

CHƯƠNG V-I: TỔNG HỢP BỘ LỌC SỐ CÓ ĐÁP ỨNG XUNG CÓ CHIỀU DÀI HỮU HẠN FIR

MỞ ĐẦU

- **Định nghĩa Bộ lọc số:**

Một hệ thống dùng làm biến dạng sự phân bố tần số của các thành phần của một tín hiệu theo các chỉ tiêu đã cho được gọi là bộ lọc số.

- **Biểu diễn trong miền z :**

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

- **Biểu diễn trong miền tần số ω :**

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n}$$

Nội dung

- Tổng quan về thiết kế bộ lọc số
 - Các bộ lọc số lý tưởng (phân loại theo đáp ứng tần số)
 - Phân loại các bộ lọc FIR pha tuyến tính
 - Các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thực tế
 - Các bước để thiết kế bộ lọc số thực tế
 - Các phương pháp thiết kế bộ lọc số
- Thiết kế bộ lọc số theo phương pháp cửa sổ

Các bộ lọc số lý tưởng

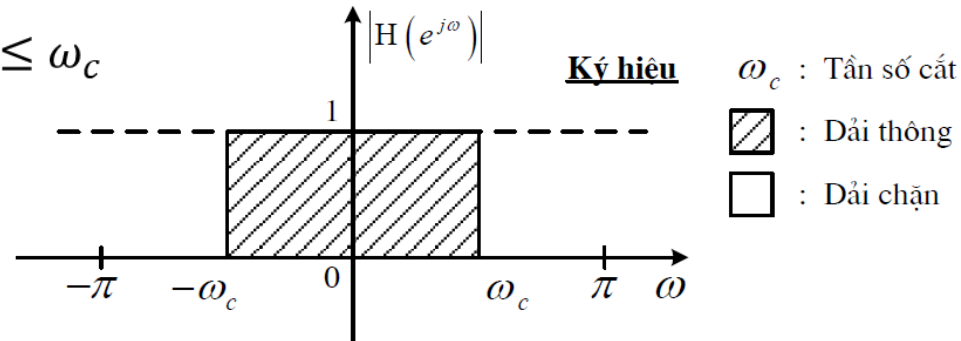
a. Bộ lọc thông thấp lý tưởng:

Định nghĩa:

Đáp ứng biên độ của bộ lọc số thông thấp lý tưởng được định nghĩa như sau:

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \Leftrightarrow |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$(-\pi \leq \omega_c \leq \pi)$$



Đáp ứng tần số của bộ lọc thông thấp lý tưởng pha không $\theta(\omega) = 0$

Có dạng như sau:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega \neq \end{cases}$$

Thực hiện biến đổi IFT ta có:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi jn} (e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}) = \frac{1}{\pi n} \sin \omega_c n$$

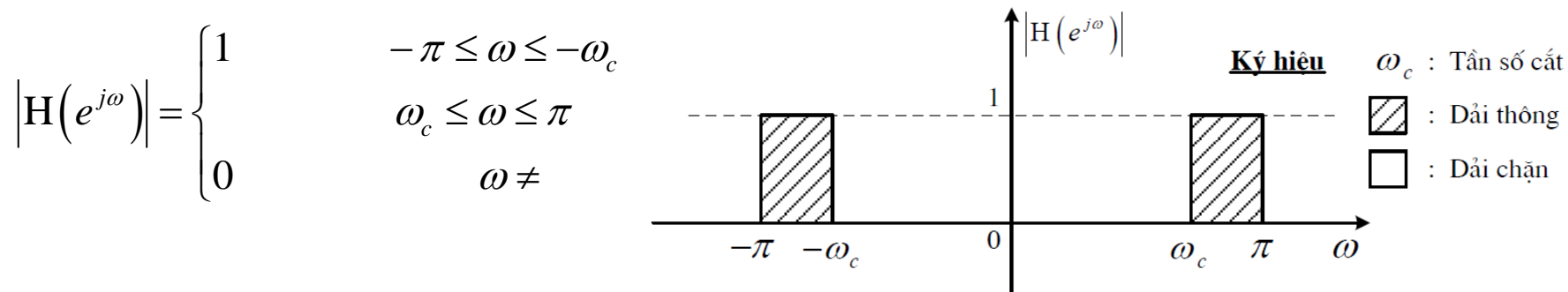
Dạng $\frac{0}{0}$ nên biến đổi tiếp thành dạng:

$$h(n) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n}$$

b. Bộ lọc thông cao lý tưởng

Định nghĩa:

Đáp ứng biên độ của bộ lọc thông cao lý tưởng được định nghĩa như sau:



Đáp ứng tần số của bộ lọc thông cao lý tưởng pha không:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq \omega \leq -\omega_c \\ \omega_c \leq \omega \leq \pi \\ 0 & \omega \neq \end{cases} \Rightarrow h(n) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} d\omega}_{\frac{\sin \pi n}{\pi n}} - \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega}_{\frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n}}$$

$$\text{Do } \frac{\sin \pi n}{\pi n} = \delta(n) \quad h(n) = \delta(n) - \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n}$$

$\delta(n)$ là đáp ứng xung của bộ lọc thông tắt pha 0 (ví dụ như một dây dẫn tín hiệu) vì chúng cho tất cả các tín hiệu đi qua với mọi tần số.

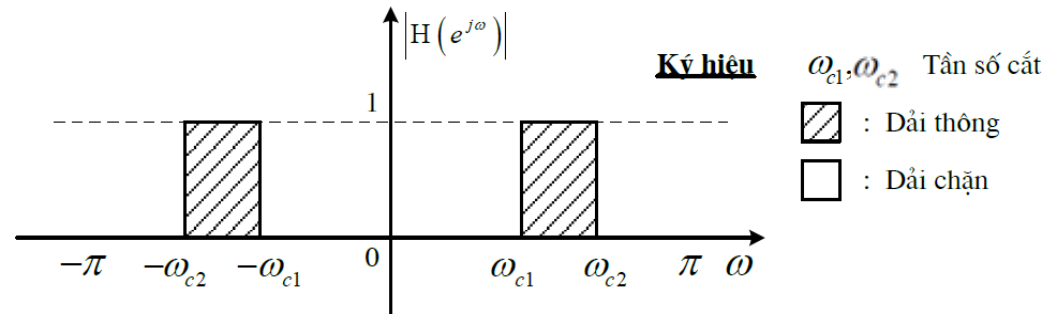
c. Bộ lọc thông dải lý tưởng

Định nghĩa:

Đáp ứng biên độ của bộ lọc số thông dải lý tưởng được định nghĩa như sau:

