrow |u_n - a| < 1)$

$$\Rightarrow |u_n| \le |u_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

Đặt $M = \text{Max}\left\{|u_0|, ..., |u_{n_0}|, 1 + |a|\right\} \Rightarrow (\forall n \in N \Rightarrow |u_n| \le M)$.

2. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow (\exists n_0)\ (n > n_0 \Rightarrow u_n > 1)$

Đặt m = $\text{Min}\left\{u_0, ..., u_{n_0}, 1\right\} \Rightarrow u_n \ge m$.

3. Quy về 2. bằng cách xét ($-u_n$).

Chú ý:

a. Tồn tại các dãy số bị chặn nhưng chưa chắc hội tụ, chẳng hạn

$$\{u_n\} = \left\{(-1)^n\right\}.$$

b. Mọi dãy không bị chặn sẽ phân kỳ.

c. Một dãy tiến tới $+\infty$ thì không bị chặn trên, điều ngược lại không đúng, chẳng hạn xét dãy số $\{u_n\} = \left\{(-1)^n n\right\}$. Dãy số này không bị chặn, tuy nhiên không có giới hạn.

C. Tính chất đại số của dãy hội tụ

1. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = |a|$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = 0$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} v_n = b \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = a + b$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \lambda u_n = \lambda a$, *$\lambda$ là hằng số*.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, *($v_n$) bị chặn* $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (u_n v_n) = 0$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} v_n = b \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (u_n v_n) = ab$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} v_n = b \ne 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$.

Chứng minh:

1. $(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists n_0 \in \mathbb{N}) \quad (\forall n > n_0 \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon)$

mà $\left||u_n|-|a|\right| \le |u_n-a| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = |a|$.

2. Vì ta có $\left||u_n|-0\right| = |u_n| = |u_n-0|$.

3. $(\forall\varepsilon>0)$ $(\exists n_1,n_2)$ $(\forall n>n_1 \Rightarrow |u_n-a|<\frac{\varepsilon}{2})$ $(\forall n>n_2 \Rightarrow |v_n-b|<\frac{\varepsilon}{2})$

Đặt $n_0 = \text{Max}(n_1,n_2)$, $(\forall n>n_0 \Rightarrow |u_n+v_n-(a+b)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon)$.

4. $(\forall\varepsilon>0)$ $(\exists n_0)$ $(\forall n>n_0 \Rightarrow |u_n-a|<\frac{\varepsilon}{1+|\lambda|})$

$$\Rightarrow |\lambda u_n-\lambda a| = |\lambda||u_n-a| \le \frac{|\lambda|}{1+|\lambda|}\varepsilon < \varepsilon.$$

5. $(\exists M\in\mathbb{R}_+)$ $(\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow |v_n|\le M)$

$(\forall\varepsilon>0)$ $(\exists n_0)$ $(\forall n>n_0 \Rightarrow |u_n|<\frac{\varepsilon}{1+M})$

$\Rightarrow |u_nv_n| = |u_n|.|v_n| < \frac{\varepsilon M}{1+M} < \varepsilon.$

6. Gọi $\alpha_n = u_n - a$. Vậy $\{u_n\}$ hội tụ về 0. Ta có $u_nv_n = (a+\alpha_n)v_n = av_n+\alpha_nv_n$ mà $\lim\limits_{n\to\infty} av_n = ab$ vì $\{v_n\}$ bị chặn nên $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_nv_n = 0$.

7. Trước hết ta sẽ chỉ ra $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{v_n} = \frac{1}{b}$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty}|v_n| = |b| \ne 0$ nên $(\exists n_1\in N)$ $(\forall n>n_1 \Rightarrow \left||v_n|-|b|\right| < \frac{|b|}{2}) \Rightarrow |v_n| > \frac{|b|}{2}$

Ta có $0 \le \left|\frac{1}{v_n}-\frac{1}{b}\right| = \frac{|v_n-b|}{|v_n|.|b|} \le \frac{2}{b^2}|v_n-b|$

suy ra $(\forall\varepsilon>0)$ $(n_2\in N)$ $(\forall n>n_2 \Rightarrow |v_n-b| < \frac{|b|^2}{2}\varepsilon)$

Lấy $n_0 = \text{Max}(n_1,n_2)$, $(\forall n>n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{v_n}-\frac{1}{b}\right| < \varepsilon)$

Ta thấy $\frac{u_n}{v_n} = u_n\frac{1}{v_n}$, theo 6. ta nhận được $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$.

D. Tính chất về thứ tự và nguyên lý kẹp

1. *Giả sử* $\lim\limits_{n\to\infty}u_n = l \in (a,b)$. *Khi đó* $(\exists n_0)$ $(\forall n>n_0 \Rightarrow a<u_n<b)$

2. *Giả sử* $\lim\limits_{n\to\infty}u_n = l$ *và* $(\exists\, n_0)$ $(\forall n>n_0)$ $(a\le u_n\le b)$. *Khi đó* $a\le l\le b$

3. *Giả sử 3 dãy* $\{u_n\},\{v_n\},\{w_n\}$ *thoả mãn:*

$(\exists n_0)\ (\forall n > n_0 \Rightarrow u_n \le v_n \le w_n)$ *và* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = a$

Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = a$

4. *Giả sử* $(\forall n > n_0)\quad (u_n \le v_n)$ *và* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$. *Khi đó* $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$

Chứng minh:

1. $(\exists n_1)\ (\forall n > n_1 \Rightarrow |u_n - l| < l - a \Rightarrow a < u_n)$

$(\exists n_2)\ (\forall n > n_2 \Rightarrow |u_n - l| < b - l \Rightarrow u_n < b)$

Ta lấy $n_0 = Max(n_1,n_2)$ thì $(\forall n > n_0 \Rightarrow a < u_n < b)$.

2. Ta lập luận phản chứng và theo **1.**

3. $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N})$, $(\forall n > n_1 \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon)\ (\forall n > n_2 \Rightarrow |w_n - a| < \varepsilon)$

Lấy $n_3 = Max\{n_1, n_2\}$, $(\forall n > n_3 \Rightarrow\ -\varepsilon < u_n - a \le v_n - a \le w_n - a < \varepsilon)$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = a$.

4. $(\forall A \in \mathbb{R}_+^*)\ (\exists n_1)\ (\forall n > n_1 \Rightarrow u_n > A)$. Gọi $n_2 = Max(n_0,n_1)$, $(\forall n > n_2 \Rightarrow v_n > A)$

Chứng tỏ $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$.

Chú ý:

a. Để chứng minh dãy $\{u_n\}$ hội tụ về a, thông thường chỉ ra dãy $\{\varepsilon_n\}$ hội tụ về 0 và thoả mãn điều kiện $|u_n - a| \le \varepsilon_n, \forall n > n_0$

b. Bằng cách chuyển qua phần tử đối, nhận được kết quả sau đây:

Nếu $(\exists n_0)\ (\forall n > n_0 \Rightarrow u_n \ge v_n)$ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty$

Ví dụ 1.13: Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Giải:

$(\forall \varepsilon > 0)\quad (\exists n_0)\quad (\forall n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon)$ hay $n > \frac{1}{\varepsilon}$

Vậy chọn được $n_0 = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$. Người ta kí kiệu E(x) là phần nguyên của x.

Ví dụ 1.14: Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Giải:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1} = v_n$$

$$u_n \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} = \frac{n}{n+1} = w_n$$

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 1$$

Ví dụ 1.15: Chứng minh $\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & khi\, |a| < 1 \\ 1 & khi\, a = 1 \\ +\infty & khi\, a > 1 \end{cases}$

Giải

Xét $a > 1$, sẽ tồn tại $h \in \mathbb{R}_+^*$ để a = 1+h. Ta có $a^n = (1+h)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i h^i \ge 1 + nh$

vì $\lim_{n\to\infty}(nh) = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(1+nh) = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$

Xét $|a| < 1,\ a \ne 0 \Rightarrow \frac{1}{|a|} > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|a|}\right)^n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a|^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a^n = 0$

Với a = 0 rõ ràng $a^n = 0,\ \forall n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n^n = 0$

Xét a = $1 \Rightarrow a^n = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a^n = 1$

Ví dụ 1.16: Tìm $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a},\ a \in \mathbb{R}_+^*$

Giải:

Xét a = 1 rõ ràng $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$

Xét a > 1, áp dụng công thức nhị thức Newton

$$a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left\{1 + \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)\right\}^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)^k$$

$$\Rightarrow \qquad a \ge \sum_{k=0}^{1} C_n^k \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)^k = 1 + n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ thì } 0 \le \sqrt[n]{a} - 1 \le \frac{a-1}{n} = \varepsilon_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Xét $0 < a < 1 \Rightarrow \frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$, mà $\sqrt[n]{a} = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\right)^{-1}$ nên $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

Kết luận $\forall a \in \mathbb{R}^*,\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Ví dụ 1.17: Tính $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^n}{n^\alpha}\right), \qquad a > 1,\ \alpha \in \mathbb{N}^*$

Giải:

Vì $a^{\frac{1}{\alpha}} > 1$ nên $\exists h \in \mathbb{R}_+^*$ để $a^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + h$, áp dụng công thức nhị thức Niutơn (Newton) $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ ta có

$$\left(a^{\frac{1}{\alpha}}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k h^k \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 \geq \frac{n(n-1)}{2}h^2$$

$$\Rightarrow \frac{\left(a^{\frac{1}{\alpha}}\right)^n}{n} \geq \frac{n-1}{2}h^2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\left(a^{\frac{1}{\alpha}}\right)^n}{n} = +\infty$$

Suy ra $\dfrac{a^n}{n^\alpha} = \left\{\dfrac{\left(a^n\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{n}\right\}^\alpha = \left(\dfrac{a^{\frac{n}{\alpha}}}{n}\right)^\alpha \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$.

Áp dụng nguyên lí kẹp dễ dàng ta thấy được kết quả vẫn đúng $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Kết quả trên chứng tỏ rằng hàm mũ tăng nhanh hơn hàm luỹ thừa.

Ví dụ 1.18: Tinh $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}$, $a \in \mathbb{R}$

Giải:

Đặt $n_0 = E(|a|) + 1$, $\forall n > n_0$ sẽ có:

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \left(\frac{|a|}{1}.\frac{|a|}{2}...\frac{|a|}{n_0}\right)\left(\frac{|a|}{n_0+1}...\frac{|a|}{n}\right) \leq \left(\frac{|a|}{1}.\frac{|a|}{2}...\frac{|a|}{n_0}\right)\frac{|a|}{n} = \varepsilon_n$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

Với kết quả này, người ta nói rằng giai thừa tăng nhanh hơn hàm số mũ.

1.3.3. Tính đơn điệu của dãy số

A. Dãy đơn điệu

1. Dãy $\{u_n\}$ tăng nếu $(\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow u_n \leq u_{n+1})$. Dãy $\{u_n\}$ tăng ngặt nếu $(\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow u_n < u_{n+1})$.

2. Dãy $\{u_n\}$ giảm nếu $(\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow u_n \geq u_{n+1})$. Dãy $\{u_n\}$ giảm ngặt nếu $(\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow u_n > u_{n+1})$

3. Dãy $\{u_n\}$ đơn điệu nếu nó tăng hoặc giảm.

4. Dãy $\{u_n\}$ đơn điệu ngặt nếu nó tăng ngặt hoặc giảm ngặt

Định lí 1.2:

1. *Mọi dãy tăng và bị chặn trên thì hội tụ.*

2*. Mọi dãy giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.*

Chứng minh:

1. $\{u_n\}$ bị chặn trên nên tồn tại $l = \text{Sup}(u_n)$: $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_\varepsilon \Rightarrow\ l - \varepsilon \le u_{n_\varepsilon} \le l < l + \varepsilon)$

Vì dãy tăng do đó $(\forall n > n_\varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$,

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l = \text{Sup}(u_n),\ n \in \mathbb{N}$.

2. Áp dụng kết quả phần trên đối với dãy $\{-u_n\}$.

Định lí 1.3:

__1.__ Dãy $\{u_n\}$ tăng và không bị chặn trên thì dần đến $+\infty$.

__2.__ Dãy $\{u_n\}$ giảm và không bị chặn dưới thì dần đến $-\infty$.

Chứng minh:

1. $\{u_n\}$ không bị chặn trên : $(\forall A > 0)\ (\exists n_0 \Rightarrow u_{n_0} > A)$

Vì $\{u_n\}$ tăng nên $(\forall n > n_0 \Rightarrow u_n \ge u_{n_0} > A)$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

2. Áp dụng kết quả 1. với dãy $\{-u_n\}$

Chú ý

a. Nếu $\{u_n\}$ tăng thì $\{u_n\}$ hoặc hội tụ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

b. Nếu $\{u_n\}$ tăng và hội tụ đến a thì $a = \text{Sup}(u_n),\ n \in \mathbb{N}$ và $(\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow u_n \le a)$.

c. Nếu $\{u_n\}$ tăng thì dãy bị chặn dưới bởi u_0.

Ví dụ 1.19: Chứng minh rằng dãy $\{u_n\} = \left\{\sum\limits_{k=i}^{n} \dfrac{1}{n+k}\right\}$ hội tụ

Giải: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

$$u_n \le n\frac{1}{n+1} \le 1$$

Vậy $\{u_n\}$ tăng và bị chặn trên nên nó hội tụ.

Ví dụ 1.20: Tìm giới hạn của dãy số cho dưới dạng ẩn sau:

$$x_n = \frac{5 + x_{n-1}{}^2}{2x_{n-1}},\ x_1 > 5$$

Giải: Trước hết dùng qui nạp chứng minh $x_n > 0\ \ \forall n$

$x_1 > 5$, bất đẳng thức đúng với $n = 1$

Giả sử $x_k > 0$ ta sẽ chứng minh $x_{k+1} > 0$

Thật vậy $x_{k+1} = \dfrac{5 + x_k^{\ 2}}{2x_k} > 0$ (do tử số và mẫu số đều dương). Chứng tỏ $x_n > 0 \quad \forall n$

Mặt khác, dựa vào bất đẳng thức Côsi (Cauchy) thì

$$x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{x_{n-1}} + x_{n-1}\right) \geq \sqrt{5}, \quad \forall n$$

Suy ra $x_n^{\ 2} \geq 5$ hay $x_n \geq \dfrac{5}{x_n}$. Cộng vào các vế với x_n ta có:

$$2x_n \geq \frac{5}{x_n} + x_n \text{ hay } 2x_n \geq 2x_{n+1}$$

Chứng tỏ dãy $\{x_n\}$ đơn điệu giảm.

Kết hợp hai kết quả trên suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \geq \sqrt{5}$

Vì $x_n = \dfrac{5 + x_{n-1}^{\ 2}}{2x_{n-1}}$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5 + x_{n-1}^{\ 2}}{2x_{n-1}}$. Từ đó ta có $a = \dfrac{5 + a^2}{2a}$ và $a \geq \sqrt{5}$

Giải phương trình đối với a ta sẽ tìm được $a = \sqrt{5}$.

Ví dụ 1.21: Cho 2 dãy $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ thoả mãn các điều kiện :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = 0, \ \{v_n\} \text{ giảm ngặt, } \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = l$$

Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l$:

Giải : Từ định nghĩa ta có $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in N)\ \left(\forall n > n_0 \Rightarrow \left|\dfrac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} - l\right| < \varepsilon\right)$,

Lấy p, n $\in \mathbb{N}$ sao cho p > n > n_0 sẽ có:

$$\left|(u_{n+1} - lv_{n+1}) - (u_n - lv_n)\right| < \varepsilon(v_n - v_{n+1})$$
$$\vdots$$
$$\left|(u_p - lv_p) - (u_{p-1} - lv_{p-1})\right| < \varepsilon(v_{p-1} - v_p)$$

Cộng các vế với vế ta nhận được:

$$\left|(u_p - l.v_p) - (u_n - l.v_n)\right| < \varepsilon.(v_n - v_p)$$

Cho $p \to +\infty$ với n cố định và n > n_0 .Vì $\{v_n\}$ giảm ngặt và dần về 0 nên $v_n > 0$, nên nhận được bất đẳng thức

$$|u_n - lv_n| \leq \varepsilon v_n \text{, hay } \left|\frac{u_n}{v_n} - l\right| \leq \varepsilon \text{ nghĩa là } \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$$

B. Dãy kề nhau

Hai dãy $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ gọi là kề nhau khi và chỉ khi $\{u_n\}$ tăng, $\{v_n\}$ giảm đồng thời

$$\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$$

Định lí 1.4: *Hai dãy kề nhau thì hội tụ và có chung một giới hạn l, ngoài ra*

$$u_n \le u_{n+1} \le l \le v_{n+1} \le v_n$$

Chứng minh:

$\forall n \in \mathbb{N}$, Ta đặt $w_n = v_n - u_n \Rightarrow \{w_n\}$ giảm vì $w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n)$

$= (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) \le 0$

$\{w_n\}$ giảm và hội tụ về 0 (giả thiết) $\Rightarrow w_n \ge 0\ \forall n$ hay $u_n \le v_n$.

Chứng tỏ $\{u_n\}$ tăng và bị chặn trên bởi v_0, còn $\{v_n\}$ giảm và bị chặn dưới bởi u_0

Ta suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = l_2$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0 \Rightarrow l_1 = l_2 = l$

Theo chú ý thứ hai ở Mục 1.3.3 suy ra $u_n \le u_{n+1} \le l \le v_{n+1} \le v_n$

Ví dụ 1.22: Chứng minh rằng $\{e_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ hội tụ.

Giải:

Trước hết chúng ta sẽ chỉ ra $\{e_n\}$ tăng. Thật vậy, theo công thức nhị thức Newton sẽ có

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)...(n-n+1)}{1.2...n}\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Suy ra

$$e_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1}) + \frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1})$$

Nhận xét : e_{n+1} nhiều hơn e_n một số hạng dương và từ số hạng thứ 3 trở đi mọi số hạng của e_n nhỏ hơn số hạng tương ứng của e_{n+1} (vì $1-\frac{1}{n} < 1-\frac{1}{n+1}$) . Suy ra $e_{n+1} > e_n$.

Ngoài ra $e_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$, Như vậy $e_n < 2 + \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3, \forall n$. Dãy tăng và bị chặn trên nên hội tụ.

Gọi giới hạn của $\{e_n\}$ là số e : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e,\ \mathrm{e} > 0.$. (2.13)

Sau đây người ta hay dùng số e làm cơ số của logarit, được kí hiệu là $\ln x$ (đọc là lôgarit tự nhiên của x, hay lôgarit Nêpe của x)

Dưới đây ta sẽ chứng minh e là số vô tỉ.

Ví dụ 1.23: Chứng minh rằng dãy $\{e_n'\}$ với $e_n' = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$ hội tụ về e

Giải:

$\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$, đặt $v_n = e_n' + \dfrac{1}{n.n!}$. rõ ràng dãy $\{e_n'\}$ tăng ngặt và $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - e_n') = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n.n!} = 0$

Mặt khác ta có:

$$v_{n+1} - v_n = e_{n+1}' - e_n' + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n..n!}$$
$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} = -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!}$$

$\Rightarrow \{v_n\}$ giảm ngặt. Trước hết ta chứng minh $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$ bằng phương pháp phản chứng:

Thật vậy, nếu $e = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$ mà $\mathrm{e} \in \mathbb{Q}$ tức là $\mathrm{e} = \dfrac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}},\ \mathrm{p},\mathrm{q} \in \mathbb{N}^*$, ta sẽ có:

$$\mathrm{e}_\mathrm{q}' = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{q}}\frac{1}{\mathrm{k}!} = 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{q}!} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}!}, \qquad \mathrm{a} \in \mathbb{N}^*$$
$$\mathrm{e}_\mathrm{q}' < \mathrm{e} < \mathrm{v}_\mathrm{q} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}!} < \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}} < \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}!} + \frac{1}{\mathrm{q.q}!}$$

Hay a < p (q-1)! < a + $\dfrac{1}{q} \le a+1$. Điều này mâu thuẫn vì $(a, p(q-1), a+1) \in \mathbb{N}^{*3}$.

Sau đây ta sẽ chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!} = e$: Rõ ràng khi k cố định và n > k thì

$$e_n > 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})$$

Cho $\mathrm{n} \to \infty$ suy ra $e \ge 2 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{k!} = e_k'$

Như vậy $e \ge e_n' > e_n$ .Theo định lí kẹp suy ra $\mathrm{e}_\mathrm{n}' \xrightarrow[\mathrm{n}\to\infty]{} \mathrm{e}$.

Hệ quả: (Định lí về các đoạn lồng nhau)

Cho hai dãy $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ thoả mãn các điều kiện:

$(\forall n \in \mathbb{N})\ (a_n \le b_n)\ ([a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n])$ *và* $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

Khi đó tồn tại duy nhất số l *sao cho* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{l\}$

Chứng minh:

Hai dãy $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ thoả mãn các điều kiện đã cho chính là hai dãy kề nhau nên cùng hội tụ về l và $\forall n$ có $a_n \le a_{n+1} \le l \le b_{n+1} \le b_n$ (định lí 1.4). Vậy ta có $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{l\}$

1.3.4. Dãy con

Cho $\{u_n\}$, từ các phần tử của nó lập một dãy mới $\{u_{n_k}\}$ với $n_1 < n_2 < ... < n_k < ....$

Người ta gọi dãy mới $\{u_{n_k}\}$ là một dãy con của $\{u_n\}$.

Ta xét thấy

$\{u_{2n}\}$, $\{u_{2n+1}\}$ và $\{u_{n^2}\}$ là các dãy con của $\{u_n\}$. Tuy nhiên $\{u_{n^2-n}\}$ không phải là dãy con của $\{u_n\}$ vì số hạng u_0 xuất hiện 2 lần ứng với n = 0, n = 1

Định lí 1.5: *Nếu* $\{u_n\}$ *hội tụ về* $a \in \mathbb{R}$ *thì mọi dãy con của nó cũng hội tụ về a*

Chứng minh:

$\{u_n\}$ *hội tụ về* $a \in \mathbb{R}$ tức là $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0)\ (\forall n > n_0 \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon)$

Ta lấy bất kì $\{u_{n_k}\}$ là một dãy con của $\{u_n\}$. Vì $n_k \to \infty$ khi $k \to \infty$, nên

$(\exists k_0)\ (\forall k > k_0)\ (n_k > n_0 \Rightarrow |u_{n_k} - a| < \varepsilon)$ suy ra $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = a$.

Chú ý:

a. Nếu $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ thì $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = +\infty$

b. Từ định lí trên, chúng ta nhận được điều kiện đủ cho dãy số phân kì: Nếu tồn tại hai dãy con hội tụ về hai số khác nhau thì dãy số phân kì. Chẳng hạn, $\{(-1)^n\}$ phân kì vì có dãy con $\{(-1)^{2n}\}$ hội tụ về 1 và dãy con khác $\{(-1)^{2n+1}\}$ hội tụ về -1

Hệ quả: *Để* $\{u_n\}$ *hội tụ đến* l *cần và đủ là hai dãy con* $\{u_{2n}\}$ *và* $\{u_{2n+1}\}$ *cùng hội tụ đến* l.

Chứng minh:

Điều kiện cần suy từ định lí 1.5

Bây giờ ta chứng minh điều kiện đủ:

$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_1, n_2)\ (\forall p > n_1 \Rightarrow |u_{2p} - l| < \varepsilon)\ \ (\forall p > n_2 \Rightarrow |u_{2p+1} - l| < \varepsilon)$

Đặt $n_0 = Max(2n_1, 2n_2+1)$ lấy $n \in \mathbb{N}$ sao cho n = 2p hoặc n = 2p + 1

Trường hợp n = 2p $\Rightarrow p > n_1 \Rightarrow |u_n - l| = |u_{2p} - l| < \varepsilon$.

Trường hợp n = 2p + 1 $\Rightarrow p > n_2 \Rightarrow |u_n - l| = |u_{2p+1} - l| < \varepsilon$.

Trong mọi trường hợp có $|u_n - l| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$.

Định lí 1.6: (Định lí Bônzanô – Vâyơxtrase),(Bolzano -Weierstrass):

Từ mọi dãy $\{u_n\}$ bị chặn đều có thể lấy ra một dãy con hội tụ

Chứng minh: Dùng phương pháp chia đôi để chứng minh định lí trên.

Ta sẽ xây dựng bằng qui nạp hai dãy thực $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ kề nhau và một dãy con $\{u_{n_k}\}$,

trong đó $u_{n_k} \in [a_n, b_n],\ \forall k \in \mathbb{N}$

Vì $\{u_n\}$ bị chặn nên tồn tại a_0, b_0 sao cho $\forall n \in \mathbb{N}$ có $a_0 \le u_n \le b_0$, rõ ràng

$$u_{n_k} \in [a_0, b_0],\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Cho $n \in \mathbb{N}$ giả sử $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a_n \le b_n$.Tập $\{u_{n_k} \in [a_n, b_n],\ k \in \mathbb{N}\}$ là vô hạn và

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$$

Xét điểm giữa $\frac{a_n + b_n}{2}$ của $[a_n, b_n]$, rõ ràng ít nhất một trong hai khoảng chứa u_{n_k} là vô hạn. Do đó tồn tại $(a_{n+1}, b_{n+1}) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a_{n+1} \le b_{n+1}$. Tập $\{u_{n_k} \in [a_{n+1}, b_{n+1}],\ k \in \mathbb{N}\}$ là vô hạn và $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{2^{n+1}}(b_0 - a_0)$

Rõ ràng các đoạn $[a_n, b_n]$ lồng nhau. Vậy $\forall n$ tồn tại l sao cho $|u_{n_k} - l| \le b_n - a_n$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k} = l$

1.3.5. Nguyên lí Cauchy

Dưới đây chúng ta chỉ đưa ra mà không chứng minh điều kiện cần và đủ cho sự hội tụ của dãy số, gọi là nguyên lí Cô si (nguyên lí mang tên nhà toán học Cauchy người Pháp)

Định lí 1.7 : *Để dãy $\{u_n\}$ hội tụ cần và đủ là*

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n > n_0)\ (\forall\ m > n_0) \Rightarrow (|u_n - u_m| < \varepsilon)$$

Ví dụ 1.24: Chứng minh rằng mọi dãy $\{u_n\}$ tuần hoàn và hội tụ là dãy hằng (dãy dừng)

Giải:

$\{u_n\}$ tuần hoàn nên $(\exists T \in \mathbb{N}^*)$ $(\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow u_{n+T} = u_n)$

Lấy $(n_0 \in \mathbb{N})$ $(\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow u_{n_0+kT} = u_{n_0})$

$\{u_{n_0+kT}\}$ là một dãy con và là dãy dừng nên $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_0+kT} = u_{n_0}$

Vì $\{u_n\}$ hội tụ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = u_{n_0}$ vì n_0 bất kì vậy $\{u_n\} = \{u_{n_0}\}$, $\forall n$

Vậy dãy $\{u_n\}$ là dãy hằng..

Ví dụ 1.25: Cho dãy $\{u_n\}$ thoả mãn điều kiện: $(\forall m, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow\ 0 \le u_{m+n} \le \dfrac{m+n}{mn})$

Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

Giải:

$\forall n \in \mathbb{N}$ có $\quad 0 \le u_{2n} \le \dfrac{2n}{n^2} \to 0$ khi $n \to \infty$, $0 \le u_{2n+1} \le \dfrac{2n+1}{n(n+1)} \to 0$ khi $n \to \infty$

Từ hệ quả của định lí 1.5 suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

TÓM TẮT NỘI DUNG CHƯƠNG I

- **Tính chất của tập số thực**

Tính chất 1: *Tập $\mathbb{R}$ là một trường giao hoán với hai phép cộng và nhân: ($\mathbb{R}$, + , .).*

Tính chất 2*: Tập $\mathbb{R}$ được xếp thứ tự toàn phần. Ngoài ra tập các số thực dương có tính đóng kín, nghĩa là:*

1. $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ *hoặc* $a = b$ *hoặc* $a > b$.

2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ a \le b \Rightarrow a + c \le b + c,\ \forall a, b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}_+,\ a \le b \Rightarrow ac \le bc$

3. $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow\ a + b \in \mathbb{R}_+^*,\ ab \in \mathbb{R}_+^*$

Tính chất 3: *Tập $\mathbb{R}$ là một tập đầy.*

Mọi tập con X không rỗng của $\mathbb{R}$ bị chặn trên trong $\mathbb{R}$ đều có một cận trên đúng thuộc $\mathbb{R}$ và mọi tập con không rỗng X của $\mathbb{R}$ bị chặn dưới trong $\mathbb{R}$ đều có một cận dưới đúng thuộc $\mathbb{R}$.

- **Định nghĩa và các dạng số phức**

Cho $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, một số biểu diễn dưới dạng z = x + iy, trong đó $i^2 = -1$ được gọi là một số phức. Tập các số phức kí hiệu là $\mathbb{C}$.

Gọi môđun của z, được kí hiệu là $|z|$ xác định bởi số thực không âm

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r \ge 0$$

Gọi Acgumen của z , được kí hiệu là Argz xác định bởi số thực

$$\text{Argz} = \theta\ ;\left\{\theta \in \mathbb{R}; \cos\theta = \frac{x}{|z|} \text{ và } \sin\theta = \frac{y}{|z|}\right\},\quad \text{với } z \ne 0$$

1. z = x + iy gọi là dạng chính tắc hay dạng đại số của số phức z.

2. z = $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ gọi là dạng lượng giác của số phức z.

- **Các phép toán trên tập $\mathbb{C}$**

A. Phép so sánh bằng nhau

$$\forall (x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4,\ x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

$$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \end{cases}$$

B. Phép lấy liên hợp

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \Rightarrow \bar{z} = x - iy.$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow \bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta)$$

C. Phép lấy số phức đối

$$z = x + iy \Rightarrow \quad (-z) = -x - iy$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow (-z) = r(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi))$$

D. Phép cộng, phép trừ

$$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2 \Rightarrow z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2 \Rightarrow z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2),$$

E. Phép nhân, phép chia

$$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2 \Rightarrow z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 - x_2y_1),$$

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\ z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

$$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2 \Rightarrow \frac{z_1}{z_2}.z_2 = z_1 :$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) - i(x_1y_2 - y_1x_2)}{x_2^2 + y_2^2},$$

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\ z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = r_1 r_2(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)).$$

F. Phép luỹ thừa, công thức Moavrờ (Moivre)

Cho số phức $z = r(\cos\theta + i\sin\theta),\ \forall k \in \mathbb{Z}$

$$z^k = r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta).$$

G. Phép khai căn bậc n của $z \in \mathbb{C}^*$.

Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Gọi $\varsigma \in \mathbb{C}^*$ là căn bậc n của z, được kí hiệu $\sqrt[n]{z}$, xác định như sau: $\varsigma^n = z$

Nếu gọi $\rho = |\varsigma|$ và $\Phi = \operatorname{Arg}\varsigma$

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\Phi = \theta + 2k\pi \end{cases} \text{ hay là } \rho = r^{\frac{1}{n}} \text{ và } \Phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

$$(k = 0,1,2,3,...,n-1)$$

Số phức $z \neq 0$ có đúng n căn bậc n của nó, đó là các số phức có dạng:

$$\varsigma = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0,1,2,...,n-1$$

- **Sự hội tụ, sự phân kì của dãy số**

1. Dãy $\{u_n\}$ được goi là hội tụ về $a \in \mathbb{R}$ nếu :

$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (n > n_0 \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon)$, suy ra $\{u_n - a\}$ hội tụ về 0.

2. Dãy $\{u_n\}$ nhận $+\infty$ làm giới hạn nếu

$(\forall A > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n > n_0 \Rightarrow u_n > A)$

3. Dãy $\{u_n\}$ nhận $-\infty$ làm giới hạn nếu

$(\forall B < 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n > n_0 \Rightarrow u_n < B)$.

Khi dãy có giới hạn là $+\infty$ hoặc $-\infty$ cũng được gọi là phân kỳ.

- **Dãy số bị chặn**

1. Nói rằng $\{u_n\}$ bị chặn trên bởi số $A \in \mathbb{R}$ nếu $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \le A$.

2. Nói rằng $\{u_n\}$ bị chặn dưới bởi số $B \in \mathbb{R}$ nếu $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \ge B$.

3. Nói rằng $\{u_n\}$ là bị chặn nếu tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \le M$.

- **Tính chất của dãy hội tụ**

A. Tính duy nhất của giới hạn

Dãy $\{u_n\}$ hội tụ về a thì a là duy nhất

B.Tính bị chặn

1. *Dãy $\{u_n\}$ hội tụ thì bị chặn trong tập $\mathbb{R}$.*

2. *Dãy $\{u_n\}$ tiến đến $+\infty$ thì bị chặn dưới trong tập $\mathbb{R}$.*

3. *Dãy $\{u_n\}$ tiến đến $-\infty$ thì bị chặn trên trong tập $\mathbb{R}$.*

C. Tính chất đại số của dãy hội tụ

1. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = |a|$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = 0$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} v_n = b \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = a + b$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \lambda u_n = \lambda a$, λ là hằng số .

5. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, ***(vn)*** *bị chặn* $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (u_n v_n) = 0$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} v_n = b \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (u_n v_n) = ab$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} v_n = b \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$.

~~Đ.~~ Tính chất về thứ tự và nguyên lý kẹp

1. *Giả sử* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l \in (a,b)$. *Khi đó* $(\exists n_0)\ (\forall n > n_0 \Rightarrow a < u_n < b)$.

2. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$ *và* $(\exists\ n_0)\ (\forall n > n_0 \Rightarrow a \le u_n \le b)$. *Khi đó* $a \le l \le b$.

3. *Giả sử 3 dãy* $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, $\{w_n\}$ *thoả mãn:*

$(\exists n_0)\ (\forall n > n_0 \Rightarrow u_n \le v_n \le w_n)$ *và* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = a$. *Khi đó* $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = a$.

4. Giả sử $\forall n > n_0$ mà $u_n \le v_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$.

- **Tính đơn điệu của dãy số**

1. *Mọi dãy tăng và bị chặn trên thì hội tụ.*

2. *Mọi dãy giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.*

3. *Dãy* $\{u_n\}$ *tăng và không bị chặn trên thì dần đến* $+\infty$.

4. *Dãy* $\{u_n\}$ *giảm và không bị chặn dưới thì dần đến* $-\infty$.

- **Dãy kề nhau**

Hai dãy $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ gọi là kề nhau khi và chỉ khi $\{u_n\}$ tăng, $\{v_n\}$ giảm đồng thời

$$\lim_{n\to\infty} (v_n - u_n) = 0$$

Hai dãy kề nhau thì hội tụ và có chung một giới hạn l, *ngoài ra*

$$u_n \le u_{n+1} \le l \le v_{n+1} \le v_n .$$

(Định lí về các đoạn lồng nhau)

Cho hai dãy $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *thoả mãn các điều kiện:*

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (a_n \le b_n)\ ([a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]) \text{ và } \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$$

Khi đó tồn tại duy nhất số l *sao cho* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{l\}$.

- **Dãy con**

1. *Nếu* $\{u_n\}$ *hội tụ về* $a \in \mathbb{R}$ *thì mọi dãy con của nó cũng hội tụ về a.*

2. *Để* $\{u_n\}$ *hội tụ đến* l *cần và đủ là hai dãy con* $\{u_{2n}\}$ *và* $\{u_{2n+1}\}$ *cùng hội tụ đến* l .

3. (Định lí Bônzanô – Vâyơxtrase),(Bolzano -Weierstrass):

Từ mọi dãy $\{u_n\}$ *bị chặn đều có thể lấy ra một dãy con hội tụ.*

: 4. (Nguyên lí Côsi) *Để dãy* $\{u_n\}$ *hội tụ cần và đủ là*

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n > n_0)\ (\forall\ m > n_0) \Rightarrow (|u_n - u_m| < \varepsilon)$$

BÀI TẬP CHƯƠNG I

SỐ THỰC

1.1. Chứng minh rằng $\sqrt{3}$ là số vô tỉ.

1.2. Giải các phương trình sau với $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

a. $3x^2+y^2+z^2=2x(y+z)$. **b.** $3x^2+4y^2+18z^2-4xy-12xz=0$.

1.3. Tìm cận trên đúng, cận dưới đúng (nếu tồn tại) của tập E sau đây trên $\mathbb{R}$

$$E=\{\frac{1+(-1)^n}{n}-n^2,\quad n\in\mathbb{N}^*\}.$$

1.4. Bằng định nghĩa hãy chứng minh sự hội tụ của các dãy cho bởi phần tư tổng quát tương ứng và tìm giới hạn của chúng

a. $u_n=\dfrac{n}{n+1}$, **b.** $u_n=\dfrac{n+1}{4n+1}$,

c. $u_n=\dfrac{n^2}{n^3+1}$, **d.** $u_n=\dfrac{3+(-3)^n}{4^n}$.

1.5. Tìm giới hạn của các dãy cho bởi phần tử tổng quát dưới đây

a. $x_n=n-\sqrt{n^2-1}$, . **b.** $x_n=\sqrt{n(n+a)}-n$,

c. $x_n=n+\sqrt[3]{1-n^3}$, **d.** $x_n=\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$.

1.6. Chứng minh sự hội tụ và xác định giới hạn của các dãy sau cho bởi phần tử tổng quát tương ứng

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$, **b.** $\dfrac{\sum_{k=0}^{n}(3k+1)}{\sum_{k=0}^{n}(2k+3)}$, **c.** $\sqrt[n]{3+\sin n}$.

1.7. Cho $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ và $b^2-4ac<0$, $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ là hai dãy số thực thoả mãn điều kiện:

$$\lim_{n\to\infty}(au_n^2+bu_nv_n+cv_n^2)=0$$

Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$.

1.8. Cho dãy $\{x_n\}$ với $x_n=x_{n-1}+\dfrac{1}{x_{n-1}}$, $x_0=1$.

a. Chứng minh $\{x_n\}$ không có giới hạn hữu hạn.

b. Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

1.9. Cho dãy $\{x_n\}$ với $x_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ trong đó $a_n = 2a_{n-1} + 3b_{n-1}$, $b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$, $a_0 > 0$, $b_0 > 0$

a. Chứng tỏ rằng $a_n > 0$, $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b. Biểu diễn x_{n+1} qua x_n.

c. Tính $x_{n+1} - x_n$ và chứng tỏ rằng $\{x_n\}$ đơn điệu. Hãy tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

1.10. Chứng tỏ rằng các dãy số sau có giới hạn hữu hạn

a. $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$, **b.** $x_n = \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$.

1.11. Chứng tỏ các dãy số sau có giới hạn là $+\infty$

a. $x_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$,.

b. $x_n = \log_a \dfrac{2}{1} + \log_a \dfrac{3}{2} + \cdots + \log_a \dfrac{n+1}{n}$, $a > 1$.

1.12. Tìm giới hạn của dãy sau:

a. $x_n = \dfrac{2}{x_{n-1}} + 1$, $x_0 = 1$, **b.** $x_n = \sqrt{1 + x_{n-1}}$, $x_0 = \sqrt{3}$.

c. $x_n(3 + x_{n-1}) + 1 = 0$, $x_0 = 1$, **d.** $x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$, $(n > 1)$, $x_1 = \sqrt{a}$, $a > 0$.

e. $x_{n+1} = \dfrac{x_n + x_{n-1}}{2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, **f.** $x_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x_{n-1}^2}{2}$, $x_1 = \dfrac{1}{2}$.

g. $x_n = \dfrac{5 + x_{n-1}^2}{2x_{n-1}}$, $x_1 > 5$.

1.13. Chứng minh rằng một dãy đơn điệu có giới hạn nếu nó có một dãy con có giới hạn.

1.14. Chứng minh rằng nếu ba dãy con $\{x_{2n}\}, \{x_{2n+1}\}$ và $\{x_{3n}\}$ hội tụ thì dãy $\{x_n\}$ hội tụ.

Có thể thay số 2 bởi số tự nhiên k >2 được không?.

1.15. Nếu $x_n \to a$ (hữu hạn hay vô hạn) thì có thể nói gì về $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

SỐ PHỨC

1.16. Cho các tập E, F, G, H $\subset \mathbb{R}^2$, xác định bởi các hệ thức sau:

E: $x^2 - y^2 = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$. **F:** $2xy + \dfrac{y}{x^2 + y^2} = 3$.

G: $x^3 - 3xy^2 + 3y = 1$. **H:** $3x^2y - 3x - y^3 = 0$.

Chứng minh $E \cap F = G \cap H$.

1.17. Có tồn tại $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ để thoả mãn các điều kiện dưới đây không?

$$z_1 + z_2 = 1\ ,\ z_1^2 + z_2^2 = 2\ ,\ z_1^3 + z_2^3 = 3.$$

1.18. Tìm tất cả các $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ sao cho x, y, z khác nhau từng đôi và thỏa mãn:

$$x(x-1) + 2yz = y(y-1) + 2xz = z(z-1) + 2x.y$$

1.19. Giải hệ phương trình với ẩn $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$

$$xy = z\ ,\ yz = x\ ,\ zx = y.$$

1.20. Cho ánh xạ f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ thoả mãn

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x \\ \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ \begin{cases} f(z+z') = f(z) + f(z') \\ f(zz') = f(z).f(z') \end{cases} \end{cases}$$

Chứng minh $\left[\begin{array}{l} f(z) = z, \quad \forall z \in \mathbb{C} \\ f(z) = \overline{z}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \end{array}\right.$

1.21. Giải phương trình với ẩn số $z \in \mathbb{C}$: $2z + 6\overline{z} = 3 + 2i$

1.22. Xác định tập các số phức $z \in \mathbb{C}$ sao cho $z = r_0\overline{z}$, $r_0 \in \mathbb{R}$

1.23. Cho $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ thoả mãn $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = 1$ và a + b + c = 0. Chứng minh $a^3 = b^3 = c^3$

1.24. Chứng minh $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$

a. $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$ (Hằng đẳng thức hình bình hành).

b. $|\overline{zz'} + 1|^2 + |z - z'|^2 = (1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)$.

c. $|\overline{zz'} - 1|^2 - |z - z'|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |z'|^2)$.

d. $zz' = \frac{1}{4}(|z + \overline{z'}|^2 - |z - \overline{z'}|^2 + i|z + i\overline{z'}|^2 - i|z - i\overline{z'}|^2)$.

1.25. Xác định tập hợp các điểm M có toạ vị z thoả mãn điều kiện:

a. $|z| = 2|z - 1|$. **b.** $\dfrac{z^2}{z+i} \in i\mathbb{R}$.

1.26. Tính $\sup\limits_{|z|=1} |z^3 - z + 2|$

1.27. Cho $a \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Tìm nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \cos a + \cos(a + x) + \cos(a + y) = 0 \\ \sin a + \sin(a + x) + \sin(a + y) = 0 \end{cases}$$

1.28. Giải các phương trình sau trên tập số phức:

a. $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$, $\theta \in \mathbb{R}$.

b. $z^3 + (1 - 2i)z^2 + (1 - i)z - 2i = 0$, biết rằng phương trình có một nghiệm thuần ảo.

1.29. Giải các hệ phương trình với ẩn số $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$

a. $\begin{cases}(x+y)(x^3-y^3)=819\\(x-y)(x^3+y^3)=399\end{cases}$ **b.** $\begin{cases}x=y^2\\y=z^2\\z=x^2\end{cases}$

1.30. Chứng minh với $\alpha \in \mathbb{R}$

a. $\left(\frac{1+i\mathrm{tg}\alpha}{1-i\mathrm{tg}\alpha}\right)^n = \frac{1+i\mathrm{tg}n\alpha}{1-i\mathrm{tg}n\alpha}$.

b. $z^m + z^{-m} = 2\cos m\alpha$ nếu $z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha$.

1.31. Cho $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, tính tổng $S = \sum_{k=0}^{n} \cos^3 kx$.

1.32. Với $(n,x) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z})$ tính các tổng:

a. $A_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$. **b.** $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(x)$.

CHƯƠNG II. HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

Mọi vật xung quanh ta hầu như đều biến đổi theo thời gian. Chúng ta có thể nhận thấy điều đó qua sự chuyển động cơ học của các vật thể: ô tô, máy bay; sự thay đổi của các đại lượng vật lý: nhiệt độ, tốc độ, gia tốc; sự biến động kinh tế trong một xã hội: Giá cổ phiếu, lãi suất tiết kiệm,.... Tất cả các đối tượng đó được gán một tên chung là đại lượng hay hàm số, nó phụ thuộc vào đối số nào đó, chẳng hạn là thời gian. Xem xét hàm số tức là quan tâm đến giá trị, tính chất và biến thiên của nó. Việc đó đặt ra như một nhu cầu khách quan của con người và xã hội.

Những nội dung chính của chương này gồm: Các hàm số sơ cấp cơ bản (chú ý định tính và định lượng); khái niệm giới hạn của hàm số, đặc biệt các giới hạn cơ bản; đại lượng vô cùng bé, đại lượng vô cùng lớn và các ứng dụng của chúng; khái niệm về sự liên tục của hàm số.

2.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ HÀM SỐ

2.1.1. Các định nghĩa cơ bản

A. Định nghĩa hàm số

Cho X là tập con không rỗng của $\mathbb{R}$. Một ánh xạ f từ X vào $\mathbb{R}$ được gọi là hàm số của một biến số

$$\begin{aligned} f : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

X gọi là tập xác định của f, $f(X)$ gọi là tập giá trị của f. Người ta thường ký hiệu hàm số trong dạng đơn giản dưới đây $y = f(x),\ x \in X$, x gọi là đối số, y gọi là hàm số.

B. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Cho tập X nhận O làm tâm đối xứng, tức là $\forall x \in X,\ -x \in X$

Hàm số f (x) được gọi là hàm số chẵn khi và chỉ khi $f(x) = f(-x)$.

Hàm số f (x) được gọi là hàm số lẻ khi và chỉ khi $f(x) = -f(-x)$.

C. Hàm số tuần hoàn

Hàm số f (x) được gọi là tuần hoàn trên X nếu tồn tại $\tau \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho $\forall x \in X$ thì

$$\text{x} + \tau \in X \text{ và } f(\text{x} + \tau) = f(\text{x}).$$

Số T dương bé nhất trong các số τ gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn f(x).

D. Hàm số đơn điệu

Cho f (x) với $x \in X$.

1. Người ta nói rằng f (x) là hàm số tăng nếu:

$$(\forall x_1,\ x_2 \in X)\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2))$$

và f (x) tăng ngặt nếu: $(\forall x_1,\ x_2 \in X)\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$.

2. Người ta nói rằng f (x) là hàm số giảm nếu:

$$(\forall x_1,\ x_2 \in X)\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)).$$

và f (x) giảm ngặt nếu: $(\forall x_1,\ x_2 \in X)\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$.

3. Người ta nói rằng f (x) là hàm số đơn điệu nếu nó tăng hoặc giảm và f (x) đơn điệu ngặt nếu nó tăng ngặt hoặc giảm ngặt.

E. Hàm số bị chặn

1. Hàm số f (x) bị chặn trên trong X nếu tồn tại số A sao cho: $(\forall x \in X \Rightarrow\ f(x) \le A)$.

2. Hàm số f (x) bị chặn dưới trong X nếu tồn tại số B sao cho: $(\forall x \in X \Rightarrow\ f(x) \ge B)$.

3. Hàm số f (x) bị chặn trong X nếu tồn tại các số A, B sao cho

$$(\forall x \in X \Rightarrow\ B \le f(x) \le A).$$

Hệ quả: *Nếu A là số chặn trên của f (x) trong X thì* $\operatorname{Sup}_X f(x) = \operatorname{Sup}\{f(x), x \in X\} \le A$

Nếu B là số chặn dưới của f (x) trong X thì $\operatorname{Inf}_X f(x) = \operatorname{Inf}\{f(x),\ x \in X\} \ge B$

F. Hàm số hợp

Cho $f:\ X \to \mathbb{R}$ và g: $Y \to \mathbb{R}$ với $f(X) \subset Y$. Người ta gọi ánh xạ

$$\begin{aligned} g_0 f:\ X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

là hàm số hợp của hai hàm f và g và thường kí hiệu $y = g\big(f(x)\big),\ x \in X$

Định lí 2.1:

1. *Nếu* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *bị chặn trên thì* $f + g$ *cũng bị chặn trên đồng thời*

$$\operatorname{Sup}_X(f(x)+g(x)) \le \operatorname{Sup}_X f(x) + \operatorname{Sup}_X g(x)$$

2. *Nếu* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *bị chặn trên và không âm thì* $f\ g$ *bị chặn trên đồng thời*

$$\operatorname{Sup}_X(f(x).g(x)) \le \operatorname{Sup}_X f(x).\operatorname{Sup}_X g(x)$$

3. *Nếu* $f : X \to \mathbb{R}$ *bị chặn trên và* $\lambda \in \mathbb{R}_*$ *thì* λf *bị chặn trên đồng thời*

$$\operatorname{Sup}_X \lambda.f(x) = \lambda \operatorname{Sup}_X f(x)$$

4. *Để* $f : X \to \mathbb{R}$ *bị chặn dưới, điều kiện cần và đủ là -* f *bị chặn trên và khi đó*

$$\operatorname{Inf}_X f(x) = -\operatorname{Sup}_X(-f(x))$$

Chứng minh:

1. Rõ ràng $f(x)+g(x) \le \sup_X f(x) + \sup_X g(x)$ chứng tỏ $f(x)+g(x)$ bị chặn trên.

Theo hệ quả suy ra $\sup_X (f(x)+g(x)) \le \sup_X f(x) + \sup_X g(x)$

2. $(\forall x \in X \Rightarrow 0 \le f(x) \le \sup_X f(x), 0 \le g(x) \le \sup_X g(x))$

$(\forall x \in X \Rightarrow 0 \le f(x)g(x) \le \sup_X f(x) \sup_X g(x))$

Theo hệ quả suy ra. $\sup_X (f(x).g(x)) \le \sup_X f(x).\sup_X g(x)$

3. Coi λ như hàm hằng. ta áp dụng 2. sẽ có $\sup_X \lambda f(x) \le \lambda.\sup_X f(x)$

Với $\lambda = 0$. Đẳng thức cần chứng minh là hiển nhiên

Với $\lambda > 0$. ta áp dụng bất đẳng thức trên ứng với hằng số $\frac{1}{\lambda}$ và hàm số $\lambda f(x)$

$$\sup_X \left(\frac{1}{\lambda}.\lambda f(x)\right) \le \frac{1}{\lambda}\sup_X \lambda f(x) \Rightarrow \quad \sup_X \lambda f(x) \ge \lambda \sup_X f(x)$$
$$\Rightarrow \quad \sup_X \lambda f(x) = \lambda \sup_X f(x)$$

4. Giả sử $f(x)$ bị chặn dưới, ta đặt $m = \inf_X f(x) \le f(x) \Rightarrow (\forall x \in X \Rightarrow -f(x) \le -m)$.

Vậy $f(x)$ bị chặn trên và rõ ràng $\sup_X (-f(x)) \le -\inf_X f(x)$.

Mặt khác $f(x) \le \sup_X (-f(x)) \Rightarrow f(x) \ge -\sup_X (-f(x)) \Rightarrow \inf_X f(x) \ge -\sup_X (-f(x))$

Sau khi so sánh hai bất đẳng thức suy ra $\inf_X f(x) = -\sup_X (-f(x))$.

Phần đảo được chứng minh tương tự.

G. Hàm số ngược

Cho song ánh $f: X \to Y,\ X,\ Y \subset \mathbb{R}$

Ánh xạ ngược $f^{-1}: Y \to X$ được gọi là hàm số ngược của f

$$y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

Thông thường đối số được kí hiệu là x, hàm số kí hiệu là y. Vì vậy hàm ngược của $y = f(x)$ là hàm số $y = f^{-1}(x)$. Vì thế trên cùng mặt phẳng toạ độ Oxy, đồ thị của hai hàm số f và f^{-1} là đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ I và III.

Ví dụ 2.1: Cho $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn: $\forall x, y \in \mathbb{R},\ (f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) = 0$.

Chứng minh rằng ít nhất một trong hai hàm số là hằng số.

Giải:

Giả sử $a, b \in \mathbb{R}$ và $f(a) \ne f(b)$ ta sẽ chỉ ra $g(x)$ là hằng số. Trước hết có các hệ thức

$$\forall x \in \mathbb{R}: \begin{cases} (f(a)-f(x))(g(a)-g(x))=0 \\ (f(b)-f(x))(g(b)-g(x))=0 \end{cases}$$

Trừ từng vế và để ý đến g(a) = g(b) ta suy ra:

$$(f(a)-f(b))(g(a)-g(x))=0 \Rightarrow g(x)=g(a).$$

Ví dụ 2.2: Tìm hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ sao cho $xf(x)+f(1-x)=x^3+1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Giải: Giả sử tồn tại $f(x)$, ta thay x bởi 1 - x vào hệ thức đã cho sẽ nhận được

$$(1-x).f(1-x)+f(x)=2-3x+3x^2-x^3$$

Suy ra $(x^2-x+1)f(x)=(x^2-x+1)^2 \Rightarrow f(x)=x^2-x+1$

Kiểm tra ta sẽ thấy $f(x)=x^2-x+1$ thoả mãn.

Ví dụ 2.3: Cho $f(x)=x$ và $g(x)=1-x$ trong [0,1]. Kiểm tra tính ngặt của bất đẳng thức:

$$\sup_{[0,1]}(f(x)+g(x)) < \sup_{[0,1]} f(x) + \sup_{[0,1]} g(x)$$

$$\sup_{[0,1]}(f(x)g(x)) < \sup_{[0,1]} f(x) \sup_{[0,1]} g(x)$$

Giải:

$$\sup_{[0,1]} f(x) = \sup_{[0,1]} g(x) = 1;\quad \sup_{[0,1]}(f(x)+g(x)) = \sup_{[0,1]} 1 = 1;\quad \sup_{[0,1]}(f(x)g(x)) = \sup_{[0,1]}(x-x^2) = \frac{1}{4}$$

Chứng tỏ tính ngặt của các bất đẳng thức được thoả mãn (do $1<2, \frac{1}{4}<1$).

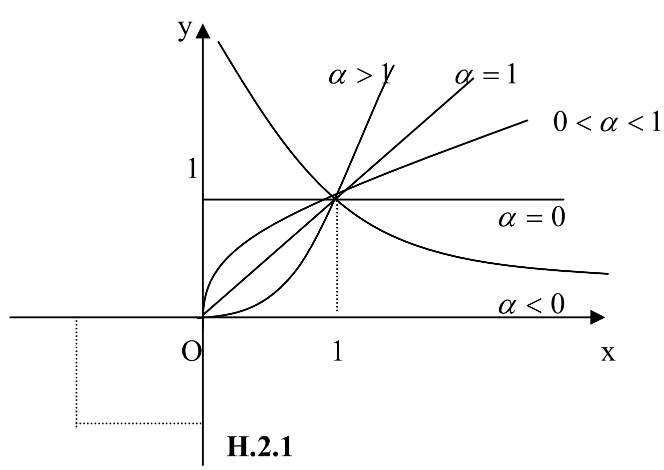
2.1.2. Các hàm số thông dụng

A. Hàm luỹ thừa

Cho $\alpha \in \mathbb{R}$. Hàm luỹ thừa với số mũ α, được kí hiệu là P_α, là ánh xạ từ $\mathbb{R}_+^*$ vào $\mathbb{R}$, xác định như sau: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ P_\alpha(x)=x^\alpha$

Nếu $\alpha>0$, người ta coi rằng $P_\alpha(0)=0$. Nếu $\alpha=0$, coi rằng $P_0(0)=1$

Đồ thị của $P_\alpha(x)$ cho bởi H.2.1



H.2.1

Chú ý: Hàm luỹ thừa có thể mở rộng khi miền xác định là $\mathbb{R}$.

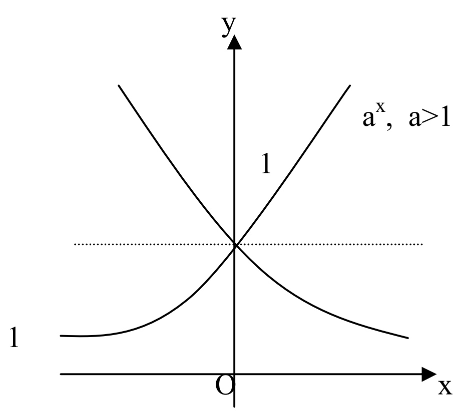
B. Hàm mũ cơ số a

Xét $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Hàm mũ cơ số a, kí hiệu là $\exp_a x$, được gọi là ánh xạ từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}_+^*$, xác định như sau: $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp_a x = a^x$. Đồ thị của $y = a^x$ cho bởi H.2.2.

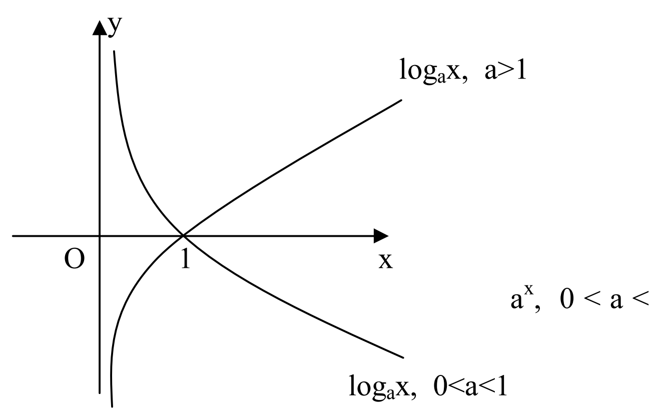
C. Hàm lôgarit cơ số a

Xét $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Hàm lôgarit cơ số a, kí hiệu là $\log_a$, được gọi là ánh xạ ngược với ánh xạ $\exp_a$. Như vậy $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$: $\quad y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$

Đồ thị của hàm số $y = \log_a x$ cho bởi hình H.2.3.



H.2.2



H.2.3

Tính chất của hàm số lôgarit

1. $\log_a 1 = 0$

2. $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad \log_a xy = \log_a x + \log_a y$

$\quad \log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$

3. $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad \log_b x = \log_b a . \log_a x$

4. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad \log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$

Chú ý: Sau này người ta thường lấy cơ số a là số e và gọi là lôgarit Nêpe hay lôgarit tự nhiên của x, kí hiệu y = lnx và suy ra $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

Người ta đã tính gần đúng $e \approx 2,718281828459045$ và $\lg e = \dfrac{1}{\ln 10} \approx 0,434296$.

D. Các hàm số lượng giác

Các hàm số lượng giác: sinx, cosx, tgx, cotgx đã được xét kỹ trong chương trình phổ thông trung học. Dưới đây chúng ta chỉ nhắc lại một số tính chất cơ bản của chúng.

Tính chất:

1. sinx xác định trên $\mathbb{R}$, là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kì T = 2π và bị chặn:

$$-1 \le \sin x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. cosx xác định trên $\mathbb{R}$, là hàm số chẵn, tuần hoàn với chu kì T = 2π và bị chặn:

$$-1 \le \cos x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. tgx xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$ và nhận giá trị trên khoảng $(-\infty, +\infty)$.

4. cotgx xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$ và nhận giá trị trên khoảng $(-\infty, +\infty)$.

E. Các hàm số lượng giác ngược

1. Hàm arcsin là ánh xạ ngược của sin: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$.

Người ta kí hiệu là arcsin: $[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. hay $y = \text{arcsinx}$ (đọc là ác sin của x).

Vậy ta có: $\forall x \in [-1,1],\ \forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\ y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$.

Chú ý:

a. $\forall x \in [-1,1], \sin(\arcsin x) = x$.

b. $f(x) = \arcsin(\sin x)$ là hàm lẻ, tuần hoàn với chu kỳ 2π và cho dưới dạng:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{khi } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \pi - x & \text{khi } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

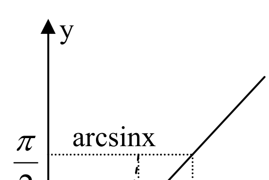
Đồ thị của y = arcsinx cho trên hình 2.4 (đường không liền nét).

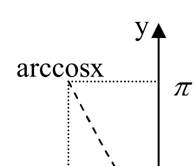
2. Hàm arccos là ánh xạ ngược của $\cos: [0,\pi] \to [-1,1]$, được kí hiệu:

$$\arccos: [-1,1] \to [0,\pi] \quad \text{hay } y = \text{arccosx (đọc là ác cô sin của x)}$$

$$\forall x \in [-1,1],\ \forall y \in [0,\pi],\ y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y.$$

Đồ thị hàm số y = arccosx cho trên hình 2.5 (đường không liền nét).





H.2.4 **H.2.5**

Chú ý:

a. $\forall x \in [-1,1], \quad \cos(\arccos x) = x$.

b. $g(x) = \arccos(\cos x)$ là hàm số chẵn tuần hoàn với chu kỳ 2π và $g(x) = x$ nếu $x \in [0, \pi]$.

c. Vì $\left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin x\right) \in [0, \pi]$ và $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = \sin(\arcsin x) = x$ nên ta suy ra

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}, \ \forall x \in [-1,1]. \qquad (2.1)$$

3. Hàm actang là ánh xạ ngược của $\mathrm{tg} : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, được kí hiệu

$$\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ hay } y = \mathrm{arctgx} \text{ (đọc là ác tang của x).}$$

Vậy ta có $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), \quad y = \mathrm{arctg}x \Leftrightarrow x = \mathrm{tg}y$.

Đồ thị của y = arctgx cho trên hình 2.6 (đường không liền nét)

Chú ý:

a. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x) = x$.

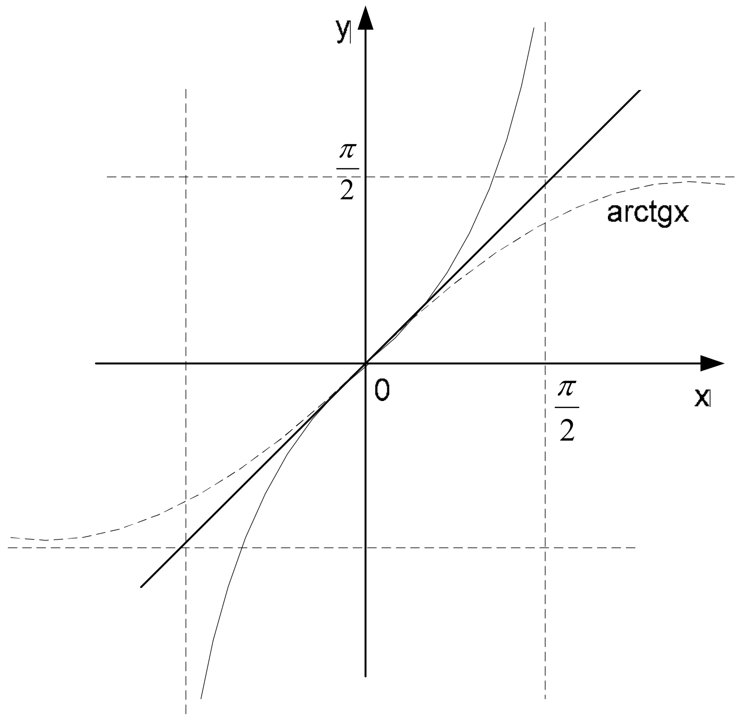
b. $h(x) = \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x)$ xác định trên $\mathbb{R} \backslash \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right\}$ là hàm số lẻ tuần hoàn với chu kỳ π và $h(x) = x, \ x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. Hàm accôtang là ánh xạ ngược của $\text{cotg}:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ được kí hiệu:

$$\text{arccotg}:\ \mathbb{R}\to(0,\pi) \text{ hay } y=\text{arccotgx}.$$

Vậy ta có $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in(0,\pi),\ y=\text{arccotg}x \Leftrightarrow x=\text{cotg}y$.

Đồ thị hàm y = arccotgx cho trên hình 2.7 (đường không liền nét).



H.2.6

Chú ý:

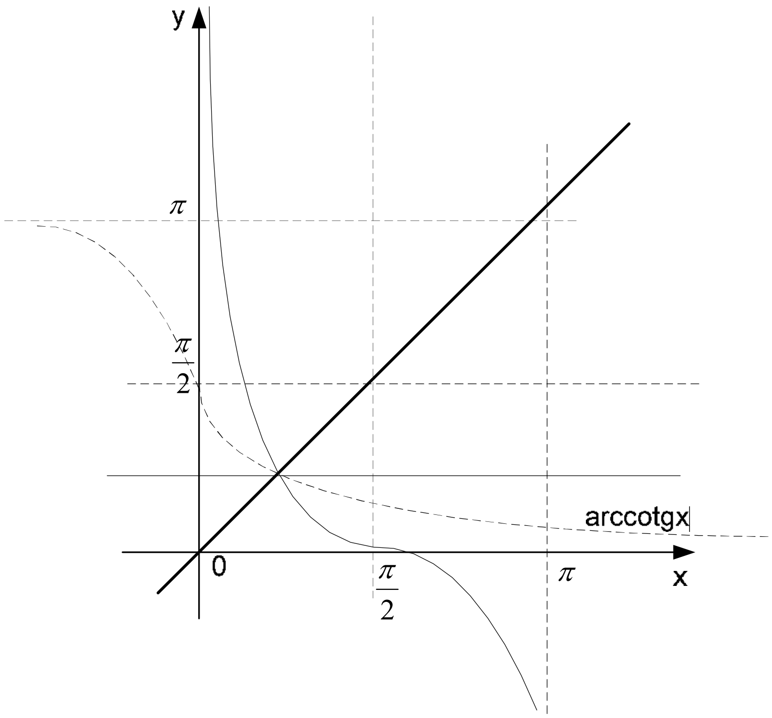
a. $\forall x\in\mathbb{R},\ \text{cotg}(\text{arccotg}x)=x$

b. $k(x)=\text{arccotg}(\text{cotg}x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$, tuần hoàn với chu kỳ π và $k(x)=x,\ x\in(0,\pi)$

c. Vì $\left(\frac{\pi}{2}-\text{arccotg}(\text{cotg}x)\right)\in(0,\pi)$ và $\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-\text{arctg}x\right)=\text{tg}(\text{arctg}x)$ nên ta nhận được công thức sau đây:

$$\text{arctg}x+\text{arccotg}x=\frac{\pi}{2},\ \forall x \qquad (2.2)$$

Người ta gọi hàm số luỹ thừa, hàm số mũ, hàm số lôgarit, các hàm số lượng giác và các hàm số lượng giác ngược là các hàm số sơ cấp cơ bản.



H. 2.7

F. Các hàm hypebôlic

1. Hàm sinhypebôlic là ánh xạ $\text{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định như sau:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \text{sh}x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad (2.3)$$

2. Hàm côsinhypebôlic là ánh xạ $\text{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định như sau:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \text{ch}x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad (2.4)$$

3. Hàm tanghypebôlic là ánh xạ $\text{th} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định như sau:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \text{th}x = \frac{\text{sh}x}{\text{ch}x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \qquad (2.5)$$

4. Hàm cotanghypebôlic là ánh xạ $\coth : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, xác định như sau:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \coth x = \frac{\text{ch}x}{\text{sh}x} = \frac{1}{\text{th}x} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \qquad (2.6)$$

Dựa vào các định nghĩa trên, ta có thể chứng minh được các tính chất sau đây của các hàm hypebôlic

Tính chất:

1. $\text{sh}x, \text{th}x, \coth x$ *là các hàm số lẻ còn* $\text{ch}x$ *là chẵn và* $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}x > 0$

2. $\forall x, a, b, p, q \in \mathbb{R}$, *các hàm hypebôlic thoả mãn các công thức sau đây:*

a. $\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1\Rightarrow$ Hyperbol $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ *có phương trình dưới dạng tham số sẽ là:*

$$\begin{cases} x=a\,\mathrm{ch}t \\ y=b\,\mathrm{sh}t,\quad t\in\mathbb{R}\end{cases} \tag{2.7}$$

b. $\mathrm{ch}(a+b)=\mathrm{ch}a.\mathrm{ch}b+\mathrm{sh}a.\mathrm{sh}b$; $\quad\mathrm{sh}(a+b)=\mathrm{sh}a.\mathrm{ch}b+\mathrm{sh}b.\mathrm{ch}a$;

$\mathrm{ch}(a-b)=\mathrm{ch}a.\mathrm{ch}b-\mathrm{sh}a.\mathrm{sh}b$; $\quad\mathrm{sh}(a-b)=\mathrm{sh}a.\mathrm{ch}b-\mathrm{sh}b.\mathrm{ch}a$.

$$\mathrm{th}(a+b)=\frac{\mathrm{th}a+\mathrm{th}b}{1+\mathrm{th}a.\mathrm{th}b}\ ;\qquad \mathrm{th}(a-b)=\frac{\mathrm{th}a-\mathrm{th}b}{1-\mathrm{th}a.\mathrm{th}b} \tag{2.8}$$

c. $\mathrm{ch}2a=\mathrm{ch}^2a+\mathrm{sh}^2a=2\mathrm{ch}^2a-1=1+2\mathrm{sh}^2a$.

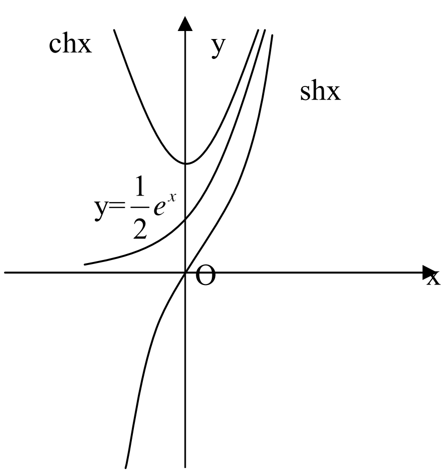
$\mathrm{sh}2a=2\mathrm{sh}a.\mathrm{ch}a$.

$$\mathrm{th}2a=\frac{2\mathrm{th}a}{1+\mathrm{th}^2a}\ ,\quad \mathrm{ch}^2a=\frac{1}{2}(\mathrm{ch}2a+1);\quad \mathrm{sh}^2a=\frac{1}{2}(\mathrm{ch}2a-1). \tag{2.9}$$

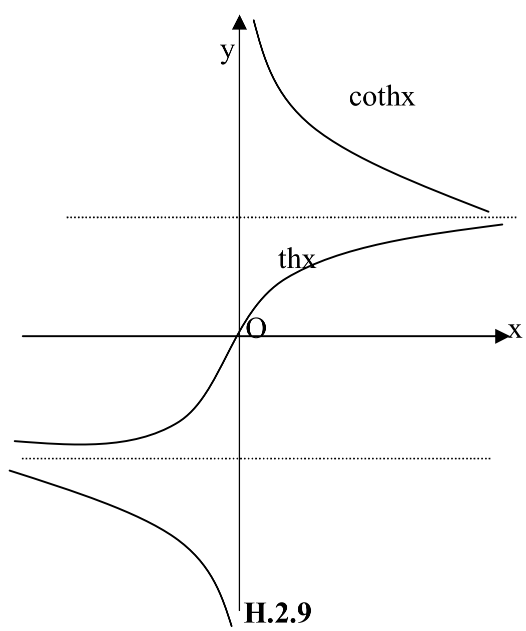
$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}p+\mathrm{ch}q&=2\mathrm{ch}\frac{p+q}{2}\mathrm{ch}\frac{p-q}{2}\\
\mathrm{ch}p-\mathrm{ch}q&=2\mathrm{sh}\frac{p+q}{2}\mathrm{sh}\frac{p-q}{2}\\
\mathrm{sh}p+\mathrm{sh}q&=2\mathrm{sh}\frac{p+q}{2}\mathrm{ch}\frac{p-q}{2}\qquad\qquad (2.10)\\
\mathrm{sh}p-\mathrm{sh}q&=2\mathrm{ch}\frac{p+q}{2}\mathrm{sh}\frac{p-q}{2}
\end{aligned}$$

Các công thức (2.7) đến (2.10) tương tự các công thức cơ bản của lượng giác. Vì lẽ đó các hàm số trên có tên gọi là sinhypebôlic, côsinhypebôlic, …

Đồ thị của các hàm shx, chx cho trên hình 2.8, còn đồ thị các hàm thx, cothx cho trên H.2.9



H.2.8



H.2.9

G. Các hàm hypebôlic ngược

1. Hàm Acsinhypebôlic là ánh xạ ngược của $\text{sh}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, được kí hiệu:

$\text{Argsh}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hay là $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = \text{Argsh}x \Leftrightarrow x = \text{sh}y$

2. Hàm Accôsinhypebôlic là ánh xạ ngược của $\text{ch}: \mathbb{R} \to [1, +\infty]$, được kí hiệu:

$\text{Argch}: [1, +\infty) \to \mathbb{R}_+$, hay là $\forall x \in [1, +\infty),\ \forall y \in \mathbb{R}_+,\ y = \text{Argch}x \Leftrightarrow x = \text{ch}y$

3. Hàm Actanghypebôlic là ánh xạ ngược của $\text{th}: \mathbb{R} \to (-1, 1)$, được kí hiệu:

$\text{Argth}: (-1, 1) \to \mathbb{R}$, hay là $\forall x \in (-1, 1),\ \forall y \in \mathbb{R},\ y = \text{Argth}x \Leftrightarrow x = \text{th}y$

4. Hàm Accôtanghypebôlic là ánh xạ ngược của $\text{coth}: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \backslash [-1, 1]$, được kí hiệu:

$\text{Argcoth}: \mathbb{R} \backslash [-1, 1] \to \mathbb{R}^*$, hay là

$\forall x \in \mathbb{R} \backslash [-1, 1],\ \forall y \in \mathbb{R}^*,\ y = \text{Argcoth}x \Leftrightarrow x = \text{coth}y$

H. Biểu thức logarit của hàm hypebôlic ngược

1. Trước hết ta thấy ngay rằng Argshx là hàm số lẻ và vì:

$$y = \text{Argsh}x \Leftrightarrow x = \text{sh}y \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$$

suy ra $e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0 \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ và do $e^y > 0$ nên $e^y = x + \sqrt{1 + x^2}$

Vậy $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{Argsh}x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ (2.11)

2. $\forall x \in [1, +\infty), \forall y \in \mathbb{R}_+, y = \text{Argch}x \Leftrightarrow x = \text{ch}y$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

Vì $e^y \ge 1$ nên lấy $e^y = x + \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow \forall x \in [1, +\infty),\ \text{Argch}x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

3. (2.12)

$\forall x \in (-1, 1), \forall y \in \mathbb{R}, y = \text{Argth}x \Leftrightarrow x = \text{th}y$

$$\Leftrightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \Leftrightarrow x(e^{2y} + 1) = e^{2y} - 1 \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}$$

Vậy $\forall x \in (-1, 1),\ \text{Argthx} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1 + x}{1 - x}$ (2.13)

4. $\forall x \in \mathbb{R} \backslash [-1, 1],\ \text{Argcoth}x = \text{Argth}\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1 + x}{x - 1}$ (2.14)

I. Đa thức, hàm hữu tỉ.

1. Ánh xạ P: $X \to \mathbb{R}$ được gọi là đa thức khi và chỉ khi tồn tại $n \in \mathbb{N}$ và

$(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ sao cho $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,\ \forall x \in X$ (2.15)

Nếu $a_n \neq 0$ thì người ta nói rằng đa thức có bậc là n và viết: $\deg P(x) = n$

2. Ánh xạ $f:\ X \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm hữu tỉ khi và chỉ khi tồn tại hai đa thức

P, Q: $X \to \mathbb{R}$ sao cho $\forall x \in X, Q(x) \neq 0, \quad f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

Gọi $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ là hàm hữu tỉ thực sự khi và chỉ khi: degP(x) < degQ(x)

3. Hàm hữu tỉ tối giản là các phân thức có dạng:

$$\frac{A}{(x-a)^k} \text{ hoặc } \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k} \qquad (2.16)$$

trong đó $k \in \mathbb{N}^*$, a, p, q, A, B, C là các số thực và $p^2 - 4q < 0$

Dưới đây ta đưa ra các định lí đã được chứng minh trong đại số

Định lí 2.1: *Mọi đa thức bậc n với các hệ số thực đều có thể phân tích ra thừa số dạng:*

$$P(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}\ldots(x-\alpha_l)^{k_l}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ldots(x^2+p_mx+q_m)^{\beta_m} \qquad (2.17)$$

trong đó α_i $(i=\overline{1,\ l})$ *là các nghiệm thực bội* k_i *của đa thức còn* $p_j, q_j, \beta_j \in \mathbb{R}$

với $j = 1,2,\ldots,m$ *và* $\sum_{i=1}^{l} k_i + 2\sum_{j=1}^{m} \beta_j = n$, $\quad p_j^{\ 2} - 4q_j < 0$; $j = \overline{1,\ m}$

Định lí 2.2: *Mọi hàm hữu tỉ thực sự đều có thể phân tích thành tổng hữu hạn các hàm hữu tỉ tối giản.*

Ví dụ 2.4: Cho $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, hãy giải phương trình $\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x = \dfrac{3}{4}$

Giải:

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\ln x\left(\frac{1}{\ln a} - \frac{1}{2\ln a} + \frac{1}{4\ln a}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \ln a \Leftrightarrow x = a$$

Ví dụ 2.5: Cho $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ hãy rút gọn biểu thức $P = \prod_{k=0}^{n}\left(2\mathrm{ch}2^k x - 1\right)$

Giải:

$$\mathrm{ch}2t = 2\mathrm{ch}^2 t - 1 \quad \forall t \Rightarrow 4\mathrm{ch}^2 t - 1 = 2\mathrm{ch}2t + 1$$

$$\Rightarrow 2\mathrm{ch}t - 1 = \frac{2\mathrm{ch}2t+1}{2\mathrm{ch}t+1}$$

$$P = \prod_{k=0}^{n}\left(2\mathrm{ch}2^k x - 1\right) = \prod_{k=o}^{n}\frac{2\mathrm{ch}2^{k+1}x+1}{2\mathrm{ch}2^k x+1} = \frac{2\mathrm{ch}2^{n+1}x+1}{2\mathrm{ch}x+1}$$

Ví dụ 2.6: Cho $x,\ y \in (-1,1)$ hãy biến đổi biểu thức $\mathrm{Argth}x + \mathrm{Argth}y$

Áp dụng hãy biến đổi hàm số $f(x) = \text{Argth}\dfrac{1+3\text{th}x}{3+\text{th}x}$

Giải:

$$\text{Argth}x + \text{Argth}y = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln\frac{y+1}{y-1} = \frac{1}{2}\ln\frac{(x+1)\ (y+1)}{(x-1)\ (y-1)}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+xy+x+y}{1+xy-x-y} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\dfrac{x+y}{1+xy}}{1-\dfrac{x+y}{1+xy}} = \text{Argth}\frac{x+y}{1+xy}$$

$$f(x) = \text{Argth}\frac{\dfrac{1}{3}+\text{th}x}{1+\dfrac{1}{3}\text{th}x} = \text{Argth}\frac{1}{3} + \text{Argth}(\text{th}x) = \frac{1}{2}\ln 2x$$

Ví dụ 2.7: Giải phương trình: arcsin(tgx) = x

Giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ , \quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \text{tg}x \in [-1,1] \Rightarrow x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right] \end{cases}$$

$$\arcsin(\text{tgx}) = \arcsin(\sin \text{x})$$

$$\Rightarrow \quad \text{tgx} = \sin \text{x}$$

$$\Rightarrow \sin \text{x}\left(1 - \frac{1}{\cos \text{x}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin \text{x} = 0 \\ \cos \text{x} = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \text{x} = \text{k}\pi\ , \qquad \text{k} \in \mathbb{Z}.$$

Vì $k\pi \notin \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ khi $k \neq 0$ nên phương trình có nghiêm duy nhất $x = 0$

2.1.3. Hàm số sơ cấp

Định nghĩa: Hàm số sơ cấp là những hàm số được tạo thành bởi một số hữu hạn các phép tính cộng, trừ, nhân, chia và các phép lấy hàm hợp đối với các hàm số sơ cấp cơ bản và các hằng số.

