# CHƯƠNG II: BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN Z

# 2.1. BIẾN ĐỔI Z (ZT: Z TRANSFORM)

**2.1.1. Định nghĩa biến đổi z**

**Định nghĩa:** *Biến đổi z của một dãy x(n) được định nghĩa như sau:*

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

Ký hiệu bởi toán tử:

$$ZT\left[x(n)\right] = X(z)$$

$$x(n) \xrightarrow{ZT} X(z)$$

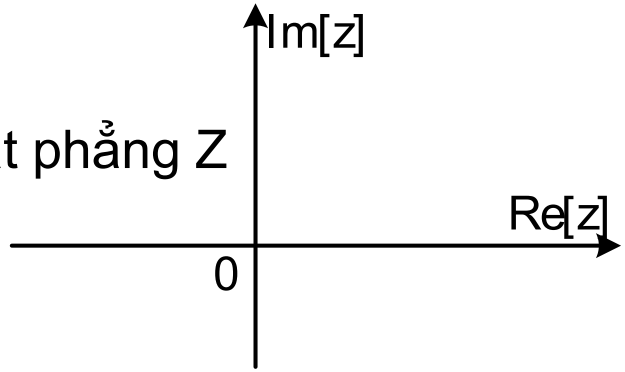
*Trong định nghĩa trên, nếu đổi cận n=0 ta có biến đổi z 1 phía:*

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

## Biểu diễn theo phần thực, phần ảo Re[z], Im[z]

z = Re[z] + j.Im[z]

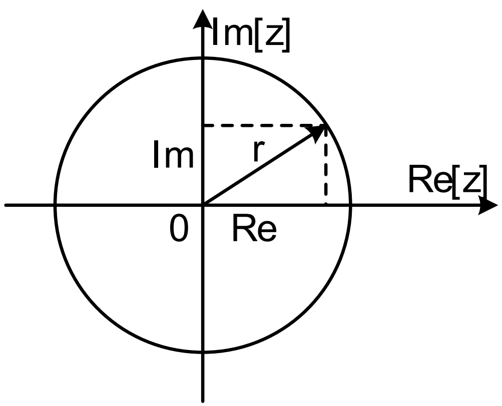
Mặt phẳng Z




## Biểu diễn theo tọa độ cực:

$$z = re^{j\omega} = r\left(\cos\omega + j\sin\omega\right) = r\cos\omega + jr\sin\omega = \mathrm{Re}\left[z\right] + j.\mathrm{Im}[z]$$

$\left|z\right| = r = 1$ ta có vòng tròn đơn vị.



# Ví dụ biến đổi z

**Tìm biến đổi z của:**

$$x_1(n) = \delta(n) \qquad x_2(n) = \delta(n-1) \qquad x_3(n) = \delta(n+1)$$

$$x_4(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \qquad x_5(n) = 2^n u(n)$$

**Giải:**

$$X_1(z) = ZT\left[x_1(n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = 1.z^0 = 1$$

$$X_2(z) = ZT\left[x_2(n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-1) z^{-n} = 1.z^{-1} = z^{-1}$$

$$X_3(z) = ZT\left[x_3(n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n+1) z^{-n} = 1.z^{1} = z$$

$$X_4(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n \qquad \left|\frac{1}{2} z^{-1}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > \frac{1}{2}$$

$$X_5(z) = ZT\left[x_5(n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1-2z^{-1}}$$

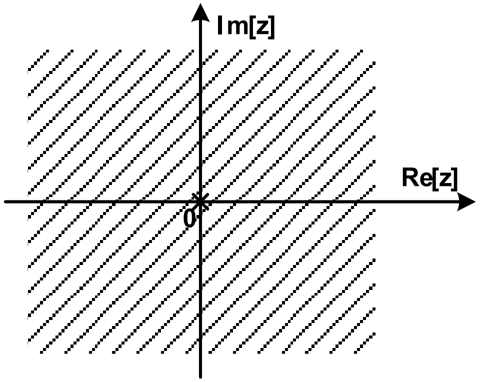
# 2.1.2. Miền hội tụ của biến đổi z

**Định nghĩa:**
Tập hợp tất cả các giá trị của z mà tại đó chuỗi $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$

hội tụ được gọi là miền hội tụ của biến đổi z.
**Ký hiệu:** RC: miền hội tụ (Region of Convergence)

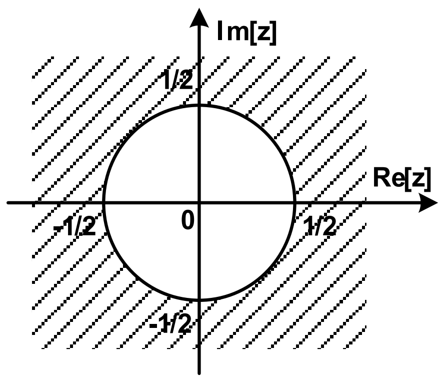
**Ví dụ:** Hãy tìm miền hội tụ của biến đổi z trong ví dụ trước:

$RC[X_1(z)]$ $RC[X_3(z)]$ Toàn bộ mặt phẳng z




$RC[X_2(z)]$ : Toàn bộ mặt phẳng z trừ gốc tọa độ z = 0

$RC[X_4(z)]$ : Ngoài vòng tròn bán kính ½




$RC[X_5(z)]$ : Ngoài vòng tròn bán kính 2

# 2.2. CỰC VÀ KHÔNG (POLE AND ZERO)

**2.2.1 Định nghĩa điểm không**

Trong biến đổi z nếu tại các điểm $z_{0r}$ mà tại đó X(z) triệt tiêu

$$X(z)\Big|_{z=z_{or}} = 0$$

thì $z_{0r}$ gọi là các điểm không của X(z).

**2.2.2. Định nghĩa điểm cực**

Nếu tại các điểm $z_{pk}$ mà tại đó X(z) không xác định được

$$X(z)\Big|_{z=z_{pk}} \to \infty$$

thì những điểm $z_{pk}$ này gọi là các điểm cực của X(z).

Ta có thể biểu diễn X(z) theo điểm cực, điểm không

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_M}{a_N} \frac{\prod_{r=1}^{M}(z - z_{0r})}{\prod_{k=1}^{N}(z - z_{pk})}$$

# 2.3. BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC (IZT: INVERSE Z TRANSFORM)

## 2.3.1. Định nghĩa biến đổi z ngược

$$\mathrm{IZT}\left[X(z)\right] = x(n) \qquad X(z) \xrightarrow{IZT} x(n)$$

Biến đổi z ngược được định nghĩa như sau:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z).z^{n-1}dz$$

$\oint_c$ - Đường cong kín đi qua gốc tọa độ.Tích phân đường đi theo chiều dương.

**Có 3 phương pháp để tìm tích phân đường này:**

1. Phương pháp thặng dư để tìm trực tiếp tích phân, cho chúng ta cách tìm cơ bản.
2. Khai triển thành chuỗi lũy thừa, tìm biến đổi z ngược cơ bản.
3. Khai triển thành các phân thức tối giản.

# 2.3.2. Phương pháp khai triển thành chuỗi lũy thừa

Ở phương pháp này, ta khai triển biến đổi z thành một chuỗi lũy thừa có dạng:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n z^{-n}$$

So sánh với định nghĩa:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad \Rightarrow x(n) \equiv \alpha_n$$

hệ số của chuỗi chính là các mẫu của tín hiệu x(n).

