HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

o0o

Chương 2. Không gian véc tơ

ĐẠI SỐ

Bộ môn Toán, Khoa cơ bản 1

Hà Nội - 2023

Chương 2. Không gian véc tơ

Định nghĩa

Xét tập hợp V khác rỗng mà mỗi phần tử của nó được gọi là một véctơ. Giả sử trên V ta định nghĩa được hai phép toán: phép cộng hai véc tơ và phép nhân véc tơ với một số.
Tập V được gọi là một không gian véc tơ nếu các tiên đề sau được thỏa mãn.

Các tiên đề đối với phép cộng hai véc tơ

1) Nếu $u, v \in V$ thì tổng của u và v, kí hiệu $u + v$, thuộc V.
2) $u + v = v + u, \forall u, v \in V$.
3) $(u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in V$.
4) Tồn tại véc tơ $\mathbf{0} \in V$ sao cho $u + \mathbf{0} = \mathbf{0} + u = u, \forall u \in V$.
   $\mathbf{0}$ được gọi là véc tơ không.
5) Với mỗi $u \in V$ có véc tơ $-u \in V$ sao cho $u + (-u) = (-u) + u = \mathbf{0}$.
   $-u$ được gọi là véc tơ đối của u.

Các tiên đề đối với phép nhân véc tơ với một số

6) Nếu $\alpha \in \mathbb{R}$ và $u \in V$ thì tích của α với u, kí hiệu αu, thuộc V.
7) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V.$
8) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in V.$
9) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in V.$
10) $1u = u, \forall u \in V.$

Ví dụ 1. $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) |\ x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$ là một không gian véc tơ với hai phép toán được định nghĩa như sau:
Nếu $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ thì

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \\ \alpha x &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n). \end{aligned}$$

Ngoài ra $x = y \Leftrightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$.

- Véc tơ không là $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.
- Véc tơ đối của $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ là

$$-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n).$$

Ví dụ 2. Kí hiệu $\mathbf{P}_n$ là tập tất cả các đa thức có bậc không vượt quá n (n là một số nguyên dương).

$$\mathbf{P}_n = \{p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n |\ a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$$

Với phép cộng hai đa thức và phép nhân đa thức với một số thì $\mathbf{P}_n$ là một không gian véc tơ.

- Véc tơ không là đa thức không.
- Véc tơ đối của $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in \mathbf{P}_n$ là

$$-p(x) = -a_0 - a_1x - \ldots - a_nx^n$$

Ví dụ 3. $\mathbb{R}^2$ có phải là không gian véc tơ với hai phép toán được định nghĩa như sau không?
Nếu $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ thì

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$
$$\alpha x = (\alpha x_2, \alpha x_1)$$

Ví dụ 4. Kí hiệu $F[a, b]$ là tập hợp tất cả các hàm số xác định trên $[a, b]$. Khi đó $F[a, b]$ là một không gian véc tơ với hai phép toán được định nghĩa như sau: nếu $f, g \in F[a, b]$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ thì

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \ \forall x \in [a, b]$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \ \forall x \in [a, b]$$

2.1.2 Các tính chất

1) Véc tơ không là duy nhất.
Với mỗi $u \in V$, véc tơ đối của u là duy nhất.
2) Nếu $u + v = u + w$ thì $v = w$ (luật giản ước).
3) Với mọi $u \in V$, $0u = \mathbf{0}, (-1)u = -u$.
4) Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
5) Nếu $\alpha u = \mathbf{0}$ thì $\alpha = 0$ hoặc $u = \mathbf{0}$.
6) Nếu $u_1, u_2, \ldots, u_n \in V$ và $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ thì

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n \in V$$

Định nghĩa

Hiệu của hai véc tơ: $u - v = u + (-v)$

Luật chuyển vế: Với mọi $u, v, w \in V$, $u + v = w \Leftrightarrow u = w - v$

Định nghĩa

Giả sử V là một không gian véc tơ với hai phép toán: phép cộng hai véc tơ và phép nhân véc tơ với một số, W là một tập con khác rỗng của V. Nếu với hai phép toán trên, W cũng là một không gian véc tơ thì W được gọi là không gian véc tơ con của V (hay không gian con của V).

