Bài giảng Giải tích 1

Vũ Hữu Như

Chương 3: Phép tính tích phân

3.1. Tích phân không xác định

3.1.1. Nguyên hàm và tích phân không xác định.

3.1.1. Nguyên hàm và tích phân không xác định.
(1) Định nghĩa 1. $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a; b)$ nếu

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a; b).$$

3.1.1. Nguyên hàm và tích phân không xác định.
(1) Định nghĩa 1. $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a; b)$ nếu

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a; b).$$

Ví dụ. $F(x) = \frac{x^2}{2}$ là 1 nguyên hàm của $f(x) = x$ vì $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$.

3.1.1. Nguyên hàm và tích phân không xác định.
(1) Định nghĩa 1. $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a; b)$ nếu

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a; b).$$

Ví dụ. $F(x) = \frac{x^2}{2}$ là 1 nguyên hàm của $f(x) = x$ vì $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$.
Hơn nữa: $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$ là 1 nguyên hàm của $f(x) = x$ vì $\left(\frac{x^2}{2} + C\right)' = x$.

3.1.1. Nguyên hàm và tích phân không xác định.
(1) Định nghĩa 1. $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a;b)$ nếu

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a;b).$$

Ví dụ. $F(x) = \frac{x^2}{2}$ là 1 nguyên hàm của $f(x) = x$ vì $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$.
Hơn nữa: $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$ là 1 nguyên hàm của $f(x) = x$ vì $\left(\frac{x^2}{2} + C\right)' = x$.
(2) Chú ý. Nếu $F(x)$ là 1 nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a;b)$ thì $F(x) + C(C = const)$ cũng là 1 nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a;b)$.

(3) Định nghĩa 2.

Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a; b)$. Họ các nguyên hàm $\{F(x) + C \mid C \in R\}$ được gọi là tích phân bất định của $f(x)$ trên $(a; b)$. Kí hiệu

$$\int f(x)dx := F(x) + C.$$

(3) Định nghĩa 2.

Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a; b)$. Họ các nguyên hàm $\{F(x) + C \mid C \in R\}$ được gọi là tích phân bất định của $f(x)$ trên $(a; b)$. Kí hiệu

$$\int f(x)dx := F(x) + C.$$

Ví dụ. $\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$.

(3) Định nghĩa 2.

Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a; b)$. Họ các nguyên hàm $\{F(x) + C \mid C \in R\}$ được gọi là tích phân bất định của $f(x)$ trên $(a; b)$. Kí hiệu

$$\int f(x)dx := F(x) + C.$$

Ví dụ. $\int xdx = \frac{x^2}{2} + C.$

(4) Tính chất.

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx, (k \in R).$$

(5) Bảng tích phân cơ bản

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1 \qquad \int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad \int \sin(ax+b) dx = \frac{-1}{a}\cos(ax+b) +$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \qquad \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \qquad \int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C \qquad \int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = \frac{-1}{a}\cot(ax+b) + C$$

(5) Bảng tích phân cơ bản

$\int e^x dx = e^x + C$

$\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln \alpha} + C (\alpha > 0)$

$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$

$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C (a > 0)$

$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C (a > 0)$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\beta}} = \ln(x + \sqrt{x^2+\beta}) + C$

Ví dụ.

Tính

$$A = \int (2-3x^2)^2 \sqrt{x} dx, \qquad B = \int \frac{1+2x^2}{4+x^2} dx$$

$$C = \int \frac{3x+2}{4x^2-3x-1}, \qquad D = \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$$

3.2. Các phương pháp tính.

(1) Phép đổi biến số.

(1) Phép đổi biến số.

• **Phép biến đổi thứ 1.** Xét tích phân

$$I = \int f(g(x))g'(x)dx,$$

với $f(t), g(x), g'(x)$ là các hàm số liên tục.

(1) Phép đổi biến số.

• **Phép biến đổi thứ 1.** Xét tích phân

$$I = \int f(g(x))g'(x)dx,$$

với $f(t), g(x), g'(x)$ là các hàm số liên tục.

