HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

o0o

Chương 3. Ma trận và định thức

ĐẠI SỐ

Bộ môn Toán, Khoa cơ bản 1

Hà Nội - 2023

Chương 3. Ma trận và định thức

Ma trận

- Một ma trận cỡ $m \times n$ là một bảng số gồm m hàng và n cột. Mỗi số trong ma trận được gọi là một phần tử của nó.
- Nếu A là ma trận cỡ $m \times n$ có phần tử nằm ở hàng i, cột j là a_{ij} thì A được viết là

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ hoặc } A = [a_{ij}]_{m \times n}.$$

- Tập hợp tất cả các ma trận cỡ $m \times n$ được ký hiệu là $\mathcal{M}_{m \times n}$.

Ma trận không, ma trận vuông, ma trận đối

- Ma trận không, ký hiệu 0, là ma trận có mọi phần tử đều bằng 0.
- Ma trận cỡ $n \times n$ được gọi là ma trận vuông cấp n.
  Tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp n được ký hiệu là $\mathcal{M}_n$.
- Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m \times n}$. Ma trận đối của A, ký hiệu $-A$, được xác định bởi
$$-A = [-a_{ij}]_{m \times n}.$$

Ma trận đơn vị

- Nếu $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ thì các phần tử $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ được gọi là các phần tử nằm trên đường chéo chính.
- Ma trận vuông cấp n có các phần tử nằm trên đường chéo chính bằng 1, còn các phần tử khác bằng 0 được gọi là ma trận đơn vị cấp n, ký hiệu I_n hoặc I.

Ví dụ 1.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận tam giác

- Ma trận vuông A được gọi là ma trận tam giác trên nếu mọi phần tử nằm dưới đường chéo chính đều bằng 0.
- Ma trận vuông A được gọi là ma trận tam giác dưới nếu mọi phần tử nằm trên đường chéo chính đều bằng 0.

Ví dụ 2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \to \text{ ma trận tam giác trên}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \to \text{ ma trận tam giác dưới}$$

Ma trận bằng nhau

Hai ma trận A và B được gọi là bằng nhau (viết là $A = B$) nếu chúng có cùng cỡ và các phần tử ở cùng vị trí bằng nhau.

Ví dụ 3.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = 1, b = -2, c = 3, d = 4.$$

3.2.1 Phép cộng và phép trừ hai ma trận

Định nghĩa

Cho hai ma trận cùng cỡ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$.

- Tổng $A + B$ là ma trận được xác định bởi

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

- Hiệu $A - B$ là ma trận được xác định bởi

$$A - B = A + (-B) = [a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n}$$

Ví dụ 4. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Tính $A + B, A - B$.

Các tính chất

Nếu A, B, C là các ma trận cùng cỡ thì

(1) $A + B = B + A$

(2) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(3) $0 + A = A$

(4) $A + (-A) = 0$

Định nghĩa

Nếu $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và $k \in \mathbb{R}$ thì

$$kA = [ka_{ij}]_{m\times n}$$

Ví dụ 5. Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Tính $2A - 3B$.

Các tính chất

Nếu A, B là các ma trận cùng cỡ và k, p là các số thực tùy ý thì

(1) $k(A + B) = kA + kB$

(2) $(k + p)A = kA + pA$

(3) $(kp)A = k(pA)$

(4) $1A = A$

- Tập hợp $\mathcal{M}_{m\times n}$ với phép cộng ma trận và phép nhân một số với ma trận là một không gian véc tơ.
- Ký hiệu E_{ij} là ma trận cỡ $m \times n$ có phần tử nằm ở hàng i cột j bằng 1, còn các phần tử khác bằng 0. Khi đó

$$\{E_{ij} \mid i = 1, \dots m, j = 1, \dots n\}$$

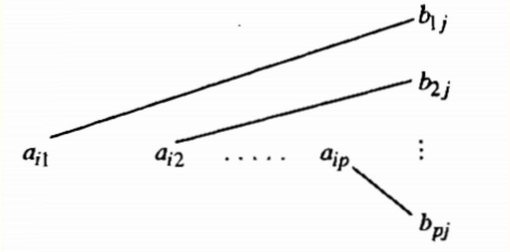
là một cơ sở của $\mathcal{M}_{m\times n}$. Vậy $\dim \mathcal{M}_{m\times n} = mn$.