Định lý 2.1

Giả sử W là một tập con của không gian véc tơ V, $W \neq \emptyset$. Khi đó W là không gian véc tơ con của V khi và chỉ khi

1) Nếu $u, v \in W$ thì $u + v \in W$.
2) Nếu $\alpha \in \mathbb{R}$ và $u \in W$ thì $\alpha u \in W$.

Ví dụ 5. Cho không gian véc tơ V. Tập chỉ gồm một véc tơ không là không gian véc tơ con của V.

Ví dụ 6. Tập nào trong các tập dưới đây là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$?

a) $W_1 = \{(x, y, z)| -x + 3y + 2z = 0\}$

b) $W_2 = \{(0, s, t)| \; s, t \in \mathbb{R}\}$

c) $W_3 = \{(a, b, c)| \; c = 2a + 3b + 2\}$

Định lý 2.2

Nếu $(W_i)_{i\in I}$ là họ các không gian con của không gian véc tơ V thì $\bigcap\limits_{i\in I} W_i$ cũng là không gian con của V.

2.2.2 Không gian con sinh bởi một hệ véc tơ

Định nghĩa

Cho $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ là một hệ véc tơ của không gian véc tơ V.

- Biểu thức $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_kv_k$, trong đó $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ được gọi là một tổ hợp tuyến tính của hệ véc tơ S.
- Tập tất cả các tổ hợp tuyến tính của S được gọi là bao tuyến tính của S, kí hiệu span S.

$$\text{span } S = \{c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_kv_k |\ c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}\}$$

- Nếu $V = \text{span } S$ thì ta nói S là một hệ sinh của V hay S sinh ra V.
- Không gian vectơ có một hệ sinh hữu hạn được gọi là không gian hữu hạn sinh.

Ví dụ 7. Cho $u_1 = (1, -3, 2)$, $u_2 = (2, -1, 1)$ và $v = (1, 7, -4)$. Biểu diễn véc tơ v thành tổ hợp tuyến tính của u_1 and u_2.

Ví dụ 8. Cho W là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$ được xác định như sau:

$$W = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x - 3y + 4z = 0\}.$$

Tìm một hệ sinh của W.

Định lý 2.3

Cho $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ là một hệ véc tơ của không gian véc tơ V. Khi đó

1) span S là một không gian véc tơ con của V.
2) span S là không gian véc tơ con bé nhất của V chứa S.

2.2.3. Tổng của một họ không gian véc tơ con

Định nghĩa

Giả sử $W_1, W_2, \ldots, W_n$ là các không gian con của không gian véc tơ V.

- Tổng của các không gian con $W_1, \ldots, W_n$, kí hiệu $W_1 + \ldots + W_n$, là tập hợp được xác định như sau:

$$W_1 + \ldots + W_n = \{u_1 + \ldots + u_n | \ u_i \in W_i, i = 1, \ldots, n\}.$$

- Tổng của các không gian con $W_1, \ldots, W_n$ được gọi là tổng trực tiếp, kí hiệu $W_1 \oplus \ldots \oplus W_n$, nếu mọi $u \in W_1 + \ldots + W_n$ được viết một cách duy nhất dưới dạng $u_1 + \ldots + u_n$, trong đó $u_i \in W_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Nhận xét: $W_1 + W_2 \ldots + W_n$ cũng là một không gian con của V.

Định lý 2.4

Giả sử W_1, W_2 là hai không gian con của không gian véc tơ V. Khi đó tổng của W_1 và W_2 là tổng trực tiếp $W_1 \oplus W_2$ khi và chỉ khi

$$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}.$$

Ví dụ 9. Cho W_1, W_2 là hai không gian con của $\mathbb{R}^3$ được xác định như sau:

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(a, b, 0) |\ a, b \in \mathbb{R}\} \\ W_2 &= \{(0, b, c) |\ b, c \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Chứng minh rằng $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$. Tổng $W_1 + W_2$ có phải là tổng trực tiếp không?