Đặt $\boxed{t = g(x)}$,

(1) Phép đổi biến số.
• **Phép biến đổi thứ 1.** Xét tích phân

$$I = \int f(g(x))g'(x)dx,$$

với $f(t), g(x), g'(x)$ là các hàm số liên tục.
Đặt $\boxed{t = g(x)}$, $\longrightarrow dt = g'(x)dx$ và

$$I = \int f(t)dt = F(t) + C = F(g(x)) + C.$$

3.2. Các phương pháp tính.

(1) Phép đổi biến số.

• **Phép biến đổi thứ 2.** Xét tích phân

$$I = \int f(x)dx, \quad f \text{ liên tục.}$$

Đặt $\boxed{x = \varphi(t)}$

(1) Phép đổi biến số.
• **Phép biến đổi thứ 2.** Xét tích phân

$$I = \int f(x)dx, \quad f \text{ liên tục.}$$

Đặt $\boxed{x = \varphi(t)} \longrightarrow dx = \varphi'(t)dt$ và

$$I = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t) + C = F(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

Ví dụ.

Tích các tích phân sau

$$A = \int \frac{x^3}{(1+3x^2)^2}dx \qquad B = \int \sqrt{4 - x^2}dx$$

$$C = \int \frac{\ln^3 x}{x(3+\ln^4 x)}dx \qquad D = \int \frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}$$

$$E = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}} \qquad F = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

(2) Phương pháp tích phân từng phần.

(2) Phương pháp tích phân từng phần.

Công thức

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du} \qquad \boxed{\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx}$$

(2) Phương pháp tích phân từng phần.

Công thức

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu} \quad \boxed{\int uv'dx = uv - \int u'vdx}$$

Một số dạng tích phân sử dụng công thức tích phân từng phần:

$$\int P_n(x)e^{ax}dx, \int P_n(x)\sin(ax)dx, \int P_n(x)\cos(ax)dx,$$

$$\int P_n(x)\ln^k(x)dx, \int e^{ax}\sin(bx)dx, \int e^{ax}\cos(bx)dx, \ldots$$

với $P_n(x)$ là đa thức bậc n.

Ví dụ.

Tính các tích phân sau:

$$A = \int (3x^2 + x)e^{2x} dx$$

$$B = \int x^3 \ln x dx$$

$$C = \int e^x \sin 2x dx$$

$$D = \int \sin \sqrt{x} dx$$

3.2. Tích phân xác định

3.2.1. Định nghĩa.

3.2.1. Định nghĩa.
(1) Bài toán diện tích.

3.2.1. Định nghĩa.

(1) Bài toán diện tích. Giả sử $f(x) \geq 0 \forall x \in [a; b]$. Xét hình thang cong D cho bởi

$$D : \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ a \leq x \leq b. \end{cases}$$

3.2.1. Định nghĩa.

(1) Bài toán diện tích. Giả sử $f(x) \geq 0 \forall x \in [a; b]$. Xét hình thang cong D cho bởi

$$D : \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ a \leq x \leq b. \end{cases}$$

Ta định nghĩa:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \text{ diện tích hình thang cong } D. \quad (1)$$

(2) Cách tính tích phân xác định bằng định nghĩa.

(2) Cách tính tích phân xác định bằng định nghĩa.

+) Chia đoạn $[a; b]$ bởi các phân hoạch:
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.

(2) Cách tính tích phân xác định bằng định nghĩa.

+) Chia đoạn $[a; b]$ bởi các phân hoạch:
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.
+) Lấy điểm $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ bất kì. Lập tổng
$\sigma := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, với $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

(2) Cách tính tích phân xác định bằng định nghĩa.

+) Chia đoạn $[a; b]$ bởi các phân hoạch:
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.
+) Lấy điểm $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ bất kì. Lập tổng
$\sigma := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, với $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
+) Khi đó tính giới hạn (nếu tồn tại)

$$\lim_{\Delta \to 0} \sigma = S \quad (2) \quad \text{với } \Delta := \max\{\Delta x_1, ..., \Delta x_2\}.$$

(2) Cách tính tích phân xác định bằng định nghĩa.

