HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

o0o

Chapter 6: Không gian véc tơ Euclide và dạng toàn phương

ĐẠI SỐ

Bộ môn Toán, Khoa Cơ bản 1

Hà Nội - 2023

Chapter 6: Không gian véc tơ Euclide và dạng toàn phương

Chapter 6: Không gian véc tơ Euclide và dạng toàn phương

6.1.1 Định nghĩa dạng song tuyến tính

Định nghĩa

Một dạng song tuyến tính trên không gian véc tơ V là một ánh xạ $\eta : V \times V \to \mathbb{R}$ thỏa mãn hai điều kiện sau với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ và mọi $u_1, u_2, u, v, v_1, v_2 \in V$,

(i) $\eta(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha\eta(u_1, v) + \beta\eta(u_2, v)$,

(ii) $\eta(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha\eta(u, v_1) + \beta\eta(u, v_2)$.

Ví dụ 1. Ánh xạ $\eta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\eta(u, v) = x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_1 + 5x_2y_2,$$

trong đó $u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, là một dạng song tuyến tính trên $\mathbb{R}^2$.

Chứng minh:

Với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ và mọi $u_1 = (\hat{x}_1, \hat{x}_2), u_2 = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2), v_1 = (\hat{y}_1, \hat{y}_2), v_2 = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ ta có

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = (\alpha \hat{x}_1 + \beta \tilde{x}_1, \alpha \hat{x}_2 + \beta \tilde{x}_2),$$

do đó

$$
\begin{aligned}
&\eta(\alpha u_1 + \beta u_2, v)\\
&= (\alpha\hat{x}_1 + \beta\tilde{x}_1)y_1 - 3(\alpha\hat{x}_1 + \beta\tilde{x}_1)y_2 + (\alpha\hat{x}_2 + \beta\tilde{x}_2)y_1 + 5(\alpha\hat{x}_2 + \beta\tilde{x}_2)y_2\\
&= \alpha(\hat{x}_1 y_1 - 3\hat{x}_1 y_2 + \hat{x}_2 y_1 + 5\hat{x}_2 y_2) + \beta(\tilde{x}_1 y_1 - 3\tilde{x}_1 y_2 + \tilde{x}_2 y_1 + 5\tilde{x}_2 y_2)\\
&= \alpha\eta(u_1, v) + \beta\eta(u_2, v).
\end{aligned}
$$

Tương tự, $\alpha v_1 + \beta v_2 = (\alpha\hat{y}_1 + \beta\tilde{y}_1, \alpha\hat{y}_2 + \beta\tilde{y}_2)$, do đó

$$
\begin{aligned}
&\eta(u, \alpha v_1 + \beta v_2)\\
&= x_1(\alpha\hat{y}_1 + \beta\tilde{y}_1) - 3x_1(\alpha\hat{y}_2 + \beta\tilde{y}_2) + x_2(\alpha\hat{y}_1 + \beta\tilde{y}_1) + 5x_2(\alpha\hat{y}_2 + \beta\tilde{y}_2)\\
&= \alpha(x_1\hat{y}_1 - 3x_1\hat{y}_2 + x_2\hat{y}_1 + 5x_2\hat{y}_2) + \beta(x_1\tilde{y}_1 - 3x_1\tilde{y}_2 + x_2\tilde{y}_1 + 5x_2\tilde{y}_2)\\
&= \alpha\eta(u, v_1) + \beta\eta(u, v_2)
\end{aligned}
$$

Vậy η là một dạng song tuyến tính trên $\mathbb{R}^2$.

Định nghĩa

Dạng song tuyến tính η trên V được gọi là

(i) đối xứng nếu $\eta(u, v) = \eta(v, u)$ với mọi $u, v \in V$,

(ii) không âm nếu $\eta(u, u) \geq 0$ với mọi $u \in V$,

(iii) xác định nếu $\eta(u, u) = 0$ khi và chỉ khi $u = 0$,

(iv) xác định dương nếu $\eta(u, u) > 0$ với mọi $u \neq 0$.

6.1.2 Ma trận và biểu thức tọa độ của dạng song tuyến tính

- Giả sử η là một dạng song tuyến tính trên không gian véc tơ V và $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở của V.
- Ma trận $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, trong đó $a_{ij} = \eta(e_i, e_j)$, được gọi là ma trận của η trong cơ sở B, ký hiệu $[\eta]_B$.
- Giả sử $u, v \in V$ và

$$u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n, v = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n.$$

Khi đó

$$\eta(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

Công thức này được gọi là biểu thức tọa độ của η trong cơ sở B.