**Ví dụ:** Tìm biến đổi z ngược

$$X(z) = \frac{z}{z+2} = \frac{1}{1+2z^{-1}}$$

Thực hiện chia đa thức như sau:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 1 & 1+2z^{-1} \\ \cline{3-3}
- & \underline{1+2z^{-1}} & 1-2z^{-1}+4z^{-2}-8z^{-3}+16z^{-4}\ldots \\
 & -2z^{-1} & \\
- & \underline{-2z^{-1}-4z^{-2}} & \\
 & 4z^{-2} & \\
- & \underline{4z^{-2}+8z^{-3}} & \\
 & -8z^{-3} & \\
- & \underline{-8z^{-3}-16z^{-4}} & \\
 & 16z^{-4} \quad \ldots & 
\end{array}
$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-2z^{-1}\right)^n$$

$$x(n) = (-2)^n u(n)$$

# 2.3.3. Phương pháp khai triển thành các phân thức tối giản

Xét $$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Bậc của N(z) là M, bậc của D(z) là N.

**Trường hợp: M ≥ N**:

Để phân thức tối giản thì:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = S(z) + \frac{P(z)}{Q(z)}$$

với S(z) là phần nguyên. D(z) ≡ Q(z)

Bậc của S(z): M – N

$$S(z) = B_{M-N} z^{M-N} + B_{M-N-1} z^{M-N-1} + \ldots + B_1 z^1 + B_0$$

$$s(n) = B_{M-N}\delta\left[n + (M-N)\right] + B_{M-N-1}\delta\left[n + (M-N-1)\right] + \ldots + B_1\delta\left[n+1\right] + B_0\delta(n)$$

# 2.3.3. Phương pháp khai triển thành các phân thức tối giản (tt)

*** Trường hợp M < N:**

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \equiv \frac{P(z)}{Q(z)}$$

**Trường hợp 1:** X(z) chỉ có các cực đơn, $z_{pk}$ điểm cực của X(z), có N cực

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \qquad X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{z - z_{pk}}$$

Trong đó: $A_k = (z - z_{pk}) \left.\frac{P(z)}{Q(z)}\right|_{z=z_{pk}}$

**Trường hợp 2:** X(z) có một cực bội $z_{pl}$ bậc s, còn lại là các nghiệm $z_{pk}$ đơn

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N-s} \frac{A_k}{(z - z_{pk})} + \sum_{j=1}^{s} \frac{C_j}{(z - z_{pl})^j}$$

Trong đó:

$$A_k = (z - z_{pk}) \left.\frac{P(z)}{Q(z)}\right|_{z=z_{pk}} \qquad C_j = \frac{1}{(s-j)!} \frac{d^{s-j}}{dz^{s-j}} \left.\left[ (z - z_{pl})^s \frac{P(z)}{Q(z)} \right]\right|_{z=z_{pl}}$$

**Lưu ý:**

$$IZT\left[\frac{z}{(z - z_{pk})^{m+1}}\right] = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} z_{pk}^{n-m} u(n) \qquad |z| > |z_{pk}|$$

# 2.3.3. Phương pháp khai triển thành các phân thức tối giản (tt)

**Ví dụ:** Tìm biến đổi z của:

$$X(z) = \frac{z+2}{2z^2 - 7z + 3}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+2}{2\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-3)z} = \frac{A_1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)} + \frac{A_2}{z-3} + \frac{A_3}{z}$$

có 3 điểm cực: $z_{p1} = \frac{1}{2}$ $z_{p2} = 3$ $z_{p3} = 0$

$$A_1 = \cancel{\left(z-\frac{1}{2}\right)} \frac{z+2}{2\cancel{\left(z-\frac{1}{2}\right)}(z-3)z}\Bigg|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}+2}{2\left(\frac{1}{2}-3\right).\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{1\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{1}{2}} = -1$$

$$A_2 = \cancel{(z-3)} \frac{z+2}{2\left(z-\frac{1}{2}\right)\cancel{(z-3)}z}\Bigg|_{z=3} = \frac{3+2}{2\left(3-\frac{1}{2}\right).3} = \frac{5}{6.\frac{5}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$A_3 = \cancel{z} \frac{z+2}{2\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-3)\cancel{z}}\Bigg|_{z=0} = \frac{0+2}{2\left(-\frac{1}{2}\right)(-3)} = \frac{2}{3}$$

Vậy:

$$X(z) = -\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\frac{z}{z-3} + \frac{2}{3}$$

$$x(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{1}{3}3^n u(n) + \frac{2}{3}\delta(n)$$

# 2.4. CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI Z

| Miền n | Miền z | ROC |
|---|---|---|
| $x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$ | $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$ | $r_2<\|z\|<r_1$ |
| $ax_1(n)+bx_2(n)$ a,b là hằng số | $aX_1(z)+bX_2(z)$ | $ROC[X_1(z)]\cap ROC[X_2(z)]$ |
| $x(n-n_0)$ | $z^{-n_0}X(z)$ | $r_2<\|z\|<r_1$ |
| $a^n x(n)$ | $X(a^{-1}z)$ | $\|a\|r_2<\|z\|<\|a\|r_1$ |
| $nx(n)$ | $-z\frac{dX(z)}{dz}$ | $r_2<\|z\|<r_1$ |
| $x^*(n)$ (*: liên hợp phức) | $X^*(z^*)$ | $r_2<\|z\|<r_1$ |
| $x(-n)$ | $X\left(\frac{1}{z}\right)$ | $\frac{1}{r_1}<\|z\|<\frac{1}{r_2}$ |
| $x_1(n)*x_2(n)$ | $X_1(z).X_2(z)$ | |
| $x_1(n).x_2(n)$ | $\frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$ | |
| nếu $x(n)$ là nhân quả | $x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)$ | |
| $r_{x_1x_2}(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x_1(m).x_2(m-n)$ | $R_{x_1x_2}(z)=X_1(z).X_2\left(\frac{1}{z}\right)$ | $ROC[X_1(z)]\cap ROC\left[X_2\left(\frac{1}{z}\right)\right]$ |

# MỘT SỐ BIẾN ĐỔI Z THÔNG DỤNG

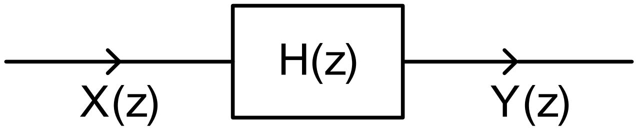
| Miền n | Miền z | ROC |
|---|---|---|
| $\delta(n)$ | $1$ | Toàn bộ mặt phẳng z |
| $\delta(n-n_0)$ | $z^{-n_0}$ | Toàn bộ mặt phẳng z,<br>trừ tại 0 nếu $n_0 > 0$,<br>trừ tại $\infty$ nếu $n_0 < 0$ |
| $u(n)$ | $\dfrac{1}{1-z^{-1}}$ | $\|z\| > 1$ |
| $-\,u(-n-1)$ | $\dfrac{1}{1-z^{-1}}$ | $\|z\| < 1$ |
| $n\,u(n)$ | $\dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$ | $\|z\| > 1$ |
| $a^n u(n)$ | $\dfrac{1}{1-az^{-1}}$ | $\|z\| > \|a\|$ |
| $-a^n u(-n-1)$ | $\dfrac{1}{1-az^{-1}}$ | $\|z\| < \|a\|$ |
| $-na^n u(-n-1)$ | $\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$ | $\|z\| < \|a\|$ |
| $\dfrac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}(z_{pk})^{n-m}\,u(n)$ | $\dfrac{z}{(z-z_{pk})^{m+1}}$ | $\|z\| > \|z_{pk}\|$ |
| $\dfrac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}(z_{pk})^{n-m}\,u(-n-1)$ | $\dfrac{z}{(z-z_{pk})^{m+1}}$ | $\|z\| < \|z_{pk}\|$ |