+) Chia đoạn $[a; b]$ bởi các phân hoạch:
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.
+) Lấy điểm $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ bất kì. Lập tổng
$\sigma := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, với $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
+) Khi đó tính giới hạn (nếu tồn tại)

$$\lim_{\Delta \to 0} \sigma = S \quad (2) \quad \text{với } \Delta := \max\{\Delta x_1, ..., \Delta x_2\}.$$

+) Theo định nghĩa ta có:

$$I = \int_a^b f(x)dx := S. \quad (3)$$

(2) Cách tính tích phân xác định bằng định nghĩa.

+) Chia đoạn $[a; b]$ bởi các phân hoạch:
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.
+) Lấy điểm $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ bất kì. Lập tổng
$\sigma := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, với $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
+) Khi đó tính giới hạn (nếu tồn tại)

$$\lim_{\Delta \to 0} \sigma = S \quad (2) \quad \text{với } \Delta := \max\{\Delta x_1, ..., \Delta x_2\}.$$

+) Theo định nghĩa ta có:

$$I = \int_a^b f(x)dx := S. \quad (3)$$

Chú ý. Nếu giới hạn (2) tồn tại hữu hạn (tức là, tích phân (3) tồn tại), thì hàm số $f(x)$ được gọi là khả tích trên $[a; b]$.

Chú ý: Dùng tích phân để tính giới hạn.

Cho $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$. Khi đó:

Chú ý: Dùng tích phân để tính giới hạn.

Cho $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$. Khi đó:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \left(f(\xi_0) + f(\xi_1) + \cdots + f(\xi_{n-1})\right) = \int_a^b f(x)dx,$$

với $\xi_i \in [a + ih, a + (i+1)h]$, $h = \frac{b-a}{n}$.

Chú ý: Dùng tích phân để tính giới hạn.

Cho $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$. Khi đó:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\left(f(\xi_0) + f(\xi_1) + \cdots + f(\xi_{n-1})\right) = \int_a^b f(x)dx,$$

với $\xi_i \in [a + ih, a + (i+1)h], h = \frac{b-a}{n}$.
Đặt biệt. Khi $a = 0, b = 1$, ta có

Chú ý: Dùng tích phân để tính giới hạn.

Cho $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$. Khi đó:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \left(f(\xi_0) + f(\xi_1) + \cdots + f(\xi_{n-1})\right) = \int_a^b f(x)dx,$$

với $\xi_i \in [a + ih, a + (i+1)h], h = \frac{b-a}{n}$.
Đặt biệt. Khi $a = 0, b = 1$, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(f(0) + f(\frac{1}{n}) + \cdots + f(\frac{n-1}{n}) \right) = \int_0^1 f(x)dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \cdots + f(\frac{n}{n}) \right) = \int_0^1 f(x)dx,$$

Example

Tính giới hạn sau:

$$A = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1^2}{n+1} + \frac{2^2}{n+2} + \cdots + \frac{n^2}{n+n} \right).$$

Example

Tính giới hạn sau:

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{1^2}{n+1} + \frac{2^2}{n+2} + \cdots + \frac{n^2}{n+n}\right).$$

Ta có

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{(1/n)^2}{1+(1/n)} + \frac{(2/n)^2}{1+(2/n)} + \cdots + \frac{(n/n)^2}{1+(n/n)}\right)$$
$$= \int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx = ln2 - \frac{1}{2}.$$

3.2.2. Các lớp hàm khả tích và tính chất.

3.2.2. Các lớp hàm khả tích và tính chất.

(1) Các lớp hàm khả tích.

(1) Các lớp hàm khả tích.

Định lí 1. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$, thì $f(x)$ khả tích trên đoạn đó.

(1) Các lớp hàm khả tích.

Định lí 1. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$, thì $f(x)$ khả tích trên đoạn đó.

Định lí 2. Nếu hàm số $f(x)$ bị chặn trên $[a; b]$ và có một số hữu hạn các điểm gián đoạn trong $[a; b]$ thì hàm số $f(x)$ khả tích trên $[a; b]$.

(2) Tính chất.

