Bài giảng Giải tích 1

Vũ Hữu Như

Chương 2: Phép tính vi phân của hàm một biến

Nội dung chương 2

- 2.1 Hàm số
- 2.2. Giới hạn và liên tục của hàm số
- 2.3. Đạo hàm và vi phân của hàm số

2.1. Khái niệm hàm một biến số.

2.1.1 Hàm số một biến số

Definition

Cho $X, Y \subset \mathbb{R}$. Một ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là một hàm số. Kí hiệu $y = f(x)$.

2.1. Khái niệm hàm một biến số.

2.1.1 Hàm số một biến số

Definition

Cho $X, Y \subset \mathbb{R}$. Một ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là một hàm số. Kí hiệu $y = f(x)$.

$+$ X gọi là miền xác định của f, được kí hiệu là D_f hoặc D.

2.1. Khái niệm hàm một biến số.

2.1.1 Hàm số một biến số

Definition

Cho $X, Y \subset \mathbb{R}$. Một ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là một hàm số. Kí hiệu $y = f(x)$.
$+$ X gọi là miền xác định của f, được kí hiệu là D_f hoặc D.
$+$ $x \in D_f$ được gọi là biến (đối số).

2.1. Khái niệm hàm một biến số.

2.1.1 Hàm số một biến số

Definition

Cho $X, Y \subset \mathbb{R}$. Một ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là một hàm số. Kí hiệu $y = f(x)$.
+ X gọi là miền xác định của f, được kí hiệu là D_f hoặc D.
+ $x \in D_f$ được gọi là biến (đối số).
+ $y_0 = f(x_0)$ được gọi là giá trị của f tại $x = x_0$.

2.1.1 Hàm số một biến số

Definition

Cho $X, Y \subset \mathbb{R}$. Một ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là một hàm số. Kí hiệu $y = f(x)$.

+ X gọi là miền xác định của f, được kí hiệu là D_f hoặc D.

+ $x \in D_f$ được gọi là biến (đối số).

+ $y_0 = f(x_0)$ được gọi là giá trị của f tại $x = x_0$.

+ Tập $G := \{(x, y) \mid x \in D_f, y = f(x)\}$ được gọi là đồ thị của hàm số f.

2.1. Khái niệm hàm một biến số.

2.1.1 Hàm số một biến số

Definition

Cho $X, Y \subset \mathbb{R}$. Một ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là một hàm số. Kí hiệu $y = f(x)$.
+ X gọi là miền xác định của f, được kí hiệu là D_f hoặc D.
+ $x \in D_f$ được gọi là biến (đối số).
+ $y_0 = f(x_0)$ được gọi là giá trị của f tại $x = x_0$.
+ Tập $G := \{(x, y) \mid x \in D_f, y = f(x)\}$ được gọi là đồ thị của hàm số f.

Example

Cho hàm số $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ cho bởi $x \mapsto y = x^2$. Khi đó

Example

Cho hàm số $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ cho bởi $x \mapsto y = x^2$. Khi đó
$+$ Tập xác định $D = [0, 1]$.

Example

Cho hàm số $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ cho bởi $x \mapsto y = x^2$. Khi đó
+ Tập xác định $D = [0, 1]$.
+ Đồ thị là tập

$$G = \{(x, x^2) \mid x \in [0, 1]\}.$$

Điểm $M(1/2, 1/4) \in G$ và $N(0, 1) \notin G$.

2.2. Các hàm số sơ cấp cơ bản và hàm số sơ cấp

2.2. Các hàm số sơ cấp cơ bản và hàm số sơ cấp

Definition

Hàm số $f : D \to \mathbb{R}$ được gọi là

2.2. Các hàm số sơ cấp cơ bản và hàm số sơ cấp

Definition

Hàm số $f : D \to \mathbb{R}$ được gọi là

(i) hàm số chẵn, nếu:

$$\begin{cases} -x \in D & \forall x \in D, \\ f(-x) = f(x) & \forall x \in D. \end{cases}$$

2.2. Các hàm số sơ cấp cơ bản và hàm số sơ cấp

Definition

Hàm số $f : D \to \mathbb{R}$ được gọi là
(i) hàm số chẵn, nếu:

$$\begin{cases} -x \in D & \forall x \in D, \\ f(-x) = f(x) & \forall x \in D. \end{cases}$$

(ii) hàm số lẻ, nếu:

$$\begin{cases} -x \in D & \forall x \in D, \\ f(-x) = -f(x) & \forall x \in D. \end{cases}$$

Definition

Hàm số $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm tuần hoàn nếu tồn tại số dương k sao cho

$$f(x+k) = f(x) \quad \forall x \in D.$$

Definition

Hàm số $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm tuần hoàn nếu tồn tại số dương k sao cho

$$f(x+k) = f(x) \quad \forall x \in D.$$

Definition

Cho $(a, b) \subset D$ và hàm số $f : D \to \mathbb{R}$.

Definition

Hàm số $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm tuần hoàn nếu tồn tại số dương k sao cho

$$f(x+k) = f(x) \quad \forall x \in D.$$

Definition

Cho $(a, b) \subset D$ và hàm số $f : D \to \mathbb{R}$.
(i) Hàm số f được gọi là đơn điệu tăng (tăng ngặt) trên (a, b) nếu

$$x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2)).$$

Definition

Hàm số $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm tuần hoàn nếu tồn tại số dương k sao cho

$$f(x+k) = f(x) \quad \forall x \in D.$$

Definition

Cho $(a, b) \subset D$ và hàm số $f : D \to \mathbb{R}$.
(i) Hàm số f được gọi là đơn điệu tăng (tăng ngặt) trên (a, b) nếu

$$x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2)).$$

(ii) Hàm số f được gọi là đơn điệu giảm (giảm ngặt) trên (a, b) nếu

Definition

Hàm số $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm tuần hoàn nếu tồn tại số dương k sao cho

$$f(x+k) = f(x) \quad \forall x \in D.$$

Definition

Cho $(a, b) \subset D$ và hàm số $f : D \to \mathbb{R}$.

(i) Hàm số f được gọi là đơn điệu tăng (tăng ngặt) trên (a, b) nếu

$$x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2)).$$

(ii) Hàm số f được gọi là đơn điệu giảm (giảm ngặt) trên (a, b) nếu

$$x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

Definition (Hàm số hợp)

Cho hàm số $f : (a, b) \to (c, d)$ và $g : (c, d) \to (e, f)$. Hàm số $h : (a, b) \to (e, f)$ được xác định bởi

$$h(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in (a, b)$$

được gọi là hàm số hợp của f và g. Kí hiệu $h := g \circ f$.

Definition (Hàm số hợp)

Cho hàm số $f : (a, b) \to (c, d)$ và $g : (c, d) \to (e, f)$. Hàm số $h : (a, b) \to (e, f)$ được xác định bởi

$$h(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in (a, b)$$

được gọi là hàm số hợp của f và g. Kí hiệu $h := g \circ f$.

Example

Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = 2x - 1$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = x^2$.

Definition (Hàm số hợp)

Cho hàm số $f : (a, b) \to (c, d)$ và $g : (c, d) \to (e, f)$. Hàm số $h : (a, b) \to (e, f)$ được xác định bởi

$$h(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in (a, b)$$

được gọi là hàm số hợp của f và g. Kí hiệu $h := g \circ f$.

Example

Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = 2x - 1$ và
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = x^2$.
Khi đó

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = f(x)^2 = (2x - 1)^2,$$
$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = 2g(x) - 1 = 2x^2 - 1.$$

Definition (hàm số ngược)

Cho $X, Y \subset \mathbb{R}$ và $f : X \to Y$ là song ánh. Hàm số $g : Y \to X$ xác định như sau: với mỗi $y \in Y, g(y) = x$ sao cho $f(x) = y$ được gọi là hàm số ngược của hàm số f. Kí hiệu: $g := f^{-1}$.

Definition (hàm số ngược)

Cho $X, Y \subset \mathbb{R}$ và $f : X \to Y$ là song ánh. Hàm số $g : Y \to X$ xác định như sau: với mỗi $y \in Y, g(y) = x$ sao cho $f(x) = y$ được gọi là hàm số ngược của hàm số f. Kí hiệu: $g := f^{-1}$.

Remark. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và đồ thị của hàm số ngược $y = f^{-1}(x)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

Definition (hàm số ngược)

Cho $X, Y \subset \mathbb{R}$ và $f : X \to Y$ là song ánh. Hàm số $g : Y \to X$ xác định như sau: với mỗi $y \in Y, g(y) = x$ sao cho $f(x) = y$ được gọi là hàm số ngược của hàm số f. Kí hiệu: $g := f^{-1}$.

Remark. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và đồ thị của hàm số ngược $y = f^{-1}(x)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

Example

Hàm số nào là song ánh? Tìm hàm số ngược nếu có?

(i) $\mathbb{R} \ni x \mapsto (5x - 1) \in \mathbb{R}$.

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.

(iii) $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty), x \mapsto f(x) = x^2$.

Hàm số sơ cấp

(1) Hàm số sơ cấp cơ bản.

- Hàm số lũy thừa $x \mapsto x^a$.
- Hàm số mũ $x \mapsto a^x, (a > 0, a \neq 1)$.
- Hàm số logarit $x \mapsto \log_a x, (a > 0, a \neq 1)$.
- Hàm số lượng giác

$x \mapsto \sin x, x \mapsto \cos x, x \mapsto \tan x, x \mapsto \cot x$.

- Hàm số logarit $x \mapsto \log_a x, (a > 0, a \neq 1)$.
- Hàm lượng giác ngược: Tập xác định; tập giá trị; đồ thị

• Hàm $x \mapsto \arcsin x$.

• Hàm $x \mapsto \arccos x$.

• Hàm $x \mapsto \arctan x$.

• Hàm $x \mapsto \ \mathrm{arccot} x$.

- Hàm Hyperbolic:

- Hàm Hyperbolic:

+) Hàm sinhyperbolic:

$$sh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

+) Hàm cosinhyperbolic

$$ch(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

+) Hàm tanhyperbolic và contanghyperbolic

$$th(x) := \frac{sh(x)}{ch(x)}, \quad coth(x) := \frac{ch(x)}{sh(x)}$$

Example

Chứng minh các công thức sau:

- $sh(x+y) = sh(x)ch(y) + ch(x)sh(y)$
- $sh(x-y) = sh(x)ch(y) - ch(x)sh(y)$
- $ch(x+y) = ch(x)ch(y) - sh(x)sh(y)$
- $ch(x-y) = ch(x)ch(y) + sh(x)sh(y)$
- $th(x+y) = \frac{th(x)+th(y)}{1-th(x)th(y)}$.

(2) Hàm số sơ cấp.
Cho hai hàm số f và g. Ta xác định các phép toán

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x).$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

(2) Hàm số sơ cấp.
Cho hai hàm số f và g. Ta xác định các phép toán

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x).$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Miền xác định

$$D_{f\pm g} = D_{fg} = D_f \cap D_g.$$
$$D_{f/g} = D_f \cap \{x \in D_g \mid g(x) \neq 0\}.$$

(2) Hàm số sơ cấp.

Cho hai hàm số f và g. Ta xác định các phép toán

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x).$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Miền xác định

$$D_{f \pm g} = D_{fg} = D_f \cap D_g.$$
$$D_{f/g} = D_f \cap \{x \in D_g \mid g(x) \neq 0\}.$$

Hàm sơ cấp là những hàm được tạo thành bởi một số hữu hạn các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia), các phép lấy hàm số hợp của các hàm sơ cấp cơ bản và các hằng số.

2.2. Giới hạn và liên tục của hàm số

2.2.1. Khái niệm và tích chất

2.2. Giới hạn và liên tục của hàm số

2.2.1. Khái niệm và tích chất Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D.

2.2.1. Khái niệm và tích chất Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D.

Giới hạn $x \to x_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.c. } |f(x) - a| < \epsilon \ \forall x : |x - x_0| < \delta).$$

2.2.1. Khái niệm và tích chất Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D.

Giới hạn $x \to x_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.c. } |f(x) - a| < \epsilon \ \forall x : |x - x_0| < \delta).$$

Giới hạn bên trái $x \to x_0^-$ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.c. } |f(x) - a| < \epsilon \ \forall x : -\delta < x - x_0 < 0).$$

2.2.1. Khái niệm và tích chất Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D.

Giới hạn $x \to x_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \left(\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.c. } |f(x) - a| < \epsilon \ \forall x : |x - x_0| < \delta\right).$$

Giới hạn bên trái $x \to x_0^-$ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \left(\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.c. } |f(x) - a| < \epsilon \ \forall x : -\delta < x - x_0 < 0\right).$$

Giới hạn bên phải $x \to x_0^+$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \left(\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.c. } |f(x) - a| < \epsilon \ \forall x : 0 < x - x_0 < \delta\right).$$

Dùng định nghĩa chứng minh giới hạn sau

$$\lim_{x\to 2} \frac{x}{x+1} = \frac{2}{3}.$$

Tính chất.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = a \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = a \end{cases}$$

Tính chất.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = a \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = a \end{cases}$$

Example

Tìm m, n để hàm số sau có giới hạn khi $x \to -1$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+m}{x+1}, & x < -1 \\ nx + 2, & x \geq -1. \end{cases}$$

Một số định nghĩa về giới hạn tại vô cực và giới hạn vô hạn (xem giáo trình)

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = A.$$

$$\lim_{x \to \pm x_0} f(x) = \pm\infty.$$

Tính chất.

Tính chất.
(1) Tính chất 1. Nếu $f(x)$ tồn tại giới hạn khi $x \to x_0$, thì giới hạn đó là duy nhất.

Tính chất.
(1) Tính chất 1. Nếu $f(x)$ tồn tại giới hạn khi $x \to x_0$, thì giới hạn đó là duy nhất.
(2) Tính chất 2. Giả sử
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$, $\quad a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b, \qquad \lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = ab.$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0).$$

(3) Tính chất 3. Nếu tồn tại giới hạn $\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$.

Khi đó $f(x)$ bị chặn trong lân cận của x_0, có nghĩa, tồn tại số $M, \delta > 0$ sao cho

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

(3) Tính chất 3. Nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$.

Khi đó $f(x)$ bị chặn trong lân cận của x_0, có nghĩa, tồn tại số $M, \delta > 0$ sao cho

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

(4) Tính chất 4.

- Nếu $f(x) \leq g(x) \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

(4) Tính chất 4.

- Nếu $f(x) \leq g(x) \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, thì $\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$.
- Nếu $\lim_{x \to x_0} f(x) > m$ thì tồn tại số $\delta > 0$ sao cho

$$f(x) > m \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

(4) Tính chất 4.