## MỘT SỐ BIẾN ĐỔI Z THÔNG DỤNG (tiếp)

| Signal, $x(n)$ | $z$-Transform, $X(z)$ | ROC |
|---|---|---|
| $na^n u(n)$ | $\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$ | $\|z\| > \|a\|$ |
| $(\cos(\omega_0 n))u(n)$ | $\frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$ | $\|z\| > 1$ |
| $(\sin(\omega_0 n))u(n)$ | $\frac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$ | $\|z\| > 1$ |
| $(a^n\cos(\omega_0 n)u(n)$ | $\frac{1-az^{-1}\cos\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$ | $\|z\| > \|a\|$ |
| $(a^n\sin(\omega_0 n)u(n)$ | $\frac{1-az^{-1}\sin\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$ | $\|z\| > \|a\|$ |

# 2.5. BIỂU DIỄN HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN Z

Trong miền z ta có:




X(z) = ZT [x(n)]
H(z) = ZT [h(n)]
Y(z) = ZT [y(n)]

Y(z) = X(z).H(z) (Trong miền z phép chập đã được chuyển thành phép nhân đại số thông thường.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

h(n) = IZT [H(z)]

Trong miền z quan hệ vào ra của hệ thống được thực hiện nhờ phép nhân đại số thông thường thay thế cho  phép chập, điều này dẫn đến hiệu năng tính toán cao.

H(z): Hàm truyền đạt của hệ thống rời rạc là biến đổi z của đáp ứng xung) hay nó còn được xác định bằng tỷ số giữa biến đồi z của tín hiệu ra trên biến đổi z của tín hiệu vào.

H(z) là hàm truyền đạt của hệ thống đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống trong miền z có vai trò tương tự như đáp ứng xung h(n) trong miền  thời gian rời rạc.

# Liên hệ với phương trình sai phân:

Xét phương trình sai phân tổng quát $$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

Biến đổi z hai phía của phương trình sai phân: $$\mathrm{ZT}\left[\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)\right] = \mathrm{ZT}\left[\sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)\right]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r} X(z) \qquad \Leftrightarrow Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}$$

Ta rút ra:

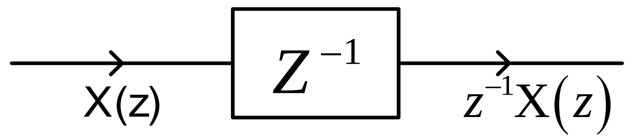
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

Nếu $a_0 = 1$ sẽ được: $$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

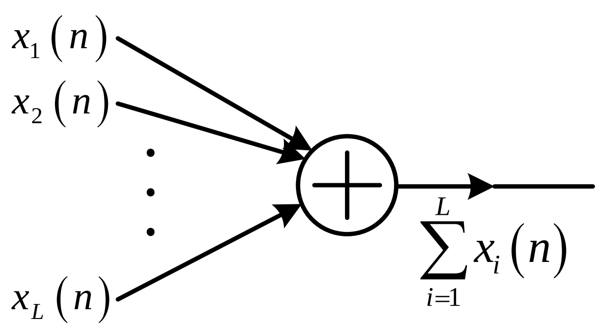
# Các phần tử thực hiện:

**- Phần tử trễ:**

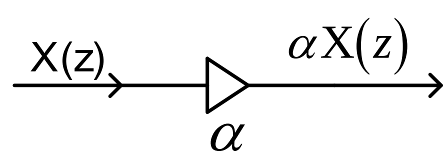
$$\mathrm{ZT}\left[x(n)\right] \equiv \mathrm{X}(z) \qquad \mathrm{ZT}\left[x(n-1)\right] \equiv z^{-1}\mathrm{X}(z)$$




**- Phần tử cộng:**




**- Phần tử nhân với hằng số:**



# Sơ đồ hệ thống trong miền z

**Sơ đồ hệ thống trong miền z có 3 dạng như sau:**

**Cách 1:** Nếu có các hệ thống mắc song song với nhau thì hàm truyền đạt của hệ thống tổng quát sẽ bằng tổng các hàm truyền đạt của các hệ thống thành phần.

$$\mathrm{H}(\mathrm{z})=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{H}_{\mathrm{i}}(\mathrm{z})$$

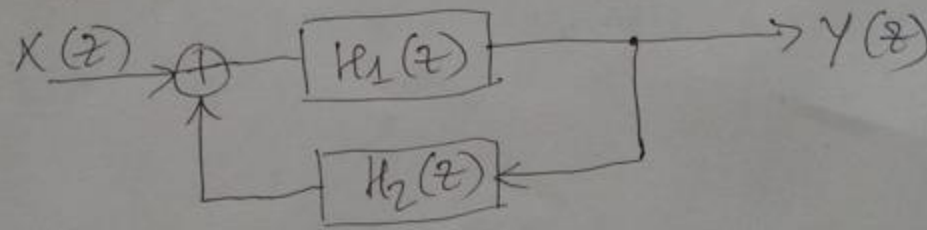
**Cách 2:** Nếu có các hệ thống mắc nối tiếp với nhau thì hàm truyền đạt của hệ thống tổng quát sẽ bằng tích các hàm truyền đạt của các hệ thống thành phần.

$$H(z)=\prod_{i=1}^{N}H_i(z)$$

**Cách 3:** Nếu $H_2(z)$ mắc hồi tiếp với $H_1(z)$ thì hàm truyền đạt của hệ thống tổng quát sẽ bằng:

$$\mathrm{H}(z)=\frac{H_1(z)}{1-H_1(z).H_2(z)}$$

Hệ thống hồi tiếp:




$$Y(z) = \left[X(z) + Y(z)H_2(z)\right] H_1(z)$$

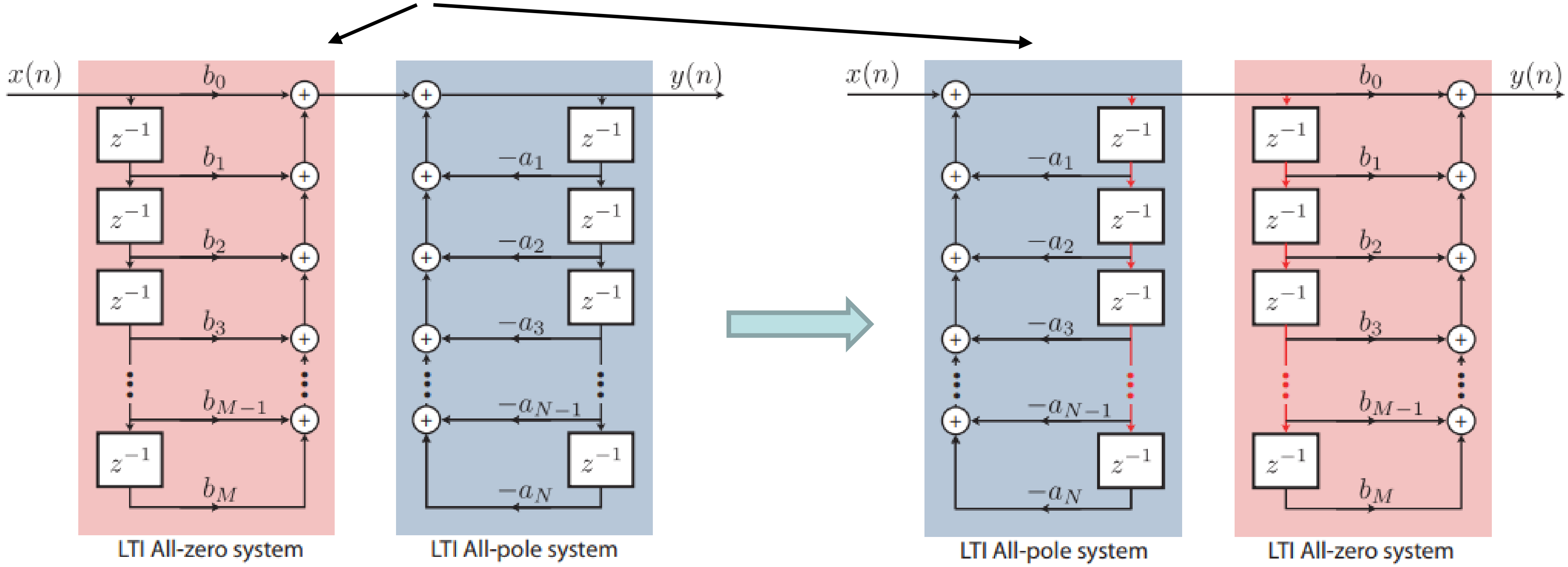
$$Y(z) = X(z)H_1(z) + Y(z)H_1(z)H_2(z)$$