3.2.3 Phép nhân hai ma trận

Định nghĩa

Nếu $A = [a_{ij}]_{m\times p}$, $B = [b_{ij}]_{p\times n}$ thì tích $AB = [c_{ij}]_{m\times n}$, trong đó

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$$



Ví dụ 6. Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Tính các tích AB, BA.

Ví dụ 7. Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Tính các tích AB, BA nếu chúng tồn tại.

Nhận xét:

- Tích AB tồn tại $\Leftrightarrow$ số cột của A bằng số hàng của B.
- Phép nhân hai ma trận không có tính giao hoán.

Các tính chất

Nếu k là một số thực tùy ý và A, B, C là các ma trận có cỡ thích hợp thì

1) $A(BC) = (AB)C$
2) $A(B + C) = AB + AC, A(B - C) = AB - AC$
3) $(B + C)A = BA + CA, (B - C)A = BA - CA$
4) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
5) Nếu A là ma trận cỡ $m \times n$ thì

$$I_m A = A = A I_n$$

3.2.4 Đa thức ma trận

Định nghĩa

Cho A là một ma trận vuông. Với mỗi đa thức

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k,$$

$p(A)$ là một ma trận được xác định bởi

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_k A^k,$$

trong đó $A^0 = I, A^1 = A, A^2 = AA, A^n = A^{n-1}A = \underbrace{AA\ldots A}_{n \text{ lần}}.$

Ví dụ 8. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ và đa thức $p(x) = 5 - 4x + x^3$. Tính $p(A)$.

3.2.5 Ma trận chuyển vị

Định nghĩa

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. Đổi các hàng của ma trận A thành các cột ta được một ma trận mới gọi là ma trận chuyển vị của A, ký hiệu A^t.

Ví dụ 9. Tìm ma trận chuyển vị của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Các tính chất

Nếu A, B là các ma trận có cỡ thích hợp và k là một số thực thì

(1) $(A^t)^t = A$

(2) $(A+B)^t = A^t + B^t$

(3) $(kA)^t = kA^t$

(4) $(AB)^t = B^t A^t$

Ma trận đối xứng

- Ma trận A được gọi là ma trận đối xứng nếu $A = A^t$.
- Ma trận đối xứng phải là ma trận vuông.

3.3.1 Định nghĩa ma trận của một hệ véc tơ

Định nghĩa

- Giả sử $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở của không gian véc tơ V và $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ là một hệ véc tơ của V.
- Nếu $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i, j = 1, \ldots, m$ thì $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ được gọi là ma trận của hệ véc tơ S trong cơ sở B.

Nhận xét: Ma trận của hệ véc tơ $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ trong cơ sở B có cột thứ j là tọa độ của véc tơ v_j trong cơ sở B.

Ví dụ 10. Trong $\mathbb{R}^3$, cho hệ véc tơ $S = \{u_1 = (2, 1, 6), u_2 = (1, 1, 0)\}$. Tìm ma trận của hệ véc tơ đó trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Định nghĩa

Nếu $u = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$ thì ma trận của u trong cơ sở B là

$$[u]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

3.3.2 Ma trận chuyển cơ sở

Định nghĩa

Giả sử $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ và $B' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ là hai cơ sở của không gian véc tơ V. Ma trận của hệ véc tơ B' trong cơ sở B được gọi là ma trận chuyển từ cơ sở B sang cơ sở B'.

Nhận xét: Nếu T là ma trận chuyển từ cơ sở B sang B' thì

$$[u]_B = T[u]_{B'}.$$

Ví dụ 11. Cho $B = \{(1,3), (-2,-2)\}$, $B' = \{(-12,0), (-4,4)\}$ là hai cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

a) Tìm ma trận chuyển từ cơ sở B sang B'.

b) Tìm $[u]_B$ biết $[u]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

3.4.1 Phép thế

Định nghĩa

- Một phép thế bậc n là một song ánh

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}.$$

- Ta thường ký hiệu phép thế σ bởi ma trận

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{bmatrix}$$

- Tập tất cả các phép thế bậc n được ký hiệu là S_n.
- Số các phần tử của S_n là $n!$

Dấu của phép thế

- Cho σ là một phép thế bậc n. Một nghịch thế của σ là cặp số (i, j) sao cho $i < j$, nhưng $\sigma(i) > \sigma(j)$.
- Dấu của σ, ký hiệu sgn σ, được xác định bởi

$$\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^k, \text{ trong đó } k \text{ là số các nghịch thế của } \sigma$$

Ví dụ 12. Tìm dấu của phép thế $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

Phép chuyển trí

Phép đổi chỗ hai phần tử khác nhau $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ và giữ nguyên các phần tử khác được gọi là một phép chuyển trí.