2.2.GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

2.2.1. Khái niệm về giới hạn

A. Định nghĩa giới hạn

Ta gọi $\delta -$lân cận của điểm $\text{a} \in \mathbb{R}$ là khoảng $\Omega_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta)$

Gọi A- lân cận của $+\infty$ là khoảng $\Omega_A(+\infty) = (A,+\infty)$ với A > 0 và khá lớn.

Gọi B- lân cận của $-\infty$ là khoảng $\Omega_B(-\infty) = (-\infty,-B)$ với B > 0 và khá lớn.

Cho f xác định ở lân cận điểm a (có thể không xác định tại a)

1. Ta nói rằng f có giới hạn là l khi x dần đến a nếu

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \Omega_\eta(a) \subset X)\ (\forall x \in \Omega_\eta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

2. Ta nói rằng f có giới hạn là $+\infty$ khi x dần đến a nếu

$$(\forall A > 0)\ (\exists \Omega_\eta(a) \subset X)\ (\forall x \in \Omega_\eta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) > A).$$

3. Ta nói rằng f có giới hạn là $-\infty$ khi x dần đến a nếu $-f$ có giới hạn là $+\infty$ khi x dần đến a

4. Ta nói rằng f có giới hạn là l khi x dần đến $+\infty$ nếu

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \Omega_A(+\infty) \subset X)\ (\forall x \in \Omega_A(+\infty) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

5. Ta nói rằng f có giới hạn là l khi x dần đến $-\infty$ nếu

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \Omega_B(-\infty) \subset X)\ (\forall x \in \Omega_B(-\infty) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

6. Ta nói rằng f có giới hạn là $+\infty$ khi x dần đến $+\infty$ nếu

$$(\forall A > 0)\ (\exists \Omega_M(+\infty) \subset X)\ (\forall x \in \Omega_M(+\infty) \Rightarrow f(x) > A).$$

7. Nói rằng f có giới hạn là $-\infty$ khi x dần đến $+\infty$ nếu và chỉ nếu $-f$ có giới hạn là $+\infty$ khi x dần đến $+\infty$

8. Ta nói rằng f có giới hạn là $+\infty$ khi x dần đến $-\infty$ nếu

$$(\forall A > 0)\ (\exists \Omega_M(-\infty) \subset X)\ (\forall x \in \Omega_M(-\infty) \Rightarrow f(x) > A).$$

9. Ta nói rằng f có giới hạn là $-\infty$ khi x dần đến $-\infty$ khi và chỉ khi $-f$ có giới hạn là $+\infty$ khi x dần đến $-\infty$.

Khi $f(x)$ có giới hạn là l ta nói rằng $f(x)$ có giới hạn hữu.han. Ngược lại $f(x)$ có giới hạn là $\pm\infty$, ta nói rằng nó có giới hạn vô hạn.

B. Định nghĩa giới hạn một phía.

1. Ta nói rằng f có giới hạn trái khi x dần đến a là l_1 nếu:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta > 0)\ (\exists \Omega_\eta(a) \subset X)\ (\forall x:\ 0 < a - x < \eta \Rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon).$$

2. Ta nói rằng f có giới hạn phải khi x dần đến a là l_2 nếu

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta > 0\ )\ (\forall x:\quad 0 < x - a < \eta \Rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon).$$

Nếu f có giới hạn là l khi x dần đến a được kí hiệu là:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad \text{hoặc} \quad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l\ .$$

Tương tự ta có các kí hiệu:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty,\ -\infty; \qquad \lim_{x \to +\infty} f\left(x\right) = l,\ +\infty,\ -\infty \text{ hoặc } \lim_{x \to -\infty} f\left(x\right) = l,\ +\infty,\ -\infty$$

Người ta kí hiệu $f(x)$ có giới hạn trái khi x dần đến a là l_1 (l_1 được gọi là giá trị bên trái của hàm số tạ a) là $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f\left(a^-\right) = l_1$

Tương tự $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f\left(a^+\right) = l_2$.

Hệ quả: *Điều kiện cần và đủ để* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ *là* $f(a^-) = f(a^+) = l$. (2.17)

2.2.2. Tính chất của hàm có giới hạn.

A. Sự liên hệ với dãy số

Định lí 2.3*: Để* $f(x)$ *có giới hạn là* l *khi x dần đến a điều kiện cần và đủ là mọi dãy* $\{u_n\}$ *trong* X *hội tụ về a thì* $\lim\limits_{n \to \infty} f(u_n) = l$

Chứng minh:

Cho $f(x) \underset{x \to a}{\to} l$ và $u_n \to a$. Khi đó

$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta > 0)\ (\forall x:\ 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

Vì $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = a \Rightarrow \exists n_0(\eta),\ \forall n > n_0 \Rightarrow |u_n - a| < \eta$

Như vậy $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0)\ (\forall n > n_0 \Rightarrow |f(u_n) - l| < \varepsilon)$ nghĩa là $\lim\limits_{n \to \infty} f(u_n) = l$.

Ngược lại, cho $\{u_n\} \to a$ mà $\lim\limits_{n \to \infty} f(u_n) = l$ sẽ có $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

Nếu không, tức là $(\exists \varepsilon > 0)\ (\forall \eta > 0)\ (\exists x)\ (|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| \geq \varepsilon)$ nghĩa là $\forall n \in \mathbb{N}^*$ lấy $\eta = \frac{1}{n}$, $\exists u_n$ để $|u_n - a| < \frac{1}{n}$ và $|f(u_n) - l| \geq \varepsilon$.

Rõ ràng $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = a$ nhưng $\lim\limits_{n \to \infty} f(u_n) \neq l$ vô lý. Chứng tỏ phải tồn tại $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

B. Tính duy nhất của giới hạn

Định lí 2.4: *Nếu* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ *thì* l *là duy nhất.*

Chứng minh: Định lí này là hệ quả của định lí về tính duy nhất của giới hạn của dãy số và định lí vừa phát biểu ở trên.

C. Tính bị chặn

Định lí 2.5: *Nếu* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ *thì* $f(x)$ *bị chặn trong một lân cận đủ bé của a.*

Chứng minh:

Lấy $\varepsilon = 1$, $(\exists \eta > 0)\ (\forall x \in \Omega_\eta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow |f(x) - l| < 1)$.

Suy ra $|f(x)| = |f(x) - l + l| \leq |f(x) - l| + |l| \leq 1 + |l|$

Chú ý:

Trường hợp $a = +\infty$, $a = -\infty$ cũng chứng minh tương tự.

Hệ quả: *Hàm $f(x)$ không bị chặn trong lân cận của a thì không có giới hạn hữu hạn khi x dần đến a.*

Chẳng hạn $f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ không có giới hạn hữu hạn tại 0.

D. Tính chất thứ tự của giới hạn và nguyên lí kẹp.

Định lí 2.6: *Giả sử* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$*, khi đó:*

1. *Nếu* $c < l$ *thì trong lân cận đủ bé của* a : $c < f(x)$.

2. *Nếu* $l < d$ *thì trong lân cận đủ bé của.* a : $f(x) < d$

3. *Nếu* $c < l < d$ *thì trong lân cận đủ bé của.* a : $c < f(x) < d$

Chứng minh:

1. Lấy $\varepsilon = l - c > 0$, $(\exists\eta_1)\ (\forall x \in \Omega_{\eta_1}(a)\setminus\{a\} \Rightarrow |f(x)-l| < l - c \Rightarrow c < f(x))$

2. Lấy $\varepsilon = d - l$, $(\exists\eta_2)\ (\forall x \in \Omega_{\eta_2}(a)\setminus\{a\} \Rightarrow |f(x)-l| < d - l \Rightarrow f(x) < d)$

3. $(\exists\eta = \mathrm{Min}(\eta_1,\eta_2))\ (\forall x \in \Omega_\eta(a)\setminus\{a\} \Rightarrow c < f(x) < d)$

Chú ý: Định lí trên không còn đúng khi thay các bất đẳng thức ngặt bằng các bất đẳng thức không ngặt.

Định lí 2.7*: Giả sử* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$*. Khi đó*

1. *Nếu* $c \le f(x)$ *trong lân cận của a thì* $c \le l$

2. *Nếu* $f(x) \le d$ *trong lân cận của a thì* $l \le d$

3. *Nếu* $c \le f(x) \le d$ *trong lân cận của a thì* $c \le l \le d$.

Nhờ vào lập luận phản chứng, chúng ta thấy định lí trên thực chất là hệ quả của định lí 2.6.

Định lí 2.8: **(**Nguyên lí kẹp)

Cho ba hàm số f, g, h *thoả mãn các điều kiện:*

1. $f(x) \le g(x) \le h(x)$ *trên X;*

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$*. Khi đó* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$.

Chứng minh: $(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists\eta_1,\ \eta_2)\ (\forall x:\ 0 < |x-a| < \eta_1 \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon)$

$$0 < |x-a| < \eta_2 \Rightarrow |h(x)-l| < \varepsilon$$

Lấy $\eta = \mathrm{Min}(\eta_1,\eta_2)$ thì $\left(\forall x \in X:\ 0 < |x-a| < \eta \Rightarrow \begin{cases} |f(x)-l| < \varepsilon \\ |h(x)-l| < \varepsilon \end{cases}\right)$

$\Rightarrow -\varepsilon < f(x) - l \le g(x) - l \le h(x) - l < \varepsilon$, chứng tỏ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$.

Chú ý: Định lí cũng được chứng minh tương tự đối với các trường hợp $a = +\infty,\ a = -\infty$.

Định lí 2.9*: Nếu trong lân cận của a có* $f(x) \le g(x)$ *và* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ *thì* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.

Chứng minh:

Từ giả thiết, ta có: $(\forall A > 0)\ (\exists \eta_1)\ (\forall x:\ 0 < |x-a| < \eta_1 \Rightarrow f(x) > A)$

Mặt khác $(\exists \eta_2)\ (\forall x:\ 0 < |x-a| < \eta_2 \Rightarrow f(x) \le g(x))$

Lấy $\eta = \mathrm{Min}(\eta_1, \eta_2)$, $(\forall x:\ 0 < |x-a| < \eta \Rightarrow g(x) > A)$ chứng tỏ $g(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$.

Chú ý:

a. Định lí cũng được chứng minh tương tự đối với các trường hợp $a = +\infty,\ a = -\infty$

b. Định lí cũng được phát biểu tương tự khi $g(x) \underset{x\to a}{\to} -\infty$.

E. Các phép tính đại số của hàm số có giới hạn

Định lí 2.10:(Trường hợp giới hạn là hữu hạn):

1. $f(x) \underset{x\to a}{\to} l \Rightarrow |f(x)| \underset{x\to a}{\to} |l|$

2. $f(x) \underset{x\to a}{\to} 0 \Leftrightarrow |f(x)| \underset{x\to a}{\to} 0$

3. $f(x) \underset{x\to a}{\to} l_1$ *và* $g(x) \underset{x\to a}{\to} l_2 \Rightarrow f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\to} l_1 + l_2$

4. $f(x) \underset{x\to a}{\to} l \Rightarrow \lambda.f(x) \underset{x\to a}{\to} \lambda l, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

5. $f(x) \underset{x\to a}{\to} 0$ ***và*** $g(x)$ *bị chặn trong lân cận của* $a \Rightarrow f(x)g(x) \underset{x\to a}{\to} 0$

6. $f(x) \underset{x\to a}{\to} l_1$ ***và*** $g(x) \underset{x\to a}{\to} l_2 \Rightarrow f(x)g(x) \underset{x\to a}{\to} l_1 l_2$

7. $f(x) \underset{x\to a}{\to} l_1$ *và* $g(x) \underset{x\to a}{\to} l_2 \ne 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} \dfrac{l_1}{l_2}$

Chứng minh:

1. Từ giả thiết ta có : $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta > 0)\ (\forall x:\ 0 < |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

Vì $\big||f(x)| - |l|\big| \le |f(x) - l| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)| \underset{x\to a}{\to} |l|$.

2. Mệnh đề đúng là hiển nhiên vì $\big||f(x)| - 0\big| = |f(x)| = |f(x) - 0|$.

3. Từ giả thiết ta có : $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta_1 > 0)\ (\forall x:\ 0 < |x-a| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2})$

$$(\exists \eta_2 > 0)\ (\forall x:\ 0 < |x-a| < \eta_2 \Rightarrow |g(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Gọi $\eta = Min(\eta_1, \eta_2)$, $\forall x:\ 0 < |x-a| < \eta$ sẽ có:

$$|f(x) + g(x) - (l_1 + l_2)| \le |f(x) - l_1| + |g(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Chứng tỏ $f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\to} l_1 + l_2$.

4. Theo giả thiết: $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta > 0)\ (\forall x:\ 0 < |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \dfrac{\varepsilon}{1+|\lambda|})$ với $\lambda \in \mathbb{R}$

Suy ra $(\forall x:\ 0 < |x-a| < \eta \Rightarrow |\lambda f(x) - \lambda l| \le \dfrac{|\lambda|\varepsilon}{1+|\lambda|} < \varepsilon)$. Chứng tỏ $\lambda f(x) \underset{x\to a}{\to} \lambda l$.

5. Theo giả thiết: $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta_1)\ (\forall x:\ 0 < |x-a| < \eta_1 \Rightarrow |f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{1+M})$

Vì hàm số $g(x)$ bị chặn bởi số M trong lân cận $\Omega_{\eta_2}(a)$, do đó

$(\forall x)\ (\exists M)\ (\exists \eta_2:\ 0 < |x\text{-}a| < \eta_2 \Rightarrow |g(x)| \le M)$

Đặt $\eta = Min(\eta_1, \eta_2)$ thì

$(\forall x:\ 0 < |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| < \dfrac{M\varepsilon}{1+M} < \varepsilon) \Rightarrow f(x)g(x) \underset{x\to a}{\to} 0$.

6. Đặt $h(x) = f(x) - l_1 \Rightarrow h(x) \underset{x\to a}{\to} 0 \Rightarrow f(x)g(x) = l_1 g(x) + h(x)g(x)$

Vì $g(x) \underset{x\to a}{\to} l_2$ nên bị chặn trong lân cận của a.

Theo 4. thì $l_1 g(x) \underset{\to}{\to} l_1 l_2$, theo 5. thì $h(x)g(x) \to 0$. Vậy $f(x)g(x) \underset{x\to a}{\to} l_1 l_2$

7. Trước hết ta chỉ ra $\dfrac{1}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} \dfrac{1}{l_2}$

Vì $g(x) \underset{x\to a}{\to} l_2 \ne 0 \Rightarrow |g(x)| \underset{x\to a}{\to} |l_2| > 0$. Theo định lí 2.6 về tính thứ tự của giới hạn

thì $(\exists \eta_1 > 0)\ (\forall x:\ 0 < |x-a| < \eta_1 \Rightarrow |g(x)| > \dfrac{|l_2|}{2})$

$(\forall x:\ 0 < |x-a| < \eta_1 \Rightarrow 0 < \left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{l_2}\right| = \dfrac{|g(x) - l_2|}{|g(x)|.|l_2|} \le \dfrac{2|g(x) - l_2|}{|l_2|^2})$

Vì $|g(x) - l_2| \underset{x\to a}{\to} 0$. Vậy $\dfrac{1}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} \dfrac{1}{l_2}$. Áp dụng 6. với $\dfrac{f}{g} = f.\dfrac{1}{g}$.

Định lí 2.11: (Trường hợp giới hạn là vô hạn):

1. *Nếu* $f(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$ *và* $g(x) \ge m, m \in \mathbb{R}$ *trong lân cận của a thì* $f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$.

2. *Nếu* $f(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$ *và* $g(x) \ge m > 0$ *trong lân cận của a thì* $f(x).g(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$.

Chứng minh:

1. Từ giả thiết ta có: $(\forall A > 0)\ (\exists \eta)\ (\forall x:\ 0 < |x-a| < \eta \Rightarrow f(x) > A - m)$

$\Rightarrow f(x) + g(x) > A$. Chứng tỏ $f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$.

2. Theo giả thiết ta có: $(\forall A > 0)\ (\exists \eta)\ (\forall x:\ 0 < |x-a| < \eta \Rightarrow f(x) > \dfrac{A}{m})$

$\Rightarrow f(x).g(x) > \frac{A}{m}.m = A$. Chứng tỏ $f(x).g(x) \underset{x \to a}{\to} +\infty$.

Chú ý:

a. Định lí trên cũng được chứng minh tương tự cho các trường hợp $a = +\infty, a = -\infty$.

b. Định lí 2.11 có thể được phát biểu tương tự khi $f(x) \underset{x \to a}{\to} -\infty$.

F. Giới hạn của hàm đơn điệu

Định lí 2.12: *Cho* $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $a,b \in \mathbb{R}$ *hoặc* $a,b \in \overline{R}$ *và là hàm tăng.*

1. Nếu $f(x)$ bị chặn trên bởi M thì $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \operatorname{Sup}\limits_{(a,b)} f(x) \le M$.

2. Nếu $f(x)$ không bị chặn trên thì $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$.

Chứng minh:

1. Ta gọi $l = \underset{(a,b)}{Sup} f(x) \Rightarrow \ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \xi \in (a,b) \Rightarrow \ l - \varepsilon < f(\xi) \le l)$

Do $f(x)$ là hàm số tăng nên:

$(\forall x \in (a,b):\ \xi \le x \Rightarrow f(\xi) \le f(x)) \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) \le l \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

Suy ra $|f(x) - l| < \varepsilon$

Giả sử $b \in \mathbb{R}$. Đặt $\eta > b - \xi > 0,\ (\forall x:\ 0 < b - x < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

Chứng tỏ $f(x) \underset{x \to a}{\to} l$

Giả sử $b = +\infty$. Lấy $A > \xi,\ (\forall x > A > \xi \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$. Chứng tỏ $f(x) \underset{x \to \infty}{\to} l$.

2. Theo giả thiết ta có: $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \xi \in (a,b) \Rightarrow f(\xi) > A$.

Vậy $\forall x \in (a,b)$ sao cho $x \ge \xi \Rightarrow f(x) \ge f(\xi) > A$. Chứng tỏ $f(x) \underset{x \to b}{\to} +\infty$

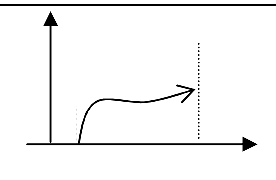
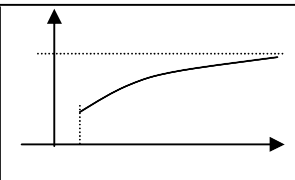
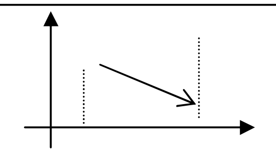
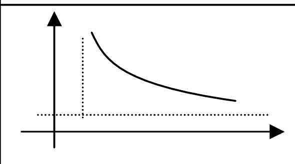
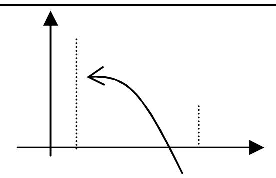
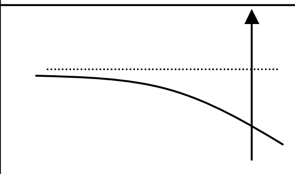
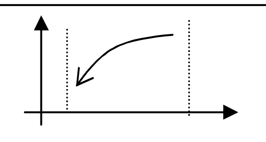
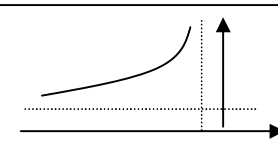
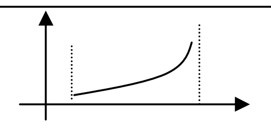
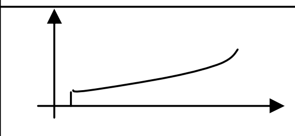
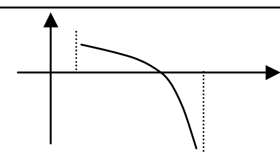
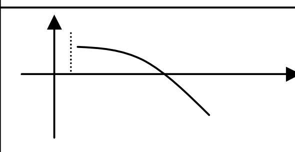
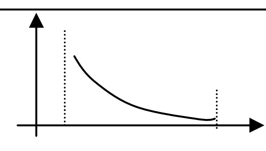
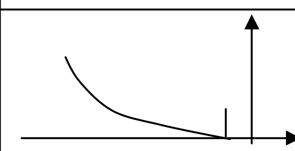
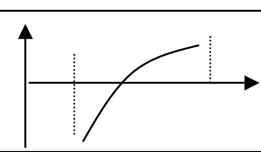
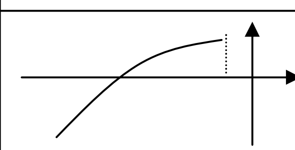
Với $b = +\infty$, ta cũng xét tương tự như trên .

Chú ý:

a. Nếu b hữu hạn, định lí trên nói về giới hạn trái khi x dần đến b.

b. Từ định lí suy ra: mọi hàm tăng trên (a,b) luôn có giới hạn hữu hạn hoặc vô hạn khi x dần đến b .

c. Định lí 2.12 có thể suy diễn cho trường hợp $f(x)$ giảm trên (a,b). Kết quả trong các trường hợp được mô tả trên hình 2.10.

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$	Kết luận	Đồ thị	
Tăng và bị chặn trên	$f(x) \xrightarrow[x\to b^-]{} \sup\limits_{(a,b)} f(x)$		
Giảm và bị chặn dưới	$f(x) \xrightarrow[x\to b^-]{} \inf\limits_{(a,b)} f(x)$		
Giảm và bị chặn trên	$f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} \sup\limits_{(a,b)} f(x)$		
Tăng và bị chặn dưới	$f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} \mathrm{Inf}f(x)$		
Tăng và không bị chặn trên	$f(x) \xrightarrow[x\to b^-]{} +\infty$		
Giảm và không bị chặn dưới	$f(x) \xrightarrow[x\to b^-]{} -\infty$		
Giảm và không bị chặn trên	$f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} +\infty$		
Tăng và không bị chặn dưới	$f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} -\infty$		

H.2.10

Định lí 2.13: *Nếu $f(x)$ xác định tại a và tăng ở lân cận của a thì luôn tồn tại một giới hạn trái và một giới hạn phải hữu hạn khi x dần đến a và:*

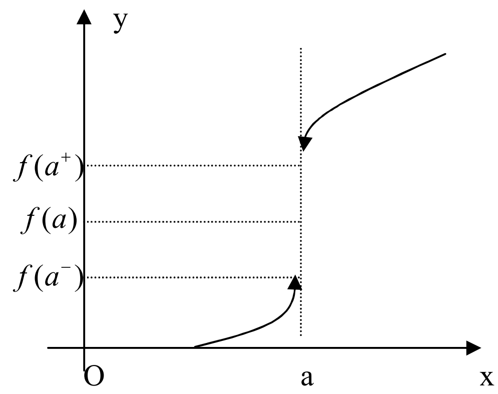
$$\lim_{x\to a^-} f(x) \le f(a) \le \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Chứng minh:

Rõ ràng: $f(x)$ tăng và bị chặn trên bởi $f(a)$ ở lân cận bên trái của a.

$f(x)$ tăng và bị chặn dưới bởi $f(a)$ ở lân cận bên phải của a.

Theo định lí 2.12. chúng ta nhận được kết quả cần chứng minh. Ta có kết quả tương tự khi f giảm. Hình 2.11. mô tả định lí 2.13



H.2.11

2.2.3. Các giới hạn đáng nhớ

A. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1 \qquad (2.18)$$

Chứng minh: Dễ dàng ta thấy : $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\backslash\{0\}$ thì $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$.

Dùng định nghĩa ta có thể chứng minh được $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$. Theo nguyên lí kẹp ta suy ra công thức (2.18)

B. $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad (2.19)$$

Chứng minh:

Ta nhận thấy: $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\backslash\{0,1\}$, $\exists n\in\mathbb{N}^*$ sao cho $n\le x\le n+1\Rightarrow\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{n}$

Từ bất đẳng thức kép trên ta suy ra $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Theo ví dụ 1.10. (chương I) và tính chất đại số của dãy hội tụ thì:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\to e$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.\left(1+\frac{1}{n}\right)\to e$$

Từ nguyên lí kẹp ta nhận được $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\underset{x\to+\infty}{\to}e$. Ta thực hiện phép biến đổi $x=-y$, Từ đó suy ra $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{y\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{-y}\right)^{-y} = \lim\limits_{y\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{y-1}\right)^{y} = e$

Tổng quát: nếu $u(x)\underset{x\to a}{\to}0$ thì $(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}\underset{x\to a}{\to}e$ và $\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}\to 1$ (2.20)

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty,\qquad \lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$ (2.21)

Chứng minh: Vì lnx tăng trên $\mathbb{R}_+^*$ nên khi $x\to+\infty$ hàm số có giới hạn hữu hạn hoặc là $+\infty$.

Giả sử có giới hạn hữu hạn l thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = l = \lim\limits_{x\to\infty}\ln 2x$. vì $2x\to+\infty$

Một mặt ta có $\ln 2x = \ln 2 + \ln x$. Qua giới hạn cả hai vế khi $x\to+\infty$ ta nhận được $l = \ln 2 + l$. Đây là điều vô lý.

Vậy $\ln x \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$. Mặt khác $\ln x = -\ln\dfrac{1}{x}, \forall x\in\mathbb{R}_+^*$ do đó $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$

Ví dụ 2.8: Bằng định nghĩa hãy chứng minh: $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0,\qquad \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x} = 0$

Giải:

$(\forall\varepsilon>0\ \ (\varepsilon \text{ bé}))\ (\forall x\in\Omega_\varepsilon(0)\setminus\{0\}\Rightarrow\ |\sin x|<|x|)$.

Lấy $\eta=\varepsilon$, $(\forall x:\ 0<|x|<\varepsilon\Rightarrow|\sin x|<\varepsilon)$. Theo định nghĩa ta có $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$

$\forall\varepsilon>0$ để $\left|\dfrac{1}{x}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}=A$

Vậy $(\exists A\in\mathbb{R}_+^*)\ (\forall x:\ |x|>A\Rightarrow\left|\dfrac{1}{x}\right|<\varepsilon)$. Chứng tỏ $\dfrac{1}{x}\underset{x\to\pm\infty}{\to}0$

Ví dụ 2.9: Tính $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}},\qquad \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

Giải:

$$\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} = \frac{2(x-4).(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-4).(\sqrt{2x+1}+3)}\underset{x\to 4}{\to}\frac{2.2\sqrt{2}}{2.3}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

$$\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1} = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x\ \ +1}}\underset{x\to\infty}{\to}0$$

Ví dụ 2.10: Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$

Giải:

$$\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2} = \frac{(\cos x-1)+(1-\cos 3x)}{x^2} = \frac{-2\sin^2\dfrac{x}{2}+2\sin^2\dfrac{3x}{2}}{x^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} + \frac{9}{2}\frac{\sin^2\frac{3x}{2}}{\left(\frac{3x}{2}\right)^2} \underset{x\to 0}{\rightarrow} -\frac{1}{2}+\frac{9}{2} = 4$$

Ví dụ 2.11: Tính a. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x\ \ -1}{x^2+1}\right)^{x^2}$, b. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

Giải:

a. $\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2} = \left(1-\frac{2}{1+x^2}\right)^{\left(-\frac{1+x^2}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2x^2}{x^2+1}\right)} \underset{x\to\infty}{\rightarrow} e^{-2}$

b. $(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = (1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}} \underset{x\to 0}{\rightarrow} e$

D. Sự tồn tại giới hạn của các hàm sơ cấp

Định lí 2.14: Hàm số sơ cấp xác định tại x_0 thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Kết luận này được suy ra từ định lí 2.16 về tính liên tục của hàm hợp.

2.3. ĐẠI LƯỢNG VÔ CÙNG BÉ (VCB) VÀ ĐẠI LƯỢNG VÔ CÙNG LỚN (VCL)

2.3.1. Đại lượng VCB

A. Định nghĩa:

Ánh xạ $\alpha: X \to \mathbb{R}$, được gọi là đại lượng VCB khi x dần đến a nếu như $\alpha(x) \underset{x\to a}{\rightarrow} 0$,

(a có thể là $+\infty$ hoặc $-\infty$). Từ định nghĩa này, ta suy ra mệnh đề sau:

Hệ quả: *Để tồn tại* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ *điều kiện cần và đủ là hàm số* $\alpha(x) = f(x) - l$ *là VCB khi x dần đến a.*

B. Tính chất đại số của VCB

Dựa vào tính chất đại số của hàm có giới hạn, nhận được tính chất đại số của các VCB sau đây:

1. Nếu $\alpha_i(x), i = 1,2,...,n$ là các VCB trong cùng quá trình x dần đến a thì tổng $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i(x)$, tích $\prod\limits_{i=1}^{n}\alpha_i(x)$ cũng là VCB trong quá trình đó

2. Nếu $\alpha(x)$ là VCB khi x dần về a, $f(x)$ bị chặn trong lân cận của a thì $\alpha(x).f(x)$ là VCB trong quá trình đó a.

C. So sánh các VCB

Cho $\alpha(x), \beta(x)$ là các VCB trong cùng quá trình x dần về a.

1. Nếu $\frac{\alpha}{\beta} \underset{x\to a}{\rightarrow} 0$ thì người ta nói rằng α là VCB cấp cao hơn β và được kí hiệu

$\alpha = o(\beta)$, ta cũng nói rằng β là VCB cấp thấp hơn α khi x dần tới a.

2. Nếu $\frac{\alpha}{\beta} \underset{x\to a}{\to} c \neq 0$ thì người ta nói rằng α, β là các VCB ngang cấp khi x dần đến a

Đặc biệt $c = 1$, ta nói rằng α, β là các VCB tương đương . Khi đó người ta kí hiệu $\alpha \sim \beta$ khi x dần đến a.

Rõ ràng nếu $\frac{\alpha}{\beta} \underset{x\to a}{\to} c \neq 0$ (α, β ngang cấp) thì $\alpha \sim c\beta$ khi x dần đến a.

3. Nếu $\gamma = o(\alpha^k)$ thì nói rằng γ là VCB có cấp cao hơn k so với VCB α

4. Nếu $\gamma \sim c\alpha^k$ $(c \neq 0)$ thì nói rằng γ là VCB có cấp k so với VCB α

Hệ quả 1: *Nếu $\gamma \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$ khi x dần đến a thì* $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}$

Hệ quả 2: *Nếu $\alpha = o(\beta)$ khi x dần đến a thì $\alpha + \beta \sim \beta$ tại a .*

Hệ quả 3: Qui tắc ngắt bỏ các VCB cấp cao:

Nếu α^* là VCB cấp thấp nhất trong số các VCB α_i, $\left(i = \overline{1,m}\right)$

và β^* là VCB cấp thấp nhất trong số các VCB β_i, $\left(i = \overline{1,n}\right)$ khi x dần đến a thì

$$\lim_{x\to a}\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i}{\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha^*}{\beta^*} \qquad (2.22)$$

Chú ý: Các VCB thường hay sử dụng là:

a. $x^\alpha \underset{x\to 0}{\to} 0,\ \alpha > 0$

b. $a^x \underset{x\to -\infty}{\to} 0,\ (a > 1),\qquad a^x \underset{x\to +\infty}{\to} 0,\ (0 < a < 1)$

c. $\text{shx} \underset{x\to 0}{\to} 0,\qquad \text{thx} \underset{x\to 0}{\to} 0,\qquad \text{Argthx} \underset{x\to 0}{\to} 0$

d. $\sin x \underset{x\to 0}{\to} 0,\qquad \text{tgx} \underset{x\to 0}{\to} 0,\qquad \arcsin x \underset{x\to 0}{\to} 0,\qquad \text{arctgx} \underset{x\to 0}{\to} 0$

2.3.2. Đại lượng VCL

A. Định nghĩa

Ánh xạ A: $X \to \mathbb{R}$ được gọi là đại lượngVCL khi x dần đến a nếu như $A(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$ hoặc $-\infty$ (a có thể là $+\infty$ hoặc $-\infty$). Từ các định nghĩa về VCB, VCL, chúng ta suy ra mối liên hệ giữa chúng

Hệ quả: *$A(x)$ là VCL khi x dần tới a nếu $\alpha(x) = \frac{1}{A(x)}$ là VCB tại a. Ngược lại, $\alpha(x)$ là VCB khi x dần tớii a nếu*

$$\left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| \text{ là VCL tai a.}$$

Ta có thể chứng minh dễ dàng hệ quả trực tiếp từ định nghĩa VCB và VCL

B. Tính chất của VCL

1. Nếu $A_i(x),\ i=1,2,...,n$ là các VCL cùng dấu $(+\infty)$ hay $(-\infty)$ khi x dần đến a thì tổng $\sum_{i=1}^{n} A_i(x)$ là VCL mang dấu đó tại a.

Nếu $B_i(x),\ i=1,2,...,n$ là các VCL khi x dần đến a thì tích $\prod_{i=1}^{n} B_i(x)$ là VCL khi x dần đến a.

2. Nếu $A(x)$ là VCL khi x dần tới a và $\exists p>0: f(x)\geq p$ hoặc $\exists p>0: f(x)\leq -p$ trong lân cận của a thì tích $A(x).f(x)$ là VCL khi x dần đến a.

C. So sánh các VCL

Cho $A(x),\ B(x)$ là các VCL trong cùng quá trình x dần tới a

1. Nếu $\frac{\mathrm{A(x)}}{\mathrm{B(x)}} \underset{x\to a}{\to} \infty$ thì ta nói rằng $A(x)$ là VCL cấp cao hơn $B(x)$, hay B là VCL có cấp thấp hơn A.

2. Nếu $\frac{\mathrm{A(x)}}{\mathrm{B(x)}} \underset{x\to a}{\to} c\neq 0$ thì ta nói rằng $A,\ B$ là VCL ngang cấp.

Đặc biệt $c=1$ thì nói rằng A, B là các VCL tương đương , kí hiệu $A\sim B\ khi\, x\to a$.

Hệ quả 1: *Nếu* $A\sim A_1,\ B\sim B_1$ *khi x dần về a thì* $\lim\limits_{x\to a}\frac{A(x)}{B(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{A_1(x)}{B_1(x)}$

Hệ quả 2: *Nếu* $A(x)$ *là VCL cấp cao hơn* $B(x)$ *khi x dần về a thì* $A+B\sim A\ khi\, x\to a$.

Hệ quả 3: Qui tắc ngắt bỏ cácVCL cấp thấp:

Nếu A^* *là các VCL cấp cao nhất trong số các VCL* $A_i(x),\ i=1,2,...,m$ *và* B^* *là VCL cấp cao nhất trong số các VCL* $B_j(x),\ j=1,2,...,n$ *khi x dần tới a thì ta có*

$$\lim_{x\to a}\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}A_i(x)}{\sum\limits_{j=1}^{n}B_j(x)}=\lim_{x\to a}\frac{A^*(x)}{B^*(x)} \tag{2.23}$$

Chú ý: Các VCL sau đây thường hay được sử dụng:

a. $\mathrm{x}^{\alpha} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty,\ (\alpha>0)$.

b. $\mathrm{a}^{x} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty,\ (a>1),\quad \mathrm{a}^{x} \underset{x\to-\infty}{\to} +\infty,\ (0<a<1)$.

c. $\log_a x \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty,\ (a>1);\ \log_a x \underset{x\to 0^+}{\to} +\infty,\ (0<a<1)$.

$\log_a x \underset{x\to 0^+}{\to} -\infty,\ (a>1);\ \log_a x \underset{x\to+\infty}{\to} -\infty,\ (0<a<1)$.

d. $\mathrm{chx} \underset{x\to\pm\infty}{\to} +\infty;\ \mathrm{shx} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty;\ \mathrm{shx} \underset{x\to-\infty}{\to} -\infty,\ \coth x \underset{x\to 0^+}{\to} +\infty;\ \coth x \underset{x\to 0^-}{\to} -\infty$.

Ví dụ 2.12: Tính các giới hạn: a. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x.\cos\dfrac{1}{x}\right)$, b. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

Giải

a. $\sin x \underset{x\to 0}{\to} 0,\ \left|\cos\dfrac{1}{x}\right| \le 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\sin x.\cos\dfrac{1}{x} = 0.$

b. $\dfrac{1}{x} \underset{x\to\infty}{\to} 0,\ |\sin x| \le 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = 0.$

Ví dụ 2.13: Tính các giới hạn: a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 4x}$, b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 x - x^3}{\sin^2 x}$.

Giải:

a. $\left.\begin{array}{l}\sin 2x \sim 2x\\ \sin 4x \sim 4x\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 4x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{4x} = \dfrac{1}{2}.$

b. $\mathrm{tg}^2 x \sim x^2,\ \sin^2 x \sim x^2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 x - x^3}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2} = 1.$

Ví dụ 2.14: Tìm các giới hạn: *a.* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-1}{2x^2-2}$, b. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x^3+2}$, c. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

Giải: *a.* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-1}{2x^2-2} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$.

b. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x^3+2} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$.

c. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2} = 1$.

2.4. SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

2.4.1. Các khái niệm cơ bản

A. Hàm liên tục tại một điểm

Cho $f: X \to \mathbb{R}$ và $a \in X$. Người ta nói rằng hàm số $f(x)$ liên tục tại a nếu

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad \text{hay} \quad \lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x)$$

Trong dạng ngôn ngữ "$\varepsilon - \eta$": $(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists\eta > 0)\ (\forall x:\ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$

B. Hàm liên tục một phía tại a

Cho $f: X \to \mathbb{R},\ a \in X$. Người ta nói rằng hàm $f(x)$ liên tục bên trái tại a nếu:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a^-) = f(a)$$

và hàm số $f(x)$ liên tục bên phải tại a nếu:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a^+) = f(a)$$

Hệ quả: *Để hàm số $f(x)$ liên tục tại a điều kiện cần và đủ là:*

$$f(a^-) = f(a^+) = f(a) \qquad (2.24)$$

C. Hàm liên tục trên một khoảng

1. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại mọi điểm $x \in X$ thì ta nói rằng nó liên tục trên tập X.

2. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng mở (a,b) và liên tục trái tại b, liên tục phải tại a thì ta nói rằng nó liên tục trên đoạn kín [a,b].

D. Điểm gián đoạn của hàm số

1. Nếu $f(x)$ không liên tục tại a, ta nói rằng $f(x)$ có điểm gián đoạn tại $x = a$.

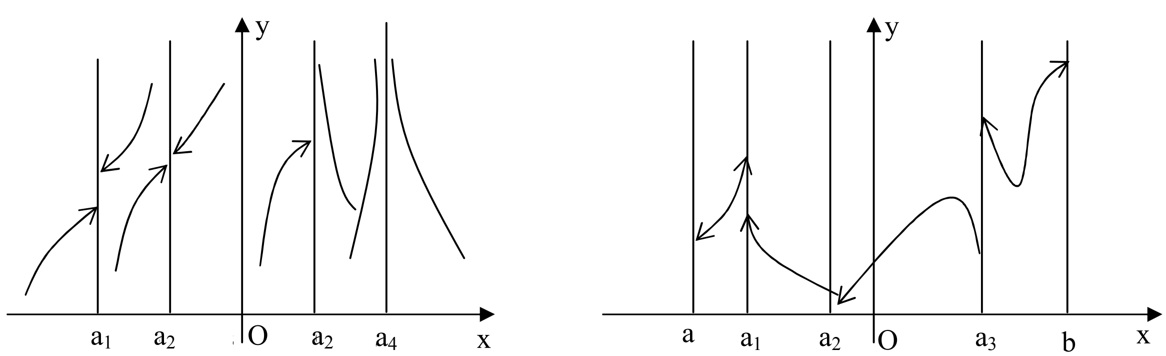
2. Nếu a là điểm gián đoạn và $f(a^-), f(a^+)$ là các số hữu hạn thì ta gọi $x = a$ là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số và gọi $h_f(a) = f(a^+) - f(a^-)$ là bước nhảy của $f(x)$ tại a.

Hệ quả: *Nếu $f(x)$ tăng (giảm) ở lân cận điểm a để $f(x)$ liên tục tại a cần và đủ là $h_f(a) = 0$.*

Hệ quả này suy ra từ định lí 2.14 của hàm số đơn điệu.

3. Nếu a là điểm gián đoạn của $f(x)$ và không phải là điểm gián đoạn loại 1 thì ta nói rằng $f(x)$ có điểm gián đoạn loại 2 tại $x = a$.

Các định nghĩa trên được mô tả trên hình 2.12.



Loại 1 Loại 2 Liên tục từng khúc

H.2.12

E. Hàm liên tục từng khúc

Cho hàm $f: [a,b] \to \mathbb{R},\ a,\ b \in \mathbb{R}$.

Nói rằng hàm f liên tục từng khúc trên $[a,b]$ khi và chỉ khi hàm số có một số hữu hạn điểm gián đoạn loại 1 trên đoạn đó, chính xác là $\exists n \in \mathbb{N}^*$ và $(a_0, a_1, ..., a_n) \in [a,b]^{n+1}$ sao cho

$a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ và f liên tục trên tất cả các khoảng mở $(a_i, a_{i+1}),\ i = 0,1,...,n-1$ và có giới hạn phải hữu hạn tại a_i, có giới hạn trái hữu hạn tại a_{i+1}.

2.4.2. Các phép toán đại số của hàm liên tục

Định lí 2.15: *Cho các hàm số* $f, g: X \to \mathbb{R},\ a \in X,\ \lambda \in \mathbb{R}$

1. *Nếu $f(x)$ liên tục tại a thì $|f(x)|$ liên tục tại a.*
2. *Nếu $f(x),\ g(x)$ cùng liên tục tại a thì tổng $f(x) + g(x)$ liên tục tại a.*
3. *Nếu $f(x)$ liên tục tại a thì $\lambda f(x)$ liên tục tại a.*
4. *Nếu $f(x),\ g(x)$ liên tục tại a thì tích $f(x)g(x)$ liên tục tại a.*
5. *Nếu $f(x),\ g(x)$ liên tục tại a và $g(x) \neq 0$ thì $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại a.*

Chứng minh định lí 2.15 tương tự như chứng minh định lí về các phép toán đại số của hàm có giới hạn hữu hạn.

Chú ý:

a. Định lí 2.15 cũng được phát biểu tương tự cho các hàm cùng liên tục trên khoảng X

b. Nếu $f(x)$ và $g(x)$ liên tục tại a thì $\text{Sup}(f,g)$ và $\text{Inf}(f,g)$ cũng liên tục tại a.

Người ta định nghĩa các hàm $\text{Sup}(f,g)$ và $\text{Inf}(f,g)$ như sau:

$$\text{Sup}(f,g): X \to \mathbb{R} \qquad \text{Inf}(f,g): X \to R$$

$$x \mapsto \text{Sup}(f(x), g(x)) \qquad x \mapsto \text{Inf}(f(x), g(x))$$

Từ định nghĩa trên, ta có thể biểu diễn các hàm $\text{Sup}(f,g)$ và $\text{Inf}(f,g)$ trong dạng:

$$\text{Sup}(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f-g|), \qquad \text{Inf}(f,g) = \frac{1}{2}(f + g - |f-g|)$$

Dựa vào định lí 2.16 dưới đây ta dễ dàng suy ra $\text{Sup}(f,g)$ và $\text{Inf}(f,g)$ liên tục tại a.

Định lí 2.16: *Cho* $f: X \to \mathbb{R}; a \in X,\ g: Y \to \mathbb{R}$ *và* $f(X) \subset Y$. *Nếu $f(x)$ liên tục tại a và $g(y)$ liên tục tại $b = f(a)$ thì hàm hợp $g(f(x))$ liên tục tại a.*

Chứng minh: Từ sự liên tục của các hàm số, theo định nghĩa lần lượt ta có:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta > 0)\ (\forall y:\ |y - b| < \eta \Rightarrow |g(y) - g(b)| < \varepsilon),$$

$$(\exists \delta_\eta > 0)\ (\forall x:\ |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Chứng tỏ $(\forall x:\ |x - a| < \delta_\eta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon)$. Vậy hàm hợp $g(f(x))$ liên tục tại a.

Chú ý:

Định lí 2 16 cũng được phát biểu tương tự cho f liên tục trên X và g liên tục trên Y.

Hệ quả: *Cho* $f: X \to \mathbb{R};\ a \in X,\ g: Y \to \mathbb{R}$ *và* $f(X) \subset Y$. *Nếu $f(x)$ có giới hạn là b khi x dần tới a và $g(y)$ liên tục tại b thì hàm hợp $g(f(x))$ có giới hạn là $g(b)$ khi x dần tới a, nghĩa là:*

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x))$$

Từ đó ta nhận được các giới hạn quan trongj sau đây:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$ (2.25)

Ta thay $a = e$, sẽ nhận được $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (2.25)'

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad (0 < a \neq 1)$ (2.26)

Thật vậy, ta đặt $y = a^x - 1 \Rightarrow x = \log_a(y+1)$. Theo (2.25) sẽ có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a$$

c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ (2.27)

Ta đặt $y = (x+1)^\alpha - 1 \Rightarrow \alpha\ln(1+x) = \ln(1+y)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{y}{\ln(y+1)}\frac{\alpha\ln(x+1)}{x}\right) = \alpha$$

Từ tính chất về giới hạn của hàm số sơ cấp và định nghĩa sự liên tục của hàm số, chúng ta dễ dàng nhận được định lý sau:

Định lý 2.17: *Mọi hàm số sơ cấp xác định tại $x = a$ thì liên tục tại a.*

2.4.3. Tính chất của hàm số liên tục trên một đoạn

Cho $\mathrm{f}: [\mathrm{a},\mathrm{b}]\to\mathbb{R}$ là liên tục, $a < b$.

A. Tính trù mật của hàm số liên tục

Định lí 2.18: *Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại $c \in (a,b)$ để $f(c) = 0$*

Chứng minh: Ta thực hiện phương pháp chia đôi đoạn $[a,b]$. Nếu trong quá trình chia đôi tìm được điểm c ta sẽ dừng lại. Nếu không tìm được c thì cứ tiếp tục chia đôi, khi đó sẽ nhận được dãy các đoạn lồng nhau $([a_n,b_n])$ trong đó $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0$ và $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$.

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n) = f(c) \le 0$ và $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} b_n) = f(c) \ge 0$

trong đó $c \in (a,b)$. Vậy $f(c) = 0$.

Định lí 2.19: *Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ khi đó $f(x)$ nhận giá trị trung gian giữa $f(a)$ và $f(b)$ nghĩa là:*

$$\forall\gamma \in [f(a), f(b)],\ \exists c \in [a,b],\ f(c) = \gamma$$

Chứng minh :

Dễ nhận thấy định lí đúng với $\gamma = f(a)$ hoặc $\gamma = f(b)$.

Giả sử $f(a) < f(b)$ và xét $f(a) < \gamma < f(b)$. Ta đặt $g(x) = f(x) - \gamma$, $g(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và $g(a) < 0,\ g(b) > 0$. Theo định lí 2.18 thì tồn tại $c \in (a,b)$ để $g(c) = 0$ hay $f(c) = \gamma$.

B. Tính bị chặn của hàm số liên tục

Định lí 2.20: *Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ thì đạt được giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $[a,b]$ nghĩa là* $(\exists x_{m,} x_M \in [a,b])\ (\forall x \in [a,b] \Rightarrow\ f(x_m) \le f(x) \le f(x_M))$

Chứng minh :

Trước hết ta sẽ chứng minh $f(x)$ bị chặn trong $[a,b]$. Giả sử $f(x)$ không bị chặn, tức là: $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists x_n \in [a,b] \Rightarrow |f(x_n)| \ge n)$

$\{x_n\}$ bị chặn nên theo định lí Bolzano-Weierstrass sẽ tồn tại dãy con $\{x_{n_k}\}$ của nó hội tụ về $x_0 \in [a,b]$, đồng thời $|f(x_{n_k})| \ge n_k$

Chuyển qua giới hạn sẽ có $|f(x_0)| = +\infty$. Điều này vô lí vì $f(x)$ liên tục tại x_0.

Ta gọi $m = \operatorname*{Inf}_{[a,b]} f(x)$ và $M = \operatorname*{Sup}_{[a,b]} f(x)$.

Lấy $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, $(n \in \mathbb{N}^*)\ (\exists x_n \in [a,b] \Rightarrow \dfrac{1}{n} > f(x_n) - m \ge 0)$. Theo định lí Bolzano-Weierstrass

$$\exists \{x_{n_k}\} \text{ là dãy con của } \{x_n\} \text{ và } \begin{cases} x_{n_k} \to x_m \in [a,b] \\ \dfrac{1}{n_k} > f(x_{n_k}) - m \ge 0 \end{cases}$$

Qua giới hạn sẽ có $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_m) = m$

Tương tự $\exists x_M$ để $f(x_M) = \operatorname*{Sup}_{[a,b]} f(x) = M$

Hệ quả: *Nếu* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *liên tục thì* $f([a,b]) = [m,M] \subset \mathbb{R}$

trong đó $m = \operatorname*{Inf}_{[a,b]} f(x),\ M = \operatorname*{Sup}_{[a,b]} f(x)$

2.4.4. Tính liên tục đều

Cho $f : X \to \mathbb{R}$. Nói rằng f liên tục đều trên X nếu

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta > 0)\ (\forall (x', x'') \in X^2 :\ |x' - x''| < \eta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon)$$

Chú ý rằng trong định nghĩa này số $\eta \in \mathbb{R}$ không phụ thuộc vào x' và x'', nó khác với tính liên tục của hàm f tại a, ở đó η có thể phụ thuộc vào a.

Hệ quả: *Nếu $f(x)$ liên tục đều trên X thì liên tục trên X.*

Điều này là hiển nhiên, vì lấy $a = x'$ bất kì thì điều kiện cho $f(x)$ liên tục tại a là thoả mãn. Tuy nhiên, một hàm số $f(x)$ liên tục trên X có thể không liên tục đều trên X

Chẳng hạn, ta xét hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cho bởi $f(x) = x^2$. Thật vậy

$$(\exists \varepsilon > 0)\ (\forall \eta > 0)\ (\exists (x', x'') \in \mathbb{R}^2: \ |x' - x''| < \eta \Rightarrow \ |x'^2 - x''^2| \geq \varepsilon)$$

Lấy $x'' \in \mathbb{R}_+, x' = x'' + \frac{1}{2}\eta$ khi đó $|x' - x''| = \frac{1}{2}\eta$ và $|x'^2 - x''^2| = \eta x'' + \frac{1}{4}\eta^2 \geq \varepsilon$

nếu ta lấy $x'' = \frac{\varepsilon}{\eta}$, khi đó có thể chọn $\varepsilon = \frac{1}{2}, x'' = \frac{1}{2\eta}$ và $x' = \frac{1}{2\eta} + \frac{1}{2}\eta$

Định lí 2.21: Định lí Hâyne (Heine).

Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn đóng $[a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ thì liên tục đều trên $[a,b]$.

Chứng minh :

Chúng ta lập luận phản chứng như sau: Giả sử $f(x)$ không liên tục đều , tức là

$$(\exists \varepsilon > 0)\ (\forall \eta > 0)\ (\exists (x', x'') \in [a,b]^2 : \ |x' - x''| < \eta \ \Rightarrow \ |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon)$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \eta = \frac{1}{n})\ (\exists (x'_n, x''_n) \in [a,b]^2 : |x'_n - x''_n| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon)$$

Vì $\{x'_n\}$ bị chặn nên tồn tại dãy con $\{x'_{n_k}\}$ hội tụ về $c \in [a,b]$. Tương ứng có dãy $\{x''_{n_k}\}$ cũng hội tụ về c vì $|x'_{n_k} - x''_{n_k}| < \frac{1}{n}$.

Mặt khác ta có $|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geq \varepsilon$ .Qua giới hạn, do tính liên tục suy ra

$|f(c) - f(c)| \geq \varepsilon$. Điều này là vô lý.

Chứng tỏ $f(x)$ liên tục đều trên đoạn $[a,b]$.

Ví dụ 2.15: Chứng minh rằng $f(x) = \sqrt{x}$ liên tục đều trên khoảng $[0,+\infty)$.

Giải:

Lấy $x_0 > 0$, hàm số liên tục đều trên $[0, x_0]$(theo định lí Heine)

Lấy x_1, x_2 tuỳ ý trên $[x_0, +\infty)$, $x_1 < x_2$

Ta có $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \dfrac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} < \dfrac{x_2 - x_1}{2\sqrt{x_0}} < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = 2\varepsilon\sqrt{x_0}, \quad \forall x_1, x_2$ sao cho $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Vậy liên tục đều trên $[x_0, +\infty)$.

Hợp hai khoảng lại ta nhận được $f(x) = \sqrt{x}$ liên tục đều trên $[0,+\infty)$.

Ví dụ 2.16: Chứng minh rằng $f(x) = \cos x^2$ không liên tục đều trên $[0,+\infty)$

Giải: Ta sẽ chỉ ra

$$(\exists \varepsilon > 0)\ (\forall \delta)\ (\exists x_1,\ x_2 : |x_1 - x_2| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$$

Thật vậy: $(\forall \delta > 0)\ (\exists k_\delta,\ x_{1_k} = \sqrt{2k\pi},\ x_{2_k} = \sqrt{(2k+1)\pi} \in \mathbb{R}$

$$x_{2_k} - x_{1_k} = \sqrt{(2k+1)\pi} - \sqrt{2k\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{(2k+1)\pi} + \sqrt{2k\pi}} < \frac{\pi}{\sqrt{2k\pi}} < \delta\ )$$

(ta lấy $k > \dfrac{\pi}{2\delta^2}$ và $\varepsilon = 2$) khi đó $\left|\cos x_{2_k}^2 - \cos x_{1_k}^2\right| = \varepsilon$.

TÓM TẮT NỘI DUNG CHƯƠNG II

- **Các hàm số thông dụng (các hàm số sơ cấp cơ bản)**

A. Hàm luỹ thừa

Cho $\alpha \in \mathbb{R}$. Hàm luỹ thừa với số mũ α, được kí hiệu là P_α, là ánh xạ từ $\mathbb{R}_+^*$ vào $\mathbb{R}$, xác định như sau $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ P_\alpha(x) = x^\alpha$

Hàm luỹ thừa có thể mở rộng khi miền xác định là $\mathbb{R}$.

B. Hàm mũ cơ số a

Xét $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Hàm mũ cơ số a, kí hiệu là $\exp_a x$, là ánh xạ từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}_+^*$, xác định như sau: $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp_a x = a^x$.

C. Hàm lôgarit cơ số a

Xét $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Hàm lôgarit cơ số a, kí hiệu là $\log_a$, là ánh xạ ngược với ánh xạ $\exp_a$, như vậy $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$

Sau này người ta thường lấy cơ số a là số e và gọi là lôgarit Nêpe hay lôgarit tự nhiên của x, kí hiệu y = lnx và suy ra $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Người ta đã tính gần đúng số $e \approx 2,718281828459045$ và $\lg e = \dfrac{1}{\ln 10} \approx 0,434296$

D. Các hàm số lượng giác

1. sinx xác định trên $\mathbb{R}$, là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kì T = 2π và bị chặn:

$$-1 \leq \sin x \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

2. cosx xác định trên $\mathbb{R}$, là hàm số chẵn, tuần hoàn với chu kì T = 2π và bị chặn:

$$-1 \leq \cos x \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

3. tgx xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$ và nhận giá trị trên khoảng $(-\infty,+\infty)$.

4. cotgx xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$, là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kỳ $T=\pi$ và nhận giá trị trên khoảng $(-\infty,+\infty)$.

E. Các hàm số lượng giác ngược

1. Hàm arcsin là ánh xạ ngược của sin: $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$

Người ta kí hiệu là arcsin: $[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. hay $y=\text{arcsinx}$ (đọc là ác sin của x)

Vậy ta có: $\forall x\in[-1,1],\ \forall y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ \ y=\arcsin x\Leftrightarrow x=\sin y$

2. Hàm arccos là ánh xạ ngược của $\cos:\ [0,\pi]\to[-1,1]$, được kí hiệu:

$\arccos:\ [-1,1]\to[0,\pi]$ hay $y=\text{arccosx}$ (đọc là ác cô sin của x)

$$\forall x\in[-1,1],\ \forall y\in[0,\pi],\ y=\arccos x\Leftrightarrow x=\cos y$$

$$\arccos x+\arcsin x=\frac{\pi}{2},\ \forall x\in[-1,1]$$

3. Hàm actang là ánh xạ ngược của $tg:\ \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, được kí hiệu:

$\text{arctg}:\ \mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ hay $y=\text{arctgx}$ (đọc là ác tang của x)

Vậy ta có $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ \ y=\text{arctg}x\Leftrightarrow x=\text{tg}y$

4. Hàm accôtang là ánh xạ ngược của $\text{cotg}:\ (0,\pi)\to\mathbb{R}$ được kí hiệu:

$$\text{arccotg}:\ \mathbb{R}\to(0,\pi)\ \text{hay}\ y=\text{arccotgx}$$

Vậy ta có $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in(0,\pi),\ y=\text{arccotg}x\Leftrightarrow x=\text{cotg}y$

$$\text{arctg}x+\text{arccotg}x=\frac{\pi}{2},\ \forall x$$

Người ta gọi hàm số luỹ thừa, hàm số mũ, hàm số lôgarit, các hàm số lượng giác và các hàm số lượng giác ngược là các hàm số sơ cấp cơ bản.

F. Đa thức, hàm hữu tỉ.

1. Ánh xạ P: $X\to\mathbb{R}$ được gọi là đa thức khi và chỉ khi tồn tại $n\in\mathbb{N}$ và

$$(a_0,a_1,...,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\ \text{sao cho}\ P(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i,\ \forall x\in X$$

Nếu $a_n \neq 0$ thì người ta nói rằng đa thức có bậc là n và được kí hiệu là $P_n(x)$, $\deg P_n(x) = n$

2. Ánh xạ $f: X \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm hữu tỉ khi và chỉ khi tồn tại hai đa thức

P, Q: $X \to \mathbb{R}$ sao cho $\forall x \in X,\ Q(x) \neq 0,\ f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

Gọi $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ là hàm hữu tỉ thực sự khi và chỉ khi: degP(x) < degQ(x)

3. Hàm hữu tỉ tối giản là các phân thức có dạng:

$$\frac{A}{(x-a)^k} \text{ hoặc } \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}$$

Trong đó $k \in \mathbb{N}^*$, a, p, q, A, B, C là các số thực và $p^2 - 4q < 0$

Dưới đây ta đưa ra các định lí đã được chứng minh trong đại số

Mọi đa thức bậc n với các hệ số thực đều có thể phân tích ra thừa số dạng:

$$P(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}...(x-\alpha_l)^{k_l}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}...(x^2+p_mx+q_m)^{\beta_m}$$

trong đó α_i $(i = \overline{1,\ l})$ *là các nghiệm thực bội* k_i *của đa thức còn* $p_j, q_j, \beta_j \in \mathbb{R}$

với $j = 1,\ 2, ...,\ m$ *và* $\sum_{i=1}^{l} k_i + 2\sum_{j=1}^{m} \beta_j = n,\ p_j{}^2 - 4q_j < 0,\ j = \overline{1,\ m}$

Mọi hàm hữu tỉ thực sự đều có thể phân tích thành tổng hữu hạn các hàm hữu tỉ tối giản.

- **Hàm số sơ cấp**

Định nghĩa: Hàm số sơ cấp là những hàm số được tạo thành bởi một số hữu hạn các phép tính cộng, trừ, nhân, chia và các phép lấy hàm hợp đối với các hàm số sơ cấp cơ bản và các hằng số.

- **Giới hạn của hàm số**

A. Định nghĩa giới hạn

Ta gọi $\delta -$ lân cận của điểm $a \in \mathbb{R}$ là khoảng $\Omega_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta)$

Gọi A- lân cận của $+\infty$ là khoảng $\Omega_A(+\infty) = (A, +\infty)$ với A > 0 và khá lớn.

Gọi B- lân cận của $-\infty$ là khoảng $\Omega_B(-\infty) = (-\infty, -B)$ với B > 0 và khá lớn.

Cho f xác định ở lân cận điểm a (có thể không xác định tại a)

1. Ta nói rằng f có giới hạn là l khi x dần đến a (gọi tắt: có giới hạn là l tại a) nếu :

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \Omega_\eta(a) \subset X)\ (\forall x \in \Omega_\eta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

2. Ta nói rằng f có giới hạn là $+\infty$ tại a nếu:

$$(\forall A > 0)\ (\exists \Omega_\eta(a) \subset X)\ (\forall x \in \Omega_\eta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) > A).$$

3. Ta nói rằng f có giới hạn là $-\infty$ tại a nếu $-f$ có giới hạn là $+\infty$ tại a

4. Ta nói rằng f có giới hạn là l tại $+\infty$ nếu:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \Omega_A(+\infty) \subset X)\ (\forall x \in \Omega_A(+\infty) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

5. Ta nói rằng f có giới hạn là l tại $-\infty$ nếu:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \Omega_B(-\infty) \subset X)\ (\forall x \in \Omega_B(-\infty) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

6. Ta nói rằng f có giới hạn là $+\infty$ tại $+\infty$ nếu:

$$(\forall A > 0)\ (\exists \Omega_M(+\infty) \subset X)\ (\forall x \in \Omega_M(+\infty) \Rightarrow f(x) > A).$$

7. Nói rằng f có giới hạn là $-\infty$ tại $+\infty$ nếu và chỉ nếu $-f$ có giới hạn là $+\infty$ tại $+\infty$

8. Ta nói rằng f có giới hạn là $+\infty$ tại $-\infty$ nếu

$$(\forall A > 0)\ (\exists \Omega_M(-\infty) \subset X)\ (\forall x \in \Omega_M(-\infty) \Rightarrow f(x) > A).$$

9. Ta nói rằng f có giới hạn là $-\infty$ tại $-\infty$ khi và chỉ khi $-f$ có giới hạn là $+\infty$ tại $-\infty$. Khi $f(x)$ có giới hạn là l tại a hoặc tại $\pm\infty$ nói rằng $f(x)$ có giới hạn hữu hạn tại a hoặc tại $\pm\infty$. Ngược lại $f(x)$ có giới hạn là $\pm\infty$, nói rằng nó có giới hạn vô hạn.

B. Định nghĩa giới hạn một phía.

1. Ta nói rằng f có giới hạn trái tại a là l_1 nếu

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta > 0\ (\exists \Omega_\eta(a) \subset X))\ (\forall x:\ 0 < a - x < \eta \Rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon).$$

2. Ta nói rằng f có giới hạn phải tại a là l_2 nếu

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta > 0)\ (\forall x:\ 0 < x - a < \eta \Rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon).$$

Điều kiện cần và đủ để $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ *là* $f(a^-) = f(a^+) = l$.

- **Tính chất của hàm có giới hạn.**

A. Sự liên hệ với dãy số

Để $f(x)$ *có giới hạn là* l *tại a điều kiện cần và đủ là mọi dãy* $\{u_n\}$ *trong* X *hội tụ về a thì* $\lim\limits_{n \to \infty} f(u_n) = l$

B. Tính duy nhất của giới hạn

Nếu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ *thì* l *là duy nhất.*

C. Tính bị chặn

Nếu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ *thì* $f(x)$ *bị chặn trong một lân cận đủ bé của a.*

D. Tính chất thứ tự của giới hạn và nguyên lí kẹp.

Giả sử $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$. *Khi đó:*

1. *Nếu* $c < l$ *thì trong lân cận đủ bé của* a: $c < f(x)$.

***2.** Nếu $l < d$ thì trong lân cận đủ bé của. a : $f(x) < d$*

Giả sử $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$. Khi đó

1. Nếu $c \le f(x)$ trong lân cận của a thì $c \le l$

2. Nếu $f(x) \le d$ trong lân cận của a thì $l \le d$

3. Nếu $c \le f(x) \le d$ trong lân cận của a thì $c \le l \le d$.

Nguyên lí kẹp:

Cho ba hàm số f, g, h thoả mãn các điều kiện:

***1.** $f(x) \le g(x) \le h(x)$ trên X;*

***2.** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$. Khi đó $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$.*

Nếu trong lân cận của a có $f(x) \le g(x)$ và $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ thì $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$

E. Các phép tính đại số của hàm số có giới hạn

(Trường hợp giới hạn là hữu hạn):

1. $f(x) \underset{x\to a}{\to} l \Rightarrow |f(x)| \underset{x\to a}{\to} |l|$

2. $f(x) \underset{x\to a}{\to} 0 \Leftrightarrow |f(x)| \underset{x\to a}{\to} 0$

3. $f(x) \underset{x\to a}{\to} l_1$ ***và*** $g(x) \underset{x\to a}{\to} l_2 \Rightarrow f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\to} l_1 + l_2$

4. $f(x) \underset{x\to a}{\to} l \Rightarrow \lambda.f(x) \underset{x\to a}{\to} \lambda l, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

5. $f(x) \underset{x\to a}{\to} 0$ ***và*** *$g(x)$ bị chặn trong lân cận của* $a \Rightarrow f(x)g(x) \underset{x\to a}{\to} 0$

6. $f(x) \underset{x\to a}{\to} l_1$ ***và*** $g(x) \underset{x\to a}{\to} l_2 \Rightarrow f(x)g(x) \underset{x\to a}{\to} l_1 l_2$

7. $f(x) \underset{x\to a}{\to} l_1$ ***và*** $g(x) \underset{x\to a}{\to} l_2 \ne 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} \dfrac{l_1}{l_2}$

(Trường hợp giới hạn là vô hạn):

1. *Nếu* $f(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$ *và* $g(x) \ge m, m \in \mathbb{R}$ *trong lân cận của a thì* $f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$

2. *Nếu* $f(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$ *và* $g(x) \ge m > 0$ *trong lân cận của a thì* $f(x).g(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$.

F. Giới hạn của hàm đơn điệu

Cho $f: (a,b) \to \mathbb{R},\ a, b \in \mathbb{R}$ *hoặc* $a, b \in \overline{R}$ *và là hàm tăng.*

1. *Nếu $f(x)$ bị chặn trên bởi M thì* $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \operatorname{Sup}\limits_{(a,b)} f(x) \le M$

2. Nếu $f(x)$ không bị chặn trên thì $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$

G. Giới hạn của hàm hợp

Cho $f: X \to \mathbb{R}$, $g: Y \to \mathbb{R}$ và $f(X) \subset Y$

Nếu $f(x) \underset{x\to a}{\to} b$ và $g(y)$ liên tục tại b thì $g(f(x)) \underset{x\to a}{\to} g(b)$

- **Các giới hạn đáng nhớ**

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x} = 1$

B. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

C. $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x = +\infty,\qquad \lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$

D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$

E. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a,\quad (0 < a \neq 1)$

F. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

- **Sự tồn tại giới hạn của các hàm sơ cấp**

Hàm số sơ cấp xác định tại x_0 *thì* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

- **So sánh các VCB**

1. Nếu $\dfrac{\alpha}{\beta} \underset{x\to a}{\to} 0$ thì người ta nói rằng α là VCB cấp cao hơn β tại a và được kí hiệu $\alpha = o(\beta)$ tại a, ta cũng nói rằng β là VCB cấp thấp hơn α tại a.

2. Nếu $\dfrac{\alpha}{\beta} \underset{x\to a}{\to} c \neq 0$ thì người ta nói rằng α, β là các VCB ngang cấp tại a.

Đặc biệt $c = 1$, ta nói rằng α, β là các VCB tương đương tại a. Khi đó người ta kí hiệu $\alpha \sim \beta$ tại a.

Rõ ràng nếu $\dfrac{\alpha}{\beta} \underset{x\to a}{\to} c \neq 0$ (α, β ngang cấp tại a) thì $\alpha \sim c\beta$ tại a.

3. Nếu $\gamma = o(\alpha^k)$ thì nói rằng γ là VCB có cấp cao hơn k so với VCB α tại a

4. Nếu $\gamma \sim c\alpha^k$ $(c \neq 0)$ thì nói rằng γ là VCB có cấp k so với VCB α tại a

Nếu $\gamma \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$ *tại a thì* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$

Nếu $\alpha = o(\beta)$ *tại a thì* $\alpha + \beta \sim \beta$ *tại a .*

Qui tắc ngắt bỏ VCB cấp cao:

Nếu α^* *là VCB cấp thấp nhất trong số các VCB* $\alpha_i,\ \left(i=\overline{1,\ m}\right)$

và β^* *là VCB cấp thấp nhất trong số các VCB* $\beta_i,\ \left(i=\overline{1,\ n}\right)$ *tại a, khi đó:*

$$\lim_{x\to a}\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}{\sum_{j=1}^{n}\beta_j}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha^*}{\beta^*}$$

- **So sánh các VCL**

Cho $A(x), B(x)$ là các VCL tại a

1. Nếu $\dfrac{\mathrm{A(x)}}{\mathrm{B(x)}}\underset{\mathrm{x}\to\mathrm{a}}{\to}\infty$ thì ta nói rằng $A(x)$ là VCL cấp cao hơn $B(x)$ tại a, hay B là VCL có cấp thấp hơn A tại a

2. Nếu $\dfrac{\mathrm{A(x)}}{\mathrm{B(x)}}\underset{\mathrm{x}\to\mathrm{a}}{\to}\mathrm{c}\neq 0$ thì ta nói rằng A, B là VCL ngang cấp tại a.

Đặc biệt $c=1$ thì nói rằng A, B là các VCL tương đương tại a, kí hiệu $A\sim B$ tại a.

Nếu $A\sim A_1, B\sim B_1$ *tại a thì* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{A(x)}{B(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{A_1(x)}{B_1(x)}$

Nếu $A(x)$ *là VCL cấp cao hơn* $B(x)$ *tại a thì* $A+B\sim A$.

Qui tắc ngắt bỏ cácVCL cấp thấp:

Nếu A^* *là các VCL cấp cao nhất trong số các VCL* $A_i(x),\ i=1,\ 2,...,\ m$ *và* B^* *là VCL cấp cao nhất trong số các VCL* $B_j(x),\ j=1,\ 2,...,\ n$ *tại a thì ta có*

$$\lim_{x\to a}\frac{\sum_{i=1}^{m}A_i(x)}{\sum_{j=1}^{n}B_j(x)}=\lim_{x\to a}\frac{A^*(x)}{B^*(x)}$$

- **Các khái niệm cơ bản về sự liên tục của hàm số**

A. Hàm liên tục tại một điểm

Cho $\mathrm{f}:\ \mathrm{X}\to\mathbb{R}$ và $a\in X$. Người ta nói rằng hàm số $f(x)$ liên tục tại a nếu

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)\quad\text{hay}\quad\lim_{x\to a}f(x)=f(\lim_{x\to a}x)$$

B. Hàm liên tục một phía tại a

Cho $\mathrm{f}:\ \mathrm{X}\to\mathbb{R},\ \mathrm{a}\in\mathrm{X}$. Người ta nói rằng hàm $f(x)$ liên tục bên trái tại a nếu:

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a^-)=f(a)$$

và hàm số $f(x)$ liên tục bên phải tại a nếu:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a^+) = f(a)$$

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại a điều kiện cần và đủ là:

$$f(a^-) = f(a^+) = f(a)$$

C. Hàm liên tục trên một khoảng

1. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại mọi điểm $x \in X$ thì ta nói rằng nó liên tục trên tập X.

2. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng mở (a,b) và liên tục trái tại b, liên tục phải tại a thì ta nói rằng nó liên tục trên đoạn kín [a,b]

D. Điểm gián đoạn của hàm số

1. Nếu $f(x)$ không liên tục tại a, ta nói rằng $f(x)$ có điểm gián đoạn tại $x = a$.

2. Nếu a là điểm gián đoạn và $f(a^-), f(a^+)$ là các số hữu hạn thì ta gọi $x = a$ là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số và gọi $h_f(a) = f(a^+) - f(a^-)$ là bước nhảy của $f(x)$ tại a.

Nếu $f(x)$ tăng (giảm) ở lân cận điểm a để $f(x)$ liên tục tại a cần và đủ là $h_f(a) = 0$.

3. Nếu a là điểm gián đoạn của $f(x)$ và không phải là điểm gián đoạn loại 1 thì ta nói rằng $f(x)$ có điểm gián đoạn loại 2 tại $x = a$.

E. Hàm liên tục từng khúc

Cho hàm $f: [a,b] \to \mathbb{R},\ a,\ b \in \mathbb{R}$.

Nói rằng hàm f liên tục từng khúc trên $[a,b]$ khi và chỉ khi hàm số có một số hữu hạn điểm gián đoạn loại 1 trên đoạn đó, chính xác là $\exists n \in \mathbb{N}^*$ và $(a_0, a_1, ..., a_n) \in [a,b]^{n+1}$ sao cho $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ và f liên tục trên tất cả các khoảng mở $(a_i, a_{i+1}),\ i = 0,\ 1, ...,\ n-1$ và có giới hạn phải hữu hạn tại a_i, có giới hạn trái hữu hạn tại a_{i+1}

- **Các phép toán đại số của hàm liên tục**

Cho các hàm số $f, g: X \to \mathbb{R},\ a \in X, \lambda \in \mathbb{R}$

1. *Nếu $f(x)$ liên tục tại a thì $|f(x)|$ liên tục tại a.*

2. *Nếu $f(x), g(x)$ cùng liên tục tại a thì tổng $f(x) + g(x)$ liên tục tại a.*

3. Nếu $f(x)$ liên tục tại a thì $\lambda f(x)$ liên tục tại a.

4. Nếu $f(x), g(x)$ liên tục tại a thì tích $f(x)g(x)$ liên tục tại a.

5. *Nếu $f(x), g(x)$ liên tục tại a và $g(x) \neq 0$ thì $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại a.*

- **Phép hợp các hàm số liên tục**

Cho $f: X \to \mathbb{R};\ a \in X,\ g: Y \to \mathbb{R}$ và $f(X) \subset Y$. Nếu $f(x)$ liên tục tại a và $g(y)$ liên tục tại $b = f(a)$ thì hàm hợp $g(f(x))$ liên tục tại a.

- **Sự liên tục của hàm số sơ cấp**

  Mọi hàm số sơ cấp xác định tại $x = a$ thì liên tục tại a.

- **Tính chất của hàm số liên tục trên một đoạn**

  Cho $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ là liên tục, $a < b$.

  1. *Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại $c \in (a,b)$ để $f(c) = 0$*

  2. *Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ khi đó $f(x)$ nhận giá trị trung gian giữa $f(a)$ và $f(b)$ nghĩa là:*

  $$(\forall \gamma \in [f(a), f(b)])\ (\exists c \in [a,b]: f(c) = \gamma)$$

  3. *Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ thì đạt được giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $[a,b]$ nghĩa là:*

  $$(\exists x_m,\ x_M \in [a,b])\ (\forall x \in [a,b] \Rightarrow\ f(x_m) \le f(x) \le f(x_M))$$

  4. *Nếu $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục thì* $f([a,b]) = [m, M] \subset \mathbb{R}$

  trong đó $m = \operatorname*{Inf}_{[a,b]} f(x),\ M = \operatorname*{Sup}_{[a,b]} f(x)$

- **Tính liên tục đều**

  Cho $f: X \to \mathbb{R}$. Nói rằng f liên tục đều trên X nếu

  $$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta > 0)\ (\forall (x', x'') \in X^2:\ |x' - x''| < \eta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon)$$

  Nếu $f(x)$ liên tục đều trên X thì liên tục trên X.

  Định lí Hâyne (Heine).

  Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn đóng $[a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ thì liên tục đều trên $[a,b]$.

BÀI TẬP CHƯƠNG II

2.1. Cho hàm số $f(x)=\arccos(\lg x)$. Tính $f(\frac{1}{10}), f(1), f(10)$.

2.2. Tìm miền xác định và miền giá trị của các hàm số: Cho hàm số

a. $f(x)=2-x^2$, **b.** $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$,

c. $h(x)=\sqrt{x^2-x}$, **d.** $k(x)=\sqrt{2-x}$.

2.3. Xét xem hàm số có chẵn hoặc lẻ không và phác hoạ đồ thị của nó.

a. $f(x)=\sqrt{|x|}$, **b.** $g(x)=\sqrt{x^2-2x+1}$,

c. $h(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, **d.** $k(x)=|x|+|x-2|$.

2.4. Xét xem hàm số nào tuần hoàn và tìm chu kì của nó

a. $f(x)=10\sin 3x$, **b.** $g(x)=\sin^2 x$,

c. $h(x)=\sqrt{\mathrm{tg}x}$, **d.** $k(x)=\sin\sqrt{x}$.

2.5. Tìm hàm ngược của các hàm số sau:

a. $y=2x+3$, **b.** $y=x^2-1,\ x<0$,

c. $y=\sqrt[3]{1-x^3}$, **d.** $y=\lg\dfrac{x}{2}$.

2.6. Cho $f,g:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho

$$\forall(x,y)\in R^2, \{f(x)-f(y)\}\{g(x)-g(y)\}=0$$

Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai ánh xạ là ánh xạ hằng.

2.7. Tìm tất cả các ánh xạ $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho:

a. $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)f(x^2-1)=\sin x$

b. $\forall x\in\mathbb{R},\ xf(x)+f(1-x)=x^3+1$

c. $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y^2)=f(x^2)+f(y)$

d. $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)-f(x-y)=2y(3x^2+y^2)$

e. $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(x.y)+f(x.z)-2f(x).f(y.z)\geq\dfrac{1}{2}$.

2.8. Giải phương trình

$$x^{18}+x^{10}=544,\ \ x\in\mathbb{R}_+$$

2.9. Cho $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho

$f\left(f\left(x\right)\right)$ tăng và $f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)$ giảm ngặt

Chứng minh rằng $f\left(x\right)$ giảm ngặt.

2.10. Tìm các giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x^2-x-2\right)^{20}}{\left(x^3-12x+16\right)^{10}}$,

b. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$,

c. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$,

d. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\left(x^n-a^n\right)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$.

2.11. Tìm các giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$,

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$.

2.12. Tìm các giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$,

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}.\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$.

2.13. Tìm các giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$,

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$,

c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x.\cos 2x.\cos 3x}{1-\cos x}$,

d. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

2.14. Tìm các giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2-1}-x$

2.15. Tìm các giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^2}{1-x}}$,

b. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$,

c. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$,

d. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

2.16. Tính các giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}$,

b. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\cot g^2 x}$,

c. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$,

d. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sin x\right)^x$.

2.17. Tính các giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x\right]$, **b.** $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\right), x>0$,

c. . $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$, **d.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(2+e^{3x}\right)}{\ln\left(3+e^{2x}\right)}$.

2.18. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\left|\cos\dfrac{1}{x}\right|}$, **b.** $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\ldots\sin}_{n \text{ dấu sin}} x$,

c. $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$, $\left[\dfrac{1}{x}\right]$ là phần nguyên của x . **d.** $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{Sgn}\left[\sin^2(n\pi x)\right]$.

2.19. Xét sự liên tục của các hàm số sau:

a. $f(x)=|x|$, **b.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ A & \text{khi } x=2\end{cases}$,

c. $f(x)=\begin{cases}x^n\sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0, n\in\mathbb{N}^*\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$, **d.** $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x & \text{khi } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{khi } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$,

e. $f(x)=\begin{cases}1 & \text{khi } x\in\mathbb{Q}\\ x & \text{khi } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$, **f.** $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{khi } x\in\mathbb{Q}\\ -x^2 & \text{khi } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

2.20. Chứng minh rằng nếu các hàm $f(x)$ và $g(x)$ liên tục thì các hàm

$$\varphi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$$
$$\psi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$$

cũng là hàm liên tục .