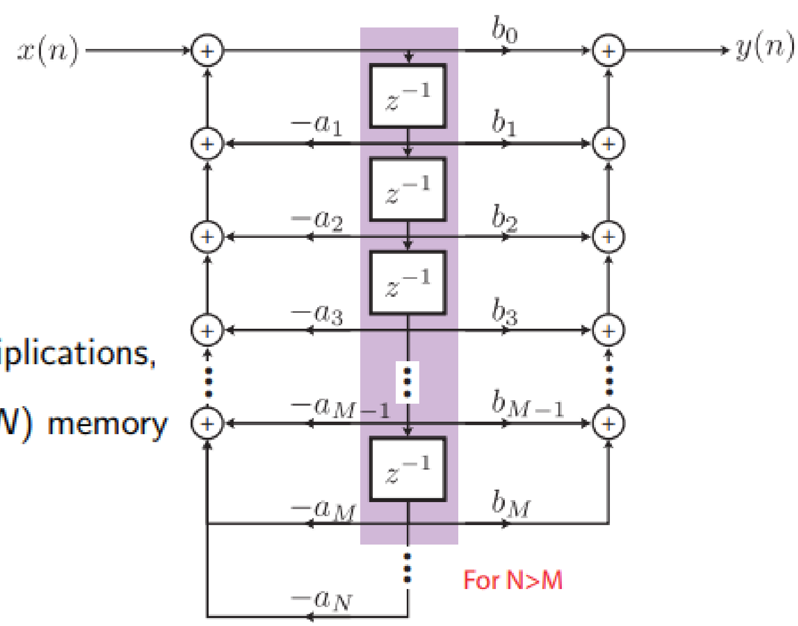
$$\Rightarrow Y(z)\left[1 - H_1(z)H_2(z)\right] = X(z)H_1(z)$$

$$\Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{H_1(z)}{1 - H_1(z)H_2(z)}$$

## Sơ đồ chuẩn tắc I

Requires: $M+N+1$ multiplications, $M+N$ additions, $M+N$ memory locations




## Sơ đồ chuẩn tắc II

Requires: $M+N+1$ multiplications, $M+N$ additions, $\max(M,N)$ memory locations

Source: https://www.comm.utoronto.ca/~dkundur/course/real-time-digital-signal-processing/

# 2.6 Độ ổn định

Ta nhắc lại điều kiện ổn định đã học trong chương 1
Điều kiện ổn định trong miền thời gian rời rạc n

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

**Điều kiện ổn định trong miền z**
Trong miền z một hệ thống ổn định sẽ phải thỏa mãn định lý sau:

**Định lý ổn định:** Một HTTTBB nhân quả là ổn định nếu và chỉ nếu tất cả các điểm cực của hàm truyền đạt H(z) nằm bên trong vòng tròn đơn vị (tức là chỉ cần một điểm cực nằm trên hoặc nằm ngoài vòng tròn đơn vị là hệ thống mất ổn định).

**Ví dụ:** Xét độ ổn định HT có: $H(z) = \dfrac{1}{1 - Az^{-1}}$

**Giải:** ta có

$$\Leftrightarrow H(z) = \frac{z}{z - A}$$

Theo điều kiện ta có $z_{p1}$=A, vậy:

|A| < 1 $\rightarrow$ Hệ thống ổn định.
|A| ≥ 1 $\rightarrow$ Hệ thống không ổn định.

# Tiêu chuẩn ổn định Jury

Ta biết hàm truyền đạt của hệ thống được biểu diễn như sau:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

Từ công thức này, gọi $D(z) = 1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}$

Từ các hệ số $a_k$ của D(z) chúng ta lập bảng Jury có 2N – 3 hàng bằng cách sau đây:

| Hàng | Hệ số |
|---|---|
| 1 | $1 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \ldots \quad a_{N-1} \quad a_N$ |
| 2 | $a_N \quad a_{N-1} \quad a_{N-2} \quad a_{N-3} \quad \ldots \quad a_1 \quad 1$ |
| 3 | $c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \ldots \quad c_{N-2} \quad c_{N-1}$ |
| 4 | $c_{N-1} \quad c_{N-2} \quad c_{N-3} \quad c_{N-4} \quad \ldots \quad c_1 \quad c_0$ |
| 5 | $d_0 \quad d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad \ldots$ |
| 6 | $d_{N-2} \quad d_{N-3} \quad d_{N-4} \quad d_{N-5} \quad \ldots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $2N-3$ | $r_0 \quad r_1 \quad r_2$ |

Công thức tính:

$$c_i = \det\begin{bmatrix} 1 & a_{N-i} \\ a_N & a_i \end{bmatrix} = a_i - a_N.a_{N-i}$$ ; $i$: 0 → N – 1.

$$d_i = \det\begin{bmatrix} c_0 & c_{N-1-i} \\ c_{N-1} & c_i \end{bmatrix} = c_0 c_i - c_{N-1}.c_{N-1-i}$$ ; $i$: 0 → N – 2.

# Tiêu chuẩn ổn định Jury (tt)

Sau khi lập xong 2N – 3 hàng như vậy ta có tiêu chuẩn
Một hệ thống là ổn định nếu và chỉ nếu các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

1 $$D(z)\big|_{z=1} > 0$$

2 $$D(z)\big|_{z=-1} > 0$$ với N chẵn

$$D(z)\big|_{z=-1} < 0$$ với N lẻ.

3 $$1 > |a_N|$$

$$|c_0| > |c_{N-1}|$$

$$|d_0| > |d_{N-2}|$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$|r_0| > |r_2|$$

Chỉ cần không thỏa mãn một trong ba điều kiện trên là hệ thống không ổn định.

# Ví dụ: Xét ổn định hệ thống theo tiêu chuẩn Jury

Cho HTTTBB được mô tả bằng phương trình sai phân sau đây:

$$y(n)+a_1y(n-1)+a_2y(n-2)=x(n)$$ Tìm H(z). Xét ổn định theo tiêu chuẩn Jury.