- Nếu $f(x) \leq g(x) \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.
- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > m$ thì tồn tại số $\delta > 0$ sao cho
$$f(x) > m \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$
- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < M$ thì tồn tại số $\delta > 0$ sao cho
$$f(x) < M \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

(4) Tính chất 4.

- Nếu $f(x) \leq g(x) \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.
- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > m$ thì tồn tại số $\delta > 0$ sao cho
$$f(x) > m \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$
- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < M$ thì tồn tại số $\delta > 0$ sao cho
$$f(x) < M \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$
- (Nguyên lý kẹp) Nếu
$$\begin{cases} f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = a \end{cases}, \text{ thì}$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = a.$$

Một số công thức liên quan tới số e.

- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e.$
- $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{1/x} = e.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

Giới hạn của hàm đơn điệu (tham khảo).

Giới hạn của hàm đơn điệu (tham khảo).

Theorem

(i) Giả sử $f(x)$ *là hàm tăng trên* (a, x_0).

- Nếu $f(x)$ *bị chặn trên, thì tồn tại* $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = m \in \mathbb{R}$.

Giới hạn của hàm đơn điệu (tham khảo).

Theorem

(i) Giả sử $f(x)$ là hàm tăng trên (a, x_0).

- Nếu $f(x)$ bị chặn trên, thì tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = m \in \mathbb{R}$.

- Nếu $f(x)$ không bị chặn trên, thì $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$.

Giới hạn của hàm đơn điệu (tham khảo).

Theorem

(i) Giả sử $f(x)$ *là hàm tăng trên* (a, x_0).

- Nếu $f(x)$ *bị chặn trên, thì tồn tại* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = m \in \mathbb{R}$.

- Nếu $f(x)$ *không bị chặn trên, thì* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$.

(ii) Giả sử $f(x)$ *là hàm giảm trên* (x_0, b).

- Nếu $f(x)$ *bị chặn dưới, thì tồn tại* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = m \in \mathbb{R}$.

Giới hạn của hàm đơn điệu (tham khảo).

Theorem

(i) Giả sử $f(x)$ là hàm tăng trên (a, x_0).

- Nếu $f(x)$ bị chặn trên, thì tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = m \in \mathbb{R}$.

- Nếu $f(x)$ không bị chặn trên, thì $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$.

(ii) Giả sử $f(x)$ là hàm giảm trên (x_0, b).

- Nếu $f(x)$ bị chặn dưới, thì tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = m \in \mathbb{R}$.

- Nếu $f(x)$ không bị chặn dưới, thì $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$.

Giới hạn của hàm đơn điệu (tham khảo).

Theorem

(i) Giả sử $f(x)$ là hàm tăng trên (a, x_0).
- Nếu $f(x)$ bị chặn trên, thì tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = m \in \mathbb{R}$.
- Nếu $f(x)$ không bị chặn trên, thì $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$.
(ii) Giả sử $f(x)$ là hàm giảm trên (x_0, b).
- Nếu $f(x)$ bị chặn dưới, thì tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = m \in \mathbb{R}$.
- Nếu $f(x)$ không bị chặn dưới, thì $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.

2.2.2. Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

2.2.2. Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

(1) Định nghĩa. (VCL, VCB)

2.2.2. Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

(1) Định nghĩa. (VCL, VCB)

-) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ thì $f(x)$ là VCB khi $x \to x_0$.

2.2.2. Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

(1) Định nghĩa. (VCL, VCB)

-) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ thì $f(x)$ là VCB khi $x \to x_0$.

-) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ thì $f(x)$ là VCL khi $x \to x_0$.

2.2.2. Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

(1) Định nghĩa. (VCL, VCB)

-) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ thì $f(x)$ là VCB khi $x \to x_0$.

-) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ thì $f(x)$ là VCL khi $x \to x_0$.

• **Ví dụ.**

+) $\sin x$ là VCB khi $x \to 0$ và $\frac{1}{\sin x}$ là VCL khi $x \to 0$.

2.2.2. Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

(1) Định nghĩa. (VCL, VCB)

-) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ thì $f(x)$ là VCB khi $x \to x_0$.

-) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ thì $f(x)$ là VCL khi $x \to x_0$.

• **Ví dụ.**

+) $\sin x$ là VCB khi $x \to 0$ và $\frac{1}{\sin x}$ là VCL khi $x \to 0$.

+) x^3 là VCL khi $x \to \infty$ và $\frac{1}{x^3}$ là VCB khi $x \to \infty$.

2.2.2. Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

(1) Định nghĩa. (VCL, VCB)

-) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ thì $f(x)$ là VCB khi $x \to x_0$.

-) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ thì $f(x)$ là VCL khi $x \to x_0$.

• **Ví dụ.**

+) $\sin x$ là VCB khi $x \to 0$ và $\frac{1}{\sin x}$ là VCL khi $x \to 0$.

+) x^3 là VCL khi $x \to \infty$ và $\frac{1}{x^3}$ là VCB khi $x \to \infty$.

• **Chú ý.**

1. $f(x)$ là VCL khi $x \to x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}$ là VCB khi $x \to x_0$.

2.2.2. Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

(1) Định nghĩa. (VCL, VCB)

-) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ thì $f(x)$ là VCB khi $x \to x_0$.

-) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ thì $f(x)$ là VCL khi $x \to x_0$.

- **Ví dụ.**

+) $\sin x$ là VCB khi $x \to 0$ và $\frac{1}{\sin x}$ là VCL khi $x \to 0$.
+) x^3 là VCL khi $x \to \infty$ và $\frac{1}{x^3}$ là VCB khi $x \to \infty$.

- **Chú ý.**

1. $f(x)$ là VCL khi $x \to x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}$ là VCB khi $x \to x_0$.
2. $f(x)$ là VCB khi $x \to x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}$ là VCL khi $x \to x_0$.

2.2.2. Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

(1) Định nghĩa. (VCL, VCB)

-) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ thì $f(x)$ là VCB khi $x \to x_0$.

-) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ thì $f(x)$ là VCL khi $x \to x_0$.

• **Ví dụ.**

+) $\sin x$ là VCB khi $x \to 0$ và $\frac{1}{\sin x}$ là VCL khi $x \to 0$.

+) x^3 là VCL khi $x \to \infty$ và $\frac{1}{x^3}$ là VCB khi $x \to \infty$.

• **Chú ý.**

1. $f(x)$ là VCL khi $x \to x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}$ là VCB khi $x \to x_0$.
2. $f(x)$ là VCB khi $x \to x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}$ là VCL khi $x \to x_0$.

Do đó từ nay ta chỉ nghiên cứu tính VCB.

2.2.2. Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

(1) Định nghĩa. (VCL, VCB)
-) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ thì $f(x)$ là VCB khi $x \to x_0$.
-) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ thì $f(x)$ là VCL khi $x \to x_0$.

• **Ví dụ.**
+) $\sin x$ là VCB khi $x \to 0$ và $\frac{1}{\sin x}$ là VCL khi $x \to 0$.
+) x^3 là VCL khi $x \to \infty$ và $\frac{1}{x^3}$ là VCB khi $x \to \infty$.

• **Chú ý.**
1. $f(x)$ là VCL khi $x \to x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}$ là VCB khi $x \to x_0$.
2. $f(x)$ là VCB khi $x \to x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}$ là VCL khi $x \to x_0$.
Do đó từ nay ta chỉ nghiên cứu tính VCB.
3. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ thì $(f(x) - a)$ là VCB khi $x \to x_0$.

2.2.2 Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

2.2.2 Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

(2) So sánh các VCB. Cho $f(x), g(x)$ là 2 VCB khi $x \to x_0$.

2.2.2 Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

(2) So sánh các VCB. Cho $f(x), g(x)$ là 2 VCB khi $x \to x_0$.
-) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì $f(x)$ là VCB bậc cao hơn $g(x)$ khi $x \to x_0$. Kí hiệu: $f(x) = o(g(x)), x \to x_0$.

2.2.2 Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

(2) So sánh các VCB. Cho $f(x), g(x)$ là 2 VCB khi $x \to x_0$.
-) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì $f(x)$ là VCB bậc cao hơn $g(x)$ khi $x \to x_0$. Kí hiệu: $f(x) = o(g(x)), x \to x_0$.
-) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$ thì $f(x), g(x)$ là 2 VCB cùng bậc khi $x \to x_0$. Kí hiệu: $f(x) = O(g(x)), x \to x_0$.

2.2.2 Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

(2) So sánh các VCB. Cho $f(x), g(x)$ là 2 VCB khi $x \to x_0$.

-) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì $f(x)$ là VCB bậc cao hơn $g(x)$ khi $x \to x_0$. Kí hiệu: $f(x) = o(g(x)), x \to x_0$.

-) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$ thì $f(x), g(x)$ là 2 VCB cùng bậc khi $x \to x_0$. Kí hiệu: $f(x) = O(g(x)), x \to x_0$.

*) Đặc biệt nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì $f(x), g(x)$ là 2 VCB tương đương khi $x \to x_0$. Kí hiệu: $f(x) \sim g(x), x \to x_0$.

- **Ví dụ 1.**

+) $x^2 = o(x), x \to 0$ vì $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 0.$

- **Ví dụ 1.**

+) $x^2 = o(x), x \to 0$ vì $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$.

+) $(x^2 - 1) = O(x - 1), x \to 1$ vì $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$.

- **Ví dụ 2.**

+) $\boxed{\sin x \sim x, x \to 0}$ vì $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

- **Ví dụ 2.**

+) $\boxed{\sin x \sim x, x \to 0}$ vì $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

+) $\boxed{\tan x \sim x, x \to 0}$ vì $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$

- **Ví dụ 2.**

+) $\boxed{\sin x \sim x, x \to 0}$ vì $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

+) $\boxed{\tan x \sim x, x \to 0}$ vì $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$

+) Tương tự ta có:

$$\boxed{(e^x - 1) \sim x, x \to 0}$$
$$\boxed{\ln(x+1) \sim x, x \to 0}$$
$$\boxed{(1 - \cos x) \sim \frac{1}{2}x^2, x \to 0}$$

• **Định lí.** *Giả sử* $f(x) \sim f_1(x), x \to x_0$ *và* $g(x) \sim g_1(x), x \to x_0$. *Nếu* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = a$, *thì*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a.$$

• **Định lí.** *Giả sử* $f(x) \sim f_1(x), x \to x_0$ *và* $g(x) \sim g_1(x), x \to x_0$. *Nếu* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = a$, *thì*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a.$$

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{x^2 + 3x}$.

• **Định lí.** *Giả sử* $f(x) \sim f_1(x), x \to x_0$ *và* $g(x) \sim g_1(x), x \to x_0$. *Nếu* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = a$, *thì*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a.$$

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{x^2 + 3x}$.

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x^2} - 1}{1 - \cos 3x}$.

• **Định lí.** *Giả sử* $f(x) \sim f_1(x), x \to x_0$ *và* $g(x) \sim g_1(x), x \to x_0$. *Nếu* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = a$, *thì*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a.$$

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{x^2+3x}$.

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x^2}-1}{1-\cos 3x}$.

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1-3x^2)}{\sqrt{1+x^2}-1}$.

(3) Dạng vô định $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 1^{\infty}$.
(3.1). Dạng $\frac{0}{0}$. Dùng VCB tương đương hoặc sử dụng biến đổi thành nhân tử chung.

(3.2) Dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

(3.2) Dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

Chú ý:

$$\frac{\sqrt{A}}{x} = \begin{cases} \sqrt{\frac{A}{x^2}} \text{ nếu } & x > 0 \\ -\sqrt{\frac{A}{x^2}} \text{ nếu } & x < 0 \end{cases}$$

(3.2) Dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

Chú ý:

$$\frac{\sqrt{A}}{x} = \begin{cases} \sqrt{\frac{A}{x^2}} & \text{nếu} \quad x > 0 \\ -\sqrt{\frac{A}{x^2}} & \text{nếu} \quad x < 0 \end{cases}$$

- **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$A = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} + 3x}{3x - 2}.$$

(3.2) Dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

Chú ý:

$$\frac{\sqrt{A}}{x} = \begin{cases} \sqrt{\frac{A}{x^2}} & \text{nếu} \quad x > 0 \\ -\sqrt{\frac{A}{x^2}} & \text{nếu} \quad x < 0 \end{cases}$$

- **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$A = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} + 3x}{3x - 2}.$$

$$B = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} + 3x}{3x - 2}.$$

(3.3) Dạng $\infty - \infty$.

- Biến đổi về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$.

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$A = \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2 + x - 1} - 2x)$.

(3.3) Dạng $\infty - \infty$.

- Biến đổi về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$.

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$A = \lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{4x^2 + x - 1} - 2x)$.

$B = \lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{4x^2 + x - 1} + 2x)$.

(3.3) Dạng $\infty - \infty$.

- Biến đổi về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$.

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$A = \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2 + x - 1} - 2x)$.

$B = \lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{4x^2 + x - 1} + 2x)$.

$$C = \lim_{x \to -\infty} (\sqrt{4x^2 + x - 1} - 2x)$$

(3.3) Dạng $\infty - \infty$.

- Biến đổi về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$.

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$A = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x-1} - 2x)$.

$B = \lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+x-1} + 2x)$.

$$C = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+x-1} - 2x) = +\infty$$

(3.3) Dạng $\infty - \infty$.

- Biến đổi về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$.

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$A = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x-1}-2x)$.

$B = \lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+x-1}+2x)$.

$$C = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+x-1}-2x) = +\infty$$

- **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$D = \lim_{x \to 1} \left(\frac{2}{1 - x^2} - \frac{3}{1 - x^3} \right)$$

- **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$D = \lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3}\right)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} D &= \lim_{x\to 1} \frac{2(1+x+x^2) - 3(1+x)}{(1-x)(1+x)(1+x+x^2)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{2x^2 - x - 1}{(1-x)(1+x)(1+x+x^2)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(2x+1)}{(1-x)(1+x)(1+x+x^2)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{-(2x+1)}{(1+x)(1+x+x^2)} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

- **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$D = \lim_{x \to 1} \left(\frac{2}{1 - x^2} - \frac{3}{1 - x^3}\right)$$

Ta có:

$$D = \lim_{x \to 1} \frac{2(1 + x + x^2) - 3(1 + x)}{(1 - x)(1 + x)(1 + x + x^2)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(2x + 1)}{(1 - x)(1 + x)(1 + x + x^2)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-(2x + 1)}{(1 + x)(1 + x + x^2)}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$D = \lim_{x \to 1} \left(\frac{2}{1 - x^2} - \frac{3}{1 - x^3} \right)$$

Ta có:

$$D = \lim_{x \to 1} \frac{2(1 + x + x^2) - 3(1 + x)}{(1 - x)(1 + x)(1 + x + x^2)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-(2x + 1)}{(1 + x)(1 + x + x^2)}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$D = \lim_{x \to 1} \left(\frac{2}{1 - x^2} - \frac{3}{1 - x^3} \right)$$

Ta có:

$$D = \lim_{x \to 1} \frac{2(1 + x + x^2) - 3(1 + x)}{(1 - x)(1 + x)(1 + x + x^2)}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

- **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$D = \lim_{x \to 1} \left(\frac{2}{1 - x^2} - \frac{3}{1 - x^3}\right)$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
D &= \lim_{x \to 1} \frac{2(1 + x + x^2) - 3(1 + x)}{(1 - x)(1 + x)(1 + x + x^2)} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - x - 1}{(1 - x)(1 + x)(1 + x + x^2)} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(2x + 1)}{(1 - x)(1 + x)(1 + x + x^2)} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{-(2x + 1)}{(1 + x)(1 + x + x^2)} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(3.4) Dạng 1^∞.