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & -\omega_{c2} \leq \omega \leq -\omega_{c1} \\ & \omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2} \\ 0 & \omega \neq \end{cases}$$

$$-\pi \leq \omega_{c1} < \omega_{c2} \leq \pi$$



Đáp ứng tần số của bộ lọc số thông dải lý tưởng pha không:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & -\omega_{c2} \leq \omega \leq -\omega_{c1} \\ & \omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2} \\ 0 & \omega \neq \end{cases} \quad -\pi \leq \omega_{c1} < \omega_{c2} \leq \pi$$

$$h(n) = \frac{\omega_{c2}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c2} n}{\omega_{c2} n} - \frac{\omega_{c1}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c1} n}{\omega_{c1} n}$$

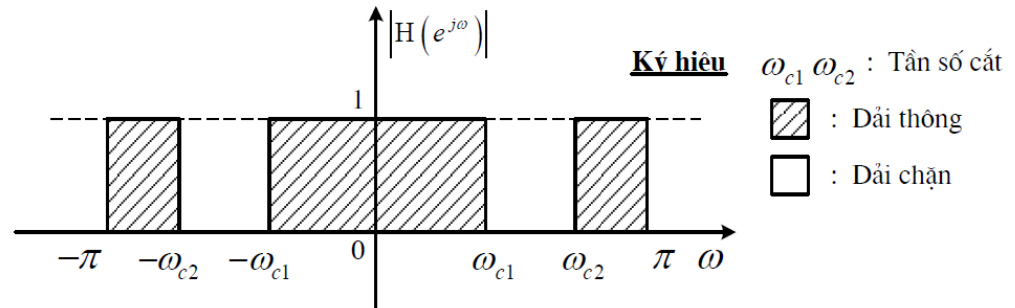
d. Bộ lọc chặn dải lý tưởng

Định nghĩa:

Đáp ứng biên độ của bộ lọc số chẵn dải lý tưởng được định nghĩa như sau:

$$\left| H(e^{j\omega}) \right| = \begin{cases} 1 & -\pi \leq \omega \leq -\omega_{c2} \\ & -\omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c1} \\ & \omega_{c2} \leq \omega \leq \pi \\ 0 & \omega \neq \end{cases}$$

$$-\pi \leq \omega_{c1} < \omega_{c2} \leq \pi$$

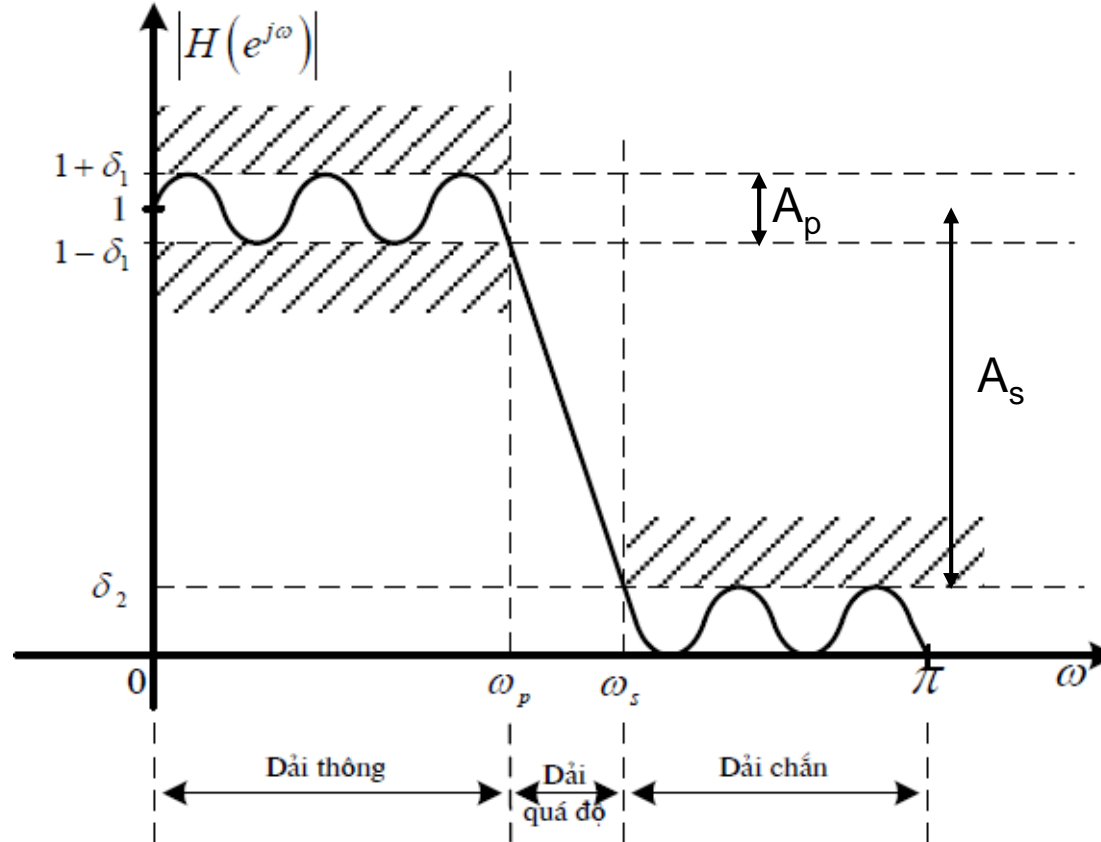


Đáp ứng tần số của bộ lọc số chẵn dải lý tưởng pha 0:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq \omega \leq -\omega_{c2} \\ & -\omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c1} \\ & \omega_{c2} \leq \omega \leq \pi \\ 0 & \omega \neq \end{cases} \quad -\pi \leq \omega_{c1} < \omega_{c2} \leq \pi$$

$$h(n) = \delta(n) - \frac{\omega_{c2}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c2} n}{\omega_{c2} n} + \frac{\omega_{c1}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c1} n}{\omega_{c1} n}$$

Các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thực tế



Có 4 tham số quyết định chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số là:

- + Tần số giới hạn dải thông ω_p
- + Tần số giới hạn dải chặn ω_s
- + Độ gợn sóng dải thông δ_1
- + Độ gợn sóng dải chặn δ_2

Về mặt lý tưởng các độ gợn sóng dải thông, dải chặn càng nhỏ càng tốt, tần số giới hạn dải thông và dải chặn càng gần nhau để cho dải quá độ càng nhỏ càng tốt.