- Biểu thức tọa độ của η có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\eta(u, v) = [u]_B^t [\eta]_B [v]_B.$$

Ví dụ 2. Cho dạng song tuyến tính η trên không gian véc tơ $\mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$\eta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - 3x_1y_2 + y_1y_2.$$

a) Tìm ma trận của η trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

b) Tìm ma trận của η trong cơ sở $\{v_1 = (2, 1); v_2 = (1, -1)\}$.

Chú ý: Nếu η là dạng song tuyến tính trên không gian véc tơ $\mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$\eta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = ax_1x_2 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dy_1y_2$$

thì ma trận của η trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ là $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

6.1.3 Ma trận của dạng song tuyến tính trong các cơ sở khác nhau

Định lý 6.1

Giả sử B, B' là các cơ sở của không gian véc tơ V và T là ma trận chuyển từ cơ sở B sang cơ sở B'. Khi đó với mọi dạng song tuyến tính η trên V,

$$[\eta]_{B'} = T^t[\eta]_B T$$

Chapter 6: Không gian véc tơ Euclide và dạng toàn phương

Định nghĩa

Cho η là một dạng song tuyến tính trên V. Ánh xạ $Q : V \to \mathbb{R}$ được xác định bởi $Q(u) = \eta(u, u)$ được gọi là một dạng toàn phương trên V.

Giả sử $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở của V và $u \in V$, $u = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. Khi đó biểu thức tọa độ của dạng toàn phương là

$$Q(u) = \eta(u, u) = \sum_{i,j=1}^{n} \eta(e_i, e_j) x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Nhận xét: Mọi dạng toàn phương có biểu thức tọa độ là một đa thức đẳng cấp bậc hai.

Ví dụ 3. Cho dạng song tuyến tính $\eta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$\eta(u, v) = 2x_1y_1 - 5x_1y_2 + x_2y_1 + 7x_2y_2,$$

trong đó $u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2)$.

Dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^2$ tương ứng là $Q(u) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_2^2$.

Ta có thể xây dựng các dạng song tuyến tính khác nhau xác định cùng một dạng toàn phương, chẳng hạn

$$\begin{aligned}
\eta_1(u, v) &= 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 7x_2y_2, \\
\eta_2(u, v) &= 2x_1y_1 + 2x_1y_2 - 6x_2y_1 + 7x_2y_2, \\
\eta_3(u, v) &= 2x_1y_1 - 4x_2y_1 + 7x_2y_2,
\end{aligned}$$

$$\eta_1(u, u) = \eta_2(u, u) = \eta_3(u, u) = \eta(u, u) = Q(u).$$

- Với mỗi dạng toàn phương $Q : V \to \mathbb{R}$, có duy nhất một dạng song tuyến tính đối xứng $\eta : V \times V \to \mathbb{R}$ sao cho $Q(u) = \eta(u, u)$. Dạng song tuyến tính đối xứng này được gọi là dạng cực của Q.
- Dạng cực của Q được xác định bởi công thức:

$$\eta(u, v) = \frac{1}{2}(Q(u + v) - Q(u) - Q(v)).$$

6.2.2 Ma trận của dạng toàn phương

Ma trận của dạng cực η của Q trong cơ sở B cũng được gọi là ma trận của dạng toàn phương Q trong cơ sở B, ký hiệu $[Q]_B$.

$$[Q]_B = [a_{ij}]_{n\times n}, a_{ij} = \eta(e_i, e_j) = \eta(e_j, e_i) = a_{ji}.$$

Nhận xét: Ma trận của dạng toàn phương là ma trận đối xứng.

Ví dụ 4. Tìm ma trận của dạng toàn phương

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_3 + 4x_3^2 + 6x_2x_3$$

trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Chú ý:

1) Nếu dạng toàn phương $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2$$

thì ma trận của Q trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ là $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$.

2) Nếu dạng toàn phương $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$Q(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

thì ma trận của Q trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

3) Nếu A và A' lần lượt là ma trận của Q trong cơ sở B và B' của không gian véc tơ V, T là ma trận chuyển từ cơ sở B sang B' thì

$$A' = T^t AT.$$

Ví dụ 5. Cho dạng toàn phương $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$Q(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2xy.$$

a) Viết ma trận của dạng toàn phương Q trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

b) Viết ma trận của dạng toàn phương Q trong cơ sở $\{e_1' = (1, 0); e_2' = (-3, 1)\}$.