**Giải:**

Lấy biến đổi z cả 2 vế: $$Y(z)+a_1z^{-1}Y(z)+a_2z^{-2}Y(z)=X(z)$$

$$H(z)=\frac{1}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$

Ta có: $$D(z)=1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}$$

Theo chuẩn Jury như trình bày ở trên ta có:

1. $D(z)\big|_{z=1}=1+a_1+a_2>0$

   $\Rightarrow a_2>-(1+a_1)$

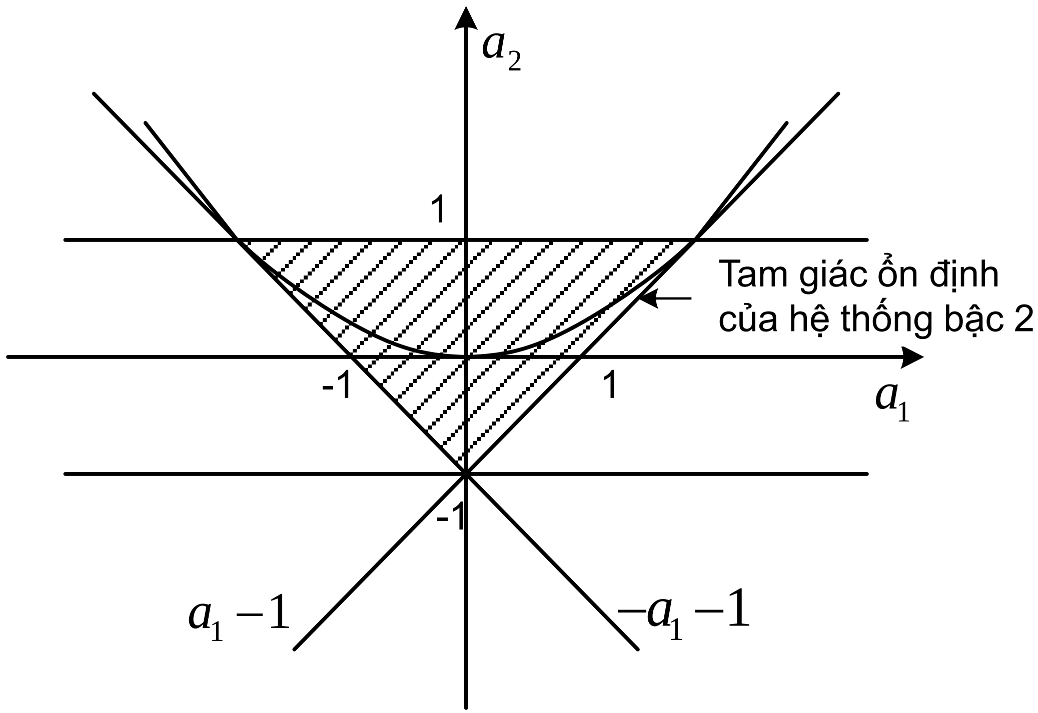
2. $D(z)\big|_{z=-1}=1-a_1+a_2>0$ N chẵn

   $\Rightarrow a_2>-(1-a_1)$

3. $1>|a_2|\Rightarrow -1<a_2<1$

# Ví dụ Xét ổn định hệ thống theo tiêu chuẩn Jury (tt)

Dựa vào 3 điều kiện trên ta sẽ xác định được miền ổn định của hệ thống theo hai tham số $a_1$ và $a_2$ như sau:




**Miền ổn định của hệ thống trong ví dụ**

# TÓM TẮT CHƯƠNG 2

1. Biến đổi z
2. Miền hội tụ của biến đổi z
3. Điểm cực điểm không
4. Biến đổi Z ngược
5. Các tính chất biến đổi z
6. Biểu diễn hệ thống trong miền z.
7. Liên hệ giữa biến đổi z và phương trình sai phân.
8. Sự ổn định của hệ thống trong miền z.

# CHƯƠNG III: BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

# 3.1. BIẾN ĐỔI FOURIER

**3.1.1. Định nghĩa biến đổi Fourier (Fourier Transform: FT)**

Biến đổi Fourier của một tín hiệu x(n) được định nghĩa như sau:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

**Ký hiệu toán tử:**

$$FT\left[x(n)\right] = X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$x(n) \xrightarrow{FT} X\left(e^{j\omega}\right)$$

Ta thấy rằng

$$e^{j\omega} = \cos\omega + j\sin\omega$$

$X\left(e^{j\omega}\right)$ : tuần hoàn với chu kỳ $2\pi \rightarrow$ khi thể hiện $X\left(e^{j\omega}\right)$ ta chỉ cần thể hiện với dải từ 0 đến $2\pi$ hoặc từ $-\pi$ đến $\pi$ rồi lấy tuần hoàn.

# Các cách thể hiện $X\left(e^{j\omega}\right)$

Biểu diễn theo phần thực phần ảo Re, Im: $X\left(e^{j\omega}\right) = \mathrm{Re}\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right] + j\,\mathrm{Im}\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]$

Biểu diễn theo Modul và Argument: $X\left(e^{j\omega}\right) = \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|.e^{j\arg\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]}$

Biểu diễn theo độ lớn và pha:
Độ lớn có thể lấy giá trị âm và dương. $X\left(e^{j\omega}\right) = A\left(e^{j\omega}\right).e^{j\theta(\omega)}$

**Một số khái niệm**

$X\left(e^{j\omega}\right)$ : Phổ của tín hiệu x(n).

$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$ : Phổ biên độ của tín hiệu

$\arg\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right] = \varphi(\omega)$ : Phổ pha của tín hiệu.

$\theta(\omega)$ : Pha của tín hiệu.

$A\left(e^{j\omega}\right)$ : Độ lớn của tín hiệu.

**Một số quan hệ**

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|A\left(e^{j\omega}\right)\right|$$

$$\varphi(\omega) = \theta(\omega) \quad \text{khi} \quad A\left(e^{j\omega}\right) \geq 0$$

$$\varphi(\omega) = \theta(\omega) + \pi \quad \text{khi} \quad A\left(e^{j\omega}\right) < 0$$

**Ví dụ:** Cho phổ tín hiệu

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sin 3\omega . e^{-j\frac{\omega}{2}}$$

Hãy xác định:

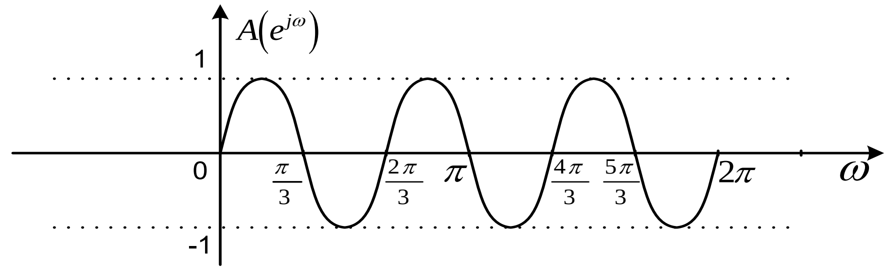
$$A\left(e^{j\omega}\right) \quad \theta(\omega) \quad \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| \quad \varphi(\omega)$$