Phân loại các bộ lọc FIR pha tuyến tính

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{j\theta(\omega)}$$

Loại bộ lọc FIR	Bậc bộ lọc (N)	Sự đối xứng của các hệ số	Pha tuyến tính
Loại I	Lẻ	$h(n) = h(N-1-n)$	$\theta(\omega) = -\alpha\omega; \alpha = (N-1)/2$
Loại II	Chẵn	$h(n) = h(N-1-n)$	$\theta(\omega) = -\alpha\omega; \alpha = (N-1)/2$
Loại III	Lẻ	$h(n) = -h(N-1-n)$	$\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega; \alpha = (N-1)/2; \beta = \pm\pi/2$
Loại IV	Chẵn	$h(n) = -h(N-1-n)$	$\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega; \alpha = (N-1)/2; \beta = \pm\pi/2$

Đáp ứng tần số của các bộ lọc FIR pha tuyến tính

	h(n) đối xứng $h(n) = h(N-1-n)$	h(n) phản đối xứng $h(n) = -h(N-1-n)$
N lẻ	$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \quad (FIR1)$ $A(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n)\cos\omega n$ $a(0) = h\left(\frac{N-1}{2}\right)$ $a(n) = \begin{cases} 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) & 1 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & n \text{ khác} \end{cases}$	$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega\right)} \quad (FIR3)$ $A(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n)\sin\omega n$ $c(n) = \begin{cases} 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) & 1 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & n \text{ khác} \end{cases}$ $A(e^{j\omega}) = 0 \text{ tại } \omega = 0 \text{ và } \omega = \pi$
N chẵn	$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \quad (FIR2)$ $A(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b(n)\cos\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right]$ $b(n) = \begin{cases} 2h\left(\frac{N}{2} - n\right) & 1 \leq n \leq \frac{N}{2} \\ 0 & n \text{ khác} \end{cases}$ $A(e^{j\omega}) = 0 \text{ tại } \omega = \pi$	$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega\right)} \quad (FIR4)$ $A(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d(n)\sin\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right]$ $d(n) = \begin{cases} 2h\left(\frac{N}{2} - n\right) & 1 \leq n \leq \frac{N}{2} \\ 0 & n \text{ khác} \end{cases}$ $A(e^{j\omega}) = 0 \text{ tại } \omega = 0$

Nhận xét các loại bộ lọc FIR

- FIR 1: linh hoạt nhất, có thể dùng để thiết kế bộ lọc thông thấp, thông cao, thông dải và chắn dải.
- FIR 2: vì đáp ứng tần số luôn bằng 0 tại $\omega=\pi$ nên không phù hợp cho thiết kế bộ lọc thông cao và chắn dải.
- FIR 3 và FIR 4 có dịch pha $\pi/2$. Vì FIR 3 có đáp ứng tần số luôn bằng 0 tại $\omega=0$ và $\omega=\pi$ nên chỉ phù hợp cho thiết kế bộ lọc thông dải.
- FIR 4 có đáp ứng tần số luôn bằng 0 tại $\omega=0$ nên chỉ phù hợp cho thiết kế bộ lọc thông dải và thông cao.

Các bước thiết kế bộ lọc số

- **Xác định các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc:**
→ tùy theo yêu cầu ứng dụng, ở bước này cần tiến hành xác định các tham số của bộ lọc: ω_p , ω_s , δ_1 , δ_2 , ...
- **Xác định giá trị các hệ số của bộ lọc:**
→ sau khi đã có đặc tả của bộ lọc, sử dụng các phương pháp thiết kế khác nhau: phương pháp dùng cửa sổ, phương pháp lấy mẫu tần số, phương pháp lặp tối ưu, ... để xác định các hệ số của bộ lọc $h(n)$, $0 \leq n \leq N-1$.
- **Thực hiện mạch lọc:**
→ trên cơ sở đã có được các hệ số của bộ lọc, vấn đề thiết kế chỉ còn là việc lựa chọn sơ đồ thực hiện (dạng trực tiếp, dạng chính tắc) → xây dựng giải thuật tương ứng → viết chương trình → cài đặt.
→ quá trình này có thể được thực hiện bằng phần cứng hay phần mềm

Các phương pháp thiết kế

- **Phương pháp cửa sổ:**

Dùng các cửa sổ để hạn chế chiều dài đáp ứng xung của bộ lọc số lý tưởng và đưa về nhân quả.

- **Phương pháp lấy mẫu tần số:**

Trong vòng tròn tần số lấy các điểm khác nhau để tổng hợp bộ lọc.

- **Phương pháp lặp tối ưu (phương pháp tối ưu - MINIMAX):**

phương pháp gần đúng Tchebyshev, tìm sai số cực đại E_{\max} của bộ lọc thiết kế với bộ lọc lý tưởng, rồi làm cực tiểu hoá đi sai số này: $\min |E_{\max}|$. Các bước cực tiểu sẽ được máy tính lặp đi lặp lại.

TỔNG HỢP BỘ LỌC SỐ FIR THEO PHƯƠNG PHÁP CỬA SỔ

- Quy trình thiết kế bộ lọc số FIR được thực hiện qua các bước sau:
 - Đưa ra chỉ tiêu kỹ thuật trong miền tần số
 - Chọn loại cửa sổ và chiều dài cửa sổ N
 - Chọn loại bộ lọc số lý tưởng(thông thấp, thông cao, thông dải, chắn dải), tức là chọn $h(n)$
 - Để hạn chế chiều dài thì nhân cửa sổ với $h(n)$:

$$h_d(n) = w(n)_N \cdot h(n)$$

- Thử lại xem có thỏa mãn hay không bằng cách chuyển sang miền tần số.

$$H_d(e^{j\omega}) = W_R(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_R(e^{j\omega'}) H(e^{j(\omega-\omega')}) d\omega'$$

Một số cửa sổ (window)

- Cửa sổ chữ nhật:

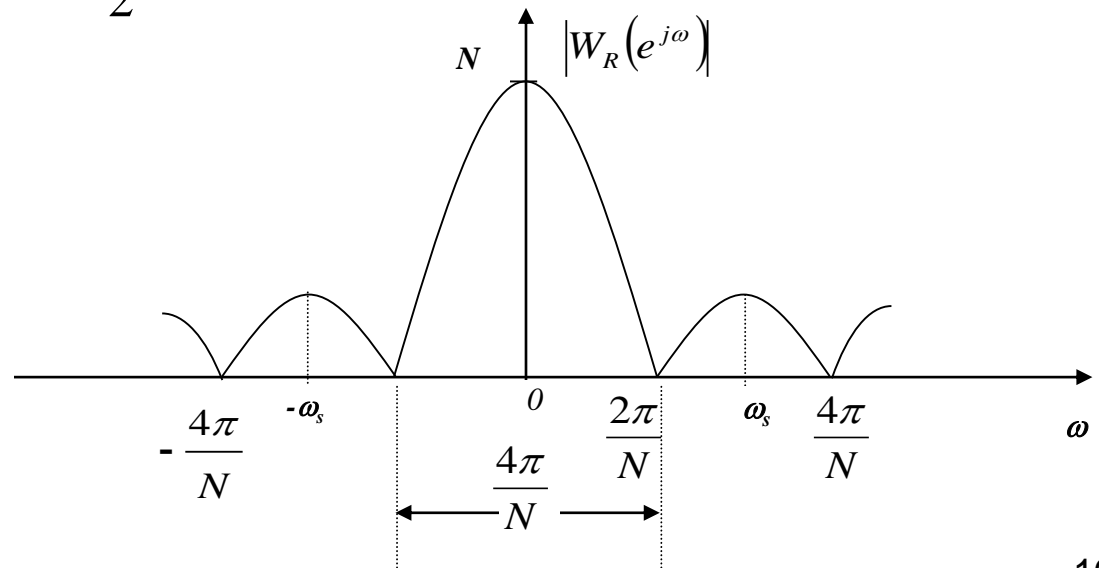
- Định nghĩa:** Trong miền n , cửa sổ chữ nhật được định nghĩa như sau:

$$w_R(n)_N = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

$$\begin{aligned} W_R(e^{j\omega}) &= \text{FT}[w_R(n)_N] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega \frac{N}{2}} (e^{j\omega \frac{N}{2}} - e^{-j\omega \frac{N}{2}})}{e^{-j\omega \frac{1}{2}} (e^{j\omega \frac{1}{2}} - e^{-j\omega \frac{1}{2}})} \\ &= e^{-j\omega \left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{\sin \omega \frac{N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} = e^{j\theta_R(\omega)} A_R(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Dạng 0/0

$$A_R(e^{j\omega}) = \frac{\omega \frac{N}{2} \cdot \frac{\sin \omega \frac{N}{2}}{\omega \frac{N}{2}}}{\frac{\omega}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}} = N \frac{\sin \omega \frac{N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}$$



Các tham số của phổ cửa sổ

- Bề rộng đỉnh trung tâm: $\Delta\Omega$
- Tỷ số của biên độ đỉnh thứ cấp đầu tiên & biên độ đỉnh trung tâm (dB):

$$\lambda = 20 \lg \left| \frac{W(e^{j\omega_s})}{W(e^{j\omega_0})} \right| [dB]$$

ω_s : tần số ở giữa đỉnh thứ cấp đầu tiên của phổ cửa sổ $W(e^{j\omega})$

VD: Đối với cửa sổ chữ nhật

$$\Delta\Omega_R = \frac{4\pi}{N} \quad \lambda_R = 20 \lg \left| \frac{W_R(e^{j\omega_s})}{W_R(e^{j0})} \right| (dB) \approx -13dB$$

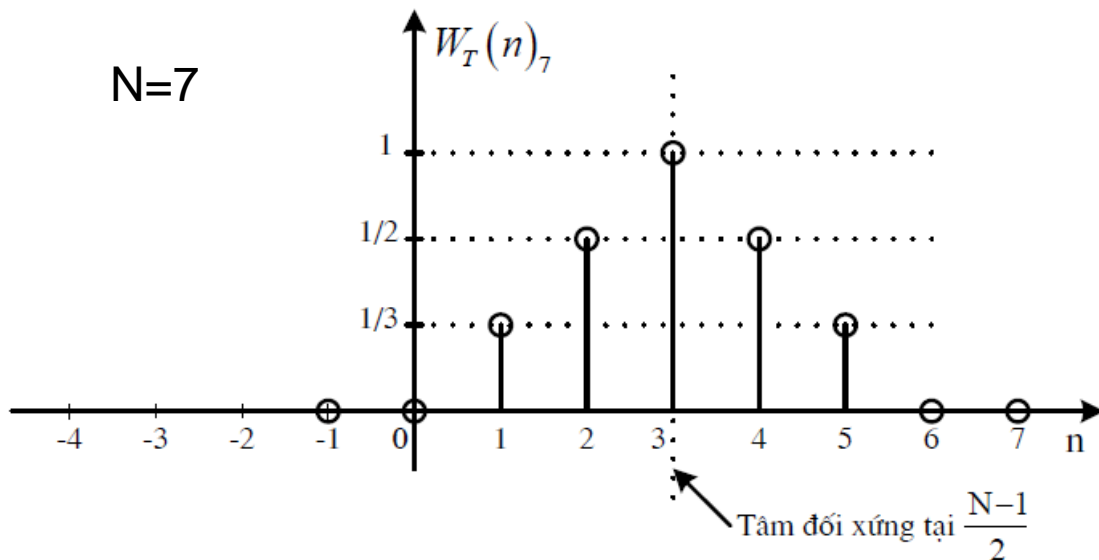
Hiện tượng Gibbs

- Các dao động ở dải thông & dải chắn xung quanh trục chuyển biến đột ngột ω_c do việc hạn chế chiều dài của đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc số lý tưởng bằng cửa sổ sinh ra.

Cửa sổ Bartlett (tam giác)

Định nghĩa: Trong miền n , cửa sổ Bartlett được định nghĩa như sau:

$$w_T(n)_N = \begin{cases} \frac{2n}{N-1} & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$



Cửa sổ Hanning và Hamming

Định nghĩa: Trong miền n , cửa sổ Hanning và Hamming được định nghĩa như sau:

$$w_H(n)_N = \begin{cases} \alpha - (1 - \alpha) \cos \frac{2\pi}{N-1} n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

$\alpha = 0,5$: cửa sổ Hanning

$\alpha = 0,54$: cửa sổ Hamming

Cửa sổ Blackman

Định nghĩa: Trong miền n , cửa sổ Blackman được định nghĩa như sau:

$$w_B(n)_N = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}} (-1)^m a_m \cos \frac{2\pi}{N-1} mn & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

Với điều kiện: $\sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}} a_m = 1$

VD:

$$w_B(n)_N = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N-1} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{N-1} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