6.2.3 Biểu thức tọa độ dạng chính tắc của một dạng toàn phương

Cho dạng toàn phương $Q : V \to \mathbb{R}$. Nếu tồn tại một cơ sở $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ của V sao cho với mọi $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$,

$$Q(u) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

thì biểu thức này được gọi là dạng chính tắc của Q.

Bài toán

Giả sử $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ là một cơ sở của không gian véc tơ V. Cho dạng toàn phương Q được xác định bởi

$$Q(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Tìm một cơ sở của V để biểu thức tọa độ của Q trong cơ sở này có dạng chính tắc.

Phương pháp Lagrange

Trường hợp 1: Tồn tại $a_{ii} \neq 0$, giả sử $a_{11} \neq 0$.

$$\begin{aligned} Q(u) &= a_{11}\left(x_1^2 + 2x_1\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i\right) + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j \\ &= a_{11}\left(x_1 + \sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i\right)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j - a_{11}\left(\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i\right)^2 \\ &= a_{11}\left(x_1 + \sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i\right)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a'_{ij}x_ix_j. \end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} y_1 & := x_1 + \displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i \\ y_j & := x_j, j = 2, \ldots, n. \end{cases}$ thì $Q(u) = a_{11}y_1^2 + \displaystyle\sum_{i,j=2}^{n} a'_{ij}y_iy_j.$

Trường hợp 2: Với mọi $i = 1, \ldots, n$, $a_{ii} = 0$ và tồn tại $a_{ij} \neq 0$, chẳng hạn $a_{12} \neq 0$.

Đặt $\begin{cases} x_1 & = y_1 + y_2 \\ x_2 & = y_1 - y_2 \\ x_j & = y_j, j = 3, \ldots, n. \end{cases}$ thì

$$Q(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{n} a'_{ij} y_i y_j.$$

$a'_{11} = a_{12} \neq 0$, do đó ta có thể đưa về trường hợp 1.

Tiếp tục quá trình trên, giả sử cuối cùng ta nhận được

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

và

$$Q(u) = \lambda_1 z_1^2 + \cdots + \lambda_n z_n^2.$$

Cơ sở cần tìm để biểu thức tọa độ của Q trong cơ sở này có dạng chính tắc là

$$\{e'_1 = p_{11}e_1 + \cdots + p_{n1}e_n, \dots, e'_n = p_{1n}e_1 + \cdots + p_{nn}e_n\}.$$

Ví dụ 6. Cho dạng toàn phương $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ sao cho biểu thức tọa độ của Q trong cơ sở này có dạng chính tắc.

Phương pháp Jacobi

Giả sử $A = [Q]_B = [a_{ij}]_{n\times n}$ và mọi định thức con chính của A đều khác 0, tức là

$$D_1 = a_{11} \neq 0, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \ldots, D_n = \det A \neq 0.$$

Khi đó với mỗi $j = 1, 2, \ldots, n$, hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j & = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jj}x_j & = 1 \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất, ký hiệu $(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{jj})$.

$$\alpha_{jj} = \frac{D_{j-1}}{D_j} \neq 0, \forall j = 1, \ldots, n \text{ (quy ước } D_0 = 1).$$

Xét hệ véc tơ $B' = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, trong đó

$$\begin{cases} f_1 & = \alpha_{11} e_1 \\ f_2 & = \alpha_{12} e_1 + \alpha_{22} e_2 \\ \dots & \dots\dots\dots \\ f_n & = \alpha_{1n} e_1 + \alpha_{2n} e_2 + \dots + \alpha_{nn} e_n \end{cases}$$

B' là một cơ sở của V và biểu thức tọa độ của Q trong cơ sở B' có dạng chính tắc

$$Q(u) = \frac{1}{D_1} y_1^2 + \frac{D_1}{D_2} y_2^2 + \dots + \frac{D_{n-1}}{D_n} y_n^2,$$

trong đó $u = y_1 f_1 + \dots + y_n f_n$.

Ví dụ 7. Cho dạng toàn phương $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$Q(x, y, z) = x^2 - 4y^2 + z^2 - 4xy + 2xz + 2yz$$

Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ sao cho biểu thức tọa độ của Q trong cơ sở này có dạng chính tắc.