(2) Tính chất.

$$(i)\ \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$(ii)\ \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

$$(iii)\ \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad a \le c \le b.$$

(iv)Nếu $f(x) \ge g(x) \forall x \in [a; b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx.$

(v) (Công thức Newton-Leibnitz) Nếu F(x) là 1 nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a; b]$. Khi đó ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b .$$

(v) (Công thức Newton-Leibnitz) Nếu F(x) là 1 nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a;b]$. Khi đó ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\,\Big|_a^b\ .$$

Ví dụ.

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\,\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

(v) (Công thức Newton-Leibnitz) Nếu F(x) là 1 nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a;b]$. Khi đó ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\,\Big|_a^b\ .$$

Ví dụ.

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\,\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

(vi) Đạo hàm của tích phân theo cận trên.

(v) (Công thức Newton-Leibnitz) Nếu F(x) là 1 nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a; b]$. Khi đó ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\mid_a^b .$$

Ví dụ.

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\mid_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

(vi) Đạo hàm của tích phân theo cận trên. Giả sử $f(t)$ liên tục trên $[a; b]$. Khi đó tích phân

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt$$

có đạo hàm theo x và:

$$I'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a; b].$$

Tổng quát.

Cho

$$I(x) = \int_a^{u(x)} f(t)dt.$$

Khi đó ta có:

$$I'(x) = f(u(x))u'(x).$$

Tổng quát.

Cho

$$I(x) = \int_a^{u(x)} f(t)dt.$$

Khi đó ta có:

$$I'(x) = f(u(x))u'(x).$$

Ví dụ. Tính giới hạn:

$$A = \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{\sin 3t}dt}{\int_0^{2x}(e^{\sqrt{t}} - 1)dt}.$$

3.2.3. Các phương pháp tính tích phân.

(1) Phương pháp đổi biến số.

3.2.3. Các phương pháp tính tích phân.

(1) Phương pháp đổi biến số.

• **Phép biến đổi thứ 1.** Xét tích phân

$$I = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx,$$

với $f(t), g(x), g'(x)$ là các hàm số liên tục.

(1) Phương pháp đổi biến số.

• **Phép biến đổi thứ 1.** Xét tích phân

$$I = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx,$$

với $f(t), g(x), g'(x)$ là các hàm số liên tục.

Đặt $\boxed{t = g(x)}$,

(1) Phương pháp đổi biến số.

- **Phép biến đổi thứ 1.** Xét tích phân

$$I = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx,$$

với $f(t), g(x), g'(x)$ là các hàm số liên tục.
Đặt $\boxed{t = g(x)}$, $\longrightarrow dt = g'(x)dx$ và

$$I = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt.$$

(1) Phương pháp đổi biến số.

- **Phép biến đổi thứ 2.** Xét tích phân

$$I = \int_a^b f(x)dx, \quad f \text{ liên tục.}$$

(1) Phương pháp đổi biến số.

• **Phép biến đổi thứ 2.** Xét tích phân

$$I = \int_a^b f(x)dx, \quad f \text{ liên tục.}$$

Đặt $\boxed{x = \varphi(t)}$

(1) Phương pháp đổi biến số.

• **Phép biến đổi thứ 2.** Xét tích phân

$$I = \int_a^b f(x)dx, \quad f \text{ liên tục.}$$

Đặt $\boxed{x = \varphi(t)} \longrightarrow dx = \varphi'(t)dt$ và giả sử khi x chạy từ $a \to b$ thì t chạy từ $t_0 \to t_1$. Khi đó

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Ví dụ.

Tính các tích phân sau:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^{2x}dx}{e^x + 1} \qquad I_2 = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}dx$$

$$I_3 = \int_0^{3/2} \sqrt{9 - 4x^2}dx \qquad I_4 = \int_0^2 \frac{xdx}{1 + x^4}$$

(2) Phương pháp tích phân từng phần.

$$\boxed{\int_a^b u dv = uv \,\Big|_a^b - \int_a^b v du}.$$

(2) Phương pháp tích phân từng phần.

$$\boxed{\int_a^b u dv = uv \,\Big|_a^b - \int_a^b v du}.$$

Ví dụ. Tính các tích phân sau:

$$I_1 = \int_0^1 \arctan x dx \qquad\qquad I_2 = \int_0^1 \frac{x \ln(1+x^2)}{1+x^2} dx.$$

3.3. Ứng dụng.