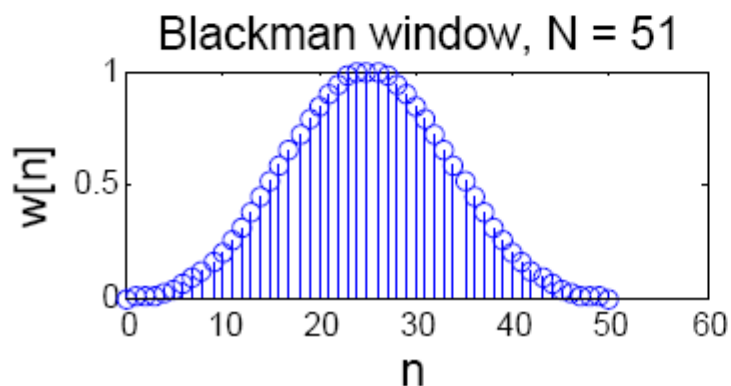
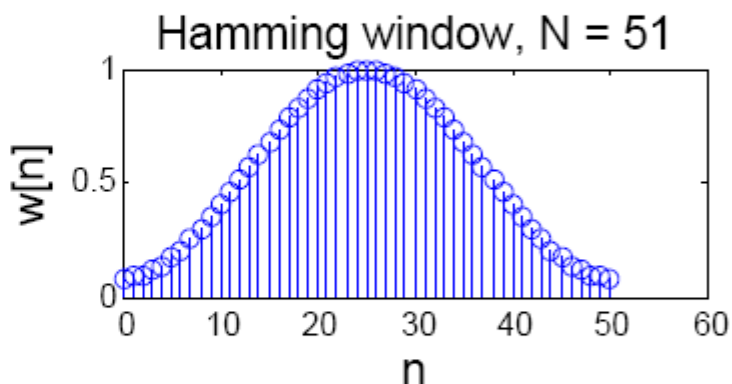
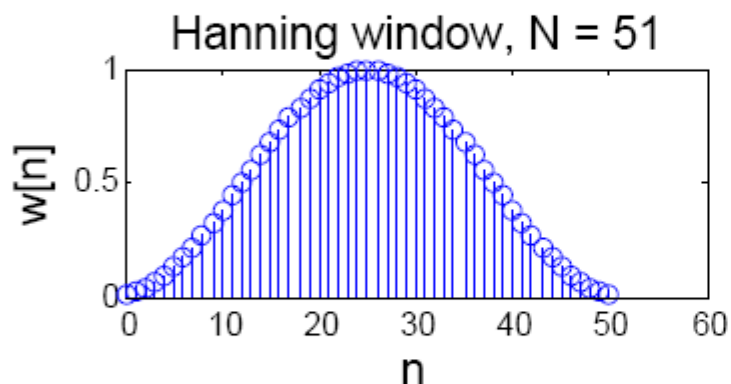
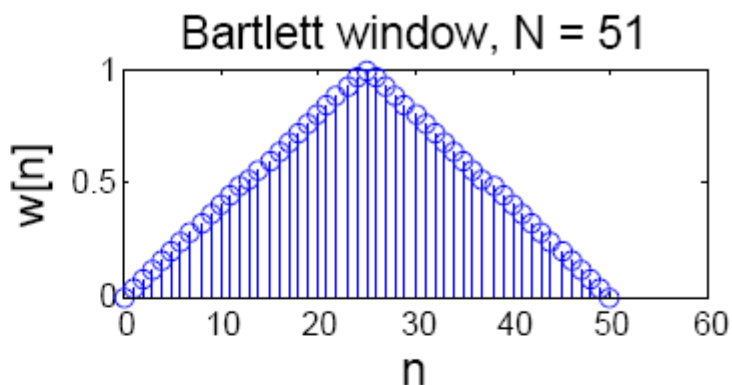
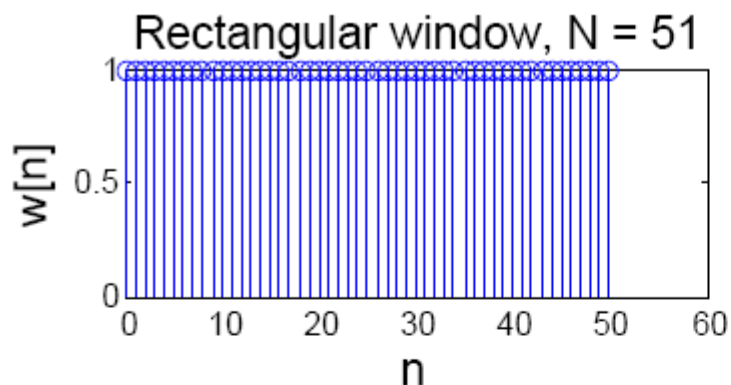
Cửa sổ Kaiser

- Định nghĩa: Trong miền n cửa sổ Kaiser được định nghĩa như sau:

$$w_k(n)_N = \begin{cases} \frac{I_0 \left[\beta \left(\frac{N-1}{2} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{N-1} - 1 \right)^2} \right]}{I_0 \left[\beta \left(\frac{N-1}{2} \right) \right]} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

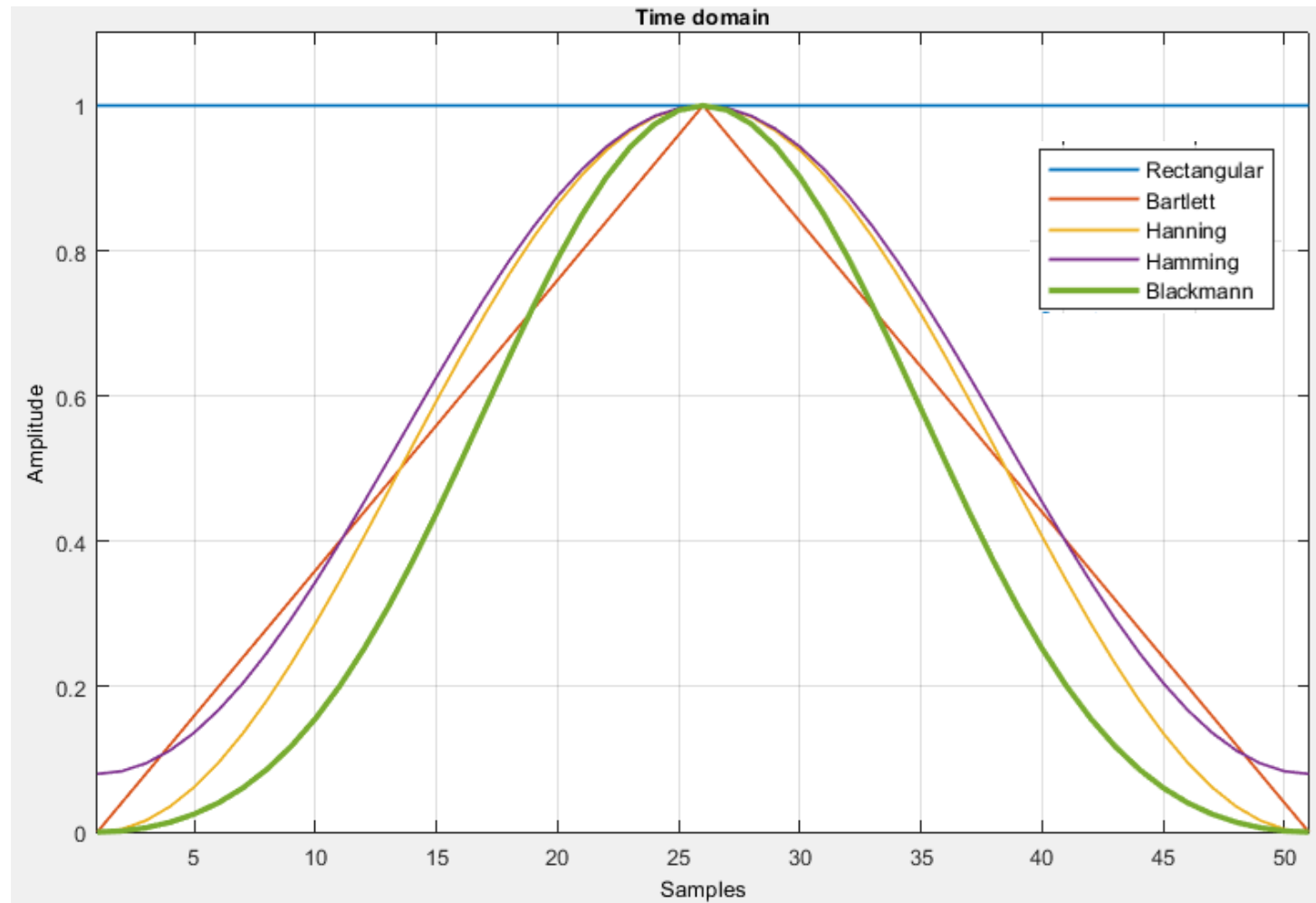
$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^k \right]^2 : \text{hàm Bessel biến dạng loại 1 bậc 0}$$