Các tính chất của phép thế

1) Nếu σ là một phép chuyển trí thì $\operatorname{sgn} \sigma = -1$.
2) Với mọi $\sigma, \mu \in S_n$ ta có

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \mu) = \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \mu$$

Định nghĩa

Định thức của ma trận vuông $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, ký hiệu $\det A$ hoặc $|A|$, được xác định bởi

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} (\text{sgn } \sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

Nhận xét:

a) Nếu $A = [a_{11}]$ thì

$$\det A = a_{11}$$

b) Nếu $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ thì

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

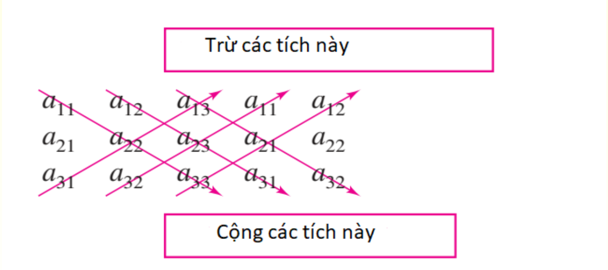
c) Nếu $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ thì

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Quy tắc Sarrus:



Ví dụ 13. Tính định thức của các ma trận dưới đây.

a) $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

Định lý 3.1

Nếu A là ma trận vuông thì $\det(A^t) = \det A$.

Nhận xét: Các tính chất của định thức đúng với hàng thì cũng đúng với cột.

Định lý 3.2

Nếu tất cả các phần tử của một hàng (hoặc một cột) của ma trận A có dạng tổng của hai số hạng thì $\det A$ có thể phân tích thành tổng của hai định thức, cụ thể là nếu $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ và với mỗi $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$a_{kj} = b_{kj} + c_{kj}$$

thì

$$\det A = \det B + \det C,$$

trong đó $B = [b_{ij}]_{n\times n}, C = [c_{ij}]_{n\times n}, b_{ij} = c_{ij} = a_{ij},\ i \neq k.$

Định lý 3.3

Cho A là một ma trận vuông.

1) Nếu B là ma trận nhận được từ A bằng cách đổi chỗ hai hàng (hoặc hai cột) của A thì $\det B = -\det A$.
2) Nếu B là ma trận nhận được từ A bằng cách nhân một hàng (hoặc một cột) của A với một số α thì $\det B = \alpha \det A$.
3) Nếu B là ma trận nhận được từ A bằng cách cộng vào một hàng (hoặc một cột) của A một tổ hợp tuyến tính của các hàng khác (hoặc các cột khác) thì $\det B = \det A$.

Hệ quả. Nếu A là ma trận vuông cấp n thì

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Định lý 3.4

Cho A là một ma trận vuông.

1) Nếu A có một hàng (hoặc một cột) gồm toàn số 0 thì $\det A = 0$.
2) Nếu A có hai hàng (hoặc hai cột) giống nhau thì $\det A = 0$.
3) Nếu A là ma trận tam giác thì $\det A$ bằng tích các phần tử nằm trên đường chéo chính.

Hệ quả. Nếu ma trận vuông A có hai hàng (hoặc hai cột) tỷ lệ thì $\det A = 0$.

Ví dụ 14.

$$\text{Cho} \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -1. \text{ Tính } \begin{vmatrix} -x & -y & -z \\ 3p+a & 3q+b & 3r+c \\ 2p & 2q & 2r \end{vmatrix}$$

Ví dụ 15. Tính định thức của ma trận vuông cấp n

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{bmatrix}$$

Chương 3. Ma trận và định thức

Định nghĩa

Xét ma trận vuông $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. Ký hiệu M_{ij} là định thức của ma trận vuông cấp $n-1$ nhận được từ A bằng cách bỏ đi hàng i và cột j. Phần bù đại số của a_{ij}, ký hiệu A_{ij}, được xác định bởi