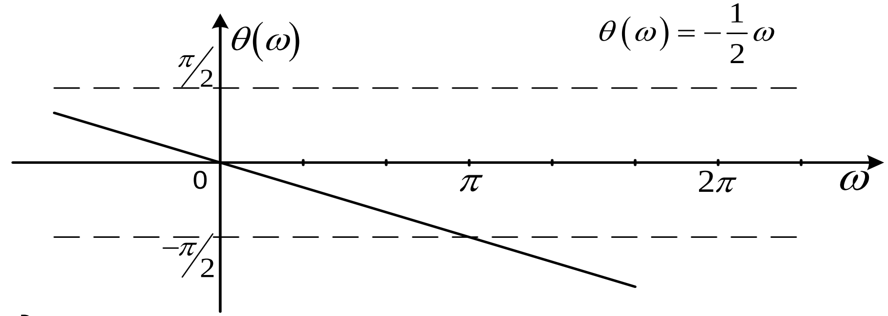
**Giải: Ta có**

$$A\left(e^{j\omega}\right)=\sin 3\omega$$

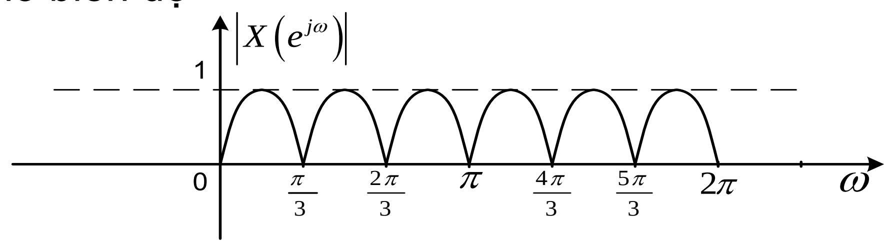
$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|=\left|\sin 3\omega\right| \qquad \theta(\omega)=-\frac{\omega}{2}$$

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}-\dfrac{\omega}{2} & \text{khi} \quad \sin 3\omega \geq 0\\ -\dfrac{\omega}{2}+\pi & \text{khi} \quad \sin 3\omega < 0\end{cases}$$

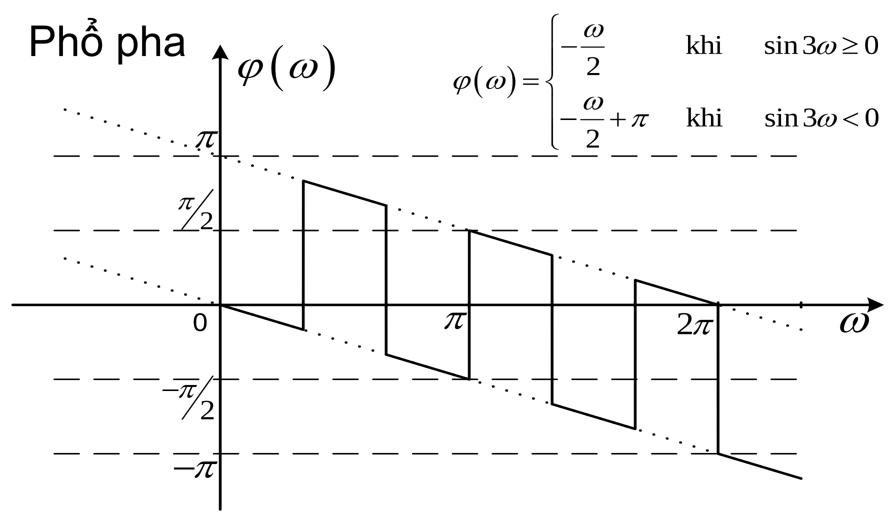



Phổ biên độ




Phổ pha



# Ví dụ biến đổi Fourier

Hãy tìm biến đổi Fourier các dãy sau đây:

$$x_1(n) = \delta(n) \qquad x_2(n) = \delta(n+1) + \delta(n-1)$$

$$x_3(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \qquad x_4(n) = 2^n u(n)$$

$$X_1\left(e^{j\omega}\right) = \mathrm{FT}\left[\mathrm{x}_1(n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) e^{-jn\omega} = 1.e^{-j\omega n}\Big|_{n=0} = 1$$

$$X_2\left(e^{j\omega}\right) = \mathrm{FT}\left[\mathrm{x}_2(n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n+1) e^{-jn\omega} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-1) e^{-jn\omega}$$

$$X_3\left(e^{j\omega}\right) = \mathrm{FT}\left[\mathrm{x}_3(n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} e^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$$

Vì: $\left|\frac{1}{2} e^{-j\omega}\right| = \frac{1}{2} < 1$

$$X_4\left(e^{j\omega}\right) = \mathrm{FT}\left[\mathrm{x}_4(n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n u(n) e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2e^{-j\omega}\right)^n$$

do: $\left|2e^{-j\omega}\right| = \left|2\cos\omega \text{-} 2\mathrm{j}\sin\omega\right| = \sqrt{4\cos^2\omega + 4\sin^2\omega} = 2$

Cho nên chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \left(2e^{-j\omega}\right)^n$ không hội tụ do vậy không tồn tại biến đổi Fourier.

## 3.1.2 Điều kiện tồn tại của FT

- Điều kiện để biến đổi Fourier tồn tại là chuỗi:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

phải hội tụ.

# 3.1.3. Biến đổi Fourier ngược (IFT: Inverse Fourier Transform)

Biến đổi Fourier ngược của phổ tín hiệu $X\left(e^{j\omega}\right)$ được định nghĩa như sau:

$$x\left(n\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

Ký hiệu:

$$IFT\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]=x\left(n\right)$$

$$X\left(e^{j\omega}\right)\xrightarrow{IFT}x\left(n\right)$$

Ở đây biến đổi Fourier ngược giúp ta xác định được x(n) từ $X\left(e^{j\omega}\right)$

.

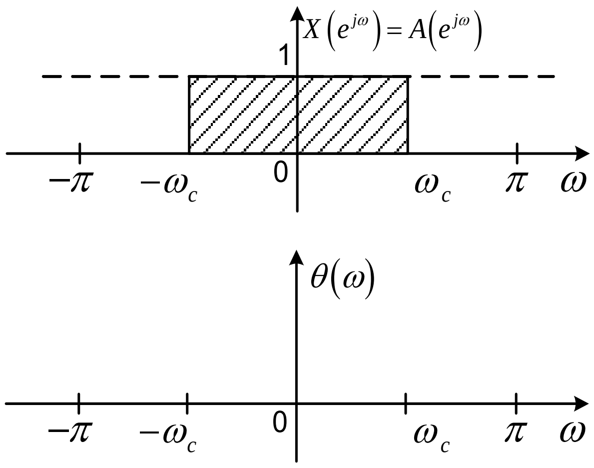
# Ví dụ biến đổi Fourier ngược

**Cho phổ t/hiệu**

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1 & -\omega_c\le\omega\le\omega_c\\ 0 & \omega \text{ còn lai}\end{cases}$$

$$(-\pi\le\omega_c\le\pi)$$

Hãy xác định x(n)




**Giải:** Theo định nghĩa biến đổi IFT ta tính tích phân:

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi jn}e^{j\omega n}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c}$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi jn}\left(e^{j\omega_c n}-e^{-j\omega_c n}\right)=\frac{1}{\pi n}\sin\omega_c n$$

Dạng $\frac{0}{0}$ nên biến đổi tiếp thành dạng: $x(n)=\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin\omega_c n}{\omega_c n}$