Đáp ứng xung của một số cửa sổ thông dụng trong miền thời gian rời rạc n

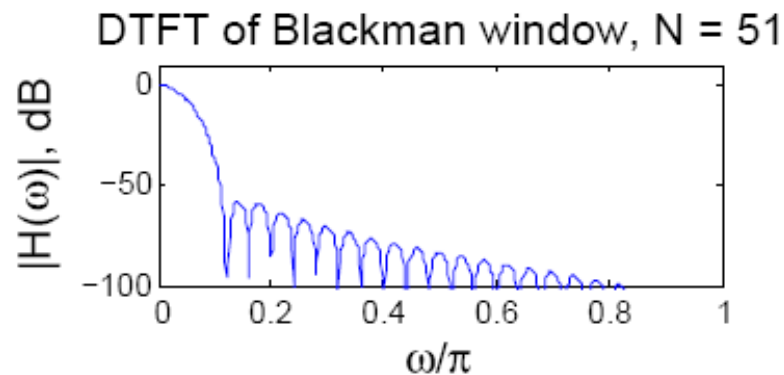
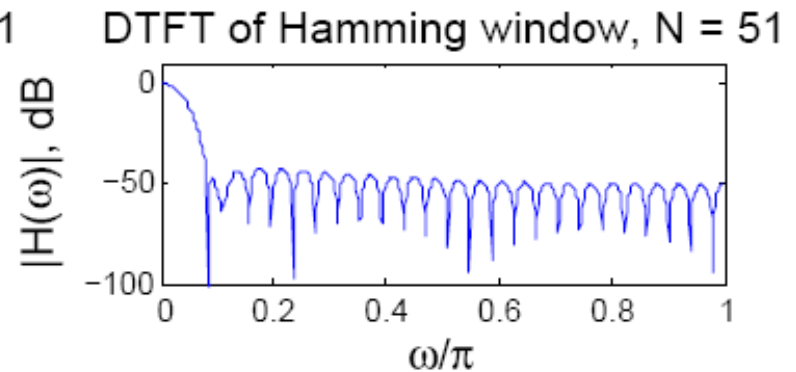
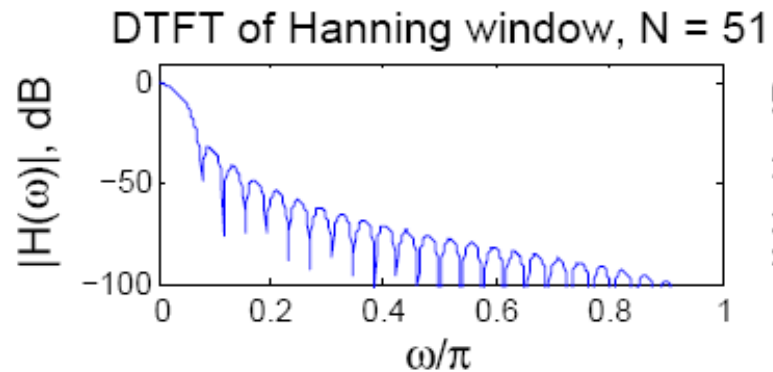
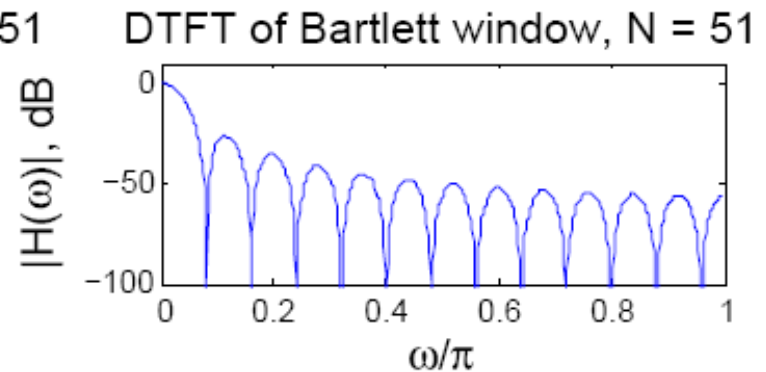
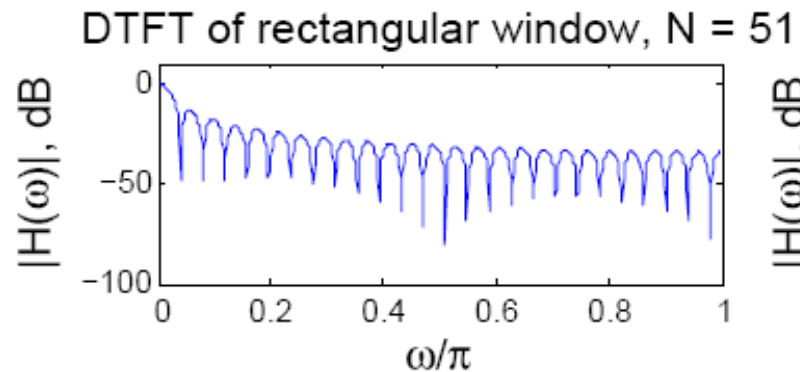