2.21. Xét tính liên tục của hàm hợp $f(g(x))$ và $g(f(x))$ nếu

a. $f(x)=\mathrm{Sgn}x$ và $g(x)=1+x^2$,

b. $f(x)=\mathrm{Sgn}x$ và $g(x)=1+x-[x]$.

2.22. Tìm tất cả các hàm $f(x)$ thoả mãn:

a. liên tục tại $x=0$ và $\forall x\in\mathbb{R}$ có $f(3x)=f(x)$

b. liên tục tại $x=0$ và $\forall x\in\mathbb{R}$ có $f(x)=f\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$

c. liên tục tại $x=1$ và $\forall x\in\mathbb{R}$ có $f(x)=-f(x^2)$

2.23. Hàm $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ và chỉ nhận giá trị hữu tỉ và $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$. Hãy tính giá trị $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2.24. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $[a,b]$và $f(x)=g(x)$ tại mọi x là hữu tỉ. Chứng minh $f(x)=g(x)$ trên $[a,b]$.

2.25. Chứng minh rằng mỗi phương trình đại số bậc lẻ có ít nhất một nghiệm thực.

2. 26. Chứng minh hàm số $f(x)=\frac{1}{x}$ liên tục trên (0,1) nhưng không liên tục đều trên (0,1).

2.27. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$$

liên tục và bị chặn trên (0,1) nhưng không liên tục đều trên (0,1).

2.28. Chứng minh hàm số $f(x)=Sinx^2$ liên tục và bị chặn trên $\mathbb{R}$ nhưng không liên tục đều trên $\mathbb{R}$

2.29. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,+\infty)$ và tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=c \text{ thì}$$

$f(x)$ bị chặn trên $[a,+\infty)$ và $f(x)$ liên tục đều trên $[a,+\infty)$

2.30. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$$

a. liên tục đều trên mỗi khoảng $(-1,0),(0,1)$,

b. không liên tục đều trên $(-1,1)\setminus\{0\}$.

2.31. Chứng minh rằng nếu hàm $f(x)$ đơn điệu bị chặn và liên tục trên (a,b) thì liên tục đều trên (a,b).

2.32. Cho $f(x)$ là hàm số tăng và liên tục trên $[a,b]$,thoả mãn điều kiện

$$f(a)\ge a, f(b)\le b.$$

Người ta lấy $x_1\in[a,b]$ và xác định dãy số $\{x_n\}$ với $x_{n+1}=f(x_n),\quad n\ge 1$

Chứng minh rằng tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x^*$ và $f(x^*)=x^*$.

2.33. Cho f,g là các ánh xạ liên tục của $[0,1]$ lên chính $[0,1]$.

Chứng minh rằng tồn tại $x_0\in[0,1]$ để có $g(f(x_0))=f(g(x_0))$.

2.34. Tồn tại hay không hàm liên tục $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) = \begin{cases} v_x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} & \text{khi } x \in \mathbb{Q} \\ h_x \in \mathbb{Q} & \text{khi } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

2.35. Cho $\lambda \in \mathbb{R}$ và $f, g: (a, b) \to \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

a. Nếu f liên tục đều thì $|f|$ liên tục đều.

b. Nếu f, g liên tục đều thì $\lambda f + g$ liên tục đều.

c. Nếu f liên tục đều và $\exists c > 0$ sao cho $f(x) \geq c, \forall x \in (a,b)$ thì $\dfrac{1}{f}$ liên tục đều.

d. Nếu f, g liên tục đều và tồn tại hàm hợp $g_0 f$ thì $g_0 f$ liên tục đều.

CHƯƠNG III. PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

Một trong các phép tính quan trọng nhất của toán học chính là phép tính đạo hàm, gắn liền với nó là phép tính vi phân. Khái niệm đạo hàm là một trong những tư tưởng toán học có ý nghĩa nhất. Nó được ứng dụng rộng rãi trong tất cả các ngành khoa học tự nhiên và xã hội.

3.1. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ

Từ nay về sau, nếu không có gì chú ý thêm ta luôn kí hiệu $f: X \to \mathbb{R}$, $X \neq \phi$ và X không thu về một điểm, nói cách khác X là một khoảng nào đó trên $\mathbb{R}$, và $\mathbb{R}^X$ là tập các ánh xạ đã nói ở trên, còn C_f là đồ thị của hàm số f.

3.1.1. Đạo hàm tại một điểm

3.1.1.1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

Cho $a \in X$, $a + h \in X$, $f \in \mathbb{R}^X$. Người ta nói rằng f khả vi tại a nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{3.1}$$

Giới hạn này thường kí hiệu $f'(a)$ hay $\frac{df}{dx}(a)$ và được gọi là đạo hàm của f tại a.

Tỉ số $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\Delta f(a)}{\Delta x}$ được gọi là tỉ số của số gia hàm số và số gia đối số.

Nếu hàm số được kí hiệu là $y = f(x)$ thì đạo hàm tại a cũng được kí hiệu $y'(a)$. Đạo hàm $y'(a)$ biểu thị tốc độ thay đổi của hàm số $y(x)$ tại a.

3.1.1.2. Định nghĩa đạo hàm một phía

1. Cho $a \in X, a + h \in X$. Người ta nói rằng f khả vi phải tại a nếu tồn tại giới hạn hữu han

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{3.2}$$

Giới hạn này kí hiệu là $f_p'(a)$ và gọi là đạo hàm phải của f tại a.

2. Cho $a \in X$, $a + h \in X$. Người ta nói rằng f khả vi trái tại a nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{3.3}$$

Giới hạn này kí hiệu là $f_t'(a)$ và gọi là đạo hàm trái của f tại a.

Hệ quả 1: *Để f khả vi tại a điều kiện cần và đủ là f khả vi trái và phải tại a đồng thời*

$$f_t'(a) = f_p'(a) = f'(a) \qquad (3.4)$$

Hệ quả 2: (điều kiện cần của hàm khả vi) *Nếu f khả vi tại a thì f liên tục tại a*

Chứng minh: Lấy $h \in \mathbb{R}^*$ sao cho $a + h \in X$

Ta có thể biểu diễn $\qquad f(a+h) = f(a) + h.\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

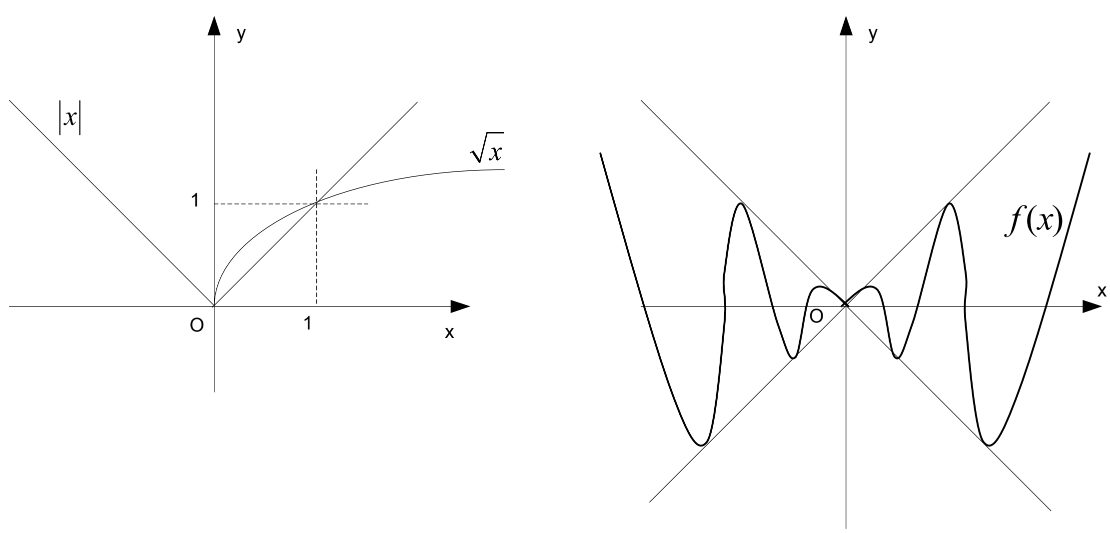
mà $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \underset{h \to 0}{\to} f'(a) \Rightarrow f(a+h) \underset{h \to 0}{\to} f(a)$. Chứng tỏ f liên tục tại a.

Chú ý:

a. f có thể liên tục tại a nhưng không khả vi tại a. Chẳng hạn các hàm dưới đây và đồ thị của chúng được cho trên hình 3.1 sẽ mô tả điều đó

* $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ cho bởi $f(x) = |x|$, liên tục tại 0 nhưng không khả vi tại 0 vì $\dfrac{|h|}{h}$ không có giới hạn khi $h \to 0$, cụ thể ta có : $\quad f_t'(0) = -1 \neq 1 = f_p'(0)$

* $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$ cho bởi $f(x) = \sqrt{x}$ liên tục tại 0 nhưng không khả vi tại 0 vì với $h \in \mathbb{R}_+^*$ ta có $\dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}} \underset{h \to 0^+}{\to} +\infty$



H.3.1

* $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ cho bởi $f(x) = \begin{cases} x.\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

liên tục tại 0 vì $|f(x)| \leq |x| \underset{x \to 0}{\to} 0 = f(0)$ nhưng không khả vi.

Thật vậy tỉ số $\dfrac{h.\sin\frac{1}{h}}{h}=\sin\dfrac{1}{h}$ không có giới hạn khi $h\to 0$

b. Nếu f khả vi phải (hoặc trái) tại a thì f liên tục phải (hoặc trái) tại a.

c. Nếu f đồng thời khả vi phải và trái tại a thì f liên tục tại a.

3.1.1.3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Nế u f khả vi tại a thì tồn tại tiếp tuyến của đồ thị C_f tại điểm $A(a,f(a))$. Tiếp tuyến này không song song với trục Oy và có hệ số góc là $f'(a)$.

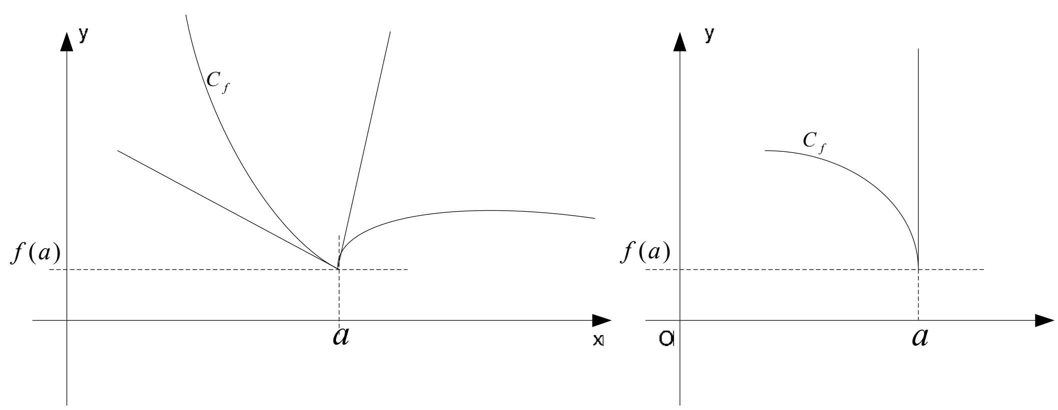
Trường hợp f không khả vi tại a mà tồn tại $f_t'(a)$ và $f_p'(a)$. Lúc đó người ta gọi điểm $A(a,f(a))\in C_f$ là điểm góc của C_f ,và hai bán tiếp tuyến tại A không song song với nhau.

Trường hợp f không khả vi tại a nhưng có

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\underset{h\to 0^+}{\longrightarrow}+\infty \text{ hoặc } -\infty \quad\text{hoặc}\quad \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\underset{h\to 0^-}{\longrightarrow}+\infty \text{ hoặc } -\infty$$

thì tại $A(a,f(a))$ đường cong C_f có một bán tiếp tuyến song song với Oy.

Hình 3.2. mô tả các nội dung trên.



H.3.2

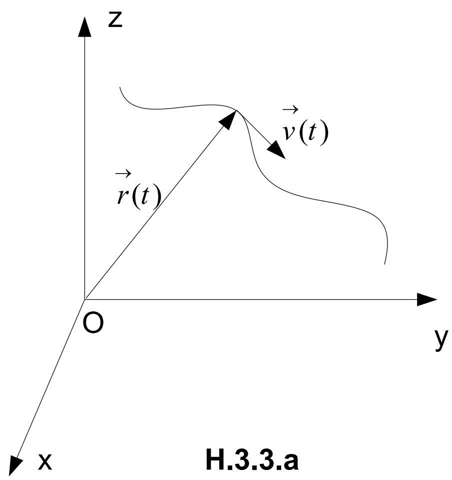
3.1.1.4. Ý nghĩa vật lí của đạo hàm

A. Công thức tính vận tốc

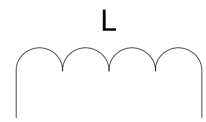
Cho chất điểm chuyển động tại thời điểm t được định vị bởi véc tơ bán kính $\vec{r}(t)$ (Xem hình 3.3.a)

Giả sử $\vec{r}=\vec{r}(t)$ là phương trình chuyển động của chất điểm cho dưới dạng véc tơ, tương ứng tại thời điểm t_1,t_2 véc tơ bán kính của chất điểm là $\vec{r}(t_1),\ \vec{r}(t_2)$

Người ta gọi $\overrightarrow{v_{TB}} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{t_2 - t_1} = \dfrac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$ là vận tốc trung bình của chất điểm từ thời điểm t_1 đến t_2



H.3.3.a



H.3.3.b

Vận tốc tức thời $\vec{v}(t_1)$ của chất điểm tại thời điểm t_1 được xác định là giới hạn của tỉ số trên khi $t_2 - t_1 \to 0$

$$\vec{v}(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \dot{\vec{r}}(t_1)$$

Vậy vận tốc tức thời của chất điểm chính bằng đạo hàm của véc tơ bán kính theo thời gian t.

B. Công thức tính cường độ của dòng điện cảm ứng

Cho cuộn cảm với hệ số cảm ứng là L (Xem hình 3.3.b)

Giả sử $\Phi = \Phi(t)$ là từ thông qua cuộn cảm tương ứng tại thời điểm t_1, t_2 $\Phi(t_1),\ \Phi(t_2)$

Người ta gọi $\Phi_{TB} = \dfrac{\Delta\Phi}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Phi(t_2) - \Phi(t_1)}{t_2 - t_1}$ là cường độ trung bình của dòng điện cảm ứng từ thời điểm t_1 đến t_2.

Cường độ dòng điện cảm ứng tai thời điểm t_1: $i(t)$, được tính theo công thức

$$i(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\Phi(t_2) - \Phi(t_1)}{t_2 - t_1} = \Phi'(t_1)$$

Vậy cường độ dòng cảm ứng chính bằng đạo hàm của từ thông theo thời gian t.

3.1.2. Các phép tính đại số của các hàm khả vi tại một điểm

Định lí 3.1: *Cho f và g khả vi tại a khi đó*

1. $f + g$ *khả vi tại a và* $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

2. $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, λf *khả vi tại a và* $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$

3. fg *khả vi tại a và* $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ (3.5)

4. *Nếu* $g(a)\neq 0$ *thì* $\frac{f}{g}$ *khả vi tại a và* $\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

Chứng minh :

1. $\frac{1}{h}\big((f+g)(a+h)-(f+g)(a)\big)=\frac{1}{h}\big(f(a+h)-f(a)\big)+\frac{1}{h}\big(g(a+h)-g(a)\big)\underset{h\to 0}{\to} f'(a)+g'(a)$

2. $\frac{1}{h}\big((\lambda f)(a+h)-(\lambda f)(a)\big)=\lambda\frac{1}{h}\big(f(a+h)-f(a)\big)\underset{h\to 0}{\to}\lambda f'(a)$

3. $\frac{1}{h}\big((fg)(a+h)-(fg)(a)\big)=\frac{1}{h}\big(f(a+h)-f(a)\big)g(a+h)+f(a)\big(g(a+h)-g(a)\big)$

$$=\left(\frac{1}{h}\big(f(a+h)-f(a)\big)\right)g(a+h)+f(a)\left(\frac{1}{h}\big(g(a+h)-g(a)\big)\right)\underset{h\to 0}{\to} f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$

bởi vì $\mathrm{g(a+h)}\underset{\mathrm{h\to 0}}{\to}\mathrm{g(a)}$ do g khả vi tại a.

4. Trước hết chứng minh $\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=-\frac{g'(a)}{g^2(a)}$

Vì $g(x)$ liên tục tại a và $g(a)\neq 0$ vậy g khác không trong một lân cận của a, do đó tồn tại hàm $\frac{1}{g}$ xác định ở lân cận của a, với h đủ bé thì

$$\frac{1}{h}\left(\left(\frac{1}{g}\right)(a+h)-\left(\frac{1}{g}\right)(a)\right)=\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(a+h)}-\frac{1}{g(a)}\right)=-\frac{1}{h}\frac{g(a+h)-g(a)}{g(a+h)g(a)}$$

$$=-\frac{1}{h}\big(g(a+h)-g(a)\big).\frac{1}{g(a+h)g(a)}\to -g'(a).\frac{1}{g^2(a)}$$

Từ đó suy ra

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\left(f\frac{1}{g}\right)'(a)=f'(a).\frac{1}{g(a)}+f(a).\frac{-g'(a)}{g^2(a)}=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Định lí 3.2: (Đạo hàm của hàm hợp).

Cho $\mathrm{a}\in\mathrm{X},\quad \mathrm{f}:\mathrm{X}\to\mathbb{R},\quad \mathrm{g}:\mathrm{Y}\to\mathbb{R}$ *với* $f(X)\subset Y$. *Nếu* f *khả vi tại a và g khả vi tại* $f(a)$ *thì hàm hợp* gof *khả vi tại a và*

$$(gof)'(a)=g'\big(f(a)\big).f'(a). \qquad (3.6)$$

Chứng minh:

Ta lấy $\mathrm{h}\in\mathbb{R}$ tuỳ ý bé sao cho $a+h\in X$ và lập hàm số

$$\varepsilon_1(h)=\begin{cases}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a) & \text{khi } h\neq 0\\ 0 & \text{khi } h=0\end{cases}$$

Từ đó suy ra $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon_1(h)$ trong đó $\varepsilon_1(h) \underset{h\to 0}{\to} 0$

Lấy $k \in \mathbb{R}$ tuỳ ý sao cho $f(a)+k \in Y$ và ta lập hàm số

$$\varepsilon_2(k) = \begin{cases} \dfrac{g(f(a)+k) - g(f(a))}{k} - g'(f(a)) & \text{nếu } k \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } k = 0 \end{cases}$$

Ta suy ra $g(f(a)+k) = g(f(a)) + kg'(f(a)) + k\varepsilon_2(k)$ trong đó $\varepsilon_2(k) \underset{k\to 0}{\to} 0$

$\forall h \in \mathbb{R}$ sao cho $a+h \in X$ thì

$$(gof)(a+h) = g(f(a+h)) = g(f(a) + hf'(a) + h\varepsilon_1(h))$$

$$= g(f(a)) + (hf'(a) + h\varepsilon_1(h))g'(f(a)) + (hf'(a) + h\varepsilon_1(h)).\varepsilon_2(hf'(a) + h\varepsilon_1(h))$$

$$= g(f(a)) + hf'(a)g'(f(a)) + h\varepsilon(h)$$

trong đó $\varepsilon(h) = \varepsilon_1(h)g'(f(a)) + (f'(a) + \varepsilon_1(h)).\varepsilon_2(hf'(a) + h\varepsilon_1(h))$

vì $\varepsilon_1(h) \underset{h\to 0}{\to} 0$, $\varepsilon_2(k) \underset{k\to 0}{\to} 0$ suy ra $\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\to} 0$. Dẫn đến

$$\frac{(gof)(a+h) - (gof)(a)}{h} \underset{h\to 0}{\to} f'(a)g'(f(a))$$

Định lí 3.3: (Đạo hàm của hàm ngược).

Giả sử $f: X \to \mathbb{R}$ *đơn điệu ngặt, liên tục trên* X, *khả vi tại* $a \in X$ *và* $f'(a) \neq 0$

Khi đó hàm ngược của f *là* $f^{-1}: f(X) \to \mathbb{R}$ *khả vi tại* $f(a)$ *và*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} \tag{3.7}$$

Chứng minh: Theo giả thiết, f là một song ánh vậy tồn tại hàm ngược f^{-1} liên tục trên $f(X)$. $\forall y \in f(X) \setminus \{f(a)\}$. Chúng ta xét

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \frac{1}{\dfrac{y - f(a)}{f^{-1}(y) - a}} \to \frac{1}{f'(a)} \text{ nếu } f'(a) \neq 0$$

Chứng tỏ f^{-1} khả vi tại $f(a)$ và $\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(f(a)).f'(a) = 1$

Nếu gọi $C_{f^{-1}}$ là đồ thị của hàm f^{-1} thì các tiếp tuyến tại $A(a, f(a)) \in C_f$ $A'(f(a), a) \in C_{f^{-1}}$ đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ I và III

Hình 3.4. mô tả điều đó

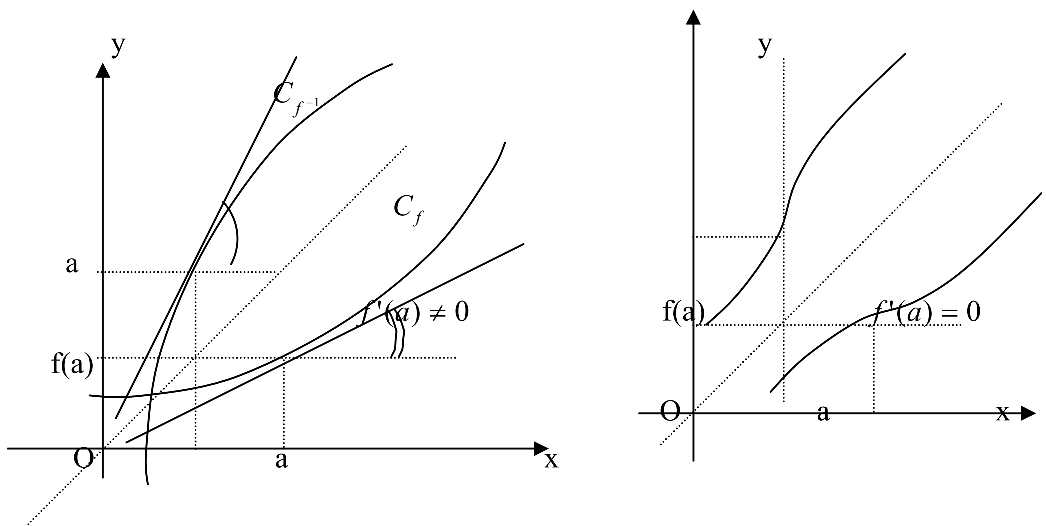
3.1.3. Đạo hàm trên một khoảng (ánh xạ đạo hàm)

A. Định nghĩa: Cho $f \in \mathbb{R}^X$ khả vi tại mỗi điểm $x \in (a,b) \subseteq \mathbb{R}$

Người ta kí hiệu ánh xạ $f': (a,b) \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f'(x)$$

là ánh xạ đạo hàm hay đạo hàm của $f(x)$ trên (a,b) và thường kí hiệu $f'(x)$ hay $\dfrac{df(x)}{dx}$, $\forall x \in (a,b)$. Khi đó người ta cũng nói rằng $f(x)$ khả vi trên $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$



H.3.4

B. Các tính chất

Các định lí dưới đây suy ra một cách dễ dàng từ các định lí ở mục 3.1.2.

Định lí 3.4: *Cho* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *khả vi trên* X, *(kí hiệu* $(a,b) = X$ *) khi đó.*

1. $f + g$ *khả vi trên* X *và* $(f+g)' = f' + g'$

2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λf *khả vi trên* X *và* $(\lambda f)' = \lambda f'$

3. $f.g$ *khả vi trên* X *và* $(f.g)' = f'g + fg'$ (3.5)'

4. $g(x) \neq 0$ *trên* X *thì* $\dfrac{f}{g}$ *khả vi trên* X *và* $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Bằng phép qui nạp, ta nhận được:

Nếu $n \in \mathbb{N}^*$ và $f_1, f_2, ..., f_n$ khả vi trên X thì

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \text{ khả vi trên } X \text{ và } \left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} f_i'$$

$$\prod_{i=1}^{n} f_i \text{ khả vi trên } X \text{ và } \left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)' = \sum_{k=1}^{n} f_1 ... f_{k-1} f_k' f_{k+1} ... f_n$$

Định lí 3.5*: Cho* $f \in \mathbb{R}^X$ *và* $g \in \mathbb{R}^Y$. *Nếu* f *khả vi trên* X *và* g *khả vi trên* $f(X)$ *thì* gof *khả vi trên* X *và ta có công thức:*

$$(gof)' = (g'of)f' \qquad (3.6)'$$

Tương tự ta nhận được $(hogof)' = (h'ogof)(g'of)f'$

Định lí 3.6: *Cho* $f \in \mathbb{R}^X$ *đơn điệu ngặt trên* X *, khả vi trên* X *và* $f'(x) \neq 0$ *trên* X *khi đó* f^{-1} *khả vi* $f(X)$ *trên và ta có công thức:*

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'} \qquad (3.7)'$$

3.1.4. Đạo hàm của các hàm số thông dụng

A. Hàm số mũ

Cho $y(x) = a^x,\ x \in \mathbb{R}$

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h} \to a^x \ln a$$ (nhờ vào công thức (2.6))

Vậy hàm mũ khả vi trên $\mathbb{R}$ và $y'(x) = a^x \ln a$. Đặc biệt $(e^x)' = e^x$ (3.8)

B. Hàm số lôgarit

Cho $y(x) = \log_a x,\ x \in \mathbb{R}_+^*$. Hàm ngược của nó là $x = a^y$

$$x' = a^y \ln a \Rightarrow y' = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a} \qquad (3.9)$$

Đặc biệt $y = \ln x$ thì $y' = \frac{1}{x}$ (3.10)

C. Hàm luỹ thừa

Cho $y(x) = x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}_+$ .Lấy lôgarit cả hai vế sẽ có $\ln y = \alpha \ln x$

Sử dụng đạo hàm của hàm hợp ta có

$$\frac{y'}{y} = \alpha \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \alpha x^{\alpha - 1} \qquad (3.11)$$

Trường hợp $x \leq 0$ và tuỳ theo α khi biểu thức $x^{\alpha-1}$ xác định thì ta vẫn nhận được công thức trên

D. Hàm lượng giác

Cho $f(x) = \sin x,\ f \in [-1,1]^{\mathbb{R}}$

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} = \sin x \frac{2\sin^2 \frac{h}{2}}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}$$

Theo công thức (2.1) suy ra $\frac{\sin h}{h} \underset{h \to 0}{\to} 1,\quad \frac{2\sin^2 \frac{h}{2}}{h} \underset{h \to 0}{\to} 0$

Vậy $(\sin x)' = \cos x,\quad \forall x \in \mathbb{R}$ (3.12)

Tương tự có thể chỉ ra $f(x)=\cos x$ cũng khả vi trên $\mathbb{R}$ và

$$\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow(\cos x)'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x \qquad (3.13)$$

Tương tự chỉ ra được $\mathrm{tg}x$ khả vi trên $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ đồng thời

$$(\mathrm{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\mathrm{tg}^2 x \qquad (3.14)$$

và cotgx khả vi trên $\mathbb{R}\backslash\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ đồng thời ta nhận được công thức

$$(\mathrm{cotg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-(1+\mathrm{cotg}^2 x). \qquad (3.15)$$

E. Hàm lượng giác ngược

Cho $y(x)=\arccos x,\ y\in[0,\pi]^{[-1,1]}$ ta sẽ chứng minh $y(x)$ khả vi trên khoảng $(-1,1)$.

Thật vậy, hàm ngược của nó $x=\cos y$. $x'=-\sin y=-\sqrt{1-\cos^2 y}$ vì $y\in(0,\pi)$

Vậy $$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (3.16)$$

Tương tự ta có $$(\mathrm{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2},\quad (\mathrm{arccotg}x)'=-\frac{1}{1+x^2} \qquad (3.17)$$

F. Hàm cho dưới dạng tham số

Cho $f\in\mathbb{R}^X$ dưới dạng tham số:

$$x:(\alpha,\beta)\to X,\qquad y:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$$

Hay $$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \quad \text{khi } t\in(\alpha,\beta)=T \end{cases}$$

Khi t thay đổi trên khoảng (α,β) thì điểm $M(\varphi(t),\psi(t))$ vạch nên một đường cong C trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Người ta nói rằng hệ phương trình trên xác định một hàm số cho dưới dạng tham số và cũng là phương trình tham số của đường cong C

Nếu x,y khả vi trên T, tồn tại hàm ngược $t=\varphi^{-1}(x)$ khả vi và $\varphi'(t)$ khác không trên T, thì theo công thức tính đạo hàm của hàm số ngược và hàm số hợp sẽ nhận được

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad (3.18)$$

G. Đạo hàm lôgarit

Nếu f có dạng tích của các nhân tử với số mũ cố định hay $f=u^v, u=u(x)>0, v=v(x)$, thì ta có thể xét đạo hàm lôgarit của f tương tự như hàm luỹ thừa trong mục C hoặc hàm số mũ trong mục A. Sau đó ta sử dụng định lí đạo hàm của hàm hợp.

Thật vậy $f(x)=u^{\alpha}v^{\beta}\omega^{\gamma}$ trong đó $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ còn các hàm $u(x), v(x), \omega(x)$ khả vi trên X và luôn dương trên X. Từ đó ta có:

$$\ln f(x)=\alpha\ln u+\beta\ln v+\gamma\ln\omega$$

$$\frac{f'}{f}=\alpha\frac{u'}{u}+\beta\frac{v'}{v}+\gamma\frac{\omega'}{\omega}. \Rightarrow f'(x)=\left(\alpha\frac{u'}{u}+\beta\frac{v'}{v}+\gamma\frac{\omega'}{\omega}\right)f(x)$$

hoặc có thể biểu diễn

$$f(x)=e^{\alpha\ln u+\beta\ln v+\gamma\ln w}$$

Nếu $f(x)=u(x)^{v(x)}$ thì có thể biểu diễn $f(x)=e^{v(x)\ln u(x)}$. Các cách tính đạo hàm thông qua công thức đạo hàm của hàm lôgarit gọi là đạo hàm lôga.

H. Bảng các đạo hàm của các hàm số thông dụng

$y=C=\text{const}, \ \forall x\in\mathbb{R}$	$y'=0, \ \forall x\in\mathbb{R}$
$y=x^{\alpha}, \alpha\in\mathbb{R}, \ \forall x\in X$	$y'=\alpha x^{\alpha-1}, \ \forall x\in X_1\subset X$
$y=\sin x, \ \forall x\in\mathbb{R}$	$y'=\cos x, \ \forall x\in\mathbb{R}$
$y=\cos x, \ \forall x\in\mathbb{R}$	$y'=-\sin x, \ \forall x\in\mathbb{R}$
$y=\mathrm{tg}x, \ \forall x\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\mathrm{tg}^2x, \ \forall x\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, \ k\in\mathbb{Z}\right\}$
$y=\cot gx, \forall x\in\mathbb{R}\backslash\{k\pi, \ k\in\mathbb{Z}\}$	$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-(1+\cot g^2x), \ \forall x\in\mathbb{R}\backslash\{k\pi, \ k\in\mathbb{Z}\}$
$y=a^x, \ \forall x\in\mathbb{R}$	$y'=a^x\ln a, \ \forall x\in\mathbb{R}$
$y=\log_a x, \ \forall x\in\mathbb{R}_+^*$	$y'=\frac{1}{x\ln a}, \ \forall x\in\mathbb{R}_+^*$
$y=\arcsin x, \ \forall x\in[-1,1]$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \forall x\in(-1,1)$
$y=\arccos x, \ \forall x\in[-1,1]$	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \forall x\in(-1,1)$
$y=\mathrm{arctg}x, \ \forall x\in\mathbb{R}$	$y'=\frac{1}{1+x^2}, \forall x\in\mathbb{R}$
$y=\mathrm{arc}\cot gx, \ \forall x\in\mathbb{R}$	$y'=-\frac{1}{1+x^2}, \forall x\in\mathbb{R}$
$y=\mathrm{sh}x, \ \forall x\in\mathbb{R}$	$y'=\mathrm{ch}x, \ \forall x\in\mathbb{R}$
$y=\mathrm{ch}x, \ \forall x\in\mathbb{R}$	$y'=\mathrm{sh}x, \ \forall x\in\mathbb{R}$
$y=\mathrm{th}x, \ \forall x\in\mathbb{R}$	$y'=\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}=1-\mathrm{th}^2x, \ \forall x\in\mathbb{R}$

$y = \coth x,\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $\qquad\qquad$ $y' = -\dfrac{1}{sh^2 x} = 1 - \coth^2 x, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Ví dụ 3.1: Hãy tính đạo hàm tại 0 của các hàm số sau (nếu có)

1. $f_1(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

2. $f_2(x) = x^{\frac{1}{3}}$

3. $f_3(x) = x^{\frac{2}{3}}$

Giải:

1. $\dfrac{f_1(h) - f_1(0)}{h} = \dfrac{h^2 \sin\dfrac{1}{h}}{h} = h\sin\dfrac{1}{h} \underset{h\to 0}{\to} 0 = f'(0)$

2. $\dfrac{f_2(h) - f_2(0)}{h} = \dfrac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = \dfrac{1}{h^{\frac{2}{3}}} \underset{h\to o}{\to} +\infty$, $f_2(x)$ không khả vi tại 0

3. $\dfrac{f_3(h) - f_3(0)}{h} = \dfrac{h^{\frac{2}{3}}}{h} = \dfrac{1}{h^{\frac{1}{3}}} \underset{h\to 0^+}{\to} +\infty$

$\underset{h\to 0^-}{\to} -\infty$, chứng tỏ $f_3(x)$ không khả vi tại 0

Ví dụ 3.2: Cho $f \in \mathbb{R}^X$ khả vi tại $a \in X$. Hãy tìm

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h}$$

Giải:

$$\frac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h} = h\frac{f(a+h^2) - f(a)}{h^2} - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \to -f'(a)$$

Ví dụ 3.3: Chứng tỏ rằng $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ cho bởi biểu thức dưới đây không khả vi tại mọi $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in \mathbb{Q} \\ 3 - x, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

Giải: Ta nhận thấy tập $\mathbb{Q}$ và $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ đều trù mật. Ta lấy $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in Q}} f(x) = x_0 + 1\ , \qquad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in R\backslash Q}} f(x) = 3 - x_0$$

Để liên tục tại x_0 thì $x_0 + 1 = 3 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1$

Vậy hàm không khả vi tại $x \neq 1$ vì không thoả mãn điều kiện cần của hàm khả vi

Ta xét $1+h\in\mathbb{Q}$, $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{h}{h}\underset{h\to 0,h\in\mathbb{Q}}{\longrightarrow}1$

Ta xét $1+h\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=-\dfrac{h}{h}\underset{h\to 0,h\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}{\longrightarrow}-1$

Vậy không tồn tại $f'(1)$. Tóm lại, hàm số không khả vi $\forall x\in\mathbb{R}$

Ví dụ 3.4: Cho f và g khả vi tại a. Hãy tính

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}$$

Giải:

Ta lập hàm số $h(x)=f(x)g(a)-f(a)g(x)$ khả vi tại a và $h(a)=0$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=h'(a)$$
$$=f'(a)g(a)-g'(a)f(a)$$

Ví dụ 3.5: Vẽ các đồ thị của hàm số và đạo hàm của các hàm số sau đây.

1. $y=x|x|$
2. $y=\ln|x|$

Giải:

Trước hết ta hãy tính $y'(x)$

1. $y=x|x|=\begin{cases}-x^2 \text{ khi } x\le 0\\ x^2 \quad \text{khi } x\ge 0\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}-2x \text{ khi } x<0\\ 2x \quad \text{khi } x>0\end{cases}$

$y_t'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x^2}{x}=0$, $y_p'(0)=0$. $y_t'(0)=y_p'(0)=0\Rightarrow y'=2|x|$ trên $\mathbb{R}$

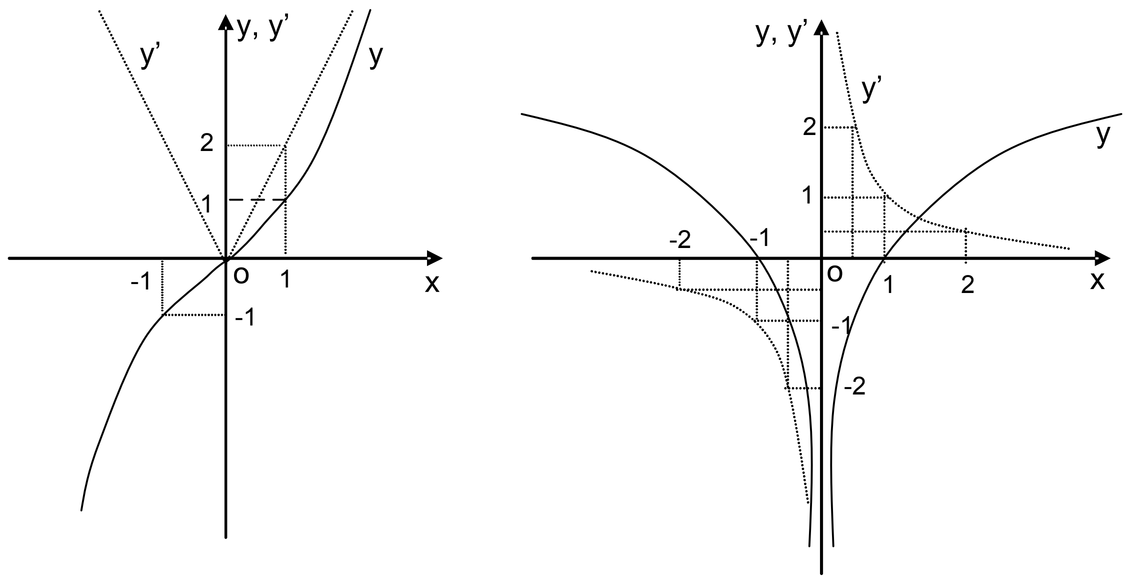
2. $y=\ln|x|=\begin{cases}\ln(-x) \text{ khi } x<0\\ \ln x \quad \text{khi } x>0\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}\dfrac{1}{-x}(-1) \text{ khi } x<0\\ \dfrac{1}{x} \quad \text{khi } x>0\end{cases}\Rightarrow y'=\dfrac{1}{x}$ với $x\in\mathbb{R}^*$

Hình 3.5 mô tả các đồ thị của các hàm số y và y’

Ví dụ 3.6 : Tính đạo hàm y_x' của hàm số

$$\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\text{arctg}t\end{cases}$$

Giải: $$y_x'=\frac{dy}{dx}=\frac{d(t-\text{arctg}t)}{d\ln(1+t^2)}=\frac{1-\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2}$$



H.3.5

3.2. VI PHÂN CỦA HÀM SỐ

3.2.1. Định nghĩa vi phân tại một điểm

Cho $f \in \mathbb{R}^X$, f khả vi tại $a \in X$. Vi phân của f tại a được kí hiệu là $df(a)$ và được xác định bởi công thức

$$df(a) = f'(a).h, \quad h \in \mathbb{R} \tag{3.19}$$

Từ định nghĩa ta nhận thấy $df(a)$ là một hàm tuyến tính của h.

Xét hàm số $f(x) = x$ trên $\mathbb{R}$, $f'(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ vậy $dx = 1.h$ .Từ đó ta suy ra

$$df(a) = f'(a)dx. \qquad (3.19)'$$

Hệ quả: *Để $f(x)$ khả vi tại a điều kiện cần và đủ là tồn tại hằng số $\lambda \in \mathbb{R}$ và một VCB $\alpha(h)$ khi h dần đến 0 sao cho*

$$f(a+h) - f(a) = \lambda h + h\alpha(h) \text{ trong đó } \lambda = f'(a). \tag{3.20}$$

Thật vậy $f(x)$ khả vi tại a khi và chỉ khi tồn tại $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

Từ đó ta suy ra $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = \alpha(h) \underset{h\to 0}{\to} 0$, đặt $\lambda = f'(a)$ nhận được

$$f(a+h) - f(a) = \lambda h + h\alpha(h) \tag{3.21}$$

Tương tự như đạo hàm tại một điểm, ta nhận được các tính chất đại số của vi phân.

Định lí 3.7: *Nếu $f, g \in \mathbb{R}^X$ và khả vi tại $a \in X$ thì*

1. $d(f+g)(a) = df(a) + dg(a)$

2. $\mathrm{d}(\lambda f)(a) = \lambda \mathrm{d}f(a)$ *với* $\lambda \in \mathbb{R}$ (3.22)

3. $\mathrm{d}(fg)(a) = f(a)\mathrm{d}g(a) + g(a)\mathrm{d}f(a)$

4. $\mathrm{d}\left(\dfrac{f}{g}\right)(a) = \dfrac{1}{g^2(a)}\big(g(a)\mathrm{d}f(a) - f(a)\mathrm{d}g(a)\big)$ *khi* $g(a) \neq 0$

Chú ý:

a. $f(a+h) - f(a) = \Delta f(a)$ là số gia của hàm số ứng với số gia đối số $\Delta x = h$. Vậy nếu $f(x)$ khả vi tại a thì với h khá bé sẽ có công thức tính gần đúng số gia của hàm số

$$\Delta f(a) \approx \mathrm{d}f(a) \text{ hay } f(a+h) \approx f(a) + df(a) \qquad (3.23)$$

b. Xét hàm hợp gof. Nếu f khả vi tại a và g khả vi tại $f(a)$ theo định lí 2 thì gof khả vi tại a. Tức là

$$\mathrm{d}\big(gof\big)(a) = \big(gof\big)'(a).h = g'\big(f(a)\big)f'(a).h = g'\big(f(a)\big)\mathrm{d}f(a).$$

Như vậy dù x là biến độc lập hay biến phụ thuộc thì dạng vi phân đều giống nhau.Từ tính chất đó người ta nói vi phân cấp 1 có tính bất biến.

3.2.2. Vi phân trên một khoảng

Cho khả vi trên $(a,b) \subseteq X$. Vi phân của hàm số trên (a,b) được xác định theo công thức

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x).h \text{ với } x \in (a,b).$$

Tương tự như định lí trên, ta nhận được định lí sau đây.

Định lí:3.8 *Nếu* f, g *khả vi trên* (a,b) *thì trên khoảng đó cũng thoả mãn các hê thức sau.*

1. $\mathrm{d}(f+g)(x) = \mathrm{d}f(x) + \mathrm{d}g(x)$

2. $\mathrm{d}(\lambda f)(x) = \lambda \mathrm{d}f(x)$

3. $\mathrm{d}(fg)(x) = f(x)\mathrm{d}g(x) + g(x)\mathrm{d}f(x)$ (3.22)’

4. $\mathrm{d}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{g^2(x)}\big(g(x)\mathrm{d}f(x) - f(x)\mathrm{d}g(x)\big)$ *khi* $g(x) \neq 0$

Ví dụ 3.7: Tính gần đúng $\sin 60^o 40'$

Giải:

Ta đặt $f(x) = \sin x$, sẽ có $f'(x) = \cos x$

Ta chọn $x_o = 60^o = \dfrac{\pi}{3}$ và đặt $h = 40' = \dfrac{40.\pi}{60.180} = \dfrac{\pi}{270}$

Theo công thức xấp xỉ ta có:

$$\sin 60^o 40' \approx \sin 60^o + \cos 60^o.\frac{\pi}{270}$$

$$\approx \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.\frac{\pi}{270} = 0{,}866 + 0{,}006 = 0{,}872$$

Ví dụ 3.8: Một hình cầu bằng kim loại bán kính R, khi nóng lên bán kính nở thêm một đoạn ΔR. Tính thể tích mới của hình cầu một cách chính xác và gần đúng.

Áp dụng cho các giá trị : $R = 5cm, \Delta R = 0{,}1cm$.

Giải:

Công thức tính thể tích V của hình cầu là:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Sau khi giãn nở, bán kính hình cầu là $R + \Delta R$, thể tích mới của hình cầu được tính chính xác sẽ là:

$$V + \Delta V = \frac{4}{3}\pi(R+\Delta R)^3 = \frac{4}{3}\pi(5+0{,}1)^3 = 176{,}868\pi\ (cm^3)$$

Nếu tính gần đúng, ta xem : $\Delta V \approx dV$ (Số gia của thể tích gần bằng vi phân) và khi đó thể tích $V = \frac{4\pi}{3}R^3$ xem như hàm số của đối số R. Vậy:

$$\mathrm{d}V = V'\Delta R = 4\pi R^2 \Delta R = 4\pi.5^2.0{,}1 = 10\pi(cm^3)$$

Thể tích ban đầu của hình cầu:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 5^3 = 166{,}666\pi\ (cm^3)$$

Vậy thể tích mới của hình cầu tính gần đúng là:

$$V + \Delta V \approx V + dV = 176{,}666\pi\ (cm^3)$$

Sai số tuyệt đối trong bài toán này là:

$$176{,}868\pi\ (cm^3) - 176{,}666\pi\ (cm^3) = 0{,}202\pi\ (cm^3)$$

Như vậy sai số tương đối là:

$$\delta = \frac{0{,}202\pi}{176{,}868\pi} = 0{,}0011$$

3.3. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP CAO

3.3.1. Đạo hàm cấp cao

A. Định nghĩa:

1. Cho f khả vi trên X, nếu $f'(x)$ khả vi tại $a \in X$ thì người ta nói rằng f có đạo hàm cấp 2 tại a và đạo hàm đó được kí hiệu là $f''(a)$. Tương tự đạo hàm cấp n của $f(x)$ tại a, được kí hiệu là $f^{(n)}(a)$, nó chính là đạo hàm cấp 1 của hàm $f^{(n-1)}(x)$ tại a.

2. Nói rằng $f(x)$ khả vi đến cấp n (hay n lần) trên X khi và chỉ khi tồn tại $f^{(n)}(x)$ trên X, $n \in \mathbb{N}^*$ trong đó $f^{(n)}(x)$ là đạo hàm của $f^{(n-1)}(x)$

3. Nói rằng $f(x)$ khả vi vô hạn lần trên X khi và chỉ khi $f(x)$ khả vi n lần trên X, $\forall n \in \mathbb{N}$. Sau đây thường kí hiệu $f^{(0)}(x) = f(x)$

Chú ý:

a. Nếu f khả vi n lần trên X thì $\forall p, q \in \mathbb{N}$ sao cho $p + q \le n$ ta có

$$\left(f^{(p)}\right)^{(q)} = f^{(p+q)}$$

b. Tập xác định của $f^{(n)}$ thường chứa trong tập xác định của $f^{(n-1)}$

B. Các phép tính

Định lí 3.9: *Cho* $\lambda \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$, $f, g \in \mathbb{R}^X$ *khả vi n lần trên* X*, khi đó trên* X *có các hệ thức sau đây :*

1. $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

2. $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$

3. $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$ *được gọi là công thức Leibnitz* (3.24)

4. $g(x) \ne 0$ *trên* X *thì* $\dfrac{f}{g}$ *khả vi n lần trên* X

Chứng minh:

Các hệ thức 1.và 2. được chứng minh dễ dàng bằng qui nạp

Hệ thức 3. được chứng minh qui nạp theo n như sau:

Với n = 1, công thức đúng theo định lí 3.5 trong 3.1.3.

Giả sử f, g khả vi (n + 1) lần trên X và công thức Leibnitz đã đúng với n tức là:

$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$ đó là tổng của những tích $f^{(k)} g^{(n-k)}$ khả vi trên X

nên tồn tại $(f.g)^{(n+1)}$ và ta có

$$(f.g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} = \sum_{l=1}^{n+1} C_n^{l-1} f^{(l)} g^{(n+1-l)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$= \sum_{l=0}^{n+1} C_n^{l-1} f^{(l)} g^{(n+1-l)} + \sum_{k=0}^{n+1} C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} \text{ (vì } C_n^{-1} = 0 \text{ và } C_n^{n+1} = 0\text{)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \left(C_n^{k-1} + C_n^k\right) f^{(k)}.g^{(n+1-k)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

Hệ thức 4. Cũng được qui nạp theo n:.

Với n = 1 ta có công thức $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ chứng tỏ rằng $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ khả vi

Giả sử rằng f, g khả vi (n + 1) lần và tính chất đã đúng với n. Vì f', g, f, g' khả vi n lần trên X nên $f'g - fg'$ và g^2 khả vi n lần trên X. Theo giả thiết qui nạp $\dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ khả vi n lần trên X như vậy $\dfrac{f}{g}$ khả vi (n + 1) lần trên X.

3.3.2. Vi phân cấp cao

A, Định nghĩa:

1. Nếu f khả vi đến cấp n tại $a \in X$ thì biểu thức $f^{(n)}(a).h^n$ gọi là vi phân cấp n tại a được kí hiệu là $\mathrm{d}^n f(a)$. Vậy là $\mathrm{d}^n f(a) = f^{(n)}(a)h^n$ hay $\mathrm{d}^n f(a) = f^{(n)}(a)\mathrm{d}x^n$

2. Nếu f khả vi đến cấp n trên X thì vi phân cấp n của f trên X được kí hiệu là $\mathrm{d}^n f(x),\ x \in X$ và xác định theo công thức sau

$$\forall x \in X, \quad \mathrm{d}^n f(x) = f^{(n)}(x)h^n = f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n$$

Từ định lí về đạo hàm cấp cao, trực tiếp nhận được các công thức tính vi phân cấp cao dưới đây

B. Các phép tính

Định lí 3.10: *Nếu f, g khả vi đến cấp n trên X thì khi đó*

1. $\mathrm{d}^n(f+g) = \mathrm{d}^n f + \mathrm{d}^n g$

2. *Với* $\lambda \in \mathbb{R},\quad \mathrm{d}^n(\lambda f) = \lambda \mathrm{d}^n f$

3. $\mathrm{d}^n(fg) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \mathrm{d}^k f \mathrm{d}^{n-k} g$ (3.25)

4. *Nếu $g(x) \neq 0$ thì $\dfrac{f}{g}$ có vi phân đến cấp n.*

Chú ý:

a. Không thể có công thức tổng quát cho $\left(\dfrac{f}{g}\right)^{(n)}$ cũng như $\mathrm{d}^n \dfrac{f}{g}$.

b. Tính bất biến của vi phân bị phá vỡ khi lấy vi phân cấp cao (từ 2 trở lên). Ví dụ sau sẽ chứng tỏ điều đó. Cho hàm hợp gof, trong đó f và g có dạng:

$$f(x) = x^3, g(f) = f^2 \Rightarrow g\big(f(x)\big) = x^6$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}g(x) = 6x^5 dx \Rightarrow \mathrm{d}^2 g(x) = 30x^4 \mathrm{d}x^2$$

Mặt khác $\mathrm{d}g(f) = 2f\mathrm{d}f \Rightarrow \mathrm{d}^2 g(f) = 2(\mathrm{d}f)^2$

Ta có $\quad \mathrm{d}f = 3x^2\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}^2 g(f) = 18x^4\mathrm{d}x^2 \neq 30x^4\mathrm{d}x^2$

Vậy tính bất biến bị phá vỡ khi thực hiện phép lấy vi phân cấp 2 của hàm số đã cho.

3.3.3. Lớp của một hàm số

Dưới đây người ta đưa ra một số khái niệm để đơn giản hoá cách phát biểu một số mệnh đề

A. Định nghĩa

1. Cho $n \in \mathbb{N}$. Ta nói f thuộc lớp C^n (kí hiệu $f \in C^n$) trên X nếu f khả vi n lần trên X và $f^{(n)}$ liên tục trên tập X đó.

2. Nói rằng $f \in C^\infty$ trên X nếu f khả vi vô hạn lần trên X.

3. Nói rằng $f \in C^0$ trên X nếu f liên tục trên X.

Chú ý: Theo định nghĩa trên, một hàm có thể khả vi n lần trên X nhưng chưa chắc đã thuộc C^n. Chẳng hạn ta xét hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 \quad , & x = 0 \end{cases}$$ khả vi trên $\mathbb{R}$ nhưng không thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$

Thật vậy

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 \quad , & x = 0 \end{cases}$$ không có $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$

4. Nói rằng $f \in C^n$ từng khúc trên $[a,b]$ khi và chỉ khi tồn tại $p \in \mathbb{N}^*$, $a_0, ..., a_p \in \mathbb{R}$ để $f \in C^n$ trên $[a_i, a_{i+1}]$ $(i = 0, ..., p-1)$

Chẳng hạn $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \in (0,1] \\ 0 & \text{khi } x \in [-1,0] \end{cases}$, $\quad f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \in (0,1] \\ 0 & \text{khi } x \in [-1,0] \end{cases}$

Vậy $f(x) \in C^1$ trên $[-1,1]$

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{khi } x \in (0,1] \\ 0 & \text{khi } x \in [-1,0] \end{cases}$$. Vậy $f \in C^2$ từng khúc trên $[-1,1]$

B. Tính chất

Định lí 3.11: *Nếu $f, g \in C^n$ trên X thì*

1. $(f+g) \in C^n$ *trên* X

2. $\lambda f \in C^n$ *trên* X, $\lambda \in \mathbb{R}$

3. $fg \in C^n$ *trên* X

4. $\dfrac{f}{g} \in C^n$ *trên* X *khi* $g(x) \neq 0,\ \forall x \in X$

Định lí này thực chất là hệ quả của định lí 3.9 trong mục 3.3.1.

Định lí 3.12: *Cho* $f \in \mathbb{R}^X$ *và* $g \in \mathbb{R}^Y$, $f(X) \subset Y$. *Nếu* f *và* g *thuộc lớp* C^n *thì* $gof \in C^n$ *trên* X

Chứng minh : Ta qui nạp theo n.

Với n = 1 định lí đúng (theo định lí 3.5 trong mục 3.1.3.)

Giả sử định lí đã đúng với n, cho $f, g \in C^{n+1}$ trên X và trên Y. Ta có

$$(gof)' = (g'of)f'$$

Vì $f, g' \in C^n$, từ giả thiết qui nạp chứng tỏ $g'of \in C^n$. Hơn nữa $f' \in C^n$ Vậy tích $(g'of)f' \in C^n$, chứng tỏ $gof \in C^{n+1}$

Ví dụ 3.9: Cho $f(x) = x^m$, $m \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$. Hãy tính $f^{(n)}(x)$ với $n \in \mathbb{N}$

Giải:

$$f'(x) = mx^{m-1}, \qquad f''(x) = m(m-1)x^{m-2}, \quad \ldots$$

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)\ldots(m-k+1)x^{m-k}$$

Chứng tỏ

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n} & \text{khi } n < m \\ m! & \text{khi } n = m \\ 0 & \text{khi } n > m \end{cases}$$

Ví dụ 3.10: Chứng minh nếu $f(x) = \sin x$ thì

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Giải:

Trường hợp n = 1, công thức đúng: $(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

Giả sử công thức đúng với n

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

Tương tự cũng nhận được

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Ví dụ 3.11: Cho $y = \text{arctg}x$ hãy tính $y^{(n)}(x)$

Giải:

Vì $x = \text{tg}y \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1+x^2} = \cos^2 y = \cos y.\sin\left(y + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$y'' = \left[-\sin y.\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right) + \cos y.\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right]y'$$

$$y'' = \cos^2 y.\cos\left(2y+\frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 y.\sin 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$$

Bằng qui nạp suy ra $y^{(n)} = (n-1)!\cos^n y.\sin n\left(y+\dfrac{\pi}{2}\right)$

Ta đặt $Z = \text{arctg}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} - y,\ x \neq 0$. Khi đó ta có

$$y^{(n)} = (n-1)!\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\sin n(\pi - Z)$$

Vậy $\quad y^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\sin\left(n\text{arctg}\dfrac{1}{x}\right)$

Ví dụ 3.12: Tính đạo hàm cấp 100 của hàm số $f(x) = x^2\sin x$

Giải:

Áp dụng công thức Leibnitz ta nhận được

$$f^{(100)}(x) = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k (x^2)^{(k)}(\sin x)^{(100-k)}$$

$$f^{(100)}(x) = C_{100}^0 x^2(\sin x)^{(100)} + C_{100}^1(x^2)'(\sin x)^{(99)} + C_{100}^2(x^2)''(\sin x)^{(98)}$$

$$= x^2\sin(x+50\pi) + 200x\sin\left(x+\frac{99\pi}{2}\right) + 9900\sin(x+49\pi)$$

$$= x^2\sin x - 200x\cos x - 9900\sin x$$

Ví dụ 3.13: Cho $\text{f} : (-1,1) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)} \quad \text{hãy tính } f^{(n)}(x)$$

Giải: Phân tích $f(x)$ thành các phân thức tối giản

$$f(x) = \frac{5}{2}.\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4}.\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}.\frac{1}{x+1}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{5}{2}.(-1)^n.\frac{(n+1)!}{(x-1)^{2+n}} - \frac{1}{4}.(-1)^n\frac{n!}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{4}.(-1)^n\frac{n!}{(x+1)^n}$$

Ví dụ 3.14: Cho $f_n(x) = x^{n-1}\ln(1+x)$ với $x \in (-1,+\infty)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Chứng minh $f_n(x)$ khả vi n lần trên $(-1,+\infty)$ và trên khoảng đó ta có

$$f_n^{(n)}(x) = (n-1)!\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+x)^k}$$

Giải:

Trước hết, ta thấy các hàm x^{n-1} và $\ln(1+x)$ khả vi vô hạn lần trên $(-1,+\infty)$ vậy $f_n(x) \in C^\infty$ trên $(-1,+\infty)$. Ta chứng minh qui nạp theo n như sau:

Với $n=1$: $f_1'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, công thức đúng

Giả sử công thức đúng với n, theo công thức Leibnitz ta có

$$f_{n+1}^{(n+1)}(x) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\{x.f_n(x)\} = xf_n^{(n+1)}(x) + C_{n+1}^1 f_n^{(n)}(x)$$

$$= x(n-1)!\sum_{k=1}^{n}\frac{-k}{(1+x)^{k+1}} + (n+1)(n-1)!\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+x)^k}$$

$$= (n-1)!\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{-k}{(1+x)^k} + \frac{k}{(1+x)^{k+1}} + \frac{n+1}{(1+x)^k}\right\}$$

$$= (n-1)!\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1-k}{(1+x)^k} + \sum_{l=2}^{n+1}\frac{l-1}{(1+x)^l}\right\}$$

$$= (n-1)!\left\{\frac{n}{1+x} + \frac{n}{(1+x)^{n+1}} + \sum_{k=2}^{n}\frac{n}{(1+x)^k}\right\}$$

$$= n!\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(1+x)^k}$$, công thức đúng với $n+1$.

Vậy công thức đúng $\forall n \in \mathbb{N}$. Ngoài ra nếu $x \neq 0$ sẽ có

$$f_n^{(n)}(x) = (n-1)!\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+x)^k} = \frac{(n-1)!}{1+x}.\frac{1-\dfrac{1}{(1+x)^n}}{1-\dfrac{1}{1+x}} = \frac{(n-1)!\left((1+x)^n - 1\right)}{x(1+x)^n}$$

Ví dụ 3.15: Cho các đa thức $P(x), Q(x)$ và hàm số $f \in C^\infty$ trên $\mathbb{R}$ với

$$f(x) = \begin{cases} P(x) & \text{khi } x \le 0 \\ Q(x) & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $P = Q$

Giải:

Vì $f \in C^\infty \Rightarrow \forall n$ có: $f^{(n)}(0) = P^{(n)}(0) = Q^{(n)}(0) \Rightarrow \deg P = \deg Q$

Giả sử $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_mx^m$ với $m \in \mathbb{N}$

$Q(x) = b_0 + b_1x + ... + b_mx^m$

$n = 0,\ 1, ...,\ m$ sẽ có $a_n = b_n$, thật vậy

$$P(0) = a_0 = Q(0) = b_0; \quad a_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!} = \frac{Q^{(n)}(0)}{n!} = b_n$$

$$\Rightarrow P(x) = Q(x)$$

Ví dụ 3.16: Cho $f,\ g \in C^2$ trên $\mathbb{R}$ và $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } g(x) \geq 0 \\ f(x) + \left(g(x)\right)^3 & \text{khi } g(x) < 0 \end{cases}$

Chứng minh rằng $h(x) \in C^2$ trên $\mathbb{R}$

Giải:

Dễ dàng nhận được $\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t \geq 0 \\ t^3 & \text{khi } t < 0 \end{cases}$ thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}$, suy ra $\varphi o g \in C^2$ trên $\mathbb{R}$. Vậy $h = f + \varphi o g \in C^2$ trên $\mathbb{R}$.

3.4. CÁC ĐỊNH LÍ VỀ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

3.4.1. Định lí Phéc ma (Fermat)

A. Điểm cực trị của hàm số

Cho $f \in \mathbb{R}^X$. Gọi hàm số đạt cực trị địa phương tại $a \in X$ khi và chỉ khi tồn tại lân cận $\Omega_\delta(a) \subset X$, để thoả mãn $f(x) - f(a) \geq 0$ hoặc $f(x) - f(a) \leq 0$, $\forall x \in \Omega_\delta(a)$

Trường hợp thứ nhất xảy ra người ta nói rằng f đạt cực tiểu địa phương tại a, trường hợp sau nói rằng f đạt cực đại địa phương tại a.

Nếu chỉ có $f(x) - f(a) > 0$ hoặc $f(x) - f(a) < 0$ ($x \neq a$) người ta nói rằng hàm số đạt cực trị địa phương ngặt tại a.

B. Định lí Fermat

Định lí 3.26: *Nếu $f(x)$ khả vi tại a và đạt cực trị địa phương tại a thì* $f'(a) = 0$.

Chứng minh: Ta giả thiết hàm đạt cực đại địa phương tại a. Theo định nghĩa tồn tại lân cận $\Omega_\delta(a)$ sao cho $\forall x \in \Omega_\delta(a)$ ta có $f(x) - f(a) \leq 0$

Như vậy $\forall h \in \mathbb{R}^*$ sao cho $a + h \in \Omega_\delta(a)$ sẽ có

$$\begin{cases} h > 0 \Rightarrow \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0 \\ h < 0 \Rightarrow \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0 \end{cases}$$

Chuyển qua giới hạn khi $h \to 0$ nhận được

$$\begin{cases} f'(a) \leq 0 \\ f'(a) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(a) = 0$$

Hàm đạt cực tiểu địa phương cũng chứng minh tương tự

Chú ý:

a. Sau này thường nói rằng hàm đạt cực trị tại a theo nghĩa là đạt cực trị địa phương tại a.

b. Nếu hàm đạt cực trị tại a thì a phải là điểm trong của X. Như vậy nếu $f(x)$ xác định trên [a, b] thì không có khái niệm đạt cực trị tại đầu mút a và b, có chăng chỉ nói về các đạo hàm trái tại b và phải tại a.

c. Định lí Fermat có thể phát biểu tổng quát hơn: Nếu $f(x)$ khả vi phải và trái tại a và đạt cực đại (cực tiểu) tại a thì

$$f_t'(a) \geq 0 \text{ và } f_p'(a) \leq 0, \ (f_t'(a) \leq 0 \text{ và } f_p'(a) \geq 0)$$

d. Hàm số có cực trị tại a chưa chắc khả vi tại a

Chẳng hạn , chúng ta xét hàm số sau đây

$$f(x) = \begin{cases} |x|\sin^2 \dfrac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

Hàm số có cực tiểu không chặt tại 0 vì $0 \leq |\mathrm{x}|\sin^2 \dfrac{1}{\mathrm{x}}, \ \forall \mathrm{x} \neq 0, \ \mathrm{f}\left(\dfrac{1}{\mathrm{k}\pi}\right) = 0, \ \forall \mathrm{k} \in \mathbb{Z}$.

Tuy nhiên không khả vi tại 0 vì

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|\sin^2 \dfrac{1}{h}}{h} \quad \text{không có giới hạn khi } h \to 0$$

e. Hàm số khả vi tại a và $f'(a) = 0$ chưa chắc đạt cực trị tại a, chẳng hạn hàm số

$f(x) = x^3$ có $f'(0) = 0$ tuy nhiên $\begin{cases} x^3 \leq 0 & \text{khi } x \leq 0 \\ x^3 \geq 0 & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$.Vậy nó không có cực trị tại 0.

3.4.2. Định lí Rôn (Rolle)

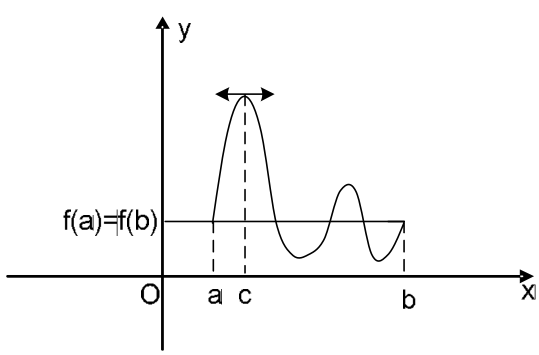
Định lí 3.27: *Cho* $\mathrm{f} \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ *thoả mãn các điều kiện:*

1. *f liên tục trên [a, b],*

2. *f khả vi trên (a, b),*

3. $f(a) = f(b)$.

Khi đó tồn tại $c \in (a,b)$ *sao cho* $f'(c) = 0$.



H.3.6

Chứng minh:

Theo tính chất của hàm liên tục trên [a, b] thì $f(x)$ sẽ đạt giá trị nhỏ nhất m và lớn nhất M trên [a, b]

$$m = \underset{[a,b]}{\text{Min}}\, f(x) = \underset{[a,b]}{\text{Inf}}\, f(x), \quad M = \underset{[a,b]}{\text{Max}}\, f(x) = \underset{[a,b]}{\text{Sup}}\, f(x)$$

Nếu m = M thì $f(x) = const \Rightarrow f'(x) = 0, \quad \forall x \in (a,b)$

Nếu m < M, vì $f(a) = f(b)$ nên không có đồng thời $M = f(a)$ và $m = f(b)$ hoặc $m = f(a)$ và $M = f(b)$. Chứng tỏ hàm đạt giá trị nhỏ nhất m hoặc lớn nhất M tại điểm $c \in (a,b)$, tức là $f(c) \le f(x)$ hoặc $f(c) \ge f(x)$. Theo định lí Fermat thì $f'(c) = 0$

Chú ý:

a. Định lí Rolle có thể minh hoạ hình học như sau: Trên đường cong C_f cho bởi phương trình $y = f(x)$ tồn tại ít nhất một điểm $M(c, f(c)) \in C_f$ với $c \in (a,b)$ tại đó tiếp tuyến của C_f song song với trục Ox. Xem hình 3.6.

b.. Điểm $c \in (a,b)$ thường được biểu diễn trong dạng: $c = a + \theta(b-a)$, $\theta \in (0,1)$

3.4.3. Định lí số gia hữu hạn. (định lí Lagơrăng (Lagrange))

Định lí 3.28: *Cho* $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ *thoả mãn các điều kiện:*

1. Liên tục trên [a, b],

2. Khả vi trên (a ,b),

Khi đó tồn tại $c \in (a,b)$ *sao cho* $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$ (3.26)

Chứng minh:

Ta xét hàm $\varphi \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ xác định bởi công thức $\varphi(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Rõ ràng $\varphi(x)$ liên tục trên [a,b], khả vi trên (a,b) và $\varphi(a) = \varphi(b) = f(a)$. Theo định lí Rolle tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $\varphi'(c) = 0$, cụ thể là:

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

Suy ra $\quad f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ hay $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

Như vậy $\quad \Delta f(a) = f'(c).h$ trong đó $h + a = b$ $\theta \in (0,1)$, $c = a + \theta h$

Chú ý:

Định lí Lagrange có thể minh hoạ hình học như sau :

Tồn tại ít nhất một điểm $M(c, f(c)) \in C_f$ với $c \in (a,b)$ mà tiếp tuyến tại đó song song với đường thẳng AB, trong đó $A(a, f(a)), B(b, f(b))$. Xem hình 3.7.

Hệ quả 1: (Định lí giới hạn của đạo hàm)

Cho $x_0 \in (a,b)$, $f \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ *thoả mãn các điều kiện:*

1. *$f(x)$ liên tục tại x_0,*

2. *$f(x)$ khả vi trên $(a,b) \setminus \{x_0\}$,*

3. $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = l$

Khi đó f khả vi tại x_0 và $f'(x)$ liên tục tại x_0.

Chứng minh

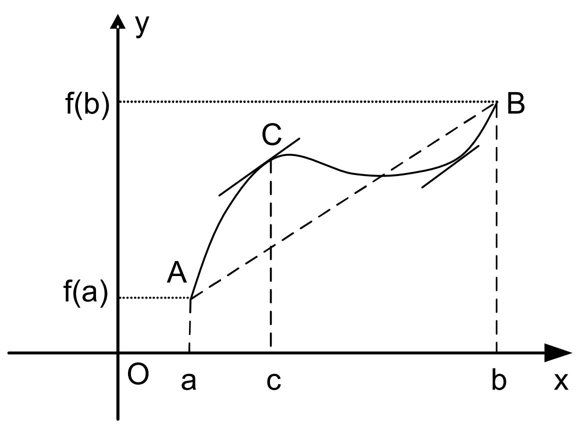
Vì $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = l$ nên $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ sao cho

$$\forall x \in (a,b) \setminus \{x_0\}: \quad 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f'(x) - l| < \varepsilon$$

Áp dụng định lí Lagrange trên $[x, x_0]$, như vậy tồn tại $c_x \in (x, x_0)$ sao cho

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(c_x) \text{ và đương nhiên } |c_x - x_0| < |x - x_0| < \eta$$

Từ đó suy ra $\left| \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - l \right| = |f'(c_x) - l| < \varepsilon$. Điều này chứng tỏ $f'(x_0) = l$ và từ điều kiện thứ ba của định lí suy ra $f'(x)$ liên tục tại x_0



H.3.7

Chúng ta nhận được định lí tương tự đối với đạo hàm trái hoặc phải dưới đây:

Hệ quả 2*: Cho* $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ *thoả mãn các điều kiện:*

1. *f liên tục phải tại a,*

2. *f khả vi trên (a, b),*

3. $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = l$. *Khi đó có* $f_p'(a) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$.

Hệ quả 3: *Cho* $f \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ *thoả mãn các điều kiện:*

1. *f liên tục tại $x_0 \in (a,b)$,*

2. f *khả vi trên* $(a,b)\setminus\{x_0\}$,

3. $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = +\infty, (-\infty)$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty, (-\infty)$

3.4.4. Định lí số gia hữu hạn suy rộng (Định lí Côsi(Cauchy))

Định lí 3.29: *Cho* $f, g \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ *thoả mãn các điều kiện:*

1. *f, g liên tục trên [a, b],*

2. *. f, g khả vi trên (a, b),*

3. $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$. *Khi đó tồn tại* $c \in (a,b)$ *sao cho* $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

(3.27)

Chứng minh

Trước hết thấy ngay $g(a) \neq g(b)$, vì nếu $g(a) = g(b)$, theo định lí Rolle suy ra tồn tại $c \in (a,b)$ để $g'(c) = 0$, điều này là vô lí vì trái với giả thiết.

Ta hãy xét hàm số $\varphi \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ cho bởi công thức sau

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big)$$

Hàm φ thoả mãn các điều kiện của định lí Rolle nên tồn tại $c \in (a,b)$ để $\varphi'(c) = 0$,

tức là $f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0$ hay $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Chú ý:

a. Chúng ta thấy ngay rằng định lí Lagrange là trường hợp riêng của định lí Cauchy (lấy $g(x) = x$ trên [a, b])

b. Định lí Rolle là trường hợp riêng của định lí Lagrange (cho $f(a) = f(b)$).

Ví dụ 3.17: Cho $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ thoả mãn các điều kiện:

1. f liên tục trên [a, b]
2. f khả vi phải và trái trên [a, b]
3. $f(a) = f(b)$

Chứng minh rằng $\exists c \in (a,b)$ để $f_t'(c) f_p'(c) \leq 0$

Giải:

Ta có thể chứng minh tương tự như chứng minh định lí Rolle

Nếu m = M thì rõ ràng $f(x) = const$ trên [a, b] suy ra

$\forall c \in (a,b)$ có $f'(c) = 0 \Rightarrow f_t'(c) = f_p'(c) = 0 \Rightarrow f_t'(c).f_p'(c) = 0$

Nếu m < M. Giả sử hàm f đạt Maximum tại $c \in (a,b)$

Vậy nếu $h > 0$ thì $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \le 0$ và nếu $h < 0$ thì $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \ge 0$

Qua giới hạn khi $h \to 0$ sẽ có $f_p'(c) \le 0$ và $f_t'(c) \ge 0$

Cuối cùng ta suy ra $f_p'(c).f_t'(c) \le 0$

Ví dụ 3.18: Cho f khả vi trên (a, b), a < b và thoả mãn các điều kiện:

$f(a) = f(b) = 0, f_p'(a) > 0, f_t'(b) > 0$. Chứng minh tồn tại $c_1, c_2, c_3 \in (a,b)$ sao cho

$$c_1 < c_2 < c_3,\ f(c_2) = 0,\ f'(c_1) = f'(c_3) = 0$$

Giải:

Vì $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f_p'(a) > 0,\ f(a) = 0 \Rightarrow \exists \alpha > 0$ đủ bé để:

$\forall x \in (a, a+\alpha)$ có $f(x) > 0$ chẳng hạn $f\left(a + \dfrac{\alpha}{2}\right) > 0$

Tương tự $\exists \beta > 0$ đủ bé để $f\left(b - \dfrac{\beta}{2}\right) < 0$. Vì f liên tục trên $\left[a + \dfrac{\alpha}{2}, b - \dfrac{\beta}{2}\right]$ nên $\exists c_2 \in \left(a + \dfrac{\alpha}{2}, b - \dfrac{\beta}{2}\right) \subset (a,b)$ sao cho $f(c_2) = 0$. Áp dụng định lí Rolle cho các đoạn $[a, c_2]$ và $[c_2, b]$ sẽ $\exists c_1,\ c_2$ để $f'(c_1) = f'(c_3) = 0$ trong đó $a < c_1 < c_2 < c_3 < b$.

Ví dụ 3.19: Cho f khả vi trên tập X. Chứng minh ảnh $f'((a,b))$ là một khoảng của $\mathbb{R}$, trong đó $(a,b) \in X^2$

Giải:

Giả sử a < b và $f'(a) < f'(b)$ lấy $k \in (f'(a), f'(b))$ sẽ chứng minh tồn tại $d \in (a,b)$ để $f'(d) = k$.

Ta kí hiệu $t_0 = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, $\quad U = [t_0, f'(a)]$, $\quad V = [t_0, f'(b)]$

Ta xét hàm số $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{khi } x \ne a \\ f'(a) & \text{khi } x = a \end{cases}$

$\Rightarrow \varphi(x)$ liên tục trên [a, b] và $\varphi(a) = f'(a),\ \varphi(b) = t_0$, theo định lí về giá trị trung bình chứng tỏ $U \subset \varphi([a,b])$

Tương tự ta xét hàm số $\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} & \text{khi } x \ne b \\ f'(b) & \text{khi } x = b \end{cases}$

Suy ra $\psi(a) = t_0,\ \psi(b) = f'(b),\ \psi(x)$ liên tục trên $[a,b] \Rightarrow V \subset \psi([a,b])$ mà $(f'(a), f'(b)) \subset U \cup V$. Do đó nếu $k \in (f'(a), f'(b))$ thì tồn tại $c \in (a,b)$, chẳng hạn $\varphi(c) = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a} = k \Rightarrow \exists d \in (a,c) \subset (a,b)$ để $f'(d) = k$

Ví dụ 3.20: Cho f liên tục trên [a, b], khả vi trên (a,b) trừ ra n điểm trên (a, b). Chứng minh rằng tồn tại n + 1 số dương $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}$ sao cho $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$ và n + 1 số $c_i \in (a,b),\ (i = 1,...,n+1)$ sao cho $a < c_1 < ... < c_{n+1} < b$ thoả mãn hệ thức

$$f(b) - f(a) = \left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f'(c_i)\right)(b - a)$$

Giải

Giả sử f không khả vi tại các điểm $a_i,\quad i = \overline{1,n}$ và $a < a_1 < a_2 < ... < a_n < b$

Áp dụng định lí Lagrange cho n + 1 khoảng ta có

$\exists c_1 \in (a, a_1): \quad f(a_1) - f(a) = f'(c_1)(a_1 - a)$

$\exists c_2 \in (a_1, a_2): \ f(a_2) - f(a_1) = f'(c_2)(a_2 - a_1) \qquad \ldots$

$\exists c_{n+1} \in (a_n, b): \ f(b) - f(a_n) = f'(c_{n+1})(b - a_n)$

Ta đặt $\alpha_1 = \dfrac{a_1 - a}{b - a},\quad \alpha_2 = \dfrac{a_2 - a_1}{b - a}, ...,\quad \alpha_{n+1} = \dfrac{b - a_n}{b - a} \Rightarrow \alpha_i \in \mathbb{R}_+^*$ và thu được hệ thức:

$$f(b) - f(a) = (f(b) - f(a_n)) + ... + (f(a_1) - f(a)) = \left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f'(c_i)\right)(b - a)$$

3.5. ỨNG DỤNG CÁC ĐỊNH LÍ VỀ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

3.5.1. Công thức Taylo(Taylor), công thức Maclôranh(M'cLaurin)

A. Định nghĩa

1. Cho hàm f khả vi đến cấp (n+1) tại $a \in X$ (tức là $f \in C^n$ tại lân cận của a và có đạo hàm cấp (n + 1) tại a. Gọi đa thức $P_n(x)$ với $\deg P_n(x) \le n$ thoả mãn điều kiện

$$P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \qquad k = \overline{0,n}$$

là đa thức Taylor của $f(x)$ tại lân cận điểm a, hay là phần chính qui của khai triển hữu hạn bậc n tại a của $f(x)$

2. Nếu a = 0 thì $P_n(x)$ thoả mãn điều kiện trên được gọi là đa thức M'cLaurin của hàm số $f(x)$

Định lí 3.30:

Nếu $P_n(x)$ là đa thức Taylor của $f(x)$ tại lân cận của a thì nó là duy nhất và có dạng

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{3.28}$$

Chứng minh:

Giả sử tồn tại đa thức thứ hai là $Q_n(x)$ khi đó hiệu $P_n(x) - Q_n(x)$ là đa thức có bậc không vượt quá n và có nghiệm $x = a$ bội không bé hơn n+1, chứng tỏ $P_n(x) = Q_n(x)$

Giả sử $P_n(x) = A_0 + A_1(x-a) + ... + A_n(x-a)^n$, suy ra:

$$P_n^{(k)}(a) = k!A_k = f^{(k)}(a) \Rightarrow A_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad (k = 0,1,...,n)$$

Vậy ta có $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^n$

B. Công thức Taylor

Cho $P_n(x)$ là đa thức Taylor của $f(x)$ tại lân cận của a

1. Gọi $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ là phần dư Taylor bậc n tại a của $f(x)$

Hệ quả: *Phần dư* $r_n(x)$ *được biểu diễn trong dạng*:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \text{ với } c \in (a,x) \text{ hay } c = a + \theta(x-a),\ 0 < \theta < 1. \tag{3.29}$$

Người ta gọi (3.29) là phần dư trong dạng Lagrange của hàm số $f(x)$

Chứng minh:

Từ định nghĩa phần dư suy ra $r_n(a) = r_n'(a) = ... = r_n^{(n)}(a) = 0$

Đặt $G(x) = (x-a)^{n+1} \Rightarrow G(a) = G'(a) = ... = G^{(n)}(a) = 0$ và $G^{(n+1)}(a) = (n+1)!$

Với $x \neq a$ và $x \in \Omega_\delta(a)$, theo định lý Cauchy sẽ có

$$\frac{r_n(x)}{G(x)} = \frac{r_n(x) - r_n(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{r_n'(c_1)}{G'(c_1)},\ c_1 \in (a,x)$$

$$\frac{r_n'(c_1)}{G'(c_1)} = \frac{r_n'(c_1) - r_n'(a)}{G'(c_1) - G'(a)} = \frac{r_n''(c_2)}{G''(c_2)},\ c_2 \in (a, c_1)$$

Sau (n + 1) lần áp dụng định lí Cauchy, kết quả sẽ là

$$\frac{r_n(x)}{G(x)} = \frac{r_n^{(n+1)}(c)}{G^{(n+1)}(c)} \text{ với } c \in (a, c_n) \subset (a, c_{n-1}) \subset ... \subset (a,x)$$

mà $r_n^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c), G^{(n+1)}(c) = (n+1)!$

Suy ra $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

2. Gọi công thức $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ là công thức Taylor bậc n, hay khai triển hữu hạn bậc n hàm $f(x)$ tại lân cận của a

3. Gọi công thức $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$ là công thức M'cLaurin bậc n, hay khai triển hữu hạn bậc n của $f(x)$ tại lân cận của 0.