6.2.6 Luật quán tính

Định lý 6.2 (Sylvester-Jacobi)

Nếu dạng toàn phương Q được viết dưới dạng chính tắc, thì số các hệ số dương và số các hệ số âm là những bất biến của dạng đó, tức là không phụ thuộc vào việc chọn cơ sở.

Số các hệ số dương được gọi là chỉ số quán tính dương, số các hệ số âm được gọi là chỉ số quán tính âm của dạng toàn phương.

Giả sử (p, q) là cặp chỉ số quán tính dương và âm của dạng toàn phương $Q : V \to \mathbb{R}$. Khi đó

- $p + q$ được gọi là hạng của Q, ký hiệu $r(Q)$.
- Nếu $p = \dim V$ thì Q được gọi là xác định dương.
- Nếu $q = \dim V$ thì Q được gọi là xác định âm.

Nhận xét:

- Q xác định dương khi và chỉ khi $Q(u) > 0$, với mọi $u \neq 0$.
- Q xác định âm khi và chỉ khi $Q(u) < 0$, với mọi $u \neq 0$.

Định lý 6.3 (Sylvester)

Giả sử dạng toàn phương $Q : V \to \mathbb{R}$ có ma trận là A trong một cơ sở nào đó của V. Khi đó

- Q xác định dương khi và chỉ khi các định thức con chính của A luôn dương.
- Q xác định âm khi và chỉ khi các định thức con chính cấp chẵn của A dương và các định thức con chính cấp lẻ của A âm.

Ví dụ 8. Tìm giá trị của tham số m để dạng toàn phương sau xác định dương.

$$Q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2mxy + 2xz.$$

Chapter 6: Không gian véc tơ Euclide và dạng toàn phương

6.3.1 Định nghĩa tích vô hướng

Định nghĩa

- Một dạng song tuyến tính đối xứng xác định dương được gọi là một tích vô hướng. Tích vô hướng được ký hiệu bởi $\langle ., . \rangle$.
- Một không gian véc tơ có tích vô hướng được gọi là không gian véc tơ Euclide.

Ví dụ 9. $\mathbb{R}^n$ là không gian véc tơ Euclide với tích vô hướng được xác định bởi

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

trong đó $u = (x_1, \ldots, x_n), v = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Ví dụ 10. Tích vô hướng có trọng số trên $\mathbb{R}^n$ với các trọng số $c_1, \dots, c_n > 0$ được định nghĩa là

$$\langle u, v \rangle = c_1 x_1 y_1 + \cdots + c_n x_n y_n,$$

trong đó $u = (x_1, \dots, x_n), v = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Ví dụ 11. Cho $C_{[a,b]}$ là không gian véc tơ các hàm số liên tục trên $[a, b]$. Chứng minh rằng

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

xác định một tích vô hướng trên $C_{[a,b]}$.

Định nghĩa

Cho V là một không gian véc tơ Euclide. Chuẩn hay môđun của một véc tơ $v \in V$ được xác định bởi

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Nếu $\|v\| = 1$ thì v được gọi là véc tơ đơn vị.

Chú ý: Nếu $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ thì

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Ví dụ 12. Cho tích vô hướng trên không gian véc tơ $\mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$\eta(u, v) = x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5y_1y_2,$$

trong đó $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Tính $\|v\|$ với $v = (1, 2)$.

Định lý 6.4 (Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz)

Cho V là một không gian véc tơ Euclide. Khi đó với mọi $u, v \in V$,

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi u và v phụ thuộc tuyến tính.

Nhận xét: Nếu $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ là các số thực thì

$$(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2).$$

Định nghĩa

Cho V là một không gian véc tơ Euclide.

(i) Hai véc tơ $u, v \in V$ được gọi là trực giao với nhau, ký hiệu $u \perp v$, nếu
$$\langle u, v\rangle = 0.$$

(ii) Hệ các véc tơ S của V được gọi là hệ trực giao nếu hai véc tơ bất kỳ của S đều trực giao nhau.

(iii) Một hệ trực giao mà mọi véc tơ của hệ đều là véc tơ đơn vị được gọi là hệ trực chuẩn.

Nhận xét:

- Hệ $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là hệ trực giao khi và chỉ khi
$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \text{ với mọi } i \neq j.$$
- Hệ $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là hệ trực chuẩn khi và chỉ khi
$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \text{ với mọi } i \neq j \text{ và}$$
$$\|v_i\| = 1 \text{ với mọi } i = 1, \ldots, n.$$

Định lý 6.5

Nếu S là hệ trực giao và mọi véc tơ của hệ đều khác véc tơ $\mathbf{0}$ thì S độc lập tuyến tính.