(3.4) Dạng 1^{∞}. **Chú ý**

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e}$$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{1}{a(x)}\right)^{a(x)} = e}$$ nếu $a(x)\to\infty$ khi $x\to x_0$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}(1+a(x))^{\frac{1}{a(x)}} = e}$$ nếu $a(x)\to 0$ khi $x\to x_0$

- **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$A = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{2x+1})^{\frac{x^2}{x-2}}$. $\qquad B = \lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 3x)^{\frac{1}{\tan 5x}}$.

(3.4) Dạng 1^∞. **Chú ý**

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e}$$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}(1+a(x))^{\frac{1}{a(x)}} = e} \quad \text{nếu} \quad a(x)\to 0 \quad \text{khi} \quad x\to x_0$$

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$A = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{2x+1})^{\frac{x^2}{x-2}}$. $\qquad B = \lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 3x)^{\frac{1}{\tan 5x}}$.

(3.4) Dạng 1^∞. **Chú ý**

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e}$$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{1}{a(x)}\right)^{a(x)} = e} \quad \text{nếu} \quad a(x)\to\infty \quad \text{khi} \quad x\to x_0$$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}(1+a(x))^{\frac{1}{a(x)}} = e} \quad \text{nếu} \quad a(x)\to 0 \quad \text{khi} \quad x\to x_0$$

(3.4) Dạng 1^∞. Chú ý

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e}$$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{1}{a(x)}\right)^{a(x)} = e} \quad \text{nếu} \quad a(x)\to\infty \quad \text{khi} \quad x\to x_0$$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}(1+a(x))^{\frac{1}{a(x)}} = e} \quad \text{nếu} \quad a(x)\to 0 \quad \text{khi} \quad x\to x_0$$

- **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$A = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{2x+1})^{\frac{x^2}{x-2}}$.

(3.4) Dạng 1^∞. Chú ý

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e}$$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{1}{a(x)}\right)^{a(x)} = e}$$ nếu $a(x)\to\infty$ khi $x\to x_0$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}(1+a(x))^{\frac{1}{a(x)}} = e}$$ nếu $a(x)\to 0$ khi $x\to x_0$

- **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$A = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{2x+1})^{\frac{x^2}{x-2}}$. $\qquad B = \lim_{x\to 0}(1-\sin 3x)^{\frac{1}{\tan 5x}}$.

- **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$C = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x+1}{4x+5}\right)^{\frac{x^2-1}{x}}$$

- **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$C = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x+1}{4x+5}\right)^{\frac{x^2-1}{x}}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{4}{4x+5}\right)^{\frac{x^2-1}{x}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{-(4x+5)/4}\right)^{\frac{-(4x+5)}{4}\cdot\frac{-4(x^2-1)}{x(4x+5)}} \\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-4(x^2-1)}{x(4x+5)}} = e^{-1}. \end{aligned}$$

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$C = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{4x+5}\right)^{\frac{x^2-1}{x}}$$

Ta có:

$$C = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{4x+5}\right)^{\frac{x^2-1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-4(x^2-1)}{x(4x+5)}} = e^{-1}.$$

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$C = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{4x+5}\right)^{\frac{x^2-1}{x}}$$

Ta có:

$$C = \lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{4}{4x+5}\right)^{\frac{x^2-1}{x}}$$

$$= e^{-1}.$$

- **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$C = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x+1}{4x+5}\right)^{\frac{x^2-1}{x}}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{4}{4x+5}\right)^{\frac{x^2-1}{x}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{-(4x+5)/4}\right)^{\frac{-(4x+5)}{4}\cdot\frac{-4(x^2-1)}{x(4x+5)}} \\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-4(x^2-1)}{x(4x+5)}} = e^{-1}. \end{aligned}$$

Hàm số liên tục, liên tục trái và liên tục phải.

(1) Các khái niệm và tính chất cơ bản.

(1) Các khái niệm và tính chất cơ bản.

(1) Các khái niệm và tính chất cơ bản.

• **Định nghĩa.** Hàm số $f(x)$ được gọi là:

(1) Các khái niệm và tính chất cơ bản.

• **Định nghĩa.** Hàm số $f(x)$ được gọi là:

- liên tục tại x_0 nếu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

(1) Các khái niệm và tính chất cơ bản.

• **Định nghĩa.** Hàm số $f(x)$ được gọi là:

- liên tục tại x_0 nếu

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

- liên tục trái tại x_0 nếu $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

(1) Các khái niệm và tính chất cơ bản.

• **Định nghĩa.** Hàm số $f(x)$ được gọi là:

- liên tục tại x_0 nếu

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

- liên tục trái tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

- liên tục phải tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

(1) Các khái niệm và tính chất cơ bản.

• **Định nghĩa.** Hàm số $f(x)$ được gọi là:

- liên tục tại x_0 nếu

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

- liên tục trái tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

- liên tục phải tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

- liên tục trên $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mọi $x \in (a; b)$.

Hàm số liên tục, liên tục trái và liên tục phải.

(1) Các khái niệm và tính chất cơ bản.

• **Định nghĩa.** Hàm số $f(x)$ được gọi là:

- liên tục tại x_0 nếu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

- liên tục trái tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

- liên tục phải tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

- liên tục trên $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mọi $x \in (a; b)$.

- liên tục trên $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và liên tục phải tại $x = a$, liên tục trái tại $x = b$.

Hàm số liên tục, liên tục trái và liên tục phải.

(1) Các khái niệm và tính chất cơ bản.

• **Định nghĩa.** Hàm số $f(x)$ được gọi là:

- liên tục tại x_0 nếu

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

- liên tục trái tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

- liên tục phải tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

- liên tục trên $(a;b)$ nếu nó liên tục tại mọi $x \in (a;b)$.

- liên tục trên $[a;b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và liên tục phải tại $x = a$, liên tục trái tại $x = b$.

- Gián đoạn tại $x = x_0$ nếu nó không liên tục tại x_0.

• **Chú ý.**

- Hàm số liên tục tại x_0 nếu và chỉ nếu nó liên tục trái và liên tục phải tại x_0.

• **Chú ý.**

- Hàm số liên tục tại x_0 nếu và chỉ nếu nó liên tục trái và liên tục phải tại x_0.
- Đồ thị của hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ là đường liền trên đoạn đó.

• **Ví dụ.** Xét tính liên tục trái, liên tục phải và liên tục của hàm số sau tại $x = -1$ và $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 2 & \text{nếu} \quad x \in (-\infty; -1] \cup (2; \infty) \\ 8 - 4x & \text{nếu} \quad x \in (-1; 2] \end{cases}$$

• **Ví dụ.** Xét tính liên tục trái, liên tục phải và liên tục của hàm số sau tại $x = -1$ và $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 2 & \text{nếu} \quad x \in (-\infty; -1] \cup (2; \infty) \\ 8 - 4x & \text{nếu} \quad x \in (-1; 2] \end{cases}$$

+) Tại $x = -1$. $\quad f(-1) = -1$

• **Ví dụ.** Xét tính liên tục trái, liên tục phải và liên tục của hàm số sau tại $x = -1$ và $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 2 & \text{nếu} \quad x \in (-\infty; -1] \cup (2; \infty) \\ 8 - 4x & \text{nếu} \quad x \in (-1; 2] \end{cases}$$

+) Tại $x = -1$. $\quad f(-1) = -1$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (|x| - 2) = -1$$

• **Ví dụ.** Xét tính liên tục trái, liên tục phải và liên tục của hàm số sau tại $x = -1$ và $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 2 & \text{nếu} \quad x \in (-\infty; -1] \cup (2; \infty) \\ 8 - 4x & \text{nếu} \quad x \in (-1; 2] \end{cases}$$

+) Tại $x = -1$. $\quad f(-1) = -1$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (|x| - 2) = -1$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (8 - 4x) = 12$$

• **Ví dụ.** Xét tính liên tục trái, liên tục phải và liên tục của hàm số sau tại $x=-1$ và $x=2$:

$$f(x)=\begin{cases} |x|-2 & \text{nếu} \quad x\in(-\infty;-1]\cup(2;\infty) \\ 8-4x & \text{nếu} \quad x\in(-1;2] \end{cases}$$

+) Tại $x=-1$. $\quad f(-1)=-1$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}(|x|-2)=-1$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}(8-4x)=12$$

Vậy hàm số liên tục trái nhưng không liên tục tại $x=-1$.

• **Ví dụ.** Xét tính liên tục trái, liên tục phải và liên tục của hàm số sau tại $x = -1$ và $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 2 & \text{nếu} \quad x \in (-\infty; -1] \cup (2; \infty) \\ 8 - 4x & \text{nếu} \quad x \in (-1; 2] \end{cases}$$

+) Tại $x = -1$. $\quad f(-1) = -1$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (|x| - 2) = -1$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (8 - 4x) = 12$$

Vậy hàm số liên tục trái nhưng không liên tục tại $x = -1$.

+) Tại $x = 2$. $\quad f(2) = 0$

• **Ví dụ.** Xét tính liên tục trái, liên tục phải và liên tục của hàm số sau tại $x = -1$ và $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 2 & \text{nếu} \quad x \in (-\infty; -1] \cup (2; \infty) \\ 8 - 4x & \text{nếu} \quad x \in (-1; 2] \end{cases}$$

+) Tại $x = -1$. $\quad f(-1) = -1$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (|x| - 2) = -1$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (8 - 4x) = 12$$

Vậy hàm số liên tục trái nhưng không liên tục tại $x = -1$.

+) Tại $x = 2$. $\quad f(2) = 0$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (8 - 4x) = 0$$

• **Ví dụ.** Xét tính liên tục trái, liên tục phải và liên tục của hàm số sau tại $x = -1$ và $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 2 & \text{nếu} \quad x \in (-\infty; -1] \cup (2; \infty) \\ 8 - 4x & \text{nếu} \quad x \in (-1; 2] \end{cases}$$

+) Tại $x = -1$. $\quad f(-1) = -1$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (|x| - 2) = -1$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (8 - 4x) = 12$$

Vậy hàm số liên tục trái nhưng không liên tục tại $x = -1$.

+) Tại $x = 2$. $\quad f(2) = 0$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (8 - 4x) = 0$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (|x| - 2) = 0$$

• **Ví dụ.** Xét tính liên tục trái, liên tục phải và liên tục của hàm số sau tại $x = -1$ và $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 2 & \text{nếu} \quad x \in (-\infty; -1] \cup (2; \infty) \\ 8 - 4x & \text{nếu} \quad x \in (-1; 2] \end{cases}$$

+) Tại $x = -1$. $\quad f(-1) = -1$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (|x| - 2) = -1$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (8 - 4x) = 12$$

Vậy hàm số liên tục trái nhưng không liên tục tại $x = -1$.

+) Tại $x = 2$. $\quad f(2) = 0$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (8 - 4x) = 0$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (|x| - 2) = 0$$

Vậy hàm số liên tục tại $x = 2$.

(2) Tính chất.

(2) Tính chất.

- **Định lí 1.** Giả sử $f(x), g(x)$ liên tục tại x_0. Khi đó:
$f(x) + g(x), f(x)g(x)$ liên tục tại x_0.
Nếu $g(x_0) \neq 0$ thì $\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng liên tục tại x_0.

(2) Tính chất.

• **Định lí 1.** Giả sử $f(x), g(x)$ liên tục tại x_0. Khi đó:
$f(x) + g(x), f(x)g(x)$ liên tục tại x_0.
Nếu $g(x_0) \neq 0$ thì $\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng liên tục tại x_0.

• **Định lí 2.** Các hàm sơ cấp (đa thức, phân thức, lượng giác, mũ, logarit, lũy thừa) liên tục trên tập xác định của chúng.

(2) Tính chất.

• **Định lí 1.** Giả sử $f(x), g(x)$ liên tục tại x_0. Khi đó:
$f(x) + g(x), f(x)g(x)$ liên tục tại x_0.
Nếu $g(x_0) \neq 0$ thì $\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng liên tục tại x_0.

• **Định lí 2.** Các hàm sơ cấp (đa thức, phân thức, lượng giác, mũ, logarit, lũy thừa) liên tục trên tập xác định của chúng.

• **Chú ý.** Từ Định lí 1 và Định lí 2 suy ra tổng, hiệu, tích, thương, hàm hợp, hàm ngược của các hàm sơ cấp là liên tục trên TXĐ.

(2) Tính chất.

• **Định lí 1.** Giả sử $f(x), g(x)$ liên tục tại x_0. Khi đó:
$f(x) + g(x), f(x)g(x)$ liên tục tại x_0.
Nếu $g(x_0) \neq 0$ thì $\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng liên tục tại x_0.

• **Định lí 2.** Các hàm sơ cấp (đa thức, phân thức, lượng giác, mũ, logarit, lũy thừa) liên tục trên tập xác định của chúng.

• **Chú ý.** Từ Định lí 1 và Định lí 2 suy ra tổng, hiệu, tích, thương, hàm hợp, hàm ngược của các hàm sơ cấp là liên tục trên TXĐ.

• **Ví dụ 1.**
- Hàm số $f(x) = x^4 - 3x + 5$ liên tục trên R.

(2) Tính chất.

• **Định lí 1.** Giả sử $f(x), g(x)$ liên tục tại x_0. Khi đó:
$f(x) + g(x), f(x)g(x)$ liên tục tại x_0.
Nếu $g(x_0) \neq 0$ thì $\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng liên tục tại x_0.

• **Định lí 2.** Các hàm sơ cấp (đa thức, phân thức, lượng giác, mũ, logarit, lũy thừa) liên tục trên tập xác định của chúng.

• **Chú ý.** Từ Định lí 1 và Định lí 2 suy ra tổng, hiệu, tích, thương, hàm hợp, hàm ngược của các hàm sơ cấp là liên tục trên TXĐ.

• **Ví dụ 1.**
- Hàm số $f(x) = x^4 - 3x + 5$ liên tục trên R.
- Hàm số $f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{4e^x + x}{x-1}$ liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.