Chú ý:

a. Nếu $f^{(n+1)}$ bị chặn ở lân cận của a thì rõ ràng $\frac{r_n(x)}{(x-a)^n}=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)$ dần đến 0 khi $x\to a$ nghĩa là $r_n(x)=o\left((x-a)^n\right)$

b. Với giả thiết $f^{(n+1)}$ bị chặn ở lân cận của a thì có thể lấy gần đúng $f(x)$ ở lân cận của a bằng đa thức $P_n(x)$ với sai số là $r_n(x)=o\left((x-a)^n\right)$.

c. Người ta đã chứng minh phần dư cũng có thể viết trong dạng khác dưới đây, được gọi là dạng Cauchy:

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1} \tag{3.30}$$

C. Công thức M'cLaurin của các hàm thường dùng

1. $f(x)=e^x,\quad \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta nhận thấy $f\in C^\infty$ trên $\mathbb{R}$ và $f^{(k)}(0)=1\quad \forall k\in\mathbb{N}$

Từ đó suy ra $$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}\ ,\ \ \xi\in(0,x) \tag{3.31}$$

Trong quá trình $x\to 0$ thì $e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)$

2. $f(x)=\sin x,\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad f\in C^\infty$

$$f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow f^{(k)}(0)=\sin\frac{k\pi}{2}=\begin{cases}0, & k=2m\\ (-1)^m, & k=2m+1\end{cases}$$

$$\sin x=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}+o(x^{2n+2}) \tag{3.32}$$

Tương tự $$\cos x=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2n+1}). \tag{3.32}$$

3. $f(x)=(1+x)^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R},\ x\in X$, X phụ thuộc α. Với x ở lân cận của 0 thì $f\in C^\infty$

Ta có $f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$, vậy $f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)$

Do đó ta nhận được $(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}x^{k}+o(x^{n})$. (3.33)

Các trường hợp đặc biệt:

* Với $\alpha=-1$, từ (3.33) nhận được

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^{2}-...+(-1)^{n}x^{n}+o(x^{n}) \quad (3.34)$$

Ta thay x bởi –x vào (3.34) sẽ nhận được

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^{2}+...+x^{n}+o(x^{n}) \quad (3.35)$$

* Với $\alpha=\frac{1}{2}$ ta có $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^{2}+o(x^{2})$ (3.36)

* Với $\alpha=-\frac{1}{2}$ ta có $\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^{2}+o(x^{2})$ (3.37)

4. $f(x)=\ln(1+x)$, ở lân cận 0 thì $f\in C^{\infty}$

Ta có $f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n}\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}\Rightarrow f^{(n+1)}(0)=(-1)^{n}.n!$

Vậy $$\ln(1+x)=x-\frac{x^{2}}{2}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n}+o(x^{n}) \quad (3.38)$$

5. $f(x)=\text{arctg}x,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$f\in C^{\infty},\ f^{(k)}(0)=\begin{cases}0 & \text{khi } k=2m\\ (-1)^{m-1}(2m-2)!, & \text{khi } k=2m+1\end{cases}$ (Xem ví dụ ở Mục 3.3.3.)

Vậy $$\text{arctg}x=x-\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{5}}{5}+...+\frac{(-1)^{m-1}}{2m-1}x^{2m-1}+o(x^{2m}) \quad (3.39)$$

6 $f(x)=\text{tg}x,\quad f\in C^{\infty}$ ở lân cận của 0.

Ta có $$\text{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}}{1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}}=x+\frac{x^{3}}{3}+o(x^{3}) \quad (3.40)$$

3.5.2. Qui tắc Lôpitan (L'Hospital)

Định lí 3.31: *Cho* $a\in X,\ f,g\in\mathbb{R}^{X}$ *thoả mãn các điều kiện sau:*

1 *Liên tục tại a và khả vi ở lân cận* $\Omega_{\delta}(a)\setminus\{a\}$

2. $g'(x)\neq 0\qquad \forall x\in\Omega_{\delta}(a)\setminus\{a\}$

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$

Khi đó $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=l$.

Chứng minh:

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\alpha>0)\ (\forall x:\ \ 0<|x-a|<\alpha\Rightarrow\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-l\right|<\varepsilon)$$

Ta lấy $x\in\Omega_\alpha(a)\setminus\{a\}$ sao cho $0<|x-a|<\alpha$. Theo định lí Cauchy thì

$$\exists c_x\in\Omega_\alpha(a)\setminus\{a\}\ \text{sao cho}\ 0<|c_x-a|<|x-a|\ \text{để có}\ \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

Chứng tỏ: $(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\alpha>0)\ (\forall x\in\Omega_\alpha(a)\Rightarrow\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}-l\right|<\varepsilon)$, nghĩa là

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=l$$

Chú ý:

a. Nếu $f(a)=g(a)=0$ thì rõ ràng qui tắc L'Hospital cho ta điều kiện đủ để tìm giới dạng $\dfrac{0}{0}$ và ta có

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l \qquad (3.41)$$

b. Nếu $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, thì bằng cách xét các hàm số $\dfrac{1}{f(x)}$ và $\dfrac{1}{g(x)}$ và như vậy cũng nhận được điều kiện để tìm giới hạn dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$.

c. Người ta nhận được kết quả tương tự khi $a=\infty$ hoặc $l=\infty$.

d. Cần lưu ý rằng qui tắc L'Hospital chỉ cho điều kiện đủ để tìm giới hạn. Bởi vì khi không tồn tại $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ vẫn có thể tồn tại $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Chẳng hạn, ta xét ví dụ sau đây :

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{2x}=\dfrac{1}{2}$. Tuy nhiên $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\cos x)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\sin x}{2}$ không tồn tại

e. Để tìm $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ đương nhiên có thể áp dụng qui tắc L'Hospital trong đó f và g thay bởi f' và g'. Như vậy, trong một bài toán tìm giới hạn, có thể lặp lại qui tắc L'Hospital một số hữu hạn lần.

Ví dụ 3.21: Hãy phân tích $e^{\sin x}$ đến x^3 với x khá bé

Giải:

Vì $x \to 0$ thì $\sin x \to 0$ nên $e^{\sin x} = 1 + \sin x + \dfrac{1}{2}\sin^2 x + \dfrac{1}{6}\sin^3 x + o(\sin^3 x)$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$$

Do đó $\quad e^{\sin x} = 1 + x - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{2}\left(x^2 + 0(x^4)\right) + \dfrac{1}{6}\left(x^3 + 0(x^5)\right) + o(x^3)$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

Ví dụ 3,22: Tính $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x(1-\cos x)}$

Giải:

Áp dụng công thức khai triển hữu hạn của các hàm số sinx, cosx sẽ nhận được

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3 + 0(x^4)}{x\left(\frac{x^2}{2} + 0(x^3)\right)} = \frac{1}{3}$$

Ví dụ 3.23: Tính $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1-e^{-x}} - \sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$

Giải: Áp dụng công thức khai triển hữu hạn các hàm số sinx, cosx, e^x sẽ nhận được

$$\sqrt{1-e^{-x}} = \sqrt{1-\left(1-x+0(x)\right)} = \sqrt{x+0(x)} = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$$

$$\sqrt{1-\cos x} = \sqrt{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+0(x^3)\right)} = \sqrt{\frac{x^2}{2}+0(x^3)} = \frac{x}{\sqrt{2}} + o(x)$$

$$\sqrt{\sin x} = \sqrt{x - \frac{x^3}{6} + 0(x^4)} = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-e^{x}} - \sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x} + 0(\sqrt{x}) - \dfrac{x}{\sqrt{2}} - 0(x)}{\sqrt{x}+0(\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$

Ví dụ 3.24: Tính các giới han:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{\beta x}$,

b. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha}\ln x, \quad (\alpha > 0)$

Giải: Áp dụng qui tắc Lôpitan, ta có

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln(1+\alpha x))'}{(\beta x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\alpha}{1+\alpha x}}{\beta}=\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{\beta x}$

b. Ta đặt $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha}\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^{\alpha}}}=I$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\ln x)'}{(\dfrac{1}{x^{\alpha}})'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x^{\alpha}}{\alpha}=0$, suy ra $I=0$

Ví dụ 3.25: Tính các giới hạn sau :

$$\text{a. } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}},\quad (\alpha>0),\qquad \text{b. } \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{a^{x}},\quad (a>1,\ \alpha>0)$$

Giải:

a. $\dfrac{(\ln x)'}{(x^{\alpha})'}=\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\dfrac{1}{\alpha x^{\alpha}}\to 0$ khi $x\to+\infty$, từ đó ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}=0$

b. $\dfrac{(x^{\alpha})'}{(a^{x})'}=\dfrac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^{x}\ln a}$, lấy đạo hàm hữu hạn n lần sao cho $\alpha-n\le 0$. Khi đó

$\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}}{a^{x}\ln^{n}a}\underset{x\to+\infty}{\to}0$ chứng tỏ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\alpha}}{a^{x}}=0$

Vậy ta cũng so sánh được các VCL $\ln x, x^{\alpha}, a^{x}$ khi x dần đến ∞ . Kết quả đã có trong mục 1.3.2.

Ví dụ 3.26: Bằng phương pháp lôga hãy tính các giới hạn sau đây

$$I_1=\lim_{x\to 0^+}x^{x},\quad I_2=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}},\quad I_3=\lim_{x\to 0^+}(\text{cotg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

Giải:

$$\ln x^{x}=x\ln x\underset{x\to 0^+}{\to}0 \text{ (theo ví dụ 4) . Suy r } I_1=e^{0}=1$$

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\sin x}{x}=\frac{\ln|\sin x|-\ln|x|}{1-\cos x}$$

$$\frac{(\ln|\sin x|-\ln|x|)'}{(1-\cos x)'}=\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^{2}x}$$

$$\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x\sin^{2}x)'}=\frac{-x\sin x}{\sin^{2}x+2x\sin x\cos x}=\frac{-1}{\dfrac{\sin x}{x}+2\cos x}\underset{x\to 0}{\to}-\frac{1}{3}$$

Ta suy ra $I_2=e^{-\frac{1}{3}}$

$$\ln(\text{cotg}x)^{\frac{1}{\ln x}} = \frac{1}{\ln x}\ln \text{cotg}x$$

$$\frac{(\ln \text{cotg}x)'}{(\ln x)'} = \frac{\frac{1}{\text{cotg}x}(-\frac{1}{\sin^2 x})}{\frac{1}{x}} = -\frac{x}{\sin x \cos x} \underset{x\to 0^+}{\to} -1.$$ Suy ra $I_3 = e^{-1}$

3.6. SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

3.6.1. Tính đơn điệu của hàm khả vi

Định lí 3.32: *Cho* $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ *thỏa mãn các điều kiện:*

1. *f liên tục trên đoạn [a, b]*

2. *f khả vi trên khoảng (a, b)*

3. $f'(x) = 0, \forall x \in (a,b)$ *khi đó f(x) không đổi trên [a, b]*

Chứng minh:

Lấy bất kỳ $x_1, x_2 \in [a,b]$. Theo định lí Lagrange tồn tại $c \in (x_1, x_2)$ sao cho $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ vì x_1, x_1 tùy ý vậy f(x) không đổi trên [a, b], tức là f(x) = const trên [a, b]

Định lí 3.33: *Cho f liên tục trên [a, b], khả vi trên (a, b). Để f tăng trên [a, b] thì cần và đủ là*

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$$

Chứng minh:

Giả sử f tăng trên [a, b]. Cho $x_0 \in (a,b), \forall h \in \mathbb{R}^*$ sao cho $x_0 + h \in (a,b)$, ta sẽ nhận được:bất đẳng thức: $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$

Qua giới hạn bất đẳng thức trên khi $h \to 0$ và do tính khả vi suy ra $f'(x_0) \geq 0$

Ngược lại, giả sử $\forall x \in (a,b), f'(x) \geq 0$. Lấy tùy ý $x_1, x_2 \in [a,b]$. Áp dụng định lí Lagrange trên $[x_1, x_2]$ sẽ có $c \in (x_1, x_2)$ sao cho:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c)$$

$$\Rightarrow (x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) \geq 0 \Rightarrow f(x)$$ tăng trên [a ,b]

Thay f bởi –f sẽ nhận được định lí trong trường hợp hàm số giảm.

Định lí 3.34: *Cho f liên tục trên [a, b], khả vi trên (a, b). Để f tăng ngặt trên [a, b], điều kiện cần và đủ là*

1. $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$

2. *Tập* $\{x \in (a,b), f'(x) = 0\}$ *không chứa bất kỳ một khoảng có phần trong không rỗng nào.*

Chứng minh:

Điều kiện cần: Giả sử f tăng ngặt trên [a,b]. Theo định lí 3.33 ta có:

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

Nếu $\{x \in (a,b), f'(x) = 0\}$ chứa một khoảng có phần trong không rỗng tức là tồn tại $\alpha > 0$ đủ bé, c để f'(c) = 0 sao cho $(c-\alpha, c+\alpha) \subset \{x \in (a,b), f'(x) = 0\}$ hay là $\forall x \in (c-\alpha, c+\alpha), f'(x) = 0$. Theo định lí 3.32. thì f(x) = const trên $[c-\alpha, c+\alpha]$, điều này mâu thuẫn vì f(x) tăng ngặt trên [a, b]. Chứng tỏ tập các không điểm của f'(x) không chứa bất kỳ khoảng nào có phần trong không rỗng.

Điều kiện đủ: Giả sử $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$ và tập các không điểm của f'(x) không chứa bất kỳ khoảng nào có phần trong không rỗng. Theo định lí 3.33, rõ ràng f tăng trên [a, b]. Giả sử f tăng không ngặt, tức là $\exists x_1, x_2 \in (a,b)$ sao cho $x_1 < x_2$ và $f(x_1) = f(x_2)$ vì f tăng trên [a, b] nên $\forall x \in [x_1, x_2]$ $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \Rightarrow f(x) = f(x_1) = f(x_2)$ trên $[x_1, x_2]$. Vậy $(x_1, x_2) \subset \{x, f'(x) = 0\}$ mâu thuẫn với giả thiết. Chứng tỏ f tăng ngặt trên [a,

3.6.2. Điều kiện hàm số đạt cực trị

Định lí 3.35*: Cho* $f \in \mathbb{R}^X$. *Nếu tồn tại* $(a-\delta, a+\delta) \subset X$ *để* $f(x)$ *liên tục trong khoảng đó đồng thời* $f'(x) \geq 0$ *trên* $(a-\delta, a)$ *và* $f'(x) \leq 0$ *trên* $(a+\delta, a)$ *thì f có một cực đại tại a.*

Định lí này suy trực tiếp từ định lí 3.33 trong mục 3.6.1 và định nghĩa cực trị của hàm số.

Định lí 3.36: *Cho* $f \in C^n$ *tại lân cận* $\Omega_\delta(a)$ *và thỏa mãn các điều kiện:*

$$f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0$$

Khi đó:

1. *Nếu n chẵn thì f(x) đạt cực trị tại a: đạt cực tiểu nếu* $f^{(n)}(a) > 0$*, đạt cực đại nếu* $f^{(n)}(a) < 0$.
2. *Nếu n lẻ thì f(x) không đạt cực trị tại a.*

Chứng minh:

Trong lân cận đủ bé của a, ta có công thức Taylor tại lân cận đó:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta)}{n}(x-a)^n$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}(x-a)^n, \quad \theta \in (a,x)$$

* Nếu n chẵn thì $(x-a)^n \geq 0$

Giả sử $f^{(n)}(a) > 0$, do tính liên tục của $f^{(n)}(x)$ ở lân cận a nên $f^{(n)}(\theta) > 0$ trong $\Omega_\delta(a)$. Vậy $f(x)$ đạt cực tiểu tại a.

Giả sử $f^{(n)}(a) < 0$, khi đó $f(x) \le f(a)$ chứng tỏ $f(x)$ đạt cực đại tại a.

* Nếu n lẻ, thì $(x-a)^n$ đổi dấu ở lân cận $\Omega_\delta(a)$, trong khi đó $f^{(n)}(a) \neq 0$. Giả sử $f^{(n)}(a) = f_0 > 0$ do tính liên tục của $f^{(n)}(x)$ nên $f^{(n)}(\theta) > 0$ ở lân cận khá bé của a. Lúc đó $f^{(n)}(\theta)(x-a)^n$ có dấu thay đổi khi x đi qua a. Vậy

$f(x) < f(a)$ nếu $x < a$ và $f(x) > f(a)$ nếu $x > a$ với x khá gần a.

Suy ra $f(x)$ không đạt cực trị tại a.

Ví dụ 3.27: Cho $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sao cho $|f(x) - f(y)| \le |x-y| g(|x-y|)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ và $g(0^+) = 0$. Chứng minh f là hằng số trên $\mathbb{R}$.

Giải:

Lấy x tùy ý nhưng cố định trên $\mathbb{R}$, khi đó

$$\forall y \neq x \Rightarrow \left|\frac{f(x) - f(y)}{x-y}\right| \le g(|x-y|)$$

Qua giới hạn, và chú ý $g(0^+) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{y \to x} \dfrac{f(x) - f(y)}{x-y} = 0 = f'(x)$

Theo định lí 3.32. thì $f(x)$ = const trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 3.28: Cho $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, f bị chặn, khả vi đến cấp 2 và $f''(x) \ge 0$. Chứng minh f là hàm giảm.

Giải:

Vì $f''(x) \ge 0 \Rightarrow f'(x)$ tăng. Giả sử $\exists c \in \mathbb{R}$ để f'(c) > 0. Áp dụng định lí Lagrange đối với f(x) trên [c,x], $\forall x > c \Rightarrow \exists c_1 \in (c, x)$ sao cho

$$f(x) - f(c) = f'(c_1)(x-c) \ge f'(c)(x-c)$$

$$f(x) \ge f(c) + f'(c)(x-c) \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty$$

Chứng tỏ $f(x)$ không bị chặn. Vậy $f'(x) \le 0 \Rightarrow f(x)$ giảm trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 3.29: Tìm các khoảng tăng, giảm và cực trị của hàm số: $y = x^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}}$

Giải: Hàm số xác định $\forall x \in \mathbb{R}$ và khả vi trên $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$

$$y' = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right)$$

$$y' = 0 \text{ khi } \sqrt[3]{x} = -\sqrt[3]{x-1}, \quad x = 1 - x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Từ biểu thức của $y^{/}$ ta có bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		-	‖	+	0	-	‖	+	
y	$+\infty$	↘	1	↗	$\sqrt[3]{2}$	↘	1	↗	$+\infty$

Vậy hàm số giảm trong các khoảng $(-\infty;0)$, $(\frac{1}{2};1)$ và tăng trong các khoảng $(0;\frac{1}{2})$, $(1;+\infty)$ đồng thời

$$y_{\min} = y(0) = y(1) = 1, \qquad y_{\max} = y(\frac{1}{2}) = \sqrt[3]{2}$$

3.7. BÀI TOÁN TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ BÉ NHẤT

Bài toán: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập X. Tìm giá trị bé nhất (GTBN), giá trị lớn nhất (GTLN) của hàm số trên tập đó.

Người ta nói rằng hàm $f(x)$ đạt GTBN là m trên X tại $x_1 \in X$ khi và chỉ khi :

$$m = f(x_1) \le f(x), \quad \forall x \in X$$

và hàm $f(x)$ đạt GTLN là M tại $x_2 \in X$ khi và chỉ khi :

$$M = f(x_2) \ge f(x), \quad \forall x \in X$$

3.7.1. Hàm liên tục trên đoạn kín [a,b]

Theo tính chất liên tục của hàm số trên một đoạn kín bao giờ cũng tồn tại m, M. Theo định lý Fermat, nếu hàm khả vi tại x_0 và đạt cực trị tại đó thì $f'(x_0) = 0$. Vì cực trị có tính địa phương nên các điểm tại đó hàm đạt GTBN, GTLN chỉ có thể là hoặc các điểm tại đó hàm số không khả vi hoặc các điểm làm đạo hàm triệt tiêu hoặc các điểm a, b. Từ đó các quy tắc tìm m, M tương ứng x_1, x_2 như sau:

a. Tìm các giá trị f(a), f(b).

b. Tìm các giá trị của hàm số tại các điểm hàm số không khả vi.

c. Tìm giá trị của hàm số tại các điểm làm triệt tiêu đạo hàm f'(x).

d. So sánh các giá trị tìm được ở trên để tìm ra giá trị bé nhất, gọi đó là m và tìm ra giá trị lớn nhất, gọi đó là M.

3.7.2. Hàm liên tục trên khoảng mở, khoảng vô hạn

Trong trường hợp này, thay vì tính f(a), f(b), ta tìm giới hạn của hàm số khi x dần tới a, dần đến b, hoặc dần đến ∞. Tuy nhiên phải xem xét hàm số có đạt được giới hạn này không. Các bước tiếp theo thực hiệm như mục trên.

Ví dụ 3.30: Tìm GTBN, GTLN của hàm số $y = \sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$, $0 \le x \le 3$

Giải:

$$y(0) = 0, y(3) = \sqrt[3]{9}$$

Hàm số khả vi trên khoảng $(0,3) \setminus \{2\}$ và $y(2) = 0$.

$$y' = \frac{4}{3}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x(x-2)}} = 0 \text{ khi } x = 1,\ y(1) = 1$$

$$m = \min\left\{0,1,\sqrt[3]{9}\right\} = 0 \text{ đạt được tại } x = 0, x = 2$$

$$M = \max\left\{0,1,\sqrt[3]{9}\right\} = \sqrt[3]{9} \text{ đạt được tại } x = 3$$

Ví dụ 3.31: Tìm GTBN, GTLN của hàm số $y = x^x$, $0{,}1 \le x < +\infty$

Giải:

Hàm số khả vi trên khoảng $(0{,}1;+\infty)$.

$$y(0{,}1) = \frac{1}{\sqrt[10]{10}},\quad \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} x^x = +\infty$$

$$y' = x^x(\ln x + 1) = 0 \text{ khi } x = e^{-1},\quad y(e^{-1}) = e^{-\frac{1}{e}}$$

Vậy $m = \min\left\{\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}, \frac{1}{\sqrt[10]{10}}\right\} = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$ đạt được tại $x = e^{-1}$

Hàm số không có GTLN.

3.8. HÀM LỒI

3.8.1. Khái niệm về hàm lồi, hàm lõm và điểm uốn

A. Định nghĩa:

1. Ánh xạ f được gọi là lồi trên X nếu:

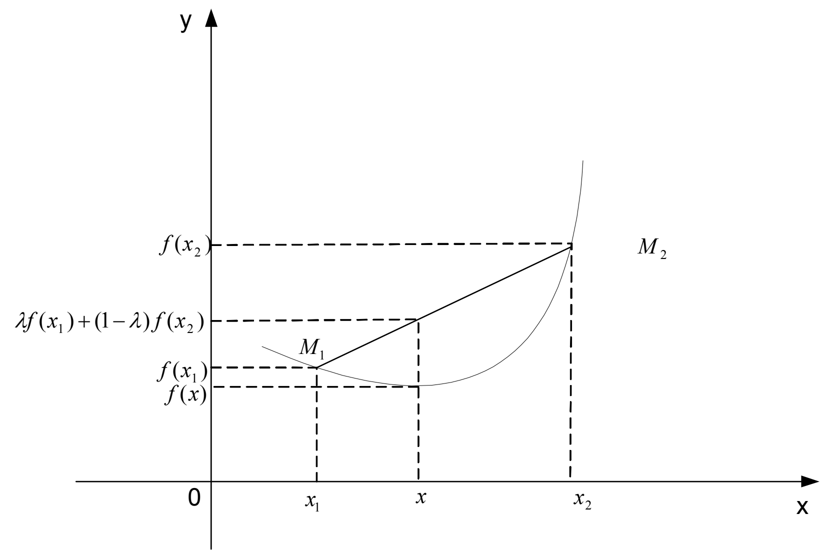
$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \qquad (3.42)$$

Người ta nói rằng f là lõm trên X khi và chỉ khi $-f$ là lồi trên X.

Đồ thị của hàm lồi f trên (a, b) được mô tả trên hình 3.8.

Đặt $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, M_1(x_1, f(x_1)), M_2(x_2, f(x_2)),$ C_f là đồ thị của hàm số f.

Như vậy ánh xạ f lồi khi và chỉ khi với bất kỳ cặp điểm (M_1, M_2) của C_f, mọi điểm $M \in C_f$ có hoành độ nằm giữa các hoành độ của M_1 và M_2 đều nằm phía dưới đoạn M_1M_2. Nói cách khác đường cong nằm dưới mọi dây cung tương ứng.



H.3.8

2. Cho $f \in \mathbb{R}^X$. Giả sử $X=[a,b]\cup[b,c]$ mà f lồi (lõm) trên [a, b], f lõm (lồi) trên [b, c] . Khi đó điểm U(b, f(b)) gọi là điểm uốn của đồ thị C_f của hàm số. Như vậy điểm uốn là điểm phân biệt giữa các cung lồi và cung lõm của đồ thị hàm số

B. Tính chất

Định lí 3.37*: Để f là lồi trên X điều kiện cần và đủ là $\forall a\in X$, tỷ số gia tại a của f tăng trên $X\setminus\{a\}$, tức là*

$$\tau_a(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ tăng trên } X\setminus\{a\}.$$

Chứng minh:

Lấy tùy ý $a,\ b,\ c\in X$ sao cho a < b < c . Gọi A(a, f(a)), B(b, f(b)), C(c, f(c)) và P(AB), P(AC), P(BC) là các hệ số góc của các đường AB, AC, BC.

Ta có $\tau_a(b)=P(AB), \tau_a(c)=P(AC)$. Vậy định lí được chứng minh khi ta chỉ ra $P(AB)\le P(AC)$ là điều kiện cần và đủ của hàm lồi.

Ta đặt $b=\lambda a+(1-\lambda)c$, trong đó $\lambda=\dfrac{c-b}{c-a}\in[0,1]$. Hàm số f lồi có nghĩa là :

$$f(\lambda a+(1-\lambda)c)\le \lambda f(a)+(1-\lambda)f(c)$$

$$\Leftrightarrow (c-a)f(b)\le (c-b)f(a)+(b-a)f(c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\le\frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

Chứng tỏ $P(AB)\le P(AC)$

Định lí 3.38: (Bất đẳng thức Jensen)

Nếu $f \in \mathbb{R}^X$ *lồi ,* $n \in \mathbb{N}^*, x_1,\ x_2,...,\ x_n \in X;\ \lambda_1,\ \lambda_2,...,\ \lambda_n \in [0,1]$ *sao cho* $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ *thì*

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) \tag{3.42}$$

Chứng minh: Qui nạp theo n

* Với n = 1 dễ nhận thấy bất đẳng thức đúng, với n = 2 cũng đúng theo định nghĩa hàm lồi.

* Giả sử bất đẳng thức trên đúng với $n \in \mathbb{N}^*$, ta đi chứng minh bất đẳng thức đó cũng đúng với n +1.

Cho $x_1,\ x_2,...,\ x_{n+1} \in X$ và $\lambda_1,\ \lambda_2,...,\ \lambda_{n+1} \in [0,1]$ sao cho $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.

Nếu $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ bất đẳng thức đúng là hiển nhiên.

Giả sử $(\lambda_1, \lambda_2,...,\lambda_n) \ne (0,0,...,0)$ gọi $\mu = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 - \lambda_{n+1} > 0$ và $x' = \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in X$

Vì $x_1,\ x_2,...,\ x_n \in X$ và f lồi, ta suy ra

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) = f(\mu x' + (1-\mu)x_{n+1}) \le \mu f(x') + (1-\mu) f(x_{n+1}) = \mu f(x') + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

Theo giả thiết qui nạp:

$$f(x') = f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\mu} x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\mu} f(x_k) = \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

Bởi vì $\frac{\lambda_k}{\mu} \in [0,1]$ và $\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\mu} = 1$, vậy ta có $f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k)$

3.8.2. Điều kiện hàm lồi

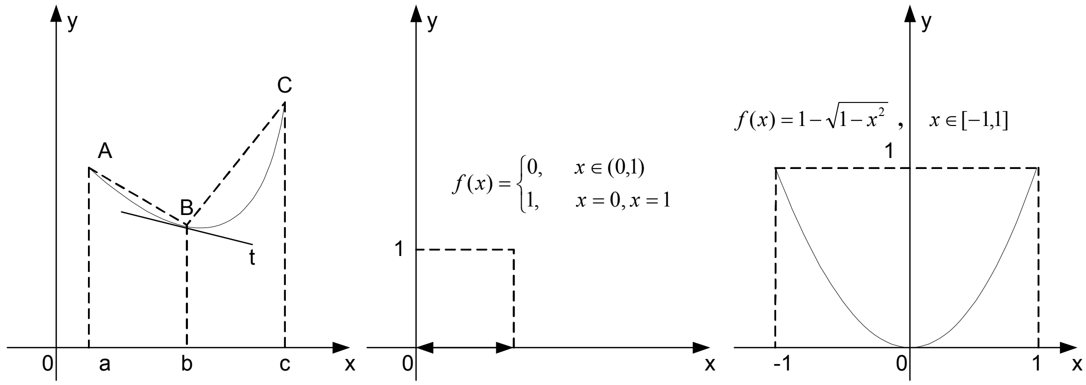
Định lí 3.39: *Giả sử f là lồi trên X khi đó f khả vi phải và trái tại mọi điểm trong của X và* $\forall a,b,c \in X$ *sao cho a < b < c, ta có*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le f_t'(b) \le f_p'(b) \le \frac{f(c)-f(b)}{c-b} \tag{3.43}$$

Chứng minh: Theo định lí 3.37, $\tau_b(x) = \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$ tăng trên $X \setminus \{b\}$

* Cho $u \in [a,b)$ và $\forall v \in (b,c)$ sẽ có: $\tau_b(a) \le \tau_b(u) \le \tau_b(v) \le \tau_b(c)$. Như vậy $\tau_b(x)$ tăng trên [b,c) và bị chặn dưới bởi $\tau_b(u)$. Theo Mục 2.2.2.F, $\tau_b(x)$ có giới hạn phải tại b, chính là $f_p'(b)$ và $\tau_b(a) \le \tau_b(u) \le f_p'(b) \le \tau_b(c)$

* Từ đó suy ra $\tau_b(x)$ tăng trên [a,b) và bị chặn dưới bởi $f_p'(b)$. Vậy nó có giới hạn trái tại b, giới hạn đó là $f_t'(b)$ và $\tau_b(a) \le f_t'(b) \le f_p'(b) \le \tau_b(c)$



H.3.9

Chú ý:

a. f lồi trên [a, b] thì liên tục trên (a, b) (Theo Mục 3.1)

b. f lồi trên [a, b] có thể gián đoạn tại a hoặc liên tục tại a hoặc không khả vi phải tại a.

Định lí 3.37 và các chú ý được minh họa trên hình 3.9.

Định lí 3.40: *Cho* $f \in \mathbb{R}^X$ *khả vi. Để f lồi trên X điều kiện cần và đủ là f' tăng trên X*

Chứng minh:

Giả sử f lồi trên X , ta lấy $a, b \in X$ sao cho $a < b$. Theo định lí 3.37 ta có:

$$f'(a) \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \le f'(b) \Rightarrow f'(x) \text{ tăng trên X}$$

Ngược lại vì f'(x) tăng trên X, lấy $a,\ b \in X$ sao cho a < b và $\lambda \in [0,1]$, ta đặt $x = \lambda a + (1-\lambda)b$ (các trường hợp a = b hoặc $\lambda = 0,\ \lambda = 1$ là tầm thường). Áp dụng định lí Lagrange cho f trên các đoạn [a, x], [x, b] thì tồn tại $c \in (a, x),\ d \in (x, b)$ sao cho

$$f(x) - f(a) = (x - a)f'(c) = (1-\lambda)(b-a)f'(c)$$

$$f(b) - f(x) = (b - x)f'(d) = \lambda(b-a)f'(d)$$

Vì f' tăng nên $f'(c) \le f'(d) \Rightarrow \lambda(f(x) - f(a)) \le (1-\lambda)(f(b) - f(x))$. Nghĩa là

$f(x) \le \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$. Chứng tỏ f lồi trên X.

Hệ quả 1*: Cho f khả vi hai lần trên X. Để f là lồi điều kiện cần và đủ là*

$$f''(x) \ge 0,\ \forall x \in X$$

Hệ quả 2*: Để U(a, f(a)) là điểm uốn của đồ thị hàm* $f \in \mathbb{R}^X$ *với* $a \in X$ *, f khả vi hai lần trên X , điều kiện cần và đủ là f''(a) = 0 và f''(x) đổi dấu khi x đi qua điểm a.*

Ví dụ 3.32: Xét tính lồi, lõm và tìm điểm uốn của đồ thị hàm số $y = \frac{a}{x}\ln\frac{a}{x},\ \ a > 0$

Giải:

Hàm số khả vi mọi cấp khi $x > 0$.

$$y' = -\frac{a}{x^2}(1 + \ln\frac{a}{x}), \quad y'' = \frac{a}{x^3}(3 + 2\ln\frac{a}{x})$$

$y'' = 0$ khi $3 + 2\ln\frac{a}{x} = 0$ hay $x = ae^{\frac{3}{2}}$

Ta có $y'' < 0$ khi $x > a.e^{\frac{3}{2}}$ và $y'' > 0$ khi $x < ae^{\frac{3}{2}}$.

Vậy hàm số lõm trong khoảng $\left(0, ae^{\frac{3}{2}}\right)$, lồi trong khoảng $\left(ae^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$ và các toạ độ của điểm uốn: $x_U = ae^{\frac{3}{2}}$ và $y_U = -\frac{3}{2}ae^{-\frac{3}{2}}$

Ví dụ 3.33: Cho f(x) = xlnx trên $(0,+\infty)$

a. Chứng minh f là lồi trên $(0,+\infty)$

b. Chứng minh $\forall x, y, a, b \in (0,+\infty)$ thì $x\ln\frac{x}{a} + y\ln\frac{y}{b} \geq (x+y)\ln\frac{x+y}{a+b}$

Giải:

a. $f' = \ln x + 1$, $f'' = \frac{1}{x} \geq 0$. Vậy f lồi trên $(0,+\infty)$

b. Ta lấy $x_1 = \frac{x}{a}, x_2 = \frac{y}{b}$ và $\lambda = \frac{a}{a+b}$

$$f\left(\frac{a}{a+b}\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{y}{b}\right) \leq \frac{a}{a+b}f\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b}{a+b}f\left(\frac{y}{b}\right)$$

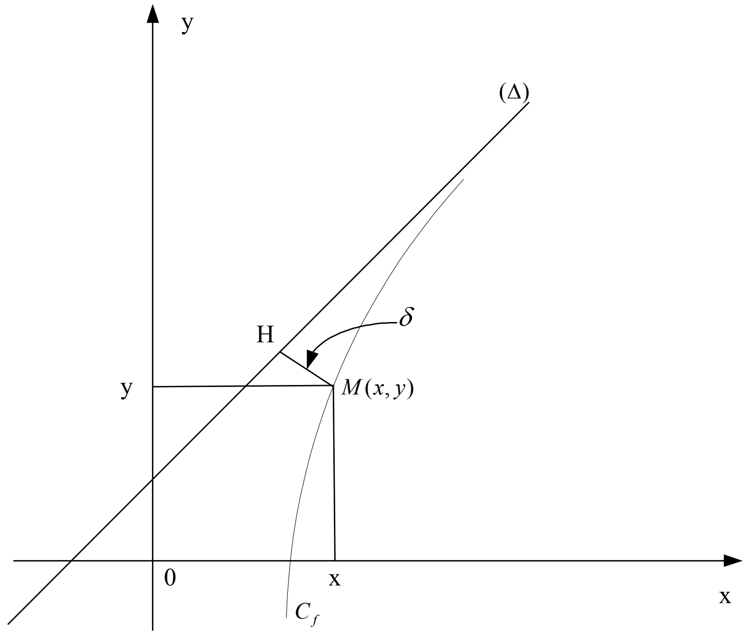
$$\frac{x+y}{a+b}\ln\frac{x+y}{a+b} \leq \frac{a}{a+b}\frac{x}{a}\ln\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{y}{b}\ln\frac{y}{b}$$

Từ đó ta nhận được $(x+y)\ln\frac{x+y}{a+b} \leq x\ln\frac{x}{a} + y\ln\frac{y}{b}$

3.9. TIỆM CẬN CỦA ĐƯỜNG CONG

3.9.1. Khái niệm chung về tiệm cận

Đường thẳng (Δ) được gọi là tiệm cận của đường cong C_f nếu như khoảng cách δ từ một điểm $M(x, y) \in C_f$ đến (Δ) dần đến 0 khi $x^2 + y^2 \to +\infty$ (tức là M chạy ra vô cùng trên đường cong C_f). Xem hình 3.10



H. 3.10

Như vậy điều kiện cần để đường cong C_f có tiệm cận là đường cong đó có nhánh ra vô cùng. Hơn nữa C_f và tiệm cận của nó vẫn có thể giao nhau.

3.9.2. Phân loại và cách tìm tiệm cận

A. Tiệm cận đứng (Tiệm cận song song với trục tung)

Đường x = a là tiệm cận đứng của đường cong $y = f(x)$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \tag{3.44}$$

Giới hạn trên có thể bao hàm cả trường hợp $x \to a^-, x \to a^+, y \to -\infty$, $y \to +\infty$. Ứng với từng trường hợp sẽ nhận được tiệm cận đứng ở phía trên hoặc phía dưới, bên phải hoặc bên trái đường cong C_f. Số a chính là cực điểm của hàm số.

B. Tiệm cận ngang (Tiệm cận song song với trục hoành)

Đường y = b là tiệm cận ngang của đường cong $y = f(x)$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \tag{3.45}$$

Tuỳ theo $x \to -\infty$ hay $x \to +\infty$ ta có tiệm cận ngang bên trái hay bên phải.

C. Tiệm cận xiên (Tiệm cận không song song với các trục toạ độ)

Đường $y = \alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$ là tiệm cận xiên của đường cong $y = f(x)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \alpha \\ \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - \alpha x] = \beta \end{cases} \tag{3.46}$$

Tuỳ theo $x \to -\infty$ hay $x \to +\infty$ ta có tiệm cận xiên bên trái hay bên phải.

Rõ ràng về phía nào đó khi đã có tiệm cận ngang y = b thì không thể có tiệm cận xiên bởi vì khi đó $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ và ngược lại.

Ví dụ 3.34: Tìm các tiệm cận của đường cong cho bởi phương trình

$$y = x\ln(e+\frac{1}{x})$$

Giải: Hàm số xác định khi $e+\dfrac{1}{x}>0$ hay $(ex+1)x>0$, hay $x<-\dfrac{1}{e}$ hoặc x > 0.

Vậy tập xác định là $X=(-\infty,-\dfrac{1}{e})\cup(0,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{e}^-} x\ln(e+\dfrac{1}{x})=+\infty \Rightarrow x=-\dfrac{1}{e}$ là tiệm cận đứng.

Ngoài ra: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y}{x}=1$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(y-x)=\lim_{x\to\pm\infty}x\left[\ln(e+\frac{1}{x})-1\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln(e+\frac{1}{x})-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(-\frac{1}{x^2}).\frac{1}{e+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{e}$$

Vậy $y=x+\dfrac{1}{e}$ là tiệm cận xiên cả hai phía.

3.10. BÀI TOÁN KHẢO SÁT HÀM SỐ

3.10.1. Đường cong trong tọa độ Đề các

Những kết quả trong các mục trên dẫn đến việc khảo sát đầy đủ một hàm số về phương diện định lượng và định tính.

Sơ đồ tổng thể để khảo sát hàm số gồm các bước dưới đây

1. Tìm miền xác định f (nếu như chưa cho) và các tính chất đặc biệt của hàm số như: chẵn, lẻ, tuần hoàn (nếu có)
2. Xét sự biến thiên của hàm số: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số.
3. Tìm cực trị (nếu có)
4. Xét tính lồi, lõm của hàm số, điểm uốn (nếu có)
5. Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có)
6. Lập bảng biến thiên
7. Vẽ đồ thị

Dưới đây ta sẽ minh họa bài toán khảo sát hàm số qua một số ví dụ cụ thể.

Ví dụ 3.35: Khảo sát hàm số $y=f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$

Giải:

* Tập xác định : Để hàm số xác định thì $\frac{x^3}{x-1} \geq 0$ hay $\frac{x}{x-1} \geq 0$. Vậy $X = \mathbb{R} \setminus (0,1]$

* Chiều biến thiên: $y' = (x - \frac{3}{2})\sqrt{\frac{x}{(x-1)^3}}$ trên X

$$y'(x) = 0 \text{ khi } x = 0, x = \frac{3}{2}$$

Bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		-	0		‖	-	0	+	

Vậy y giảm khi x < 0 hoặc $1 < x < \frac{3}{2}$ và tăng khi $x > \frac{3}{2}$

* Cực trị : Từ bảng xét dấu của y' suy ra $x_{\min} = \frac{3}{2}$

$$y_{\min} = y(\frac{3}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

* Tính lồi, lõm: $y'' = \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{x(x-1)^5}} \geq 0, \forall x \in X \setminus \{0\}$ chứng tỏ f(x) lồi trên X.

* Tiệm cận: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ Tiệm cận đứng x = 1.

$$f(x) = |x|\sqrt{\frac{x}{x-1}} = |x|\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ta áp dụng công thức Taylor cho hàm $(1+x)^{\alpha}$ sẽ nhận được

$$f(x) = |x| + \frac{|x|}{2(x-1)} - \frac{1}{8}\frac{|x|}{(x-1)^2} + |x|0\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) = \begin{cases} -x - \frac{x}{2(x-1)} + \frac{1}{8}\frac{x}{(x-1)^2} - x0\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) \text{khi } x < 0 \\ x + \frac{x}{2(x-1)} - \frac{1}{8}\frac{x}{(x-1)^2} + x0\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

Suy ra $\qquad \left(f(x)+x+\dfrac{1}{2}\right)\underset{x\to-\infty}{\to} 0\,,\quad \left(f(x)-x-\dfrac{1}{2}\right)\underset{x\to+\infty}{\to} 0$

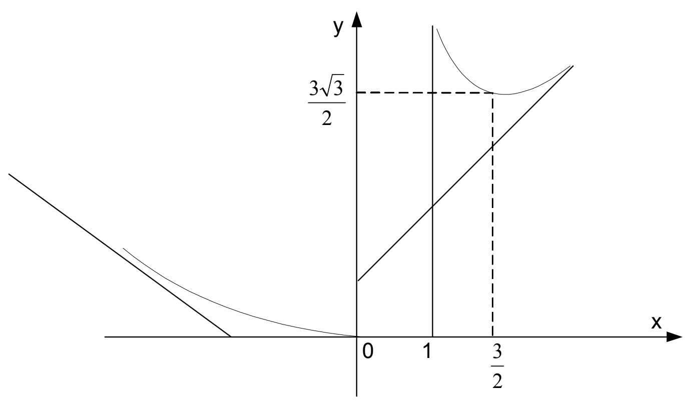
Vậy nhận được các tiệm cận xiên $y=-x-\dfrac{1}{2}, y=x+\dfrac{1}{2}$

* Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		-	0		‖	-	0	+	
y''		+			‖	+		+	
y	$+\infty$	↘	0		‖ $+\infty$	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	$+\infty$

* Đồ thị

Đồ thị hàm số cho bởi H.3.11



H. 3.11

Ví dụ 3.36: Khảo sát hàm số $y=\dfrac{x}{(1-x)(1+x)^2}$

Giải: * Tập xác định: X = $\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$

* Chiều biến thiên: $y'=\dfrac{2x^2-x+1}{(1+x)^2(1+x)^3}$ trên X

* Bảng xét dấu của đạo hàm

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	-	‖ +	‖ +	

Từ bảng xét dấu của y’ suy ra y giảm trên $(-\infty,-1)$, y tăng trên $(-1,1)$ và $(1,+\infty)$. Ngoài ra hàm số y không đạt cực trị

* Tính lồi, lõm:

$$y''=2.\frac{3x^3-3x^2+5x-1}{(1-x)^3(1+x)^4}$$

Nhận xét : Phương trình $y''=0 \Leftrightarrow 3x^3-3x^2+5x-1=0$ có duy nhất nghiệm trong khoảng $(0,\frac{3}{2})$. Ta gọi nghiệm đó là x_0

Vậy hàm số y lõm trên $(-\infty,-1),(-1,x_0),(1,+\infty)$, hàm số y lồi trên $(x_0, 1)$ và $U(x_0, y(x_0))$ là điểm uốn.

* Tiệm cận: $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x}{(1-x)(1+x)^2}=-\infty$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x}{(1-x)(1+x)^2}=+\infty,\ \lim_{x\to1^+}\frac{x}{(1-x)(1+x)^2}=-\infty$$

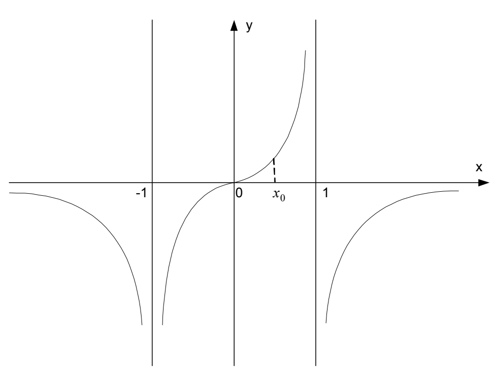
Vậy ta nhận được các tiệm cận đứng $x=\pm1$,

Ngoài ra $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=0$, vậy ta nhận được tiệm cận ngang có phương trình y = 0.

* Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		x_0		1		$+\infty$
y'		-	||		+		||	+	
y''		-	||	-	0	+	||	-	
y	0	↘	$-\infty$ || $-\infty$	↗	y_U	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$

* Đồ thị



H. 3.12

3.10.2. Đường cong cho bởi phương trình tham số

Tham số hóa phương trình đường cong, ngoài việc đơn giản hóa phương trình, chẳng hạn Ellipse với các bán trục a, b: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dưới dạng tham số sẽ là $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, mà trong quá trình khảo sát cũng sẽ đơn giản hơn

Giả sử khảo sát đường cong cho dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t),\ t\in(\alpha,\beta) \end{cases}$$

Tương tự như đối với hàm số cho dưới dạng tường minh, ta tiến hành các bước sau:

1. Tìm miền xác định, các điểm gián đoạn của $x(t), y(t)$, xét tính chẵn lẻ, tuần hoàn nếu có.

2. Xét chiều biến thiên của $x(t), y(t)$ nhờ vào xét dấu của các đạo hàm $x'(t), y'(t)$.

và từ công thức $y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ ta suy ra dấu của y'_x để xác định cực trị;

3. Tìm các tiệm cận như sau: $\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a \\ \lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \infty \end{cases}$ ta nhận được tiệm cận đứng $x = a$

$\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \infty \\ \lim\limits_{t\to t_0} y(t) = b \end{cases}$ ta nhận được tiệm cận ngang $y = b$

$\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \infty \\ \lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \infty \end{cases}$ và $\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = k \\ \lim\limits_{t\to t_0} \left[y(t) - kx(t)\right] = b \end{cases}$ ta nhận được tiệm cận xiên $y = kx + b$

4 Tìm đạo hàm cấp hai $y''_{x^2} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^3}$ và xét dấu của nó để xác định các khoảng lồi, lõm của đường cong, điểm uốn của nó. Trong trường hợp tìm đạo hàm cấp hai khá phức tạp ta có thể bỏ qua phần này;

5. Lập bảng biến thiên, vẽ đồ thị của hàm số. Trong khi vẽ ta chỉ chú ý đến những giá trị đặc biệt của x, y và đạo hàm y'_x (biểu thị hệ số góc của tiếp tuyến của đường cong)

Ví dụ 3.37: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t,\ a > 0 \end{cases}$$

Giải: Đường cong có phương trình đã cho được gọi là đường Astroid. Dễ dàng biến đổi nó về dạng chính tắc, cụ thể dưới dạng ẩn $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Tuy nhiên ta khảo sát trong dạng tham số sẽ thuận tiện hơn.

* Miền xác định là $(-\infty,+\infty)$, còn miền giá trị của x, y là $[-a,+a]$. Vì thế đường cong không có tiệm cận. Ngoài ra, x và y đều tuần hoàn với chu kì 2π nên ta chỉ cần xét $t \in [0,2\pi]$

* Ta tính các đạo hàm: $x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t = 0$ khi $t = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi$

$$y'(t) = 3a\cos t\sin^2 t = 0 \text{ khi } t = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi$$

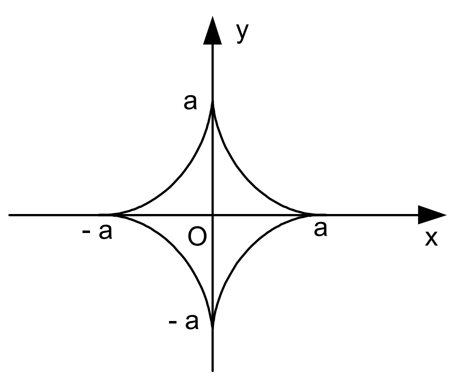
$$y'_x = -tgt, \quad y''_{x^2} = \frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}$$

$$y'_x = 0 \text{ khi } t = 0,\ \pi,\ 2\pi;\ y'_x = \infty \text{ khi } t = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}$$

* Bảng biến thiên

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
x'_t	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0
x	a		0		$-a$		0		a
y'_t	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0
y	0		a		0		$-a$		0
y'_x	0	$-$	$-\infty$	$+$	0	$-$	$+\infty$	$+$	0

* Đồ thị. (Xem H.3.13)



H. 3.13

Ví dụ 3.38: Khảo sát và vẽ đường cong cho bởi phương trình

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0,\ a > 0$$

Giải: Khảo sát trực tiếp dưới dạng ẩn của hàm đã cho là rất khó, vì thế ta tham số hóa đường cong đã cho và khảo sát nó trong dạng tham số. Trước hết nhận thấy vai trò của x và y trong phương trình là đối xứng nên đường cong đối xứng qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất. Sau khi đặt $t = \dfrac{y}{x}$ và thay vào phương trình ta nhận được phương trình tham số

của đường cong $\quad x = \dfrac{3at}{1+t^3},\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3},\ t \neq -1$

* Hàm số $x(t), y(t)$ xác định $\forall t \neq -1$

* Ta tính các đạo hàm: $x'(t) = \dfrac{3a\left(1-2t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2} = 0$ khi $t = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$$x'(t) = \frac{3a\left(2-t^3\right)t}{\left(1+t^3\right)^2} = 0 \text{ khi } t = 0,\ \sqrt[3]{2}$$

$$y'_x = \frac{\left(2-t^3\right)t}{1-2t^3} = 0 \text{ khi } t = 0,\ \sqrt[3]{2};\ y'_x = \infty \text{ khi } t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}},\ \infty$$

* Tiệm cận: $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0,\ \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$

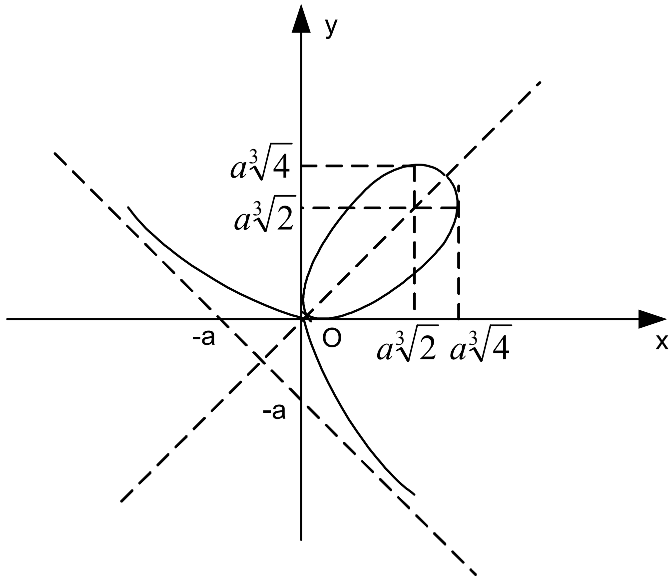
$$\lim_{t\to-1}\frac{y}{x} = \lim_{t\to-1} t = -1;\ \lim_{t\to-1}\left[y+x\right] = \lim_{t\to-1}\frac{3at(t+1)}{t^3+1} = -a$$

Đường cong có duy nhất tiệm cận xiên $y = -x - a$

* Bảng biến thiên

t	$-\infty$ $\quad -1 \quad 0 \quad \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad \sqrt[3]{2} \quad +\infty$
x'_t	$+ \quad \Vert \quad + \quad + \quad 0 \quad - \quad 0 \quad -$
x	$0 \nearrow +\infty \Vert -\infty \nearrow 0 \nearrow a\sqrt[3]{4} \searrow a\sqrt[3]{2} \searrow 0$
y'_t	$- \quad \Vert \quad - \quad 0 \quad + \quad + \quad -$
y	$0 \searrow -\infty \Vert +\infty \searrow 0 \nearrow a\sqrt[3]{2} \nearrow a\sqrt[3]{4} \searrow 0$
y'_x	$-\infty \quad - \quad \Vert \quad - \quad 0 \quad + \quad \Vert \quad - \quad 0 \quad + \quad +\infty$

* Đồ thị hàm số (Xem H.3.14)



H.3.14

3.10.3. Đường cong trong tọa độ cực

3.10.3.1. Hệ tọa độ cực

Để xác định vị trí của các điểm trong mặt phẳng, ngoài hệ tọa độ Đề các, người ta còn dùng hệ tọa độ cực như sau:

Chọn một điểm O gọi là cực và một trục Ox gọi là trục cực. Vị trí của một điểm M bất kì được xác định bởi hai số**:** góc $\varphi = \left(\mathrm{Ox}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ được định hướng, chiều dương là ngược kim đồng hồ, gọi là góc cực và $r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ được gọi là bán kính véc tơ**.** Cặp số (r,φ) gọi là tọa độ cực của điểm M. Để biểu diễn được tất cả các điểm trong mặt phẳng rõ ràng ta chỉ cần hạn chế $r \ge 0$ và $0 \le \varphi < 2\pi$. Với qui ước này thì giữa cặp số (r,φ) và các điểm của mặt phẳng trừ cực O là tương ứng $1-1$. Riêng điểm O ứng với $r = 0$ và φ tùy ý

Nếu chọn hệ trục tọa độ Đề các có gốc tại cực và trục hoành trùng với trục cực (Xem H.1.1, Chương I) thì tọa độ Đề các (x, y) và tọa độ cực (r,φ) của cùng một điểm M có liên hệ sau: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ và ngược lại $\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \mathrm{tg}\varphi = \dfrac{y}{x},\ x\cos\varphi \ge 0,\ \left(y\sin\varphi \ge 0\right) \end{cases}$ (3.47)

Ngoài ra người ta còn định nghĩa hệ tọa độ cực mở rộng như sau: Để xác định điểm $M(r,\varphi)$, đầu tiên ta xác định tia Ou tạo với trục cực góc φ (có hướng âm hoặc dương), rồi trên tia Ou lấy điểm M sao cho $r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ ($r > 0$ thì M nằm trên tia Ou, $r < 0$ thì M nằm trên phần kéo dài với hướng ngược lại). Vậy mỗi cặp (r,φ) có một điểm tương ứng duy nhất. Nhưng ngược lại, mỗi điểm có vô số cặp (r,φ) là tọa độ cực, chẳng hạn $M\left(2, \dfrac{\pi}{2}\right)$ có các tọa độ cực khác như sau: $\left(2, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $\left(-2, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Các liên hệ (3.47) vẫn đúng trong hệ tọa độ cực mở rộng. Từ nay về sau, không có chú ý gì đặc biệt chúng ta luôn xét trong hệ tọa độ cực mở rộng và để đơn giản gọi chung là hệ tọa độ cực

3.10.3.2. Phương trình đường cong trong tọa độ cực

Hệ thức $F(r,\varphi) = 0$ hoặc $r = r(\varphi)$ hoặc $\varphi = \varphi(r)$ (3.48)

xác định một quan hệ giữa các tọa độ cực r, φ được gọi là một hàm số biểu diễn trong tọa độ cực. Quĩ tích các điểm $M(r,\varphi)$ thỏa mãn (3.48) được gọi là đường cong biểu diễn hàm cho bởi (3.48). Phương trình (3.48) sẽ gọi là phương trình của đường cong này trong tọa độ cực.

Nhờ vào tọa độ cực, nhiều đường cong được mô tả bởi phương trình rất đơn giản so với việc mô tả trong tọa độ Đề các.

Ví dụ3.39: Hãy nhận dạng các đường cong có phương trình sau trong tọa độ cực

a. $r = a$ (hằng số); b. $\varphi = \alpha$ (hằng số);

c. $r = 2a\cos\varphi,\ a > 0$; d. $r = 2a\cos\varphi,\ a > 0$;

Giải: a. Tập các điểm cách O là a. Vậy phương trình mô tả đường tròn tâm O, bán kính là a

Theo (3.47) ta có phương trình tương đương trong tọa độ Đề các $x^2 + y^2 = a^2$

b. Tập các điểm nằm trên tia gốc O lập với trục cực một gó là α. Vậy phương trình biểu diễn nửa đường thẳng lập góc α với trục cực. Trong tọa độ Đề các nó có phương trình $y = x\text{tg}\alpha,\ x\cos\alpha \geq 0$

c. Theo (3.47) ta có phương trình tương đương trong tọa độ Đề các

$$r^2 = 2ra\cos\varphi \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2ax \Leftrightarrow (x-a)^2 + y^2 = a^2.$$

Đó là đường tròn tâm $I(a,0)$ bán kính a

d. Tương tự ta nhận được đường tròn tâm $I(0,a)$ bán kính a

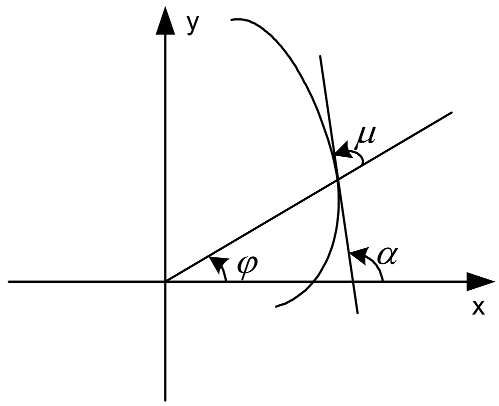
3.10.3.3. Khảo sát đường cong trong tọa độ cực

Trước hết ta thấy rằng, nếu đường cong trong tọa độ cực có phương trình $r = r(\varphi)$ thì phương trình tham số của đường cong (tham số là góc cực φ) trong dạng

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$

Gọi α là góc giữa tiếp tuyến của đường cong tại điểm M và trục Ox, ta có

$$tg\alpha = \frac{r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi}{r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin}$$



H.3.15

Bây giờ gọi μ là góc giữa bán kính cực của điểm M và tiếp tuyến của đường cong tại điểm M, ta có $\mu = \alpha - \varphi$ (Xem H.3.15), đo vậy

$$\mathrm{tg}\mu = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\varphi}{1 + \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\varphi} = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{1 + \mathrm{tg}\alpha\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}} = \frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)} \qquad (3.49)$$

Căn cứ vào góc μ có thể dễ dàng xác định được tiếp tuyến của đường cong

Trình tự khảo sát tổng quát một đường cong trong tọa độ cực như sau:

1. Tìm miền xác định, xét tính chẵn, lẻ, tuần hoàn nếu có
2. Lập bảng biến thiên
3. Xác định một số điểm đặc biệt, các tiếp tuyến đặc biệt và vẽ đồ thi hàm số.

Chú ý:

a. Tính đối xứng:

* nếu $r(\varphi)$ là hàm số chẵn thì đường cong đối xứng qua trục cực.

* nếu $r(\varphi)$ là hàm số lẻ thì đường cong đối xứng qua dường vuông góc với trục cực

* nếu phương trình cho dưới dạng $\varphi = \varphi(r)$ mà $\varphi(-r) = -\varphi(r)$ thì đường cong đối xứng qua cực.

b. Nếu hàm số tuần hoàn với chu kì $T = 2\omega$, ($0 < \omega \le \pi$) thì chỉ cần khảo sát đường cong với φ biến thiên trong đoạn $[-\omega, \omega]$. Sau đó muốn có toàn bộ đường cong chỉ cần quay quanh cực O thuận và ngược kim đồng hồ phần đồ thị đã vẽ trong góc bằng T.

Ví dụ 3.40: Khảo sát đường cong trong tọa độ cực $r = a(1 + cos\varphi)$, $a > 0$ (đường Cardioid)

Giải:

* Hàm số xác định trên $(-\infty,\infty)$, tuần hoàn với chu kì 2π nên chỉ cần xét trong đoạn$[-\pi,\pi]$. Ngoài ra hàm số là chẵn nên đường cong đối xứng qua trục cực. Cuối cùng ta chỉ cần khảo sát trên đoạn $[0,\pi]$.

* Theo (3.49) ta có $\operatorname{tg}\mu = \frac{r}{r'} = \frac{a(1+\cos\varphi)}{-a\sin\varphi} = -\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}$

$$\lim_{\varphi\to\pi}\operatorname{tg}\mu = -\lim_{\varphi\to\pi}\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi} = -\lim_{\varphi\to\pi}\frac{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = -\lim_{\varphi\to\pi}\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} = 0$$

* Bảng biến thiên

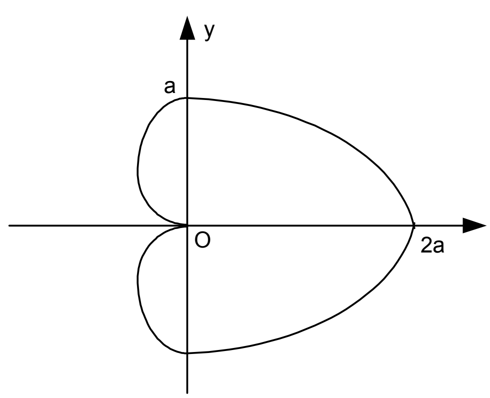
φ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
r'	0	$-$	$-a\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-$	$-a$	$-$	$-a\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-$	0
r	$2a$	$\searrow$	$\approx 1,7a$	$\searrow$	a	$\searrow$	$\approx 0,3a$	$\searrow$	0
$\operatorname{tg}\mu$	$-\infty$		$\approx -2,43a$		-1		$\approx 0,43a$		0

* Đồ thị (Xem H.3.16)

Ví dụ 3.41: Khảo sát đường cong cho bởi phương trình $r = a\sin 3\varphi$ (đường hoa hồng ba cánh)

Giải:

* Hàm số xác định trên $(-\infty,\infty)$; hàm số là lẻ nên đồ thị đối xứng qua trục tung; hàm số tuần hoàn với chu kì $\frac{2\pi}{3}$ nên ta chỉ cần xét trong góc $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$. Kết hợp lại a chỉ cần xét trong đoạn $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$.



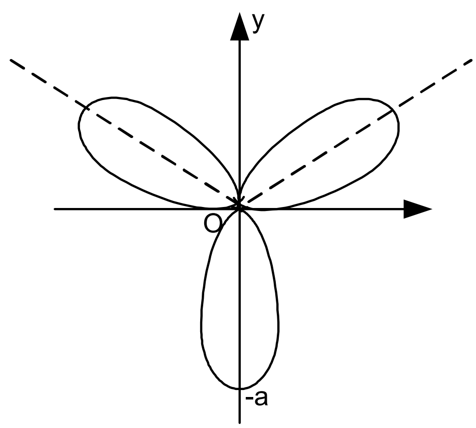
H.3.16

* Ta có $r' = 3a\cos 3\varphi,\ \text{tg}\mu = \dfrac{r}{r'} = \dfrac{1}{3}\text{tg}3\varphi$

* Bảng biến thiên

φ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$
r'	$3a$	$+$	0	$-$	$-3a$
r	0	$\nearrow$	a	$\searrow$	0
$\text{tg}\mu$	0		$+\infty$		0

* Đồ thị



H.3.17

Đồ thị trong góc $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ là một cánh, suy ra đồ thị trong góc $\left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right]$ là hai cánh đối xứng qua trục Oy. Tiếp theo ta quay góc $\dfrac{2\pi}{3}$ sẽ được toàn bộ đồ thị hàm số, chính là đường hoa hồng ba cánh (H.3.17). Tổng quát, ta xét tương tự sẽ nhận thấy:

$r = a\sin n\varphi,\ r = a\cos n\varphi$ là các đường hoa hồng và n lẻ thì số cánh bằng n; còn n chẵn thì số cánh bằng 2n.

TÓM TẮT NỘI DUNG CHƯƠNG III

- **Định nghĩa đạo hàm tại một điểm**

Cho $a \in X, a+h \in X, f \in \mathbb{R}^X$. Người ta nói rằng f khả vi tại a nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

- **Định nghĩa đạo hàm một phía**

1. Cho $a \in X,\ a+h \in X$. Người ta nói rằng f khả vi phải tại a nếu tồn tại giới hạn hữu han

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'_p(a)$$

2. Cho $a \in X,\ a+h \in X$. Người ta nói rằng f khả vi trái tại a nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'_t(a)$$

- **Điều kiện cho hàm số khả vi**

1. *Để f khả vi tại a điều kiện cần và đủ là f khả vi trái và phải tại a đồng thời*

$$f_t'(a) = f_p'(a) = f'(a)$$

2. (điều kiện cần của hàm khả vi) *Nếu f khả vi tại a thì f liên tục tại a*

- **Các phép tính đại số của các hàm khả vi tại một điểm**

Cho f và g khả vi tại a khi đó

1. *$f+g$ khả vi tại a và $(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$*

2. $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, λf *khả vi tại a và $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$*

3. *fg khả vi tại a và $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$*

4. *Nếu $g(a) \neq 0$ thì $\frac{f}{g}$ khả vi tại a và $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$*

Cho $a \in X$, $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ *với $f(X) \subset Y$. Nếu f khả vi tại a và g khả vi tại $f(a)$ thì hàm hợp gof khả vi tại a và*

$$(gof)'(a) = g'\big(f(a)\big).f'(a).$$

- **Định nghĩa vi phân tại một điểm**

Cho $f \in \mathbb{R}^X$, f khả vi tại $a \in X$. Vi phân của f tại a được kí hiệu là $df(a)$ xác định bởi công thức

$$\mathrm{d}f(a) = f'(a).h \quad \text{với } h \in \mathbb{R} \quad \text{hoặc} \quad \mathrm{d}f(a) = f'(a).\mathrm{d}x$$

Để $f(x)$ *khả vi tại a điều kiện cần và đủ là tồn tại hằng số* $\lambda \in \mathbb{R}$ *và một VCB* $\alpha(h)$ *tại* 0 *sao cho*

$$f(a+h) - f(a) = \lambda h + h\alpha(h) \text{ trong đó } \lambda = f'(a).$$

Nếu $f, g \in \mathbb{R}^X$ *và khả vi tại* $a \in X$ *thì*

1. $\mathrm{d}(f+g)(a) = \mathrm{d}f(a) + \mathrm{d}g(a)$

2. $\mathrm{d}(\lambda f)(a) = \lambda \mathrm{d}f(a)$ *với* $\lambda \in \mathbb{R}$

3. $\mathrm{d}(fg)(a) = f(a)\mathrm{d}g(a) + g(a)\mathrm{d}f(a)$

4. $\mathrm{d}\left(\dfrac{f}{g}\right)(a) = \dfrac{1}{g^2(a)}\big(g(a)\mathrm{d}f(a) - f(a)\mathrm{d}g(a)\big)$ *khi* $g(a) \neq 0$

Nếu f, g *khả vi trên* (a,b) *thì trên khoảng đó cũng thoả mãn các hê thức sau.*

1. $\mathrm{d}(f+g)(x) = \mathrm{d}f(x) + \mathrm{d}g(x)$

2. $\mathrm{d}(\lambda f)(x) = \lambda \mathrm{d}f(x)$

3. $\mathrm{d}(f.g)(x) = f(x)\mathrm{d}g(x) + g(x)\mathrm{d}f(x)$

4. $\mathrm{d}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{g^2(x)}\big(g(x)\mathrm{d}f(x) - f(x)\mathrm{d}g(x)\big)$ *khi* $g(x) \neq 0$

- **Đạo hàm và vi phân cấp cao**

Cho $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f, g \in \mathbb{R}^X$ *khả vi n lần trên* X, *khi đó trên* X *có các hệ thức sau đây :*

1. $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$, $\quad \mathrm{d}^n(f+g) = \mathrm{d}^n f + \mathrm{d}^n g$,

2. $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$, *với* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{d}^n(\lambda f) = \lambda \mathrm{d}^n f$,

3. $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$, $\quad \mathrm{d}^n(fg) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \mathrm{d}^k f \mathrm{d}^{n-k} g$

4. $g(x) \neq 0$ *trên* X *thì* $\dfrac{f}{g}$ *khả vi n lần trên* X

- **Các định lí về giá trị trung bình**

1. *Nếu* $f(x)$ *khả vi tại a và đạt cực trị địa phương tại a thì* $f'(a) = 0$.

2. *Cho* $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ *thoả mãn các điều kiện:*

a. f *liên tục trên [a, b],*

b. f *khả vi trên (a, b),*

c. $f(a) = f(b)$. *Khi đó tồn tại* $c \in (a,b)$ *sao cho* $f'(c) = 0$

3. *Cho* $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ *thoả mãn các điều kiện:*

a. liên tục trên [a, b],

b. khả vi trên (a ,b), khi đó tồn tại $c \in (a,b)$ *sao cho*

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

4. *Cho* $f,\ g \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ *thoả mãn các điều kiện:*

a. $f,\ g$ *liên tục trên [a, b],*

b. $f,\ g$ *khả vi trên (a, b),*

c. $g'(x) \neq 0,\ \forall x \in (a,b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

- Công thức Taylo(Taylor), công thức Maclôranh(M'cLaurin)

Nếu $P_n(x)$ *là đa thức Taylor của* $f(x)$ *tại lân cận của a thì nó là duy nhất và có dạng*

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Gọi $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ là phần dư Taylor bậc n tại a của $f(x)$.

$r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ với $c \in (a,x)$ hay $c = a + \theta(x-a),\ 0 < \theta < 1$, (dạng Lagrange).

. $r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}$ (dạng Cauchy) .

- **Công thức M'cLaurin của các hàm thường dùng**

1. $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$.

2 $\sin x = \displaystyle\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o(x^{2n+2})$, $\cos x = \displaystyle\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2n+1})$.

3. $(1+x)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n),$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n) \ ,$$

$\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + o(x^2)$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2 + o(x^2)$,

4. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$,

5. $\text{arctg}x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + ... + \dfrac{(-1)^{m-1}}{2m-1}x^{2m-1} + o(x^{2m})$.

6 $\text{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}}{1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}} = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$

- **Qui tắc Lôpitan (L'Hospital)**

Cho $a \in X,\ f, g \in \mathbb{R}^X$ *thoả mãn các điều kiện sau:*

1. *Liên tục tại a và khả vi ở lân cận* $\Omega_\delta(a) \setminus \{a\}$

2. $g'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in \Omega_\delta(a) \setminus \{a\}$

3. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$ *Khi đó* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = l$.

- **Tính đơn điệu của hàm khả vi**

Cho $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ *thỏa mãn các điều kiện:*

1. *f liên tục trên đoạn [a, b]*

2. *f khả vi trên khoảng (a, b)*

3. $f'(x) = 0, \forall x \in (a,b)$ *khi đó f(x) không đổi trên [a, b]*

Cho f liên tục trên [a, b], khả vi trên (a, b). Để f tăng ngặt trên [a, b], điều kiện cần và đủ là

1 . $f'(x) \geq 0,\ \forall x \in (a,b)$

2. *Tập* $\{x \in (a,b), f'(x) = 0\}$ *không chứa bất kỳ một khoảng có phần trong không rỗng nào*

- **Điều kiện hàm số đạt cực trị**

* *Cho* $f \in \mathbb{R}^X$. *Nếu tồn tại* $(a - \delta . a + \delta) \subset X$ *để* $f(x)$ *liên tục trên khoảng đó đồng thời* $f'(x) \geq 0$ *trên* $(a - \delta, a)$ *và* $f'(x) \leq 0$ *trên* $(a + \delta, a)$ *thì f có một cực đại tại a.*

* *Cho* $f \in C^n$ *tại lân cận* $\Omega_\delta(a)$ *và thỏa mãn các điều kiện:*

$$f'(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0$$

Khi đó:

a. *Nếu n chẵn thì f(x) đạt cực trị tại a: đạt cực tiểu nếu* $f^{(n)}(a) > 0$, *đạt cực đại nếu* $f^{(n)}(a) < 0$.

b. *Nếu n lẻ thì f(x) không đạt cực trị tại a.*

- **Khái niệm về hàm lồi, hàm lõm và điểm uốn**

1. Ánh xạ f được gọi là lồi trên X nếu:

$(\forall x_1, x_2 \in X)\ (\forall \lambda \in [0,1]\ \Rightarrow f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2))$

Người ta nói rằng f là lõm trên X khi và chỉ khi $-f$ là lồi trên X

2. Cho $f \in \mathbb{R}^X$. Giả sử $X = [a,b] \cup [b,c]$ mà f lồi (lõm) trên [a, b], f lõm (lồi) trên [b, c] . Khi đó điểm U(b, f(b)) gọi là điểm uốn của đồ thị C_f của hàm số. Như vậy điểm uốn là điểm phân biệt giữa các cung lồi và cung lõm của đồ thị hàm số

- **Điều kiện để hàm lồi, hàm lõm và điểm uốn**

1. *Để f là lồi trên X điều kiện cần và đủ là $\forall a \in X$, tỷ số gia tại a của f tăng trên $X \setminus \{a\}$, tức là:*

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ tăng trên } X \setminus \{a\}.$$

2. *Giả sử f là lồi trên X khi đó f khả vi phải và trái tại mọi điểm trong của X và $\forall a,b,c \in X$ sao cho a < b < c, ta có*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \le f_t'(b) \le f_p'(b) \le \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

3. *Cho $f \in \mathbb{R}^X$ khả vi. Để f lồi trên X điều kiện cần và đủ là f' tăng trên X*

4. *Cho f khả vi hai lần trên X. Để f là lồi điều kiện cần và đủ là $f''(x) \ge 0,\ \forall x \in X$*

5. *Để U(a, f(a)) là điểm uốn của đồ thị hàm $f \in \mathbb{R}^X$ với $a \in X$, f khả vi hai lần trên X điều kiện cần và đủ là f''(a) = 0 và f''(x) đổi dấu khi x đi qua điểm a.*

BÀI TẬP CHƯƠNG III

3.1. Dùng định nghĩa hãy tính các đạo hàm các hàm số

a. $f(x)=\sqrt{2x+1}$, **b.** $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$,

c. $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{x}$, **d.** $f(x)=\sqrt{x}$.

3.2. Tính các đạo hàm của các hàm số

a. $y=\left|(x-1)^2(x+1)^3\right|$, **b.** $y=\begin{cases} x^2e^{-x^2} & \text{khi } |x|\le 1 \\ \dfrac{1}{e} & \text{khi } |x|>1 \end{cases}$,

c. $y=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x}, & \text{khi } x\ne 0,,\ n\in\mathbb{N}^* \\ 0 & \text{khi } x=0 \end{cases}$, **d.** $y=x.|x|$.

3.3. Chứng tỏ rằng nếu f (x) khả vi tại x = a thì

$$\lim_{x\to a}\frac{x.f(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-af'(a)$$

3.4. Chứng minh rằng hàm số $f(x)=|x-a|\varphi(x)$ trong đó $\varphi(x)$ là hàm số liên tục và $\varphi(a)\ne 0$ không khả vi tại x=a.

3.5. Tính các đạo hàm f_p'(0) và f_t'(0) của các hàm số sau đây:

a. $f(x)=\sqrt{\sin x^2}$, **b.** $f(x)=\arcsin\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$,

c. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{khi } x\ne 0 \\ 0 & \text{khi } x=0 \end{cases}$, **d.** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^n}e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{khi } x\ne 0,\ n\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{khi } x=0 \end{cases}$.

3.6. Tính đạo hàm của các hàm số:

a. $y=\ln tg\dfrac{x}{2}$, **b.** $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$,

c. $y=e^{\sin^2\frac{1}{x}}$, **d.** $y=\arcsin\dfrac{2x^2}{1+x^4}$.

e. $y=\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3$, **f.** $y=\frac{1}{2}arctg\frac{2x}{1-x^2}$,

g. $y=\ln\frac{x\ln x-1}{x\ln x+1}$, **h.** $y=\frac{1}{\sqrt{2ax-x^2}}$,

i. $y=\ln\frac{x^2}{\sqrt{1-ax^4}}$, **k.** $y=\frac{1}{(1+\cos 4x)^5}$,

l. $y=\cos^2\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$, **m.** $y=\sqrt{1+tg\left(x+\frac{1}{x}\right)}$,

n. $y=\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, **o.** $y=\log_2\log_3\log_5 x$.

3.7. Tính đạo hàm sau bằng phương pháp đạo hàm lôga:

a. $y=x^{x^2}$, **b.** $y=(\sin x)^{\cos x}$,

c. $y=\frac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$, **d.** $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$,

e. $y=(x^2+1)^{\sin x}$, **f.** $y=\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$,

g. $y=x^{\frac{1}{x}}$, **h.** $y=x^{-x}2^x x^2$,

i. $y=\frac{x^x}{e^x}(x\ln x-x-1)$, **k.** $y=\log_{\cos x}\sin x$.

3.8. Tính vi phân của hàm số

a. $y=\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\ln \text{tg}\frac{x}{2}$,

b. Cho $f(x)=x^3-2x+1$. Tính $\Delta f(1),\ df(1)$,

c. $y=3^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{2^{2x}}+6^{\sqrt{x}}$ tại $x=1$ **và** $dx=0,2$.

3.9. Ứng dụng vi phân, hãy chứng minh

a. $\sqrt{a^2+x}\approx a+\frac{x}{2a}$, với $|x|<<a^2$, $(a>0)$,

b. Với $|x| << a^n$ chứng minh $\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \dfrac{x}{na^{n-1}}$, với $|x| << a^n$,$(a > 0)$

Áp dụng tính $\sqrt[10]{10^3} = \sqrt[10]{2^{10} - 24}$,

3.10. Tính đạo hàm $y_x{}'$ của các hàm cho theo tham số:

a. $x = a\cos^3\varphi$, $y = b\sin^3\varphi$,

b. $x = \ln(1+t^2)$, $y = t - arctgt$,

c. $x = \dfrac{1+t^3}{t^2-1}$, y=$\dfrac{t}{t^2-1}$,

d. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$.