Ví dụ 13. Cho $S = \{(4,-1,1),(-1,0,4),(-4,-17,-1)\}$ là một hệ véc tơ trong $\mathbb{R}^3$. Ta có

a) S là hệ trực giao,

b) S không là hệ trực chuẩn,

c) S là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Giải.

a) Đặt $v_1 = (4, -1, 1), v_2 = (-1, 0, 4), v_3 = (-4, -17, -1)$, ta có $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ và

$$\begin{aligned}
\langle v_1, v_2\rangle &= 4 \times (-1) + (-1) \times 0 + 1 \times 4 = 0,\\
\langle v_1, v_3\rangle &= 4 \times (-4) + (-1) \times (-17) + 1 \times (-1) = 0,\\
\langle v_2, v_3\rangle &= (-1) \times (-4) + 0 \times (-17) + 4 \times (-1) = 0.
\end{aligned}$$

Do đó S là hệ trực giao.

b) Vì $\|v_1\| = \sqrt{\langle v_1, v_1\rangle} = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{18} \neq 1$ nên S không là hệ trực chuẩn.

c) S là hệ trực giao và v_1, v_2, v_3 khác véc tơ $\mathbf{0}$, do đó S độc lập tuyến tính.
Mà $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ nên S là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Định lý 6.6 (Quá trình trực chuẩn hóa Gram-Schmidt)

Cho $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ là một hệ véc tơ độc lập tuyến tính của không gian véc tơ Euclide V. Ta xây dựng một hệ trực chuẩn như sau:

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}.$$

$$\overline{v}_2 = u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1,\ v_2 = \frac{\overline{v}_2}{\|\overline{v}_2\|}.$$

$$\overline{v}_3 = u_3 - \langle u_3, v_1\rangle v_1 - \langle u_3, v_2\rangle v_2,\ v_3 = \frac{\overline{v}_3}{\|\overline{v}_3\|}.$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\overline{v}_n = u_n - \langle u_n, v_1\rangle v_1 - \langle u_n, v_2\rangle v_2 - \cdots - \langle u_n, v_{n-1}\rangle v_{n-1},\ v_n = \frac{\overline{v}_n}{\|\overline{v}_n\|}.$$

Khi đó $S' = \{v_1, \ldots, v_n\}$ là một hệ trực chuẩn và

$$\mathrm{span} S = \mathrm{span} S'$$

Ví dụ 14. Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt hệ véc tơ

$$S = \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, -1, 1), u_3 = (1, 1, 0)\}.$$

Giải.

$$+)\|u_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \Rightarrow v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$+)\overline{v}_2 = u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1,$$

$$\langle u_2, v_1\rangle = 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \overline{v}_2 = (1, -1, 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

$$\|\overline{v}_2\| = \frac{2\sqrt{6}}{3} \Rightarrow v_2 = \frac{\overline{v}_2}{\|\overline{v}_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

$$+)\overline{v}_3 = u_3 - \langle u_3, v_1\rangle v_1 - \langle u_3, v_2\rangle v_2$$
$$= (1,1,0) - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$$
$$\|\overline{v}_3\| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow v_3 = \frac{\overline{v}_3}{\|\overline{v}_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Ta có

$$S' = \left\{v_1 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right), v_2 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{6}}, -\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}\right), v_3 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

là hệ véc tơ trực chuẩn hoá của hệ véc tơ S.

Định nghĩa

Cho V là một không gian véc tơ Euclide. Hệ véc tơ S của V được gọi là một cơ sở trực chuẩn của V nếu S là cơ sở của V và S là hệ trực chuẩn.

Nhận xét: Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$ là cơ sở trực chuẩn.