Ví dụ 10. Cho W_1, W_2 là hai không gian con của $\mathbb{R}^3$ được xác định như sau:

$$W_1 = \{(a, a, a) |\ a \in \mathbb{R}\}$$
$$W_2 = \{(0, b, c) |\ b, c \in \mathbb{R}\}$$

Chứng minh rằng $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

2.3.1 Định nghĩa

Định nghĩa

- Hệ véc tơ $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ trong không gian véc tơ V được gọi là độc lập tuyến tính nếu nó thỏa mãn điều kiện sau:

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_kv_k = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$$

- Nếu tồn tại các số thực $c_1, c_2, \ldots, c_k$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_kv_k = \mathbf{0}$$

thì hệ véc tơ S được gọi là phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ 11. Các hệ véc tơ sau có độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$ không?

a) $\{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (-2, 0, 1)\}$

b) $\{(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, -2, 5)\}$

Ví dụ 12. Chứng minh rằng hệ véc tơ $\{1 + x, 3x + x^2, 2 + x - x^2\}$ là độc lập tuyến tính trong $\mathbf{P}_2$.

2.3.2 Các tính chất

1) Mọi tập con khác rỗng của một hệ véc tơ độc lập tuyến tính là độc lập tuyến tính.
2) Mọi hệ véc tơ chứa véc tơ không đều phụ thuộc tuyến tính.
3) Một hệ gồm k véc tơ $(k > 1)$ là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi một véc tơ nào đó của hệ phải là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ còn lại.

   Chú ý: Hệ véc tơ $\{u, v\}$ phụ thuộc tuyến tính $\Leftrightarrow u, v$ tỷ lệ $\Leftrightarrow$ tồn tại $k \in \mathbb{R}$ sao cho $u = kv$ hoặc $v = ku$.

4) Nếu hệ véc tơ $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ là độc lập tuyến tính và $u = c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_kv_k$ thì cách viết này là duy nhất.

5) Giả sử hệ véc tơ $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ là độc lập tuyến tính. Khi đó hệ véc tơ $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, u\}$ là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi u là tổ hợp tuyến của các véc tơ $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

Chương 2. Không gian véc tơ

2.4.1 Hệ con độc lập tuyến tính tối đại

Định nghĩa

Trong không gian véc tơ V cho hệ véc tơ S. Tập con S' của S được gọi là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S nếu nó thỏa mãn hai điều kiện sau:

1) S' là độc lập tuyến tính.
2) Nếu thêm bất kì véc tơ nào của S vào S' thì ta có hệ véc tơ phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ 13. Tìm một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ véc tơ $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, trong đó

$$u_1 = (3, 1, 4),\ u_2 = (2, -3, 5),\ u_3 = (5, -2, 9),\ u_4 = (1, 4, -1).$$

Định lý 2.5

1) Nếu S' là một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ véc tơ S thì mọi véc tơ của S là tổ hợp tuyến tính của S'.
2) Giả sử $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ là hệ con độc lập tuyến tính của một hệ hữu hạn véc tơ S. Khi đó ta có thể bổ sung thêm để được một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S chứa $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$.

2.4.2 Hạng của một hệ hữu hạn các véc tơ

Định lý 2.6

Cho $R = \{u_1, \ldots, u_k\}$ và $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là hai hệ véc tơ của không gian véc tơ V. Nếu S là độc lập tuyến tính và mỗi véc tơ của S là một tổ hợp tuyến tính của R thì $n \leq k$.

Định lý 2.7

Trong không gian véc tơ V cho hệ hữu hạn véc tơ S. Khi đó mọi hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S đều có số véc tơ bằng nhau.

Định nghĩa

- Trong không gian véc tơ V cho hệ hữu hạn véc tơ S. Hạng của S, kí hiệu $r(S)$, là số các véc tơ trong một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S.
- Quy ước hệ chỉ gồm một véc tơ không có hạng là 0.

Ví dụ 14. Tìm hạng của hệ véc tơ $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, trong đó

$$u_1 = (3, 1, 4),\; u_2 = (2, -3, 5),\; u_3 = (5, -2, 9),\; u_4 = (1, 4, -1).$$

Chương 2. Không gian véc tơ

Định nghĩa

Hệ véc tơ S của không gian véc tơ V được gọi là một cơ sở của V nếu S là một hệ sinh của V và S độc lập tuyến tính.