3.11. Tính đạo hàm theo các biến tương ứng sau:

a. $\dfrac{d}{d(x^3)}(x^3 - 2x^6 - x^9)$, **b.** $\dfrac{d}{d(x^2)}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$, **c.** $\dfrac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$.

3.12. Chứng minh các hệ thức sau:

a. $xy'^3 = 1 + y'$ với $x = \dfrac{1+t}{t^3}$, $y = \dfrac{3}{2t^3} + \dfrac{2}{t}$,

b. $y\sqrt{1+y'^2} = y'$ với $x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \ln\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$, $y = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$,

c. $yy' = 2xy'^2$ với $x = \dfrac{1+\ln t}{t^2}$, $y = \dfrac{3+2\ln t}{t}$.

3.13. Chứng minh các hệ thức sau:

a. Cho $f(x) = \ln\dfrac{1}{1-x}$. Chứng minh $f^{(n)}(0) = (n-1)!$,

b. Cho $f(x) = x^2 e^{-\frac{x}{a}}$. Chứng minh $f^{(n)}(0) = \dfrac{(-1)^n.n.(n-1)}{a^{n-2}}$,

c. Cho $f(x) = x^n$. Chứng minh $f(1) + \dfrac{f'(1)}{1!} + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(1)}{n!} = 2^n$.

3.14. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số:

a. $y = 2^x + 2^{-x}$, **b.** $y = \ln(ax+b)$,

c. $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, **c.** $y = \sqrt{x}$,

e. $y = x^n\sqrt{x}$,   **f.** $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$ **.**

3.15. Tính các đạo hàm cấp cao sau:

a. $y = (x^2+1)\sin x$ tính $y^{(20)}$,

b. $y = \dfrac{e^x}{x}$ tính $y^{(10)}$,

c. $y = e^x.\sin x$ tính $y^{(n)}$,

d. $y = \sin ax.\sin bx$ tính $y^{(n),}$

e. $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$ tính $y^{(100,)}$

f. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$ tính $y^{(n)}$,

g. $y = e^{ax}\sin(bx+c)$ tính $y^{(n)}$.

3.16. Chứng minh hàm số $y = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$ thỏa mãn $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$

3.17. Áp dụng các phép tính đạo hàm, hãy tìm các tổng sau:

a. $A_n = 1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}$**,**

b. $B_n = 1.2+2.3.x+3.4.x^2+...+n(n-1)x^{n-2}$**,**

c. $C_n = 1^2+2^2x+3^2x^2+...+n^2x^{n-1}$**.**

3.18. Chứng minh rằng phương trình $x^n + px + q = 0,\ n \in \mathbb{N}^*$ không có quá 2 nghiệm thực với n chẵn, không có quá 3 nghiệm thực với n lẻ.

3.19. Chứng minh rằng $\forall m$ phương trình $x^3 - 3x + m = 0$ không thể có 2 nghiệm khác nhau trong [0,1].

3.20. Chứng tỏ rằng phương trình f'(x) = 0 có 3 nghiệm thực biết rằng

$$f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$$

3.21. Chứng minh rằng số nghiệm của phương trình f(x) = 0 không nhiều hơn quá 1 đơn vị của số nghiệm của phương trình f'(x) = 0 trong khoảng khả vi của nó.

3.22. Cho f(x) khả vi trên [a,b] và có đạo hàm đến cấp hai trên (a,b). Chứng minh rằng $\forall x \in (a,b)$ có thể tìm được ít nhất số $C_x \in (a,b)$ sao cho

$$f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)=\frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(C_x)$$

3.23. **a.** Không cần tìm đạo hàm của hàm số $f(x)=(x^2-1)(x^2-4)$. Hãy cho biết số nghiệm của phương trình f'(x) = 0 và chỉ ra các khoảng chứa nghiệm đó.

b. Cho $f(x)=1+x^m(x-1)^n$ với $m,n\in\mathbb{N}^*$ chứng tỏ rằng f'(x) = 0 có nghiệm trong khoảng (0,1).

3.24. Cho hàm f(x) liên tục trên [a,b], khả vi trong (a,b). Chứng tỏ rằng nếu áp dụng định lí Rolle cho hàm số: $F(x)=\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix}$ thì chúng ta sẽ nhận được định lí Lagrange.

3.25. Chứng minh các bất đẳng thức sau đây:

a. $\frac{a-b}{a}\le \ln\frac{a}{b}\le\frac{a-b}{b}$, $(0<b\le a)$,

b. $\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}\le \operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta\le\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}$, $(0<\beta\le\alpha<\frac{\pi}{2})$,

c. $nb^{n-1}(a-b)\le a^n-b^n\le na^{n-1}(a-b),(b<a),\ n\in\mathbb{N}$,

d. $|\operatorname{arctg}a-\operatorname{arctg}b|\le|a-b|$.

3.26. **a.** Tìm các hằng số a, b để tồn tại giới hạn hữu hạn của f(x) khi $x\to 0$

$$f(x)=\frac{1}{\sin^3 x}-\frac{1}{x^3}-\frac{a}{x^2}-\frac{b}{x}$$

b. Tìm hằng số k để tồn tại giới hạn hữu hạn của hàm f(x) khi $x\to 0$

$$f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}(\arcsin x+k)$$

3.27. Dùng qui tắc L'Hospital tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$, **b.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$, **c.** $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$,

d. $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x}{\ln(1-x)}$, **e.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$, **f.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\pi}{x}}{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}x}$.

3.28. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$, **b.** $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln x.\ln(x-1)$,

c. $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}x^{-100}$, **d.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{p}{1-x^p}-\dfrac{q}{1-x^q}\right)$,

e. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right]$, **f.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{\text{cotg}x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

3.29. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$, **b.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\text{tg}x)^{2\cos x}$, **c.** $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^{2x})^{\frac{1}{x}}$,

d. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\text{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, **e.** $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$, **f.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

3.30. Tìm các khoảng tăng, giảm và cực trị của các hàm số sau:

a. $y=x(1+\sqrt{x})$, **b.** $y=x\ln x$, **c.** $y=(x^2-1)^{\frac{3}{2}}$,

d. $y=\dfrac{e^x}{x}$, **e.** $y=x\sqrt{ax-x^2}, (a>0)$.

3.31. Tìm cực trị các hàm số sau:

a. $y=x^2(1-x\sqrt{x})$, **b.** $y=|x|(x+2)$ **c.** $y=x^{\frac{2}{3}}+(x-2)^{\frac{2}{3}}$,

d. $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$, **e.** $y=\dfrac{1+\ln x}{x}$, **f.** $y=2\cos\dfrac{x}{2}+3\cos\dfrac{x}{3}$,

g. $y=\sqrt{\sin x^2}$, **h.** $y=\ln\sqrt{1+x^2}-arctgx$.

3.32. Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\text{arctg}x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

b. $\arcsin x=\text{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

3.33. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a. $\sin x+\text{tg}x\ge 2x$ với $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,

b. $\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2$ với $\forall x > 0$.

c. $\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\alpha} < \frac{\mathrm{tg}\beta}{\beta}$ $, 0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$,

d. $e^x > 1 + x$, $\forall x \neq 0$,

e. $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$, $\forall x \geq 0$,

f. $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$, $\forall x \geq 0$,

g. $\mathrm{tg}x > x + \frac{x^3}{3}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

h. $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$, $\forall x > 1$,

i. $2x\mathrm{arctg}x \geq \ln(1+x^2)$, $\forall x$,

j. $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$, $\forall x > 1$,

k. $\ln(1+x) > \frac{arctgx}{1+x}$, $\forall x > 0$.

3.34. Chứng minh tính duy nhất nghiệm của các phương trình sau:

a. $2x + \sin x + \cos x = 0$,

b. $\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 1 = 0$, $x \leq 0$,

c. $a^x + b^x = c^x$, $0 < a < c, 0 < b < c$,

d. $x = a\sqrt{2} + 2\sin\frac{a+x}{2}, \forall a$,

e. $x^3 + \sin^2 ax + \cos^3 a = 0, \forall a$.

3.35. Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất của các hàm số:

a. $y = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}, 0 \leq x \leq 1$, **b.** $y = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{1-x}$, $0 < x < 1, a > 0, b > 0$,

c. $y = 2\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}^2 x$, $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, **d.** $y = \mathrm{arctg}\frac{1-x}{1+x}$, $0 \leq x \leq 1$.

3.36. Tìm các tiệm cận của các đường cong

a. $y = x + \ln x$, **b.** $y = \dfrac{\sin x}{x}$, **c.** $y = x^2 e^{-x}$

d. $y = x - 2 + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$, **e.** $y = x\ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$, **f.** $y = xe^{\frac{2}{x}} + 1$.

3.37. Xét tính lồi lõm và tìm điểm uốn của hàm số:

a. $y = \dfrac{x^3}{x^2+12}$, **b.** $y = (1+x^2)e^x$,

c. $y = a - \sqrt[5]{(x-b)^2}$, **d.** $y = \dfrac{a}{x}\ln\dfrac{a}{x}$, $(a > 0)$.

3.38. Khảo sát hàm số sau:

a. $y = (2+x^2)e^{-x^2}$, **b.** $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, **c.** $y = \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^4}$,

d. $y = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$, **e.** $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$, **f.** $y = e^{\frac{1}{x}} - x$.

3.39. Nhận dạng các đường cong sau:

a. $r = \dfrac{3}{\cos\varphi}$; **b.** $r = \dfrac{5}{3\sin\varphi - 4\cos\varphi}$; **c.** $r = \dfrac{1+\operatorname{tg}\varphi}{\cos\varphi}$.

3.40. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trong tọa độ cực

a. $r = 1 + 2\cos\varphi$; **b.** $r = 2\cos 2\varphi$; **c.** $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$;

(Lần lượt các đường: đường ốc sên Pascal, đường hoa hồng 4 cánh, đường lemniscat)

CHƯƠNG IV. PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

Phép tính tích phân là phép tính cơ bản thứ hai của giải tích. Chúng ta sẽ tiếp cận khái niệm tích phân xác định xuất phát từ phép tính giới hạn, khác hẳn với phép tính tích phân bất định, là phép tính ngược của đạo hàm.Tuy nhiên các định lí cơ bản của phép tính vi phân và tích phân sẽ cho ta thấy sự liên hệ chặt chẽ của hai loại tích phân có vẻ khác nhau này. Qua đây cũng thấy được nền tảng của phép tính tích phân chính là phép tính vi phân.

4.1. KHÁI NIỆM VỀ TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

4.1.1. Định nghĩa tích phân xác định

Cho $f: \ [a,b] \to \mathbb{R}$, $a<b$

1. Ta gọi một cách chia nhỏ đoạn $[a,b]$ bởi một họ hữu hạn các điểm (x_i), $i=\overline{0,\ n}$ sao cho

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

là một phân hoạch (hay một cách chia) đoạn $[a,b]$ và gọi $\lambda = \underset{0 \le i \le n-1}{\text{Max}} \Delta x_i$, trong đó $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{0,\ n-1}$ là bước của phân hoạch đã chọn. Tập phân hoạch kí hiệu là $(\wp_n)$.

2. Ta gọi một cách chọn ứng với phân hoạch là một cách lấy n điểm ξ_i, sao cho $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0,\ n-1}$.

3. Ta gọi số thực $\sigma_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ là tổng tích phân Riemann của hàm f, ứng với một phân hoạch và một cách chọn. Rõ ràng với $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ sẽ có dãy vô hạn các tổng tích phân Riemann σ. Kí hiệu dãy đó là $\{\sigma_n\}$.

4. Nếu $\lambda \to 0$ mà $\sigma_n \to I$ hữu hạn không phụ thuộc vào bất cứ một phân hoạch nào của $[a,b]$ và cũng không phụ thuộc vào bất kỳ một cách chọn nào ứng với một phân hoạch đã định thì I gọi là tích phân xác định của f trên $[a,b]$. Kí hiệu tích phân xác định là $\int\limits_a^b f(x)dx$ và khi đó nói rằng f khả tích trên $[a,b]$.

Như vậy
$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (4.1)$$

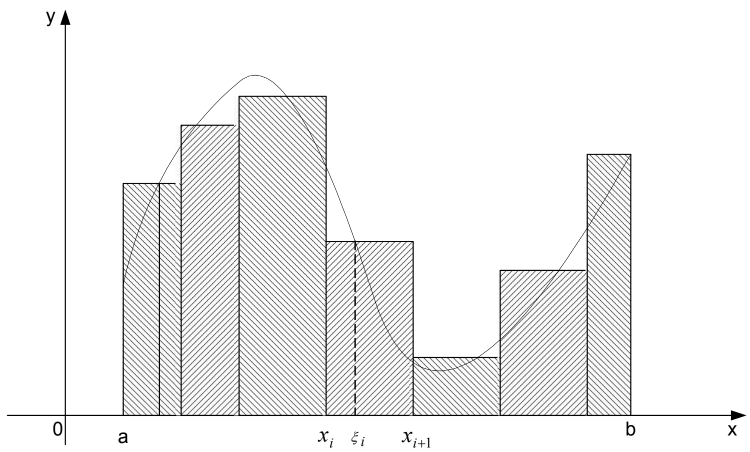
Trong kí hiệu trên: $\int$ là dấu lấy tích phân, $\int\limits_a^b$ là lấy tích phân từ a đến b, a là cận dưới, b là cận trên của tích phân, x là biến lấy tích phân, $f(x)$ là hàm dưới dấu tích phân, dx là vi phân của biến lấy tích phân. Định nghĩa này được Riemann phát biểu tổng quát đầu tiên

nên tích phân xác định cũng gọi là tích phân Riemann (mặc dù trước đó Cauchy đã dùng định nghĩa này cho các hàm số liên tục).
Danh từ tích phân (integral) xuất phát từ chữ La tinh integer có nghĩa là nguyên, do Bernoulli đặt. Kí hiệu $\int f(x)dx$ do Leibnitz dùng, còn $\int_a^b f(x)dx$ do Fourier dùng đầu tiên.

Chú ý:

a. Chúng ta sẽ thấy được ý nghĩa hình học của tích phân xác định như sau: Nếu $f(x) \geq 0$ trên $[a,b]$ thì tổng Riemann chính là tổng diện tích các hình chữ nhật có kích thước tương ứng Δx_i và $f(\xi_i)$, $i = \overline{0,n-1}$. Đó là diện tích của hình bậc thang, gần đúng diện tích của hình thang cong giới hạn bởi trục Ox, đường cong C_f của hàm số, các đường thẳng $x = a$, $x = b$.

Như vậy $\int_a^b f(x)dx$ chính là diện tích của hình thang cong đã mô tả ở trên, ta kí hiệu hình thang đó là $\lfloor a,b,C_f \rfloor$. (H.4.1)



H.4.1

b. Nếu $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$ thì $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$. Bởi vì tích phân ở vế phải cũng chính là giới hạn của dãy tổng Riemann $\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta t_i$, vì cả hai đều thực hiện phân hoạch $[a,b]$ với cùng một hàm số f Như vậy tích phân xác định không phụ thuộc vào biến lấy tích phân.

c. Người ta định nghĩa $\int_b^a f(x)dx$ theo công thức $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ (4.2)

Đặc biệt $$\int_a^a f(x)dx = 0 . \qquad (4.3)$$

4.1.2. Điều kiện tồn tại

A. Điều kiện cần

Định lí 4.1: *Nếu f khả tích trên [a,b] thì f bị chặn trong [a,b].*

Chứng minh: Ta lý luận phản chứng như sau:

Giả sử f không bị chặn trên, khi đó lập được dãy con của $\{\sigma_n\}$ dần đến $+\infty$ bằng cách lấy các điểm ξ_i trong lân cận không bị chặn trên của f. Chứng tỏ không tồn tại giới hạn hữu hạn của σ_n. Vậy f bị chặn trên, tương tự f cũng bị chặn dưới. Tức là tồn tại $m, M \in \mathbb{R}$ sao cho $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in [a,b]$.

B. Các tổng Darboux

Cho $f: \ [a,b] \to \mathbb{R}$ và một phân hoạch (x_i) xác định $(i = \overline{0,\ n})$

Đặt $m_i = \operatorname*{Inf}_{[x_i, x_{i+1}]}(f)$, $M_i = \operatorname*{Sup}_{[x_i, x_{i+1}]}(f)$, $\quad i = \overline{0, n-1}$.

Người ta gọi $s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$, $S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$ là các tổng Darboux dưới và trên, hay tổng tích phân dưới và tổng tích phân trên của f ứng với một phân hoạch.

Vì rằng $\quad m_i \le f(\xi_i) \le M_i$, $\forall \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ nên $s \le \sigma \le S$.

Rõ rang ứng với một phân hoạch đã xác định thì s, S là hằng số

Vậy tổng Riemannn phụ thuộc vào $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0,\ n-1}$. Chứng tỏ các tổng Darboux là cận dưới đúng và cận trên đúng của σ .

Hệ quả 1: *Nếu thêm vào điểm chia mới thì s tăng và S giảm.*

Chứng minh: Giả sử thêm vào phân hoạch điểm $x' \in [x_k, x_{k+1}]$

Gọi S' là tổng Darboux mới, khác với tổng S cũ chỉ trên $[x_k, x_{k+1}]$. Hãy so sánh $M_k(x_{k+1} - x_k)$ và $M_k'(x' - x_k) + M_k''(x_{k+1} - x')$ trong đó $M_k' = \operatorname*{Sup}_{[x_k, x']} f$ và $M_k'' = \operatorname*{Sup}_{[x', x_{k+1}]} f$.

Đương nhiên ta có $M_k' \le M_k$, $M_k'' \le M_k$

Vậy $\qquad M_k'(x' - x_k) + M_k''(x_{k+1} - x') \le M_k(x_{k+1} - x_k)$

Chứng tỏ S giảm. Tương tự sẽ chứng minh được s tăng.

Hệ quả 2: *Mọi tổng Darboux dưới không vượt quá một tổng Darboux trên.*

Chứng minh: Gọi s_1, S_1 ứng với $\wp_1$; s_2, S_2 ứng với $\wp_2$. Ta sẽ chứng minh $s_2 \le S_1$. Ta lập $\wp_3$ gồm họ tất cả các điểm của $\wp_1$ và $\wp_2$. Theo hệ quả 1 sẽ có

$$s_1 \le s_3 \le S_3 \le S_2 \Rightarrow s_1 \le S_2$$

Như vậy tồn tại $I_* = \operatorname{Sup}\{s\} \le S$

$$I^* = \operatorname{Inf}\{S\} \ge s \ \text{ và } \ s \le I_* \le I^* \le S.$$

C. Điều kiện cần và đủ để hàm khả tích

Định lí 4.2: *Điều kiện cần và đủ để hàm f khả tích trên [a,b] là*

$$\lim_{\lambda \to 0}(S - s) = 0 \tag{4.4}$$

Chứng minh: Điều kiện trên có thể diễn đạt như sau:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall \lambda < \delta \Rightarrow S - s < \varepsilon)\ (\forall \xi_i \in [x_i, x_{i+1}])\ (i = \overline{0,\ n-1})$$

Điều kiện cần.

Giả sử hàm f khả tích, tức là σ_n dần tới I khi $\lambda \to 0$ không phụ thuộc vào cách chia [a,b] và cách chọn các điểm $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}],\ i = \overline{0,\ n-1}$. Nói cách khác

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall \lambda < \delta \Rightarrow |\sigma_n - I| < \varepsilon)\ (\forall \xi_i \in [x_i, x_{i+1}] \Rightarrow I - \varepsilon < \sigma_n < I + \varepsilon)$$

Vì s, S là các cận dưới đúng và trên đúng của σ_n nên ta có

$$I - \varepsilon \le s \le S \le I + \varepsilon$$

Suy ra $\lim\limits_{\lambda \to 0} s = \lim\limits_{\lambda \to 0} S = I$. Hay là $\lim\limits_{\lambda \to 0}(S - s) = 0$.

Điều kiện đủ.

Theo hệ quả 2, ta có $s \le I_* \le I^* \le S$

Nếu $\lim\limits_{\lambda \to 0}(S - s) = 0$ thì $I_* = I^* = I$ và $s \le I \le S$

Mặt khác $s \le \sigma_n \le S \Rightarrow |\sigma_n - I| \le S - s \Rightarrow \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma_n = I$

Độ lệch $\omega_i = M_i - m_i$ được gọi là dao động của f trên $[x_i, x_{i+1}],\ i = \overline{0,\ n-1}$.

Như thế $S - s = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$

Chứng tỏ, để f khả tích trên [a,b] cần và đủ là $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0$. (4.5)

4.1.3. Lớp các hàm khả tích

Định lí 4.3: *Nếu $f(x)$ liên tục trên [a,b] thì khả tích trên đoạn đó*

Chứng minh: Giả sử f liên tục trên [a,b] khi đó f liên tục đều trên [a,b], tức là

$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall \Delta x_i < \delta \Rightarrow \omega_i < \delta)$. Vậy $\forall \lambda:\ \lambda < \delta$ ta sẽ nhận được

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon(b - a) \Rightarrow \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

Định lí 4.4: *Nếu $f(x)$ đơn điệu và bị chặn trên [a,b] thì khả tích trên đoạn đó.*

Chứng minh: Giả sử $f(x)$ đơn điệu tăng, vậy $\omega_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$

$$(\forall \varepsilon > 0)\ \left(\exists \delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} > 0\right)\ \left(\forall \Delta x_i < \delta \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \delta \sum_{i=0}^{n-1} \big(f(x_{i+1}) - f(x_i)\big) = \varepsilon\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

Hệ quả: *Nếu $f(x)$ liên tục từng khúc trên [a,b] thì khả tích trên đoạn đó.*

Dưới đây ta đưa ra các định lí và sẽ không chứng minh về một lớp hàm khả tích, lớp hàm này chứa tất cả các hàm số đã xét ở trên

Định lí 4.5: *Nếu $f(x)$ bị chặn và chỉ có hữu hạn điểm gián đoạn trên [a,b] thì $f(x)$ khả tích trên [a,b].*

Định lí 4.6: *Nếu* $f(x)$ *khả tích trên [a,b] thì* $|f(x)|,\ k.f(x),\ (k = const)$ *cũng khả tích trên [a,b].*

Định lí 4.7: *Nếu* f, g *khả tích trên [a,b] thì tổng, hiệu, tích của chúng cũng khả tích trên [a,b].*

Định lí 4.8: *Nếu* f *khả tích trên [a,b] thì hàm số đó khả tích trên mọi đoạn* $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$. *Ngược lại nếu [a,b] tách ra thành một số đoạn, trên mỗi đoạn đó hàm khả tích thì* f *khả tích trên [a,b].*

4.1.4. Các tính chất của tích phân xác định

A. Tính chất.

Cho f, g khả tích trên [a,b] và a < b, λ là hằng số.

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ với $c \in (a,b)$

2. $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

3. $\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

4. Nếu $f(x) \geq 0$ trên [a,b] thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

5. Nếu $f(x) \geq g(x),\ \forall x \in [a,b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

6. Nếu $f \geq 0$ trên [a,b], f liên tục tại $x_0 \in [a,b]$ và $f(x_0) > 0$ khi đó $\int_a^b f(x)dx > 0$

Thật vậy $\exists \Omega_\delta(x_0)$ để $f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0),\ \forall x \in \Omega_\delta(x_0)$

Ta xét hàm số $e(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f(x_0) & \text{khi } x \in \Omega_\delta(x_0) \\ 0 & \text{khi } x \in [a,b] \backslash \Omega_\delta(x_0) \end{cases}$

Suy ra $f(x) \geq e(x),\ \forall x \in [a,b]$. Theo 5. ta có

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b e(x)dx = \frac{1}{2} f(x_0).2\delta > 0 .$$

7. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

8. Nếu $m \leq f(x) \leq M,\ \forall x \in [a,b]$ thì $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

$\Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$. Đặt $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Gọi μ là giá trị trung bình của f trên [a,b], khi đó ta có

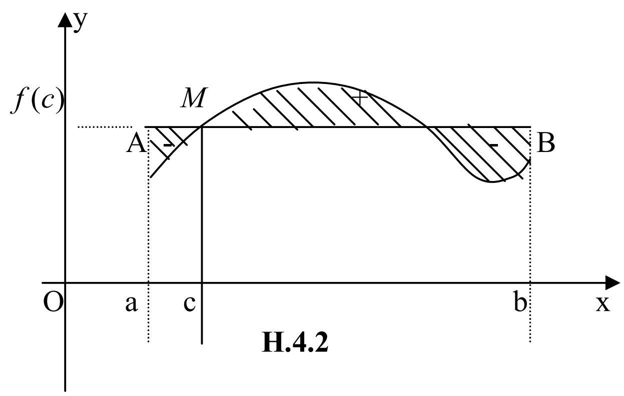
$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

Nếu $f(x)$ liên tục trên [a,b] theo định lí 2 của mục 2.4.3 sẽ tồn tại $c \in [a,b]$ sao cho $\mu = f(c)$.

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Ta mô tả hình học công thức trên như sau:

Trên đường cong C_f đồ thị của hàm $f(x) \geq 0, x \in [a,b]$, bao giờ ta cũng tìm được điểm $M(c, f(c))$ để hình chữ nhật có kích thước b-a và $f(c)$ có diện tích bằng diện tích của hình thang cong $[a,b,C_f]$. Xem hình 4.2



H.4.2

B. Định lí tổng quát về giá trị trung bình

Định lí 4.9: *Cho f, g khả tích trên [a,b], $a < b$, $g(x) \geq 0$ hoặc $g(x) \leq 0$ trên [a,b] khi đó*

$$\int_a^b f(x).g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx. \text{ Trong đó } \mu \in [m,M] \quad m \leq f(x) \leq M \tag{4.6}$$

Nếu thêm điều kiện $f(x)$ liên tục thì tồn tại $c \in [a,b]$ thỏa mãn hệ thức

$$\int_a^b f(x).g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx \tag{4.7}$$

Chứng minh: Giả sử $g(x) \leq 0$ trên [a,b], khi đó $\int_a^b g(x)dx \leq 0$ và

$$mg(x) \geq f(x).g(x) \geq Mg(x)$$

Vậy $$m\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x).g(x)dx \geq M\int_a^b g(x)dx$$

Nếu $\int_a^b g(x)dx = 0$ thì $\int_a^b f(x).g(x)dx = 0 \Rightarrow$ Công thức đúng $\forall \mu$

Nếu $\int_a^b g(x)dx < 0$ thì $m \le \dfrac{1}{\int_a^b g(x)dx}.\int_a^b f(x).g(x)dx \le M$

Ta đặt $\mu = \dfrac{1}{\int_a^b g(x)dx}.\int_a^b f(x).g(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x).g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$

Khi $f(x)$ liên tục trên [a,b], sẽ $\exists c \in [a,b]$ để $f(c) = \mu$ và ta có

$$\int_a^b f(x).g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

C. Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz đối với tích phân

Định lí 4.10: *Nếu f, g liên tục từng khúc trên [a,b] thì khi đó*

$$\left(\int_a^b f(x).g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx. \tag{4.8}$$

Chứng minh: $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ có $\int_a^b (\lambda f + g)^2 dx \ge 0$ hay $\left(\int_a^b f^2dx\right)\lambda^2 + 2\left(\int_a^b fgdx\right)\lambda + \int_a^b g^2dx \ge 0$

* Giả sử $\int_a^b f^2dx = 0$

Nếu $\int_a^b fgdx > 0$ thì $2\left(\int_a^b fgdx\right)\lambda + \int_a^b g^2dx \to -\infty$ khi $\lambda \to -\infty$, điều này là mâu thuẫn.

Nếu $\int_a^b fgdx < 0$ thì $2\left(\int_a^b fgdx\right)\lambda + \int_a^b g^2dx \to -\infty$ khi $\lambda \to +\infty$, điều này là mâu thuẫn.

Từ đó suy ra $\int_a^b f.gdx = 0$. Chứng tỏ bất đẳng thức đúng.

* Giả sử $\int_a^b f^2dx > 0$. Theo tính chất của tam thức bậc 2 suy ra

$$\Delta' = \left(\int_a^b f.gdx\right)^2 - \int_a^b f^2dx.\int_a^b g^2dx \le 0$$

Vậy ta bất đẳng thức đã được chứng minh.

4.1.5. Công thức Newton - Leibnitz

A. Hàm tích phân của cận trên

Cho $f(x)$ khả tích trên [a,b]. Lấy x_0 cố định, $x_0 \in [a,b]$. Cho $x \in [a,b]$ khi đó theo định lí 4.8 thì hàm $f(x)$ khả tích trên $[x_0, x]$ với x tuỳ ý. Người ta gọi hàm số

$$\phi(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt \tag{4.9}$$

là hàm tích phân của cận trên hay tích phân của hàm $f(x)$ theo cận trên.

Định lí 4.11: *Nếu* $f(x)$ *khả tích trên [a,b] thì* $\phi(x)$ *là hàm liên tục trên [a,b].*

Chứng minh: Lấy $x \in (a,b)$ và $h \in \mathbb{R}^*$ sao cho $x+h \in [a,b]$ xét số gia hàm số tại x:

$$\Delta\phi(x) = \phi(x+h) - \phi(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt = \mu h$$

trong đó $\operatorname*{Inf}_{[a,b]} f \le \operatorname*{Inf}_{[x,x+h]} f \le \mu \le \operatorname*{Sup}_{[x,x+h]} f \le \operatorname*{Sup}_{[a,b]} f$ (Theo tính chất 8.)

Từ đó ta suy ra $\Delta\phi(x) \underset{h\to 0}{\to} 0$ Vậy $\phi(x)$ liên tục tại $x \in (a,b)$

Chú ý: Cũng tương tự như trên ta sẽ chứng minh $\phi(x)$ liên tục phải tại a, liên tục trái tại b.

Định lí 4.12: *Nếu* $f(x)$ *liên tục trên [a,b] thì* $\phi(x)$ *khả vi trên [a,b] và có*

$$\phi'(x) = f(x), \forall x \in [a,b]. \tag{4.10}$$

Chứng minh:

Ta lấy $x \in (a,b)$ ta có $\dfrac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} = \mu$, với h khá bé và $\mu \in \left[\operatorname*{Inf}_{[x,x+h]} f, \operatorname*{Sup}_{[x,x+h]} f\right]$

Vì $f(x)$ liên tục tại x nên khi $h \to 0$ thì $\operatorname*{Inf}_{[x,x+h]} f$ và $\operatorname*{Sup}_{[x,x+h]} f$ cùng dần đến $f(x)$ do đó μ cũng dần đến $f(x)$ .Theo định nghĩa của đạo hàm, giới hạn đó chính là $\phi'(x)$

Vậy $\phi'(x) = f(x)$

Ta dễ dàng suy ra: $\phi_p'(a) = f(a)$, $\phi_t'(b) = f(b)$

Hệ quả: *Nếu* $\alpha(x), \beta(x)$ *khả vi trên* X, $f(x)$ *liên tục trên* X *và* $[\alpha(x), \beta(x)] \subset X \ \forall x \in X$ *thì tồn tại* $G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$ *khả vi trên* X *đồng thời*

$$G'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x) \tag{4.11}$$

B. Nguyên hàm của hàm số và tích phân bất định

Cho $f, F: X = [a,b] \to \mathbb{R}$. Gọi F là một nguyên hàm của f trên X nếu

$$F'(x) = f(x) \ , \ \forall x \in X. \tag{4.12}$$

Định lí 4.13: *Nếu* $f(x)$ *liên tục trên* X *thì sẽ có nguyên hàm trên* X *và nếu* $F(x)$ *là một nguyên hàm thì tập hợp các nguyên hàm của* f *là* $\{F(x)+C, \ C \in \mathbb{R}\}$

Chứng minh: Theo định lí 4.12, rõ ràng với $x_0, \ x \in [a,b]$, tồn tại nguyên hàm của $f(x)$ là

$$\phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \Rightarrow \phi(x) \in C^1$$

Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của f trên X thì $F(x)+C$, $\forall C \in \mathbb{R}$ cũng là nguyên hàm của f vì

$$(F(x)+C)' = F'(x) = f(x) \ , \ \forall x \in X.$$

Ngược lại nếu ϕ là một nguyên hàm nào đó của f trên X thì $F(x) - \phi(x)$ khả vi trên X, ngoài ra

$$\left(F(x)-\phi(x)\right)^{'}=f(x)-f(x)=0 \text{ trên } X$$

$$\Rightarrow F(x)-\phi(x)=const \Rightarrow \phi(x)=F(x)+C \text{ trong đó } C\in\mathbb{R}.$$

Tập hợp các nguyên hàm của $f(x)$ trên X được gọi là tích phân bất định của $f(x)$, và kí hiệu là $\int f(x)dx$. Vậy

$$\int f(x)dx = F(x)+C \tag{4.13}$$

trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên X.

C. Công thức Newton-Leibnitz

Định lí 4.*14: Nếu $f(x)$ liên tục trên [a,b] và có một nguyên hàm là $F(x)$ trên [a,b] thì*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \tag{4.12}$$

Đại lượng $F(b)-F(a)$ được kí hiệu $F(x)\Big|_a^b$ gọi là biến phân từ a đến b của $F(x)$.

Chứng minh: Theo định lí trên, tồn tại $C\in\mathbb{R}$ sao cho

$$F(x)=\phi(x)+C,\ \text{ trong đó } \phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

$$F(b)=\phi(b)+C=\int_a^b f(t)dt+C=\int_a^b f(x)dx+C$$

$$F(a)=\phi(a)+C=C$$

Vậy $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$.

Chú ý: Công thức Newton-Leibnitz cho cách tính tích phân của các hàm liên tục bằng cách tìm một nguyên hàm của hàm số đó rồi tính biến phân của nó từ a đến b.

Ví dụ 4.1: Từ định nghĩa hãy tính $\int_a^b \sin x dx$.

Giải:

Hàm $f(x)=\sin x$ liên tục trên [a,b] vậy khả tích trên đó. Thực hiện một phân hoạch với $\Delta x_i=\dfrac{b-a}{n}$ và chọn $\xi_i=a+i.h \quad (i=\overline{1,n})$ vậy tổng Riemann là

$$\sigma = h.\sum_{i=1}^{n}\sin(a+ih)$$

Theo ví dụ 1.11 mục 1.2.3. ta nhận được.

$$\sigma=\frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left\{\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(b+\frac{1}{2}h\right)\right\}$$

Ta cho $h\to 0 \Leftrightarrow \lambda\to 0$ thì $\sigma\to\cos a-\cos b$

Vậy $\int_a^b \sin x dx = \cos a - \cos b$

Ví dụ 4.2: Xuất phát từ định nghĩa, hãy tính $\int_a^b x^\mu dx$ với $b > a > 0,\ \mu \in \mathbb{R}$.

Giải:

Hàm x^μ khả tích trên [a,b] vì liên tục trên [a,b]. Ta thực hiện một phân hoạch $(x_i),\ i = \overline{0,n},\ x_i = aq^i$ trong đó $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, tức là:

$$a < aq < \ldots < aq^i < \ldots < b = aq^n$$

$$\Delta x_i = aq^i(q-1) < b(q-1) \to 0 \text{ khi } n \to \infty$$

Ta chọn $\xi_i = aq^i$ (đầu mút bên trái của $[aq^i, aq^{i+1}]$ với $i = \overline{0, n-1}$). Suy ra

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} (aq^i)^\mu \Delta x_i = a^{\mu+1}(q-1)\sum_{i=0}^{n-1}(q^{\mu+1})^i$$

Nếu $\mu = -1$ sẽ có:

$$\sigma = n(q-1) = n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right) \underset{n\to\infty}{\to} \ln\frac{b}{a}$$, Xem công thức (2.26, Chương II)

Nếu $\mu \neq -1$ sẽ có:

$$\sigma = a^{\mu+1}(q-1)\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\mu+1} - 1}{q^{\mu+1}-1} = \left(b^{\mu+1} - a^{\mu+1}\right)\frac{q-1}{q^{\mu+1}-1}$$

Sử dụng qui tắc Lôpitan, dễ dàng suy ra

$$\sigma \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{\mu+1}\left(b^{\mu+1} - a^{\mu+1}\right).$$

Vậy $$\int_a^b x^\mu dx = \begin{cases} \ln b - \ln a & \text{khi } \mu = -1 \\ \dfrac{b^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{\mu+1} & \text{khi } \mu \neq -1 \end{cases}$$

Ví dụ 4.3: Tính giới hạn dãy số cho bởi số hạng tổng quát.

a. $u_n = \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{\alpha}}\left(n^{\alpha-\frac{1}{\alpha}} + k^{\alpha-\frac{1}{\alpha}}\right),\ \ \alpha \in (0,+\infty)\setminus\{1\}$

b. $v_n = \sum_{k=n}^{2n}\sin\dfrac{\pi}{k}$, c. $\omega_n = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}} - n$.

Giải:

a. $u_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\alpha}$

Các số hạng trên là các tổng Riemann của hàm $x^{\frac{1}{\alpha}}$ và x^{α} khả tích trên $[0,1]$ ứng với phân hoạch $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ và cách chọn $\xi_i = \frac{i}{n}$, $i = \overline{1,n}$.

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \int_0^1 x^{\frac{1}{\alpha}}dx + \int_0^1 x^{\alpha}dx = \dfrac{1}{1+\frac{1}{\alpha}} + \dfrac{1}{\alpha+1} = 1$

b. Đặt $v_n' = \sum_{k=n}^{2n}\frac{\pi}{k} = \sum_{l=0}^{n}\frac{\pi}{n+l} = \frac{\pi}{n}\sum_{l=0}^{n}\frac{1}{1+\frac{l}{n}} = \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{l}{n}}$.

Số hạng thứ hai là các tổng Riemann của hàm $\frac{1}{x+1}$ khả tích trên $[0,1]$ ứng với phân hoạch $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ và cách chọn $\xi_i = \frac{i}{n}$, $i = \overline{1,n}$.

Vậy $v_n' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi\ln(1+x)\Big|_0^1 = \pi\ln 2$

Mặt khác ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|v_n - v_n'\right| \le \sum_{l=0}^{n}\left|\sin\frac{\pi}{n+l} - \frac{\pi}{n+l}\right|$

Với $x > 0$ khá bé, từ công thức Taylor suy ra $\left|\sin x - x\right| \le \frac{x^3}{6}$

Vậy $\left|v_n - v_n'\right| \le \frac{\pi^3}{6}\sum_{l=0}^{n}\frac{1}{(n+l)^3} \le \frac{\pi^3(n+1)}{6n^3} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Suy ra $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi\ln 2$

c. Trước hết, nhờ vào định lí 3.33 ở mục 3.6.1 có thể chứng minh rằng

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \text{ thì } 0 \le e^x - 1 - x \le e^x.\frac{x^2}{2}$$

Ta đánh giá $\left|\omega_n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\right| = \sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n+k}} - 1 - \frac{1}{n+k}\right) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{1}{n+k}}}{2(n+k)^2} \le \frac{ne^{\frac{1}{n+1}}}{2(n+1)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

mà $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1\frac{dx}{1+x} = \ln 2$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n = \ln 2$.

Ví dụ 4.4: Cho $f:[0,1]\to[0,1]$, f liên tục, khác không và $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f^2(x)dx$.

Chứng minh rằng $f = 1$.

Giải:

Ta xét $\int_0^1 f(1-f)dx = \int_0^1 f.dx - \int_0^1 f^2dx = 0$, theo giả thiết $f(1-f) \geq 0$ và $f(1-f)$ liên tục trên [0,1]. Từ tính chất **6** của tích phân ta suy ra $f(1-f) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$

Vì $f \neq 0$, vậy ta có $f = 1 \quad \forall x \in [0,1]$.

Ví dụ 4.5: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{x^2} \frac{dt}{(\ln t)^2}$

Giải:

Với x dương sẽ có $\ln x \leq \ln x^2$

Với x dương khá lớn sẽ có $(\ln x)^2 \leq (\ln x^2)^2$

Theo tính chất **8** của tích phân, ta nhận được.

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{(\ln t)^2} \geq \frac{x^2 - x}{(\ln x^2)^2} \to +\infty \quad \text{(Dùng qui tắc Lôpitan)}$$

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{x^2} \frac{dt}{(\ln t)^2} = +\infty$.

Ví dụ 4.6: Cho $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, f liên tục từng khúc và $f \geq 0$ thoả mãn $\int_a^b f(x)dx = 0$. Chứng minh $f(x) = 0$ trừ ra một số hữu hạn điểm.

Giải:

Vì f liên tục từng khúc nên tồn tại $a_0, \dots, a_n$ để f liên tục trên (a_i, a_{i+1}), $i=\overline{0,n-1}$.

Theo tính chất **1** của tích phân, ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx = 0$$

Do $f(x) \geq 0$, suy ra $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) = 0$, $i = \overline{0,n-1}$ mà $f(x)$ liên tục trên (a_i, a_{i+1}) suy ra

$f(x) = 0$, $\forall x \in (a_i, a_{i+1})$, nghĩa là $f(x) = 0$ có thể trừ ra các điểm a_i, $i = \overline{0,n}$.

4.2. HAI PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN TÍNH TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

4.2.1. Phép đổi biến.

Định lý 4.15: *Nếu* $\varphi: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ *thuộc lớp* C^1 *trên* $[\alpha,\beta]$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ *thuộc lớp* C^0 *trên [a,b]*

và $\varphi([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$.

khi đó
$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi'(t).dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx \qquad (4.15)$$

Chứng minh:_ Theo giả thiết $f \in C^0$ suy ra tồn tại nguyên hàm của nó $F(x) \in C^1$.

Theo công thức Newton - Leibnitz ta nhận được:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

Theo định lý về hàm hợp ta có $F(\varphi(t)) \in C^1$ trên $[\alpha, \beta]$ và

$\{F(\varphi(t))\}' = F'_{\varphi}.\varphi'(t) = f(\varphi).\varphi'(t)$ .Chứng tỏ $F(\varphi(t))$ là nguyên hàm của $f(\varphi).\varphi'(t)$.

Vậy tích phân vế trái là $F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$. Định lí được chứng minh.

Định lý 4.16: *Nếu* $\varphi: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, φ *đơn điệu và thuộc lớp* C^1 *trên* $[\alpha, \beta]$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^0$ *trên [a,b]*

với $t = \varphi(x)$ *mà* $f(x)dx = g(t)dt, g \in C^0$ *trên* $[\varphi(a), \varphi(b)]$.

khi đó $$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt \qquad (4.16)$$

Định lý trên được chứng minh tương tự như định lý 4.15, ở đây ta sẽ thực hiện phép

đổi biến tích phân $t = \varphi(x)$.

Chú ý: Khi thực hiện phép đổi biến, nhận được tích phân có cận mới. Tuỳ theo hàm dưới dấu tích phân mà ta lựa chọn một trong hai cách đổi biến.

4.2.2. Phép tích phân từng phần.

Định lý 4.17: *Nếu* $u, v: [a,b] \to \mathbb{R}$ *và* $u, v \in C^1$ *trên [a,b] thì:*

$$\int_a^b u'(x).v(x)dx = u(x).v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x).v'(x)dx \qquad (4.17)$$

Chứng minh: Nếu $u, v \in C^1$, dễ dàng ta nhận được công thức sau:

$$\int u'.vdx = u.v - \int u.v'dx$$

Thật vậy $(u.v)' = u'.v + u.v' \quad \Rightarrow \quad u.v = \int u'vdx + \int u.v'dx$

Suy ra $\int_a^b u'vdx = u.v\Big|_a^b - \int_a^b u.v'dx$

Ví dụ 4.7: Chứng minh các công thức dưới đây:

a. Cho $f \in C^0$ trên [0, a] thì $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

b. Cho $f \in C^0$ trên [0, 1] thì: $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

c. Cho $f \in C^0$ trên [-a, a] thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{khi} f(x) = -f(-x) \\ 2\int_0^a f(x)dx & \text{khi} f(x) = f(-x) \end{cases}$

d. Cho $f \in C^0$ trên $(-\infty,+\infty)$ và tuần hoàn với chu kỳ T thì

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx,\ \forall a \in \mathbb{R}$$

Giải:

a. Ta thực hiện phép đổi biến x = a – t

b. Đổi biến x = $\frac{\pi}{2} - t$ và đổi biến x = $\pi - t$

c. Ta biểu diễn $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$

Đổi biến x = - t, $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx \quad \Rightarrow \quad \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a \{f(x) + f(-x)\}dx$

$f(x)$ là hàm số lẻ $\Leftrightarrow f(x) = -f(-x),\ \forall x \in [0,a]$. Do đó: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

$f(x)$ là hàm số chẵn $\Leftrightarrow f(x) = f(-x),\ \forall x \in [0,a]$. Do đó: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

d. $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx$

Ta đổi biến x = t + T và biết rằng $f(x+T) = f(x)$ nên có:

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(t+T)dt = \int_0^a f(t)dt = -\int_a^0 f(x)dx$$

Vậy $\quad \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

Ví dụ 4.8: Tính các tích phân sau:

a. $I_1 = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$, $\qquad$ b. $I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

Giải:

a. Đổi biến $\quad x = a\sin t,\ x \in [0,a] \Rightarrow t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Ta nhận được $\quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |a|\cos t\, a\cos t\, dt = a|a|\frac{\pi}{4}$

b. Đổi biến $t = \cos x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [1,0]$

Vậy $$I_2 = -\int_1^0 \frac{dt}{1+t^2} = \text{arctg}t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Ví dụ 4.9: Tính $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$

Giải:

Đổi biến $x = tg\varphi$, $x \in [0,1] \Rightarrow \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+\text{tg}\varphi)}{\frac{1}{\cos^2\varphi}} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \frac{\sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\varphi} d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\varphi d\varphi$$

Tiếp tục ta đổi biến $\varphi = \frac{\pi}{4} - t$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\, dt$$. Suy ra $I = \frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2}$

Ví dụ 4.10: Cho $a \in \mathbb{R}_+^*$, $f : [0,a] \to \mathbb{R}$, liên tục sao cho $f(x) \neq -1$ và

$f(x).f(a-x) = 1$, $\forall x \in [0,a]$. Tính $\int_0^a \frac{1}{1+f(x)}dx$

Giải:

Đổi biến $x = a - t$

$$\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = -\int_a^0 \frac{dt}{1+f(a-t)} = \int_0^a \frac{dt}{1+f(a-t)} = \int_0^a \frac{dt}{1+\frac{1}{f(t)}}$$

$$= \int_0^a \frac{f(t)}{1+f(t)}dt \Rightarrow 2\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} + \int_0^a \frac{f(x)}{1+f(x)}dx = \int_0^a dx = a$$

Vậy $$\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = \frac{a}{2}$$

Ví dụ 4.11 Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{n^2+x^3}} = 0$

Giải:

Đổi biến $y = \frac{x}{n^{\frac{2}{3}}}$ ta sẽ nhận được

$$\int_1^n \frac{dx}{\sqrt{n^2+x^3}} = \int_{\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}}^{n^{\frac{1}{3}}} \frac{n^{\frac{2}{3}}dy}{\sqrt{n^2(1+y^3)}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\int_{\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}}^{n^{\frac{1}{3}}} \frac{dy}{\sqrt{1+y^3}}$$

Mặt khác ta có $\displaystyle\int_{\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}}^{1} \frac{dy}{\sqrt{1+y^3}} \le \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^3}} \le \int_0^1 dy = 1$

$$\int_1^{n^{\frac{1}{3}}} \frac{dy}{\sqrt{1+y^3}} \le \int_1^{n^{\frac{1}{3}}} y^{-\frac{3}{2}}dy = 2 - \frac{2}{n^{\frac{1}{6}}} \le 2$$

Suy ra $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \le \displaystyle\int_1^n \frac{dx}{\sqrt{n^2+x^3}} \le \frac{3}{n^{\frac{1}{3}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Vậy $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{dx}{\sqrt{n^2+x^3}} = 0$

Ví dụ 4.12: (Tích phân Wallis)

a. Tính $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$, $n \in \mathbb{N}$

b. Với $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ từ bất đẳng thức $\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$

Hãy chứng minh $\dfrac{\pi}{2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 . \dfrac{1}{2n+1}$ (Công thức Wallis)

Giải:

a. Đặt $u = \cos^{n-1} x$, $dv = \cos x dx \Rightarrow du = -(n-1)\cos^{n-2} x \ \sin x \ dx$, $v = \sin x$

$$I_n = \cos^{n-1} x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x(1-\cos^2 x)dx$$

$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 1, \quad I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}, \quad I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}$$

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m}.\frac{2m-3}{2(m-2)}...\frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}.\frac{\pi}{2}$$

$$I_{2m+1} = \frac{m}{2m+1}.\frac{2(m-2)}{2m-1}...\frac{2}{3}.1 = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} & \text{khi } n = 2m \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{khi } n = 2m+1,\ m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Tích phân đã cho có tên là tích phân Wallis

b. Lấy tích phân bất đẳng thức kép sẽ có

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\,dx$$

Theo tích phân Wallis nhận được

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

Từ đó, suy ra $\left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \dfrac{1}{2n+1} < \dfrac{\pi}{2} < \left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \dfrac{1}{2n}$

$$a_n < \frac{\pi}{2} < b_n.$$

trong đó $a_n = \left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \dfrac{1}{2n+1}, \quad b_n = \left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \dfrac{1}{2n}$

Vậy

$$\frac{\pi}{2}\frac{2n}{2n+1} < a_n < \frac{\pi}{2} \Rightarrow a_n \to \frac{\pi}{2}$$

Ví dụ 4.13: Chứng minh: $\forall f \in C^1$ có

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx dx = 0$$

Giải:

Ta xét $I_n = \int_a^b f(x)e^{inx}dx$ Ta tích phân từng phần sẽ nhận được

$$I_n = f(x)\frac{e^{inx}}{in}\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\frac{e^{inx}}{in}dx$$

$$= \frac{1}{in}\left(f(b)e^{inb} - f(a)e^{ina}\right) - \frac{1}{in}\int_a^b f'(x)e^{inx}dx$$

$$\Rightarrow |I_n| \le \frac{1}{n}\left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(x)|dx\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$\Rightarrow I_n \to 0 \Rightarrow \operatorname{Re} I_n \to 0 \text{ và } \operatorname{Im} I_n \to 0$$

Tức là $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx dx = 0$ và $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx dx = 0$

4.3. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

4.3.1. Tính chất cơ bản. Bảng các nguyên hàm thường dùng.

A. Tính chất cơ bản của tích phân bất định.

Trước hết thấy ngay rằng các tính chất sau đây của tích phân bất định là hiển nhiên.

Cho f, g có nguyên hàm, $\lambda \in \mathbb{R}$

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, $d\int f(x)dx = f(x)dx$

2. $\int \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

3. $\int \lambda . f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$

4. Nếu $f(x)$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thì $f\left(u(x)\right)u'(x)$ có một nguyên hàm là $F\left(u(x)\right)$ nếu $u \in C^1$, tức là

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f\left(u(x)\right)u'(x)dx = F\left(u(x)\right) + C$$

B. Bảng các nguyên hàm

Hàm số $f(x)$	Nguyên hàm $F(x)$	Tập xác định X
$x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^*$
$a^{\alpha x}, \alpha \in \mathbb{R}^*, 0 < a \neq 1$	$\dfrac{1}{\alpha \ln a} a^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
$e^{\alpha x}$	$\dfrac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}x$	$\mathrm{sh}x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}x$	$\mathrm{ch}x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th}x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\mathrm{cotg}x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$\mathrm{th}x$	$\ln \mathrm{ch}x$	$\mathbb{R}$
$\coth x$	$\ln\lvert\mathrm{sh}x\rvert$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x$	$\mathrm{tg}x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \mathrm{cotg}^2 x$	$-\mathrm{cotg}x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$\dfrac{1}{\text{ch}^2 x} = 1 - \text{th}^2 x$	$\text{th}x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\text{sh}^2 x} = \coth^2 x - 1$	$-\coth x$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{a^2 + x^2}, a \in R^*$	$\dfrac{1}{a}\text{arctg}\dfrac{x}{a}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1 - x^2}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\|\dfrac{1+x}{1-x}\right\|$	$\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x + \sqrt{1+x^2})$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, a \in \mathbb{R}^*$	$\arcsin\dfrac{x}{a}$	$\mathbb{R}\setminus\{-a, a\}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$\ln\left\|x + \sqrt{x^2 - 1}\right\|$	$\mathbb{R}\setminus[-1,1]$

4.3.2. Hai phương pháp cơ bản tính tích phân bất định.

A. Phương pháp tích phân từng phần.

Cho $u, v \in C^1$ trên X khi đó

$$\int u(x)dv(x) = u(x).v(x) - \int v(x)du(x) \quad \text{trên } X \tag{4.18}$$

Chú ý:

a. Phương pháp này thường áp dụng tính các tích phân các hàm số có dạng sau đây: $P(x)\ln^k x$, $P(x)e^{\alpha x}$, $P(x)\sin\alpha x$
$P(x)\cos\alpha x$, $P(x)\arcsin x$, $P(x)\arccos x$, $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $P(x)$ là đa thức .

b. Để tính $\int P(x)\cos\alpha x dx$ hoặc $\int P(x)\sin\alpha x dx$ ta có thể tính $\int P(x)e^{i\alpha x}dx$ sau đó tìm phần thực và phần ảo.

c. Để tính $\int P(x)e^{\alpha x}dx$, ta có thể dùng phương pháp hệ số bất định.

$\int P(x)e^{\alpha x}dx = Q(x)e^{\alpha x} + C$, trong đó $\deg P(x) = \deg Q(x)$

d. Trong quá trình tính toán có thể phải lặp lại một số hữu hạn lần phương pháp tích phân từng phần.

B. Phương pháp đổi biến số.

Đặt $x = \varphi(t)$, với φ đơn điệu và $\varphi \in C^1$ trên Y khi đó

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \tag{4.19}$$

Đặt $t = \psi(x)$ khi đó $f(x)dx = g(t)dt$

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt\Big|_{t=\psi(x)} \tag{4.20}$$

Chú ý:

Đổi biến số để tính nguyên hàm theo biến mới dễ dàng hơn. Trong kết quả phải trở về biến lấy tích phân bất định ban đầu. Điều này khác hẳn khi tính tích phân xác định.

Ví dụ 4.14: Tính a. $I_1(x) = \int x^3 \cos x dx$,

b. $I_2(x) = \int (x+3)e^x \cos 3x dx$.

Giải:

a. Đặt $J_1(x) = \int x^3 \sin x dx$

$I_1 + iJ_1 = \int x^3 e^{ix} dx = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{ix} + C$, $a, b, c, d \in C$, C là hằng số phức tuỳ ý Ta lấy đạo hàm hai vế, nhận được

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad i(ax^3 + bx^2 + cx + d) + (3ax^2 + 2bx + c) = x^3$$

$$\begin{cases} ia = 1 \\ ib + 3a = 0 \\ ic + 2b = 0 \\ id + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -i \\ b = 3 \\ c = 6i \\ d = -6 \end{cases} \Rightarrow I_1 + iJ_1 = (-ix^3 + 3x^2 + 6ix - 6).(\cos x + i \sin x) + C$$

Ta so sánh phần thực với phần thực, phần ảo với phần ảo

Vậy $I_1(x) = (x^3 - 6x)\sin x + (3x^2 - 6)\cos x + C_1$

$J_1(x) = (-x^3 + 6x)\cos x + (3x^2 - 6)\sin x + C_2$, $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

b. Đặt $J_2(x) = \int (x+3)e^x \sin 3x dx$

$$I_2 + iJ_2 = \int (x+3)e^{(1+3i)x} dx = (ax+b)e^{(1+3i)x} + C$$

$$\Rightarrow \forall x \in R, (1+3i)(ax+b) + a = x + 3$$

$$\begin{cases} (1+3i)a = 1 \\ (1+3i)b + a = 3 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1-3i}{10}, b = \frac{19-42i}{50}$$

$$I_2(x) = \operatorname{Re}\left\{\left(\frac{1-3i}{10}x + \frac{19-42i}{50}\right)e^x\left(\cos 3x + i\sin 3x\right)\right\} + C$$

$$= \frac{e^x}{10}\left\{\left(x + \frac{19}{5}\right)\cos 3x + \left(3x + \frac{42}{5}\right)\sin 3x\right\} + C.$$

Ví dụ 4.15 Tính các tích phân sau:

a. $I_1 = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$, b. $I_2 = \int \frac{\sin\sqrt[3]{x} dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Giải:

a. Đặt $x = t^2$, $t > 0$, $dx = 2tdt$

$$I_1 = \int \frac{2tdt}{t(1+t^2)} = 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C.$$

b. Đặt $x = t^3$, $dx = 3t^2 dt$

$$I_2 = \int \frac{\sin t}{t^2}.3t^2 dt = 3\int \sin t dt = -3\cos\sqrt[3]{x} + C.$$

Ví dụ 4.16: Tính: $I = \int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx$

Giải:

Đặt $t = \sqrt{x+1}$, $dx = 2tdt$

$$I = 2\int \frac{t+2}{t^3-1}dt = \int\left(\frac{2}{t-1} - \frac{2t+2}{t^2+t+1}\right)dt = \ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \ln\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{\sqrt{x+1}+x+2} - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}} + C .$$

Ví dụ 4.17: Tính: $I = \int 3^{\sqrt{2x+1}}dx$

Giải:

Đặt $\sqrt{2x+1} = t$, $dx = tdt$

$$I = \int 3^t tdt = \frac{t.3^t}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3}\int 3^t dt = \frac{t.3^t}{\ln 3} - \frac{1}{(\ln 3)^2}3^t + C$$

$$= \frac{3^{\sqrt{2x+1}}}{(\ln 3)^2}\left(\sqrt{2x+1}.\ln 3 - 1\right) + C .$$

4.3.3. Cách tính tích phân bất định của các hàm số hữu tỉ.

Chú ý:

a. Nếu hàm hữu tỉ có dạng $f(x) = x^{n-1}\dfrac{P(x^n)}{Q(x^n)}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, bằng cách đổi biến $t = x^n$ sẽ có

$$\int f(x)dx = \frac{1}{n}\int \frac{P(t)}{Q(t)}dt$$

Như vậy ta đã hạ thấp bậc của các đa thức của hàm hữu tỉ f .

b. Mọi hàm hữu tỉ (đôi khi gọi là phân thức hữu tỉ) không thực sự đều phân tích thành tổng của một đa thức và một phân thức hữu tỉ thực sự.

c. Sử dụng định lí 2 trong mục 2.1.2 và tính chất của tích phân bất định, thấy rằng quá trình tích phân các hàm hữu tỉ là quá trình tích phân các phân thức tối giản.

Dưới đây ta trình bày phương pháp tích phân các phân thức tối giản thực sự.

A. Tích phân các phân thức tối giản loại thứ nhất.

$$I = \int \frac{dx}{(x-a)^n} \quad , \; a \in \mathbb{R}$$

Nếu $n = 1$ thì $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$ với $C = const$.

Nếu $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ thì $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{n-1}.\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$.

B. Tích phân các phân thức tối giản loại thứ hai.

$$I = \int \frac{\lambda x + \mu}{(ax^2+bx+c)^n}dx \quad , \; \lambda, \mu, a, b, c \in \mathbb{R} \text{ và } b^2 - 4ac < 0, \; n \in \mathbb{N}^*$$

* Nếu $\lambda = 0$

$$I = \mu \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Ta biến đổi $ax^2 + bx + c = -\frac{\Delta}{4a}\left\{1 + \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right\}, \Delta = b^2 - 4ac$

Thực hiện đổi biến $t = \frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}}$

Suy ra $I = \mu\left(-\frac{4a}{\Delta}\right)^n \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \int \frac{dt}{(1 + t^2)^n}$

Tính $J_n(t) = \int \frac{dt}{(1 + t^2)^n}$ bằng phương pháp truy toán.

Trước hết $J_1(t) = \int \frac{dt}{1 + t^2} = \text{arctg}t + C$

Tích phân từng phần sẽ có

$$J_n(t) = \frac{t}{(1 + t^2)^n} + 2n\int \frac{t^2 dt}{(1 + t^2)^{n+1}}$$

$$J_n = \frac{t}{(1 + t^2)^n} + 2n(J_n - J_{n+1})$$

$$2nJ_{n+1} = (2n - 1)J_n + \frac{t}{(1 + t^2)^n}$$

Chú ý:

Có thể tính J_n bằng phép đổi biến $\theta = \text{arctg}t \Rightarrow dt = (1 + \text{tg}^2\theta)d\theta$

$$J_n = \int \frac{d\theta}{(1 + \text{tg}^2\theta)^{n-1}} = \int \cos^{2(n-1)}\theta \, d\theta$$

Ta tuyến tính hoá $\cos^{2(n-1)}\theta$ (Xem phần B mục 1.2.3) rồi tính nguyên hàm, sau đó trở về biến t.

* Nếu $\lambda \neq 0$.

$$I = \frac{\lambda}{2a}\int \frac{2ax + \frac{2a\mu}{\lambda}}{(ax^2 + bx + c)^n} dx$$

$$= \frac{\lambda}{2a}\int \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^n} dx + \frac{\lambda}{2a}\left(\frac{2a\mu}{\lambda} - b\right)\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Tích phân thứ nhất tính được nhờ phép đổi biến $u = ax^2 + bx + c$

$$\int \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = \int \frac{du}{u^n} = \frac{1}{1 - n} \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + C$$

Tích phân thứ hai tính theo J_n đã trình bày ở trên.

Ví dụ 4.18: Tính $I = \int \frac{dx}{x^3 + 1}$ và $J = \int \frac{dx}{(x^3 + 1)^2}$

Giải:

Ta phân tích $\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{3}.\dfrac{x-2}{x^2-x+1}$

$$\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)-\frac{3}{2}I_1$$

trong đó $I_1=\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-x+1}=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$

Cuối cùng ta có $I=\dfrac{1}{3}\ln|x+1|-\dfrac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$

Bằng phép tích phân từng phần sẽ có

$$I=\frac{x}{x^3+1}+3\int\frac{x^3}{(x^3+1)^2}dx=\frac{x}{x^3+1}+3(I-J)$$

Suy ra $J(x)=\dfrac{1}{3}\left(2I+\dfrac{x}{x^3+1}\right)$

$$=\frac{2}{9}\ln|x+1|-\frac{1}{9}\ln(x^2-x+1)+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{x}{3(x^3+1)}+C.$$

4.3.4. Tính nguyên hàm các phân thức hữu tỉ đối với một số hàm thông dụng.

A. Hàm hữu tỉ đối với sin và côsin.

1. Trường hợp tổng quát.

Xét $\int R(\sin x,\cos x)dx$ trong đó R là ''phân thức hữu tỉ hai biến''

Ta thực hiện phép đổi biến: $t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Ta có

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}\quad,\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\quad,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Khi đó tích phân được đưa về dạng $\displaystyle\int\frac{P(t)}{Q(t)}dt$

Tuy nhiên bậc của $P(t)$ và $Q(t)$ thường là cao, làm cho quá trình tính toán rất nặng nhọc. Sau đây ta xét một số trường hợp đặc biệt, với cách đổi biến thích hợp sẽ tính toán dễ dàng hơn.

2. Trường hợp đặc biệt thứ nhất.

Nếu $R(\sin x,\cos x)=R(-\sin x,-\cos x)$ thì đổi biến $t=\operatorname{tg}x$ hoặc $t=\operatorname{cotg}x$ '

Nếu $R(\sin x,\cos x)=-R(\sin x,-\cos x)$ thì đổi biến $t=\sin x$.

Nếu $R(\sin x,\cos x)=-R(-\sin x,\cos x)$ thì đổi biến $t=\cos x$.

3. Trường hợp đặc biệt thứ hai.

Khi $R(\sin x,\cos x)=\sin^m x.\cos^n x$, $m,\ n\in\mathbb{Z}$.

Nếu m lẻ thì đổi biến $t=\cos x$.

Nếu n lẻ thì đổi biến $t=\sin x$.

Nếu m,n chẵn và không cùng dương thì đổi biến $t=\operatorname{tg}x$.

Nếu m, n chẵn và cùng dương thì tuyến tính hoá sau đó tính nguyên hàm.

Ví dụ 4.19: Tính $I = \int \frac{dx}{a + \cos x}$, $a > 1$

Giải:

Đặt $t = \text{tg}\frac{x}{2}$ thì $I = \int \frac{2dt}{(a+1) + (a-1)t^2}$

$$I = \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} \text{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\text{tg}\frac{x}{2}\right) + C$$

Ví dụ 4.20: Tính $I = \int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$.

Giải:

Đổi biến $t = tg\frac{x}{2}$, $\quad I = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{4.\frac{2t}{1+t^2} + 3.\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2\int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} = \int \frac{dt}{(t+2)^2}$

$$= -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{\text{tg}\frac{x}{2} + 2} + C.$$

Ví dụ 4.21: Tính các tích phân sau.

a. $I_1 = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$, b. $I_2 = \int \sin^3 x \cos^2 x dx$,

. c. $I_3 = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$, d. $I_4 = \int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

Giải:

a. $I_1 = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$, đặt $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$

$$I_1 = \int \frac{\cos^2 x \cos x dx}{\sin^4 x} = \int \frac{1-t^2}{t^4}dt = \int \left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C.$$

b. $I_2 = \int \sin^3 x \cos^2 x dx$, đặt $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$

$$I_2 = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx = -\int (1-t^2)t^2 dt = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

c. $I_3 = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$, đặt $t = \text{tg}x$, $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$

$$I_3 = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\frac{1}{\cos^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \int t^2(1+t^2)dt$$

$$= \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + \frac{\mathrm{tg}^5 x}{5} + C$$

d. $I_4 = \int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1+\cos 2x)dx$

$$= \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x)$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$$

Ví dụ 4.22: Tính $I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{2+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$

Giải:

Đặt $x = \cos t$, $x = -1 \Rightarrow t = \pi,\ x = 1 \Rightarrow t = 0$

$$I = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t dt}{2+\sqrt{2}\left(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)} = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t dt}{2\left(1+\cos\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \frac{2\cos^2\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-1}{2\left(1+\cos\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right)} dt$$

Tiếp tục đổi biến $\theta = \frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}$, $t = 0 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4},\ t = \pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$$I = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^2\theta - 1}{2(1+\cos\theta)} d\theta = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2(\cos^2\theta - 1)+1}{2(1+\cos\theta)} d\theta$$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos\theta - 1)d\theta + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = 4\left(\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi}{4}\right) + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{4}\right) + 2\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2} - \pi + 2\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}$$

$= 2\sqrt{2} - \pi + 2(\sqrt{2}-1) = 4\sqrt{2} - \pi - 2$ (sử dụng $\mathrm{tg}2\varphi = \frac{2\mathrm{tg}\varphi}{1-\mathrm{tg}^2\varphi}$).

B. Hàm hữu tỉ đối với $\mathrm{sh}x$ **và** $\mathrm{ch}x$**.**

Vì đạo hàm của các hàm *shx* và *chx* tương tự như các hàm $\sin x$ và $\cos x$, để tính $\int R(\sin x, \cos x)dx$ ta đã dùng các phép đổi biến tương ứng

$$t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}\ ,\ t = \cos x\ ,\ t = \sin x\ ,\ t = \mathrm{tg}x\,.$$

Vậy để tính $\int R(\mathrm{sh}x, \mathrm{ch}x)dx$ ta có thể dùng các phép đổi biến:

$$t=\text{th}\frac{x}{2}\ ,\ t=\text{ch}x\ ,\ t=\text{sh}x\ ,\ t=\text{th}x\,.$$

Ví dụ 4.23: Tính các tích phân sau

a. $I_1=\int\frac{\text{sh}^2x}{\text{ch}x(2\text{sh}^3x+3\text{ch}^2x)}dx$, b. $I_2=\int\frac{\text{sh}^3x}{\text{ch}x(2+\text{sh}^2x)}dx$. .

Giải:

a. Hàm dưới dấu tích phân chẵn đối với shx và chx nên ta đặt

$$t=thx\,,\,dt=(1-th^2x)dx$$

$$I_1=\int\frac{\frac{\text{sh}^2x}{\text{ch}^2x.\text{ch}^2x}}{2\text{th}^3x+3}dx=\int\frac{\text{th}^2x(1-\text{th}^2x)}{2\text{th}^3x+3}dx$$

$$=\int\frac{t^2}{2t^3+3}dt=\frac{1}{6}\ln\left|2t^3+3\right|+C=\frac{1}{6}\ln(3+2th^3x)+C\,.$$

b. Hàm dưới dấu tích phân lẻ đối với shx, ta đặt $t=chx$, $dt=shx$

$$I_2=\int\frac{\text{sh}^2x.\text{sh}x.dx}{\text{ch}x(2+\text{sh}^2x)}=\int\frac{t^2-1}{t(t^2+1)}dt=\int\left(-\frac{1}{t}+\frac{2t}{t^2+1}\right)dt$$

$$=-\ln|t|+\ln(t^2+1)+C=-\ln chx+\ln(2+sh^2x)+C\,.$$

Ví dụ 4.24: Tính các tích phân sau.

$$A=\int\text{ch}(n+1)x.\text{sh}^{n-1}xdx\ ,\qquad B=\int\text{sh}(n+1)x.\text{sh}^{n-1}xdx$$

Giải:

$$A+B=\int e^{(n+1)x}\left\{\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)\right\}^{n-1}dx=\int\left\{\frac{1}{2}\left(e^{2x}-1\right)\right\}^{n-1}e^{2x}dx$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2}\left(e^{2x}-1\right)\right\}^{n}+C_1=\frac{1}{n}e^{nx}\text{sh}^nx+C_1$$

$$A-B=\frac{1}{n}e^{-nx}\text{sh}^nx+C_2 \text{ suy ra } A=\frac{1}{n}\text{ch}nx.\text{sh}^nx+C,\ B=\frac{1}{n}\text{sh}nx.\text{sh}^nx+C\,.$$

C. Hàm hữu tỉ đối với $e^{\alpha x}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Ta xét $I=\int f(e^{\alpha x})dx$, trong đó $f(x)$ là hàm hữu tỉ. Ta thực hiện phép đổi biến

$$t=e^{\alpha x}\ ,\ dt=\alpha e^{\alpha x}dx\text{, khi đó } I=\frac{1}{\alpha}\int\frac{f(t)}{t}dt\ .$$

Đó là tích phân của hàm hữu tỉ đã xem xét trong phần A.

D. Hàm hữu tỉ đối với x và $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

Xét $I=\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ trong đó $R(x,y)$ là hàm hữu tỉ của hai biến x,y

$$y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \ , \ ad \neq bc .$$

Thực hiện phép đổi sang biến y thì

$$R(x,y)dx = R\left(\frac{y^n d - b}{a - cy^n}, y\right)\frac{ny^{n-1}(ad-bc)}{(a-cy^n)^2}dy$$

$= f(y)dy$, trong đó $f(y)$ là hàm hữu tỉ của y.

Ví dụ 4.25: Tính các tích phân bất định sau.

a. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+e^{\alpha x})^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, b. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}dx$.

Giải:

a. Đặt $t = e^{\alpha x}$, $dt = \alpha e^{\alpha x}dx$

$$\int \frac{dx}{(1+e^{\alpha x})^2} = \frac{1}{\alpha}\int \frac{dt}{t(1+t)^2} = \frac{1}{\alpha}\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left(\ln|t| - \ln|t+1| + \frac{1}{t+1}\right) + C$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left(\alpha x - \ln(1+e^{\alpha x}) + \frac{1}{1+e^{\alpha x}}\right) + C .$$

b. $$\int \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}dx = \int \frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx = I$$

Ta đổi biến số $t = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}} \Rightarrow x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2tdt}{(1+t^2)^2}$

$$I = 2\int \frac{t^2}{1+t^2}dt = 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = 2(t - \text{arctg}t) + C$$

$$= 2\sqrt{\frac{x}{1-x}} - 2\text{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}} + C .$$

4.4. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Chú ý:

a. Trong mục này khi xem xét một hình phẳng hay một vật thể, chúng ta luôn để ý đến tính chất đối xứng của hình để đơn giản quá trình tính toán hoặc để chọn một hệ qui chiếu thích hợp để giải quyết bài toán được dễ dàng hơn.

b. Để tính các đại lượng hình học, vật lí, kĩ thuật,…nhờ vào tích phân xác định phải thực hiện hai bước: lập tổng tích phân và tính giới hạn của tổng tích phân đó. Người ta gọi là qui tắc hai bước hay sơ đồ vi phân.

Để tính diện tích ta phải tính vi phân diện tích (yếu tố diện tích) dS sau đó lấy tổng suy rộng các dS sẽ dẫn đến tích phân xác định.

Để tính thể tích ta phải tính vi phân thể tích (yếu tố thể tích) dV sau đó lấy tổng suy rộng các dV , v.v…

4.4.1. Tính diện tích hình phẳng.

A. Miền phẳng giới hạn bởi các đường cong trong toạ độ Descartes.

Giả sử miền phẳng D giới hạn bởi các đường:

$$x = a \ , \ x = b \ , \ (a < b) \ , \ y = 0 \ , \ y = f(x)$$

trong đó $f(x)$ liên tục từng khúc trên [a,b]. Gọi diện tích của miền phẳng D là S. Theo ý nghĩa hình học của tích phân xác định, sau khi chú ý đến dấu của hàm số $f(x)$ ta nhận được công thức tính S như sau:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx \qquad (4.21)$$

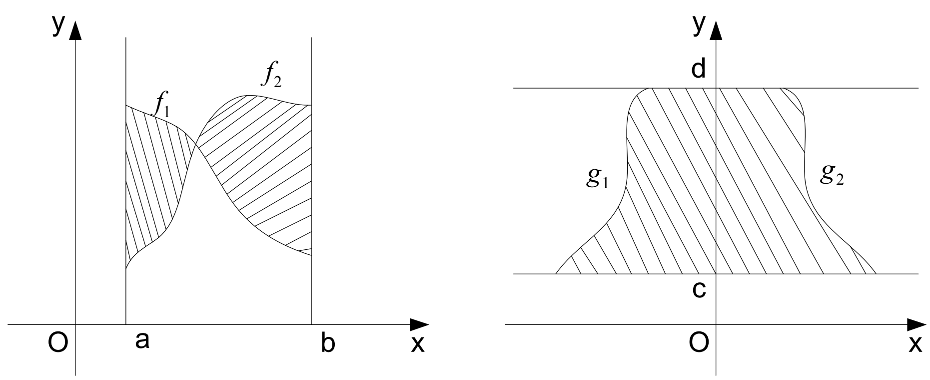
Tổng quát, giả sử miền phẳng D giới hạn bởi các đường:

$$x = a, \ \ x = b, \ \ (a < b), \ \ y = f_1(x), \ \ y = f_2(x).$$

trong đó f_1, f_2 liên tục từng khúc trên [a,b].

Gọi diện tích của miền phẳng D là S. Từ (4.21) và từ H.4.3 suy ra

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx \qquad (4.22)$$



H.4.3

Tương tự nếu D giới hạn bởi các đường:

$$y = c, \ \ y = d, \ \ (c < d), \ \ x = g_1(y), \ \ x = g_2(y).$$

trong đó g_1, g_2 liên tục từng khúc trên [c,d]. Khi đó ta nhận được

$$S = \int_c^d |g_1(y) - g_2(y)| dy \qquad (4.23)$$

B. Miền phẳng D giới hạn bởi đường cong cho dưới dạng tham số:

Giả sử miền D giới hạn bởi đường cong cho bởi phương trình

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t_0 \le t \le t_1$$

Thực hiện phép đổi biến số $x = x(t)$ trong tích phân (4.21) ta nhận được

$$S = \int_{t_0}^{t_1} |y(t).x'(t)| dt \qquad (4.24)$$

C. Miền phẳng D giới hạn bởi đường cong có cho dưới dạng toạ độ cực.

Giả sử miền D giới hạn bởi đường cong cho bởi phương trình

$$r = r(\varphi) \quad , \quad \alpha \le \varphi \le \beta$$

và hai tia đi qua cực: $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ mà mọi tia đi qua cực cắt đường cong không quá một điểm

Tương tự như tính diện tích của hình thang cong, ta tính diện tích của hình quạt cong

Yếu tố diện tích của quạt cong tại giá trị φ ứng với số gia $d\varphi$ là $dS = \pi r^2(\varphi)\dfrac{d\varphi}{2\pi}$.

Vậy ta nhận được $$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi \qquad (4.25)$$

Ví dụ 4.26: Tính diện tích của hình elíp có các bán trục a, b.

Giải: Hình elíp giới hạn bởi đường elíp có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Do tính chất đối xứng của hình elíp qua các trục toạ độ và do phương trình tham số của đường elip

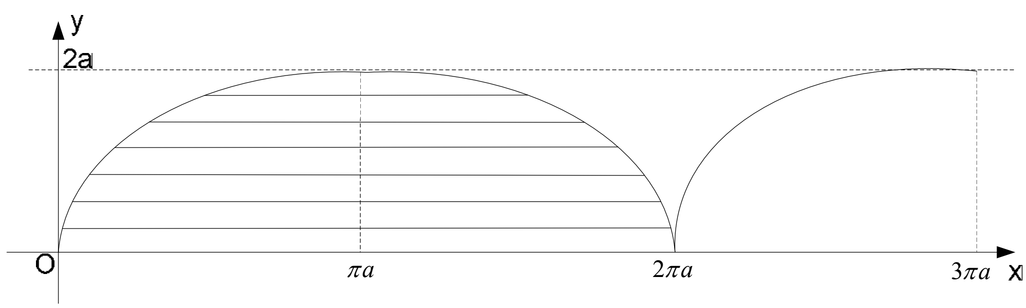
$$x = a\cos t \ , \ y = b\sin t \ , \ 0 \le t \le 2\pi$$

nên ta có:

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\sin^2 t.dt = \pi ab \text{ (đv. diện tích)}$$

Ví dụ 4.27: Hãy tính diện tích của hình giới hạn bởi trục hoành và một nhịp của đường Cycloid (Xem hình 4.4) cho bởi phương trình tham số:

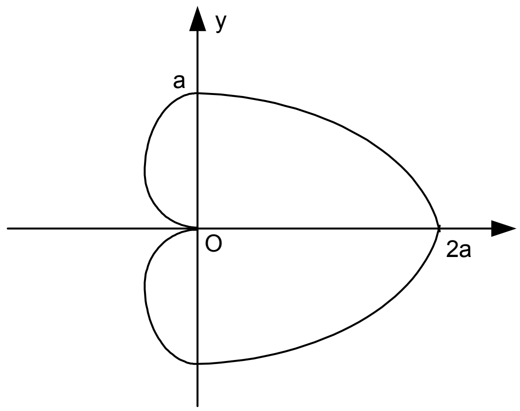
$$x = a(t - \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t) , \quad 0 \le t \le 2\pi$$



H.4.4

Giải: $$S = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 dt = a^2\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = 3a^2\pi \text{ (đv. diện tích)}$$

Ví dụ 4.28: Tính diện tích của hình trái tim giới hạn bởi đường Cardioid (đường trái tim), trong hệ toạ độ cực cho bởi phương trình $r = a(1 + \cos\varphi)$. Xem hình 4.5



H.4.5.