So sánh đáp ứng xung của một số cửa sổ thông dụng

N=51

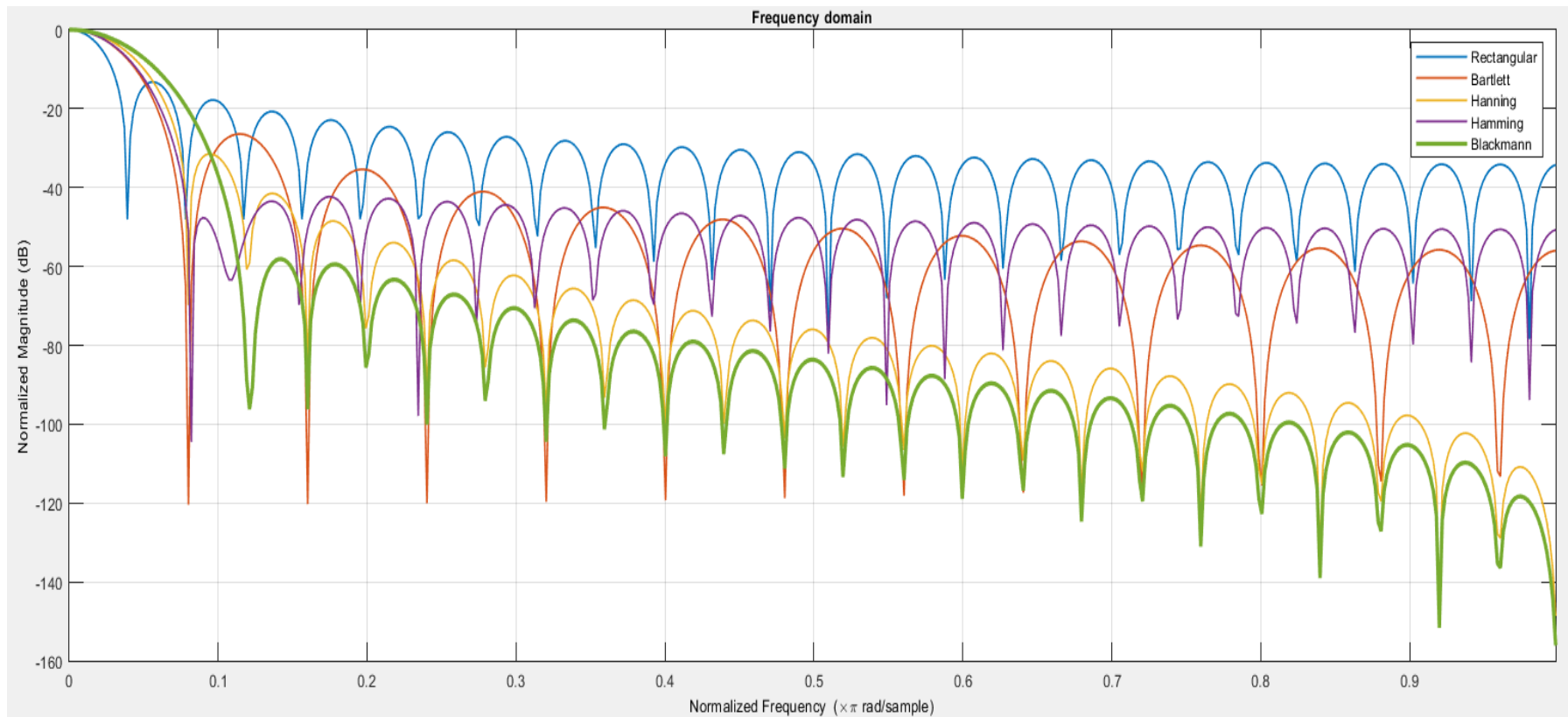


Phổ biên độ của các loại cửa sổ thông dụng



So sánh phổ biên độ của một số cửa sổ thông dụng

N=51



Tóm tắt cửa sổ

Phụ lục bảng 1. Tham số của cửa sổ (tính xấp xỉ)

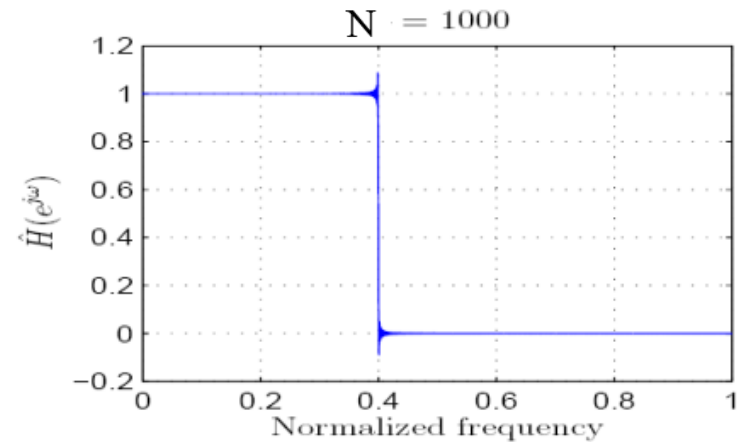
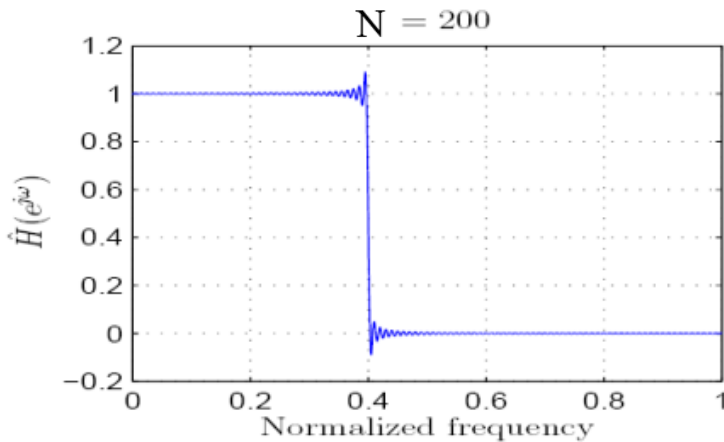
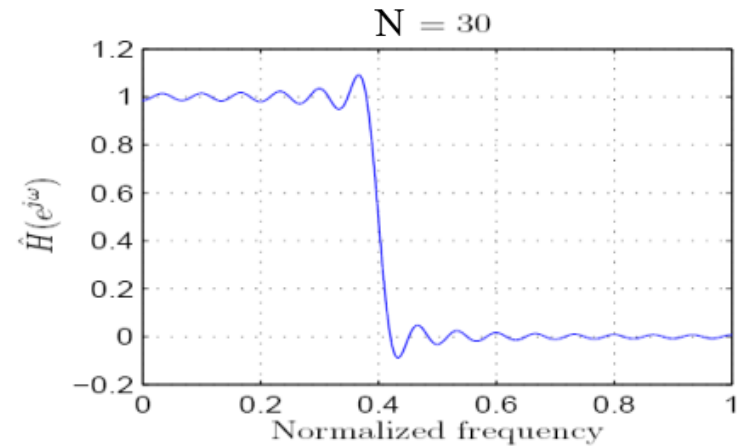
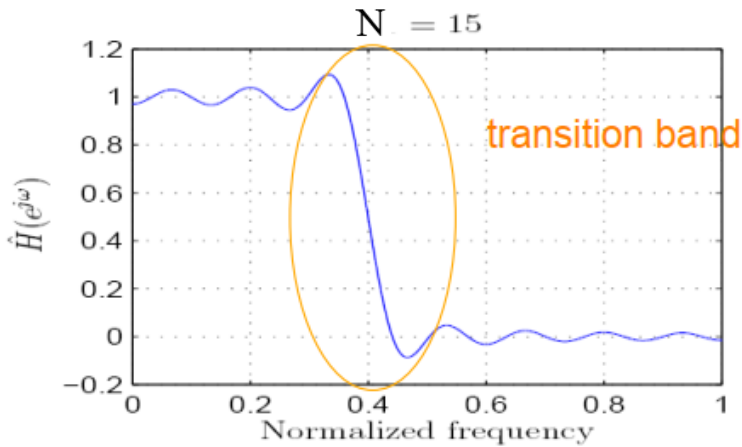
<u>Loại cửa sổ</u> (window type)	<u>Độ rộng dải trung tâm</u> (width of mainlobe)	<u>Tỷ số Biên độ đỉnh thứ cấp</u> <u>đầu tiên và Biên độ đỉnh</u> <u>trung tâm [dB]</u>	<u>Độ suy giảm nhỏ</u> <u>nhất của dải chắn</u> (A_s) [dB]
<u>Chữ nhật</u> (Rectangular)	$4\pi / N$	-13	-21
<u>Tam giác</u> (Bartlett)	$8\pi / N$	-27	-25
<u>Hanning</u>	$8\pi / N$	-32	-44
Hamming	$8\pi / N$	-43	-53
<u>Blackmann</u>	$12\pi / N$	-58	-74