3.3. Ứng dụng.

(1) Tính diện tích. Cho miền D giới hạn bởi

$$D : \begin{cases} y = f_1(x) \\ y = f_2(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases}.$$

Khi đó diện tích miền D cho bởi công thức:

$$S_D = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx.$$

(1) Tính diện tích. Cho miền D giới hạn bởi

$$D : \begin{cases} y = f_1(x) \\ y = f_2(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases} .$$

Khi đó diện tích miền D cho bởi công thức:

$$S_D = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx.$$

Chú ý. Khi các đường cong cho bởi tham số

$$D : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \phi(t) \\ t_0 \leq t \leq t_1 \end{cases} \quad \text{thì } S_D = \int_{t_0}^{t_1} |\phi(t)\varphi'(t)| dt.$$

Ví dụ.

Tính diện tích giới hạn bởi:

(a) Đường cong $y = x^3$ và đường thẳng $y = x$.

(b) Parabol $x = y^2$ và đường thẳng $y = x - 2$.

(2) Tính độ dài đường cong.

Giả sử cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi $\begin{cases} y = f(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases}$ khi đó độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi công thức

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \rho = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

(2) Tính độ dài đường cong.

Giả sử cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi $\begin{cases} y = f(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$ khi đó độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi công thức

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \rho = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Ví dụ. Tính độ dài cung nằm trên đường cong $y = \ln(x)$ với $1 \le x \le e$.

(3) Tính thể tích vật thể.

(3) Tính thể tích vật thể.

Xét vật thể V được giới hạn bởi các mặt cong và hai mặt phẳng $x = a; x = b$.

(3) Tính thể tích vật thể.

Xét vật thể V được giới hạn bởi các mặt cong và hai mặt phẳng $x = a; x = b$.
- Xét mặt phẳng (P) cắt Ox tại điểm có hoành độ $x \in [a; b]$. Giả sử (P) cắt vật thể V theo thiết diện có diện tích $S(x.)$

(3) Tính thể tích vật thể.

Xét vật thể V được giới hạn bởi các mặt cong và hai mặt phẳng $x = a; x = b$.
- Xét mặt phẳng (P) cắt Ox tại điểm có hoành độ $x \in [a; b]$. Giả sử (P) cắt vật thể V theo thiết diện có diện tích $S(x.)$
- Khi đó, thể tích V được tính theo công thức:

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Chú ý. +) Khi quay miền $D : \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ a \leq x \leq b \end{cases}$ quanh trục Ox, thì vật thể tạo thành có thể tích

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Chú ý. +) Khi quay miền $D : \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ a \leq x \leq b \end{cases}$ quanh trục Ox, thì vật thể tạo thành có thể tích

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

+) Khi quay miền $D : \begin{cases} x = f(y) \\ x = 0 \\ a \leq y \leq b \end{cases}$ quanh trục Oy, thì vật thể tạo thành có thể tích

$$V = \pi \int_a^b f^2(y) dy.$$

Ví dụ.

Tính thể tích vật thể tạo thành khi quay miền $D := \{y = x^2 - 2x; y = 0\}$ quanh trục Ox.

3.4. Tích phân suy rộng.

3.4.1. Tích phân suy rộng với cận vô hạn.

3.4.1. Tích phân suy rộng với cận vô hạn. Giả sử $f(x)$ khả tích trên $[a; A]$ với mọi $A > a$. Khi đó, ta định nghĩa:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx \quad (1).$$

3.4.1. Tích phân suy rộng với cận vô hạn. Giả sử $f(x)$ khả tích trên $[a; A]$ với mọi $A > a$. Khi đó, ta định nghĩa:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)dx \quad (1).$$

+) Nếu giới hạn (1) tồn tại hữu hạn, ta nói hàm số tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **hội tụ.**