Giải: Do tính đối xứng của hình qua trục Ox, vậy ta có

$$S = \int_0^{\pi} a^2 \left(1+\cos\varphi\right)^2 d\varphi = a^2 \int_0^{\pi} \left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right) d\varphi$$

$$= a^2\left(\pi + \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

4.4.2. Tính độ dài đường cong phẳng.

A. Phương trình cho trong hệ toạ độ Descartes vuông góc.

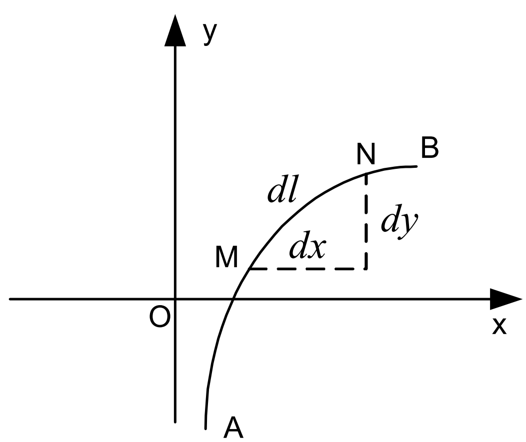
Giả sử đường cong $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình

$$y = f(x),\quad A\left(a, f(a)\right),\quad B\left(b, f(b)\right)$$

trong đó $f \in C^1$ trên $\left[a,b\right]$, $(a<b)$. (Xem H.4.6)

Vi phân cung tại điểm x được xác định theo công thức

$$dl = \sqrt{\left(dx\right)^2 + \left(dy\right)^2} = \sqrt{1+f'^2\left(x\right)}dx$$



H.4.6

Ta gọi l là độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$. Vậy ta có

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx \qquad (4.26)$$

B. Phương trình cho trong dạng tham số.

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t_0 \le t \le t_1 \quad \varphi, \psi \in C^1 \text{ trên } [t_0, t_1]$$

Thực hiện phép thay biến trong công thức (4.26), ta nhận được

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt \qquad (4.27)$$

C. Phương trình cho trong dạng toạ độ cực.

$$r = r(\varphi) \quad , \quad \alpha \le \varphi \le \beta$$

Tham số hóa đường cong $\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases} \quad , \quad \alpha \le \varphi \le \beta$

Sử dụng (4.27) ta nhận được: $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi$ (4.28)

Chú ý: Trong không gian đường cong $\overparen{AB}$ cho bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t_0 \le t \le t_1 \quad x, y, z \in C^1 \quad \text{trên } [t_0, t_1].$$

Khi đó công thức tính độ dài cung sẽ là

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt$$

và công thức vi phân cung

$$dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt \qquad (4.29)$$

Ví dụ 4.29: Hãy tính độ dài của một nhịp Cycloid cho trong ví dụ 4.27.

Giải:

$$x'(t) = a(1 - \cos t) \quad , \quad y' = a\sin t$$

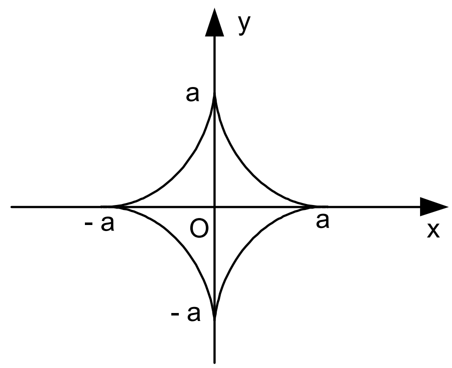
$$l = 2\int_0^\pi \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}dt = 2\sqrt{2}a\int_0^\pi \sqrt{1 - \cos t}dt$$

$$= 4a\int_0^\pi \sin\frac{t}{2}dt = 8a\cos\frac{t}{2}\Big|_\pi^0 = 8a \text{ (đv. độ dài)}$$

Ví dụ 4.30: Hãy tính độ dài của Astroid, phương trình tham số của nó có dạng.

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, \quad a > 0 \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

hay trong hệ toạ độ Descartes có dạng : $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ Xem hình 4.7.



H.4.7

Giải:

$$x' = -3a\cos^2 t\sin t,\ y' = 3a\sin^2 t\cos t \Rightarrow l = 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = -3a\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a \text{ (đv. độ dài)}$$

4.4.3. Tính thể tích vật thể.

A. Công thức tổng quát.

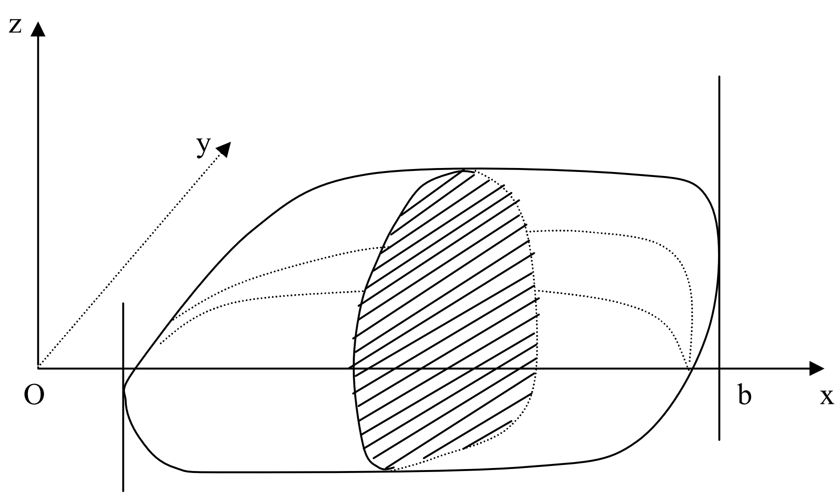
Giả sử vật thể (V) nằm giữa hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox, các mặt phẳng này có phương trình là $x = a$ và $x = b$, $a < b$. Các thiết diện của vật thể (V) vuông góc với trục Ox nằm trên mặt phẳng có phương trình $x = x_0,\ x_0 \in [a,b]$ có diện tích tương ứng $S(x_0)$. (Xem hình 4.8). Khi đó thể tích của vật thể (V), kí hiệu là V, tính theo công thức

$$V = \int_a^b S(x)dx \tag{4.30}$$

Thật vậy, ta áp dụng sơ đồ vi phân gồm hai bước:

Bước 1: Tính vi phân thể tích dV. Ứng với vi phân dx ta được vật thể vô cùng bé là một lát mỏng, có thể coi là hình trụ đáy $S(x)$ và chiều cao dx. Do đó $dV = S(x)dx$

Bước 2: Lấy tổng suy rộng, chuyển sang tích phân, ta nhận được công thức (4.30)



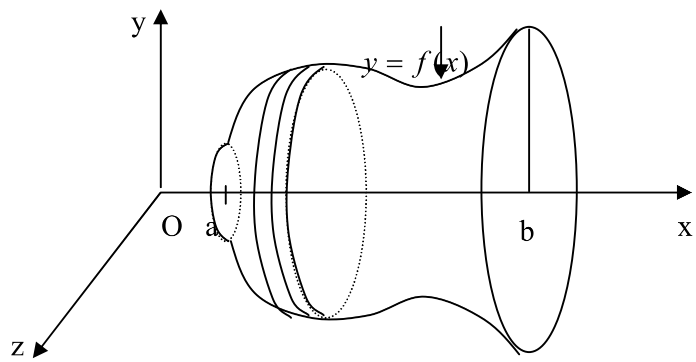
H.4.8

B. Công thức tính thể tích vật thể tròn xoay.

Vật thể (V) tròn xoay là vật thể được tạo thành do một hình thang cong giới hạn bởi các đường:

$x = a$, $x = b$, $(a < b)$, $y = 0$ và $y = f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$

quay xung quanh trục Ox (xem hình 4.9). Cụ thể hơn, phần không gian bị chiếm chỗ do hình thang cong quay xung quanh trục Ox gọi là vật thể tròn xoay.



H.4.9

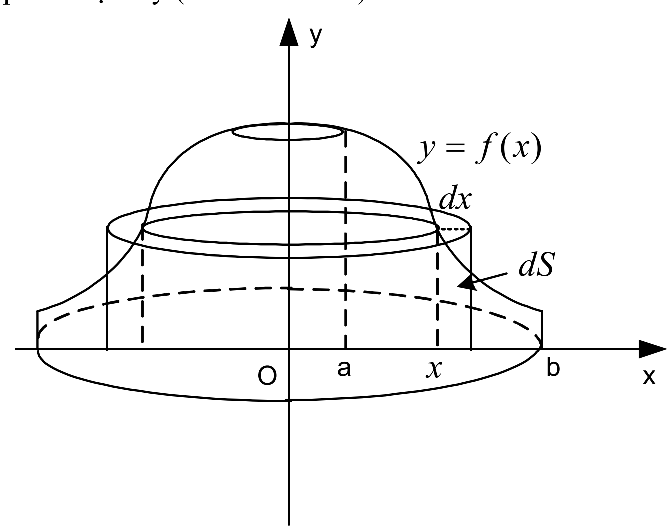
Như vậy các thiết diện vuông góc với trục Ox là các hình tròn. Diện tích của thiết diện nằm trên mặt phẳng $x = x_0$ sẽ là $\pi . f^2(x_0)$. Từ đó nhận được công thức tính:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx \qquad (4.31)$$

Bây giờ ta xét vật thể (V) tròn xoay là vật thể được tạo thành do một hình thang cong giới hạn bởi các đường:

$x = a$, $x = b$, $(0 < a < b)$, $y = 0$ và $y = f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$

quay xung quanh trục Oy (xem hình 4.10)



H.4.10

Trong trường hợp này ta áp dụng sơ đồ vi phân như sau: lấy yếu tố diện tích tại điểm x của hình thang cong là $dS = \left|f(x)\right|dx$. Khi quay quanh trục Oy, dải chữ nhật vô cùng bé này tạo thành một lớp trụ tròn vô cùng bé với bán kính x, chiều cao $\left|f(x)\right|$ và chiều dày dx. Để tính yếu tố thể tích dV này, ta hình dung lớp trụ là hộp chữ nhật với các kích thước:
$2\pi x,\ \left|f(x)\right|,\ dx$ do đó $dV = 2\pi x\left|f(x)\right|dx$. Vậy thể tích của vật thể tròn xoay trong trường hợp hình phẳng quay quanh trục Oy tính theo công thức

$$V = 2\pi\int_a^b x\left|f(x)\right|dx \qquad (4.32)$$

Ví dụ 4.31: Hãy tính thể tích của elipxôit với các bán trục a,b,c:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$$

Giải:

Thiết diện của elipxôit vuông góc với trục Ox là một hình elíp. Thiết diện nằm trên mặt phẳng $x = x_0,\ \ x_0 \in [-a, a]$ là elip có các bán trục

$$b\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}\ ,\ \ c\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}$$

và được mô tả bởi bất phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le 1 - \dfrac{x_0^2}{a^2} \\ x = x_0 \end{cases}$$

Theo ví dụ 4.26, diện tích thiết diện được biểu diễn dưới dạng

$$S(x_0) = \pi bc\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right)$$

Vậy $$V = \pi bc\int_{-a}^{a}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi bc\left(a - \frac{x^3}{3a^2}\Big|_0^a\right) = \frac{4}{3}\pi abc \text{ (đv. thể tích)}$$

Ví dụ 4.32: Tính thể tích vật thể do một nhịp Cycloid quay xung quanh trục Ox tạo ra. Biết Cycloid cho bởi phương trình tham số là.

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t),\ t \in (-\infty, +\infty) \end{cases}$$

Giải:

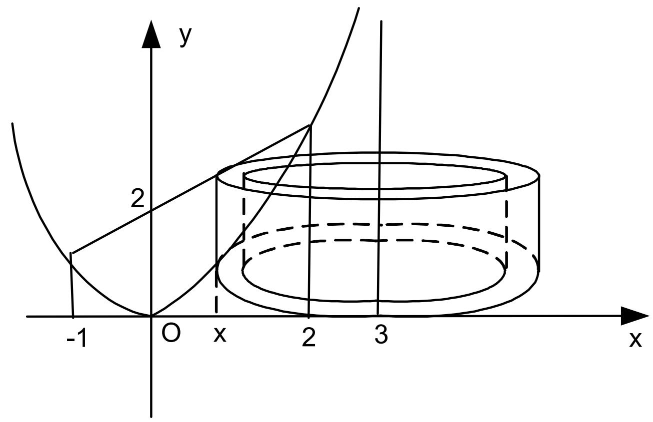
$$V = \pi\int_0^{2\pi a} y^2 dx = \pi a^3\int_0^{2\pi}(1 - \cos t)^3 dt$$

$$= \pi a^3\int_0^{2\pi}(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)dt$$

$$= \pi a^3 \left\{ 2\pi - 3\sin t \Big|_0^{2\pi} + \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(\cos 3t + 3\cos t dt) \right\} = 5\pi^2 a^3$$

Ví dụ 4.33: Cho miền phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2, y = x + 2$. Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng quanh đường thẳng $x = 3$.

Giải:



H.4.11

Yếu tố diện tích tại điểm x (xem H.4.11) có diện tích là $dS = \left[(x+2) - x^2 \right] dx$.

Yếu tố thể tích do yếu tố diện tích chữ nhật này quay tạo thành là lớp trụ với ba kích thước: chiều cao $(x+2) - x^2$, bán kính $3 - x$ và độ dày dx. Do đó

$$dV = 2\pi(3-x)\left(x+2-x^2\right)dx$$

$$V = 2\pi\int_{-1}^{2}(3-x)\left(x+2-x^2\right)dx = \frac{247}{6}\pi \text{ (đv. thể tích)}$$

4.4.4. Tính diện tích mặt tròn xoay.

Mặt tròn xoay là một mặt cong được tạo thành do một cung cong $\overset{\frown}{AB}$ quay xung quanh trục Ox tạo ra. Cụ thể hơn: Phần không gian bị chiếm chỗ do cung $\overset{\frown}{AB}$ quay xung quanh trục Ox gọi là mặt tròn xoay.

Gọi S là diện tích của mặt tròn xoay, dưới đây chúng ta sẽ đưa ra các công thức tính S

A. Cung $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình $y = f(x)$, $a \le x \le b$

Khi yếu tố độ dài tại x quay quanh Ox, nó tạo thành yếu tố mặt cong có diện tích là

$$dS = 2\pi\left|f(x)\right|dl = 2\pi\left|f(x)\right|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Do đó
$$S = 2\pi\int_a^b \left|f(x)\right|\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx \qquad (4.33)$$

Tương tự , nếu đường cong quay quanh trục Oy thì

$$S = 2\pi\int_a^b |x|\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx \qquad (4.34)$$

B. Cung $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad , \quad t_0 \le t \le t_1$$

$$S = 2\pi\int_{t_0}^{t_1} \left|y\left(t\right)\right| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt \text{ (quay quanh Ox)} \quad (4.35)$$

$$S = 2\pi\int_{t_0}^{t_1} \left|x\left(t\right)\right| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt \text{ (quay quanh Oy)} \quad (4\ 36).$$

C. Cung $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình trong hệ toạ độ cực

$$r = r(\varphi) \quad , \quad \alpha \le \varphi \le \beta$$

$$S = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi \quad (4.37)$$

Ví dụ 4.34: Tính diện tích của mặt tròn xoay tạo thành do một đường xích có phương trình $y = a\text{ch}\dfrac{x}{a}$, $a > 0$ gắn ở các đầu $A(0,a)$, $B\left(x, a\text{ch}\dfrac{x}{a}\right)$, $x > a$ quay xung quanh trục Ox

Giải:

$$y' = \text{sh}\frac{x}{a} \quad , \quad \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \text{sh}^2\frac{x}{a}} = \text{ch}\frac{x}{a}$$

$$S = 2\pi a\int_0^x \text{ch}^2\frac{x}{a}dx = \pi a\int_0^x \left(1 + \text{ch}\frac{2x}{a}\right)dx = \pi a\left(x + \frac{a}{2}\text{sh}\frac{2x}{a}\right)$$

Ví dụ 4.35: Đường cong cho bởi phương trình $r = a(1 + \cos\varphi)$ quay quanh trục Ox tạo ra một mặt tròn xoay. Tính diện tích mặt cong này.

Giải:

Đó là đường trái tim (Xem hình 4.5)

$$r'(\varphi) = -a\sin\varphi \ , \ r^2 + r'^2 = 2a^2(1 + \cos\varphi) = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

$$S = 4\pi a^2\int_0^{\pi}(1 + \cos\varphi)\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi$$

$$= 16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin\frac{\varphi}{2}\cos^4\frac{\varphi}{2}d\varphi = \frac{32\pi a^2}{5}\cos^5\frac{\varphi}{2}\Big|_{\pi}^{0} = \frac{32}{5}\pi a^2$$

4.5. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

4.5.1. Tích phân suy rộng với cận vô hạn.

A. Định nghĩa:

1. Cho $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, khả tích trên $[a, A]$, $\forall A > a$.

a. Tích phân suy rộng của f với cận $+\infty$ được kí hiệu là: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

b. Ta nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ về số $I \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^{A} f(x)dx = I \quad \text{và kí hiệu} \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx = I \tag{4.38}$$

c. Nếu I không tồn tại hoặc $I=\infty$, thì nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

2. Cho $f:(-\infty,a]\to\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$, khả tích trên $[B,a]$, $\forall B<a$

a. Tích phân suy rộng của f với cận $-\infty$ được kí hiệu là $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$.

b. Ta nói rằng tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ hội tụ về số $J\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\lim_{B\to-\infty}\int_B^{a} f(x)dx = J = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx \tag{4.39}$$

c. Nếu J không tồn tại hoặc $J=\infty$, thì nói rằng tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ phân kỳ.

3. Cho $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ khả tích trên $[A,B]$, $\forall A,B\in\mathbb{R}$.

a. Tích phân suy rộng của f với các cận vô hạn được kí hiệu là: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

b. Nói rằng tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi các tích phân suy rộng

$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ và $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ cùng hội tụ, $\forall a\in\mathbb{R}$. Trong trường hợp này được kí hiệu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx \ , \ \forall a\in\mathbb{R} \tag{4.40}$$

c. Tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ được gọi là phân kì nếu nó không hội tụ.

Rõ ràng nếu f liên tục trên tập xác định của nó, và có nguyên hàm $F(x)$ thì người ta có thể dùng kí hiệu Newton-Leibniz như sau:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} F(A) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(a) - \lim_{B\to-\infty} F(B) = F(x)\Big|_{-\infty}^{a}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} F(A) - \lim_{B\to-\infty} F(B) = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

Ví dụ 14.36: Xét sự hội tụ, phân kỳ của các tích phân suy rộng sau:

a. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, b. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, c. $\int_a^{+\infty} \sin x dx$, $a \in \mathbb{R}$, d. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Giải:

a. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x\Big|_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}x - \operatorname{arctg}0 = \frac{\pi}{2}$

Vậy tích phân suy rộng đã cho hội tụ.

b. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}x - \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

Vậy tích phân suy rộng trên hội tụ.

c. $\int_a^{+\infty} \sin x dx = -\cos x\Big|_a^{+\infty} = \cos a - \lim_{x\to+\infty} \cos x$

Không tồn tại giới hạn của $\cos x$ khi $x \to \infty$, vậy tích phân suy rộng đã cho phân kỳ.

d. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln x\Big|_1^{+\infty} & \text{khi } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} . \frac{1}{x^{\alpha-1}}\Big|_1^{+\infty} & \text{khi } \alpha \neq 1 \end{cases}$

Ta nhận thấy $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = \begin{cases} 0 & \text{khi } \alpha > 1 \\ \infty & \text{khi } \alpha < 1 \end{cases}$

Vậy tích phân hội tụ với $\alpha > 1$, khi đó $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$, và phân kỳ với $\alpha \leq 1$

Chú ý: Tương tự như ý nghĩa hình học của tích phân xác định, ở đây ta thấy: Nếu tích phân suy rộng hội tụ và $f(x) \geq 0$ thì một miền vô hạn có diện tích hữu hạn sẽ tính được diện tích nhờ vào tích phân suy rộng với cận vô hạn.

B. Điều kiện hội tụ của tích phân suy rộng.

Sau đây ta xét trường hợp tích phân suy rộng $\int_a^{\infty} f(x)dx$ với $f(x) \geq 0$.

Các trường hợp tích phân suy rộng khác với $f(x)$ giữ nguyên dấu, chúng ta có thể suy diễn tương tự để nhận được các kết quả tương ứng.

Đặt $$\phi(A) = \int_a^A f(x)dx$$

Vì $f(x) \geq 0$ trên $[a,+\infty)$, chứng tỏ $\phi(A)$ đơn điệu tăng trên $[a,+\infty)$. Từ định lí về giới hạn của hàm đơn điệu (Xem mục 2.2.2) ta suy ra:

Định lí 4.18: *Cho hàm số $f(x) \geq 0$ và khả tích trên $[a, A]$, $\forall A > a$ để tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ, điều kiện cần và đủ là tồn tại $L \in \mathbb{R}$ sao cho*

$$\phi(A) \leq L \ , \ \forall A$$

Định lí 4.19: *Cho các hàm số $f(x),\ g(x)$ khả tích trên $[a,A]$, $\forall A > a$*

và $0 \le f(x) \le g(x)$, $\forall x \ge b > a$ khi đó

Nếu $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Nếu $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ.

Chứng minh:

Ta có thể biểu diễn $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_a^{b} f(x)dx + \int\limits_b^{+\infty} f(x)dx$

Như vậy sự hội tụ hay phân kỳ của tích phân suy rộng $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ là đồng thời với sự hội tụ hay phân kỳ của tích phân suy rộng $\int\limits_b^{+\infty} f(x)dx$.

Nếu $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ $\Rightarrow \int\limits_b^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ, theo định lí 1 suy ra $\int\limits_b^{A} g(x)dx \le L$, $\forall A$.

Theo tính chất của tích phân xác định sẽ có

$\int\limits_b^{A} f(x)dx \le \int\limits_b^{A} g(x)dx \le L$, ∀A . Chứng tỏ $\int\limits_b^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ

Nếu $\int\limits_b^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ $\Rightarrow \int\limits_b^{A} f(x)dx$ không bị chặn, nghĩa là

$\forall M > 0,\ \exists A_0 \in (b,+\infty)$ sao cho $\int\limits_b^{A_0} f(x)dx > M \Rightarrow \int\limits_b^{A_0} g(x)dx \ge \int\limits_b^{A_0} f(x)dx > M$

Chứng tỏ $\int\limits_b^{A} g(x)dx$ không bị chặn theo định lí 4.19 suy ra $\int\limits_b^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ.

Định lí 4.20: *Cho các hàm số $f(x), g(x)$ không âm và khả tích trên $[a,A]$, $\forall A > a$.*

Khi đó:

***1.** Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$, $l \in \mathbb{R}_+^*$ thì các tích phân suy rộng $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*

***2.** Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ và $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ*

***3.** Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ và $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.*

Chứng minh:

1. Theo định nghĩa, ta có $(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists b > 0)\ (\forall x > b \Rightarrow l - \varepsilon < \dfrac{f(x)}{g(x)} < l + \varepsilon)$

Vì $g(x) \geq 0 \Rightarrow (l-\varepsilon)g(x) < f(x) < (l+\varepsilon)g(x)$

Lấy $\varepsilon > 0$ sao cho $l - \varepsilon = c > 0$. Theo định lí 4.19: Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì

$\int_a^{+\infty} (l-\varepsilon)g(x)dx$ hội tụ. Từ đó $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ..

Tương tự: $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_a^{+\infty} (l+\varepsilon)g(x)dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ..

2. Lấy $\varepsilon = 1$, $(\exists b > 0)\ (\forall x > b \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \varepsilon g(x) = g(x))$

Theo định lí 4.19 chứng tỏ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

3. $(\forall M > 0)\ (\exists b > 0)\ (\forall x > b \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} > M)$, Lấy $M = 1$ thì $f(x) > g(x)$, Theo định lí

4.19 suy ra $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

Hệ quả 1: *Giả sử với x đủ lớn hàm số $f(x)$ có dạng* $f(x) = \dfrac{h(x)}{x^k}$, $k > 0$, $h(x) \geq 0$.

Khi đó: Nếu $k > 1$ và $0 \leq h \leq c < +\infty$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ,($c = \text{const}$).

Nếu $k \leq 1$ và $h(x) \geq c > 0$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

Hệ quả 2: *Nếu $f(x) \geq 0$ và là VCB bậc k so với VCB $\dfrac{1}{x}$ tại $+\infty$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$*

hội tụ khi $k > 1$ và phân kỳ khi $k \leq 1$

Hệ quả 1 được suy ra trực tiếp từ định lí 4.19 và ví dụ 4.36.d.
Hệ quả 2 được suy ra trực tiếp từ định lí 4.20 và ví dụ 4.36.d.

Ví dụ 4.37: Xét sự hội tụ, phân kỳ của các tích phân sau.

a. $\int_0^{+\infty} \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}dx$, b. $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$, c. $\int_1^{+\infty} \dfrac{e^{-x^2}}{x^2}dx$.

Giải:

a. $\left(\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} : \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ theo hệ quả 2, tích phân suy rộng phân kỳ.

b. $\left(\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}:\dfrac{1}{x^2}\right)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$, tích phân suy rộng hội tụ.

c. $\left(\dfrac{e^{-x^2}}{x^2}:\dfrac{1}{x^2}\right)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$, theo định lí 3, tích phân suy rộng hội tụ.

Dưới đây ta sẽ đưa ra định lí tổng quát về điều kiện hội tụ của tích phân suy rộng.

Định lí 4.21*: Để tích phân suy rộng* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ, điều kiện cần và đủ là:*

$$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists A_0>a\ ,\ (\forall A>A_0)\quad (\forall A'>A_0\Rightarrow\left|\phi(A')-\phi(A)\right|<\varepsilon)$$

$$hay\qquad \left|\int_A^{A'} f(x)dx\right|<\varepsilon$$

Dựa vào tính chất của tích phân xác định.

$$\left|\int_A^{A'} f(x)dx\right|\le\int_A^{A'}\left|f(x)\right|dx$$

Ta nhận được hệ quả sau đây:

Hệ quả 3*: Nếu* $\int_a^{+\infty}\left|f(x)\right|dx$ *hội tụ thì* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ.*

C. Sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của tích phân suy rộng.

1. Người ta nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối khi và chỉ khi tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty}\left|f(x)\right|dx$ hội tụ.

2. Người ta nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ bán hội tụ khi và chỉ khi $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và $\int_a^{+\infty}\left|f(x)\right|dx$ phân kỳ.

Định lí 4.22*: Nếu tích phân suy rộng* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ tuyệt đối và hàm số* $g(x)$ *bị chặn*

trên $[a,+\infty)$ *thì* $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ *hội tụ tuyệt đối*

Chứng minh:

Giả sử $\left|g(x)\right|\le M$, $\forall x\in[a,+\infty)$, ta có $\int_a^{+\infty}\left|f(x).g(x)\right|dx\le M\int_a^{+\infty}\left|f(x)\right|dx$

Từ định lí 4.19 ta suy ra $\int_a^{+\infty} |f(x).g(x)| dx$ hội tụ. Theo định nghĩa chứng tỏ $\int_a^{+\infty} f(x).g(x)dx$ hội tụ tuyệt đối.

Ví dụ 4.38: Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng:

a. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{k^2 + x^2} dx,\ \alpha \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{R}^*$, b. $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$, c. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx$.

Giải:

a. Nhận xét $|\cos \alpha x| \leq 1,\ \forall x;\quad \frac{1}{k^2 + x^2} \sim \frac{1}{x^2}$ khi $x \to \infty$

Vậy $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{k^2 + x^2} dx$ hội tụ tuyệt đối.

b. Ta biểu diễn: $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{e^{2x} - 1}} = \int_0^{a} \frac{xdx}{\sqrt{e^{2x} - 1}} + \int_a^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{e^{2x} - 1}},\quad a > 0$

Vì $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{e^{2x} - 1}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{e^{2x} - 1}{2x}}} = 0;$ ta suy ra tích phân thứ nhất hội tụ (đó là tích phân xác định vì hàm dưới dấu tích phân khả tích).

Ta lấy $\lambda > 1$, nhận được $\frac{x}{\sqrt{e^{2x} - 1}} : \frac{1}{x^{\lambda}} = \frac{x^{\lambda + 1}}{\sqrt{e^{2x} - 1}} \to 0$ khi $x \to \infty$.

Do $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}}$ hội tụ, $a > 0$ suy ra tích phân suy rộng đã cho hội tụ.

c. Tương tự như trên, nhận thấy $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x - 1}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}} = 0$

Ta có $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx = \int_1^{a} \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx + \int_a^{+\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx$

Tích phân thứ nhất hội tụ (tồn tại) vì hàm dưới dấu tích phân khả tích trên $[1, a]$, $\forall a > 1$

Lấy $1 < \lambda < 2$ nhận được $\frac{\ln x}{x\sqrt{x^2 - 1}} : \frac{1}{x^{\lambda}} = \frac{\ln x}{x^{2 - \lambda}} . \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \to 0$ khi $x \to \infty$.

Mà $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}}$ hội tụ $\forall a > 0$, suy ra tích phân đã cho hội tụ.

4.5.2. Tích phân suy rộng với hàm dưới dấu tích phân có cực điểm.

A. Định nghĩa:

1. Cho $f:\ (a,b)\to\mathbb{R}$ trừ ra x_0. Ta nói rằng $x_0\in(a,b)$ là cực điểm của f khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$. Hàm số có cực điểm tại a hoặc b khi và chỉ khi $f(a^+)=\infty$ hoặc $f(b^-)=\infty$

2. Cho $f:\ [a,b)\to\mathbb{R}$! $f(b^-)=\infty$, khả tích trên $[a,b-\varepsilon]$, $\forall\varepsilon>0$ đủ bé.

a. Tích phân suy rộng của f trên $[a,b]$, được kí hiệu là $\int\limits_a^b f(x)dx$.

b. Ta nói rằng tích phân suy rộng hội tụ về $I\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx=I\text{, và kí hiệu } I=\int\limits_a^b f(x)dx \tag{4.41}$$

c. Nếu không tồn tại giới hạn trên (không có I hoặc $I=\infty$) thì người ta nói rằng tích phân suy rộng $\int\limits_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

3. Cho $f:[a,b)\to\mathbb{R}$! $f(a^+)=\infty$ khả tích trên $(a+\varepsilon,b]$

a. Người ta nói rằng tích phân suy rộng $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ về J khi và chỉ khi

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx=J \quad \text{(hữu hạn).}$$

b. Nếu không tồn tại J thì nói rằng tích phân suy rộng phân kỳ.

4. Cho $f:[a,b]\to\mathbb{R}\backslash\{x_0\}$, x_0 là cực điểm của f

a. Ta nói rằng tích phân suy rộng $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi các tích phân suy rộng $\int\limits_a^{x_0} f(x)dx$ và $\int\limits_{x_0}^{b} f(x)dx$ cùng hội tụ, Khi đó ta có thể biểu diễn:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^{x_0} f(x)dx+\int\limits_{x_0}^{b} f(x)dx$$

b. Tích phân suy rộng $\int\limits_a^b f(x)dx$ được gọi là phân kì nếu nó không hội tụ.

Chú ý: Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ trừ ra các cực điểm của nó và có nguyên hàm là $F(x)$, ta có thể dùng công thức Newton- Leibnitz và kí hiệu:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}F(b-\varepsilon)-F(a) \text{ hoặc } \int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-\lim_{\varepsilon\to 0}F(a+\varepsilon)$$

Ví dụ 4.39: Xét sự tồn tại của các tích phân suy rộng sau:

a. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; b. $\int\limits_a^b\frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

Giải:

a. Hàm dưới dấu tích phân có cực điểm là ± 1

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^{a}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_{a}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \forall a\in(-1,1)$$

$$=\arcsin a-\lim_{x\to -1}\arcsin x+\lim_{x\to 1}\arcsin x-\arcsin a=\pi\ .$$

b. Hàm dưới dấu tích phân có cực điểm là a

$$\int_{a}^{b}\frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}=\begin{cases}\ln(x-a)\Big|_a^b & \text{khi } \alpha=1\\ \dfrac{1}{1-\alpha}.\dfrac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}\Big|_a^b & \text{khi } \alpha\neq 1\end{cases}$$

Vì $\lim\limits_{x\to a^+}\ln(x-a)=-\infty,\qquad \lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}=\begin{cases}0 & \text{khi } \alpha<1\\ \infty & \text{khi } \alpha>1\end{cases}$

Suy ra tích phân đã cho hội tụ với $\alpha<1$ và phân kỳ với $\alpha\geq 1$.

B. Điều kiện hội tụ của tích phân suy rộng.

Chúng ta giới hạn trường hợp $f(x)$ giữ nguyên dấu trên (a,b).

Giả sử $f(x)\geq 0$ trên $[a,b)$ và $f(b^-)=\infty$ Ta đặt $\phi(\varepsilon)=\int_{a}^{b-\varepsilon}f(x)dx$

Rõ ràng $\phi(\varepsilon)$ là hàm số giảm ở lân cận bên phải của điểm 0. Từ định lí về giới hạn của hàm đơn điệu, chúng ta nhận được định lí sau đây:

Định lí 4.23: *Để tich phân suy rộng* $\int_{a}^{b}f(x)dx$ *hội tụ, điều kiện cần và đủ là* $\phi(\varepsilon)$

bị chặn ở lân cận bên phải điểm $\varepsilon=0$, *tức là* $\phi(\varepsilon)\leq L$, $\forall\varepsilon>0$

Các định lí so sánh ở mục 4.5.1 hoàn toàn đúng cho các trường hợp tích phân suy rộng với hàm dưới dấu tích phân có cực điểm. Các hệ quả tương tự với hệ quả 1,2 sẽ là:

Hệ quả 1': *Giả sử với* x *đủ gần* b *và* $(x<b)$ *hàm số* $f(x)$ *có dạng*

$$f(x)=\frac{g(x)}{(b-x)^k}\quad,\quad k>0\quad,\quad g(x)\geq 0,\ \textit{khi đó:}$$

Nếu $k<1$ *và* $0\leq g(x)\leq c<\infty$ *thì* $\int_{a}^{b}f(x)dx$ *hội tụ.*

Nếu $k\geq 1$ *và* $g(x)\geq c>0$ *thì* $\int_{a}^{b}f(x)dx$ *phân kỳ (trong đó* c *là hằng số)*

Hệ quả 2': *Nếu* $f(x)\geq 0$ *và là VCL bậc* k *so với VCL* $\dfrac{1}{b-x}$ *tại* b *thì*

$\int_{a}^{b}f(x)dx$ *hội tụ khi* $k<1$ *và phân kỳ khi* $k\geq 1$.

Ví dụ 4.50: Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau:

a. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, |k|<1$; b. $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$. c. $\int_0^\theta \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta}}$, $0<\theta \le \frac{\pi}{2}$

d. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})}}$; e. $\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$.

Giải:

a. Hàm dưới dấu tích phân có một cực điểm $x=1$, là VCL cấp $\frac{1}{2}$ so với VCL $\frac{1}{1-x}$ tại $x=1$. Vậy tích phân suy rộng hội tụ.

b. $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$. Vì $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$, vậy hàm $\frac{1}{\ln x}$ có cực điểm tại $x=1$

$\left(\frac{1}{\ln x} : \frac{1}{x-1}\right) \underset{x\to 1}{\to} 1$, theo hệ quả 2', tích phân suy rộng phân kỳ.

c. $\int_0^\theta \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta}}$, $0<\theta\le\frac{\pi}{2}$, $\varphi=\theta$ là cực điểm

Nhận xét $\cos\varphi - \cos\theta = -2\sin\frac{\varphi+\theta}{2}\sin\frac{\varphi-\theta}{2} = 2\sin\frac{\varphi+\theta}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\theta}} : \frac{1}{\sqrt{\theta-\varphi}} = \sqrt{\frac{\frac{\theta-\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi+\theta}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}}} \underset{\varphi\to\theta}{\to} \frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}$$

Vậy tích phân hội tụ.

d. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})}}$, $x=0$ là cực điểm.

$e^x - e^{-x} = 2x + o(x^2) \Rightarrow \sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})} \sim \sqrt[3]{2}.x^{\frac{2}{3}}$ khi $x\to 0$

Theo hệ quả 2', tích phân suy rộng hội tụ.

e. $\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx + \int_1^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$

Xét $\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$, Nếu $p\ge 1$ ta nhận được tích phân thông thường.

Nếu $p<1$, nhận được tích phân suy rộng với hàm dưới dấu tích phân có cực điểm tại $x=0$

Ta nhận thấy $\left(x^{p-1}e^{-x} : \frac{1}{x^{1-p}}\right) = e^{-x} \underset{x\to 0}{\to} 1$, theo hệ quả 2' tích phân suy rộng hội tụ khi $1-p<1$ hay $p>0$

Xét tích phân $\int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$. Ta nhận thấy $\left(x^{p-1}e^{-x} : \frac{1}{x^2}\right) = x^{p+1}e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0, \quad \forall p$

Vậy tích phân suy rộng hội tụ khi $p > 0$.

Chú ý:

a. Tích phân suy rộng có các tính chất tương tự như tích phân xác định

b. Để tính tích phân suy rộng (trường hợp tích phân suy rộng hội tụ), người ta cũng thường sử dụng hai phương pháp cơ bản: Đổi biến số và tích phân từng phần. Sau đây, ta đưa ra một số ví dụ về tích phân suy rộng thường đề cập đến trong các lĩnh vực kỹ thuật.

Ví dụ 4.41: Tính tích phân sau $E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx$ (được gọi là tích phân Euler)

Giải: Sự hội tụ của tích phân có thể suy ra bằng cách so sánh với $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$

Ta đặt $x = 2t$

$$E = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin 2tdt = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin tdt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos tdt$$

Xét $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos tdt$, đặt $t = \frac{\pi}{2} - \alpha$ nhận được $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos tdt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin\alpha d\alpha$

Từ đó suy ra $E = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2E \Rightarrow E = -\frac{\pi}{2}\ln 2$

Ví dụ 4.42 Tính tích phân sau, được gọi là tích phân Euler-Poisson. $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$

Giải:

Sự hội tụ có thể thấy được khi để ý rằng: $\forall x > 1$ có $e^{-x^2} < e^{-x}$ mà $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ hội tụ

Ta nhận thấy hàm số $g(x) = (1+t)e^{-t}$ đạt giá trị lớn nhất khi $t = 0$ và $g_{\max} = g(0) = 1$. Vậy $\forall t \neq 0$ có $(1+t)e^{-t} < 1$

Thay $t = \pm x^2$ ta nhận được

$$\begin{cases} (1-x^2)e^{x^2} < 1 \\ (1+x^2)e^{-x^2} < 1 \end{cases} \Rightarrow 1 - x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}$$

Với $0 < x < 1$ có $e^{-nx^2} > (1-x^2)^n$

$\forall x$ có $e^{-nx^2} < \frac{1}{(1+x^2)^n}$

Từ đó $\int_0^1 (1-x^2)^n dx < \int_0^1 e^{-nx^2} dx < \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx < \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$

Thực hiện phép đổi biến $u = \sqrt{n}x$ để tính tích phân ở giữa

$$\int_0^{\infty} e^{-nx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{I}{\sqrt{n}}$$

Thực hiện phép đổi biến $x = \cos t$ để tính tích phân bên trái

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

Thực hiện phép đổi biến $x = \cot g t$ để tính tích phân bên phải

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} t dt = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Thay các tích phân đã tính vào bất đẳng thức trên, nhận được

$$\sqrt{n}\, \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < I < \sqrt{n}\, \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Bình phương các vế bất đẳng thức kép trên.

$$\frac{n}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1} < I^2 < \frac{n}{2n-1} \left[\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \right]^2 .(2n-1) \frac{\pi^2}{4}$$

Theo công thức Wallis (Xem ví dụ 6 mục 4.2.2)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 . \frac{1}{2n+1}$$

Suy ra $I^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Ví dụ 4.43: Tính $J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$

Giải:

Đặt $x = \frac{1}{t} \Rightarrow J = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{1+t^4} = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}$

$$\Rightarrow 2J = \int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx \Rightarrow J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx}{x^2 + \frac{1}{x^2}}$$

Tiếp tục đặt $z = x - \frac{1}{x}$, ta nhận được $J = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

TÓM TẮT NỘI DUNG CHƯƠNG IV

- **Định nghĩa tích phân xác định**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = I$$

I không phụ thuộc vào bất cứ một phân hoạch nào của $[a,b]$ và cũng không phụ thuộc vào bất kỳ một cách chọn nào ứng với một phân hoạch đã định.Trong kí hiệu trên: $\int$ là dấu lấy tích phân, $\int_a^b$ là lấy tích phân từ a đến b, a là cận dưới, b là cận trên của tích phân, x là biến lấy tích phân, $f(x)$ là hàm dưới dấu tích phân, dx là vi phân của biến lấy tích phân.

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \ , \quad \int_a^a f(x)dx = 0$$

- **Điều kiện tồn tại**

A. Điều kiện cần

Nếu f khả tích tích trên [a,b] thì f bị chặn trong [a,b].

B. Điều kiện đủ

1. *Nếu $f(x)$ liên tục trên [a,b] thì khả tích trên đoạn đó*
2. *Nếu $f(x)$ đơn điệu và bị chặn trên [a,b] thì khả tích trên đoạn đó.*
3. *Nếu $f(x)$ liên tục từng khúc trên [a,b] thì khả tích trên đoạn đó.*
4. *Nếu $f(x)$ bị chặn và chỉ có hữu hạn điểm gián đoạn thì $f(x)$ khả tích trên [a,b]*
5. *Nếu $f(x)$ khả tích trên [a,b] thì $|f(x)|$, $k.f(x),(k = const)$ cũng khả tích trên [a,b].*
6. *Nếu f,g khả tích trên [a,b] thì tổng, hiệu, tích của chúng cũng khả tích trên [a,b]*
7. *Nếu f khả tích trên [a,b] thì hàm số đó khả tích trên mọi đoạn $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$.*
   Ngược lại nếu [a,b] tách ra thành một số đoạn, trên mỗi đoạn đó hàm khả tích thì f khả tích trên [a,b].

- **Các tính chất của tích phân xác định.**

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ với $c\in(a,b)$
2. $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx$
3. $\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
4. Nếu $f(x)\ge 0$ trên [a,b] thì $\int_a^b f(x)dx \ge 0$
5. Nếu $f(x)\ge g(x), \forall x\in[a,b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

6. Nếu $f \geq 0$ trên [a,b], f liên tục tại $x_0 \in [a,b]$ và $f(x_0) > 0$ khi đó $\int_a^b f(x)dx > 0$

7. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

8. Nếu $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a,b]$ thì $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

Đặt $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Gọi μ là giá trị trung bình của f trên [a,b], khi đó ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

Nếu $f(x)$ liên tục trên [a,b] sẽ tồn tại $c \in [a,b]$ sao cho $\mu = f(c)$.

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

9. *Cho f, g khả tích trên [a,b], a < b, $g(x) \geq 0$ hoặc $g(x) \leq 0$ trên [a,b]khi đó*

$$\int_a^b f(x).g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx. \text{ Trong đó } \mu \in [m,M] \quad m \leq f(x) \leq M$$

Nếu thêm điều kiện $f(x)$ liên tục thì tồn tại $c \in [a,b]$ thỏa mãn hệ thức

$$\int_a^b f(x).g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

- **Công thức Newton-Leibnitz**

A. Hàm tích phân của cận trên

$$\phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

được gọi là hàm tích phân của cận trên hay tích phân của hàm $f(x)$ theo cận trên.

1. *Nếu $f(x)$ khả tích trên [a,b] thì $\phi(x)$ là hàm liên tục trên [a,b]*

2. *Nếu $f(x)$ liên tục trên [a,b] thì $\phi(x)$ khả vi trên [a,b] và có*

$$\phi'(x) = f(x), \forall x \in [a,b].$$

B. Nguyên hàm của hàm số và tích phân bất định

Cho $f, F: X \to \mathbb{R}$. Gọi F là một nguyên hàm của f trên X nếu

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in X.$$

Nếu $f(x)$ liên tục trên X thì sẽ có nguyên hàm trên X và nếu $F(x)$ là một nguyên hàm thì tập hợp các nguyên hàm của f là $\{F(x)+C \ , \ C \in \mathbb{R}\}$

Tập hợp các nguyên hàm của $f(x)$ trên X được gọi là tích phân bất định của $f(x)$, và kí hiệu là $\int f(x)dx$. Vậy

$\int f(x)dx = F(x) + C$, trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên X.

C. Công thức Newton-Leibnitz

Nếu $f(x)$ *liên tục trên [a,b] có một nguyên hàm là* $F(x)$ *trên [a,b] thì*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- **Hai phương pháp cơ bản tính tích phân xác định.**

A. Phép đổi biến.

1. *Nếu* $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *thuộc lớp* C^1 *trên* $[\alpha, \beta]$

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *thuộc lớp* C^0 *trên [a,b]*

và $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$. *Khi đó:*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi'(t).dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$$

2, *Nếu* $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ φ *đơn điệu và thuộc lớp* C^1 *trên* $[\alpha, \beta]$

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $f \in C^0$ *trên [a,b]*

với $t = \varphi(x)$ *mà* $f(x)dx = g(t)dt, g \in C^0$ *trên* $[\varphi(a), \varphi(b)]$. *Khi đó:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt$$

B. Phép tích phân từng phần.

Nếu $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ *và* $u, v \in C^1$ *trên [a,b] thì:*

$$\int_a^b u'(x).v(x)dx = u(x).v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x).v'(x)dx$$

- **Hai phương pháp cơ bản tính tích phân bất định.**

A. Phương pháp tích phân từng phần.

Cho $u, v \in C^1$ trên X khi đó

$$\int u(x)dv(x) = u(x).v(x) - \int v(x)du(x)$$

B. Phương pháp đổi biến số.

Đặt $x = \varphi(t)$, với φ đơn điệu và $\varphi \in C^1$ trên Y khi đó

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

Đặt $t = \psi(x)$ khi đó $f(x)dx = g(t)dt$

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt\Big|_{t=\psi(x)}$$

- **Cách tính tích phân bất định của các hàm số hữu tỉ.**

1. Nếu hàm hữu tỉ có dạng $f(x) = x^{n-1}\dfrac{P(x^n)}{Q(x^n)}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, bằng cách đổi biến $t = x^n$

$$\int f(x)dx = \frac{1}{n}\int \frac{P(t)}{Q(t)}dt$$

Như vậy ta đã hạ thấp bậc của các đa thức của hàm hữu tỉ f

2. Mọi hàm hữu tỉ (đôi khi gọi là phân thức hữu tỉ) không thực sự đều phân tích thành tổng của một đa thức và một phân thức hữu tỉ thực sự.

A. Tích phân các phân thức tối giản loại thứ nhất.

$$I = \int \frac{dx}{(x-a)^n} \ , \ a \in \mathbb{R}$$

B. Tích phân các phân thức tối giản loại thứ hai.

$$I = \int \frac{\lambda x + \mu}{(ax^2 + bx + c)^n} dx \ , \ \lambda, \mu, a, b, c \in \mathbb{R} \text{ và } b^2 - 4ac < 0, \ n \in \mathbb{N}^*$$

C. Hàm hữu tỉ đối với sin và côsin.

Trường hợp tổng quát: $\int R(\sin x, \cos x)dx$ được tính nhờ các phép đổi biến tương ứng

$$t = tg\frac{x}{2} \ , \ t = \cos x \ , \ t = \sin x \ , \ t = tgx$$

Trường hợp đặc biệt: $R(\sin x, \cos x) = \sin^m x.\cos^n x \ , \ m, n \in \mathbb{Z}$

Nếu m lẻ thì đổi biến $t = \cos x$

Nếu n lẻ thì đổi biến $t = \sin x$

Nếu m, n chẵn và không cùng dương thì đổi biến $t = tgx$

Nếu m, n chẵn và cùng dương thì tuyến tính hoá sau đó tính nguyên hàm.

D. Hàm hữu tỉ đối với shx và chx.

Để tính $\int R(shx, chx)dx$ ta có thể dùng các phép đổi biến:

$$t = th\frac{x}{2} \ , \ t = chx \ , \ t = shx \ , \ t = thx$$

E. Hàm hữu tỉ đối với $e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Xét $I = \int f(e^{\alpha x})dx$, trong đó $f(x)$ là hàm hữu tỉ. Thực hiện phép đổi biến

$t = e^{\alpha x}$, $dt = \alpha e^{\alpha x}dx$, khi đó $\quad I = \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int \frac{f(t)}{t}dt$

F. Hàm hữu tỉ đối với x và $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$

Xét $I = \displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ trong đó $R(x, y)$ là hàm hữu tỉ của hai biến x, y

$$y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \ , \ ad \neq bc \ , \ R(x,y)dx = R\left(\frac{y^n d - b}{a - cy^n}, y\right)\frac{ny^{n-1}(ad-bc)}{(a-cy^n)^2}dy = f(y)dy$$

- **Một số ứng dụng của tích phân xác định.**

1.Tính diện tích hình phẳng.

A. Miền phẳng giới hạn bởi các đường cong trong toạ độ Descartes.

Giả sử miền phẳng D giới hạn bởi các đường:

$x = a$, $x = b$, $(a < b)$, $y = 0$, $y = f(x)$ khi đó $\quad S = \displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$

Tổng quát, giả sử miền phẳng D giới hạn bởi các đường:

$x = a$, $x = b$, $(a < b)$, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ khi đó $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$

Tương tự nếu D giới hạn bởi các đường:

$y = c$, $y = d$, $(c < d)$, $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$ khi đó $S = \int_c^d |g_1(y) - g_2(y)| dy$

B. Miền phẳng D giới hạn bởi đường cong cho dưới dạng tham số:

Giả sử miền D giới hạn bởi đường cong cho bởi phương trình

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t_0 \le t \le t_1 \quad \text{. Khi đó } S = \int_{t_0}^{t_1} |y(t).x'(t)| dt$$

C. Miền phẳng D giới hạn bởi đường cong có phương trình cho dưới dạng toạ độ cực.

Giả sử miền D giới hạn bởi đường cong cho bởi phương trình

$$r = r(\varphi), \quad \alpha \le \varphi \le \beta \quad \text{. Khi đó } S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi) d\varphi$$

2. Tính độ dài đường cong phẳng.

A. Phương trình cho trong hệ toạ độ Descartes vuông góc.

Giả sử đường cong $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình

$$y = f(x),\ A\ \left(a, f(a)\right),\ B\left(b, f(b)\right)$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

B. Phương trình cho trong dạng tham số.

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t_0 \le t \le t_1 \ , \ \varphi, \psi \in C^1 \text{ trên } [t_0, t_1]$$

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \ , \quad l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$$

C. Phương trình cho trong dạng toạ độ cực.

$$r = r(\varphi) \quad , \ \alpha \le \varphi \le \beta$$

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi$$

3. Tính thể tích vật thể.

A. Công thức tổng quát.

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

B. Công thức tính thể tích vật thể tròn xoay

$$V = \pi\int_a^b f^2(x) dx \quad \text{(quay trục Ox)}$$

$$V = 2\pi\int_a^b x\left|f(x)\right|dx \quad \text{(quay quanh trục Oy)}$$

4. Tính diện tích mặt tròn xoay.

A. Cung $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình $y = f(x)$, $a \le x \le b$

$$S = 2\pi\int_a^b \left|f(x)\right|\sqrt{1+f'^2(x)}dx \quad \text{(quay quanh trục Ox)}$$

$$S = 2\pi\int_a^b |x|\sqrt{1+f'^2(x)}dx \qquad \text{(quay quanh trục Oy)}$$

B. Cung $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} , \quad t_0 \le t \le t_1$$

$$S = 2\pi\int_{t_0}^{t_1} \left|y(t)\right|\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt \text{(quay quanh Ox)}$$

$$S = 2\pi\int_{t_0}^{t_1} \left|x(t)\right|\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt \text{(quay quanh Oy)}$$

C. Cung $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình trong hệ toạ độ cực

$$r = r(\varphi) \quad , \quad \alpha \le \varphi \le \beta$$

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi$$

- **Tích phân suy rộng với cận vô hạn.**

A. Định nghĩa:

1. $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx = I$ và kí hiệu $\int_a^{+\infty} f(x)dx = I$

Nếu I không tồn tại hoặc $I = \infty$, thì nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

2. $\lim\limits_{B\to-\infty}\int_B^a f(x)dx = J = \int_{-\infty}^a f(x)dx$

Nếu J không tồn tại hoặc $J = \infty$, thì nói rằng tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ phân kỳ.

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\forall a \in \mathbb{R}$

B. Điều kiện hội tụ của tích phân suy rộng.

Sau đây ta xét trường hợp tích phân suy rộng $\int_a^\infty f(x)dx$ với

$$\phi(A) = \int_a^A f(x)dx$$

1. *Cho hàm số* $f(x) \ge 0$ *và khả tích trên* $[a, A], \forall A > a$ *để tích phân suy rộng* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ, điều kiện cần và đủ là tồn tại* $L \in \mathbb{R}$ *sao cho* $\phi(A) \le L, \ \forall A$

2. *Cho các hàm số* $f(x), \ g(x)$ *khả tích trên* $[a, A]$, $\forall A > a$ *và* $0 \le f(x) \le g(x)$, $\forall x \ge b > a$ *khi đó*

Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *hội tụ thì* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ. Nếu* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *phân kỳ thì* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *phân kỳ*

3. *Cho các hàm số* $f(x), g(x)$ *không âm và khả tích trên* $[a, A]$, $\forall A > a$ *.Khi đó:*

a. *Nếu* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$, $l \in R_+^*$ *thì các tích phân suy rộng* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *và* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*

b. *Nếu* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ *và* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *hội tụ thì* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ*

c. *Nếu* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ *và* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *phân kỳ thì* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *phân kỳ*

4. *Giả sử với* x *đủ lớn hàm số* $f(x)$ *có dạng* $f(x) = \dfrac{h(x)}{x^k}, \ k > 0, \ h(x) \ge 0$.

Khi đó: Nếu $k > 1$ *và* $0 \le h \le c < +\infty$ *thì* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ, (*$c = \text{const}$*).*

Nếu $k \le 1$ *và* $h(x) \ge c > 0$ *thì* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *phân kì,*

5. *Nếu* $f(x) \ge 0$ *và là VCB bậc k so với VCB* $\dfrac{1}{x}$ *tại* $+\infty$ *thì* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ khi* $k > 1$ *và phân kỳ khi* $k \le 1$

6. *Để tích phân suy rộng* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ, điều kiện cần và đủ là*

$$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists A_0 > a) \ (\forall A > A_0, \forall A' > A_0 \Rightarrow |\phi(A') - \phi(A)| < \varepsilon) \ \text{hay} \ \left| \int_A^{A'} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

7. *Nếu* $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *hội tụ thì* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ.*

C. Sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của tích phân suy rộng.

Nếu tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ tuyệt đối và hàm số* $g(x)$ *bị chặn trên* $[a, +\infty)$ *thì* $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ *hội tụ tuyệt đối*

- **Tích phân suy rộng với hàm dưới dấu tích phân có cực điểm.**

A. Định nghĩa:

1. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = I$**,** và kí hiệu $I = \int_a^b f(x)dx$

` Nếu không tồn tại giới hạn trên (không có I hoặc $I=\infty$) thì người ta nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

2. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = J$ (hữu hạn).

Nếu không tồn tại J thì nói rằng tích phân suy rộng phân kỳ.

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx$

B. Điều kiện hội tụ của tích phân suy rộng.

Chúng ta giới hạn trường hợp $f(x)$ giữ nguyên dấu trên (a,b).

Giả sử $f(x)\ge 0$ trên $[a,b)$ và $f(b^-)=\infty$ Ta đặt $\phi(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$

1. *Để tich phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ, điều kiện cần và đủ là $\phi(\varepsilon)$ bị chặn ở lân cận bên phải điểm $\varepsilon = 0$, tức là $\phi(\varepsilon)\le L$, $\forall \varepsilon > 0$*

2. *Giả sử với x đủ gần b và $(x<b)$ hàm số $f(x)$ có dạng*

$$f(x) = \frac{g(x)}{(b-x)^k} \quad , \quad k>0 \quad , \quad g(x)\ge 0 \text{, khi đó:}$$

Nếu $k<1$ và $0\le g(x)\le c<\infty$ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.

Nếu $k\ge 1$ và $g(x)\ge c>0$ thì $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ (trong đó c là hằng số)

3. *Nếu $f(x)\ge 0$ và là VCL bậc k so với VCL $\dfrac{1}{b-x}$ tại b thì*

$\int_a^b f(x)dx$ hội tụ khi $k<1$ và phân kỳ khi $k\ge 1$.

BÀI TẬP CHƯƠNG IV

4.1. Biến đổi về các tích phân đơn giản để tính các tích phân sau:

a. $\int a^x\left(1+\frac{a^{-x}}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$, **b.** $\int \frac{x^4}{1+x^2}dx$, **c.** $\int a^{\alpha x}.b^{\beta x}dx$,

d. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}$, **e.** $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{x^{10}-1}}$, **f.** $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$,

g. $\int \frac{3x^2+2}{\sqrt{x^3+2x-1}}dx$, **h.** $\int \frac{dx}{x\cos^2(1+\ln x)}$, **i.** $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$,

j. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$, **k.** $\int \frac{dx}{(x+\sqrt{x^2-1})^2}$, **l.** $\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx$,

m. $\int \frac{dx}{4x^2-9}$, **n.** $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$, **o.** $\int \sqrt{3+2x-x^2}dx$,

p. $\int \sqrt{3x^2-3x+1}dx$, **q.** $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$, r. . $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$

4.2. Dùng phương pháp đổi biến để tính các tích phân sau:

a. $\int x\sqrt{2-5x}dx$, **b.** $\int x^5(1+2x^2)^{10}dx$,

c. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$, **d.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$,

e. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$, **f.** $\int \frac{dx}{x\ln x.\ln(\ln x)}$,

g. $\int \frac{xdx}{(x^2+2)\sqrt{3x^2+5}}$, **h.** $\int \frac{6^x}{9^x-4^x}dx$.

4.3. Dùng phương pháp tích phân từng phần:

a. $\int arctg\sqrt{x}dx$, **b.** $\int (\arcsin x)^2dx$, **c.** $\int xshxdx$,

d. $\int (\ln x)^2dx$, **e.** $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$, **f.** $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$,

g. $\int \cos(\ln x)dx$, **h.** $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$, **i.** $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$,

j. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2dx$, **k.** $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$, **l.** $\int arctg\sqrt{2x-1}dx$,

m. $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx}{\sqrt{1+x^2}}$, **n.** $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$, **o.** $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$,

p. $\int \frac{xe^{arctgx}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$, **q.** $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx$, **r.** $\int \frac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}}dx$.

4.4. Tính tích phân các phân thức hữu tỉ:

a. $\int \frac{x^4}{x^2+a^2}dx$, **b.** $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$,

c. $\int \frac{xdx}{(x^2+2x+2)^2}$, **d.** $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$,

e. $\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}dx$, **f.** $\int \frac{dx}{x^4+1}dx$,

g. $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}$, **h.** $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$.

4.5. Tích phân các hàm vô tỉ:

a. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$, **b.** $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$, $a>0$, **c.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$,

d. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$, **e.** $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx$, **f.** $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx$.

4.6. Tích phân các hàm lượng giác:

a. $\int \frac{dx}{\cos x.\sqrt[3]{\sin^2 x}}$, **b.** $\int \frac{\sqrt{tgx}}{\sin 2x}dx$, **c.** $\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\sqrt{\cos^3\frac{x}{2}}}$,

d. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{tgx}}$, **e.** $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}dx$, **f.** $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$,

g. $\int \frac{dx}{(\sin^2 x+2\cos^2 x)^2}$, **h.** $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$, **i.** $\int \frac{dx}{\sin x-\sin a}$.

4.7. Tích phân các hàm Hypevbolic:

a. $\int \coth^2 xdx$, **b.** $\int shx.sh2x.sh3xdx$,

c. $\int \sqrt{chx+1}dx$, **d.** $\int \frac{1+2shx}{ch^2x}dx$.

4.8. Tính các tích phân sau:

a. $\int x|x|dx$, **b.** $\int f(x)dx$ biết $f(x)=\begin{cases}1+x^3 & , |x|>1\\ |x|-1 & , |x|\le 1\end{cases}$,

c. $\int \max(1,|x|)dx$, **d.** $\int \{|1+x|-|1-x|\}dx$.

4.9. Tìm công thức truy toán các tích phân sau:

a. $\int \ln^n x dx = I_n$ tính I_2,

b. $\int \sin^n x dx = J_n$ tính J_5,

c. $\int \cos^n x dx = K_n$ tính K_7,

d. $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n} = L_n$.

4.10. Tìm hàm $f(x)$ nếu biết:

a. $f'(x^3+1) = \frac{1}{x^2}$,

b. $f'(\ln x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } 0 < x \le 1 \\ x & \text{khi } 1 < x < +\infty \end{cases}$,

c. $f'(\sin^2 x) = \cos^4 x$ và $f(0) = 0$.

4.11. Tính các tích phân sau bằng định nghĩa:

a. $\int_a^b x^m dx$, $(0 < a < b, m \ne -1)$, **b.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$,

c. $\int_0^1 a^x dx$, $(a > 0)$, **d.** $\int_a^b \frac{\ln x}{x}$, $(0 < a < b)$.

4.12. Sử dụng công thức Newton-Leibnitz tính các tích phân sau:

a. $\int_{-3}^{2} \left|\frac{x}{x+4}\right| dx$ **b.** $\int_0^2 |1-x| dx$ **c.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$ $(a, b \ne 0)$

d. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos x + 1}$, $(0 < \alpha < \pi)$ **e.** $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **f.** $\int_0^{\sqrt[n]{\frac{a}{2}}} \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2 - x^{2n}}}$, $(a > 0, n \in \mathbb{N})$

4.13. Tính các tích phân sau bằng phép đổi biến:

a. $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x dx}{1+2\cos^2 x}$, **b.** $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$, **c.** $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$,

d. $\int_0^3 \frac{dx}{(3+x^2)^{\frac{5}{2}}}$, **e.** $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$, **f.** $\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$,

g. $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}$, **h.** $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x + e^{-x}}} dx$, **i.** $\int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx$.

4.14. Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$, $(x > 0)$,

b. $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{tgx} \frac{tdt}{1+t^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{\cot gx} \frac{dt}{t(1+t^2)} = 1$,

c. $\displaystyle\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{4}$.

4.15. Tính các tích phân sau bằng phương pháp tích phân từng phần:

a. $\displaystyle\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos(\ln x)dx$, b. $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx$,

c. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$, d. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

4.16. Chứng minh rằng:

a. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\cos(n+2)xdx = 0,\ n \in \mathbb{N}^*$, b. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\sin(n+2)xdx = \frac{1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}^*$

4.17. Tính các tích phân sau bằng cách sử dụng hỗn hợp các phương pháp:

a. $\displaystyle\int_0^{\sqrt[5]{2}} \frac{x^9dx}{(1+x^5)^3}$, b. $\displaystyle\int_0^{\sqrt[4]{2}} \frac{x^{15}dx}{(1+x^8)^{\frac{2}{5}}}$, c. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}dx$,

d. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$, e. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x+3}$, f. $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$,

g. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$, h. $\displaystyle\int_1^{16} arctg\sqrt{\sqrt{x}-1}dx$, i. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos xdx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$.

4.18. Tìm các giới hạn sau:

a. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots\frac{n-1}{n^2}\right)$,

b. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$,

c. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$,

d. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}\left[1+\sqrt{\dfrac{n}{n+3}}+\sqrt{\dfrac{n}{n+6}}+\ldots+\sqrt{\dfrac{n}{n+3(n-1)}}\right]$,

e. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}\left(1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}\right)$,

CHƯƠNG V. LÝ THUYẾT CHUỖI

Quá trình tính toán gần đúng, cũng như việc đánh giá sai số chính xác hơn sẽ nhờ vào lí thuyết chuỗi. Đặc biệt các bài toán liên quan đến lĩnh vực truyền tin, một tín hiệu được phân tích thành các tín hiệu hình sin sẽ làm dễ đi quá trình xử lí là nhờ vào lí thuyết chuỗi Fourier. Trong chương này cần nắm vững các nội dung: điều kiện cần của chuỗi số hội tụ; các điều kiện dủ cho sự hội tụ của chuổi số dương, chuỗi số đan dấu, chuỗi số có dấu bất kì; qui tắc tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa; các tính chất cơ bản của chuỗi lũy thừa; khái niệm về chuỗi Fourier và cách khai triển thành chuỗi Fourier…

5.1. CHUỖI SỐ

5.1.1. Các khái niệm chung.

A. Định nghĩa chuỗi số và sự hội tụ của chuỗi số.

1. Cho dãy số thực $\{a_n\}$, $a_n \in \mathbb{R}$ với mọi n

Người ta gọi $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ là một chuỗi số thực

Chuỗi số trên thường được kí hiệu gọn là $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (5.1)

Số thực a_k với k xác định được gọi là số hạng thứ k của chuỗi , với k không xác định được gọi là số hạng tổng quát của chuỗi . Sau đây là một vài chuỗi số có dạng đặc biệt:

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + ...$ có số hạng tổng quát là $(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + ... + (-1)^{n-1} + ...$ có số hạng tổng quát là $(-1)^{n-1}$

$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^k} + ...$ được gọi là chuỗi cấp số nhân có công bội là $\frac{1}{2}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} + ...$ được gọi là chuỗi điều hoà .

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + ... + \frac{1}{n^{\alpha}} + ...$ được gọi là chuỗi Riemann với tham số α.

2. Cho chuỗi số (5.1). Người ta gọi tổng riêng thứ n của chuỗi (5.1) là

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad (5.2)$$

Nếu $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ (hữu hạn) thì ta nói rằng chuỗi số (5.1) hội tụ và có tổng là S và kí hiệu $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = S$. Nếu dãy tổng riêng $\{S_n\}$ không hội tụ, người ta nói rằng chuỗi (5.1) phân kì .

3. Nếu chuỗi (5.1) hội tụ về S thì $R_n = S - S_n$ được gọi là phần dư thứ n của chuỗi. Theo định nghĩa trên, ta suy ra: để chuỗi (5.1) hội tụ về S thì cần và đủ là phần dư R_n hội tụ về 0.

Ví dụ 5.1: Xét sự hội tụ của chuỗi cấp số nhân với công bội q

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k \ , \ a \neq 0$$

Giải:

Ta tính được tổng riêng thứ ncủa chuỗi : $S_n = \begin{cases} a.\dfrac{q^n - 1}{q-1} & \text{khi } q \neq 1 \\ na & \text{khi } q = 1 \end{cases}$

Bây giờ ta tìm $\lim_{n\to\infty} S_n$:

Nếu $|q| < 1$ thì $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$

Nếu $|q| \geq 1$ thì $\{S_n\}$ không hội tụ.

Vậy chuỗi cấp số nhân có công bội q hội tụ khi và chỉ khi $|q| < 1$.

Ví dụ 5.2: Xét sự hội tụ của chuỗi điều hoà $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$

Giải:

Tổng riêng thứ n của chuỗi: $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n}$

Tổng riêng thứ 2n của chuỗi: $S_{2n} = S_n + \dfrac{1}{n+1} + ... + \dfrac{1}{2n}$

Suy ra $S_{2n} - S_n = \dfrac{1}{n+1} + ... + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$. Theo tính chất của dãy số hội tụ chứng tỏ $\{S_n\}$ không hội tụ . Vậy chuỗi điều hoà phân kì .

Ví dụ 5.3: Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{n}{n+1}$

Giải:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \left[\ln k - \ln(k+1)\right]$$

$$= \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + ... + \ln n - \ln(n+1) = -\ln(n+1)$$

$\lim_{n\to\infty} S_n = -\lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = -\infty$ Vậy chuỗi phân kì.

Ví dụ 5.4: Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$

Giải:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \text{ hội tụ về 1.}$$

B. Điều kiện hội tụ của chuỗi số.

Từ nguyên lí Cauchy cho dãy số hội tụ suy ra:

Định lí 5.1: *Để chuỗi số (5.1) hội tụ cần và đủ là*

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0)\ \ (\forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N}^* \ \Rightarrow \left| a_n + a_{n+1} + ... + a_{n+p} \right| < \varepsilon)$$

Từ định nghĩa về sự hội tụ của chuỗi số suy ra:

Định lí 5.2: *Điều kiện cần của chuỗi số hội tụ là số hạng tổng quát a_n dần đến 0 khi $n \to \infty$:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad (5.3)$$

Chứng minh: Cho chuỗi (5.1) hội tụ về S tức là $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, một mặt ta có $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ hay $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$. Vì $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{n+1} - S_n) = S - S = 0$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$

Chú ý: Điều kiện (5.3) không phải là điều kiện đủ của chuỗi hội tụ , điều này nhận thấy được qua các ví dụ 5.2 và ví dụ 5.3.

C. Tính chất của chuỗi số hội tụ.

1. Tính chất hội tụ hay phân kì của chuỗi số vẫn giữ nguyên khi thay đổi hữu hạn số hạng đầu tiên của chuỗi .

Thật vậy ta gọi tổng riêng thứ n của chuỗi ban đầu là S_n còn tổng riêng thứ n của chuỗi khi thay đổi k số hạng đầu tiên của chuỗi là S_n'. Rõ ràng $S_n = S_n' + a$ trong đó a là hiệu số 2 tổng k số hạng đầu tiên cũ và mới . Suy ra S_n và S_n' cùng hội tụ hay cùng phân kì .

2. Nếu chuỗi (5.1) hội tụ về S thì chuỗi $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda a_i$ hội tụ về λS, với λ là số thực bất kì,

Thật vậy nếu gọi tổng riêng thứ n của (5.1) là S_n thì chuỗi $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda a_i$ có tổng riêng thứ n là

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i = \lambda S_n. \text{ Vậy } \sum_{i=1}^{\infty} \lambda a_i = \lambda S$$

3. Nếu các chuỗi $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ và $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ hội tụ tương ứng về A và B thì chuỗi tổng $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i)$ hội tụ về A+B.

Thật vậy, $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$. Qua giới hạn ta nhận được $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i + b_i) = A + B$

Chú ý: Các khái niệm trên được chuyển sang cho chuỗi số phức

$$\sum_{i=1}^{\infty} z_i = \sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{Re} z_i + i \operatorname{Im} z_i) \tag{5.4}$$

Như vậy, để chuỗi số phức (5.4) hội tụ cần và đủ là hai chuỗi số thực $\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_i$ và $\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_i$ cùng hội tụ và ta có $\sum_{i=1}^{\infty} z_i = \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_i + i \sum_{1}^{\infty} \operatorname{Im} z_i$

5.1.2. Chuỗi số dương.

Sau đây xét chuỗi số $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ với $a_i \in \mathbb{R}_+^*$, được gọi là chuỗi số dương. Theo tính chất 2 của chuỗi số, rõ ràng các kết quả dưới đây sẽ được chuyển sang cho chuỗi số $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ với $a_i \in \mathbb{R}_-^*$.

A. Điều kiện hội tụ của chuỗi số dương .

Định lí 5.3: *Chuỗi số dương hội tụ khi và chỉ khi dãy tổng riêng của nó bị chặn trên*

$$S_n \le M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Chứng minh:

Theo định nghĩa: chuỗi số hội tụ về S khi và chỉ khi dãy $\{S_n\}$ hội tụ về S

Ta có $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} > S_n$ vì $a_{n+1} > 0$. Suy ra $\{S_n\}$ đơn điệu tăng. Để $\{S_n\}$ hội tụ cần và đủ là $\exists M$ sao cho $S_n \le M$, $\forall n$ (Theo tính chất hội tụ của dãy đơn điệu).

B. Các tiêu chuẩn về sự hội tụ.

1. Các định lí so sánh.

Cho 2 chuỗi số dương $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ (a) và $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ (b)

Định lí 5.4: *Giả sử* $a_n \le b_n, \forall n \ge n_0,\ n_0 \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó: Nếu chuỗi (b) hội tụ thì chuỗi (a) hội tụ .

Nếu chuỗi (a) phân kì thì chuỗi (b) phân kì .

Chứng minh: Xét hai chuỗi mới được thành lập bằng cách thay đổi n_0 số hạng đầu tiên của mỗi chuỗi (a) , (b) để xảy ra bất đẳng thức $a_n \le b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Theo tính chất 1 của chuỗi số ta chỉ việc chứng minh định lí với điều kiện $a_n \le b_n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Các tổng riêng sẽ thoả mãn: $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{n} b_k = B_n, \ \forall n$

* Nếu chuỗi (b) hội tụ thì tồn tại số M sao cho $B_n \le M, \ \forall n \Rightarrow A_n \le M, \ \forall n$ Vậy chuỗi (a) hội tụ .

* Nếu chuỗi (a) phân kì thì rõ ràng chuỗi (b) phân kì, nếu không sẽ mâu thuẫn với điều

vừa chứng minh ở phần trên .

Định lí 5.5: *Giả sử* $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$*, khi đó:*

Nếu $0<k<+\infty$ *hai chuỗi (a) và (b) cùng hội tụ hoặc cùng phân kì*

Nếu $k=0$ *và chuỗi (b) hội tụ thì chuỗi (a) hội tụ.*

Nếu $k=\infty$ *và chuỗi (b) phân kì thì chuỗi (a) phân kì .*

Chứng minh:

* Trường hợp $0<k<+\infty$: Ta lấy $\varepsilon>0$ đủ bé sao cho $k-\varepsilon>0$. Theo định nghĩa giới hạn, tồn tại $n_0\in\mathbb{N}^*$ sao cho

$$\forall n>n_0 \text{ có } \left|\frac{a_n}{b_n}-k\right|<\varepsilon \text{ hay } b_n(k-\varepsilon)<a_n<(\varepsilon+k)b_n$$

Theo tính chất 2 về chuỗi số hội tụ và định lí 5.4 ta suy ra hai chuỗi (a) và (b) cùng hội tụ hoặc cùng phân kì .

* Trường hợp k = 0: Ta lấy $\varepsilon>0$, sẽ tồn tại $u_0\in\mathbb{N}^*$ để $\forall n>n_0$ thì $a_n<\varepsilon b_n$. Từ đó ta thấy:

Khi chuỗi (b) hội tụ thì chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon b_k$ hội tụ. Theo định lí 5.4 chuỗi (a) sẽ hội tụ .

Khi chuỗi (a) phân kì thì chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon b_k$ phân kì. Theo tính chất 1 suy ra chuỗi (b) phân kì .

* Trường hợp $k=\infty$: Bây giờ ta xét tỉ số $\frac{b_n}{a_n}$ và lí luận phản chứng, dễ dàng đi đến kết luận. Bạn đọc tự làm điếu đó.

2. Các tiêu chuẩn hội tụ .

a. Tiêu chuẩn D'Alembert.

Gọi $\{D_n\}=\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ *là dãy D'Alembert của chuỗi* $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ (5.5)

Nếu tồn tại số $q\in\mathbb{R}_+^*$ *sao cho* $D_n\le q<1$ *thì chuỗi hội tụ*

Nếu $D_n\ge 1$ *thì chuỗi phân kì.*

Chứng minh:

* Nếu $D_n\le q<1$ thì $a_{n+1}\le a_nq\le a_{n-1}q^2\le\ldots<a_1q^n$

Chuỗi cấp số nhân $\sum_{n=1}^{\infty}a_1q^n$ hội tụ vì $0<q<1$. Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

* Nếu $D_n\ge 1$ thì $a_{n+1}\ge a_n\ge a_{n-1}\ge\ldots\ge a_1>0$. Vậy $\{a_n\}$ không hội tụ về 0. Chứng tỏ chuỗi phân kì

Tiêu chuẩn D'Alembert ở dạng ''bất đẳng thức'' đã nêu ít khi được áp dụng do việc tìm số q rất khó khăn. Thông thường dùng tiêu chuẩn D'Alembert ở dạng ''giới hạn'' cho bởi định lí sau.

Định lí 5.6: *Giả sử* $\lim_{n\to\infty} D_n = D$, *khi đó:*

Nếu $D > 1$ *thì chuỗi phân kì,* $D < 1$ *thì chuỗi hội tụ,* $D = 1$ *ta chưa kết luận.*

Chứng minh:

* Nếu $D > 1$, lấy $\varepsilon > 0$ sao cho $D - \varepsilon > 1$, thì

$$(\exists n_0)\ \ (\forall n > n_0 \Rightarrow 1 < D - \varepsilon < D_n < D + \varepsilon)$$

Theo trên chứng tỏ chuỗi phân kì .

* Nếu $D < 1$, ta có thể tìm được số $\varepsilon > 0$ sao cho $q = D + \varepsilon < 1$. Khi đó $\exists n_0$: $\forall n > n_0$ để $D_n < q < 1$. Theo trên chuỗi hội tụ.

* Nếu $D = 1$. Các ví dụ 5.2 và ví dụ 5.4 đã chứng minh kết luận của định lí.

b. Tiêu chuẩn Cauchy.

Gọi $\{C_n\} = \left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}$ *là dãy Cauchy của chuỗi* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ (5.6)

Nếu tồn tại số $q \in R_+^*$ *sao cho* $C_n \le q < 1$ *thì chuỗi số hội tụ*

Nếu $C_n \ge 1$ *thì chuỗi số phân kì .*

Chứng minh:

* Nếu $C_n = \sqrt[n]{a_n} \le q < 1$ thì $a_n \le q^n$. Chuỗi cấp số nhân $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ hội tụ vì $0 < q < 1$ nên chuỗi số dương đã cho hội tụ.

* Nếu $C_n \ge 1$ thì $a_n \ge 1$ chứng tỏ $\{a_n\}$ không thể hội tụ về 0, do đó chuỗi phân kì.

Định lí 5.7: *Giả sử* $\lim_{n\to\infty} C_n = C$, *khi đó:*

Nếu $C > 1$ *thì chuỗi phân kì,* $C < 1$ *thì chuỗi hội tụ,* $C = 1$ *ta chưa kết luận.*

Chứng minh:

* Nếu $C > 1$, Lấy $\varepsilon > 0$ sao cho $C - \varepsilon > 1$ khi đó $\exists n_0$ để $\forall n > n_0 \Rightarrow C - \varepsilon < C_n$ Theo trên suy ra chuỗi phân kì

* Nếu $C < 1$, lấy $\varepsilon > 0$ sao cho $q = C + \varepsilon < 1$ khi đó $\exists n_0$ để $\forall n > n_0$ có $C_n < q < 1$.

Vậy chuỗi hội tụ

* Nếu $C = 1$ các ví dụ 2 và ví dụ 4 đã chứng minh điều kết luận cuối cùng của định lí.

Chú ý: Người ta đã chứng minh rằng, nếu tồn tại giới hạn $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$ thì cũng tồn tại giới hạn $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = C$ và $C = D$

c. Tiêu chuẩn tích phân Cauchy-M'claurin.

Giả sử $f(x)$ *dương và liên tục trên* $[1,+\infty)$ *thoả mãn các điều kiện.*

$f(n)=a_n,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0,\ f(x)$ *đơn điệu giảm*

Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ hay phân kì cùng với sự hội tụ hay phân kì của tích phân*

$\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$

Chứng minh:

Vì $f(x)$ đơn điệu giảm nên $\forall x\in[k-1,k],\ k\in N^*$ có $f(k)\le f(x)\le f(k-1)$,

từ đó suy ra $a_k=\int\limits_{k-1}^{k} f(k)dx\le \int\limits_{k-1}^{k} f(x)dx\le \int\limits_{k-1}^{k} f(k-1)dx=a_{k-1}$

Sau khi lấy tổng ứng với k từ 2 đến n ta sẽ có

$$S_n-a_1\le\int\limits_{1}^{n} f(x)dx\le S_n-a_n, \text{ trong đó } S_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$$

* Nếu $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì $\int\limits_{1}^{n} f(x)dx$ bị chặn trên $\forall n$, nghĩa là

$\exists M$ có: $\int\limits_{1}^{n} f(x)dx\le M,\ \ \forall n$ .Suy ra $S_n\le M+a_1,\ \forall n$. Chứng tỏ chuỗi hội tụ .