# Ví dụ biến đổi Fourier ngược (tt)

Với $\omega_c = \dfrac{\pi}{2}$

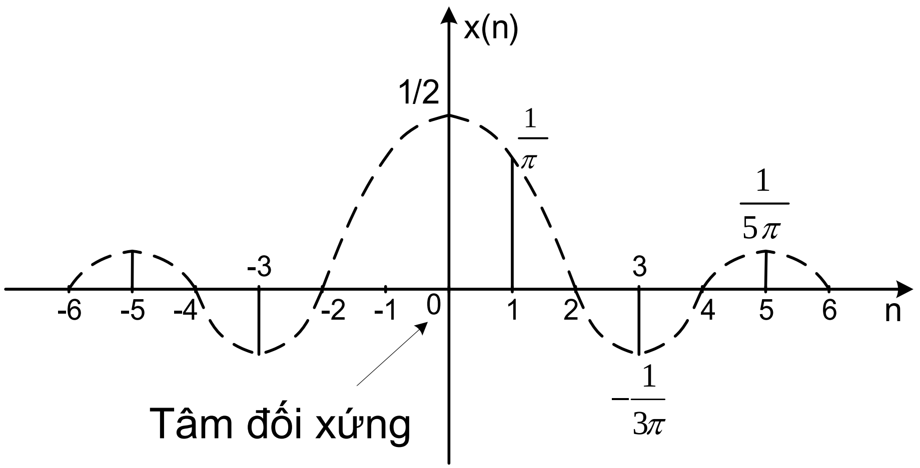
Thay vào:

$$x(n) = \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\pi}{2}n}{\frac{\pi}{2}n}$$

n = 0: $x(0) = \dfrac{1}{2}$

n = 1: $x(1) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{\pi} = x(-1)$

n = 2: $x(2) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}\cdot 2}{\frac{\pi}{2}\cdot 2} = 0 = x(-2)$




Ở đây ta rút ra 3 nhận xét:

-Tín hiệu x(n) đối xứng qua trục tung; pha cũng đối xứng.

-Pha bằng không nên tâm đối xứng nằm tại n = 0 (gốc tọa độ).

-x(n): đối với tín hiệu thực có tính đối xứng vì phổ đối xứng (Đối xứng Helmitle).

**Bảng 3.1 Tính chất của biến đổi Fourier**

| Miền n | Miền ω |
|---|---|
| $x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$ | $X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$ |
| $ax_1(n)+bx_2(n)$; (a, b: hằng số) | $aX_1\left(e^{j\omega}\right)+bX_2\left(e^{j\omega}\right)$ |
| $x(n-n_0)$ | $e^{-j\omega n_0}X\left(e^{j\omega}\right)$ |
| x(n) là thực (tính chất đối xứng) | $X^*\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{-j\omega}\right)$ |
| | $\mathrm{Re}\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]=\mathrm{Re}\left[X\left(e^{-j\omega}\right)\right]$ |
| | $\mathrm{Im}\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]=\mathrm{Im}\left[X\left(e^{-j\omega}\right)\right]$ |
| | $\left\lvert X\left(e^{j\omega}\right)\right\rvert=\left\lvert X\left(e^{-j\omega}\right)\right\rvert$ |
| | $\arg\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]=-\arg\left[X\left(e^{-j\omega}\right)\right]$ |
| x*(n) | $X^*\left(e^{-j\omega}\right)$ |
| x(-n) | $X\left(e^{-j\omega}\right)$ |
| $x_1(n)*x_2(n)$ | $X_1\left(e^{j\omega}\right).X_2\left(e^{j\omega}\right)$ |
| $x_1(n).x_2(n)$ | $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1\left(e^{j(\omega-\omega')}\right).X_2\left(e^{j\omega'}\right)d\omega'$ |
| nx(n) | $j\frac{dX\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}$ |
| $e^{j\omega_0 n}x(n)$ | $X\left[e^{j(\omega-\omega_0)}\right]$ |
| $x(n)\cos\omega_0 n$ | $\frac{1}{2}X\left[e^{j(\omega-\omega_0)}\right]+\frac{1}{2}X\left[e^{j(\omega+\omega_0)}\right]$ |
| $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n).x_2^*(n)$ | $\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} X_1\left(e^{j\omega}\right).X_2^*\left(e^{j\omega}\right)d\omega$ |
| Quan hệ Parseval $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert x(n)\rvert^2$ | $\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left\lvert X\left(e^{j\omega}\right)\right\rvert^2 d\omega$ |

# 3.4. QUAN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER FT VÀ BIẾN ĐỔI Z

Ta thấy, theo định nghĩa của biến đổi z :

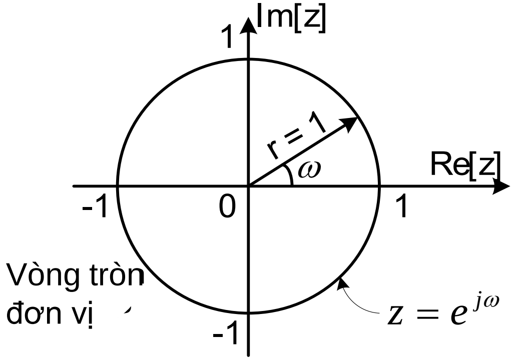
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).z^{-n}$$

Mặt khác z là một biến số phức và được biểu diễn trong mặt phẳng phức theo toạ độ cực như sau:

$$z = r.e^{j\omega}$$

Nếu chúng ta đánh giá biến đổi Z trên vòng tròn đơn vị (r=1), ta có:

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).e^{-j\omega n} = X\left(e^{j\omega}\right)$$




Như vậy, ta rút ra một số nhận xét:

- Biến đổi Fourier chính là biến đổi z được thực hiện trên vòng tròn đơn vị.
- Như vậy, biến đổi Fourier chỉ là trường hợp riêng của biến đổi z.
- Như vậy, chúng ta có thể tìm biến đổi Fourier từ biến đổi Z bằng cách đánh giá ZT trên vòng tròn đơn vị với điều kiện vòng tròn đơn vị phải nằm trong miền hội tụ của biến đổi Z.

# Ví dụ tìm FT từ ZT

Hãy tìm biến đổi Fourier từ các biến đổi Z sau:

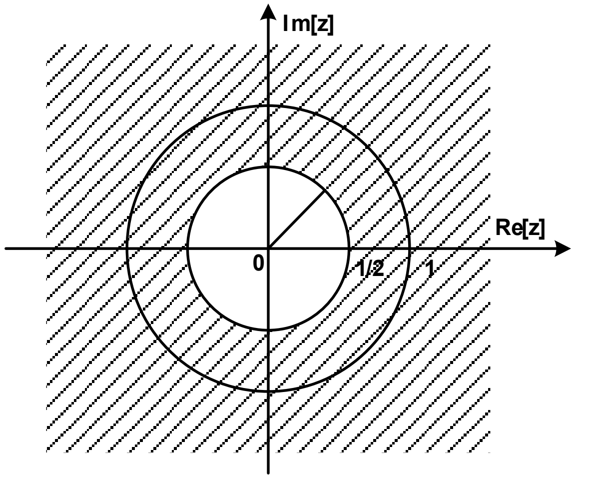
$$X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

**Giải:**

Đầu tiên phải xem vòng tròn đơn vị có nằm trong miền hội tụ không.

a) Vòng tròn đơn vị nằm trong miền hội tụ, ta viết được biến đổi Fourier

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$$



# 3.5. BIỂU DIỄN HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

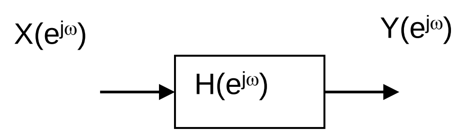
### 3.5.1. Đáp ứng tần số

Trong miền tần số $\omega$ ta thấy rằng:

$$x(n) \xrightarrow{FT} X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$y(n) \xrightarrow{FT} Y\left(e^{j\omega}\right)$$

$$h(n) \xrightarrow{FT} H\left(e^{j\omega}\right)$$




Quan hệ vào ra của hệ thống trong miền $\omega$ được thể hiện bằng phép nhân như sau:

hay:

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j\omega}\right).H\left(e^{j\omega}\right)$$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}$$

$\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)$ Được gọi là ***đáp ứng tần số*** và nó chính là biến đổi Fourier của đáp ứng xung h(n) hay còn được xác định bằng tỷ số giữa biến đổi Fourier của tín hiệu ra trên biến đổi Fourier của tín hiệu vào.