(2) Tính chất.

• **Định lí 1.** Giả sử $f(x), g(x)$ liên tục tại x_0. Khi đó:
$f(x) + g(x), f(x)g(x)$ liên tục tại x_0.
Nếu $g(x_0) \neq 0$ thì $\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng liên tục tại x_0.

• **Định lí 2.** Các hàm sơ cấp (đa thức, phân thức, lượng giác, mũ, logarit, lũy thừa) liên tục trên tập xác định của chúng.

• **Chú ý.** Từ Định lí 1 và Định lí 2 suy ra tổng, hiệu, tích, thương, hàm hợp, hàm ngược của các hàm sơ cấp là liên tục trên TXĐ.

• **Ví dụ 1.**
- Hàm số $f(x) = x^4 - 3x + 5$ liên tục trên R.
- Hàm số $f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{4e^x + x}{x-1}$ liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.
- Hàm số $f(x) = \tan x$ liên tục trên $R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

• **Ví dụ 2.** Xét tính liên tục của các hàm số:

1. $y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$

• **Ví dụ 2.** Xét tính liên tục của các hàm số:

1. $y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$

Lời giải. +) Tại $x \neq 0. f(x) = \frac{\sin x}{x}$ liên tục trên $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

• **Ví dụ 2.** Xét tính liên tục của các hàm số:

1. $y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$

Lời giải. +) Tại $x \neq 0. f(x) = \frac{\sin x}{x}$ liên tục trên $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

+) Tại $x = 0. f(0) = 1$

• **Ví dụ 2.** Xét tính liên tục của các hàm số:

1. $y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$

Lời giải. +) Tại $x \neq 0. f(x) = \frac{\sin x}{x}$ liên tục trên $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

+) Tại $x = 0. f(0) = 1$ và

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

• **Ví dụ 2.** Xét tính liên tục của các hàm số:

1. $y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$

Lời giải. +) Tại $x \neq 0. f(x) = \frac{\sin x}{x}$ liên tục trên $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

+) Tại $x = 0. f(0) = 1$ và

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

• **Ví dụ 2.** Xét tính liên tục của các hàm số:

1. $y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$

Lời giải. +) Tại $x \neq 0 . f(x) = \frac{\sin x}{x}$ liên tục trên $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

+) Tại $x = 0 . f(0) = 1$ và

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên R.

• **Ví dụ 2.** Xét tính liên tục của các hàm số:

2. $y = f(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{nếu } 1 < x \leq 2. \end{cases}$

• **Ví dụ 2.** Xét tính liên tục của các hàm số:

2. $y = f(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{nếu } 1 < x \leq 2. \end{cases}$

Lời giải. +) Với $x \in [0; 1).f(x) = 2x$ liên tục trên $[0; 1)$.

• **Ví dụ 2.** Xét tính liên tục của các hàm số:

2. $y = f(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{nếu } 1 < x \leq 2. \end{cases}$

Lời giải. +) Với $x \in [0; 1).f(x) = 2x$ liên tục trên $[0; 1)$.
+) Với $x \in (1; 2].f(x) = 2 - x$ liên tục trên $(1; 2]$.

• **Ví dụ 2.** Xét tính liên tục của các hàm số:

2. $y = f(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{nếu } 1 < x \leq 2. \end{cases}$

Lời giải. +) Với $x \in [0; 1).f(x) = 2x$ liên tục trên $[0; 1)$.
+) Với $x \in (1; 2].f(x) = 2 - x$ liên tục trên $(1; 2]$.
+) Tại $x = 1.f(1) = 2$ và

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2x = 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2 - x) = 1.$$

• **Ví dụ 2.** Xét tính liên tục của các hàm số:

2. $y = f(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{nếu } 1 < x \leq 2. \end{cases}$

Lời giải. +) Với $x \in [0; 1).f(x) = 2x$ liên tục trên $[0; 1)$.
+) Với $x \in (1; 2].f(x) = 2 - x$ liên tục trên $(1; 2]$.
+) Tại $x = 1.f(1) = 2$ và

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2x = 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2 - x) = 1.$$

$\Rightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

• **Ví dụ 2.** Xét tính liên tục của các hàm số:

2. $y = f(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{nếu } 1 < x \le 2. \end{cases}$

Lời giải. +) Với $x \in [0; 1). f(x) = 2x$ liên tục trên $[0; 1)$.
+) Với $x \in (1; 2]. f(x) = 2 - x$ liên tục trên $(1; 2]$.
+) Tại $x = 1. f(1) = 2$ và

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2x = 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2 - x) = 1.$$

$\Rightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.
Vậy $f(x)$ liên tục trên $[0; 2] \setminus \{1\}$.

2.2.4 Hàm liên tục đều.

2.2.4 Hàm liên tục đều.

Definition (Hàm liên tục đều)

Hàm $f(x)$ được gọi là liên tục đều trên tập D nếu:
$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ sao cho

$$\forall x_1, x_2 \in D : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

2.2.4 Hàm liên tục đều.

Definition (Hàm liên tục đều)

Hàm $f(x)$ được gọi là liên tục đều trên tập D nếu:
$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ sao cho

$$\forall x_1, x_2 \in D : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

Example

- Chứng minh rằng hàm $y = \sin x$ liên tục đều trên $\mathbb{R}$.
- Chứng minh rằng hàm $y = \frac{1}{x}$ không liên tục đều trên $(0, +\infty)$.

Tính chất

Tính chất

- Nếu $f(x)$ liên tục đều trên D, thì $f(x)$ liên tục trên D.

Tính chất

- Nếu $f(x)$ liên tục đều trên D, thì $f(x)$ liên tục trên D.
- Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên $D \nRightarrow f(x)$ liên tục đều trên D.
- Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b] \Rightarrow f(x)$ liên tục đều trên $[a, b]$.

Tính chất liên tục của hàm số trên một đoạn.

Tính chất liên tục của hàm số trên một đoạn.

(1) Định lí. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Khi đó $f(x)$ đạt max và min trên đoạn đó. Tức là: tồn tại $x_1, x_2 \in [a; b]$ sao cho

$$f(x_1) = \max_{[a;b]} f(x) := M; \quad f(x_2) = \min_{[a;b]} f(x) := m.$$

Hơn nữa, với mọi giá trị $d \in [m; M]$ luôn tồn tại $x_0 \in [a; b]$ sao cho $f(x_0) = d$.

(2) Hệ quả. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (a; b)$.

(2) Hệ quả. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (a; b)$.

Example

Chứng minh rằng các phương trình sau có ít nhất một nghiệm thực

$$(a) x^5 + 4x^4 - x^3 + 7x + \sqrt{2} = 0$$

$$(b) 3x + \sin(\pi x) + 4 = 0.$$

Example

Cho hàm số liên tục $f(x) : [0, 1] \to [0, 1]$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in [0, 1]$ sao cho

$$f(x_0) = x_0.$$

2.3. Đạo hàm và vi phân của hàm số

2.3.1 Bài toán vật lý và tiếp tuyến của đường cong

2.3.1 Bài toán vật lý và tiếp tuyến của đường cong

1. Bài toán vật lý.

Xét một chất điểm M chuyển động theo công thức:

$$S = f(t)$$

2.3.1 Bài toán vật lý và tiếp tuyến của đường cong

1. Bài toán vật lý.

Xét một chất điểm M chuyển động theo công thức:

$$S = f(t)$$

Vật tốc $v = f'(t)$

2.3.1 Bài toán vật lý và tiếp tuyến của đường cong

1. Bài toán vật lý.

Xét một chất điểm M chuyển động theo công thức:

$$S = f(t)$$

Vật tốc $v = f'(t)$

Gia tốc $a = f''(t)$

2. Tiếp tuyến của đường cong.
+Tiếp tuyến của (C) tại $M(x_0, y_0) \in (C)$ là:

$$d : y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

2.3.2 Định nghĩa và tích chất

(1) Định nghĩa đạo hàm: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

- Đạo hàm của hàm số tại $x = x_0$:

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (1)$$

(1) Định nghĩa đạo hàm: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.
- Đạo hàm của hàm số tại $x = x_0$:

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (1)$$

- Nếu hàm số có đạo hàm tại $x = x_0$, ta nói hàm số *khả vi* tại $x = x_0$.

2.3.2 Định nghĩa và tích chất

(2) Từ định nghĩa (1) ta có:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

(2) Từ định nghĩa (1) ta có:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

- Nếu $f(x)$ khả vi tại x_0, thì $f(x)$ liên tục tại x_0. Điều ngược lại không đúng.

(2) Từ định nghĩa (1) ta có:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

- Nếu $f(x)$ khả vi tại x_0, thì $f(x)$ liên tục tại x_0. Điều ngược lại không đúng.
Chẳng hạn: hàm số $y = f(x) = |x|$ liên tục tại $x = 0$ nhưng không khả vi tại $x = 0$.

2.3.2 Định nghĩa và tích chất

- **Ví dụ:**

- **Ví dụ:**

+) $f(x) = c-$ hằng số

- **Ví dụ:**

+) $f(x) = c-$ hằng số $\Longrightarrow f'(x) = 0$.

- **Ví dụ:**

+) $f(x) = c-$ hằng số $\Longrightarrow f'(x) = 0.$
+) $f(x) = x$

- **Ví dụ:**

+) $f(x) = c-$ hằng số $\Longrightarrow f'(x) = 0.$
+) $f(x) = x \Longrightarrow f'(x) = 1.$

- **Ví dụ:**

+) $f(x) = c-$ hằng số $\Longrightarrow f'(x) = 0.$
+) $f(x) = x \Longrightarrow f'(x) = 1.$
+) $f(x) = \sin x$

2.3.2 Định nghĩa và tích chất

- **Ví dụ:**

+) $f(x) = c-$ hằng số $\Longrightarrow f'(x) = 0.$
+) $f(x) = x \Longrightarrow f'(x) = 1.$
+) $f(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = \cos x.$

- **Ví dụ:**

+) $f(x) = c-$ hằng số $\Longrightarrow f'(x) = 0.$
+) $f(x) = x \Longrightarrow f'(x) = 1.$
+) $f(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = \cos x.$
+) $f(x) = e^x$

- **Ví dụ:**

+) $f(x) = c-$ hằng số $\Longrightarrow f'(x) = 0.$
+) $f(x) = x \Longrightarrow f'(x) = 1.$
+) $f(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = \cos x.$
+) $f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x.$

- **Ví dụ:**

+) $f(x) = c-$ hằng số $\Longrightarrow f'(x) = 0.$
+) $f(x) = x \Longrightarrow f'(x) = 1.$
+) $f(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = \cos x.$
+) $f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x.$
+) $f(x) = \ln x$

- **Ví dụ:**

+) $f(x) = c-$ hằng số $\Longrightarrow f'(x) = 0$.
+) $f(x) = x \Longrightarrow f'(x) = 1$.
+) $f(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = \cos x$.
+) $f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x$.
+) $f(x) = \ln x \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$.

(3) Đạo hàm một phía

(3) Đạo hàm một phía

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

- Đạo hàm *bên phải* của hàm số tại $x = x_0$:

(3) Đạo hàm một phía

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$.

- Đạo hàm *bên phải* của hàm số tại $x = x_0$:

$$f'_+(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

(3) Đạo hàm một phía

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$.

- Đạo hàm *bên phải* của hàm số tại $x = x_0$:

$$f'_+(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

- Đạo hàm *bên trái* của hàm số tại $x = x_0$:

(3) Đạo hàm một phía

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$.

- Đạo hàm *bên phải* của hàm số tại $x = x_0$:

$$f'_+(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

- Đạo hàm *bên trái* của hàm số tại $x = x_0$:

$$f'_-(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Định lí (*Điều kiện tồn tại đạo hàm*)
Hàm số $f(x)$ *có đạo hàm tại* $x = x_0$ *khi và chỉ khi*
$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = a$.
Khi đó $f'(x_0) = a$.

(3) Đạo hàm một phía

- **Ví dụ 1** Tính đạo hàm bên phải và đạo hàm bên trái tại $x = 0$ của hàm số $y = f(x) = |x|$. Hàm số trên có khả vi tại $x = 0$ không?

• **Ví dụ 1** Tính đạo hàm bên phải và đạo hàm bên trái tại $x = 0$ của hàm số $y = f(x) = |x|$. Hàm số trên có khả vi tại $x = 0$ không?

Ta có:

+) $f'_+(0) := \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$

(3) Đạo hàm một phía

• **Ví dụ 1** Tính đạo hàm bên phải và đạo hàm bên trái tại $x = 0$ của hàm số $y = f(x) = |x|$. Hàm số trên có khả vi tại $x = 0$ không?

Ta có:

+) $f'_+(0) := \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$

+) $f'_-(0) := \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$

(3) Đạo hàm một phía

• **Ví dụ 1** Tính đạo hàm bên phải và đạo hàm bên trái tại $x = 0$ của hàm số $y = f(x) = |x|$. Hàm số trên có khả vi tại $x = 0$ không?

Ta có:

+) $f'_+(0) := \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$

+) $f'_-(0) := \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$

Vậy hàm số $y = |x|$ không khả vi tại $x = 0$.

(3) Đạo hàm một phía

- **Ví dụ 2** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{nếu} \quad x \geq 0 \\ ax + b & \text{nếu} \quad x < 0 \end{cases}$$

Tìm a, b để hàm số có đạo hàm tại $x = 0$. Tính $f'(0) = ?$

(3) Đạo hàm một phía

- **Ví dụ 2** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{nếu} \quad x \geq 0 \\ ax + b & \text{nếu} \quad x < 0 \end{cases}$$

Tìm a, b để hàm số có đạo hàm tại $x = 0$. Tính $f'(0) =?$
Ta có:
+) $f'_+(0) := \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{(\Delta x)^3}{\Delta x} = 0.$

- **Ví dụ 2** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{nếu} \quad x \geq 0 \\ ax + b & \text{nếu} \quad x < 0 \end{cases}$$

Tìm a, b để hàm số có đạo hàm tại $x = 0$. Tính $f'(0) =?$
Ta có:
+) $f'_+(0) := \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{(\Delta x)^3}{\Delta x} = 0.$
+) $f'_-(0) := \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{a\Delta x + b}{\Delta x}$

(3) Đạo hàm một phía

- **Ví dụ 2** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{nếu} \quad x \geq 0 \\ ax + b & \text{nếu} \quad x < 0 \end{cases}$$

Tìm a, b để hàm số có đạo hàm tại $x = 0$. Tính $f'(0) = ?$
Ta có:
+) $f'_+(0) := \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{(\Delta x)^3}{\Delta x} = 0.$
+) $f'_-(0) := \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{a\Delta x + b}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \left[a + \frac{b}{\Delta x} \right] = \begin{cases} a & \text{nếu} \quad b = 0 \\ \infty & \text{nếu} \quad b \neq 0 \end{cases}$$

- **Ví dụ 2** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{nếu} \quad x \geq 0 \\ ax + b & \text{nếu} \quad x < 0 \end{cases}$$

Tìm a, b để hàm số có đạo hàm tại $x = 0$. Tính $f'(0) = ?$
Ta có:
+) $f'_+(0) := \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{(\Delta x)^3}{\Delta x} = 0.$
+) $f'_-(0) := \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{a\Delta x + b}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \left[a + \frac{b}{\Delta x}\right] = \begin{cases} a & \text{nếu} \quad b = 0 \\ \infty & \text{nếu} \quad b \neq 0 \end{cases}$$

Vậy: Hàm số có đạo hàm tại $x = 0$ khi $a = b = 0$.