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Định lý 3.5

Cho $A = [a_{ij}]$ là một ma trận vuông cấp n. Khi đó

- $\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$
  (Công thức khai triển định thức theo cột j)
- $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$
  (Công thức khai triển định thức theo hàng i)

Ví dụ 16. Tính định thức của các ma trận sau:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{b) } B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

3.5.2 Định lý khai triển Laplace

- Cho $A = [a_{ij}]$ là ma trận vuông cấp n. Xét k hàng $i_1, i_2, \ldots, i_k$ $(1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n)$ và k cột $j_1, j_2, \ldots, j_k$ $(1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq n)$.
- Các phần tử nằm ở giao của các hàng và các cột này tạo thành một ma trận vuông cấp k. Ký hiệu định thức của ma trận vuông đó là $M_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}$.
- Định thức của ma trận nhận được từ A bằng cách bỏ đi các hàng $i_1, i_2, \ldots, i_k$ và các cột $j_1, j_2, \ldots, j_k$ được ký hiệu là $\overline{M}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}$.
- $A_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^{j_1,j_2,\ldots,j_k} = (-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_k+j_1+j_2+\ldots+j_k}\overline{M}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}$
  $A_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}$ được gọi là phần bù đại số của $M_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}$.

Định lý 3.6 (Định lý khai triển Laplace)

1) Công thức khai triển định thức theo k hàng $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$.

$$\det A = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le n} M_{i_1, i_2, \ldots, i_k}^{j_1, j_2, \ldots, j_k} A_{i_1, i_2, \ldots, i_k}^{j_1, j_2, \ldots, j_k}$$

2) Công thức khai triển định thức theo k cột $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$.

$$\det A = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} M_{i_1, i_2, \ldots, i_k}^{j_1, j_2, \ldots, j_k} A_{i_1, i_2, \ldots, i_k}^{j_1, j_2, \ldots, j_k}$$

Ví dụ 17. Tính định thức của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 0 \\ e & f & 2 & 2 & 2 \\ g & h & -1 & -4 & -6 \\ i & j & 2 & -1 & -7 \end{bmatrix}$$

Định lý 3.7

Nếu A và B là các ma trận vuông cùng cấp thì

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Hệ quả. Nếu A là một ma trận vuông thì $\det(A^k) = (\det A)^k, \forall k \geq 1.$

Định lý 3.8

Giả sử B là một cơ sở của không gian véc tơ n chiều V và A là ma trận của hệ véc tơ $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ trong cơ sở B. Khi đó,

$$S \text{ độc lập tuyến tính} \Leftrightarrow \det A \neq 0.$$

$\det A$ được gọi là định thức của hệ véc tơ $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ trong cơ sở B, ký hiệu $D_B\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Ví dụ 18. Tìm λ để hệ véc tơ sau phụ thuộc tuyến tính

$$\{u = (\lambda, -1, -1), v = (-1, \lambda, -1), w = (-1, -1, \lambda)\}.$$

Chương 3. Ma trận và định thức

3.6.1 Định nghĩa hạng của ma trận

Định nghĩa

Hạng của ma trận A, ký hiệu $r(A)$ hoặc $\text{rank}(A)$, là hạng của hệ véc tơ cột của A.

3.6.2 Sử dụng định thức tìm hạng của ma trận

Định lý 3.9

Cho A là một ma trận cỡ $m \times n$. Nếu tồn tại định thức con cấp p của A khác 0 và mọi định thức con cấp $p+1$ bao quanh nó đều bằng 0 thì $r(A) = p$.

Ví dụ 18. Tìm hạng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & -8 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 11 & 4 \end{bmatrix}$.

Hệ quả.

1) Nếu A là một ma trận cỡ $m \times n$ thì

$$r(A) = r(A^t) \leq \min\{m, n\}.$$

2) $r(A) =$ hạng của hệ véc tơ hàng của A.

3.6.3 Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp tìm hạng của ma trận

Các phép biến đổi sơ cấp trên một ma trận

Các phép biến đổi sau được gọi là các phép biến đổi sơ cấp trên một ma trận:

1) Đổi chỗ hai hàng (hoặc hai cột).
2) Nhân một hàng (hoặc một cột) với một số khác 0.
3) Cộng vào một hàng (hoặc một cột) một hàng (hoặc cột) khác đã nhân với một số.