3.4.1. Tích phân suy rộng với cận vô hạn. Giả sử $f(x)$ khả tích trên $[a; A]$ với mọi $A > a$. Khi đó, ta định nghĩa:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)dx \quad (1).$$

+) Nếu giới hạn (1) tồn tại hữu hạn, ta nói hàm số tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **hội tụ.**
+) Nếu giới hạn (1) không tồn tại hoặc $= \infty$, ta nói hàm số tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **phân kì.**

3.4.1. Tích phân suy rộng với cận vô hạn. Giả sử $f(x)$ khả tích trên $[a; A]$ với mọi $A > a$. Khi đó, ta định nghĩa:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx \quad (1).$$

+) Nếu giới hạn (1) tồn tại hữu hạn, ta nói hàm số tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **hội tụ.**
+) Nếu giới hạn (1) không tồn tại hoặc $=\infty$, ta nói hàm số tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **phân kì.**

Chú ý 1. Tương tự ta có các định nghĩa sau:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{A\to-\infty} \int_A^a f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty, A\to+\infty} \int_B^A f(x)dx$$

Chú ý 2.

Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a, +\infty)$, khi đó ta có công thức:

$$\int_a^{+\infty} f(x) = F(+\infty) - F(a) = F(x)\,\Big|_a^{+\infty},$$

với $F(+\infty) := \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

Ví dụ.

Tính các tích phân suy rộng sau:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}$$

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

$$I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{0} xe^x dx$$

Chú ý

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{phân kỳ} & \text{nếu} \quad \alpha \le 1 \\ \text{hội tụ} & \text{nếu} \quad \alpha > 1 \end{cases} \qquad a > 0.$$

Các điều kiện hội tụ của tích phân suy rộng

Theorem

Cho $f(x)$ và $g(x)$ xác định với mọi $x \geq a$ và khả tích trên $[a, A]$ với mọi $A > a$. Giả sử

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \geq a.$$

Khi đó

(a) Nếu $\int_a^\infty g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^\infty f(x)dx$ hội tụ.

(b) Nếu $\int_a^\infty f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^\infty g(x)dx$ phân kỳ.

Theorem

Cho $f(x)$ và $g(x)$ xác định với mọi $x \geq a$ và khả tích trên $[a, A]$ với mọi $A > a$. Giả sử

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \geq a.$$

Khi đó

(a) Nếu $\int_a^\infty g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^\infty f(x)dx$ hội tụ.

(b) Nếu $\int_a^\infty f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^\infty g(x)dx$ phân kỳ.

Example

Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau:

$$I_1 = \int_1^\infty \frac{x+2}{x^4 + \cos x + 4} dx, \quad I_2 = \int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \sin x + 1}}.$$

Các điều kiện hội tụ của tích phân suy rộng

Theorem

Cho $f(x)$ và $g(x)$ xác định với mọi $x \geq a$ và khả tích trên $[a, A]$ với mọi $A > a$. Giả sử $0 \leq f(x), g(x)$ với mọi $x \geq a$ và

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} dx = k.$$

Khi đó

(a) *Nếu $k \in (0, \infty)$ thì $\int_a^\infty f(x)dx$ và $\int_a^\infty g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*

(b) *Nếu $k = 0$ và nếu $\int_a^\infty f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^\infty g(x)dx$ phân kỳ.*

(c) *Nếu $k = +\infty$ và nếu $\int_a^\infty g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^\infty f(x)dx$ hội tụ.*

Example

Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau:

$$I_1 = \int_1^{\infty} \frac{x+2}{x^4 + \cos x + 4} dx, \quad I_2 = \int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \sin x + 1}}$$

và

$$I_3 = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx.$$

Chú ý.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^k x}{x^\alpha} = 0} \quad (\alpha > 0)$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty} \quad (\alpha, \beta > 0).$$

Definition

(i) Tích phân $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ được gọi là **hội tụ tuyệt đối** nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ.

Definition

(i) Tích phân $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ được gọi là **hội tụ tuyệt đối** nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ.
(ii) Tích phân $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ được gọi là **bán hội tụ** nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ phân kỳ.