(3) Đạo hàm một phía

- **Ví dụ 2** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{nếu} \quad x \geq 0 \\ ax + b & \text{nếu} \quad x < 0 \end{cases}$$

Tìm a, b để hàm số có đạo hàm tại $x = 0$. Tính $f'(0) =?$
Ta có:
+) $f'_+(0) := \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{(\Delta x)^3}{\Delta x} = 0.$
+) $f'_-(0) := \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{a\Delta x + b}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \left[a + \frac{b}{\Delta x} \right] = \begin{cases} a & \text{nếu} \quad b = 0 \\ \infty & \text{nếu} \quad b \neq 0 \end{cases}$$

Vậy: Hàm số có đạo hàm tại $x = 0$ khi $a = b = 0$. Khi đó: $f'(0) = 0$.

(1) Định lí 1. Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ xác định trên $(a; b)$ và có đạo hàm tại $x \in (a; b)$. Khi đó: $f(x) + g(x)$ và $f(x)g(x)$ khả vi tại x. Hơn nữa:
(i) $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$,
(ii) $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

2.3.2 Định nghĩa và tích chất

(1) Định lí 1. Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ xác định trên $(a; b)$ và có đạo hàm tại $x \in (a; b)$. Khi đó: $f(x) + g(x)$ và $f(x)g(x)$ khả vi tại x. Hơn nữa:
(i) $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$,
(ii) $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
(iii) Nếu $g(x) \neq 0$, thì $\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng khả vi tại x và

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

- **Hàm số hợp.**

2.3.2 Định nghĩa và tích chất

• **Hàm số hợp.** Cho hàm số $u : (a; b) \to (c; d)$ và $f : (c; d) \to (m; n)$. Khi đó ta có hàm số: $h : (a; b) \to (m; n)$ cho bởi:

• **Hàm số hợp.** Cho hàm số $u : (a; b) \to (c; d)$ và $f : (c; d) \to (m; n)$. Khi đó ta có hàm số: $h : (a; b) \to (m; n)$ cho bởi:

$$h(x) = f(u(x)).$$

• **Hàm số hợp.** Cho hàm số $u : (a; b) \to (c; d)$ và $f : (c; d) \to (m; n)$. Khi đó ta có hàm số: $h : (a; b) \to (m; n)$ cho bởi:

$$h(x) = f(u(x)).$$

Hàm số $h(x)$ được gọi là hàm số hợp của hai hàm số $u(x)$ và $f(u)$.
Kí hiệu: $h(x) = f(u(x))$ hoặc $h = f \circ u$.

• **Hàm số hợp.** Cho hàm số $u : (a; b) \to (c; d)$ và $f : (c; d) \to (m; n)$. Khi đó ta có hàm số: $h : (a; b) \to (m; n)$ cho bởi:

$$h(x) = f(u(x)).$$

Hàm số $h(x)$ được gọi là hàm số hợp của hai hàm số $u(x)$ và $f(u)$.
Kí hiệu: $h(x) = f(u(x))$ hoặc $h = f \circ u$.
• **Ví dụ.** Cho $u(x) = x^2 + x - 2$ và $f(u) = \sin 3u$.

• **Hàm số hợp.** Cho hàm số $u : (a; b) \to (c; d)$ và $f : (c; d) \to (m; n)$. Khi đó ta có hàm số: $h : (a; b) \to (m; n)$ cho bởi:

$$h(x) = f(u(x)).$$

Hàm số $h(x)$ được gọi là hàm số hợp của hai hàm số $u(x)$ và $f(u)$.
Kí hiệu: $h(x) = f(u(x))$ hoặc $h = f \circ u$.
• **Ví dụ.** Cho $u(x) = x^2 + x - 2$ và $f(u) = \sin 3u$. Khi đó:

$$h(x) = f(u(x)) = \sin 3(x^2 + x - 2).$$

(2) Định lí 2. *(Đạo hàm hàm số hợp) Giả sử hàm số $u = u(x)$ khả vi tại x_0, hàm số $f(u)$ khả vi tại $u_0 = u(x_0)$. Khi đó hàm số hợp $y = h(x) = f(u(x))$ khả vi tại x_0 và*

$$h'(x_0) = f'_u(u_0)u'_x(x_0).$$

(2) Định lí 2. *(Đạo hàm hàm số hợp) Giả sử hàm số $u = u(x)$ khả vi tại x_0, hàm số $f(u)$ khả vi tại $u_0 = u(x_0)$. Khi đó hàm số hợp $y = h(x) = f(u(x))$ khả vi tại x_0 và*

$$h'(x_0) = f'_u(u_0)u'_x(x_0).$$

Hay ta hay dùng công thức sau:

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

(2) Định lí 2. *(Đạo hàm hàm số hợp) Giả sử hàm số $u = u(x)$ khả vi tại x_0, hàm số $f(u)$ khả vi tại $u_0 = u(x_0)$. Khi đó hàm số hợp $y = h(x) = f(u(x))$ khả vi tại x_0 và*

$$h'(x_0) = f'_u(u_0)u'_x(x_0).$$

Hay ta hay dùng công thức sau:

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

- **Ví dụ.** Tính đạo hàm của hàm số: $y = e^{\sin x}$.

(2) Định lí 2. *(Đạo hàm hàm số hợp) Giả sử hàm số $u = u(x)$ khả vi tại x_0, hàm số $f(u)$ khả vi tại $u_0 = u(x_0)$. Khi đó hàm số hợp $y = h(x) = f(u(x))$ khả vi tại x_0 và*

$$h'(x_0) = f'_u(u_0)u'_x(x_0).$$

Hay ta hay dùng công thức sau:

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

• **Ví dụ.** Tính đạo hàm của hàm số: $y = e^{\sin x}$.
Đặt $u = \sin x \Longrightarrow y = e^u$. Ta có:

(2) Định lí 2. *(Đạo hàm hàm số hợp) Giả sử hàm số $u = u(x)$ khả vi tại x_0, hàm số $f(u)$ khả vi tại $u_0 = u(x_0)$. Khi đó hàm số hợp $y = h(x) = f(u(x))$ khả vi tại x_0 và*

$$h'(x_0) = f'_u(u_0)u'_x(x_0).$$

Hay ta hay dùng công thức sau:

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

• **Ví dụ.** Tính đạo hàm của hàm số: $y = e^{\sin x}$.
Đặt $u = \sin x \Longrightarrow y = e^u$. Ta có:
$u'_x = \cos x, \quad y'_u = e^u$

(2) Định lí 2. *(Đạo hàm hàm số hợp) Giả sử hàm số $u = u(x)$ khả vi tại x_0, hàm số $f(u)$ khả vi tại $u_0 = u(x_0)$. Khi đó hàm số hợp $y = h(x) = f(u(x))$ khả vi tại x_0 và*

$$h'(x_0) = f'_u(u_0)u'_x(x_0).$$

Hay ta hay dùng công thức sau:

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

• **Ví dụ.** Tính đạo hàm của hàm số: $y = e^{\sin x}$.
Đặt $u = \sin x \Longrightarrow y = e^u$. Ta có:
$u'_x = \cos x, \quad y'_u = e^u$

$$\Longrightarrow y' = y'_x = y'_u u'_x = e^u \cos x = e^{\sin x} \cos x.$$

2.3.2 Định nghĩa và tích chất

- **Hàm số ngược.** Cho song ánh

$$\begin{aligned} f : [a; b] &\to [c; d] \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

2.3.2 Định nghĩa và tích chất

- **Hàm số ngược.** Cho song ánh

$$\begin{aligned} f : [a; b] &\to [c; d] \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Hàm số ngược (ánh xạ ngược) xác định bởi

$$\begin{aligned} f^{-1} : [c; d] &\to [a; b] \\ y &\mapsto x = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

sao cho $f^{-1}(f(x)) = x, \quad f(f^{-1}(y)) = y$ với mọi $x \in [a; b], y \in [c; d]$.
Kí hiệu: $y = f^{-1}(x)$

- **Ví dụ 1.** Cho song ánh

$$\begin{aligned} f : R &\to R \\ x &\mapsto y = f(x) = 3x - 1 \end{aligned}$$

- **Ví dụ 1.** Cho song ánh

$$\begin{aligned} f : R &\to R \\ x &\mapsto y = f(x) = 3x - 1 \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} f^{-1} : R &\to R \\ y &\mapsto x = f^{-1}(y) = \frac{y+1}{3}. \end{aligned}$$

Vậy hàm số ngược là $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$.

2.3.2 Định nghĩa và tích chất

- **Hàm số ngược của hàm số lượng giác.**

2.3.2 Định nghĩa và tích chất

- **Hàm số ngược của hàm số lượng giác.**

+) Hàm số sin : $[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to [-1; 1]$ song ánh

2.3.2 Định nghĩa và tích chất

• **Hàm số ngược của hàm số lượng giác.**

+) Hàm số sin : $[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to [-1; 1]$ song ánh

$\Longrightarrow$ hàm số ngược arcsin : $[-1; 1] \to [\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

cho bởi $y = \arcsin x \in [\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow x = \sin y$.

2.3.2 Định nghĩa và tích chất

• **Hàm số ngược của hàm số lượng giác.**

+) Hàm số sin : $[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to [-1; 1]$ song ánh

$\Longrightarrow$ hàm số ngược arcsin : $[-1; 1] \to [\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

cho bởi $y = \arcsin x \in [\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow x = \sin y$.

+) Hàm số cos : $[0; \pi] \to [-1; 1]$ song ánh

- **Hàm số ngược của hàm số lượng giác.**

+) Hàm số sin : $[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to [-1; 1]$ song ánh
$\Longrightarrow$ hàm số ngược arcsin : $[-1; 1] \to [\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
cho bởi $y = \arcsin x \in [\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow x = \sin y$.
+) Hàm số cos : $[0; \pi] \to [-1; 1]$ song ánh
$\Longrightarrow$ hàm số ngược arccos : $[-1; 1] \to [0; \pi]$
cho bởi $y = \arccos x \in [0; \pi] \Leftrightarrow x = \cos y$.

2.3.2 Định nghĩa và tích chất

• **Hàm số ngược của hàm số lượng giác.**

+) Hàm số sin : $[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to [-1; 1]$ song ánh

$\Longrightarrow$ hàm số ngược arcsin : $[-1; 1] \to [\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

cho bởi $y = \arcsin x \in [\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow x = \sin y$.

+) Hàm số cos : $[0; \pi] \to [-1; 1]$ song ánh

$\Longrightarrow$ hàm số ngược arccos : $[-1; 1] \to [0; \pi]$

cho bởi $y = \arccos x \in [0; \pi] \Leftrightarrow x = \cos y$.

+) Hàm số tan : $(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \to R$ song ánh

2.3.2 Định nghĩa và tích chất

• **Hàm số ngược của hàm số lượng giác.**

+) Hàm số sin : $[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to [-1; 1]$ song ánh
$\Longrightarrow$ hàm số ngược arcsin : $[-1; 1] \to [\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
cho bởi $y = \arcsin x \in [\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow x = \sin y$.

+) Hàm số cos : $[0; \pi] \to [-1; 1]$ song ánh
$\Longrightarrow$ hàm số ngược arccos : $[-1; 1] \to [0; \pi]$
cho bởi $y = \arccos x \in [0; \pi] \Leftrightarrow x = \cos y$.

+) Hàm số tan : $(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \to R$ song ánh
$\Longrightarrow$ hàm số ngược arctan : $R \to (\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$
cho bởi $y = \arctan x \in (\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow x = \tan y$.

• **Hàm số ngược của hàm số lượng giác.**

+) Hàm số sin : $[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to [-1; 1]$ song ánh

$\Longrightarrow$ hàm số ngược arcsin : $[-1; 1] \to [\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

cho bởi $y = \arcsin x \in [\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow x = \sin y$.

+) Hàm số cos : $[0; \pi] \to [-1; 1]$ song ánh

$\Longrightarrow$ hàm số ngược arccos : $[-1; 1] \to [0; \pi]$

cho bởi $y = \arccos x \in [0; \pi] \Leftrightarrow x = \cos y$.

+) Hàm số tan : $(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \to R$ song ánh

$\Longrightarrow$ hàm số ngược arctan : $R \to (\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

cho bởi $y = \arctan x \in (\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow x = \tan y$.

+) Hàm số cot : $(0; \pi) \to R$ song ánh

• **Hàm số ngược của hàm số lượng giác.**

+) Hàm số sin : $[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to [-1; 1]$ song ánh

$\Longrightarrow$ hàm số ngược arcsin : $[-1; 1] \to [\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

cho bởi $y = \arcsin x \in [\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow x = \sin y$.

+) Hàm số cos : $[0; \pi] \to [-1; 1]$ song ánh

$\Longrightarrow$ hàm số ngược arccos : $[-1; 1] \to [0; \pi]$

cho bởi $y = \arccos x \in [0; \pi] \Leftrightarrow x = \cos y$.

+) Hàm số tan : $(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \to R$ song ánh

$\Longrightarrow$ hàm số ngược arctan : $R \to (\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

cho bởi $y = \arctan x \in (\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow x = \tan y$.

+) Hàm số cot : $(0; \pi) \to R$ song ánh

$\Longrightarrow$ hàm số ngược $arccot$: $R \to (0; \pi)$

cho bởi $y = arccotx \in (0; \pi) \Leftrightarrow x = \cot y$.