Nhận xét: Các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận A không làm thay đổi hạng của A.

- Một hàng của ma trận A được gọi là hàng không nếu tất cả các phần tử của nó đều bằng 0.
- Một hàng của ma trận A được gọi là hàng khác không nếu nó có ít nhất một phần tử khác 0.

Ma trận bậc thang

Là ma trận có 2 tính chất sau:

1) Các hàng không (nếu có) luôn ở dưới các hàng khác không.
2) Ở hai hàng khác không kề nhau thì phần tử khác 0 đầu tiên ở hàng dưới luôn nằm bên phải cột chứa phần tử khác 0 đầu tiên ở hàng trên.

Nhận xét: Hạng của một ma trận dạng bậc thang bằng số hàng khác không của nó.

Ví dụ 19. Ma trận nào trong các ma trận dưới đây có dạng bậc thang?

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Quy tắc tìm $r(A)$

- Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên một ma trận để đưa A về ma trận dạng bậc thang B.
- $r(A) =$ số hàng khác không của B.

Ví dụ 20. Tìm hạng của các ma trận dưới đây.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ a & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$

3.7.1 Định nghĩa ma trận nghịch đảo

Định nghĩa

Ma trận vuông A được gọi là khả nghịch nếu tồn tại ma trận vuông cùng cấp B sao cho

$$AB = BA = I.$$

Khi đó B được gọi là ma trận nghịch đảo của A, ký hiệu A^{-1}.

Nhận xét: Ma trận nghịch đảo của A nếu có là duy nhất.

3.7.2 Điều kiện cần và đủ để tồn tại ma trận nghịch đảo

Định lý 3.11 (điều kiện cần)

Nếu A khả nghịch thì $\det A \neq 0$ và $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

Ma trận phụ hợp

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. Ma trận $C = [A_{ij}]_{n\times n}$, trong đó A_{ij} là phần bù đại số của a_{ij}, được gọi là ma trận phụ hợp của A.

Ta có:

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \ldots + a_{kn}A_{in} = \begin{cases} \det A & \text{nếu } k = i \\ 0 & \text{nếu } k \neq i \end{cases}$$

$$a_{1k}A_{1j} + a_{2k}A_{2j} + \ldots + a_{nk}A_{nj} = \begin{cases} \det A & \text{nếu } k = j \\ 0 & \text{nếu } k \neq j \end{cases}$$

Định lý 3.12 (điều kiện đủ)

Nếu $\det A \neq 0$ thì A khả nghịch và

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^t,$$

trong đó C là ma trận phụ hợp của A.

Hệ quả 1. Nếu $AB = I$ hoặc $BA = I$ thì A khả nghịch và $A^{-1} = B$.

Hệ quả 2. Nếu T là ma trận chuyển từ cơ sở B sang B' thì T khả nghịch và T^{-1} là ma trận chuyển từ cơ sở B' sang B.

Hệ quả 3. Nếu ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ khả nghịch thì

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 21. Tìm ma trận nghịch đảo của $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Ví dụ 22. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & c & -c \\ -1 & 2 & 1 \\ c & -c & c \end{bmatrix}$.

a) Tìm c để A khả nghịch.

b) Tìm ma trận nghịch đảo của A (nếu có) khi $c = 1$.

3.7.3 Tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp Gauss-Jordan

Ma trận sơ cấp

Cho E là một ma trận vuông cấp n. E được gọi là ma trận sơ cấp nếu nó nhận được từ ma trận I_n bằng cách thực hiện một phép biến đổi sơ cấp trên hàng của I_n.

Ví dụ 23. Các ma trận sau là các ma trận sơ cấp

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nhận xét: Cho A là một ma trận cỡ $m \times n$. Nếu thực hiện một phép biến đổi sơ cấp trên hàng của ma trận A ta được ma trận EA, trong đó E là ma trận sơ cấp nhận được bằng cách thực hiện cùng phép biến đổi sơ cấp đó trên ma trận đơn vị I_m.

Tìm A^{-1} bằng phương pháp Gauss-Jordan

1. Viết ma trận đơn vị I bên phải ma trận A.
2. Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp đồng thời trên hàng của ma trận A và I để đưa A về ma trận I.
3. Khi A chuyển thành I thì I chuyển thành A^{-1}

$$[A|I] \to \ldots \to [I|A^{-1}]$$