Ví dụ 15. Trong $\mathbb{R}^n$ xét hệ véc tơ $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, trong đó

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

Ta có

- B là một hệ sinh của $\mathbb{R}^n$.
- B độc lập tuyến tính.

Do đó B là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Cơ sở này được gọi là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$.

Ví dụ 16. Tìm một cơ sở của không gian véc tơ con sau của $\mathbb{R}^4$.

$$W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 |\ c = a - b, d = a + b\}$$

Định lý 2.8

Giả sử $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là một hệ véc tơ của không gian véc tơ V. Các khẳng định sau là tương đương:

1) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là một cơ sở của V.
2) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của V.
3) Mọi véc tơ $v \in V$ có biểu diễn duy nhất

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n;\ c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Định lý 2.9

Giả sử V là một không gian véc tơ hữu hạn sinh và $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ là hệ véc tơ độc lập tuyến tính của V. Khi đó ta có thể bổ sung thêm để được hệ $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+m}\}$ là một cơ sở của V.

Hệ quả. Mọi không gian hữu hạn sinh đều tồn tại cơ sở.

Định lý 2.10

Số véc tơ trong mọi cơ sở của không gian véc tơ V đều bằng nhau.

Định nghĩa

- Số véc tơ trong một cơ sở của không gian véc tơ V được gọi là số chiều của V, ký hiệu $\dim V$.
- Quy ước $\dim \{\mathbf{0}\} = 0$.
- Không gian véc tơ V được gọi là hữu hạn chiều nếu $V = \{\mathbf{0}\}$ hoặc V có một cơ sở gồm một số hữu hạn các véc tơ.

Chú ý: $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Ví dụ 17. Chứng minh rằng $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ là một cơ sở của $\mathbf{P}_n$ (cơ sở này được gọi là cơ sở chính tắc của $\mathbf{P}_n$). Tính $\dim \mathbf{P}_n$.

Định lý 2.11

Giả sử V là một không gian véc tơ hữu chiều và $S = \{v_1, ..., v_m\}$ là một hệ véc tơ của V. Khi đó

1) Nếu S độc lập tuyến tính thì $m \leq \dim V$.
2) Nếu S là hệ sinh của V thì $m \geq \dim V$.
3) Nếu $m = \dim V$ thì S độc lập tuyến tính khi và chỉ khi S là hệ sinh của V.

Chú ý: Nếu V là không gian véc tơ n chiều và S là một hệ gồm n véc tơ của V thì

S là cơ sở của V $\Leftrightarrow$ S độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow$ S là hệ sinh của V.

Định lý 2.12

Giả sử W_1, W_2 là các không gian con hữu hạn chiều của không gian véc tơ V. Khi đó $W_1 + W_2$ có số chiều hữu hạn và

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2),$$
$$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2.$$

Định lý 2.13

Giả sử S là một hệ hữu hạn véc tơ của không gian véc tơ V. Khi đó

1) $r(S) = \dim(\text{span } S)$.
2) Gọi S' là hệ véc tơ nhận được từ S bởi thực hiện một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp sau lên hệ S:
   - Đổi chỗ hai véc tơ của S.
   - Nhân một véc tơ của S với một số khác 0.
   - Cộng vào một véc tơ của S một véc tơ khác của S đã nhân với một số.

   Khi đó $\text{span } S = \text{span } S'$, do đó $r(S) = r(S')$.

2.5.3 Tọa độ của một véc tơ

Định nghĩa

Giả sử $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là một cơ sở của không gian véc tơ V. Khi đó mỗi $u \in V$ có biểu diễn duy nhất:

$$u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n;\ c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

$(u)_B = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ được gọi là tọa độ của véc tơ u trong cơ sở B.

Ví dụ 18. Trong $\mathbf{P}_2$ cho hệ véc tơ

$$S = \{x^2 + x, x^2 + 1, x\}$$

a) Chứng minh rằng S là một cơ sở của $\mathbf{P}_2$.

b) Tìm tọa độ của véc tơ $p(x) = x^2 + 2x + 3$ trong cơ sở S.