(3) Định lí 3 *(Đạo hàm hàm số ngược)* Giả sử song ánh liên tục $f : [a; b] \to [c; d]$ có hàm số ngược $g = f^{-1} : [c; d] \to [a; b]$. Nếu $f(x)$ khả vi tại $x_0 \in (a; b)$, thì hàm số ngược $g(y)$ cũng khả vi tại $y_0 = f(x_0)$ và

$$g'_y(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

2.3.2 Định nghĩa và tích chất

Từ Định lí 3, ta suy ra các công thức sau:

Từ Định lí 3, ta suy ra các công thức sau:

$$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{với} \quad -1 < x < 1,$$

$$(arccosx)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{với} \quad -1 < x < 1,$$

$$(arctanx)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{với} \quad x \in R,$$

$$(arccotx)' = \frac{-1}{1+x^2}, \quad \text{với} \quad x \in R.$$

Từ Định lí 3, ta suy ra các công thức sau:

$$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{với} \quad -1 < x < 1,$$

$$(arctanx)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{với} \quad x \in R,$$
$$(arccotx)' = \frac{-1}{1+x^2}, \quad \text{với} \quad x \in R.$$

2.3.2 Định nghĩa và tích chất

Từ Định lí 3, ta suy ra các công thức sau:

$$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{với} \quad -1 < x < 1,$$

$$(arccotx)' = \frac{-1}{1+x^2}, \quad \text{với} \quad x \in R.$$

2.3.2 Định nghĩa và tích chất

Từ Định lí 3, ta suy ra các công thức sau:

$$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{với} \quad -1 < x < 1,$$

$$(arccosx)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{với} \quad -1 < x < 1,$$

$$(arctanx)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{với} \quad x \in R,$$

$$(arccotx)' = \frac{-1}{1+x^2}, \quad \text{với} \quad x \in R.$$

$$(shx)' = chx, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$
$$(chx)' = shx, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$
$$(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$
$$(cothx)' = \frac{-1}{sh^2 x}, \quad \forall x \neq 0.$$

2.3.2 Định nghĩa và tích chất

Bảng đạo hàm của các hàm sơ cấp:

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, (\alpha \neq -1);$	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u', (\alpha \neq -1);$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u}$
$(e^x)' = e^x, \quad (a^x)' = a^x \ln a$	$(e^u)' = u' e^u, \quad (a^u)' = u' a^u \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$

và đạo hàm của hàm lượng giác ngược, hàm lượng giác hyperbolic.

2.3.3. Vi phân

(1) Định nghĩa vi phân. Tính bất biến của vi phân cấp 1.

2.3.3. Vi phân

(1) Định nghĩa vi phân. Tính bất biến của vi phân cấp 1. **(1) Định nghĩa.** Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi tại x_0. Khi đó:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

2.3.3. Vi phân

(1) Định nghĩa vi phân. Tính bất biến của vi phân cấp 1. **(1) Định nghĩa.** Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi tại x_0. Khi đó:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Ta gọi $df(x_0) := f'(x_0)\Delta x$ là *vi phân* của hàm số $f(x)$ tại $x = x_0$.

2.3.3. Vi phân

(1) Định nghĩa vi phân. Tính bất biến của vi phân cấp 1. **(1) Định nghĩa.** Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi tại x_0. Khi đó:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Ta gọi $df(x_0) := f'(x_0)\Delta x$ là *vi phân* của hàm số $f(x)$ tại $x = x_0$.

Trong trường hợp tổng quát, kí hiệu:

$$df = f'(x)\Delta x$$

2.3.3. Vi phân

(1) Định nghĩa vi phân. Tính bất biến của vi phân cấp 1. **(1) Định nghĩa.** Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi tại x_0. Khi đó:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Ta gọi $df(x_0) := f'(x_0)\Delta x$ là *vi phân* của hàm số $f(x)$ tại $x = x_0$.

Trong trường hợp tổng quát, kí hiệu:

$$df = f'(x)\Delta x$$

- Xét $f(x) = x \Longrightarrow dx = \Delta x$.

(1) Định nghĩa vi phân. Tính bất biến của vi phân cấp 1. **(1) Định nghĩa.** Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi tại x_0. Khi đó:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Ta gọi $df(x_0) := f'(x_0)\Delta x$ là *vi phân* của hàm số $f(x)$ tại $x = x_0$.

Trong trường hợp tổng quát, kí hiệu:

$$df = f'(x)\Delta x$$

- Xét $f(x) = x \Longrightarrow dx = \Delta x$.
- Vì vậy ta luôn có:

$$\boxed{df = f'(x)dx} \quad \text{hay} \quad \boxed{f'(x) = \frac{df}{dx}}.$$

- **Ví dụ.** Tính vi phân của hàm số sau $y = \arctan 3x$.

• **Ví dụ.** Tính vi phân của hàm số sau $y = \arctan 3x$.
Ta có.

$$dy = y' dx = \frac{3}{1+9x^2} dx.$$

(2) Quy tắc tính vi phân.

(2) Quy tắc tính vi phân.

$$\boxed{d(u+v) = du + dv}$$

(2) Quy tắc tính vi phân.

$$\boxed{d(u+v) = du + dv}$$

$\boxed{d(uv) = vdu + udv}$, $\boxed{d(cu) = cdu}$ với c là hằng số

(2) Quy tắc tính vi phân.

$$\boxed{d(u+v) = du + dv}$$

$$\boxed{d(uv) = vdu + udv}, \qquad \boxed{d(cu) = cdu} \quad \text{với } c \text{ là hằng số}$$

$$\boxed{d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}}$$

• **Ví dụ.** Tính vi phân của hàm số sau $y = f(x) = \frac{e^{\sin x}}{x}$. Tính $dy(\pi) = ?$.

• **Ví dụ.** Tính vi phân của hàm số sau $y = f(x) = \frac{e^{\sin x}}{x}$. Tính $dy(\pi) = ?$.
Ta có.

$$dy = d\left(\frac{e^{\sin x}}{x}\right) = \frac{xd(e^{\sin x}) - e^{\sin x}dx}{x^2}$$
$$= \frac{xe^{\sin x}\cos x dx - e^{\sin x}dx}{x^2} = \frac{(x\cos x - 1)e^{\sin x}}{x^2}dx.$$

• **Ví dụ.** Tính vi phân của hàm số sau $y = f(x) = \frac{e^{\sin x}}{x}$. Tính $dy(\pi) =?$.
Ta có.

$$dy = d\left(\frac{e^{\sin x}}{x}\right) = \frac{xd(e^{\sin x}) - e^{\sin x}dx}{x^2}$$
$$= \frac{xe^{\sin x}\cos x dx - e^{\sin x}dx}{x^2} = \frac{(x\cos x - 1)e^{\sin x}}{x^2}dx.$$

Suy ra

$$dy(\pi) = \frac{-\pi - 1}{\pi^2}dx.$$

(3) Tính bất biến của vi phân cấp 1.

(3) Tính bất biến của vi phân cấp 1.

Cho 2 hàm số khả vi $y = f(u)$ và $u = u(x)$. Khi đó ta có hàm số hợp $y = f(u(x))$ và công thức vi phân

$$\boxed{df = f'_u du = f'_x dx}.$$

(3) Tính bất biến của vi phân cấp 1.

Cho 2 hàm số khả vi $y = f(u)$ và $u = u(x)$. Khi đó ta có hàm số hợp $y = f(u(x))$ và công thức vi phân

$$\boxed{df = f'_u du = f'_x dx}.$$

Chứng minh. Ta có

$$df = f'_u du \quad \text{và} \quad du = u'_x dx$$

(3) Tính bất biến của vi phân cấp 1.

Cho 2 hàm số khả vi $y = f(u)$ và $u = u(x)$. Khi đó ta có hàm số hợp $y = f(u(x))$ và công thức vi phân

$$\boxed{df = f'_u du = f'_x dx}.$$

Chứng minh. Ta có

$$df = f'_u du \quad \text{và} \quad du = u'_x dx \quad \Longrightarrow \quad df = f'_u u'_x dx.$$

(3) Tính bất biến của vi phân cấp 1.

Cho 2 hàm số khả vi $y = f(u)$ và $u = u(x)$. Khi đó ta có hàm số hợp $y = f(u(x))$ và công thức vi phân

$$\boxed{df = f'_u du = f'_x dx}.$$

Chứng minh. Ta có

$$df = f'_u du \quad \text{và} \quad du = u'_x dx \quad \Longrightarrow \quad df = f'_u u'_x dx.$$

Theo công thức đạo hàm hàm hợp, ta suy ra

$$df = f'_x dx.$$

- **Ví dụ:** Tính đạo hàm $y'_x(0)$ với $y = y(x)$ thỏa mãn

$$y^3 + yx + y = x^2 - \sin x. \qquad (*)$$

• **Ví dụ:** Tính đạo hàm $y'_x(0)$ với $y = y(x)$ thỏa mãn

$$y^3 + yx + y = x^2 - \sin x. \qquad (*)$$

Ta có: $x = 0 \Longrightarrow y(0) = 0.$

- **Ví dụ:** Tính đạo hàm $y'_x(0)$ với $y = y(x)$ thỏa mãn

$$y^3 + yx + y = x^2 - \sin x. \qquad (*)$$

Ta có: $x = 0 \Longrightarrow y(0) = 0.$
Vi phân 2 vế đẳng thức $(*)$ ta được:

$$3y^2dy + ydx + xdy + dy = 2xdx - \cos xdx$$

• **Ví dụ:** Tính đạo hàm $y'_x(0)$ với $y = y(x)$ thỏa mãn

$$y^3 + yx + y = x^2 - \sin x. \qquad (*)$$

Ta có: $x = 0 \Longrightarrow y(0) = 0$.
Vi phân 2 vế đẳng thức $(*)$ ta được:

$$3y^2dy + ydx + xdy + dy = 2xdx - \cos x dx \Leftrightarrow$$

$(3y^2+x+1)dy = (2x-\cos x-y)dx$

• **Ví dụ:** Tính đạo hàm $y'_x(0)$ với $y = y(x)$ thỏa mãn

$$y^3 + yx + y = x^2 - \sin x. \qquad (*)$$

Ta có: $x = 0 \Longrightarrow y(0) = 0$.
Vi phân 2 vế đẳng thức $(*)$ ta được:

$$3y^2dy + ydx + xdy + dy = 2xdx - \cos xdx \Leftrightarrow$$

$$(3y^2+x+1)dy = (2x-\cos x-y)dx \Leftrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2x - \cos x - y}{3y^2 + x + 1}$$

• **Ví dụ:** Tính đạo hàm $y'_x(0)$ với $y = y(x)$ thỏa mãn

$$y^3 + yx + y = x^2 - \sin x. \qquad (*)$$

Ta có: $x = 0 \Longrightarrow y(0) = 0$.
Vi phân 2 vế đẳng thức $(*)$ ta được:

$$3y^2dy + ydx + xdy + dy = 2xdx - \cos xdx \Leftrightarrow$$

$$(3y^2+x+1)dy = (2x-\cos x-y)dx \Leftrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2x - \cos x - y}{3y^2 + x + 1}$$

Thay $x = 0, y = y(0) = 0 \Longrightarrow y'(0) = -1$.

(4) Tính đạo hàm của hàm theo tham số.

(4) Tính đạo hàm của hàm theo tham số.

Cho hàm số $y = y(t)$ và $x = x(t)$ khả vi theo t.

$$\Longrightarrow y'_x = ? \quad \text{và} \quad x'_y = ?.$$

(4) Tính đạo hàm của hàm theo tham số.

Cho hàm số $y = y(t)$ và $x = x(t)$ khả vi theo t.

$$\Longrightarrow y'_x = ? \quad \text{và} \quad x'_y = ?.$$

Ta có.

$$\begin{aligned} dy &= y'_t dt \\ dx &= x'_t dt \end{aligned}$$

(4) Tính đạo hàm của hàm theo tham số.

Cho hàm số $y = y(t)$ và $x = x(t)$ khả vi theo t.

$$\Longrightarrow y'_x = ? \quad \text{và} \quad x'_y = ?.$$

Ta có.

$$dy = y'_t dt$$
$$dx = x'_t dt$$

Suy ra

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} \quad \text{và} \quad x'_y = \frac{dx}{dy} = \frac{x'_t}{y'_t}.$$

- **Ví dụ.** Cho $\begin{cases} y = \ln(t^2 + 3t + 1) \\ x = e^t \end{cases}$. Tính đạo hàm $y'_x \mid_{t=0}=?$ và $x'_y \mid_{t=0}=?$

• **Ví dụ.** Cho $\begin{cases} y = \ln(t^2 + 3t + 1) \\ x = e^t \end{cases}$. Tính đạo hàm $y'_x \mid_{t=0} = ?$ và $x'_y \mid_{t=0} = ?$

Ta có.

$$y'(t) = \frac{2t+3}{(t^2+3t+1)} \quad \text{và} \quad x'(t) = e^t$$

• **Ví dụ.** Cho $\begin{cases} y = \ln(t^2 + 3t + 1) \\ x = e^t \end{cases}$. Tính đạo hàm $y'_x \mid_{t=0} = ?$ và $x'_y \mid_{t=0} = ?$

Ta có.

$$y'(t) = \frac{2t+3}{(t^2+3t+1)} \quad \text{và} \quad x'(t) = e^t$$

$$\text{Suy ra} \quad y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2t+3}{e^t(t^2+3t+1)}$$

$$\Longrightarrow y'_x \mid_{t=0} = 3.$$

• **Ví dụ.** Cho $\begin{cases} y = \ln(t^2+3t+1) \\ x = e^t \end{cases}$. Tính đạo hàm $y'_x \mid_{t=0}=?$ và $x'_y \mid_{t=0}=?$

Ta có.

$$y'(t) = \frac{2t+3}{(t^2+3t+1)} \quad \text{và} \quad x'(t) = e^t$$

$$\text{Suy ra} \quad y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2t+3}{e^t(t^2+3t+1)}$$

$$\Longrightarrow y'_x \mid_{t=0} = 3.$$

Tương tự,

$$x'_y = \frac{x'(t)}{y'(t)} = \frac{e^t(t^2+3t+1)}{2t+3}$$

$$\Longrightarrow x'_y \mid_{t=0} = \frac{1}{3}.$$

2.4. Các định lý về giá trị trung bình và công thức Taylor

Cực trị. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$. Điểm $x_0 \in (a; b)$ được gọi là:

2.4. Các định lý về giá trị trung bình và công thức Taylor

Cực trị. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$. Điểm $x_0 \in (a; b)$ được gọi là:
- *cực đại* nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho:

$$f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0) \quad \text{với mọi} \quad |\Delta x| < \delta.$$

Cực trị. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$. Điểm $x_0 \in (a; b)$ được gọi là:
- *cực đại* nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho:

$$f(x_0 + \Delta x) \le f(x_0) \quad \text{với mọi} \quad |\Delta x| < \delta.$$

- *cực tiểu* nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho:

$$f(x_0 + \Delta x) \ge f(x_0) \quad \text{với mọi} \quad |\Delta x| < \delta.$$

Cực trị. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$. Điểm $x_0 \in (a; b)$ được gọi là:
- *cực đại* nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho:

$$f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0) \quad \text{với mọi} \quad |\Delta x| < \delta.$$

- *cực tiểu* nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho:

$$f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0) \quad \text{với mọi} \quad |\Delta x| < \delta.$$

- *cực trị* nếu x_0 hoặc là cực đại, hoặc là cực tiểu.