Definition

(i) Tích phân $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ được gọi là **hội tụ tuyệt đối** nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ.

(ii) Tích phân $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ được gọi là **bán hội tụ** nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ phân kỳ.

Theorem

Nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ cũng hội tụ.

Example

Xét sự hội tụ của các tích phân:

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 - x + 1} dx$$

$$I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x^3 + x + 1}} dx$$

3.4.2. Tích phân suy rộng của hàm không bị chặn

3.4.2. Tích phân suy rộng của hàm không bị chặn

Giả sử $f(x)$ là hàm không bị chặn trên $[a; b]$ với điểm bất thường $c \in [a; b]$, tức là $f(c) = \infty$. Khi đó ta có định nghĩa:

$$(1) \text{ nếu } c = a: \quad \int_a^b f(x)dx := \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

$$(2) \text{ nếu } c = b: \quad \int_a^b f(x)dx := \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$$

(3) nếu $c \in (a, b)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \int_a^{c-\epsilon_1} f(x)dx + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \int_{c+\epsilon_2}^b f(x)dx.$$

3.4.2. Tích phân suy rộng của hàm không bị chặn

Giả sử $f(x)$ là hàm không bị chặn trên $[a;b]$ với điểm bất thường $c \in [a;b]$, tức là $f(c) = \infty$. Khi đó ta có định nghĩa:

$$(1) \text{ nếu } c = a: \quad \int_a^b f(x)dx := \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

$$(2) \text{ nếu } c = b: \quad \int_a^b f(x)dx := \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$$

(3) nếu $c \in (a, b)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \int_a^{c-\epsilon_1} f(x)dx + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \int_{c+\epsilon_2}^b f(x)dx.$$

Ta gọi tích phân $\int_a^b f(x)dx$ **hội tụ** nếu một trong các tích phân $(1) - (3)$ tồn tại hữu hạn. Trường hợp ngược lại, ta gọi tích phân $\int_a^b f(x)dx$ **phân kì.**

Ví dụ.

Tính các tích phân suy rộng sau:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$I_2 = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Chú ý.

$$I_1 = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^s}$$

$$\text{hoặc} \quad I_2 = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^s} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

$+$ Nếu $s < 1$ thì I_1, I_2 **hội tụ.**

$+$ Nếu $s \geq 1$ thì I_1, I_2 **phân kỳ.**

Theorem

Cho $f(x)$ và $g(x)$ xác định với mọi $a \leq x < b$ và khả tích trên $[a, b-\epsilon]$ với mọi $\epsilon > 0$. Giả sử

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall a \leq x < b.$$

Khi đó

(a) Nếu $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.

(b) Nếu $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ.

Theorem

Cho $f(x)$ *và* $g(x)$ *xác định với mọi* $a \leq x < b$ *và khả tích trên* $[a, b-\epsilon]$ *với mọi* $\epsilon > 0$*. Giả sử* $0 \leq f(x), g(x)$ *với mọi* $a \leq x < b$ *và*

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} dx = k.$$

Khi đó

(a) *Nếu* $k \in (0, \infty)$ *thì* $\int_a^b f(x)dx$ *và* $\int_a^b g(x)dx$ *cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*

(b) *Nếu* $k = 0$ *và nếu* $\int_a^b f(x)dx$ *phân kỳ thì* $\int_a^b g(x)dx$ *phân kỳ.*

(c) *Nếu* $k = +\infty$ *và nếu* $\int_a^b g(x)dx$ *hội tụ thì* $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ.*

Example

Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x+2}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad I_2 = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{4-x^2}}$$

Xét sự hội tụ của các tích phân sau:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^2}}$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} (\tan x)^2 \, dx$$

Example

Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x} - 1} dx$$

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x)^3} dx$$

Các điều kiện hội tụ của tích phân suy rộng (loại 2)

Theorem

Cho $f(x)$ xác định với mọi $a \leq x < b$ và khả tích trên $[a, b-\epsilon]$ với mọi $\epsilon > 0$.
Khi đó nếu $\int_a^b |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.