Tóm tắt cửa sổ

Phụ lục bảng 2. Tham số của cửa sổ (theo thực nghiệm)

Loại cửa sổ	Độ dài cửa sổ theo bề rộng dải quá độ (thực nghiệm)	Độ gợn sóng trong dải thông [dB]	Độ suy giảm dải chặn [dB]
Chữ nhật	$\Delta\omega = 0.9 \times \frac{2\pi}{N}$	0.7416	21
Hanning	$\Delta\omega = 3.1 \times \frac{2\pi}{N}$	0.0546	44
Hamming	$\Delta\omega = 3.3 \times \frac{2\pi}{N}$	0.0194	53
Blackman	$\Delta\omega = 5.5 \times \frac{2\pi}{N}$	0.0017	74

Tính xấp xỉ bộ lọc bằng cách hạn chế chiều dài



Mặc dù khi N (bậc của bộ lọc) tăng thì dải quá độ (transition band) giảm nhưng độ gợn sóng không thay đổi.

Ví dụ: thiết kế bộ lọc FIR

- VD 1: Thiết kế bộ lọc FIR thông thấp bằng phương pháp cửa sổ biết tần số giới hạn dải thông trên bằng $\omega_p = 0.2\pi$ (rad), tần số giới hạn dải chặn dưới bằng $\omega_s = 0.25\pi$ (rad), suy hao dải chặn ít nhất bằng $A_s = -35$ dB. (xem Phụ lục bảng 1)
- VD 2: Thiết kế bộ lọc FIR thông thấp bằng phương pháp cửa sổ biết tần số giới hạn dải thông trên bằng $\omega_p = 0.2\pi$ (rad), tần số giới hạn dải chặn dưới bằng $\omega_s = 0.3\pi$ (rad), độ gợn sóng dải thông và độ gợn sóng dải chặn đều bằng $\delta_1 = \delta_2 = 0.01$. (xem Phụ lục bảng 1)

- VD 1: Bài giải

- B1: Lựa chọn loại cửa sổ phù hợp với độ suy giảm ở dải chắn, trong trường hợp này ta lựa chọn cửa sổ Hanning vì suy hao dải chắn tối thiểu bằng -35 dB . (xem Phụ lục bảng 1)
- B2: Lựa chọn kích thước cửa sổ thỏa mãn tham số độ rộng dải quá độ, trong trường hợp này độ rộng dải quá độ bằng $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p = 0.25\pi - 0.2\pi = 0.05\pi$ (rad), và phải bằng $8\pi/N$ (Phụ lục bảng 1). Suy ra $N = 160$.
- B3: Đáp ứng xung của bộ lọc cần thiết kế bằng tích của cửa sổ với đáp ứng xung của bộ lọc số lý tưởng. Sử dụng bộ lọc số lý tưởng có tần số cắt bằng

$\omega_c = \frac{(\omega_s + \omega_p)}{2} = 0.225\pi$ và nhò dịch đáp ứng xung nó sang bên phải $(N-1)/2$ mẫu để thu được bộ lọc pha tuyến tính.

$$h_{LP}(n) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n}$$

$$h_d(n) = \begin{cases} \left[0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{159}\right) \right] \left[\frac{\sin(0.225\pi(n-80))}{\pi(n-80)} \right], & 0 \leq n \leq 159 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

- VD 2: Bài giải

- B1: Lựa chọn loại cửa sổ phù hợp (xem Phụ lục bảng 1)

$$\delta = 0.01 \rightarrow -20 \log_{10}(\delta) = -40 \text{dB} \rightarrow \text{Hanning Window}$$

- B2: Lựa chọn kích thước cửa sổ thỏa mãn tham số độ rộng dải quá độ:

$$\omega_s - \omega_p = 0.3\pi - 0.2\pi = 0.1\pi \rightarrow 0.1\pi = 8\pi / M \rightarrow M = 80$$

- B3: Đáp ứng xung của bộ lọc cần thiết kế bằng tích của cửa sổ với đáp ứng xung của bộ lọc số lý tưởng. Sử dụng bộ lọc số lý tưởng có tần số cắt bằng

$\omega_c = \frac{(\omega_s + \omega_p)}{2} = 0.25\pi$ và nhò dịch đáp ứng xung nó sang bên phải $(N-1)/2$ mẫu để thu được bộ lọc pha tuyến tính.

- Trong trường hợp này đáp ứng xung của bộ lọc cần thiết kế có dạng:

$$h_d(n) = \begin{cases} \left[0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{79}\right) \right] \left[\frac{\sin(0.25\pi(n-40))}{\pi(n-40)} \right], & 0 \leq n \leq 79 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$