Định lí 1. (Định lí Fermat)

Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi trên $(a;b)$. Nếu $x = x_0 \in (a;b)$ là cực trị của $f(x)$ thì

$$f'(x_0) = 0. \qquad (1)$$

Định lí 1. (Định lí Fermat)

Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi trên $(a; b)$. Nếu $x = x_0 \in (a; b)$ là cực trị của $f(x)$ thì

$$f'(x_0) = 0. \qquad (1)$$

Chứng minh. Giả sử $x = x_0$ là cực tiểu.

Định lí 1. (Định lí Fermat)

Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi trên $(a; b)$. Nếu $x = x_0 \in (a; b)$ là cực trị của $f(x)$ thì

$$f'(x_0) = 0. \qquad (1)$$

Chứng minh. Giả sử $x = x_0$ là cực tiểu. Khi đó, ta có:

$$f'_+(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

$$\text{và} \quad f'_-(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0.$$

2.4.1 Định lý Fermat

Định lí 1. (Định lí Fermat)

Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi trên $(a;b)$. Nếu $x = x_0 \in (a;b)$ là cực trị của $f(x)$ thì

$$f'(x_0) = 0. \qquad (1)$$

Chứng minh. Giả sử $x = x_0$ là cực tiểu. Khi đó, ta có:

$$f'_+(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

$$\text{và} \quad f'_-(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0.$$

Vì hàm số $f(x)$ khả vi tại $x = x_0$, nên ta có $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$.

Định lí 1. (Định lí Fermat)

Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi trên $(a;b)$. Nếu $x = x_0 \in (a;b)$ là cực trị của $f(x)$ thì

$$f'(x_0) = 0. \qquad (1)$$

Chứng minh. Giả sử $x = x_0$ là cực tiểu. Khi đó, ta có:

$$f'_+(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

$$\text{và} \quad f'_-(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0.$$

Vì hàm số $f(x)$ khả vi tại $x = x_0$, nên ta có $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$. Trường hợp $x = x_0$ là cực đại chứng minh tương tự.

Hệ quả. (Định lí Rolle).

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trong $(a; b)$. Nếu $f(a) = f(b)$, thì tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Hệ quả. (Định lí Rolle).

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trong $(a; b)$. Nếu $f(a) = f(b)$, thì tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

• Ví dụ.

Cho $f(x) = (x-2)(x+3)^2(e^{2x}+3)+5$. CMR phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm.

• Ví dụ.

Cho $f(x) = (x-2)(x+3)^2(e^{2x}+3)+5$. CMR phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm.

LG. Ta có, $f(x)$ liên tục và khả vi trên $\mathbb{R}$.

• Ví dụ.

Cho $f(x) = (x-2)(x+3)^2(e^{2x}+3)+5$. CMR phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm.
LG. Ta có, $f(x)$ liên tục và khả vi trên $\mathbb{R}$.

$$f(2) = f(-3) = 5.$$

• Ví dụ.

Cho $f(x) = (x-2)(x+3)^2(e^{2x}+3)+5$. CMR phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm.
LG. Ta có, $f(x)$ liên tục và khả vi trên $\mathbb{R}$.

$$f(2) = f(-3) = 5.$$

Theo định lí Rolle, phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(-3;2)$.

2.4.3 Định lý Lagrange

Định lí 2. (Định lí Lagrange).

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trong $(a; b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{hay} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (2)$$

2.4.3 Định lý Lagrange

Định lí 2. (Định lí Lagrange).

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trong $(a; b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{hay} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (2)$$

Chứng minh. Đặt

$$h(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(x).$$

2.4.3 Định lý Lagrange

Định lí 2. (Định lí Lagrange).

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trong $(a; b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{hay} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \qquad (2)$$

Chứng minh. Đặt

$$h(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(x).$$

Khi đó, $h(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trong $(a; b)$ và

$$h'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(x).$$

Định lí 2. (Định lí Lagrange).

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và khả vi trong $(a;b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{hay} \quad f(b)-f(a) = f'(c)(b-a). \quad (2)$$

Chứng minh. Đặt

$$h(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(x).$$

Khi đó, $h(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và khả vi trong $(a;b)$ và

$$h'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(x).$$

Hơn nữa $h(a) = h(b) = 0$, nên theo định lí Rolle, tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho $h'(c) = 0$.

Định lí 2. (Định lí Lagrange).

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trong $(a; b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{hay} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (2)$$

Chứng minh. Đặt

$$h(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(x).$$

Khi đó, $h(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trong $(a; b)$ và

$$h'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(x).$$

Hơn nữa $h(a) = h(b) = 0$, nên theo định lí Rolle, tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $h'(c) = 0$. Hay $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

- **Chú ý.** Từ định lí 2 suy ra

- **Chú ý.** Từ định lí 2 suy ra

$$f(x+h)-f(x)=f'(x+\theta h)h, \quad \theta \in (0;1). \quad (3).$$

- **Chú ý.** Từ định lí 2 suy ra

$$f(x+h) - f(x) = f'(x+\theta h)h, \quad \theta \in (0;1). \quad (3).$$

Thật vậy. Thay $a = x, b = x + h$ và $c = x + \theta h$ vào (2) ta có:

$$\theta = \frac{c-a}{b-a} \in (0;1),$$
$$f(x+h) - f(x) = f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) = f'(x+\theta h)h.$$

• **Chú ý.** Từ định lí 2 suy ra

$$f(x+h) - f(x) = f'(x+\theta h)h, \quad \theta \in (0;1). \quad (3).$$

Thật vậy. Thay $a = x, b = x + h$ và $c = x + \theta h$ vào (2) ta có:

$$\theta = \frac{c-a}{b-a} \in (0;1),$$
$$f(x+h) - f(x) = f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) = f'(x+\theta h)h.$$

Nhận xét. Công thức (3) cho ta tính giá trị của f tại điểm gần x khi biết giá trị $f(x)$ và giá trị của đạo hàm f' tại những điểm gần x.

• Ví dụ 1.

Tìm số c trong định lí Lagrange biết

$$f(x) = x^3 + 4x^2, a = 0, b = 1.$$

• Ví dụ 1.

Tìm số c trong định lí Lagrange biết

$$f(x) = x^3 + 4x^2, a = 0, b = 1.$$

Ta có $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và khả vi trong $(0; 1)$.

• Ví dụ 1.

Tìm số c trong định lí Lagrange biết

$$f(x) = x^3 + 4x^2, a = 0, b = 1.$$

Ta có $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và khả vi trong $(0; 1)$.
$f'(x) = 3x^2 + 8x, f(0) = 0, f(1) = 5$. Từ công thức Lagrange, tồn tại $c \in (0; 1)$ sao cho

• Ví dụ 1.

Tìm số c trong định lí Lagrange biết

$$f(x) = x^3 + 4x^2, a = 0, b = 1.$$

Ta có $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và khả vi trong $(0;1)$.
$f'(x) = 3x^2 + 8x, f(0) = 0, f(1) = 5$. Từ công thức Lagrange, tồn tại $c \in (0;1)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow 3c^2 + 8c = 5$$

• Ví dụ 1.

Tìm số c trong định lí Lagrange biết

$$f(x) = x^3 + 4x^2, a = 0, b = 1.$$

Ta có $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và khả vi trong $(0;1)$.
$f'(x) = 3x^2 + 8x$, $f(0) = 0$, $f(1) = 5$. Từ công thức Lagrange, tồn tại $c \in (0;1)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow 3c^2 + 8c = 5$$

$$c = \frac{-4 - \sqrt{31}}{3} \quad \text{(loại)} \quad \text{hoặc} \quad c = \frac{-4 + \sqrt{31}}{3}.$$

• Ví dụ 1.

Tìm số c trong định lí Lagrange biết

$$f(x) = x^3 + 4x^2, a = 0, b = 1.$$

Ta có $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và khả vi trong $(0; 1)$.
$f'(x) = 3x^2 + 8x, f(0) = 0, f(1) = 5$. Từ công thức Lagrange, tồn tại $c \in (0; 1)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow 3c^2 + 8c = 5$$

$$c = \frac{-4 - \sqrt{31}}{3} \quad \text{(loại)} \quad \text{hoặc} \quad c = \frac{-4 + \sqrt{31}}{3}.$$

Vậy $c = \frac{-4+\sqrt{31}}{3}$.

• Ví dụ 2.

Chứng minh rằng:

$$1)|\sin b - \sin a| \le |b - a|$$
$$2)|\arctan b - \arctan a| \le |b - a|.$$

• Ví dụ 2.

Chứng minh rằng:

$$
\begin{aligned}
&1) |\sin b - \sin a| \leq |b - a| \\
&2) |\arctan b - \arctan a| \leq |b - a|.
\end{aligned}
$$

1) Đặt $f(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = \cos x$.

• Ví dụ 2.

Chứng minh rằng:

$$1)|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$$
$$2)|\arctan b - \arctan a| \leq |b - a|.$$

1) Đặt $f(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = \cos x$. Theo công thức Lagrange, tồn tại c nằm giữa a và b sao cho

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \leftrightarrow \sin b - \sin a = (b - a)\cos c$$

• Ví dụ 2.

Chứng minh rằng:

$$1) |\sin b - \sin a| \le |b - a|$$
$$2) |\arctan b - \arctan a| \le |b - a|.$$

1) Đặt $f(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = \cos x$. Theo công thức Lagrange, tồn tại c nằm giữa a và b sao cho

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \leftrightarrow \sin b - \sin a = (b - a)\cos c$$

$$\Longrightarrow |\sin b - \sin a| = |\cos c||b - a| \le |b - a|.$$

• Ví dụ 2.

Chứng minh rằng:

$$1) |\sin b - \sin a| \le |b - a|$$
$$2) |\arctan b - \arctan a| \le |b - a|.$$

1) Đặt $f(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = \cos x$. Theo công thức Lagrange, tồn tại c nằm giữa a và b sao cho

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \leftrightarrow \sin b - \sin a = (b - a)\cos c$$

$$\Longrightarrow |\sin b - \sin a| = |\cos c||b - a| \le |b - a|.$$

2) Tương tự $f(x) = \arctan x$.

Định lí 3. (Định lí Cauchy).

Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trong $(a; b)$. Giả sử $g(a) \neq g(b)$ và $g'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a; b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Định lí 3. (Định lí Cauchy).

Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trong $(a; b)$. Giả sử $g(a) \neq g(b)$ và $g'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a; b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Chú ý. Khi $g(x) = x$ thì Định lí Cauchy trở thành Định lí Lagrange.

2.4.5. Đạo hàm và vi phân cấp cao. Quy tắc tính đạo hàm cấp cao. Khai triển Taylor.

(1) Đạo hàm và vi phân cấp cao.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(a; b)$.

2.4.5. Đạo hàm và vi phân cấp cao. Quy tắc tính đạo hàm cấp cao. Khai triển Taylor.

(1) Đạo hàm và vi phân cấp cao.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(a; b)$.

- ĐH cấp 1: $f'(x)$
- ĐH cấp 2: $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$
- ĐH cấp n: $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$

- VP cấp 1: $df = f'(x)dx$
- VP cấp 2: $d^2f = f''(x)dx^2$
- VP cấp n: $d^nf = f^{(n)}(x)dx^n$

Chú ý. Từ định nghĩa ta có công thức

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{d^nf}{dx^n}}$$

2.4.5. Đạo hàm và vi phân cấp cao. Quy tắc tính đạo hàm cấp cao. Khai triển Taylor.

(1) Đạo hàm và vi phân cấp cao.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(a; b)$.

- ĐH cấp 1: $f'(x)$ - VP cấp 1: $df = f'(x)dx$

- ĐH cấp n: $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$ - VP cấp n: $d^n f = f^{(n)}(x)dx^n$

Chú ý. Từ định nghĩa ta có công thức

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}}$$

2.4.5. Đạo hàm và vi phân cấp cao. Quy tắc tính đạo hàm cấp cao. Khai triển Taylor.

(1) Đạo hàm và vi phân cấp cao.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(a; b)$.

- ĐH cấp 1: $f'(x)$
- ĐH cấp 2: $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$
- ĐH cấp n: $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$

- VP cấp 1: $df = f'(x)dx$
- VP cấp 2: $d^2f = f''(x)dx^2$
- VP cấp n: $d^nf = f^{(n)}(x)dx^n$

2.4.5. Đạo hàm và vi phân cấp cao. Quy tắc tính đạo hàm cấp cao. Khai triển Taylor.

(1) Đạo hàm và vi phân cấp cao.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(a; b)$.