* Nếu $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ phân kì thì $\int\limits_{1}^{n} f(x)dx$ không bị chặn trên mà $S_n\ge a_n+\int\limits_{1}^{n} f(x)dx$

Vậy S_n không bị chặn trên do đó chuỗi phân kì .

Sau đây chúng ta xét một số ví dụ về sự hội tụ hay phân kì của chuỗi số nhờ vào các địnhlí so sánh và các tiêu chuẩn đã đưa ra ở trên

Ví dụ 5.5: Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^p}\quad (p>0)$

Giải:

Vì $\dfrac{n}{(\ln n)^p}\to\infty$ khi $n\to\infty$ do đó $\exists n_0\in\mathbb{N}$ để $\forall n>n_0$ có $\dfrac{1}{(\ln n)^p}>\dfrac{1}{n}$, mà chuỗi điều hoà phân kì. Vậy theo định lí so sánh 1 suy ra chuỗi đã cho phân kì

Ví dụ 5.6: Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

Giải:

Ta có $$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}=\frac{1}{e^{\ln n.\ln(\ln n)}}=\frac{1}{n^{\ln(\ln n)}}$$

Vì $\ln(\ln n) \to \infty$ khi $n \to \infty$ nên với n đủ lớn thì $\ln(\ln n) > 2$. Suy ra $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}} < \dfrac{1}{n^2}$ mà chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ hội tụ (Xem ví dụ 5.12 dưới đây). Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

Ví dụ 5.7: Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

Giải:

Do $\sqrt[n]{n} \to 1$ khi $n \to \infty$. Vậy $\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}} \sim \dfrac{1}{n}$ khi $n \to \infty$, chứng tỏ chuỗi đã cho phân kì

Ví dụ 5.8: Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$

Giải:

$\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}} = \dfrac{1}{e^{(\ln(\ln n))^2}}$ Vì $\ln n > (\ln(\ln n))^2$

nên $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}} > \dfrac{1}{e^{\ln n}} = \dfrac{1}{n}$. Vậy chuỗi đã cho phân kì.

Ví dụ 5.9: Xét sự hội tụ của chuỗi số phụ thuộc tham số x: $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$, $(x > 0)$

Giải:

Ta có $D_n = \dfrac{x}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} D_n = 0$. Vậy chuỗi hội tụ với $\forall x > 0$.

Ví dụ 5.10: Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\dfrac{x}{n}\right)^n$, $(x > 0)$

Giải:

Ta có $D_n = \dfrac{x}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} D_n = \dfrac{x}{e}$

Với $x = e$ có $D_n = \dfrac{x}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} > 1$ bởi vì $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e$

Vậy chuỗi hội tụ với $x < e$, chuỗi phân kì với $x \ge e$

Ví dụ 5.11: Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{x}{a_n}\right)^n$, $(a_n > 0,\ \lim_{n\to\infty} a_n = a,\ x > 0)$

Giải:

Ta có $C_n = \dfrac{x}{a_n}$. Do vậy:

Nếu $a = 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \infty$

Nếu $a = \infty$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = 0$

Nếu $0 < a < +\infty$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \dfrac{x}{a}$

Vậy với $a = 0$ thì chuỗi phân kì, với $a = \infty$ thì chuỗi hội tụ .

Nếu $0 < a < +\infty$ chuỗi hội tụ khi $0 < x < a$, phân kì khi $x > a$, chưa kết luận khi $x = a$

Thật vậy, xét các chuỗi số sau với $x = a = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^n} \text{ phân kì , } \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n^2}\right)^n} \text{ hội tụ } \quad \text{(Xem ví dụ 5.12 dưới đây)}$$

Ví dụ 5.12: Xét sự hội tụ của chuỗi sau theo tham số α (chuỗi Riemann) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$

Giải:

Ta đặt $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$. Hàm số này thoả mãn các điều kiện của tiêu chuẩn tích phân Cauchy-M'claurin .

Ta biết $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$ hội tụ khi $\alpha > 1$, phân kì khi $\alpha \le 1$.(Xem ví dụ 4.36.d, mục 4.5.)

Vậy chuỗi Riemann hội tụ với $\alpha > 1$, phân kì với $\alpha \le 1$.

Ví dụ 5.13: Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^{1+\alpha} n}$, $(\alpha > 0)$

Giải:

Ta đặt $f(x) = \dfrac{1}{x \ln^{1+\alpha} x}$, nguyên hàm của $f(x)$ trên $[2, +\infty)$ là $F(x) = -\dfrac{1}{\alpha \ln^\alpha x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$. Vậy $\int\limits_2^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ , do đó chuỗi đã cho hội tụ .

Ví dụ 514: Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n . \ln(\ln n)}$

Giải: $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x . \ln(\ln x)}$ có nguyên hàm là $F(x) = \ln\left(\ln(\ln x)\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$, tích phân $\int\limits_3^{+\infty} f(x)dx$ phân kì , chứng tỏ chuỗi đã cho phân kì.

5.1.3. Chuỗi đan dấu.

A. Định nghĩa chuỗi đan dấu.

Chuỗi số có dạng $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ hoặc $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k$ trong đó $a_k > 0,\ \forall k$ (5.7)

được gọi là chuỗi đan dấu, chẳng hạn $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{1}{n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ là các chuỗi đan dấu

Sự hội tụ hay phân kì của các dạng thứ nhất, hoặc thứ hai, có tính chất như nhau. Dưới đây chúng ta xét dạng thứ nhất của (5.7).

B. Điều kiện hội tụ của chuỗi đan dấu.

Định lí 5.8: (Định lí Leibnitz.)

Cho chuỗi (5.7), nếu dãy $\{a_n\}$ thoả mãn các điều kiện :

1. *Dãy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm:* $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Khì đó chuỗi (5.7) hội tụ về tổng S và $S < a_1$

Chứng minh: Xét dãy tổng riêng chẵn của chuỗi $S_{2m} = \sum_{n=1}^{2m}(-1)^{n+1}a_n$. Ta có thể biểu diễn tổng này như sau: $S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2m-1} - a_{2m})$

Do $a_n > a_{n+1},\ \forall n \in N$, nên dãy $\{S_{2m}\}$ là dương và tăng ngặt.

Mặt khác $S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - ... - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}$

Suy ra $S_{2m} < a_1$. Như vậy $\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$ (Theo định lí 1.2 mục 1.3.3. Ch.I)

Dãy tổng riêng lẻ có dạng : $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$

Vì $\lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = 0$ nên $\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$

Vậy $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ (Xem hệ quả mục 1.3.4). Chứng tỏ chuỗi hội tụ về S.

Mặt khác $S_{2m+1} = S_{2m-1} - (a_{2m} - a_{2m+1})$ suy ra dãy $\{S_{2m+1}\}$ dương và giảm ngặt . Vì thế ta nhận được bất đẳng thức

$$S_{2m} < S < S_{2m+1} < S_{2m-1} < ... < a_3 < a_1$$

Ví dụ 5.15: Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{\alpha}}\ ,\ (\alpha > 0)$$

Giải:

Ta thấy chuỗi là đan dấu và thoả mãn các điều kiện của định lí Leibnitz: $\left\{\frac{1}{n^{\alpha}}\right\}$ đơn điệu giảm và $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} = 0$. Vậy chuỗi hội tụ.

Ví dụ 5.16: Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+(-1)^n.\sqrt{n}}{n}$

Giải:

Chuỗi là đan dấu, tuy nhiên phân kì vì đó là tổng của chuỗi điều hoà $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ (phân kì) và chuỗi đan dấu $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}}$ (hội tụ, đã xét ở ví dụ 5.12 với $\alpha = \frac{1}{2}$)

5.1.4. Chuỗi có số hạng mang dấu bất kì.

A. Sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ.

Cho chuỗi số bất kì $\sum_{i=1}^{\infty} a_i,\ a_i \in \mathbb{R}$ (a)

Xét chuỗi số dương tương ứng dạng $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ (b)

1. Nếu chuỗi (a) hội tụ và chuỗi (b) phân kì thì ta nói rằng chuỗi (a) bán hội tụ.

2. Nếu chuỗi (a) và (b) cùng hội tụ thì ta nói rằng chuỗi (a) hội tụ tuyệt đối .

Định lí 5.9: *Nếu chuỗi (b) hội tụ thì chuỗi (a) cũng hội tụ .*

Chứng minh: Giả sử chuỗi (b) hội tụ về S'

Gọi S_n là tổng riêng thứ n của chuỗi (a) và $S_n^{/}$ là tổng riêng thứ n của chuỗi (b), tức là:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = P_n - Q_n$$
$$S_n^{/} = |a_1| + |a_2| + ... + |a_n| = P_n + Q_n$$

trong đó P_n là tổng các số dương trong n số hạng đầu tiên, còn $-Q_n$ là tổng các số âm trong n số hạng đầu tiên . Vì chuỗi (b) hội tụ về S' nên dãy $\{S_n^{/}\}$ tăng ngặt và hội tụ về S' :

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{/} = S^{/} \quad \text{và} \quad S_n^{/} < S^{/}$$

Rõ ràng các dãy $\{\mathrm{P_n}\}$,$\{Q_n\}$ tăng ngặt và thoả mãn:

$$P_n \le S_n' < S'$$
$$Q_n \le S_n' < S' \ ,\ \forall n$$

Ta suy ra các dãy $\{\mathrm{P_n}\}$, $\{Q_n\}$ hội tụ :

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P \ ,\ \lim_{n\to\infty} Q_n = Q$$

Vậy $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(P_n - Q_n) = P - Q = S$, nghĩa là chuỗi (a) hội tụ về S.

Chú ý: Trong nhiều bài toán xét sự hội tụ của chuỗi số (a), nhờ vào định lí trên người ta đi xét sự hội tụ của chuỗi (b). Đó là chuỗi số dương nên có thể sử dụng các tiêu chuẩn trong mục B của 5.1.2. Trong trường hợp sử dụng tiêu chuẩn D'Alembert hoặc Cauchy mà chuỗi (b) phân kì thì kết luận chuỗi (a) cũng phân kì vì thấy ngay được trong trường hợp này số hạng tổng quát không dần tới không khi $n \to \infty$

B. Một số tính chất của chuỗi bán hội tụ và hội tụ tuyệt đối.

1. Nếu chuỗi đã cho là bán hội tụ thì có thể lấy số S^* tuỳ ý (hữu hạn hoặc vô hạn) để sao cho khi thay đổi vị trí các số hạng được chuỗi mới hội tụ về S^*. Nói cách khác, trong trường hợp này tính chất giao hoán , tính chất kết hợp không còn đúng đối với tổng vô hạn.

Chẳng hạn: Ta xét chuỗi số bán hội tụ sau

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+...=\ln 2$, (Chuỗi hội tụ về $S=\ln 2$, Công thức (5.34))

Tổng riêng thứ 2n của nó là: $S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$

Xét chuỗi mới nhận được bằng cách thay đổi vị trí các số hạng

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+...$$

Ta xét các tổng riêng của chuỗi này.

$$S_{3n}^*=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}S_{2n}$$

$$S_{3n-1}^*=S_{3n}^*+\frac{1}{4n}$$

$$S_{3n-2}^*=S_{3n-1}^*+\frac{1}{4n-2}$$

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n}^*=\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n-1}^*=\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n-2}^*=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\frac{1}{2}\ln 2$

Chứng tỏ chuỗi mới hội tụ về $S^*=\frac{1}{2}\ln 2$.

2. Nếu chuỗi đã cho hội tụ về S và là hội tụ tuyệt đối thì chuỗi mới nhận được bằng cách thay đổi vị trí các số hạng hoặc bằng cách nhóm một số hữu hạn các số hạng lại cũng hội tụ về S và cũng là hội tụ tuyệt đối. Nói cách khác trong trường hợp này tính chất giao hoán và kết hợp được giữ nguyên đối với chuỗi vô hạn

3. Cho hai chuỗi số $\sum_{i=1}^{\infty}a_i,\ \sum_{i=1}^{\infty}b_i$

Ta lập bảng số

$$\begin{array}{llllll} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & ... & a_kb_1 & ... \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & ... & a_kb_2 & ... \\ .... & & & & & \\ a_1b_j & a_2b_j & a_3b_j & ... & a_kb_j & ... \end{array}$$

hoặc lập dãy số (u_n) với $u_1=a_1b_1$, $u_2=a_1b_2+a_2b_1$, ...

(v_n) với $v_1=a_1b_1$, $v_2=a_1b_2+a_2b_2+a_2b_1$, ...

Các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}v_n$ gọi là chuỗi tích của hai chuỗi đã cho.

Nếu hai chuỗi đã cho hội tụ tương ứng về S_1 , S_2 và là hội tụ tuyệt đối thì các chuỗi tích của chúng hội tụ về $S_1 . S_2$ và là hội tụ tuyệt đối.

5.2. CHUỖI HÀM

5.2.1. Các khái niệm chung về chuỗi hàm.

A. Định nghĩa chuỗi hàm.

Cho dãy hàm thực $\{f_n(x)\},\ x \in (a,b),\ n = 1,2,...$

Người ta gọi $f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) + ...$ (5.8)

là một chuỗi hàm xác định trên (a,b) và được kí hiệu là $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

B. Miền hội tụ của chuỗi hàm.

1. Điểm $x = x_0$ được gọi là điểm hội tụ của chuỗi hàm khi và chỉ khi chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ hội tụ.

2. Tập X các điểm hội tụ của chuỗi hàm được gọi là miền hội tụ của chuỗi hàm.

3. Hàm số $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x),\ x \in X$ gọi là tổng riêng thứ n chuỗi hàm . Chuỗi hàm được gọi là hội tụ về $S(x),\ x \in X$ khi và chỉ khi $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$

Trong trường hợp này kí hiệu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x),\ \ x \in X$

4. Nếu chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ hội tụ trên tập X thì ta nói rằng chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tuyệt đối trên tập X .

Sau đây ta sẽ tìm miền hội tụ của một số chuỗi hàm.

Ví dụ 5.17: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

Giải:

Tập xác định : $\mathbb{R}$

Đó là chuỗi Riemann với tham số là x . Vậy miền hội tụ là $X = (1,+\infty) \subset \mathbb{R}$

Ví dụ 5.18: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Giải:

Tập xác định : $\mathbb{R}$. Lấy $x \in \mathbb{R}$ và xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$. Ta áp dụng tiêu chuẩn Cauchy: $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}} = 0$. Vậy chuỗi hàm hội tụ tuyệt đối trên $\mathbb{R}$. Trường hợp này $X = \mathbb{R}$.

Ví dụ 5.19: Tìm miền hội tụ X của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + x^2}$

Giải:

Tập xác định: $\mathbb{R}$

Lấy $x \in \mathbb{R}$ ta có $\left| \frac{\cos nx}{n^2 + x^2} \right| \le \frac{1}{n^2}$

Vậy chuỗi hàm hội tụ tuyệt đối trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 5.20: Tìm miền hội tụ X của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2} \right)$

Giải:

Tập xác định : $\mathbb{R}$

Tổng riêng thứ n của chuỗi hàm: $S_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$

Từ đó suy ra $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0,\ \forall x$. Vậy miền hội tụ là $X = \mathbb{R}$.

5.2.2. Sự hội tụ đều của chuỗi hàm.

A. Định nghĩa:

1. Dãy hàm $\{f_n(x)\}$ được gọi là hội tụ đều về hàm số $f(x)$ trên X nếu:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0(\varepsilon))\ (\forall n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in X)$$

2. Chuỗi hàm (5.8) được gọi là hội tụ đều về hàm $S(x)$ trên X khi và chỉ khi dãy tổng riêng của nó hội tụ đều về $S(x)$ trên X, tức là

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0(\varepsilon))\ (\forall n > n_0 \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in X) \qquad (5.9)$$

Vậy nếu chuỗi hội tụ đều về $S(x)$ thì phần dư $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ sẽ hội tụ đều về 0, tức là:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0(\varepsilon))\ (\forall n > n_0 \Rightarrow |R_n(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in X) \qquad (5.10)$$

Trong trường hợp chuỗi hàm hội tụ đều về hàm $S(x)$ trên (a,b) người ta thường kí hiệu là

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \Rightarrow S(x), \quad x \in (a,b)$$

Ví dụ 5.21: Chứng minh chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x}{1+n^2x^2} - \frac{x}{1+(n-1)^2x^2} \right]$

hội tụ đều trên $[0,1]$

Giải:

Ta tính tổng riêng thứ n của chuỗi hàm: $S_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} - x,\ \lim_{n\to\infty} S_n(x) = -x,\ x \in [0,1]$

Ta đánh giá phần dư: $\left|R_n(x)\right| = \dfrac{x}{1+n^2x^2} = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}.\dfrac{1}{2n} \le \dfrac{1}{2n} < \varepsilon$

Suy ra $\exists n_0 = \left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$ để $\forall n > n_0$ sẽ có $\left|R_n(x)\right| < \varepsilon,\ \forall x \in [0,1] \Rightarrow R_n(x) \rightrightarrows 0,\ \forall x \in [0,1]$

Vậy chuỗi hàm hội tụ đều trên $[0,1]$

Ví dụ 5.22: Chứng tỏ rằng chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{nx}{1+n^2x^2} - \dfrac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right]$

không hội tụ đều trên $[0,1]$

Giải:

Từ ví dụ 5.20, ta đánh giá phần dư thứ n của chuỗi : $\left|R_n(x)\right| = \dfrac{nx}{1+n^2x^2},\ x \in [0,1]$

Như vậy: $(\exists \varepsilon = \dfrac{1}{2})\ (\exists x_n = \dfrac{1}{n} \in [0,1] \Rightarrow \left|R_n(x_n)\right| = \dfrac{1}{2} = \varepsilon)$

Chứng tỏ chuỗi hàm đã cho không hội tụ đều trên $[0,1]$.

Ví dụ 5.23: Chứng minh rằng các chuỗi hàm sau đây hội tụ đều trên tập $\mathbb{R}$.

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$

Giải:

Với x cố định trên $\mathbb{R}$ ta nhận được các chuỗi số đan dấu. Theo định lí Leibnitz các chuỗi này hội tụ .

a. $\forall x \in \mathbb{R}$, theo định lí Leibnitz thì phần dư của chuỗi là $R_n(x)$ thoả mãn

$\left|R_n(x)\right| \le \dfrac{1}{x^2+n+1} < \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Vậy $R_n(x) \rightrightarrows 0$, chứng tỏ chuỗi hàm hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

b. $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \left|R_n(x)\right| < \dfrac{x^2}{1+nx^2+\ldots} < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$

Vậy $R_n(x) \rightrightarrows 0$, chứng tỏ chuỗi hàm hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

B. Các tiêu chuẩn về sự hội tụ đều của chuỗi hàm.

1. Nguyên lí Cauchy.

Định lí 5.10: *Giả sử $\{S_n(x)\}$ là dãy tổng riêng của chuỗi hàm. Để chuỗi hàm hội tụ đều trên tập X điều kiện cần và đủ là:*

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})\ (\forall n > n_0,\ \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon,\ \forall x \in X) \qquad (5.11)$$

Chứng minh:

Điều kiện cần: Ta có chuỗi hội tụ đều trên X về $S(x)$, nghĩa là:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})\ (\forall n > n_0 \Rightarrow \left|S_n(x) - S(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall x \in X)$$

Lấy $n > n_0,\ \forall p \in \mathbb{N}$ ta sẽ có

$$\left|S_{n+p}(x)-S_n(x)\right| = \left|S_{n+p}(x)-S(x)+S(x)-S_n(x)\right|$$
$$\leq \left|S_{n+p}(x)-S(x)\right| + \left|S_n(x)-S(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Điều kiện đủ: Trước khi chứng minh điều kiện đủ chúng ta hãy nhắc lại nguyên lý hội tụ sau đây của dãy số (Nguyên lí Cauchy. Xem mục 1.3.5, Ch.I)

Để dãy số $\{a_n\}$ hội tụ điều kiện cần và đủ là

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0)\ (\forall n > n_0, \forall p \Rightarrow \left|a_{n+p}-a_n\right| < \varepsilon)$$

Trong trường hợp này người ta gọi $\{a_n\}$ là dãy Cauchy.

Nếu điều kiện (5.11) thoả mãn, rõ ràng với $x \in X$ ta nhận được $\{S_n(x)\}$ dãy Cauchy. Vậy tồn tại hàm $S(x)$ xác định trên X để $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$.

Từ (5.11) suy ra $\lim\limits_{p\to\infty}\left|S_{n+p}(x)-S_n(x)\right| < \varepsilon,\ \forall x \in X$

Hay là $\left|S(x)-S_n(x)\right| < \varepsilon, \quad \forall x \in X$ .Vậy $S_n(x) \rightrightarrows S(x),\ \forall x \in X$

2. Tiêu chuẩn Weierstrass.

Định lí 5.11: *Giả sử các số hạng của chuỗi hàm thoả mãn bất đẳng thức*

$$\left|f_n(x)\right| \leq a_n, \quad \forall x \in X \qquad (5.12)$$

đồng thời chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ. Khi đó chuỗi hàm* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *hội tụ tuyệt đối và đều trên tập* X

Chứng minh: Trước hết ta chứng minh sự hội tụ tuyệt đối trên X .

Lấy x_0 tuỳ ý trên X ta có $\left|f_n(x_0)\right| \leq a_n$. Theo định lí so sánh, Mục 5.1.2. B thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f_n(x_0)\right|$ hội tụ tức là $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ hội tụ tuyệt đối. Vì x_0 tuỳ ý trên X chứng tỏ chuỗi hội tụ tuyệt đối trên X .

Bây giờ ta xét sự hội tụ đều trên X của chuỗi đó:

Vì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, nghĩa là dãy tổng riêng $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ hội tụ, theo nguyên lí hội tụ sẽ có :

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0)\ \ (\forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon)$$

Suy ra $\quad \left|S_{n+p}(x)-S_n(x)\right| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\left|f_k(x)\right| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon, \quad \forall x \in X$

Theo nguyên lí Cauchy, vậy chuỗi hàm hội tụ đều trên X .

Ví dụ 5.24: Xét sự hội tụ của các chuỗi hàm sau đây:

a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2+x^2}$, b. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^2+x^2}$

Giải:

Ta có các đánh giá sau: a. $\left|\dfrac{\cos nx}{n^2+x^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}, \forall x,$ b. $\left|\dfrac{\sin nx}{n^2+x^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}, \forall x \in \mathbb{R}$

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ hội tụ. Vậy các chuỗi hàm đã cho hội tụ đều trên $\mathbb{R}$

Từ ví dụ trên ta có thể kết luận:

Nếu các chuỗi số $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ hội tụ tuyệt đối thì các chuỗi hàm

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ *hội tụ đều trên* $\mathbb{R}$.

C. Các tính chất của chuỗi hàm hội tụ đều.

Định lí 5.12: *Cho chuỗi hàm (5.9), các hàm số $f_i(x)$, $(i=1,2,...)$ liên tục trên tập X và chuỗi hội tụ đều về $S(x)$ trên X thì $S(x)$ liên tục trên X*

Chứng minh: Ta lấy $x \in X$ và sẽ chứng minh sự liên tục của $S(x)$ tại điểm x đó.

Lấy $h \in \mathbb{R}$ sao cho $x+h \in X$ và gọi $S_n(x)$ là tổng riêng thứ n của chuỗi.

Xét $|S(x+h)-S(x)| = |S(x+h)-S_n(x+h)+S_n(x+h)-S_n(x)+S_n(x)-S(x)|$

$$\le |S(x+h)-S_n(x+h)| + |S_n(x+h)-S_n(x)| + |S_n(x)-S(x)|$$

Do tính hội tụ đều của dãy $\{S_n(x)\}$ trên X nên

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists n_0(\varepsilon)) \; (\forall n > n_0 \Rightarrow |S(x+h)-S_n(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3}, \; |S_n(x)-S(x)| < \frac{\varepsilon}{3})$$

Ngoài ra $S_n(x)$, $(n > n_0)$ là tổng n hàm số liên tục tại x trên X. Vậy với ε đã chọn thì tồn tại $\delta > 0$ để $|h| < \delta$ sẽ có.

$$|S_n(x+h)-S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Như vậy $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (|h| < \delta \Rightarrow |S(x+h)-S(x)| < \varepsilon)$

Chứng tỏ $S(x)$ liên tục tại $x \in X$.

Tính chất này thường dùng để chứng minh sự hội tụ không đều của chuỗi hàm trên tập X nào đó.

Ví dụ 5.25: Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n$ trên khoảng $[0,2)$

Giải:

Ta tính tổng riêng $S_n(x) = 1-(1-x)^{n+1}, \quad x \in [0,2)$

Từ đó suy ra $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \in [0,2)\setminus\{0\} \end{cases}$

Các hàm $x(1-x)^n$ liên tục trên $[0,2)$ tuy nhiên $S(x)$ gián đoạn tại $x=0$. Vậy chuỗi hàm hội tụ không đều trên $[0,2)$.

Định lí 5.13: *Cho chuỗi hàm (5.9) hội tụ đều về $S(x)$ trên $[a,b]$ và các hàm $f_i(x),\ (i=1,2,...)$ liên tục trên $[a,b]$. Khi đó*

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{i=1}^{\infty}\int_a^b f_i(x)dx \qquad (5.13)$$

Hệ thức (5.13) chứng tỏ với một số điều kiện được thỏa mãn thì có thể lấy tích phân từng từ của chuỗi hàm.

Chứng minh: Ta sẽ chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\int_a^b f_i(x)dx = \int_a^b S(x)dx$

Tức là $(\forall\varepsilon>0)\ (\exists n_0)\ (\forall n>n_0 \Rightarrow \left|\int_a^b S(x)dx - \sum_{i=1}^{n}\int_a^b f_i(x)dx\right| < \varepsilon)$

Trước tiên ta nhận thấy các tích phân tồn tại do tính liên tục của các hàm dưới dấu tích phân.

Do chuỗi hàm hội tụ đều về $S(x)$ nên

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists n_0)\ \left(\forall n>n_0 \Rightarrow |S(x)-S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\right)$$

mà $$\left|\int_a^b S(x)dx - \sum_{i=1}^{n}\int_a^b f_i(x)dx\right| = \left|\int_a^b S(x)dx - \int_a^b S_n(x)dx\right|$$

$$= \left|\int_a^b [S(x)-S_n(x)]dx\right| \le \int_a^b |S(x)-S_n(x)|dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \varepsilon$$

Chú ý: Sự hội tụ đều chỉ là điều kiện đủ để lấy tích phân từng từ của chuỗi, sau đây chúng ta sẽ ra một số ví dụ minh hoạ điều đó .

Ví dụ 5.26: Chứng minh hệ thức sau:

$$\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right]dx = \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^1\left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right]dx$$

Giải:

Theo ví dụ 5.22. chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right]$ không hội tụ đều trên $[0,1]$.

Tuy nhiên chuỗi hội tụ về hàm $S(x)=0$ và tổng riêng thứ n của chuỗi là:

$$S_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \text{ ta có } \int_0^1 S(x)dx = \int_0^1 0dx = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2)\Big|_0^1 = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n^2)}{2n} = 0$$

Vậy hệ thức đúng.

Định lí 5.14: *Nếu chuỗi hàm (5.7) hội tụ về hàm $S(x)$ trên tập X và các hàm $f_i(x)$ thoả mãn:*

1. $f_i'(x)$ *liên tục trên* X, $\forall i = 1,2,...$

2. $\sum_{i=1}^{\infty} f_i'(x)$ *hội tụ đều về* $R(x)$ *trên* X

thì $S'(x) = R(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i'(x)$, $x \in X$ (5.14)

Hệ thức (5.14) chứng tỏ với một số điều kiện được thỏa mãn thì có thể lấy vi phân từng từ của chuỗi hàm.

Chứng minh: Lấy $x_0 \in X$, $x \in X$ khi đó $f_i'(x)$ liên tục trên $[x_0, x]$, $i = 1, 2, \ldots$.

Theo định lí 5.13 ta có:

$$\int_{x_0}^{x} R(x)dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_i'(x)dx$$
$$= f_1(x) - f_1(x_0) + f_2(x) - f_2(x_0) + \ldots + f_n(x) - f_n(x_0) + \ldots$$
$$= S(x) - S(x_0)$$

Theo định lí 5.12, hàm $R(x)$ liên tục trên X do đó $S(x)$ khả vi trên X. Suy ra

$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} R(x)dx = R(x) = S'(x)$. Vậy ta có $S'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i'(x)$

5.3. CHUỖI LŨY THỪA

5.3.1. Các khái niệm chung về chuỗi luỹ thừa.

A. Định nghĩa chuỗi luỹ thừa.

Một chuỗi hàm có dạng $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i$ (5.15)

hoặc $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-a)^i$, a là hằng số (5.16)

được gọi là một chuỗi luỹ thừa. Trong chuỗi luỹ thừa trên, a_i là các hằng số $(i = 1,2,...)$ và được gọi là các hệ số của chuỗi luỹ thừa. Chuỗi (5.16) suy từ (5.15) bởi phép thay x bởi $x - a$. Do đó để thuận tiện, dưới đây chúng ta chỉ cần xem xét chuỗi (5.15).

B. Tính chất hội tụ của chuỗi luỹ thừa.

Định lí 5.15: (Định lí Abel)

Nếu chuỗi luỹ thừa (5.15) hội tụ tại $x = x_0 \neq 0$ *thì hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm* x *thoả mãn* $|x| < |x_0|$

Nếu chuỗi luỹ thừa (5.15) phân kì tại $x = x_1$ *thì phân kì tại mọi điểm* x *thoả mãn* $|x| > |x_1|$

Chứng minh: Theo giả thiết chuỗi số $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x_0^i$ hội tụ. Từ điều kiện cần của chuỗi hội tụ suy ra $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$. Cũng từ điều kiện của dãy hội tụ suy ra tồn tại số M để $\left|a_n x_0^n\right| \le M, \ \forall n$.

Ta biểu diễn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$ và như vậy $\left|a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| \le M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$

Với x thoả mãn $|x| < |x_0|$ thì chuỗi cấp số nhân $\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ hội tụ.

Vậy chuỗi

$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$ hội tụ chứng tỏ chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối khi $|x| < |x_0|$

Phần hai của định lí 5.15 là hệ quả trực tiếp từ phần một

C. Bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa.

Trước hết ta thừa nhận một định lí sau:

Định lí 5.16: *Đối với chuỗi luỹ thừa (5.15) luôn tồn tại số $R \ge 0$ để chuỗi hội tụ tuyệt đối trong khoảng $(-R, R)$, phân kì trong các khoảng $(-\infty, -R), (R, +\infty)$.*

Số R thoả mãn điều kiện trên gọi là bán kính hội tụ của chuỗi (5.15).

Định lí 5.17: (Qui tắc tìm bán kính hội tụ).

Nếu $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \text{ hay } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho \tag{5.17}$$

thì $$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho} & \text{khi } 0 < \rho < +\infty \\ 0 & \text{khi } \rho = \infty \\ \infty & \text{khi } \rho = 0 \end{cases} \tag{5.18}$$

$R = 0$ nghĩa là chuỗi luỹ thừa chỉ hội tụ tại $x = 0$

$R = \infty$ nghĩa là chuỗi luỹ thừa hội tụ tại mọi x

Chứng minh:

* Trường hợp $0 < \rho < +\infty$. Giả sử x xác định, ta xét chuỗi số dương $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$. Áp dụng tiêu chuẩn D'Alembert ta sẽ có

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \rho|x| = D$$

Khi $D < 1$ hay $|x| < \frac{1}{\rho}$ thi chuỗi số hội tụ, $D > 1$ hay $|x| > \frac{1}{\rho}$ thì chuỗi số phân kì.

Theo định nghĩa về bán kính hội tụ, ta suy ra $R = \frac{1}{\rho}$

* Trường hợp $\rho = \infty$. Hiển nhiên chuỗi luỹ thừa hội tụ tuyệt đối tại $x = 0$.

Với $x \neq 0$ ta có

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \infty > 1.$$

Vậy chuỗi luỹ thừa phân kì với $\forall x \neq 0$ (Xem chú ý, Mục 5.1.4.A). Suy ra $R = 0$.

* Trường hợp $\rho = 0$. Ta lấy x tuỳ ý có $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = 0 < 1$. Chứng tỏ chuỗi luỹ thừa hội tụ với mọi x, hay nói cách khác $R = \infty$.

Chú ý: Từ định lí 5.15 suy ra: Để tìm miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa trước hết ta tìm bán kính hội tụ R của nó, sau đó xét tiếp sự hội tụ của các chuỗi số: $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(\pm R)^i$

Ví dụ 5.27: Tìm miền hội tụ của các chuỗi luỹ thừa sau:

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, b. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, c. $.\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

Giải:

a. Bán kính hội tụ : $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 = \rho \Rightarrow R = 1$. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ , $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kì

Vậy miền hội tụ là $X = [-1,1)$

b. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0 \Rightarrow R = \infty$.

c. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n} = \infty \Rightarrow R = 0$.

Ví dụ 5.28: Tìm miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa.

$$2x^5 + \frac{4}{3}x^{10} + \frac{8}{5}x^{15} + \frac{16}{7}x^{20} + \ldots$$

Giải:

Chuỗi đã cho kí hiệu là $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2n-1}x^{5n}$

Ta đặt $x^5 = X$ và nhận được chuỗi luỹ thừa theo biến X : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2n-1}X^n$

Bán kính hội tụ của chuỗi mới: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{2n-1}} = 2 \Rightarrow R = \frac{1}{2}$.

Chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\text{ hội tụ (Theo dấu hiệu Leibnitz)}$$

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ phân kì (So sánh với chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$)

Trở về biến x: $-\frac{1}{2}\le x^5<\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\le x<\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$

Vậy miền hội tụ là $X=\left[-\frac{1}{\sqrt[5]{2}},\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right)$

Ví dụ 5.29: Tìm miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$

Giải:

Ta đặt $x-1=X$ và xét chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X^n}{\sqrt{n}}$

Bán kính hội tụ : $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1\Rightarrow R=1$

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ hội tụ (theo dấu hiệu Leibnitz), chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kì .

Chuỗi đã cho hội tụ tại x thoả mãn $-1\le x-1<1$ hay $0\le x<2$

Vậy miền hội tụ: $X=[0,2)$

Ví dụ 5.30: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\sqrt{n+1}}\left(\frac{x}{3-x}\right)^n$

Giải:

Đặt $\frac{x}{3-x}=X$ và xét chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nX^n}{2^n\sqrt{n+1}}$

Bán kính hội tụ : $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2^n\sqrt{n+1}}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}=\frac{1}{2}\Rightarrow R=2$

Chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-2)^n}{2^n\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}}$ phân kì (so sánh với chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$).

Chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{2^n\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{1+n}}$ hội tụ theo dấu hiệu Leibnitz.

Vậy chuỗi ban đầu hội tụ với x thoả nãn: $-2<\frac{x}{3-x}\le 2$

Hay $\begin{cases} \dfrac{6-x}{3-x} > 0 \\ \dfrac{3x-6}{3-x} \le 0 \end{cases}$, $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < 3 \\ x > 6 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \le 2 \\ x > 3 \end{array}\right. \end{cases}$, $\left[\begin{array}{l} x \le 2 \\ x > 6 \end{array}\right.$

Miền hội tụ là $X = (-\infty, 2] \cup (6, +\infty)$.

D. Tính chất của chuỗi luỹ thừa.

Giả sử chuỗi luỹ thừa (5.15) có bán kính hội tụ $R > 0$ và $[a,b]$ là đoạn tuỳ ý chứa trong khoảng $(-R, R)$.

1. *Chuỗi luỹ thừa hội tụ đều trên* $[a,b]$.

Chứng minh: Giả sử $[a,b] \subset (-R,R) \Rightarrow \exists x_0 \in (-R,R)$ để $[a,b] \subset [-x_0, x_0]$

Mặt khác : $\forall x \in [a,b] \Rightarrow \left|a_n x^n\right| \le \left|a_n x_0^n\right|$ vì $x_0 \in (-R,R)$ nên $\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n x_0^n\right|$ hội tụ.

Theo tiêu chuẩn Weierstrass suy ra chuỗi luỹ thừa hội tụ đều trên $[a,b]$.

2. *Chuỗi luỹ thừa hội tụ về hàm* $S(x)$ *, liên tục trên* $(-R,R)$

Chứng minh: Lấy tuỳ ý $x \in (-R,R)$. Xét sự liên tục của $S(x)$ tại x.

Thật vậy tồn tại $[a,b] \subset (-R,R),\ x \in [a,b]$. Theo tính chất 1 và định lí 5.12,Mục, 5.2.2. C suy ra $S(x)$ liên tục trên $[a,b]$. Vậy nó liên tục tại $x \in (-R,R)$.

3. *Bất kì* x_1, x_2 *trong khoảng* $(-R,R)$ *luôn có*

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_1}^{x_2} x^n dx \qquad (5.19)$$

Đặc biệt $\forall x \in (-R,R)$ *thì* $\displaystyle\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ (5.20)

Chứng minh: Vì $x_1, x_2 \in (-R,R)$ nên tồn tại đoạn $[a,b]$ thoả mãn: $x_1, x_2 \in [a,b] \subset (-R,R)$.

Theo tính chất 1 và định lí 5.13, Mục 5.2.2 C suy ra các công thức (5.19), (5.20).

4. $\forall x \in (-R,R)$ *luôn có.* $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ (5.21)

Chứng minh: Ta lấy tuỳ ý $x \in (-R,R)$ sẽ chứng minh công thức (5.20) đúng tại điểm x đó.

Với $x \in (-R,R)$ sẽ tồn tại số r sao cho $|x| < r < R$ rõ ràng chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ hội tụ suy ra $\lim_{n\to\infty} a_n r^n = 0 \Rightarrow |a_n| r^n \le L, \forall n$, trong đó L là hằng số nào đó .

Bây giờ ta xét sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

Ta có $n|a_n||x|^{n-1} = n|a_n| r^n \left|\dfrac{x}{r}\right|^{n-1} . \dfrac{1}{r} \le \dfrac{L}{r} n \left|\dfrac{x}{r}\right|^{n-1}$

Vì chuỗi số $\frac{L}{r}\sum_{n=1}^{\infty} n\left|\frac{x}{r}\right|^{n-1}$ hội tụ khi $\left|\frac{x}{r}\right| < 1$ (Theo tiêu chuẩn Cauchy)

Vậy $x \in (-R, R)$ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ hội tụ tuyệt đối.

Gọi bán kính hội tụ của chuỗi đạo hàm từng từ là R' thì rõ ràng $R' \geq R$

Theo định lí 5.13, Mục 5.2.2. C và tính chất 1. Công thức (5.22) sẽ đúng trên $[-r, +r]$ vậy sẽ đúng tại x.

Ngoài ra ta thấy : $\left|a_n x^n\right| \leq n\left|a_n x^n\right|$, $\forall n$

Chứng tỏ nếu chuỗi đạo hàm từng từ hội tụ tại $x \in (-R', R')$ thì chuỗi ban đầu cũng hội tụ tại x do đó suy ra $R \geq R'$. Vậy chuỗi đạo hàm từng từ cũng có bán kính hội tụ là R.

Chú ý: Dưới đây chúng ta sẽ công nhận các kết quả mở rộng như sau.

a. Nếu chuỗi luỹ thừa hội tụ tại $x = R$ thì nó sẽ hội tụ đều trên $[0, R]$

b. Nếu chuỗi luỹ thừa hội tụ tại $x = R$ thì tổng $S(x)$ của chuỗi sẽ liên tục bên trái tại $x = R$

c. Nếu chuỗi luỹ thừa hội tụ tại $x = R$ thì công thức (5.20) vẫn đúng với $x = R$

d. Nếu chuỗi đạo hàm từng từ hội tụ tại $x = R$ thì công thức (5.21) vẫn đúng với $x = R$.

Ví dụ 5.31: Chứng minh rằng hàm số. $y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$. thoả mãn phương trình vi phân

$$y^{(4)} = y \text{ trên } \mathbb{R}$$

Giải:

Đặt $x^4 = X$, chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{(4n)!}$ có bán kính hội tụ là ∞ vì $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(4n)!}} = 0$, đương nhiên hội tụ $\forall X \geq 0$ suy ra chuỗi ban đầu hội tụ trên $\mathbb{R}$. Theo tính chất 4 sẽ có.

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}, \qquad y'' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}$$

$$y''' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}, \qquad y^{(4)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!}$$

Ta thay chỉ số $n-1 = k$. Vậy $y^{(4)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k}}{(4k)!} = y$

Ví dụ 5.32: Tính tổng của chuỗi luỹ thừa. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

Giải:

Trước hết ta tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\right|} = 1 \Rightarrow R = 1$

Các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(\pm 1)^{n+1}}{n(n+1)}$ hội tụ tuyệt đối vì $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$ mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ . Vậy chuỗi luỹ thừa hội tụ trên $[-1,1]$. Gọi tổng của chuỗi là $S(x)$, rõ ràng $S(0)=0$.

Theo tính chất 4 suy ra

$$S'(x)=\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \text{ với } -1 < x \le 1, \quad S'(0)=0$$

$$S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{n-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k \quad , \quad -1 < x < 1$$

Từ công thức tính tổng của cấp số nhân, ta suy ra

$$S''(x)=\frac{1}{1+x} \Rightarrow S'(x)=\int_0^x S''(x)dx \text{ vì } S'(0)=0$$

$$S'(x)=\int_0^x \frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^x=\ln(1+x)$$

Như vậy ta có công thức $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \quad , \quad -1 < x \le 1$

Vì $S(0)=0$ nên suy ra

$$S(x)=\int_0^x S'(x)dx=\int_0^x \ln(1+x)dx$$

$$S(x)=x\ln(1+x)\Big|_0^x-\int_0^x \frac{x}{1+x}dx$$

$$=x\ln(1+x)-x+\ln(1+x)$$

$$=(x+1)\ln(x+1)-x \quad \text{với} \quad -1 < x \le 1$$

Với $x=-1$ ta có $S(-1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$. Ta xét tổng riêng thứ n của chuỗi này

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n.(n+1)}$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

$\lim_{n\to\infty}S_n=1$ Vậy ta tìm được $S(x)=\begin{cases}1 & \text{khi } x=-1\\ (x+1)\ln(x+1)-x & \text{khi } -1 < x \le 1\end{cases}$

Ví dụ 5.33: Tính tổng của chuỗi hàm. $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{3x-2}{x}\right)^n$

Giải:

Đặt $X = \dfrac{3x-2}{x}$ và xét chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=1}^{\infty} nX^n$

Bán kính hội tụ : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \Rightarrow R = 1$

Với $X = \pm 1$ nhận được các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} n(\pm 1)^n$ phân kì, vì số hạng tổng quát không dần đến 0. Vậy chuỗi luỹ thừa hội tụ với $|X| < 1$. Gọi tổng của chuỗi đó là $R(X)$. Xét chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=1}^{\infty} X^n$. Chuỗi này hội tụ với $|X| < 1$

Rõ ràng $R(X) = X\left(\sum_{n=1}^{\infty} X^n\right)' = X\left(\dfrac{X}{1-X}\right)' = X.\dfrac{1}{(1-X)^2}$, $|X| < 1$

Vậy tổng của chuỗi hàm là

$$S(x) = R\left(\frac{3x-2}{x}\right) \quad \text{với} \quad \left|\frac{3x-2}{x}\right| < 1$$

Sau khi giải hệ bất phương trình trên, ta nhận được

$$S(x) = \frac{(3x-2)x}{4(x-1)^2} \quad \text{với} \quad \frac{1}{2} < x < 1$$

5.3.2. Khai triển một hàm số thành chuỗi luỹ thừa.

A. Khái niệm chuỗi Taylor của hàm số $f(x)$ ở lân cận x_0.

1. Giả sử hàm số $f(x) \in C^{\infty}$ tại lân cận điểm x_0. Chuỗi luỹ thừa có dạng

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots \tag{5.22}$$

được gọi là chuỗi Taylor của $f(x)$ ở lân cận điểm x_0

2. Giả sử hàm số $f(x) \in C^{\infty}$ tại lân cận điểm 0. Chuỗi luỹ thừa biểu diễn trong dạng

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}.x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.x^n + \ldots \tag{5.23}$$

được gọi là chuỗi M'claurin của hàm số $f(x)$. Vậy chuỗi M'claurin của hàm số $f(x)$ chính là chuỗi Taylor của $f(x)$ ở lân cận $x = 0$

Ví dụ 5.34: Viết chuỗi Taylor của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ở lân cận $x = 1$

Giải:

Rõ ràng $f(x) = \dfrac{1}{x}$ khả vi mọi cấp ở lân cận $x = 1$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k.\frac{k!}{x^{k+1}} \Rightarrow f^{(k)}(1) = (-1)^k.k!$$

Vậy chuỗi Taylor của hàm số đã cho có dạng.

$$1-(x-1)+(x-1)^2-...+(-1)^k(x-1)^k+...=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(x-1)^k$$

Ví dụ 5.35: Viết chuỗi M'claurin của hàm số $f(x)=e^{2x}$

Giải:

Ta có $f(x)=e^{2x} \Rightarrow f^{(k)}(x)=2^k e^{2x} \Rightarrow f^{(k)}(0)=2^k, \ \forall k$

Vậy chuỗi M'claurin của hàm số đã cho là:

$$1+2x+\frac{2^2x^2}{2!}+...+\frac{2^kx^k}{k!}+...=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^kx^k}{k!}$$

Ví dụ 5.36: Viết chuỗi M'claurin của hàm số $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \ x\neq 0 \\ 0 & , \ x=0 \end{cases}$

Giải:

Ta tính $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{\alpha\to\infty}\frac{\alpha}{e^{\alpha^2}}=0$

(Đặt $\frac{1}{x}=\alpha$,sử dụng tính chất tăng nhanh của hàm mũ so với hàm luỹ thừa)

Tương tự như trên sẽ nhận được $f^{(k)}(0)=0, \quad \forall k$

Vậy chuỗi M'claurin của hàm đã cho là

$$0+0.\frac{x}{1!}+0.\frac{x^2}{2}+...=0.$$

Định lí 5.18: *Nếu $f(x)$ biểu diễn dưới dạng chuỗi luỹ thừa ở lân cận x_0:*

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+...+a_n(x-x_0)^n+...$$

thì chuỗi đó là chuỗi Taylor của $f(x)$ ở lân cận x_0.

Chứng minh: Chúng ta sẽ chỉ ra $a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad \forall k\in\mathbb{N}$.

Thật vậy, theo tính chất 4 thì $f(x)$ khả vi mọi cấp trong lân cận x_0 và có

$$f^{(k)}(x)=\left[a_0+a_1(x-x_0)+...+a_n(x-x_0)^n+...\right]^{(k)}, \quad \forall k\in\mathbb{N}$$

$$f^{(k)}(x)=a_kk!+a_{k+1}(k+1).k...2.(x-x_0)+...$$

$$f^{(k)}(x_0)=a_kk!$$

Từ đó ta suy ra $\quad a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

3. Nếu hàm số $f(x)$ biểu diễn dưới dạng chuỗi luỹ thừa ở lân cận x_0 thì nói rằng $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor ở lân cận x_0. Tức là trong trường hợp này chuỗi Taylor của $f(x)$ ở lân cận x_0 hội tụ về chính $f(x)$.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad (5.24)$$

Từ ví dụ 5.24, ta thấy hàm $f(x)=\frac{1}{x}$ khai triển được thành chuỗi Taylor ở lân cận $x=1$, cụ thể trong khoảng $(0,2)$.

Từ ví dụ 5.25, ta thấy hàm số $f(x)=e^{2x}$ khai triển được thành chuỗi M'claurin trong khoảng $(-\infty,+\infty)$

Từ ví dụ 5.26, ta thấy chuỗi M'claurin của hàm $f(x)$ hội tụ về 0, nghĩa là hàm số $f(x)$ không khai triển được thành chuỗi M'claurin.

B. Điều kiện để hàm số khai triển thành chuỗi Taylor.

Định lí 5.19: *Cho $f(x)\in C^{\infty}$ ở lân cận $x=x_0$. Để $f(x)$ khai triển thành chuỗi Taylor ở lân cận x_0 thì cần và đủ là phần dư Taylor $r_n(x)$ dần đến không khi $n\to\infty$*

Chứng minh:

Theo Mục 3.5.1. B, ta có $f(x)=P_n(x)+r_n(x)$

trong đó: $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, $r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $c\in(0,x)$

Ta lấy giới hạn hai vế của hệ thức trên sẽ có

$$\lim_{n\to\infty}f(x)-\lim_{n\to\infty}r_n(x)=\lim_{n\to\infty}P_n(x)$$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}P_n(x)\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0$$

$P_n(x)$ chính là tổng riêng thứ $n+1$ của chuỗi Taylor của $f(x)$. Theo định nghĩa, chứng tỏ chuỗi Taylor của $f(x)$ hội tụ về chính $f(x)$ trong lân cận của x_0.

Định lí 5.20:

Nếu $f(x)\in C^{\infty}$ ở lân cận $x=x_0$ và trong lân cận đó có $\left|f^{(k)}(x)\right|\le M$, $\forall k\in\mathbb{N}$ thì $f(x)$ khai triển thành chuỗi Taylor ở lân cận x_0.

Chứng minh:

Từ biểu thức $r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $c\in(0,x)$ ta suy ra $\left|r_n(x)\right|\le\frac{M}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}$

Dễ dàng thấy rằng chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$ hội tụ trên $(-\infty,+\infty)$

Từ điều kiện cần của chuỗi số hội tụ, ta suy ra $\lim_{n\to\infty}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}=0$

Vậy $\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0$

Theo định lí 5.19, hàm $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor ở lân cận x_0.

C. Khai triển một số hàm thường dùng thành chuỗi M'claurin.

1. $f(x)=e^x$

Hàm số e^x khả vi mọi cấp và

$$f^{(k)}(x)=(e^x)^{(k)}=e^x \Rightarrow f^{(k)}(0)=1,\ \forall k\in\mathbb{N}.$$

Ta lấy số thực dương tuỳ ý h. vì

$$\left|f^{(k)}(x)\right|=e^x<e^h,\ \forall x\in(-h,h),\ \forall k$$

Suy ra hàm số $f(x)=e^x$ khai triển được thành chuỗi M'claurin trên $(-\infty,+\infty)$ và có dạng

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad \forall x\in\mathbb{R} \tag{5.25}$$

Thay x bởi $-x$, ta có $\quad e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!},\quad \forall x\in\mathbb{R}$ (5.26)

Từ đó bằng cách trừ và cộng hai chuỗi trên sẽ nhận được các khai triển sau đây:

$$\mathrm{sh}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},\ \forall x\in\mathbb{R} \tag{5.27}$$

$$chx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!},\ \forall x\in\mathbb{R} \tag{5.28}$$

2. $f(x)=\sin x.$

Ta có $\quad f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right),\ \forall k\in\mathbb{N},\ \forall x$

$$f^{(k)}(0)=\sin k\frac{\pi}{2}=\begin{cases}0 & \text{khi } k=2m\\ (-1)^m & \text{khi } k=2m+1\end{cases}$$

Vì $\left|\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)\right|\le 1,\ \forall k,\ \forall x$, theo định lí 5.20, ta nhận được

$$\sin x=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!},\ \forall x\in\mathbb{R} \tag{5.29}$$

Tương tự $\quad \cos x=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!},\ \forall x\in\mathbb{R}$ (5.30)

3. $f(x)=\mathrm{arctg}x$

Theo ví dụ 3.11 mục 3.3.3. B, ta có

$$y^{(n)}=(n-1)!\cos^n y.\sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right),\forall n\in\mathbb{N}$$

Ta xét $\quad r_n(x)=\dfrac{\cos^{n+1}y_0.\sin\left[(n+1)\left(y_0+\frac{\pi}{2}\right)\right]}{n+1}.x^{n+1},\ \ y_0=\mathrm{arctg}\theta x,\ 0<\theta<1.$

Suy ra $\forall x \in [-1,1]$ thì $|r_n(x)| \le \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow r_n(x) \to 0$ khi $n \to \infty$

Vậy nhận được khai triển M'claurin của hàm số

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} + ... \quad , \quad \forall x \in [-1,1] \tag{5.31}$$

Ta thay $x = 1$ vào công thức trên, sẽ nhận được công thức khai triển của số π.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - ... + (-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1} + ... \tag{5.32}$$

4. $f(x) = \ln(1+x)$ khi $x > -1$

Ta có $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x^n)} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!,\ n \ge 1$

Chuỗi M'claurin có dạng là

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + ...$$

Dưới đây ta sẽ chứng minh chuỗi này hội tụ trên $(-1,1]$

Thật vậy, phần dư M'claurin thứ n trong dạng Lagrange là:

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad 0 < \theta < 1$$

* $\forall x \in [0,1]$ thì $\left|\dfrac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}\right| \le 1$. Vậy $|r_n(x)| \le \dfrac{1}{n+1} \to 0$ khi $n \to \infty$

Ta xét phần dư M'claurin trong dạng Cauchy (Xem Mục 3.5.1. B)

$$r_n(x) = (-1)^n x^{n+1}\frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} \quad , \quad 0 < \theta < 1$$

* $\forall x \in (-1,0)$ ta có

$$|r_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}.\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \quad \text{vì} \quad 1-|x| < 1+\theta x$$

Ngoài ra $1+\theta x > 1-\theta$ và $|x|^{n+1} \to 0$ khi $n \to \infty$

Vậy $r_n(x) \to 0$ khi $n \to \infty$. Theo định lí 5.19 sẽ có:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \ , \ \forall x \in (-1,1] \tag{5.33}$$

Nói riêng, với $x = 1$ ta nhận được.

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + ... \tag{5.34}$$

Thay x bởi $-x$ vào (5.32) ta sẽ có.

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - ... - \frac{x^n}{n} + ... = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

Từ đó ta suy ra

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x.\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m}}{2m+1} \quad , \quad \forall x \in (-1,1) \qquad (5.35)$$

5. $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$

Theo Mục 3.5.1. C nhận được chuỗi M'claurin của $f(x)$ như sau.

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + ...$$

Dùng công thức D'Alembert nhận được bán kính hội tụ của chuỗi trên là $R = 1$. Phần dư M'claurin trong dạng Cauchy sẽ là.

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!}.(1-\theta)^n x^{n+1} \quad , \quad 0 < \theta < 1$$

Ta biểu diễn phần dư này dưới dạng

$$r_n(x) = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-1-n+1)}{1.2.....n}.x^n \alpha\, x\,(1+\theta x)^{\alpha-1}.\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$$

Với $x \in (-1,1)$ thì

$$1-\theta < 1+\theta x \Rightarrow \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \to 0 \text{ khi } n \to \infty$$

$$|\alpha x|\left(1-|x|\right)^{\alpha-1} < |\alpha x|(1+\theta x)^{\alpha-1} < |\alpha x|\left(1+|x|\right)^{\alpha-1}$$

Chứng tỏ $\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}$ luôn bị chặn và không phụ thuộc vào n.

Một mặt dễ nhận thấychuỗi luỹ thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-1-n+1)}{n!}x^n \text{ có bán kính hội tụ là 1.}$$

Do đó số hạng tổng quát của nó dần về 0 khi $n \to \infty$, $\forall x \in (-1,1)$.

Kết hợp ba kết luận trên, ta suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0,\ \forall x \in (-1,1)$.

Vậy ta có khai triển nhị thức, mang tên gọi là công thức Newton.

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{1.2.....n}x^n + ...$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n \quad , \quad \forall x \in (-1,1) \qquad (5.36)$$

Sự hội tụ của chuỗi nhị thức tại $x \neq \pm 1$ phụ thuộc vào α, chúng ta không xem xét vấn đề này. Tuy nhiên dưới đây chúng ta thay $\alpha = 1,\ +\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$ sẽ nhận được lần lượt các khai triển ứngvới $x \neq \pm 1$.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - ... + (-1)^n x^n + ... \quad , \quad \forall x \in (-1,1) \qquad (5.37)$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+...+(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n+...$$

$$\forall x\in(-1,1] \qquad (5.38)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-...+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+...,\forall x\in(-1,1] \qquad (5.39)$$

Ví dụ 5.37: Khai triển hàm số $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)(x+2)}$ thành chuỗi luỹ thừa của $(x-1)$

Giải:

Thực chất của bài toán là khai triển hàm số đã cho thành chuỗi Taylor ở lân cận $x=1$

Ta biểu phân tích hàm số trong dạng $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{x+1}$

Áp dụng công thức (5.37) sẽ có

$$\frac{2}{x+2}=\frac{2}{3+x-1}=\frac{2}{3}.\frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{3}\right)^n \quad , \quad -2<x<4$$

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2+x-1}=\frac{1}{2}.\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n \quad , \quad -1<x<3$$

Vậy ta có

$$f(x)=\frac{x}{(x+1)(x+2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(x-1)^n \quad , \quad -1<x<3$$

Ví dụ 5.38 Khai triển hàm số $f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ thành chuỗi luỹ thừa của x.

Giải:

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ Theo công thức (5.39) ta nhận được

$$f'(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} \quad , \quad x\in[-1,1]$$

Rõ ràng $\quad f(x)=\displaystyle\int_0^x f'(x)dx$ vì $f(0)=0$

Suy ra $\quad f(x)=x+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}.x^{2n+1} \quad , \quad x\in[-1,1]$

Ví dụ 539: Tính các hệ số a_3,a_4 trong khai triển $e^{\sin x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

Giải:

Nhớ rằng các chuỗi cho bởi công thức (5.25) , (5.29) hội tụ tuyệt đối $\forall x$

Vậy ta có.

$$e^{\sin x} = 1 + \frac{\sin x}{1!} + \frac{\sin^2 x}{2!} + \frac{\sin^3 x}{3!} + \frac{\sin^4 x}{4!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Suy ra $\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)$

$$\sin^3 x = x^3 + o(x^5)$$

$$\sin^4 x = x^4 + o(x^4)$$

Do đó $e^{\sin x} = 1 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^4 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$

Từ đó tìm được: $a_3 = 0$, $a_4 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{24} = -\frac{1}{8}$

Ví dụ 5.40: Khai triển hàm số $f(x) = xe^x$ thành chuỗi luỹ thừa của $x - 1$.

Giải:

Ta có $f(x) = xe^x = e\left[(x-1)e^{x-1} + e^{x-1}\right]$

$$= e\left[(x-1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} \right] = e\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(x-1)^{n+1}}{n!} + \frac{(x-1)^n}{n!} \right]$$

$$= e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{n!}(x-1)^n$$

5.4. CHUỖI FOURIER

5.4.1. Các khái niệm chung.

A. Chuỗi lượng giác.

Chuỗi hàm có dạng $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ (5.40)

trong đó $a_0,\ a_n,\ b_n,\ n = 1, 2, \dots$ là các hằng số, được gọi là một chuỗi lượng giác.

B. Điều kiện hội tụ của chuỗi lượng giác.

Định lí 5.21: *Nếu các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ tuyệt đối thì chuỗi lượng giác (5.40) hội tụ tuyệt đối và đều trên tập $\mathbb{R}$.*

Chứng minh: $\forall x \in \mathbb{R}$ ta luôn có $|a_n.\cos nx + b_n.\sin nx| \le |a_n| + |b_n|$

Vì các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ tuyệt đối nên chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n| + |b_n|\right)$ hội tụ, theo tiêu chuẩn Weierstrass suy ra chuỗi (5.40) hội tụ tuyệt đối và đều trên tập $\mathbb{R}$.

Định lí 5.22: *Nếu các dãy số* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *đơn điệu giảm và hội tụ về 0 khi* $n \to \infty$ *thì chuỗi lượng giác (5.40) hội tụ trên tập* $X = \mathbb{R} \setminus \{2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}\}$

Chứng minh: Với $x \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$ ta xet các hàm số:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx, \qquad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx$$

Ta sẽ chứng minh sự hội tụ của các dãy hàm $\{A_n\}$ và $\{B_n\}$

Ta có $$2\sin\frac{x}{2}A_n = \sum_{k=1}^{n} 2a_k \sin\frac{x}{2}\cos kx = \sum_{k=1}^{n} a_k\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right]$$
$$= a_n \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - a_1\sin\frac{x}{2} + \sum_{k=2}^{n}(a_{k-1}-a_k)\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x = 0$ và $\left|(a_{k-1}-a_k)\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right| < |a_{k-1}-a_k| = a_{k-1}-a_k$

Mặt khác ta có $\sum\limits_{k=2}^{n}(a_{k-1}-a_k) = a_1 - a_n$ nên chuỗi số $\sum\limits_{k=2}^{\infty}(a_{k-1}-a_k)$ hội tụ về a_1 .

Theo tiêu chuẩn Weierstrass suy ra

$$\sum_{k=2}^{\infty}(a_{k-1}-a_k)\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x \Rightarrow S_1(x)$$

Vậy $2\sin\frac{x}{2}A_n$ hội tụ về $-a_1\sin\frac{x}{2} + S_1(x)$

Từ đó suy ra $$\lim_{n\to\infty} A_n = -\frac{a_1}{2} + \frac{S_1(x)}{2\sin\frac{x}{2}} = A(x),\ \forall x \neq 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$$

Tương tự ta chứng minh được

$$\lim_{n\to\infty} B_n = B(x),\ \forall x \neq 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$$

Chứng tỏ chuỗi lượng giác (5.41) hội tụ về

$$\frac{a_0}{2} + A(x) + B(x),\ \ \forall x \neq 2m\pi,\ \ m \in \mathbb{Z}$$

C. Chuỗi Fourier.

Cho hàm số $f(x)$ khả tích trên $[-\pi,\pi]$, chuỗi lượng giác có dạng

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \qquad (5.41)$$

trong đó

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\ ,\ a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx\ ,\ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx\ ,\ k = 1,2,... \qquad (5.42)$$

được gọi là chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$, các hằng số tính theo công thức (5.42) gọi là các hệ số Fourier của hàm số $f(x)$.

D. Chuỗi Fourier trong dạng phức.

Từ công thức Euler.

$$\cos kx = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}), \quad \sin kx = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx}) \tag{5.43}$$

Ta thay (5.43) vào (5.41) sẽ nhận được chuỗi trong dạng

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}) + b_k \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx})$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_k - ib_k)e^{ikx} + \frac{1}{2}(a_k + ib_k)e^{-ikx}$$

Từ công thức (5.42) suy ra

$$a_k - ib_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx - i\sin kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

$$a_k + ib_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx + i\sin kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}dx$$

Dễ nhận thấy $a_k + ib_k = a_{-k} - ib_{-k}$

Ta đặt $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$ thì $\frac{1}{2}(a_k + ib_k) = c_{-k}$

Như vậy
$$c_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \quad , \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ... \tag{5.44}$$

Ngoài ra ta có

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i.0.x}dx = c_0$$

Vậy chuỗi Fourier được đưa về dạng

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx} + c_{-k}e^{-ikx} \quad \text{hay} \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \tag{5.45}$$

được gọi là chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ trong dạng phức.

E. Hàm số khai triển thành chuỗi Fourier.

Nếu trong $[-\pi, \pi]$ chuỗi Fourier (5.41) hội tụ về chính hàm số $f(x)$ thì nói rằng hàm $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Fourier trên $[-\pi, \pi]$.

Định lí 5.23: *Nếu $f(x)$ biểu diễn thành chuỗi lượng giác (5.41) trên $[-\pi, \pi]$ và các chuỗi số $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ hội tụ tuyệt đối thì chuỗi đó chính là chuỗi Fourier của $f(x)$.*

Chứng minh: Giả sử $f(x)$ biểu diễn dưới dạng

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{5.46}$$

Ta sẽ chỉ ra $a_0,\ a_k,\ b_k\ \ (k=1,2,...)$ chính là hệ số Fourier của $f(x)$, tức là tính theo công thức (5.42).

Thật vậy, do chuỗi (5.45) hội tụ đều về $f(x)$ trên $[-\pi,\pi]$ nên có thể thực hiện phép lấy tích phân từng từ

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kxdx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kxdx$$

$$= a_0\pi \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

Nhân cả hai vế của (5.46) với $\cos mx$, $(m \neq 0)$ sau đó ta lấy tích phân sẽ có

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mxdx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx.\cos mxdx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx.\cos mxdx = a_m\pi$$

Suy ra $\qquad a_m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx$

Trong tính toán trên chúng ta đã sử dụng các kết quả nhận được dưới đây.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx = 0,\ \forall k\in\mathbb{Z},\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx = \begin{cases} 0 & \forall k\neq 0 \\ 2\pi & k=0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx.\cos mxdx = 0,\ \forall k\in\mathbb{Z},\ \forall m\in\mathbb{Z},\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx.\cos mxdx = \begin{cases} 0 & \text{khi } k\neq m \\ 2\pi & \text{khi } k=m=0 \\ \pi & \text{khi } k=m\neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx.\sin mxdx = \begin{cases} 0 & \text{khi } k\neq m,\ k=m=0 \\ \pi & \text{khi } k=m\neq 0 \end{cases}$$

Tương tự nhận được

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mxdx$$

5.4.2. Điều kiện đủ để hàm số khai triển thành chuỗi Fourier.

Định lí 5.24 (Định lí Dirichlet): *Nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[-\pi,\pi]$ thì chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$ hội tụ về tổng $S(x)$ trên tập $\mathbb{R}$ đồng thời tổng $S(x)$ có tính chất:*

$$S(x) = \frac{1}{2}\left[f(x-0)+f(x+0)\right],\ \forall x\in\mathbb{R} \qquad (5.47)$$

Chúng ta thừa nhận định lí này. Công thức (5.47) cho thấy nếu $f(x)$ liên tục tại x thì $S(x)=f(x)$ như vậy coi rằng hàm số $f(x)$ thoả mãn các điều kiện của định lí Dirichlet thì khai triển được thành chuỗi Fourier.

Sau đây là các chú ý rất quan trọng liên quan đến việc khai triển thành chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$ thoả mãn các điều kiện của định lí Dirichlet.

Chú ý:

a. Khi $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2l$, bằng phép đổi biến $\begin{cases} x = \dfrac{l}{\pi}X \\ y = Y \end{cases}$

ta sẽ nhận được hàm số $F(X) = f(x)$. Hàm số mới tuần hoàn với chu kỳ 2π.

Ta có:

$$F(X) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nX + b_n \sin nX$$

Trở về hàm số ban đầu nhận được

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\frac{\pi x}{l} + b_n \sin n\frac{\pi x}{l} \tag{5.48}$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx \;,\; a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\frac{\pi x}{l}dx \;,\; b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin n\frac{\pi x}{l}dx \;,\; n = 1,2,... \tag{5.49}$$

b. Khi $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2l$ được mô tả bởi biểu thức giải tích trên $(\alpha, \alpha + 2l)$ thì không nên sử dụng công thức (5.49) để tính các hệ số Fourier mà dựa vào tính chất hàm tuần hoàn của hàm số (Xem ví dụ 4.7.d. Mục 4.2.2) và ta nhận được công thức sau:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(x)dx,\; a_n = \frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(x)\cos n\frac{\pi x}{l}dx,\; b_n = \frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(x)\sin n\frac{\pi x}{l}dx \tag{5.50}$$

c. Khi $f(x)$ là hàm số chẵn thì $f(x)\cos n\dfrac{\pi x}{l}$ là hàm số chẵn và $f(x)\sin n\dfrac{\pi x}{l}$ là hàm số lẻ do đó khai triển có dạng.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k\frac{\pi x}{l},\ \text{trong đó}\ a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos k\frac{\pi x}{l}dx,\ k = 0,1,2,... \tag{5.51}$$

Tương tự nếu $f(x)$ là hàm số lẻ thì

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\frac{\pi x}{l},\; b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin k\frac{\pi x}{l}dx \tag{5.52}$$

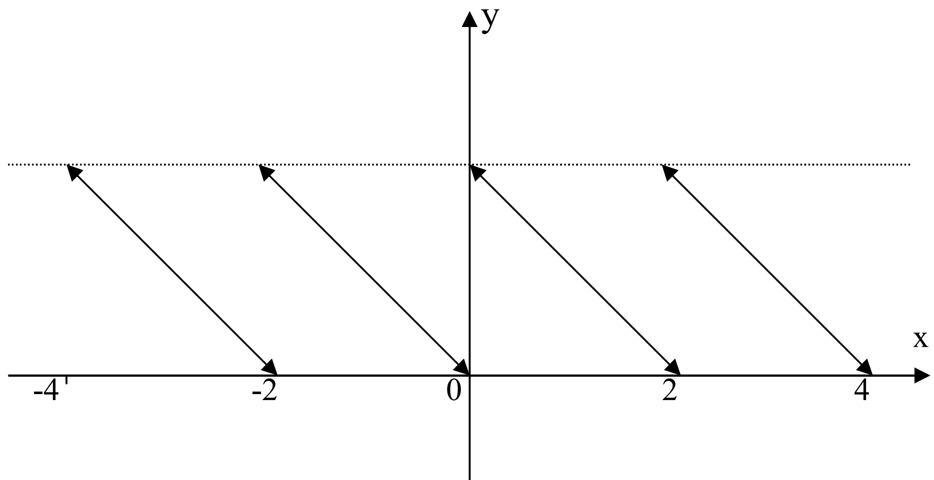
d. Tương tự như trong phần khai triển thành chuỗi luỹ thừa, nhờ vào khai triển thành chuỗi Fourier có thể tính được tổng một số chuỗi đặc biệt.

Ví dụ 5.41: Cho hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ bằng 2 và có dạng

$f(x) = 2 - x, \quad x \in (0,2)$. Hãy khai triển hàm số thành chuỗi Fourier

Từ đó hãy tính tổng $S = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}$

Giải: Đồ thị của hàm số được mô tả trên hình 5.1.



H.5.1

Hàm số thoả mãn các điều kiện của định lí Dirichlet và có các điểm gián đoạn loại 1 tại $x = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Áp dụng công thức (5.42) ta tính các hệ số Fourier của hàm số.

$$a_0 = \int_0^2 (2-x)dx = \frac{1}{2}(x-2)^2\Big|_2^0 = 2$$

$$a_k = \int_0^2 (2-x)\cos k\pi x dx = \frac{2-x}{k\pi}\sin k\pi x\Big|_0^2 + \frac{1}{k\pi}\int_0^2 \sin k\pi x dx$$

$$= -\frac{1}{k^2\pi^2}\cos k\pi x\Big|_0^2 = 0 \quad , \quad k = 1,2,...$$

$$b_k = \int_0^2 (2-x)\sin k\pi x dx = \frac{x-2}{k\pi}\cos k\pi x\Big|_0^2 - \frac{1}{k\pi}\int_0^2 \cos k\pi x dx$$

$$= \frac{2}{k\pi} - \frac{1}{k^2\pi^2}\sin k\pi x\Big|_0^2 = \frac{2}{k\pi} \quad , \quad k = 1,2,...$$

Vậy $2 - x = 1 + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\pi x}{k},\ \forall x \neq 2k,\ k \in \mathbb{Z}$, hay $1 - x = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\pi x}{k}$

Ta thay $x = \frac{1}{2}$ vào khai triển trên sẽ nhận được

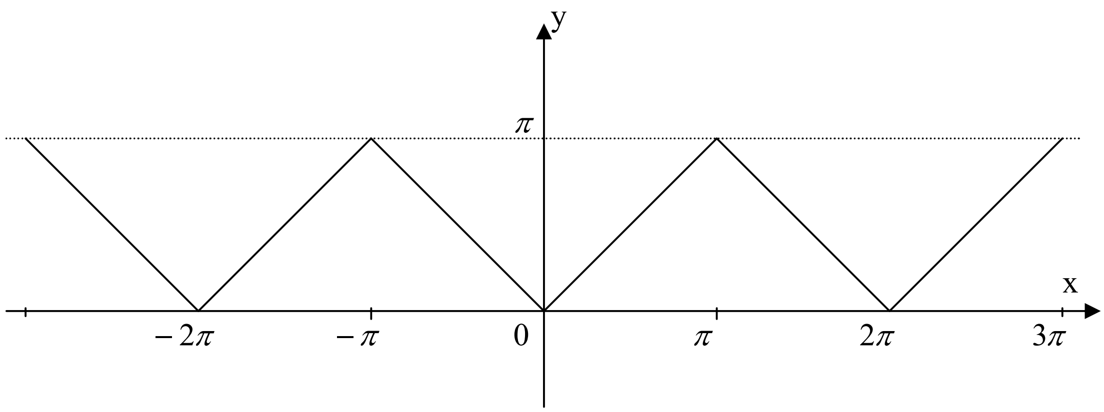
$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = S$$

Ví dụ 5.42: Hãy khai triển thành chuỗi Fourier hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π và $f(x) = |x|$ với $x \in [-\pi, \pi]$.

Từ đó tính tổng $S = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}$

Giải:

Đồ thị hàm số cho bởi hình 5.2



H.5.2

Hàm số đã cho là chẵn, liên tục $\forall x$ và thoả mãn định lí Dirichlet.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0 & , \ n = 2m \\ -\dfrac{4}{\pi(2m+1)^2} & , \ n = (2m+1) \end{cases}$$

$$m = 0, 1, 2, ...$$

Vậy $\quad |x| = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2} \quad , \quad \forall x$

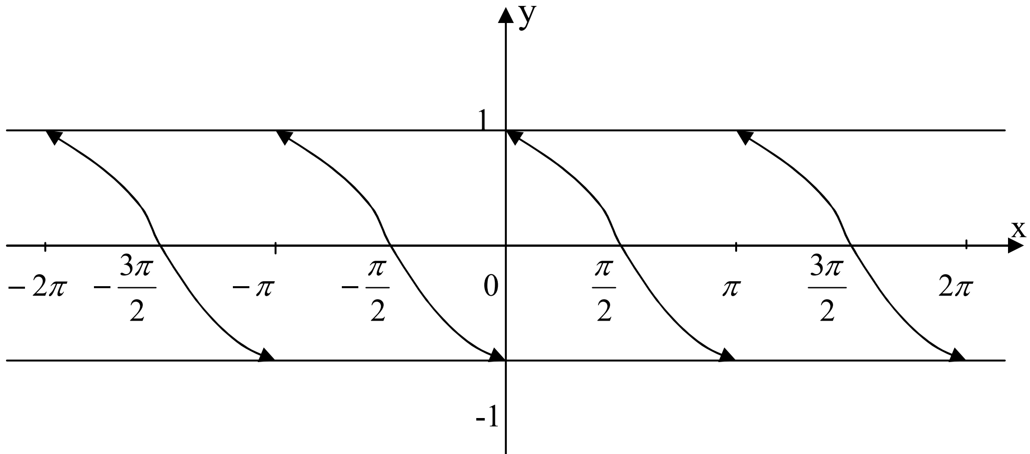
Ta thay $x = 0$ vào công thức trên nhận được

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + ...$$

Ví dụ 5.43: Cho hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ là π, biết $f(x) = \cos x$, $x \in (0,\pi)$. Hãy khai triển Fourier hàm số đã cho

Giải:

Đồ thị hàm số cho bởi hình 5.3



H.5.3

Hàm số là lẻ và thoả mãn định lí Dirichlet, có các điểm gián đoạn $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$b_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.\sin 2nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x\right]dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)x + \frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)x\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1}\right) = \frac{8}{\pi}\frac{n}{4n^2-1}$$

Vậy $\cos x = \frac{\pi}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{4n^2-1}$, $x \in (0,\pi)$

5.4.3. Khai triển thành chuỗi Fourier của một hàm số bất kỳ.

Xét hàm số $f(x)$ đơn điệu từng khúc và bị chặn trên (a,b), $a < b$. Bây giờ chúng ta sẽ biểu diễn hàm số dưới dạng một chuỗi lượng giác trên (a,b). Có nhiều cách biểu diễn, tuy nhiên thường dùng các phương pháp sau đây:

A. Thác triển tuần hoàn.

Ta lập hàm số $F(x)$ tuần hoàn với chu kì $T = b - a$ và $F(x) = f(x), \forall x \in (a,b)$.

(Xem hình 5.4)

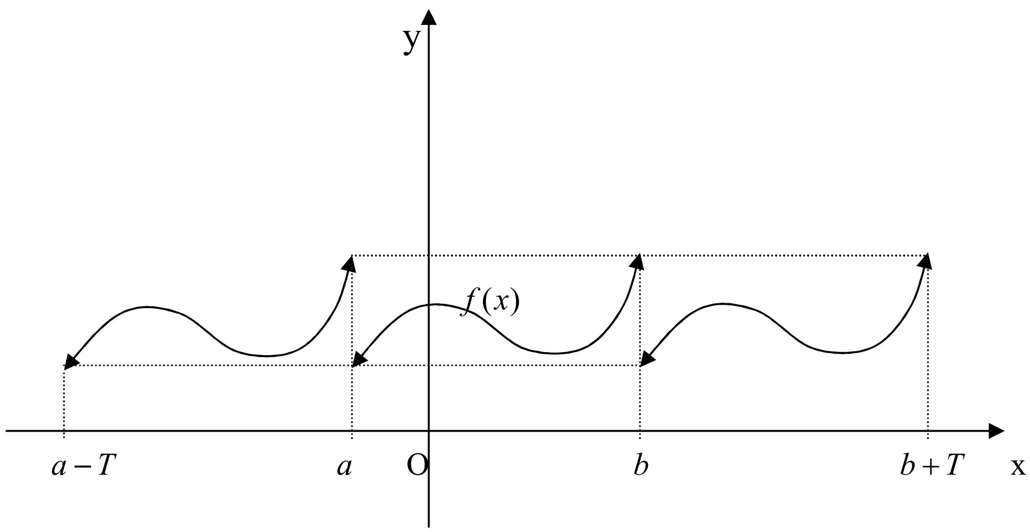
Rõ ràng $F(x)$ khai triển được thành chuỗi Fourier và $F(x) = f(x),\ \forall x \in (a,b)$.

Vậy tại các điểm liên tục của $f(x)$ trên (a,b) ta có:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \tag{5.53}$$

trong đó $l = \frac{b-a}{2}, a_0 = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)dx$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx, b_k = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx, k = 1,2,... \tag{5.54}$$



H.5.4

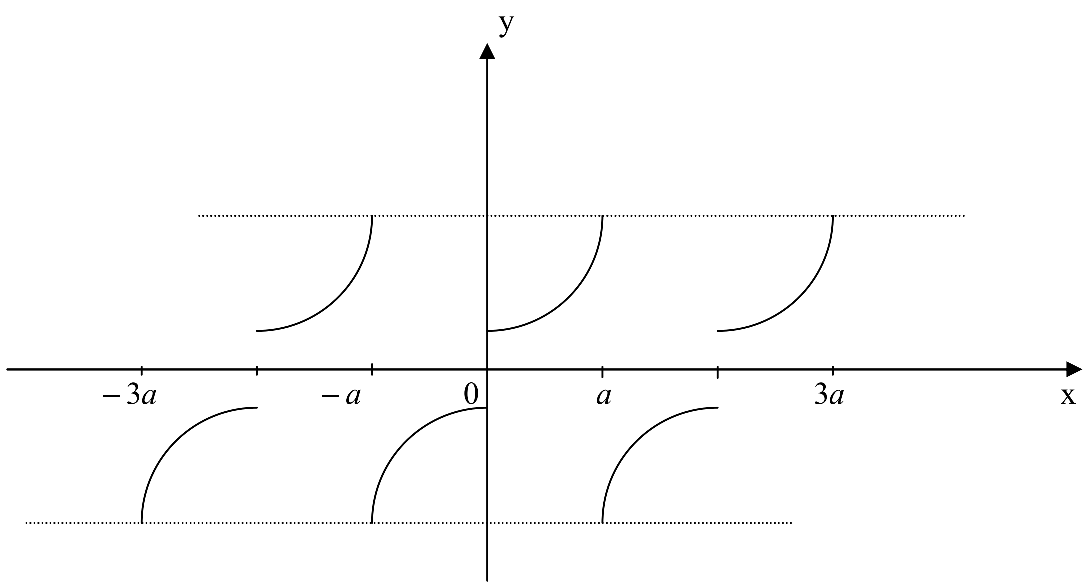
B. Thác triển chẵn, thác triển lẻ.