Định lý 6.7

Giả sử $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của không gian véc tơ Euclide V. Khi đó với mọi $u, v \in V$,

(i) $u = \langle u, e_1\rangle e_1 + \langle u, e_2\rangle e_2 + \cdots + \langle u, e_n\rangle e_n$,

(ii) $\langle u, v\rangle = \langle u, e_1\rangle\langle v, e_1\rangle + \langle u, e_2\rangle\langle v, e_2\rangle + \cdots + \langle u, e_n\rangle\langle v, e_n\rangle$,

(iii) $\|u\|^2 = \langle u, e_1\rangle^2 + \langle u, e_2\rangle^2 + \cdots + \langle u, e_n\rangle^2$

Chú ý: Nếu $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ là một cơ sở trực giao của không gian véc tơ Euclide V thì $\forall u \in V$,

$$u = \frac{\langle u, e_1\rangle}{\|e_1\|^2} e_1 + \frac{\langle u, e_2\rangle}{\|e_2\|^2} e_2 + \ldots + \frac{\langle u, e_n\rangle}{\|e_n\|^2} e_n.$$

6.3.4 Phần bù trực giao

Định nghĩa

Cho S là một tập con của không gian véc tơ Euclide V.

- Véc tơ $v \in V$ được gọi là trực giao với S, ký hiệu $v \perp S$, nếu v trực giao với mọi véc tơ của S. Vậy

$$v \perp S \Leftrightarrow \forall u \in S, \langle v, u \rangle = 0.$$

- Phần bù trực giao của S, ký hiệu $S^{\perp}$, là tập hợp

$$S^{\perp} = \{ v \in V |\ v \perp S \ \} = \{ v \in V |\ \forall u \in S, \langle v, u \rangle = 0 \ \}.$$

Định lý 6.8

Cho S là một tập con của không gian véc tơ Euclide V. Khi đó

(i) $v \perp S \Leftrightarrow v \perp \text{span}S$.

(ii) $S^{\perp}$ là không gian véc tơ con của V và $S^{\perp} = (\text{span}S)^{\perp}$.

(iii) Với mọi không gian véc tơ con W của V,

$$V = W \oplus W^{\perp} \text{ và } (W^{\perp})^{\perp} = W.$$

Hệ quả.

$$V = (\text{span}S) \oplus S^{\perp}, (S^{\perp})^{\perp} = \text{span}S$$

Định lý 6.9

Trong không gian véc tơ Euclide $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng thông thường, xét hệ véc tơ $S = \{u_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, u_m = (a_{m1}, \dots, a_{mn})\}$. Ta có $S^\perp$ là tập nghiệm của hệ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = 0 \end{cases}$$

Ví dụ 15. Giả sử W là một không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^4$ được sinh bởi các véc tơ

$$\{v_1 = (-1, 1, 1, 2), v_2 = (2, -1, 2, 4)\}.$$

Tìm một cơ sở và số chiều của phần bù trực giao $W^\perp$.

Chapter 6: Không gian véc tơ Euclide và dạng toàn phương

6.4.1 Ma trận trực giao

Định nghĩa

Ma trận vuông A được gọi là ma trận trực giao nếu $A^t A = I$.

Nhận xét:

- A là ma trận trực giao khi và chỉ khi A khả nghịch và $A^{-1} = A^t$.
- $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ là ma trận trực giao khi và chỉ khi

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}.$$

Định lý 6.10

Cho ma trận vuông A. Các khẳng định sau là tương đương:

(i) A là ma trận trực giao.

(ii) Các véc tơ hàng của A tạo thành hệ trực chuẩn.

(iii) Các véc tơ cột của A tạo thành hệ trực chuẩn.

Ví dụ 16. $A = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ là ma trận trực giao.

Định lý 6.11

Giả sử B và B' là các cơ sở trực chuẩn của không gian véc tơ Euclide V và P là ma trận chuyển từ cơ sở B sang cơ sở B'. Khi đó P là ma trận trực giao.

Định nghĩa

Ma trận vuông A được gọi là chéo hóa trực giao được nếu tồn tại ma trận trực giao P sao cho P^tAP là ma trận chéo.

Định lý 6.12

Ma trận vuông A chéo hóa trực giao được khi và chỉ khi A là ma trận đối xứng.

Bài toán

Cho ma trận đối xứng A. Tìm một ma trận trực giao P sao cho P^tAP là ma trận chéo.

Thuật toán chéo hóa trực giao:

1. Tìm các giá trị riêng của A.
2. Với mỗi giá trị riêng λ tìm được ở bước 1, tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian riêng ứng với giá trị riêng λ.
3. P là ma trận có các cột là các véc tơ riêng tìm được ở bước 2. Ma trận $P^tAP = D$ là ma trận chéo, các phần tử trên đường chéo chính của D là các giá trị riêng của A.

Ví dụ 17. Chéo hóa trực giao ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Giải.