- ĐH cấp 1: $f'(x)$
- ĐH cấp 2: $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$
- ĐH cấp n: $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$

- VP cấp 1: $df = f'(x)dx$
- VP cấp 2: $d^2f = f''(x)dx^2$
- VP cấp n: $d^nf = f^{(n)}(x)dx^n$

Chú ý. Từ định nghĩa ta có công thức

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{d^nf}{dx^n}}$$

• **Ví dụ 1.** Bằng qui nạp ta chứng minh được một số công thức sau:

• **Ví dụ 1.** Bằng qui nạp ta chứng minh được một số công thức sau:

$$1)\quad (x^k)^{(n)} = \begin{cases} k(k-1)...(k-n+1)x^{k-n} & \text{nếu} \quad n \le k \\ 0 & \text{nếu} \quad n > k \end{cases}$$

$$2)\quad (e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}, \quad n \ge 1$$

$$3)\quad (\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2}), \quad n \ge 1$$

$$4)\quad (\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2}), \quad n \ge 1$$

- **Ví dụ 2.** Tính đạo hàm cấp n của hàm số

$$y = \frac{6x-1}{3x+2}.$$

- **Ví dụ 2.** Tính đạo hàm cấp n của hàm số

$$y = \frac{6x-1}{3x+2}.$$

Ta có: $y = 2 - \frac{5}{(3x+2)} = 2 - 5(3x+2)^{-1}$,

- **Ví dụ 2.** Tính đạo hàm cấp n của hàm số

$$y = \frac{6x-1}{3x+2}.$$

Ta có: $y = 2 - \frac{5}{(3x+2)} = 2 - 5(3x+2)^{-1}$,
$\Rightarrow y' = -5(-1).3.(3x+2)^{-2} = -5(-1)\frac{3}{(3x+2)^2}$,

• **Ví dụ 2.** Tính đạo hàm cấp n của hàm số

$$y = \frac{6x-1}{3x+2}.$$

Ta có: $y = 2 - \frac{5}{(3x+2)} = 2 - 5(3x+2)^{-1}$,
$\Rightarrow y' = -5(-1).3.(3x+2)^{-2} = -5(-1)\frac{3}{(3x+2)^2}$,
$y'' = -5.(-1)(-2).3^2(3x+2)^{-3} = -5(-1)(-2)\frac{3^2}{(3x+2)^3}$;

- **Ví dụ 2.** Tính đạo hàm cấp n của hàm số

$$y = \frac{6x - 1}{3x + 2}.$$

Ta có: $y = 2 - \frac{5}{(3x+2)} = 2 - 5(3x+2)^{-1}$,
$\Rightarrow y' = -5(-1).3.(3x+2)^{-2} = -5(-1)\frac{3}{(3x+2)^2}$,
$y'' = -5.(-1)(-2).3^2(3x+2)^{-3} = -5(-1)(-2)\frac{3^2}{(3x+2)^3}$;
$y''' = -5.(-1)(-2)(-3).3^3(3x+2)^{-4} = -5(-1)(-2)(-3)\frac{3^3}{(3x+2)^4}$

• **Ví dụ 2.** Tính đạo hàm cấp n của hàm số

$$y = \frac{6x-1}{3x+2}.$$

Ta có: $y = 2 - \frac{5}{(3x+2)} = 2 - 5(3x+2)^{-1}$,
$\Rightarrow y' = -5(-1).3.(3x+2)^{-2} = -5(-1)\frac{3}{(3x+2)^2}$,
$y'' = -5.(-1)(-2).3^2(3x+2)^{-3} = -5(-1)(-2)\frac{3^2}{(3x+2)^3}$;
$y''' = -5.(-1)(-2)(-3).3^3(3x+2)^{-4} = -5(-1)(-2)(-3)\frac{3^3}{(3x+2)^4}$
Tổng quát (chứng minh bằng qui nạp) ta có:

$$y^{(n)} = -5(-1)(-2)\cdots(-n)\frac{3^n}{(3x+2)^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}.5.3^n.n!}{(3x+2)^{n+1}}$$

(2) Quy tắc tính đạo hàm cấp cao.

(2) Quy tắc tính đạo hàm cấp cao.

a) $\boxed{(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}}$, $\boxed{(\lambda u)^{(n)} = \lambda u^{(n)}, \lambda \in \mathbb{R}}$

b) Công thức Leibnitz.

(2) Quy tắc tính đạo hàm cấp cao.

a) $\boxed{(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}}$, $\boxed{(\lambda u)^{(n)} = \lambda u^{(n)}, \lambda \in \mathbb{R}}$

b) Công thức Leibnitz.

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

với $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $u^{(0)} = u, v^{(0)} = v$.

- **Ví dụ.** Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = (x^2 + x + 1)e^{3x}$.

• **Ví dụ.** Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = (x^2 + x + 1)e^{3x}$.
Đặt: $u = x^2 + x + 1, \quad v = e^{3x}$.

• **Ví dụ.** Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = (x^2 + x + 1)e^{3x}$.
Đặt: $u = x^2 + x + 1, \quad v = e^{3x}$. Ta có,

$$u' = 2x + 1, u'' = 2, u^{(k)} = 0 \text{ với mọi } k \geq 3, \text{ và } v^{(k)} = 3^k e^{3x}.$$

• **Ví dụ.** Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = (x^2 + x + 1)e^{3x}$.
Đặt: $u = x^2 + x + 1, \quad v = e^{3x}$. Ta có,

$$u' = 2x + 1, u'' = 2, u^{(k)} = 0 \text{ với mọi } k \geq 3, \text{ và } v^{(k)} = 3^k e^{3x}.$$

Theo công thức Leibnitz, suy ra

$$\begin{aligned} y^{(n)} = (uv)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)} \\ &= C_n^0 u^{(0)} v^{(n)} + C_n^1 u^{(1)} v^{(n-1)} + C_n^2 u^{(2)} v^{(n-2)} + 0 \end{aligned}$$

Hay

$$y^{(n)} = \left[(x^2 + x + 1)3^n + n(2x + 1)3^{n-1} + n(n-1)3^{n-2}\right] e^{3x}$$

(3) Công thức khai triển Taylor.

Cho $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và khả vi trên $(a;b)$. Xét $x_0, x = x_0 + h \in (a;b)$.

(3) Công thức khai triển Taylor.

Cho $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trên $(a; b)$. Xét $x_0, x = x_0 + h \in (a; b)$.

- Áp dụng định lí Lagrange với $a = x_0, b = x_0 + h$, tồn tại $\theta \in (0; 1)$ sao cho

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0 + \theta h)h \\ &= f(x_0) + f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0). \end{aligned}$$

(3) Công thức khai triển Taylor.

Cho $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trên $(a; b)$. Xét $x_0, x = x_0 + h \in (a; b)$.

- Áp dụng định lí Lagrange với $a = x_0$, $b = x_0 + h$, tồn tại $\theta \in (0; 1)$ sao cho

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0 + \theta h)h \\ &= f(x_0) + f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0). \end{aligned}$$

- Tổng quát ta có định lí sau:

(1) Định lí (Công thức khai triển Taylor)

Giả sử $f(x)$ khả vi liên tục cấp n trên $[a; b]$ và khả vi cấp $(n+1)$ trên $(a; b)$. Xét $x, x_0 \in (a; b)$. Ta có công thức khai triển sau

(1) Định lí (Công thức khai triển Taylor)

Giả sử $f(x)$ khả vi liên tục cấp n trên $[a; b]$ và khả vi cấp $(n+1)$ trên $(a; b)$. Xét $x, x_0 \in (a; b)$. Ta có công thức khai triển sau

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots +$$

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \theta \in (0; 1).(1)$$

(1) Định lí (Công thức khai triển Taylor)

Giả sử $f(x)$ khả vi liên tục cấp n trên $[a; b]$ và khả vi cấp $(n+1)$ trên $(a; b)$. Xét $x, x_0 \in (a; b)$. Ta có công thức khai triển sau

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \theta \in (0; 1).(1)$$

- Phần đa thức

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

(1) Định lí (Công thức khai triển Taylor)

Giả sử $f(x)$ khả vi liên tục cấp n trên $[a; b]$ và khả vi cấp $(n+1)$ trên $(a; b)$. Xét $x, x_0 \in (a; b)$. Ta có công thức khai triển sau

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots +$$
$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \theta \in (0; 1).(1)$$

- Phần đa thức

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

- Phần dư:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$
$$= o((x - x_0)^n).$$

Chú ý 1. Công thức khai triển Taylor (1) có dạng khác:

Chú ý 1. Công thức khai triển Taylor (1) có dạng khác:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \quad (1')$$

Chú ý 1. Công thức khai triển Taylor (1) có dạng khác:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \quad (1')$$

Chú ý 2. Khi hàm số $f(x)$ là đa thức bậc n, ta có khai triển sau:

Chú ý 1. Công thức khai triển Taylor (1) có dạng khác:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \quad (1')$$

Chú ý 2. Khi hàm số $f(x)$ là đa thức bậc n, ta có khai triển sau:

$$f(x) = P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Chú ý 1. Công thức khai triển Taylor (1) có dạng khác:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \quad (1')$$

Chú ý 2. Khi hàm số $f(x)$ là đa thức bậc n, ta có khai triển sau:

$$f(x) = P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

(2) Công thức khai triển Maclaurin. Khi $x_0 = 0$, ta có công thức khai triển Maclaurin

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n). \quad (2)$$

Ví dụ 1.

Viết thành đa thức của ẩn $X = x - 1$ của đa thức

$$P(x) = x^5 - 3x^2 - 1.$$

Ví dụ 1.

Viết thành đa thức của ẩn $X = x - 1$ của đa thức

$$P(x) = x^5 - 3x^2 - 1.$$

Ta có. $P'(x) = 5x^4 - 6x$, $P''(x) = 20x^3 - 6$, $P'''(x) = 60x^2$, $P^{(4)}(x) = 120x$, $P^{(5)}(x) = 120$.

Ví dụ 1.

Viết thành đa thức của ẩn $X = x - 1$ của đa thức

$$P(x) = x^5 - 3x^2 - 1.$$

Ta có. $P'(x) = 5x^4 - 6x$, $P''(x) = 20x^3 - 6$, $P'''(x) = 60x^2$, $P^{(4)}(x) = 120x$, $P^{(5)}(x) = 120$.
Theo công thức khai triển Taylor ta có:

$$P(x) = P(1) + \frac{P'(1)}{1!}(x-1) + \frac{P''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{P'''(1)}{3!}(x-1)^3$$
$$+ \frac{P^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \frac{P^{(5)}(1)}{5!}(x-1)^5$$
$$= -3 + \frac{-1}{1!}(x-1) + \frac{14}{2!}(x-1)^2 + \frac{60}{3!}(x-1)^3$$
$$+ \frac{120}{4!}(x-1)^4 + \frac{120}{5!}(x-1)^5.$$

Ví dụ 2.

Viết khai triển Maclaurin của hàm số $f(x) = e^x$.

Ví dụ 2.

Viết khai triển Maclaurin của hàm số $f(x) = e^x$.
Ta có. $f^{(n)}(x) = e^x$.

Ví dụ 2.

Viết khai triển Maclaurin của hàm số $f(x) = e^x$.
Ta có. $f^{(n)}(x) = e^x$.
Công thức khai triển Maclaurin:

$$
\begin{aligned}
e^x &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \\
&= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n).
\end{aligned}
$$

Ví dụ 2.

Viết khai triển Maclaurin của hàm số $f(x) = e^x$.
Ta có. $f^{(n)}(x) = e^x$.
Công thức khai triển Maclaurin:

$$e^x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$
$$= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n).$$

- **Đặt biệt ta có khai triển sau:**

$$e^x = 1 + x + o(x).$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Ví dụ 3.

Viết khai triển Maclaurin đến cấp 3 của các hàm số sau:

1. $f(x) = (1+x)^{\alpha}, \alpha \neq 0$, 2. $f(x) = \sin x$, 3. $f(x) = \cos x$

Ví dụ 3.

Viết khai triển Maclaurin đến cấp 3 của các hàm số sau:

1. $f(x) = (1+x)^{\alpha}, \alpha \neq 0$, 2. $f(x) = \sin x$, 3. $f(x) = \cos x$

Ta có.

Ví dụ 3.

Viết khai triển Maclaurin đến cấp 3 của các hàm số sau:

1. $f(x) = (1+x)^\alpha, \alpha \neq 0$, 2. $f(x) = \sin x$, 3. $f(x) = \cos x$

Ta có.

1. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o(x^3)$.
2. $\sin x = x - \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)$
3. $\cos x = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^3) = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

Ứng dụng.

Ứng dụng.

- Tính giới hạn. **Chú ý**

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n}=0, \quad o(\lambda f(x))=\lambda o(f(x)), \lambda\in\mathbb{R}}$$

Ứng dụng.

- Tính giới hạn. **Chú ý**

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n}=0, \quad o(\lambda f(x))=\lambda o(f(x)), \lambda\in\mathbb{R}}$$

- Tính gần đúng.

Ứng dụng.

- Tính giới hạn. **Chú ý**

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n}=0, \quad o(\lambda f(x))=\lambda o(f(x)), \lambda\in\mathbb{R}}$$

- Tính gần đúng.
- Tìm cực trị,....

Ví dụ.

Dùng khai triển Taylor để tính các giới hạn sau:

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

$$B = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - 2x + x^3}{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}$$

$$C = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\cos x - \sqrt{1+2x} + x}$$

2.6. Ứng dụng của phép tính vi phân: Quy tắc L'Hospital.

2.6. Ứng dụng của phép tính vi phân: Quy tắc L'Hospital.

(1) Khử dạng $\frac{0}{0}$.

2.6. Ứng dụng của phép tính vi phân: Quy tắc L'Hospital.

(1) Khử dạng $\frac{0}{0}$.

Định lí 1. Giả sử

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \quad \text{và} \quad g'(x) \neq 0 \; \forall x \text{ gần } x_0.$$

2.6. Ứng dụng của phép tính vi phân: Quy tắc L'Hospital.

(1) Khử dạng $\frac{0}{0}$.

Định lí 1. Giả sử

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \quad \text{và} \quad g'(x) \neq 0 \ \forall x \text{ gần } x_0.$$

Nếu

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

2.6. Ứng dụng của phép tính vi phân: Quy tắc L'Hospital.

(1) Khử dạng $\frac{0}{0}$.
Định lí 1. Giả sử

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \quad \text{và} \quad g'(x) \neq 0 \ \forall x \text{ gần } x_0.$$

Nếu

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

thì

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Ví dụ.

Dùng quy tắc L'Hospital tính các giới hạn sau

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

$$B = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x - 2x + x^3}{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}$$

$$C = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\cos x - \sqrt{1 + 2x} + x}$$

(2) Khử dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

(2) Khử dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

Định lí 2. Giả sử

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty, \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty \quad \text{và} \quad g'(x) \neq 0 \ \forall x \text{ gần } x_0.$$

(2) Khử dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

Định lí 2. Giả sử

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty, \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty \quad \text{và} \quad g'(x) \neq 0 \ \forall x \text{ gần } x_0.$$

Nếu

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

(2) Khử dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

Định lí 2. Giả sử

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty, \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty \quad \text{và} \quad g'(x) \neq 0 \ \forall x \text{ gần } x_0.$$

Nếu

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

thì

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Ví dụ.

Dùng quy tắc L'Hospital tính các giới hạn sau

$$A = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x}$$

$$B = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x+1}}$$

Ví dụ.

Dùng quy tắc L'Hospital tính các giới hạn sau

$$A = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x}$$

$$B = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x+1}}$$

Chú ý. Quy tắc L'Hospital có thể áp dụng nhiều lần liên tiếp.

(3) Khử dạng $0.\infty; \infty - \infty; 1^{\infty}$.

(3) Khử dạng $0.\infty; \infty - \infty; 1^{\infty}$.

$\Longrightarrow$ Biến đổi về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$. Áp dụng quy tắc L'Hospital.

(3) Khử dạng $0.\infty; \infty - \infty; 1^{\infty}$.

$\Longrightarrow$ Biến đổi về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$. Áp dụng quy tắc L'Hospital.

Chú ý.

$$\boxed{u^v = e^{v \ln u}}$$

(3) Khử dạng $0.\infty; \infty - \infty; 1^{\infty}$.

$\Longrightarrow$ Biến đổi về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$. Áp dụng quy tắc L'Hospital.

Chú ý.

$$\boxed{u^v = e^{v \ln u}}$$

Ví dụ. Tính các giới hạn sau:

$$A = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}\right)$$

$$B = \lim_{x \to 0} \left(1 + 2x^2\right)^{\frac{1}{x \sin x}}$$