Ngoài phương pháp thác triển tuần hoàn đã đề cập ở trên, ta xét thêm trường hợp hàm số $f(x)$ cho trên khoảng $(0,a)$ hay $\left[0,\text{a}\right]$, $a>0$. Ứng với trường hợp này sẽ có thêm phương pháp thác triển lẻ hoặc chẵn hàm số đã cho, cụ thể ta tiến hành như sau:

Lập hàm số $F_l(x)$ tuần hoàn với chu kì $T=2a$ và xác định theo công thức

$$F_l(x)=\begin{cases}-f(-x) & \text{khi } -a<x<0\\ f(x) & \text{khi } 0<x<a\end{cases}$$

Xem hình 5.5



H 5.5

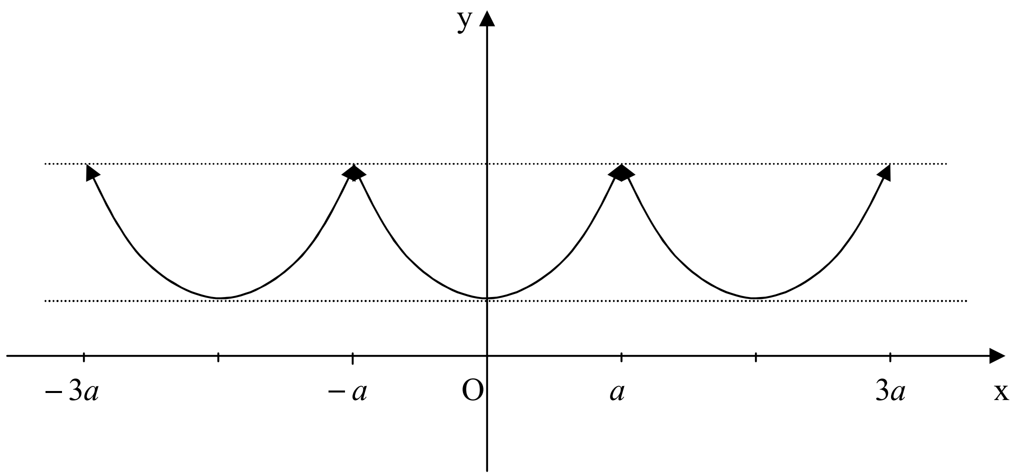
Trên cơ sở khai triển hàm số lẻ $F_l(x)$, tuần hoàn với chu kì $2a$ (Xem chú ý c. Mục 5.4.2), chúng ta nhận được công thức sau đây tại các điểm liên tục của $f(x)$ trên $(0,a)$.

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{a} \quad , \quad b_k=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{k\pi x}{a}dx \quad , \quad k=1,2,... \qquad (5.55)$$

Lập hàm số $F_c(x)$ tuần hoàn với chu kì $T=2a$, xác định theo công thức

$$F_c(x)=\begin{cases} f(-x) & \text{khi } -a<x<0 \\ f(x) & \text{khi } 0<x<a \end{cases}$$

Xem hình 5.6.



H.5.6

Hàm số $F_c(x)$ là hàm số chẵn và thoả mãn định lí Dirichlet, khai triển được thành chuỗi Fourier. Vậy tại các điểm liên tục của $f(x)$ trên $(0,a)$ sẽ có:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{a} \ , \ a_k=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{k\pi x}{a}dx \ , \ k=0,1,2,... \qquad (5.56)$$

Như vậy, nhờ vào thác triển lẻ hoặc chẵn hàm số ta sẽ nhận được khai triển theo hệ các hàm sin hoặc côsin của hàm số $f(x)$..

Ví dụ 5.44: Cho $f(x)=x$, $x\in(0,1)$

a. Khai triển hàm số thành chuỗi Fourier.

b. Khai triển hàm số theo các hàm sin

c. Khai triển hàm số theo các hàm côsin.

Giải:

a. Bằng cách thác triển tuần hoàn hàm số với chu kì $T=1$, theo công thức (5.53) ta nhận được:

$$x=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2k\pi x+b_k \sin 2k\pi x$$

$$a_0=2\int_0^1 xdx=1$$

$$a_k = 2\int_0^1 x\cos 2k\pi x dx = 2\left(\frac{x}{2k\pi}\sin 2k\pi x\Big|_0^1 - \frac{1}{2k\pi}\int_0^1 \sin 2k\pi x dx\right)$$

$$= \frac{1}{2(k\pi)^2}\cos 2k\pi x\Big|_0^1 = 0 \quad , \quad k = 1,2,...$$

$$b_k = 2\int_0^1 x\sin 2k\pi x dx = -2\left(\frac{x}{2k\pi}\cos 2k\pi\Big|_0^1 - \frac{1}{2k\pi}\int_0^1 \cos 2k\pi x dx\right)$$

$$= -\frac{1}{k\pi} \quad , \quad k = 1,2,...$$

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2k\pi x}{k}, \ x \in (0,1)$$

b. Bằng cách thác triển lẻ hàm số , theo công thức (5.54) tasẽ có:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi x \quad , \quad x \in (0,1)$$

$$b_k = 2\int_0^1 x\sin k\pi x dx = -2\left(\frac{x\cos k\pi x}{k\pi}\Big|_0^1 - \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \cos k\pi x dx\right)$$

$$= -\frac{2\cos k\pi}{k\pi} - \frac{2}{(k\pi)^2}\sin k\pi x\Big|_0^1 = \frac{2}{k\pi}(-1)^{k-1} \quad , \quad k = 1,2,...$$

$$x = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\sin k\pi x}{k}$$

Công thức này đúng trên $[0,1)$

c. Bằng cách thác triển chẵn hàm số (Xem 5.51)

$$x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\pi x \quad , \quad \forall x \in (0,1)$$

$$a_0 = 2\int_0^1 x dx = 1$$

$$a_k = 2\int_0^1 x\cos k\pi x dx = 2\left(\frac{x\sin k\pi x}{k\pi}\Big|_0^1 - \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \sin k\pi x dx\right)$$

$$= \frac{2}{(k\pi)^2}\cos k\pi x\Big|_0^1 = \frac{2}{(k\pi)^2}\left((-1)^k - 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{khi } k = 2n \\ -\dfrac{4}{\pi^2(2n+1)^2} & \text{khi } k = 2n+1 \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$$

Công thức này đúng trên $[0,1]$

Ta thay $x = 0$ hoặc $x = 1$ vào công thức trên sẽ nhận được tổng của một chuỗi số

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+...$$

Ví dụ 5.45: Cho hàm số $f(x)=\sin x,\ x\in(0,\pi)$. Hãy khai triển thành chuỗi Fourier chỉ chứa các hàm côsin

Giải:

Thác triển chẵn hàm số đã cho ta sẽ có.

$$\sin x=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx$$

trong đó

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin xdx=\frac{4}{\pi}$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos kxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(1+k)x+\sin(1-k)x\right]dx$$

Suy ra $a_1=-\frac{1}{2\pi}\cos 2x\Big|_0^{\pi}=0$

$$a_k=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k+1}\cos(k+1)x-\frac{1}{k-1}\cos(k-1)x\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)\left((-1)^{k+1}-1\right)=\begin{cases}0 & \text{khi } k=2n+1\\ -\frac{4}{\pi}.\frac{1}{4n^2-1} & \text{khi } k=2n\end{cases}$$

Vậy $\sin x=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}\quad,\quad x\in[0,\pi]$

Thay $x=0$ vào công thức trên ta sẽ nhận được:

$$\frac{1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$$

Ví dụ 5.46: Chứng minh rằng

$$\cos x-\frac{\cos 5x}{5}+\frac{\cos 7x}{7}-\frac{\cos 11x}{11}+...=\begin{cases}\frac{\pi}{2\sqrt{3}} & \text{khi } 0\le x<\frac{\pi}{3}\\ \frac{\pi}{4\sqrt{3}} & \text{khi } x=\frac{\pi}{3}\\ 0 & \text{khi } \frac{\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3}\\ -\frac{\pi}{4\sqrt{3}} & \text{khi } x=\frac{2\pi}{3}\\ -\frac{\pi}{2\sqrt{3}} & \text{khi } \frac{2\pi}{3}<x\le\pi\end{cases}$$

Giải:

Ta gọi tổng của chuỗi là $S(x)$. Như vậy $S(x)$ .xác định trên $[0,\pi]$ và các số hạng của chuỗi là các hàm côsin vậy chuỗi đó chính là thác triển chẵn của hàm $f(x)$ nào đó cho trên $(0,\pi)$. Vì vậy chúng ta hãy xét hàm $f(x)$ trong dạng:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & \text{khi} \quad 0<x<\dfrac{\pi}{3}\\ 0 & \text{khi} \quad \dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{2\pi}{3}\\ -\dfrac{1}{2} & \text{khi} \quad \dfrac{2\pi}{3}<x<\pi\end{cases}$$

Ta khai triển hàm $f(x)$ theo các hàm côsin

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx,\ x\in(0,\pi),\ x\neq\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}dx-\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}dx\right)=0$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos kx dx-\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\cos kx dx\right)$$

$$=\frac{1}{\pi k}\left[\sin\frac{k\pi}{3}+\sin\frac{2k\pi}{3}\right]=\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}\cos\frac{k\pi}{6}$$

$$=\begin{cases}0 & \text{khi} \quad k=2m\\ \dfrac{2(-1)^m}{(2m+1)\pi}\cos\dfrac{(2m+1)\pi}{6} & \text{khi} \quad k=2m+1\end{cases}$$

Suy ra

$$a_{2m+1}=\begin{cases}0 & \text{khi} \quad m=3k+1, \quad k\in\mathbb{N}\\ \dfrac{\sqrt{3}}{\pi(6k+1)} & \text{khi} \quad m=3k, \quad k\in\mathbb{N}\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{\pi(6k-1)} & \text{khi} \quad m=3k-1, \quad k\in\mathbb{N}^*\end{cases}$$

Vậy $$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(6k+1)x}{6k+1}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(6k-1)x}{6k-1}\right)=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\left(\cos x-\frac{\cos 5x}{5}+\frac{\cos 7x}{7}-...\right)$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\left(\cos x-\frac{\cos 5x}{5}+\frac{\cos 7x}{7}-...\right)=\frac{\sqrt{3}}{\pi}S(x)$$

Theo định lí Dirichlet ta nhận được hàm số $S(x)$ chính là tổng của chuỗi.

Từ đó suy ra $\quad f(x)\dfrac{\pi}{\sqrt{3}} = S\left(x\right)$. Vậy hệ thức được chứng minh.

Ví dụ 5.47: Cho hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kì 2π có các hệ số Fourier là $a_0, a_k, b_k, k = 1,2,...$. Hãy tính các hệ số Fourier của $f(x+h)$ $(h = const)$.

Giải:

Giả sử các hệ số Fourier của $f(x+h)$ là $A_0, A_k, B_k, k = 1,2,...$. Khi đó ta có

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(x)dx = a_0$$

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(x)\cos k(x-h)dx$$

$$= \cos kh.\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(x)\cos kx dx + \sin kh.\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(x)\sin kx dx$$

$$= a_k \cos kh + b_k \sin kh,\quad k = 1,2,...$$

Tương tự ta tìm được

$$B_k = b_k \cos kh - a_k \sin kh,\ k = 1,2,...$$

5.5. TÍCH PHÂN FOURIER

5.5.1. Tích phân Fourier như là giới hạn của chuỗi Fourier.

Giả sử hàm $f(x)$ cho trên $(-l,l)$ thoả mãn các điều kiện nào đó, chẳng hạn các điều kiện của định lí.5.24. Khi đó ta thay các hệ số a_k, b_k cho bởi (5.54) vào (5.53) và rút gọn sẽ nhận được

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(u)du + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\cos\frac{k\pi}{l}(u-x)du,\ |x| < l \qquad (5.57)$$

Bây giờ cho hàm $f(x)$ xác định trên $(-\infty,+\infty)$. Vấn đề đặt ra là lập công thức cho hàm số $f(x)$ trên $(-\infty,+\infty)$. Chúng ta sẽ xét giới hạn công thức (5.57) khi $l \to +\infty$.

Giả sử $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ hội tụ. Từ đó ta có

$$\lim_{l\to+\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(u)du = 0$$

Ta nhận thấy rằng chuỗi trong vế phải công thức (5.57) có thể biểu diễn như sau:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\Delta z_{k-1}\int_{-l}^{l} f(u)\cos z_k(u-x)du$$

trong đó $z_k = \dfrac{k\pi}{l},\ \Delta z_k = z_{k+1} - z_k = \dfrac{\pi}{l},\ k = 1,2,...$

Biểu thức trên là tổng tích phân của hàm số $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u-x)du$

Xet trên khoảng $[0,+\infty)$ ứng với một cách chia và một cách chọn các điểm z_k

Như vậy qua giới hạn nhận được.

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} dz\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u-x)du \tag{5.58}$$

hay

$$f(x)=\int\limits_{0}^{+\infty}\left[a(z)\cos zx+b(z)\sin zx\right]dz \tag{5.59}$$

trong đó

$$a(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos zudu,\ \ b(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin zudu \tag{5.60}$$

Công thức (5.58) hay (5.59), (5.60) được gọi là công thức tích phân Fourier của hàm $f(x)$, còn các tích phân ở vế phải được gọi là tích phân Fourier của $f(x)$.

5.5.2. Điều kiện đủ của công thức tích phân Fourier.

Cũng tương tự như định lí Dirichlet, dưới đây chúng ta sẽ đưa ra các dấu hiệu đủ để có công thức tích phân Fourier mà không chứng minh.

Định lí 5.25 (Định lí Dirichlet-Jordan):

Tích phân Fourier của $f(x)$ tại điểm x_0 hội tụ và có giá trị là

$$S(x_0)=\frac{1}{2}\left[f(x_0^+)+f(x_0^-)\right]$$

nếu hàm $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

1. *Liên tục từng khúc trên mọi đoạn hữu hạn,*
2. *Có đạo hàm trái và đạo hàm phải tại mọi điểm,*
3. *Khả tích tuyệt đối trên $(-\infty,+\infty)$.*

5.5.3. Các dạng đặc biệt của công thức tích phân Fourier.

A. Hàm $f(x)$ là hàm số lẻ.

Từ công thức (5.61) ta nhận thấy: nếu $f(x)$ là hàm số lẻ thì $a(z)=0$ và khi đó

$$b(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin uzdu=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f(u)\sin uzdu$$

Vậy

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\sin zxdx\int\limits_{0}^{+\infty} f(u)\sin zudu \tag{5.61}$$

B. Hàm $f(x)$ là hàm số chẵn.

Tương tự như trên, trong trường hợp này nhận được.

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos zxdz \int_0^{+\infty} f(u)\cos zudu \tag{5.62}$$

TÓM TẮT NỘI DUNG CHƯƠNG V.

- **Điều kiện hội tụ của chuỗi số.**

Điều kiện cần của chuỗi số hội tụ là số hạng tổng quát a_n dần đến 0 khi $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

- **Tính chất của chuỗi số hội tụ.**

1. Tính chất hội tụ hay phân kì của chuỗi số vẫn giữ nguyên khi thay đổi hữu hạn số hạng đầu tiên của chuỗi .

2. Nếu chuỗi số hội tụ về S thì chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda a_i$ hội tụ về λS.

3. Nếu các chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ và $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ hội tụ tương ứng về A và B thì chuỗi tổng $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i + b_i)$ hội tụ về A+B.

- **Các tiêu chuẩn về sự hội tụ của chuỗi số dương**

1. Các định lí so sánh.

Cho 2 chuỗi số dương $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ (a) và $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ (b)

A. *Giả sử* $a_n \le b_n$, $\forall n \ge n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}^*$

Khi đó: Nếu chuỗi (b) hội tụ thì chuỗi (a) hội tụ .

Nếu chuỗi (a) phân kì thì chuỗi (b) phân kì .

B. *Giả sử* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$. *Khi đó:*

Nếu $0 < k < +\infty$ *hai chuỗi (a) và (b) cùng hội tụ hoặc cùng phân kì*

Nếu $k = 0$ *và chuỗi (b) hội tụ thì chuỗi (a) hội tụ.*

Nếu $k = \infty$ *và chuỗi (b) phân kì thì chuỗi (a) phân kì .*

2. Tiêu chuẩn D'Alembert.

Gọi $\{D_n\} = \left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ *là dãy D'Alembert*

Nếu tồn tại số $q \in \mathbb{R}_+^*$ *sao cho* $D_n \le q < 1$ *thì chuỗi hội tụ*

Nếu $D_n \ge 1$ *thì chuỗi phân kì*

Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = D$. *Khi đó:*

Nếu $D > 1$ *chuỗi phân kì,* $D < 1$ *chuỗi hội tụ,* $D = 1$ *chưa kết luận.*

3. Tiêu chuẩn Cauchy.

Gọi $\{C_n\} = \left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}$ *là dãy Cauchy*

Nếu tồn tại số $q \in R_+^*$ *sao cho* $C_n \le q < 1$ *thì chuỗi số hội tụ*

Nếu $C_n \ge 1$ *thì chuỗi số phân kì .*

Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = C$. *Khi đó:*

$C > 1$ *chuỗi phân kì,* $C < 1$ *chuỗi hội tụ,* $C = 1$ *chưa kết luận*

4. Tiêu chuẩn tích phân Cauchy-Mclaurin.

Giả sử $f(x)$ *dương và liên tục trên* $[1,+\infty)$ *thoả mãn các điều kiện.*

$f(n) = a_n,\ \ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0,\ f(x)$ *đơn điệu giảm*

Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ hay phân kì cùng với sự hội tụ hay phân kì của tích phân*

$\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$

- **Tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số đan dấu**

Cho chuỗi $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} a_i$ *, nếu dãy* $\{a_n\}$ *thoả mãn các điều kiện :*

1. Dãy $\{a_n\}$ *đơn điệu giảm:* $a_n > a_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

thì chuỗi đan dấu hội tụ về tổng S *và* $S < a_1$

- **Chuỗi có số hạng mang dấu bất kì. Sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ.**

Cho chuỗi số bất kì $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i,\ a_i \in \mathbb{R}$ (a)

Ta lập chuỗi số dương $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|$ (b)

1. Nếu chuỗi (a) hội tụ và chuỗi (b) phân kì thì người ta nói rằng chuỗi (a) bán hội tụ

2. Nếu chuỗi (a) và (b) cùng hội tụ thì người ta nói rằng chuỗi (a) hội tụ tuyệt đối .

Nếu chuỗi (b) hội tụ thì chuỗi (a) cũng hội tụ .

- **Sự hội tụ đều của chuỗi hàm.**

Chuỗi hàm được gọi là hội tụ đều về hàm $S(x)$ trên X khi và chỉ khi dãy tổng riêng củanó hội tụ đều về $S(x)$ trên X . Dãy tổng riêng $S_n(x)$ hội tụ đều về hàm số $S(x)$ ($S_n(x) \Rightarrow S(x)$) nếu:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ \ (\exists n_0(\varepsilon))\ (\forall n > n_0 \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in X)$$

Vậy nếu chuỗi hội tụ đều về $S(x)$ thì phần dư $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ sẽ hội tụ đều về 0, ($R_n(x) \Rightarrow 0$) tức là:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0(\varepsilon))\ (\forall x \in X)\ (\forall n > n_0 \Rightarrow |R_n(x)| < \varepsilon) \quad .$$

- **Các tiêu chuẩn về sự hội tụ đều của chuỗi hàm.**

1. ***Nguyên lí Cauchy.***

Giả sử $\{S_n(x)\}$ là dãy tổng riêng của chuỗi hàm. Để chuỗi hàm hội tụ đều trên tập X điều kiện cần và đủ là:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})\ (\forall x \in X)\ (\forall n > n_0,\ \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon)$$

2. ***Tiêu chuẩn Weierstrass.***

Giả sử các số hạng của chuỗi hàm thoả mãn bất đẳng thức

$$|f_n(x)| \le a_n,\ \forall x \in X$$

đồng thời chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ . Khi đó chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ tuyệt đối và đều trên tập X

- **Các tính chất của chuỗi hàm hội tụ đều.**

1. *Cho chuỗi hàm có các số hạng $f_i(x),\ (i = 1,2,...)$ liên tục trên tập X và hội tụ đều về $S(x)$ trên X thì $S(x)$ liên tục trên X*

2. *Cho chuỗi hàm hội tụ đều về $S(x)$ trên $[a,b]$ và các số hạng $f_i(x),\ (i = 1,2,...)$ liên tục trên $[a,b]$ thì*

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b f_i(x)dx$$

3. *Nếu chuỗi hàm hội tụ về hàm $S(x)$ trên tập X và các số hạng $f_i(x)$ thoả mãn:*

1. $f_i'(x)$ *liên tục trên* X, $\forall i = 1,2,...$

2. $\sum_{i=1}^{\infty} f_i'(x)$ *hội tụ đều về* $R(x)$ *trên* X

Khi đó $S'(x) = R(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i'(x)$, $x \in X$

- **Bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa.**

Đối với chuỗi luỹ thừa) luôn tồn tại số $R \ge 0$ để chuỗi hội tụ tuyệt đối trong khoảng $(-R, R)$, phân kì trong các khoảng $(-\infty, -R), (R, +\infty)$.

` Số R thoả mãn điều kiện trên gọi là bán kính hội tụ của chuỗi

Qui tắc tìm bán kính hội tụ.

Nếu $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ hay $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$

thì $$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho} & \text{khi } 0 < \rho < +\infty \\ 0 & \text{khi } \rho = \infty \\ \infty & \text{khi } \rho = 0 \end{cases}$$

- **Tính chất của chuỗi luỹ thừa.**

1. *Bất kì* x_1, x_2 *trong khoảng* $(-R, R)$ *luôn có*

$$\int_{x_1}^{x_2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_1}^{x_2} x^n dx$$

Đặc biệt: $\forall x \in (-R, R)$ thì $\displaystyle\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

2. $\forall x \in (-R, R)$ *luôn có.* $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

- **Khái niệm về chuỗi Taylor của hàm số $f(x)$ ở lân cận x_0.**

Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi mọi cấp tại lân cận điểm x_0. Chuỗi luỹ thừa có dạng

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

được gọi là chuỗi Taylor của $f(x)$ ở lân cận điểm x_0

Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi mọi cấp tại lân cận điểm 0. Chuỗi luỹ thừa biểu diễn trong dạng

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}.x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.x^n + \dots$$

được gọi là chuỗi Mclaurin của hàm số $f(x)$. Đó chính là chuỗi Taylor của $f(x)$ ở lân cận $x = 0$

- **Điều kiện đủ để hàm số khai triển thành chuỗi Taylor.**

1. *Nếu* $f(x)$ *khả vi mọi cấp ở lân cận* $x = x_0$ *và phần dư Taylor* $r_n(x)$ *dần đến không khi* $n \to \infty$ *thì* $f(x)$ *khai triển thành chuỗi Taylor ở lân cận* x_0
2. *Nếu* $f(x)$ *khả vi mọi cấp ở lân cận* $x = x_0$ *và trong lân cận đó có* $\left|f^{(k)}(x)\right| \le M, \ \forall k \in \mathbb{N}$ *thì* $f(x)$ *khai triển thành chuỗi Taylor ở lân cận* x_0.

- **Khai triển một số hàm thường dùng thành chuỗi Mclaurin.**

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$, $\quad e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$

2. $\text{sh}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \forall x \in \mathbb{R}$, $\quad \text{ch}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \forall x \in \mathbb{R}$

.

3. $\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}, \forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}, \forall x \in \mathbb{R}$

4. $\text{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + ..., \quad \forall x \in [-1,1]$

Thay $x = 1$ vào công thức trên chúng ta nhận được công thức khai triển của số π.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - ... + (-1)^{k-1} \frac{1}{2k-1} + ...$$

5. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \forall x \in (-1,1]$

Nói riêng, với $x = 1$ nhận được: $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + ...$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - ... - \frac{x^n}{n} + ... = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Từ đó suy ra

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x.\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{2m+1}, \quad \forall x \in (-1,1)$$

6. $(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2} x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{1.2.....n} x^n + ...$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad \forall x \in (-1,1)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - ... + (-1)^n x^n + ..., \quad \forall x \in (-1,1)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + ... + (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n + ...$$

$$\forall x \in (-1,1]$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - ... + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n + ..., \forall x \in (-1,1]$$

- **Chuỗi Fourier.**

Cho hàm số $f(x)$ khả tích trên $[-\pi,\pi]$, chuỗi lượng giác có dạng

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx$$

trong đó

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\ a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx,\ b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx,\ k=1,2,...$$

- **Chuỗi Fourier trong dạng phức.**

$$c_0+\sum_{k=1}^{\infty}c_ke^{ikx}+c_{-k}e^{-ikx}\quad \text{hay}\quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_ke^{ikx}$$

trong đó $c_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx,\ \ k=\pm1,\ \pm2,\ \pm3,...$

- **Hàm số khai triển thành chuỗi Fourier.**

Nếu trong $[-\pi,\pi]$ chuỗi Fourier hội tụ về chính hàm số $f(x)$ thì nói rằng hàm số $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Fourier trên $[-\pi,\pi]$.

- **Điều kiện đủ để hàm số khai triển thành chuỗi Fourier.**

(Định lí Dirichlet): *Nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[-\pi,\pi]$ thì chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$ hội tụ về tổng $S(x)$ trên tập $\mathbb{R}$. Tổng $S(x)$ có tính chất:*

$$S(x)=\frac{1}{2}\left[f(x-0)+f(x+0)\right],\ \forall x\in\mathbb{R}$$

1. Nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ $T=2l$ bằng phép đổi biến $\begin{cases}x=\dfrac{l}{\pi}X\\ y=Y\end{cases}$ khi đó

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\frac{\pi x}{l}+b_n\sin n\frac{\pi x}{l}$$

trong đó

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos n\frac{\pi x}{l}dx,\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin n\frac{\pi x}{l}dx,\ n=1,2,...$$

2. Nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ $T=2l$ được mô tả bởi biểu thức giải tích trên $(\alpha,\alpha+2l)$ thì các hệ số Fourier được tính theo công thức sau:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+2l}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+2l}f(x)\cos n\frac{\pi x}{l}dx,\ b_n=\frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+2l}f(x)\sin n\frac{\pi x}{l}dx$$

3. Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos k\frac{\pi x}{l},\ \text{ trong đó }\ a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos k\frac{\pi x}{l}dx,\quad k=0,1,2,...$$

Tương tự, nếu $f(x)$ là hàm số lẻ thì

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin k\frac{\pi x}{l},\quad b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin k\frac{\pi x}{l}dx$$

- **Khai triển thành chuỗi Fourier của một hàm số bất kỳ.**

Xét hàm số $f(x)$ đơn điệu từng khúc và bị chặn trên (a,b), $a<b$.

A. Thác triển tuần hoàn. $$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}$$

trong đó $l=\dfrac{b-a}{2},\ a_0=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_a^b f(x)dx,\ \ a_k=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_a^b f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx,\ b_k=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_a^b f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\ k=1,2,...$

B. Thác triển chẵn, thác triển lẻ.

Hàm số $f(x)$ cho trên khoảng $(0,a)$ hay $[0,\mathrm{a}]$, $a>0$, người ta có thể dùng phương pháp thác triển lẻ hoặc chẵn hàm số đã cho.

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{a},\ \ b_k=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{k\pi x}{a}dx,\ \ k=1,2,...$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{a},\ \ a_k=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{k\pi x}{a}dx,\ \ k=0,1,2,...$$

- **Tích phân Fourier.**

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos z(u-x)du\quad\text{hay}\quad f(x)=\int_0^{+\infty}\left[a(z)\cos zx+b(z)\sin zx\right]dz$$

trong đó

$$a(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos zudu,\quad b(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin zudu$$

- **Các dạng đặc biệt của công thức tích phân Fourier.**

A. Hàm $f(x)$ là hàm số lẻ.

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin zxdz\int_0^{+\infty}f(u)\sin zudu$$

B. Hàm $f(x)$ là hàm số chẵn.

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos zxdz\int_0^{+\infty}f(u)\cos zudu$$

BÀI TẬP CHƯƠNG V

5.1. Cho chuỗi số $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ biết rằng chuỗi số $\sum_{p=1}^{\infty} a_{2p}$ hội tụ và chuỗi số $\sum_{p=0}^{\infty} a_{2p+1}$ phân kỳ. Chứng minh chuỗi số đã cho phân kỳ.

5.2. Chứng minh rằng các chuỗi số có số hạng tổng quát sau đây hội tụ và hãy tìm tổng của chúng.

a. $a_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, **b**. $a_n = \dfrac{1}{n^2+n}$

c. $a_n = \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ **d** . $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$

5.3. Xét sự hội tụ của các chuỗi số có số hạng tổng quát sau đây:

a. $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$, **b.** $a_n = arctg\dfrac{n^2-n}{n^2+1}$, **c.** $a_n = \dfrac{2^n+n}{3^n+n^3+3}$

d. $a_n = \ln(1+\mathrm{tg}\dfrac{1}{n^2})$, **e.** $a_n = \dfrac{\sqrt{n(n+2)}}{n^2+3\ln n}$, **f.** $a_n = \dfrac{2+\cos n}{n^\alpha}, \alpha > 0$

g. $a_n = n^{-(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}$, **h.** $a_n = (\dfrac{n}{n+1})^{n^2}$, **i.** $a_n = \dfrac{2^{n^2}}{n^{2^n}}$

j. $a_n = \dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$, **k.** $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}dx$, **l.** $a_n = \displaystyle\int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x^4+x+1}}$

m. $a_n = \displaystyle\int_n^{2n} \frac{dx}{x^{\frac{5}{2}}-\sin^2 x}$, **n.** $\displaystyle\int_o^{\infty} e^{-x^n}dx$

5.4. Cho chuỗi số dương $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hội tụ. Chứng minh rằng chuỗi số $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^\alpha,\ \alpha > 1$ cũng hội tụ.

5.5. Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ và tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $\forall n \geq n_0$ thoả mãn $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. Chứng minh rằng nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì chuỗi thứ nhất hội tụ.

5.6. Xét sự hội tụ của các chuỗi có số hạng tổng quát sau đây:

a. $a_n = \dfrac{n^2}{2^n+n}$, **b.** $a_n = \dfrac{3^{2^n}}{2^{3^n}}$, **c.** $a_n = \dfrac{\ln(n!)}{n!}$

d. $a_n = n!\prod_{k=1}^{n}\sin\dfrac{1}{2^k}$, **e.** $a_n = \dfrac{2.4...(2n)}{n^n}$, **f.** $a_n = \dfrac{a^n}{n^2+1}$, a>o

g. $a_n = (\dfrac{n+1}{2n-1})^{n\ln n}$, **h.** $a_n = (\mathrm{arctg}\dfrac{1}{n})^n$, **i.** $a_n = \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$

5.7. Xét sự hội tụ của các chuỗi có số hạng tổng quát sau đây:

a. $a_n = (-1)^n(\mathrm{tg}\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \sin\dfrac{1}{\sqrt{n}})$, **b.** $a_n = (1 - \dfrac{n}{\ln n})^{-n}$,

c. $a_n = \sin(\pi\sqrt{n^4+1})$, **d.** $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2+n+2}$,

e. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n - \ln n}$, **f.** $a_n = \sin\pi(\dfrac{1}{n} + n)$,

g. $a_n = \dfrac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{1+n}$, **h.** $a_n = \dfrac{(-1)^n n^2}{(\ln n)^n}$.

5.8. Chứng minh rằng chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}(\dfrac{2x+1}{x+2})^n$ hội tụ đều trên đoạn [-1,1]

5.9. Chứng minh rằng chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^2+n}{n^2}$ hội tụ đều trên đoạn [a,b] nhưng không hội tụ tuyệt đối trên đoạn đó

5.10. Chứng minh rằng chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ hội tụ đều trên [a,+∞) với a>0 nhưng không họi tụ đều trên [o,+∞)

5.11. Cho chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+x^n}$

a. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm
b. Xét sự liên tục của tổng S(x)
c. Xét sự khả vi của tổng S(x)

5.12. Tìm miền hội tụ đều của các chuỗi hàm

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}xe^{-xn^2}$ **b.** $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}(-1)^n$

5.13. Chứng minh rằng hàm số f(x) $=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+x)}$ xác định, liên tục, khả vi trên $\left[0,+\infty\right]$

5.14. Tìm miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa có số hạng tổng quát sau:

a. $u_n(x) = x^n\ln n$, **b.** $u_n(x) = (nx)^n$

c. $u_n(x) = (-1)^{n=1}\dfrac{x^n}{n}$ **d.** $u_n(x) = \dfrac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$, **e.** $u_n(x) = \left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n(x-2)^{2n}$

f. $u_n(x) = \dfrac{(5x)^n}{n!}$. **g.** $u_n(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n!}$, **h.** $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n^\alpha}, \alpha > o$

5.15. Tìm miền hội tụ và tính tổng các chuỗi luỹ thừa có số hạng tổng quát sau:

a. $u_n(x) = (3n+1)x^{3n},\ n \geq 1$, **b.** $u_n(x) = (2^n + 3^n)x^n,\ n \geq o$,

c. $u_n(x) = \dfrac{n^2+3n-1}{n+3}\dfrac{x^n}{n!},\ n \geq o$, **d.** $u_n(x) = chna.x^n,\ a > o,\ n \geq o$,

e. $u_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}x^{n-1}}{n},\ n \geq 1$.

5.16. Khai triển thành chuỗi Taylor của các hàm số sau:

a. f(x) = $\dfrac{1}{x}$ tại lân cận điểm x=3,

b. f(x) = e^{x-1} tại lân cận điểm x=-1,

c. f(x) = sinx tại lân cận điểm x=2.

5.17. Khai triển thành chuỗi M'claurin các hàm số sau:

a. f(x) = chx , **b.** f(x) = x^2e^x , **c.** f(x) = $\sin^2 x$, **d.** f(x) = $e^x \cos x$

e. f(x) = $\ln(x^2 - 5x + 6)$, **f.** f(x) = $\dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

g. f(x) = $\begin{cases} \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 2 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ **h.** f(x) = $\displaystyle\int_0^x \cos t^2 dt$

5.18. Cho hai chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ có bán kính hội tụ tương ứng là R_1, R_2

a. Chứng minh rằng nếu tồn tại $n_0 \in N$ sao cho $|a_n| \leq |b_n|, \forall n \geq n_0$ thì $R_1 \geq R_2$

b. Chứng minh rằng nếu $|a_n| \sim |b_n|$ khi $n \to \infty$ thì $R_1 = R_2$.

5.19. Tìm bán kính hội tụ của các chuỗi luỹ thừa có số hạng tổng quát sau:

a. $u_n(x) = \dfrac{chn}{sh^2 n}x^n$, **b.** $u_n(x) = \arccos(1 - \dfrac{1}{n^2})x^n$,

c. $u_n(x) = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})x^n$,

d. $u_n(x) = (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})x^n$, **e.** $u_n(x) = \left[arctg(1 + \dfrac{1}{n^2}) - \dfrac{\pi}{4}\right]x^n$.

5.20. Tính các số sau với độ chính xác là 10^{-4}

a. $\sqrt{e}$, **b.** $\sqrt[5]{1,1}$, **c.** ln (1,04) , **d.** $\cos 18^0$

5.21. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số f(x) lẻ, tuần hoàn với chu kỳ 2π và

f(x) = $\pi - x$ với 0<x<π

5.22. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số f(x) chẵn, tuần hoàn với chu kỳ 2π và

$$f(x) = 1-\frac{2x}{\pi} \quad \text{với } 0<x<\pi$$

Từ đó hãy tính tổng $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

5.23. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số:

$$f(x) = 1-\frac{x^2}{\pi^2} \quad \text{với } -\pi<x<\pi$$

Từ đó tính tổng $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

5.24. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số: $f(x) = \sin\frac{x}{2}$ với $-\pi<x<\pi$

5.25. Khai triển hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{khi } 0<x<\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \text{khi } \frac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$$

thành chuỗi theo các hàm

a. sin nx, **b.** cos nx, $n\in\mathbb{N}$

Từ đó tính tổng

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

5.26. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số

$$f(x) = e^x \quad \text{với } -1<x<1$$

5.27. Dùng công thức tích phân Fourier chứng minh

a. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos ux+u\sin ux}{1+u^2}du = \begin{cases} 0 & \text{khi } x<0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{khi } x=0 \\ \pi e^{-x} & \text{khi } x>0 \end{cases}$

b. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{u^3\sin ux}{u^4+4}du = \frac{\pi}{2}e^{-x}\cos x$ khi $x>0$

c. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos ux}{1+u^2}du = \frac{\pi}{2}e^{-x}$ khi $x>0$

5.28. Tìm tích phân Fourier của các hàm số chẵn sau:

a. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{khi } x>1 \end{cases}$, **b.** $f(x) = \begin{cases} x & \text{khi } 0\le x\le a \\ 0 & \text{khi } x>a \end{cases}$.

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

CHƯƠNG I
SỐ THỰC

1.2. Rút gọn về dạng toàn phương bằng phương pháp Gauss.

a. (0,0,0)

b. $\left(3z, \frac{3}{2}z, z\right) \in \mathbb{R}$ hoặc (6t, 3t, 2t) , $t \in \mathbb{R}$

1.3. Không tồn tại InfE , SupE = -1 = MaxE

1.4. **a.** 1; **b.** $\frac{1}{4}$; **c.** 0 ; **d.** 0.

1.5. **a.** 0; **b.** $\frac{a}{2}$; **c.** 0 ; **d.** 0.

1.6. **a.** 1; **b.** $\frac{3}{2}$; **c.** 1.

1.7. Hãy biểu diễn tam thức dưới dạng chính tắc sau đó sử dụng nguyên lý kẹp

1.8. **a.** Dùng phương pháp phản chứng.

b. Chứng minh $\{x_n\}$ tăng và không bị chặn trên.

1.9.. **a.** Dùng qui nạp; **b.** $x_n = \frac{2x_n + 3}{x_n + 2}$; **c.** $x_{n+1} - x_n = \frac{(\sqrt{3} - x_n)(\sqrt{3} + x_n)}{x_n + 2}$

Bằng qui nạp chứng minh:

* Nếu $x_0 < \sqrt{3}$ thì $\{x_n\}$ tăng và $x_n < \sqrt{3}$, $\forall n$. Qua giới hạn sẽ có $x_n \to \sqrt{3}$
* Nếu $x_0 > \sqrt{3}$ thì $\{x_n\}$ giảm và $x_n > \sqrt{3}$, $\forall n$. Qua giới hạn sẽ có $x_n \to \sqrt{3}$
* Nếu $x_0 = \sqrt{3}$ thì $x_n = \sqrt{3}$,$\forall n$.

Tóm lại $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$ không phụ thuộc x_0, tức là không phụ thuộc a_0, b_0.

1.10. **a.** Rõ ràng $x_n < x_{n+1}$ và $x_n < 1 + \frac{1}{1.2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{n} < 2, \quad \forall n > 1$

b. Tương tự **a.**

1.11. **a.** $x_n > \sqrt{n}$; **b.** $x_n = \log_a(n+1)$.

1.12. **a.** Rõ ràng $x_n > 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có biểu diễn

$$x_n = \frac{x_{n-2}}{2 + x_{n-2}} + 1 \qquad \text{và} \qquad x_{n+1} - 2 = \frac{x_{n-1} - 2}{x_{n-1} + 2}, \forall n$$

Suy ra : $\{x_{2n}\}$ tăng và bị chặn trên bởi số 2; $\{x_{2n+1}\}$ giảm và bị chặn dưới bởi số 2.

Lý luận sẽ nhận được $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$

b. Qui nạp sẽ nhận được dãy $\{x_n\}$ đơn điệu giảm và bị chặn dưới bởi số 0 , suy ra

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \geq 0$, ta có $a^2 = 1 + a \Rightarrow a = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$

c. Bằng qui nạp chứng minh được $-\frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) < x_n < 0,\ \forall n \geq 1$ ngoài ra

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{(3+x_{n-1})(3+x_n)}$$

Vậy dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới do đó $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = -\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$

d. Bằng qui nạp chứng minh $x_n < x_{n+1}$ và $x_n < \sqrt{a} + 1$,$\forall n$

Đặt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b, \qquad b = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$

e. $x_2 = \frac{x_1 + x_0}{2}$, $x_3 = \frac{x_2 + x_1}{2}$,...

$x_2 - x_1 = \frac{1}{2}(x_0 - x_1)$, $x_3 - x_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$, ...

Bằng qui nạp chứng minh $x_k - x_{k-1} = (-1)^{k-2}\frac{x_2 - x_1}{2^{k-2}}, \quad k \geq 2$

Cộng liên tiếp $x_n - x_1 = (x_2 - x_1)[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-2}}]$

$$= \frac{2}{3}(x_2 - x_1) - (-1)^{n-2}\frac{x_2 - x_1}{3.2^{n-2}}$$

$$x_n = \frac{2x_2 - x_1}{3} - (-1)^{n-2}\frac{x_2 - x_1}{3.2^{n-2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}$$

f. Rõ ràng $x_n > 0$, $\forall n$, bằng qui nạp chứng minh được $\{x_n\}$ đơn điệu tăng và $x_n < 1, \forall n$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a = \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2}$$

g. $x_n = \frac{1}{2}(\frac{5}{x_{n-1}} + x_{n-1}) \geq \sqrt{5} \Rightarrow x_{n-1} - x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} - \frac{5}{x_{n-1}}),\ \forall n$. Suy ra $x_n > x_{n+1}$.

Vậy tồn tại $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ và suy ra $a = \sqrt{5}$.

SỐ PHỨC

1.16. Đặt $z = x + iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \in E \cap F \Leftrightarrow x^2 - y^2 + i(2xy + \frac{y}{x^2+y^2}) = \frac{x}{x^2+y^2} + 3i \Leftrightarrow z^2 = \frac{1}{z} + 3i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 + 3y = 1 \\ 3x^2y - 3x - y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) \in G \cap H$$

1.17. Không

1.18. Không tồn tại.

1.19. $\begin{cases} xyz(xyz-1) = 0 \\ xy = z,\ yz = x,\ zx = y \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (0,0,0), (1,1,1) \\ (1,-1,-1), (-1,1,-1) \\ (-1,-1,1) \end{matrix}$

1.20. Xét $(f(i))^2 = f(i^2) = f(-1) = -1 \Rightarrow f(i) = \varepsilon i,\ \varepsilon = \{\pm 1\}$

Xét $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+iy) = f(x) + f(iy) = f(x) + f(i)f(y) = x + \varepsilon iy$

Kiểm tra $f(z) = z$ hoặc $f(z) = \overline{z}$ ta thấy thoả mãn

1-21. $z = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}i$

1.22. $z \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$

1.23. $\overline{a+b+c} = 0 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc+ca+ab}{abc} = 0 \Rightarrow a^2 = -a(b+c) = bc$

$$\Rightarrow a^3 = abc$$

Do tính đối xứng suy ra $a^3 = b^3 = c^3$

1.24. Áp dụng $\forall z \in \mathbb{C}$ thì $|z|^2 = z\overline{z}$ và các tính chất của phép lấy liên hợp.

1.25. a. Đường tròn tâm $(0, \frac{4}{3})$ và bán kính $\frac{2}{3}$

b. Biểu diễn $\frac{z^2}{z+i} = \frac{z^2(\overline{z}-i)}{|z+i|^2}$, $\mathrm{Re}(z^2(\overline{z} - i)) = x(x^2 + y^2 + 2y)$

Trục Oy và đường tròn tâm (0,-1) bán kính 1 bỏ đi điểm (0,-1)

1.26.. $\sqrt{13}$

1.27. $\begin{cases} 1 + \cos x + \cos y = 0 \\ \sin x + \sin y = 0 \end{cases}$

$(x,y) = (\pm\frac{2\pi}{3} + 2m\pi, \mp\frac{2\pi}{3} + 2n\pi),\ m, n \in \mathbb{Z}$

1.28. a. $z = e^{\pm i\theta}$

b. Gọi $z = ix$ là nghiệm thuần ảo $\Rightarrow x = 1$

$z^3 + (1-2i)z^2 + (1-i)z - 2i = (z-i).[z^2 + (1-i)z + 2]$

$z_1 = i,\ z_{2,3} = \frac{1}{2}\{-1 - \sqrt{\sqrt{17} - 4} + (1 \pm \sqrt{\sqrt{17} + 4})i\}$

1.29. a. Đưa hệ về tương đương với $\begin{cases}(x^2-y^2)(x+y)^2=1029\\(x^2-y^2)(x-y)^2=189\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}u=x-y\\v=x+y\end{cases}\Rightarrow u^8=3^8$

$(5,2)$, $(-2\omega,-5\omega)$, $(5i,2i)$, $(-2i\omega,-5i\omega)$, $(-5,-2)$, $(2\omega,5\omega)$, $(-5i,-2i)$, $(2i\omega,5i\omega)$

trong đó $\omega=e^{2i\frac{\pi}{8}}=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

b. Suy ra $x=y^2=z^4=x^8 \Rightarrow x=0,\ x^7=1$

$(0,0,0)$, $(\omega_k,\omega_k^4,\omega_k^2)$, $k=\overline{0,\ 6}$, $\omega_k=e^{\frac{2ik\pi}{7}}$

1.31. Sử dụng công thức $\cos^3 kx=\dfrac{1}{4}(\cos 3kx+3\cos kx)$

* $x\in 2\pi\mathbb{Z}$ thì $S=n$

* $x\notin 2\pi\mathbb{Z}$ thì $S=\dfrac{1}{4}\{\cos\dfrac{3nx}{2}\dfrac{\sin\frac{3(n+1)x}{2}}{\sin\frac{3x}{2}}+3\cos\dfrac{nx}{2}\dfrac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}-4\}$

1.32. $A_n(x)=-1+2\sum_{k=0}^{n}\cos kx=-1+2\cos\dfrac{nx}{2}\dfrac{\sin\frac{(n+1)}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$

$$A_n(x)=\frac{\sin(n+\frac{1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$B_n(x)=\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=0}^{n}\sin(k+\frac{1}{2})x=\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$$

CHƯƠNG II

2.6. Giả sử tồn tại $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ sao cho $f(a)\neq f(b)$ rõ ràng $g(a)=g(b)\Rightarrow g(x)=g(a)\ \forall x\in\mathbb{R}$.

2.7. a. ϕ, **b.** $f(x)=x^2-x+1$

c. $f(x)=0$ (thay liên tiếp $x=0$, $y=0$;
$x=0$, $y=y$;
$x=-y^2$, $y=y$)

d. $f(x) = x^3 + c,\ \ c = const$

(Qui về $\forall\left(X,Y\right)\in\mathbb{R}^2,\ f(X) - f(Y) = X^3 - Y^3$ trong đó $X = x + y,\ Y = x - y$).

e. $f(x) = \dfrac{1}{2}$

Đặt
$$x = y = 0,\ z = 1 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{2},\ x = 0,\ z = 0 \Rightarrow f(y) \le \frac{1}{2}$$
$$y = z = 1 \Rightarrow f(x) \ge \frac{1}{2},\ x = y = z = 1 \Rightarrow f\left(1\right) = \frac{1}{2}$$

2.8. $x = \sqrt{2}$

2.10. **a.** $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{10}$ **;** **b.** $\dfrac{n(n+1)}{2}$ **;** **c.** $2\dfrac{1}{24}$ **;** **d.** $\dfrac{n(n-1)}{2}a^{n-2}$.

2.11. **a. 1;** **b.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2.12. **a.** $\dfrac{\alpha}{m} - \dfrac{\beta}{n}$**;** **b.** $\dfrac{\alpha}{m} + \dfrac{\beta}{n}$

2.13. **a.** $\cos a$ **;** **b.** $\dfrac{1}{4}$ **;** **c. 14 ;** **d.** $-\dfrac{1}{12}$ **.**

2.15. **a.** $\dfrac{1}{12}$ **;** **b.** $\dfrac{1}{3}$**.**

2.15. **a. 0 ;** **b. 1 ;** **c.** e^{-2}**;** **d.** $e^{-\frac{1}{2}}$**.**

2.16. **a. 1 ;** **b. e ;** **c. 1 ;** **d. 1 .**

2.17. **a. 0 ;** **b.** $\ln x$ **;** **c. 1 ;** **d.** $\dfrac{3}{2}$ **.**

2.18. **a.** 0 ; **b.** 0 ; **c.** 1.
d. 1 nếu x là vô tỉ; 0 nếu x là số nguyên; không có giới hạn với x còn lại.

2.19. **a.** liên tục trên $\mathbb{R}$;
b. liên tục trên $\mathbb{R}$ với A = 4
liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ với A $\neq$ 4.
c. liên tục trên $\mathbb{R}$
d. liên tục trên $\mathbb{Z}$.
e. liên tục tại điểm duy nhất $x = 1$.
f. liên tục tại điểm duy nhất $x=0$.

2.21. **a.** $f(g(x)) = 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$

$$g(f(x)) = \begin{cases} 2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

b. $f(g(x)) = 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$

$g(f(x)) = 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$. ($x = \left[x\right] + r$, $0 \le r < 1$).

2.22. **a.** $f(x) = f\left(\dfrac{x}{3n}\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (Bằng qui nạp) suy ra $f(x) = c = const, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

b. $f(c) = c = const, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Bằng cách chứng minh: $f(x) = f(\varphi_n(x)), \quad \varphi_n(x) = \varphi(\varphi_{n-1})$

trong đó $\varphi_1(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

c. $f(x) = 0$. $\forall x \in \mathbb{R}$

xét $x = 0$: $f(0) = -f(0^2) \Rightarrow f(0) = 0$

xét $x > 0$: $f(x) = (-1)^n f\left(x^{\frac{1}{2n}}\right) \Rightarrow f(x) = 0$

Do $f(x)$ chẵn suy ra $f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

2.23. $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$

2.34. ϕ.

CHƯƠNG III

3.2. **a.** $y' = (x^2-1).|x+1|.(5x-1)$

b. $y' = \begin{cases} 2x(1-x^2)e^{-x^2}, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

c. $y' = \begin{cases} x^{n-2}\left(nx\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}\right), & x \ne 0,\ n \ge 2 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

d. $y' = 2|x|$

3.5. **a.** $f_p'(0) = 1, \quad f_t'(0) = -1$

b. $f_p'(0) = -\dfrac{2}{|a|}, \quad f_t'(0) = \dfrac{2}{|a|}$

c. $f_p'(0) = 0, \quad f_t'(0) = 1$

d. $f'(0) = 0$.

3.6. **a.** $y' = \dfrac{1}{\sin x}$, **b.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$,

c. $y' = -\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{2}{x}e^{\sin^2\frac{1}{x}}$, **d.** $y' = \dfrac{4x}{1+x^4}$,

e. $y' = -\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$, **f.** $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

g. $y'=\dfrac{2(\ln x+1)}{x^2\ln^2 x-1}$, **h.** $y'=\dfrac{x-a}{\sqrt{(2ax-x^2)^3}}$,

i. $y'=\dfrac{2}{x-ax^5}$, **k.** $y'=\dfrac{20\sin 4x}{(1+\cos 4x)}$,

l. $y'=\dfrac{\sin 2\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$, **m.** $y'=\dfrac{x^2-1}{2x^2\cos^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{1+tg\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}}$,

n. $y'=\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$, **o.** $y'=\dfrac{1}{x.\log_5 x.\log_3(\log_5 x).\ln 2.\ln 3.\ln 5}$.

3.7. a. $y'=x^{x^2+1}(2\ln x+1)$,

b. $y'=(\sin x)^{\cos x}\left(\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\ln\sin x\right)$,

c. $y'=\dfrac{57x^2-302x+361}{20(x-2)(x-3)}.\dfrac{(x+1)^2\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$,

d. $y'=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x\left(\dfrac{1}{x+1}+\ln\dfrac{x}{x+1}\right)$,

e. $y'=(x^2+1)^{\sin x}\left[\dfrac{2x\sin x}{x^2+1}+\cos x\ln(x^2+1)\right]$,

f. $y'=\dfrac{x^4+6x^2+1}{3x(1-x^4)}\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

g. $y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}\sqrt[3]{x^2}$,

h. $y'=y\left(\ln 2+\dfrac{2}{x}-1-\ln x\right)$,

i. $y'=\dfrac{1}{e^x}x^{x+1}\ln x(\ln x-1)$,

k. $y'=\dfrac{1}{\ln^2\cos x}(\text{cotg}x\ln\cos x+\text{tg}x\ln\sin x)$.

3.8. a. $dy=-\dfrac{dx}{\sin^3 x}$, **b.** $\Delta f(1)=\Delta x+3(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$, $df(1)=\Delta x$,

c. 0,3466.

3.10. a. $y_x'=-\dfrac{b}{a}tg\varphi$; **b.** $y_x'=\dfrac{t}{2}$; **c.** $y_x'=\dfrac{1+t^2}{t(2+3t-t^2)}$; **d.** $y_x'=\cot g\dfrac{t}{2}$;

3.11. a. $1-4x^3-3x^6$; **b.** $\dfrac{1}{2x^2}\left(\cos x-\dfrac{\sin x}{x}\right)$; **c.** $-\cot gx$.

3.14. **a.** $y^{(n)} = \left[2^x + (-1)^n 2^{-x}\right]\ln^n 2$; **b.** $y^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$;

c. $y^{(n)} = \dfrac{n!(ad-bc)(-c)^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}$; **d.** $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n\sqrt{x^{2n-1}}}$;

e. $y^{(n)} = \dfrac{(2n+1)!!}{2^n}\sqrt{x}$; **f.** $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n.x^{\frac{2n+1}{2}}}(x-2n+1)$.

3.15. **a.** $y^{(20)} \approx (x^2-379)\sin x - 40x\cos x$,

b. $y^{(10)} = e^x\sum\limits_{n=0}^{10}(-1)^n C_{10}^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$,

c. $y^{(n)} = e^x\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \sin\left(x+\dfrac{k\pi}{2}\right)$,

d. $y^{(n)} = \dfrac{1}{2}\left\{(a-b)^n\cos\left[(a-b)x+\dfrac{n\pi}{2}\right]-(a+b)^n\cos\left[(a+b)x+\dfrac{n\pi}{2}\right]\right\}$,

e. $y^{(100)} = \dfrac{197!!(399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}$,

f. $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n+1}.1.4...(3n-5)(3n+2x)}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}$,

g. $y^{(n)} = e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin(bx+c+n\varphi)$, $\begin{cases}\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$

3.17. **a.** $A_n = \dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$ khi $x \neq 1$; $A_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ khi $x = 1, n \geq 1$,

b. $B_n = \dfrac{n(n-1)x^{n+1}-2(n^2-1)x^n+n(n+1)x^{n-1}-2}{(x-1)^3}$ khi $x \neq 1$; $B_n = \dfrac{n(n^2-1)}{3}$ khi $x = 1, n \geq 2$,

c. $C_n = \dfrac{nx^{n+2}-(2n^2+2n-1)x^{n+1}+(n+1)^2x^n-x-1}{(x-1)^3}$ khi $x \neq 1$; $C_n = \dfrac{n(n+1(2n+1))}{6}$ khi $x = 1, n \geq 1$

3.23. **a.** $x_1 \in (-2,-1)$, $x_2 \in (-1,1)$, $x_3 \in (1,2)$.

b. (Nhận xét $f(0) = f(1)$)

3.26. **a.** $a = 0$, $b = \dfrac{1}{2}$; **b.** $k = 0$.

3.27. **a.** 0, **b.** ∞, **c.** 1, **d.** ∞,

e. $\dfrac{1}{2}$, **f.** $\dfrac{\pi^2}{2}$, **g.** $\dfrac{1}{8}$, **h.** $\dfrac{2}{3}$,

i. $\frac{a}{\sqrt{b}}$. **j.** 2, **k.** $\ln\frac{a}{b}$, **l.** 1.

3.28. **a.** $\frac{1}{2}$, **b.** 0, **c.** $\frac{p-q}{2}$,

d. 0, **e.** $\frac{1}{12}$, **f.** -1.

3.29. **a.** 1, **b.** 1, **c.** e^3,

d. $e^{\frac{1}{3}}$, **e.** e, **f.** $e^{\frac{1}{2}(\ln^2 a-\ln^2 b)}$.

3.30. **a.** Tăng $[0,+\infty)$ không có cực trị,

b. Tăng $\left(0,\frac{1}{e}\right]$, giảm $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$, $x_{\max}=\frac{1}{e}$,

c. Giảm $(-\infty,-1]$, tăng $[1,+\infty)$, không có cực trị,

d. Giảm $(-\infty,0),(0,1)$, tăng $[1,+\infty)$. $x_{\min}=1$,

e. Tăng $\left[0,\frac{3}{4}a\right]$, giảm $\left[\frac{3}{4}a,a\right]$, $x_{\max}=\frac{3}{4}a$.

3.31. **a.** $\min(0,0)$, $\max\left(2\sqrt[3]{\frac{2}{49}},\frac{12}{14}\sqrt[3]{\frac{4}{7}}\right)$,

b. $\min(0,0)$, $\max(-1,1)$,

c. $\min(0,\sqrt[3]{4})$, $(2,\sqrt[3]{4})$, $\max(1,2)$,

d. $\min\left(-1,-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, $\max\left(1,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$,

e. $\max(1,1)$,

f. $\max(12k\pi,5)$, $\max\left(12\left(k\pm\frac{2}{5}\right)\pi,5\cos\frac{2\pi}{5}\right)$,

$\min\left(12\left(k\pm\frac{1}{5}\right)\pi,-5\cos\frac{\pi}{5}\right)$, $\min\left(6(2k+1)\pi,1\right)$,

g. $\min(0,0)$, $\max\left(\pm\sqrt{\frac{4n+1}{2}\pi}\ ,\ 1\right)$,

h. $\min\left(1,\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}\right)$.

3.35. **a.** $y_{\max}=1$, $y_{\min}=\frac{3}{5}$,

b. $y_{\min}=(a+b)^2$ không có $y_{\max}$,

c. $y_{\max}=1$ không có $y_{\min}$,

d. $y_{\max} = \dfrac{\pi}{4}$, $y_{\min} = 0$.

3.36. **a.** $x = 0$, **b.** $y = 0$,

c. $y = 0$, **d.** $y = -2$, $y = 2(x-1)$,

e. $x = -\dfrac{1}{e}$, $y = x + \dfrac{1}{e}$, **f.** $x = 0$, $y = x$.

3.37. **a.** $x_u = 0, \ \pm 6$, **b.** $x_u = -1, \ -3$,

c. không có điểm uốn , **d.** $x_u = ae^{\frac{3}{2}}$.

3.39. **a.** Đường thẳng $x = 3$; **b.** Đường thẳng $3y - 4x = 5$; **c.** Parabola $y = x^2 - x$.

CHƯƠNG IV

4.1. a. $\dfrac{a^x}{\ln a} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} + C$, **b.** $\dfrac{1}{3}x^3 - x + arctgx + C$,

c. $\dfrac{a^{\alpha x} b^{\beta x}}{\alpha \ln a + \beta \ln b} + C$, **d.** $\dfrac{1}{3(b-a)}\left\{\sqrt{(x-a)^3} - \sqrt{(x-b)^3}\right\} + C$,

e. $\dfrac{1}{5}\ln\left|x^5 + \sqrt{x^{10} - 1}\right| + C$, **f.** $\dfrac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3} + C$,

g. $2\sqrt{x^3 + 2x - 1} + C$, **h.** $\operatorname{tg}(1 + \ln x) + C$,

i. $-2\sqrt{1-x^2} - \dfrac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3} + C$, **j.** $\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C$,

k. $\dfrac{2}{3}\left[x^3 - \sqrt{(x^2-1)^3}\right] - x + C$ (Nhân cả tử và mẫu với $(x - \sqrt{x^2-1})^2$),

l. $-\dfrac{1}{9}\left\{\sqrt{1-9x^2} + (\arccos 3x)^3\right\} + C$ (Tương tự bài i),

m. $\dfrac{1}{12}\ln\left|\dfrac{2x-3}{2x+3}\right| + C$, **n.** $\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{2} + C$,

o. $2\arcsin\dfrac{x-1}{2} - \dfrac{(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}}{2} + C$,

p. $\dfrac{1}{4}(2x-1)\sqrt{3x^2-3x+1} + \dfrac{1}{8\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3x^2-3x+1} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}(2x-1)\right| + C$,

q. $\dfrac{1}{2}\ln(2x + 1 + \sqrt{4x^2 - 4x - 3}) + C$, **r.** $\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{3x-1}{3} + C$.

4.2. **a.** $-\dfrac{8+30x}{375}\sqrt{(2-5x)^2} + C$ (Đặt $\sqrt{2-5x} = t$),

b. $\dfrac{1}{16}\left\{\dfrac{1}{13}(1+2x^2)^{20} - \dfrac{1}{6}(1+2x^2)^{10} + \dfrac{1}{11}\right\}(1+2x^2)^{110} + C$ (Đặt $t = (1+2x^2)^{10}$),

c. $-\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right|+C$ (Biến đổi $\dfrac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{d\left(\dfrac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1+\dfrac{1}{|x|^2}}}$),

d. $-\arcsin\dfrac{1}{|x|}+C$, **e.** $2\arcsin\sqrt{x}+C$, **f.** $\ln\left|\ln(\ln x)\right|+C$ (Đặt $\ln(\ln x)=t$),

g. $\mathrm{arctg}\sqrt{3x^2+5}+C$ (Đặt $t=\sqrt{3x^2+5}$),

h. $\dfrac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\dfrac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|+C$.

4.3. **a.** $-\sqrt{x}+(1+x)arctg\sqrt{x}+C$, **b.** $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$,

c. $xchx-shx+C$, **d.** $x\left\{(\ln|x|-1)^2+1\right\}+C$,

e. $-x\cot gx+\ln|\sin x|+C$, **f.** $2\sqrt{1+x}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C$,

g. $\dfrac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C$, **h.** $-\dfrac{\ln|x|+1}{x}+C$,

i. $-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\sin^2 x}+\cot gx\right)+C$, **j.** $-\dfrac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)+C$,

k. $x-\dfrac{1-x^2}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+C$, **l.** $xarctg\sqrt{2x-1}-\dfrac{\sqrt{2x-1}}{2}+C$,

m. $\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x+C$, **n.** $-\dfrac{x}{2(1+x^2)}+\dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}x+C$,

o. $\dfrac{x}{2a^2(a^2+x^2)}+\dfrac{1}{2a^3}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a}+C$, $(a\neq 0)$,

p. $\dfrac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{arctgx}+C$, **q.** $-\left\{x+\cot gx\ln(e\sin x)\right\}+C$,

r. $4\sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x}\arcsin\dfrac{x}{2}+C$.

4.4. **a.** $\dfrac{x^3}{3}-a^2x+a^2\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a}+C$, **b.** $\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{|x+1|}+\mathrm{arctg}x-\dfrac{1}{x+1}+C$,

c. $-\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{x+2}{x^2+2x+2}+\mathrm{arctg}(x+1)\right\}+C$ (Phân tích $x^2+2x+1=(x+1)^2+1$),

d. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\dfrac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}+C$ (Biến đổi $\dfrac{x^2-1}{x^4+1}dx=\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{x^2+\dfrac{1}{x^2}}dx=\dfrac{d\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2}$),

e. $\dfrac{x^3+2x}{6(x^4+x^2+1)}+C$

Phân tích $x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$,

f. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arctg}(\sqrt{2}x+1)+\text{arctg}(\sqrt{2}x-1)+C$,

Phân tích $\frac{1}{x^4+1}=\frac{x+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}(x^2+\sqrt{2}x+1)}-\frac{x-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}(x^2-\sqrt{2}x+1)}$,

g. $\frac{1}{10}\left(\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+1}+\frac{1}{x^{10}+1}\right)+C$,

Phân tích $\frac{1}{x(x^{10}+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x^9}{x^{10}+1}-\frac{x^9}{(x^{10}+1)^2}$,

h. $\text{arctg}x+\frac{1}{3}\text{arctg}x^3+C$

Phân tích $\frac{x^4+1}{x^6+1}=\frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}=\frac{1}{x^2+1}+\frac{x^2}{x^6+1}$,

4.5. a. $-\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}+C$ Đặt $x=tgt$,

b. $-\frac{at}{1+t^4}+\frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}+\frac{a}{2\sqrt{2}}arctg\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}}+C$,

với $t=\sqrt[4]{\frac{x}{a-x}}$ và xem kết quả bài 4.f.

c. $\sqrt{x}+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x}+C$ Đặt $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=t$,

d. $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C$ Đặt $\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}=t$,

e. $\sqrt{x^2+2x+2}+\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})-\sqrt{2}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{2(x^2+2x+2)}}{x}\right|+C$,

Biến đổi $\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}=\frac{1}{2}\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}+\frac{2}{x\sqrt{x^2+2x+2}}$

Tính $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}}=\sqrt{2}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{2(x^2+2x+2)}}{x}\right|+C$ (đặt $x=\frac{1}{t}$),

f. $(\sqrt{x}-2)\sqrt{1-x}-\arcsin\sqrt{x}+C$,

Hai bước đổi biến : $u=\sqrt{x}$, $t=\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}$,

4.6. a. $\frac{1}{4}\ln\frac{(1+t)^2(t^2+t-1)}{(1-t)^2(t^2-t+1)}+\frac{\sqrt{3}}{2}arctg\frac{\sqrt{3}t}{1-t^2}+C$ với $t=\sqrt[3]{\sin x}$,

b. $\sqrt{\text{tg}x}+C$ Đặt $t=\text{tg}x$,

c. $\dfrac{4}{\sqrt{\cos\dfrac{x}{2}}}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\cos\dfrac{x}{2}}-\ln\dfrac{1+\sqrt{\cos\dfrac{x}{2}}}{1-\sqrt{\cos\dfrac{x}{2}}}+C$ Đặt $t^2=\cos\dfrac{x}{2}$,

d. $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{(1+t^2)^2}{t^4-t^2+1}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2t^2-1}{\sqrt{3}}+C$ Đặt $t=\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}$,

e. $-\dfrac{1}{5}(2\sin x+\cos x)+\dfrac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\operatorname{arctg}2}{2}\right)\right|+C$ Đặt $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$,

f. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}+C$ Đặt $\operatorname{tg}x=t$,

g. $-\dfrac{t}{4(t^2+2)}+\dfrac{3}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{t}{\sqrt{2}}+C$ với $t=\operatorname{tg}x$,

h. $\dfrac{1}{\sin(b-a)}\ln\left|\dfrac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|+C$ Biểu diễn $\sin(a-b)=\sin\{(x+a)-(x+b)\}$,

i. $\dfrac{1}{\cos a}\ln\left|\dfrac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\cos\dfrac{x+a}{2}}\right|+C$ Biểu diễn $\cos a=\cos\left\{\dfrac{x-a}{2}-\dfrac{x+a}{2}\right\}$.

4.7. **a.** $x-\coth x+C$ Sử dụng $\coth^2 x=1+\dfrac{1}{sh^2x}$,

b. $\dfrac{1}{24}\operatorname{ch}6x-\dfrac{1}{16}\operatorname{ch}4x-\dfrac{1}{8}\operatorname{ch}2x+C$,

c. $2\sqrt{\operatorname{ch}x-1}+C$ Biểu diễn $\sqrt{\operatorname{ch}x+1}=\dfrac{\sqrt{\operatorname{ch}^2x-1}}{\sqrt{\operatorname{ch}x-1}}$,

d. $\dfrac{\operatorname{sh}x-2}{\operatorname{ch}x}+C$.

4.8. **a.** $\dfrac{x^2|x|}{3}+C$,

b. $\begin{cases} x+\dfrac{1}{4}x^3+1+C & , |x|>1 \\ \dfrac{1}{2}x|x|-x+C & , |x|\le 1 \end{cases}$,

c. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}+C \\ -\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}+C \end{cases}$ $\max(1,\ |x|)=\begin{cases} 1 & , |x|\le 1 \\ |x| & , |x|>1 \end{cases}$,

d. $\dfrac{1}{2}(x+1)|x+1|+\dfrac{1}{2}(1-x)|1-x|+C$,

4.9. **a.** $I_n = x\ln^n x - n\left[x\ln^{n-1} x - (n-1)I_{n-2}\right]$

$= x\left[\ln^n x - n\ln^{n-1} x + n(n-1)\ln^{n-2} x + ... + (-1)^{n-1} n(n-1)...2\ln x + (-1)^n n\right] + C$,

$I_2 = x\left[\left(\ln|x| - 1\right)^2 + 1\right] + C$.

b. $J_n = \dfrac{1}{n}\left[(n-1)J_{n-2} - \cos x \sin^{n-1} x\right] + C$,

$J_5 = -\cos x + \dfrac{2}{3}\cos^3 x - \dfrac{1}{6}\cos^5 x + C$.

c. $K_{n+2} = \dfrac{\sin x}{(n+1)\cos^{n+1} x} + \dfrac{n}{n+1}K_n$,

$K_7 = \sin x - \sin^3 x + \dfrac{3}{5}\sin^5 x - \dfrac{1}{7}\sin^7 x + C$,

d. $L_n = \dfrac{1}{2(n-1)a^2(x^2 - a^2)^{n-1}} - \dfrac{2n-3}{2(n-1)a^2}L_{n-1}$.

4.10. **a.** $f(x) = 3(x-1)^{\frac{1}{3}} + C$. Đặt $x^3 + 1 = t$,

b. $f(x) = \begin{cases} x + C \text{ khi } -\infty < x \le 0 \\ e^x + C - 1 \text{ khi } 0 < x < +\infty \end{cases}$. Đặt $\ln x = t$,

c. $f(x) = \dfrac{1}{3}(x-1)^3 + \dfrac{1}{3}$. Đặt $\sin^2 x = t$.

4.11.

a. $\dfrac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$; **b.** **1**; **c.** $\dfrac{a-1}{\ln a}$; **d.** $\dfrac{\ln^2 b - \ln^2 a}{2}$.

4.12. **a.** $5\ln 4 - \ln 6 - 1$, **b.** **1**,

c. $\dfrac{\pi}{2|ab|}$, **d.** $\dfrac{\pi}{2\sin\alpha}$,

e. $\dfrac{\pi}{3}$, **f.** $\dfrac{\pi}{6n}$.

4.13. **a.** $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\text{arctg}\sqrt{2}$; **b.** $2 - \dfrac{\pi}{2}$; **c.** $\dfrac{\pi^2}{9}$;

d. $\dfrac{\sqrt{3}}{24}$; **e.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ (Đặt $t = x - \dfrac{1}{x}$); **f.** $\dfrac{\pi}{4}$;

g. $\text{arctg}\dfrac{1}{2}$; **h.** $\ln\dfrac{e + \sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}$; **i.** $\dfrac{a(\pi - 2)}{4}$ (Đặt $x = a\sin^2 t$).

4.15. **a.** $\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$, **b.** $2(1 - e^{-1})$,

c. $2\left(\dfrac{2\pi}{3}-\ln tg\dfrac{5\pi}{12}\right)$, **d.** $\dfrac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$.

4.17. **a.** $\dfrac{2}{45}$, **b.** $\dfrac{5}{192}(5+7\sqrt[5]{5^3})$, **c.** $\dfrac{848}{105}$,

d. $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$, **e.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}arctg\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, **f.** $4-\pi$,

g. $\dfrac{\pi}{6}$, **h.** $\dfrac{16\pi}{3}-2\sqrt{3}$, **i.** $\dfrac{1}{a^2-b^2}\ln\left|\dfrac{a}{b}\right|$.

4.18. **a.** $\dfrac{1}{2}$, **b.** $\dfrac{1}{e}$, **c.** $\dfrac{\pi}{6}$,

d. 2, **e.** $\dfrac{2}{3}$, **f.** $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$.

4.19. **a.** $\dfrac{9}{2}$, **b.** $2-\dfrac{1}{\ln 2}$, **c.** $\dfrac{4a^3}{3}$,

d. $3\pi a^2$, **e.** $\dfrac{1}{2}\coth\dfrac{\pi}{2}$, **f.** $\dfrac{1}{12}$, **g.** $4|ab|arctg\left|\dfrac{b}{a}\right|$.

4.20. **a.** $\dfrac{72\sqrt{3}}{5}$, **b.** $\dfrac{3\pi}{8}\dfrac{c^4}{ab}$, **c.** $6\pi a^2$,

4.21. **a.** a^2, **b.** $\dfrac{2}{3}$, **c.** $\dfrac{\pi a^2}{4}$, **d.** $\dfrac{p^2}{6}(3+4\sqrt{2})$.

4.22. **a.** $\ln tg\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{a}{2}\right)$, **b.** $\dfrac{4(a^3-b^3)}{ab}$, **c.** $2\pi^2 a$, **d.** $\dfrac{19}{3}$.

4.23. **a.** $\dfrac{3\pi}{7}ab^2$, **b.** $2\pi^2$, **c.** $2\pi^2a^2b$, **d.** $\dfrac{128}{3}\pi$.

4.24. **a.** $\dfrac{\pi}{9}\left[(1+a^4)^{\frac{3}{2}}-1\right]$, **b.** $\pi\left[\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\dfrac{(1+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)}{2}\right]$,

c. $16\pi^2a^2$.

4.25. **a.** $\ln\dfrac{1+\sqrt{1+a^4}}{a^2}$, **b.** $\dfrac{\pi}{2}-1$, **c.** $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, **d.** $\dfrac{\pi}{4}$, **e.** 2,

f. $\dfrac{1}{2}$, **g.** $n!$, **h.** $\sqrt{\pi}$, **i.** $\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$, **j.** $\dfrac{\pi}{2}$.

4.26. **a.** Hội tụ khi $n-m>1$, **b.** Hội tụ, **c.** Hội tụ,
d. Hội tụ, **e.** Hội tụ.

4.27. **a.** π, **b.** $-\dfrac{\pi}{2}\ln 2$, **c.** $\dfrac{\pi}{2}\ln 2$, **d.** $\dfrac{\pi}{2}\ln 2$,

e. $-\dfrac{\pi}{2}\ln 2$, **f.** $2\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ (Đặt $x=\sin^2 t$),

g. $-\frac{2}{e}$, **h.** $6-\frac{9}{2}\ln 3$.

4.28. **a.** Phân kì, **b.** Hội tụ,
c. Hội tụ khi $k<1$, phân kì khi $k\geq 1$, **d.** Hội tụ khi $p<1, q<1$,
e. Hội tụ khi $p>-1, q>-1$, **f.** Hội tụ.

CHƯƠNG V

5.2. **a.** $\frac{1}{2}$ **;** **b.** 1 ; **c.** 1 ; **d.** 1.

5.3. **a.** Phân kỳ ; **b.** Phân kỳ ; **c.** Hội tụ ; **d.** Hội tụ ; **e.** Phân kỳ ;
f. Hội tụ khi $\alpha>1$, phân kỳ khi $\alpha\leq 1$; **g.** Phân kỳ ; **h.** Hội tụ ;
i. Hội tụ ; **j.** Phân kỳ ; **k**. Hội tụ ; **l.** Hội tụ ; **m.** Hội tụ ;
n. Phân kỳ.

5-6. **a.** Hội tụ ; **b.** Hội tụ ; **c.** Hội tụ ; **d.** Hội tụ ; **e.** Hội tụ ;
f. Hội tụ khi $a\leq 1$, phân kỳ khi $a>1$; **g.** Hội tụ ; **h.** Hội tụ ;
i. Hội tụ .

5.7. **a.** Hội tụ tuyệt đối ; **b.** Hội tụ tuyệt đối ; **c.** Hội tụ tuyệt đối.
d. Hội tụ ; **e.** Hội tụ ; **f.** Hội tụ ; **g.** Phân kỳ ; **h.** Hội tụ tuyệt đối.

5.11. **a.** $|x|>1$; **b.** Liên tục với $|x|>1$; **c.** Khả vi với $|x|>1$

5.12. **a.** $\mathbb{R}_+$ **;** **b.** $[a,+\infty)$ **,** $a>0$.

5.14. **a.** $-1<x<1$; **b.** $x=0$; **c.** $-1<x\leq 1$; **d.** $3\leq x<5$; **e.** $2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}$;
f. $-\infty<x<\infty$; **g.** $-\infty<x<\infty$; **h.** $-1\leq x<1$ khi $\alpha\leq 1$, $-1\leq x\leq 1$ khi $\alpha\geq 1$.

5.15. **a,** $S=\dfrac{x^3\left(4-x^3\right)}{\left(1-x^3\right)^2}$, $|x|<1$; **b.** $S=\dfrac{1}{1-2x}+\dfrac{1}{1-3x}$, $|x|<\dfrac{1}{3}$;

c. $$S=\begin{cases}-\dfrac{1}{3} \text{ khi } x=0\\ xe^x-\dfrac{1}{x^3}\left[e^x\left(x^2-2x+2\right)-2\right] \text{ khi } x\neq 0\end{cases}$$

d. $S=\dfrac{1-x\operatorname{ch}a}{1+x^2-2x\operatorname{ch}a}$, $|x|<e^{-a}$;

e. $$S=\begin{cases}1 \quad \text{khi } x=0\\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} \quad \text{khi } x\neq 0,\ -1<x\leq 1\end{cases}.$$

5.16. a. $f(x)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-3}{3}\right)^n$, **b.** $f(x)=e^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n!}$,

c. $f(x)=\sin 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^{2n}}{(2n)!}+\cos 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

5.17. a. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x\in\mathbb{R}$, **b.** $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n!},\ x\in\mathbb{R}$,

c. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!},\ x\in\mathbb{R}$, **d.** $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n,\ x\in\mathbb{R}$,

e. $f(x)=\ln 6-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)x^n,\ |x|<2$, **f.** $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n,\ |x|<1$,

g. $f(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n},\ |x|<1$, **h.** $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)},\ x\in\mathbb{R}$.

5.19. a. $R=1$; **b.** $R=1$; **c.** $R=1$; **d.** $R=1$; **e.** $R=2$.

5.20. a. $\sqrt{e}\approx 1,6488$; **b.** $\sqrt[5]{1,1}\approx 1,0192$; **c.** $\ln 1,04\approx 0,392$; **d.** $\cos 18^\circ\approx 0,9511$.

5.21. $f(x)=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k},\ x\neq 2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$.

5.22. $f(x)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2},\ x\in\mathbb{R};\ \frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

5.23. $f(x)=\frac{2}{3}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2};\ \frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2};\ -\frac{\pi^2}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

5.24. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{4n^2-1},\ x\neq 0$

5.25. a. $f(x)=-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin 2mx}{m}+\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}+\frac{\pi}{2(2m+1)}\right]\sin(2m+1)x$,

b. $f(x)=\frac{3\pi}{8}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cos(2n+1)x+\cos 2(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$,

$$\frac{\pi^2}{8}-1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

5.26. $e^x=\operatorname{sh}1+2\operatorname{sh}1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1+k^2\pi^2}\left(\cos k\pi x-k\pi\sin k\pi x\right)$

5.28. **a.** $f\left(x\right)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\left[(1-\dfrac{2}{z^{2}})\sin z+\dfrac{2}{z}\cos z\right]\dfrac{\cos zx}{z}dz$ **.**

b. $f\left(x\right)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\left[\dfrac{a\sin az}{z}+\dfrac{\cos az-1}{z^{2}}\right]\cos xzdz$ **.**