- Đa thức đặc trưng của A là

$$\mathcal{P}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 8-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 5-\lambda & 9-\lambda \\ 2 & 4 & 9-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -2 & 0 \\ -4 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 4 & 9-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (9-\lambda)(-1)^6 \begin{vmatrix} 8-\lambda & -2 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (9-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda) = -\lambda(9-\lambda)^2.$$

- $\mathcal{P}_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ hoặc $\lambda = 9$, do đó các giá trị riêng của A là $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 9$.

- Với $\lambda_1 = 0, v = (x_1, x_2, x_3) \neq \mathbf{0}$ là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng khi và chỉ khi

$$(A - \lambda_1 I)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Ta có

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & 0 \\ -2 & 5 & 4 & 0 \\ 8 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & -18 & -18 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = -5x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2}x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

Do đó

$$v = (x_1, x_2, x_3) \in V_{\lambda_1} \Leftrightarrow v = \left(-\frac{1}{2}x_3, -x_3, x_3\right)$$

$$\Leftrightarrow v = -\frac{1}{2}x_3(1, 2, -2) \Rightarrow V_{\lambda_1} = \text{span}\{(1, 2, -2)\}.$$

Chọn $v_1 = (1, 2, -2)$, ta có $\|v_1\| = 3$. Chuẩn hóa véc tơ v_1 ta được

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

- Với $\lambda_2 = 9, v = (x_1, x_2, x_3) \neq \mathbf{0}$ là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 9$ khi và chỉ khi

$$(A - \lambda_2 I)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2x_2 + 2x_3.$$

Do đó

$$v = (x_1, x_2, x_3) \in V_{\lambda_2} \Leftrightarrow v = (-2x_2 + 2x_3, x_2, x_3)$$
$$\Leftrightarrow v = (-2x_2, x_2, 0) + (2x_3, 0, x_3) \Leftrightarrow v = x_2(-2, 1, 0) + x_3(2, 0, 1)$$
$$\Rightarrow V_{\lambda_2} = \operatorname{span}\{(-2, 1, 0), (2, 0, 1)\}.$$

Chọn $v_2 = (-2, 1, 0), v_3 = (2, 0, 1)$, ta có $S = \{v_2, v_3\}$ là một cơ sở của V_{λ_2}.

Trực chuẩn hóa hệ véc tơ S:

$$\|v_2\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5} \Rightarrow u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right).$$

$$\overline{u}_3 = v_3 - \langle v_3, u_2\rangle u_2 = (2,0,1) - \frac{-4}{\sqrt{5}}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)$$

$$\|\overline{u}_3\| = \frac{3\sqrt{5}}{5} \Rightarrow u_3 = \frac{\overline{u}_3}{\|\overline{u}_3\|} = \left(\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}\right).$$

$\Rightarrow \{u_2, u_3\}$ là một cơ sở trực chuẩn của V_{λ_2}

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$ là ma trận trực giao và

$$P^t A P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

6.4.3 Đưa biểu thức tọa độ của dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng chéo hóa trực giao

- Cho B là cơ sở trực chuẩn của không gian véc tơ Euclide V. Giả sử ma trận của dạng toàn phương Q trong cơ sở B là A. Ta tìm được ma trận trực giao P sao cho $P^tAP = D$ là ma trận chéo.
- Q có thể biểu diễn dưới dạng

$$Q(u) = X^tAX, \text{ trong đó } [u]_B = X.$$

- Đặt $X = PY$, ta có P là ma trận chuyển từ cơ sở B sang cơ sở trực chuẩn $B' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$, trong đó tọa độ của e'_j trong cơ sở B là cột thứ j của P.
- Biểu thức tọa độ của Q trong cơ sở B' có dạng chính tắc

$$Q(u) = Y^t(P^tAP)Y.$$

Ví dụ 18. Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc.

$$Q(x,y,z) = 8x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy + 4xz + 8yz$$

- Ma trận của Q trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

- Từ ví dụ 17, ta có biểu thức tọa độ của Q trong cơ sở

$$\left\{ e_1' = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right), e_2' = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right), e_3' = \left(\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}\right) \right\}$$

là

$$Q(u) = 9Y^2 + 9Z^2, u = (x,y,z) = Xe_1' + Ye_2' + Ze_3'.$$

Bài tập chương 6

6.2, 6.3, 6.5, 6.6, 6.11, 6.12, 6.16, 6.18, 6.20, 6.22