$\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)$ Đáp ứng tần số sẽ đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống trong miền tần số $\omega$

# Các cách thể hiện : $\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)$

Biểu diễn theo Modul và Argument:

$$\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)=\left|\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\arg\left[\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)\right]}$$

$$\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)=\left|\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

$\left|\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)\right|$ : Đáp ứng tần số của biên độ (đáp ứng biên độ).

$\arg\left[\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)\right]=\varphi(\omega)$ : Đáp ứng tần số của pha (đáp ứng pha).

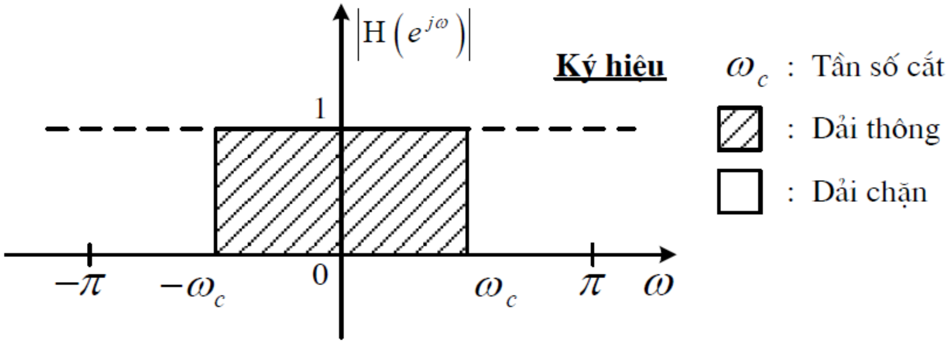
Biểu diễn theo độ lớn và pha: $\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)=\mathrm{A}\left(e^{j\omega}\right)e^{j\theta(\omega)}$

# 3.5.2. Các bộ lọc số lý tưởng

**a. Bộ lọc thông thấp lý tưởng:**
**Định nghĩa:**
Đáp ứng biên độ của bộ lọc số thông thấp lý tưởng được định nghĩa như sau:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \begin{cases} 1 & -\omega_c \le \omega \le \omega_c \\ 0 & \omega \text{ còn lai} \end{cases}$$

$$(-\pi \le \omega_c \le \pi)$$




Đáp ứng tần số của bộ lọc thông thấp lý tưởng pha không $\theta(\omega) = 0$
Có dạng như sau:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} 1 & -\omega_c \le \omega \le \omega_c \\ 0 & \omega \neq \end{cases}$$

Thực hiện biến đổi IFT ta có:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi jn}\left(e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}\right) = \frac{1}{\pi n}\sin\omega_c n$$

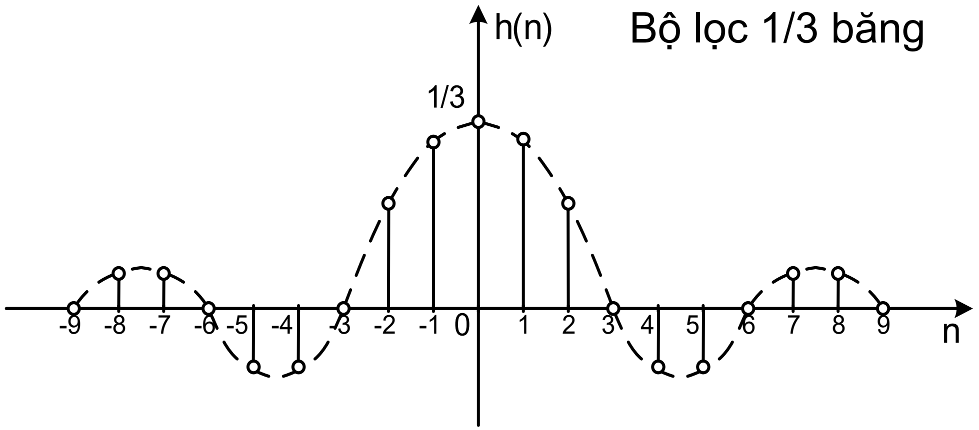
Dạng $\frac{0}{0}$ nên biến đổi tiếp thành dạng:

$$h(n) = \frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin\omega_c n}{\omega_c n}$$

# a.Bộ lọc thông thấp

Với $\omega_c = \dfrac{\pi}{3}$

Ta có: $$h(n) = \frac{1}{3}\frac{\sin\frac{\pi}{3}n}{\frac{\pi}{3}n}$$




Các bộ lọc có tần số cắt $\omega_c = \dfrac{\pi}{M}$ (M: nguyên dương) gọi là bộ lọc Nyquist, tại các điểm là bội của M các mẫu đều bằng 0.

Nhưng bộ lọc này không thực hiện được trên thực tế vì đáp ứng xung h(n) không nhân quả và có chiều dài vô hạn.

Khi thiết kế bộ lọc số thực tế, người ta phải dời đáp ứng xung h(n) của bộ lọc số lý tưởng theo tâm đối xứng sang bên phải sau đó cắt đi phần âm (phần không nhân quả) để h(n) lúc này thành nhân quả và có chiều dài hữu hạn.

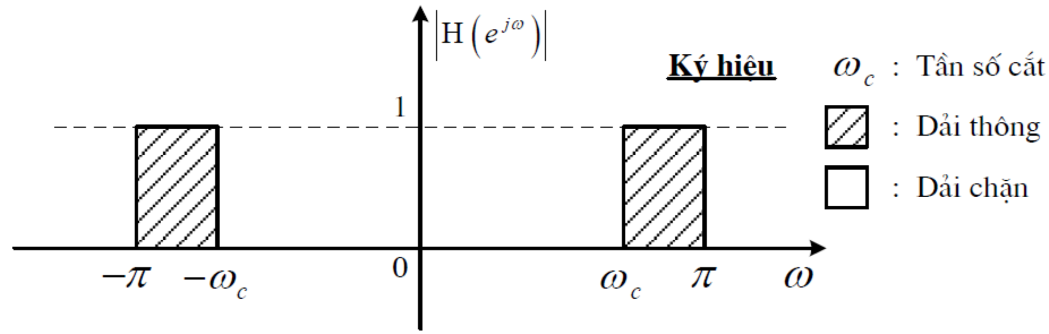
Lưu ý khi cắt đi sẽ gây hiện tượng gợn sóng trong miền tần số, gây nên hiện tượng Gibbs.

# b. Bộ lọc thông cao lý tưởng:

**Định nghĩa:**
Đáp ứng biên độ của bộ lọc thông cao lý tưởng được định nghĩa như sau:

$$\left|\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)\right| = \begin{cases} 1 & -\pi \le \omega \le -\omega_c \\ & \omega_c \le \omega \le \pi \\ 0 & \omega \ne \end{cases}$$

$$-\pi \le \omega_c \le \pi$$




Đáp ứng tần số của bộ lọc thông cao lý tưởng pha không:

$$\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} 1 & -\pi \le \omega \le -\omega_c \\ & \omega_c \le \omega \le \pi \\ 0 & \omega \ne \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(n) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} d\omega}_{\frac{\sin \pi n}{\pi n}} - \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega}_{\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n}}$$

Do $\dfrac{\sin \pi n}{\pi n} = \delta(n)$ $\quad h(n) = \delta(n) - \dfrac{\omega_c}{\pi}\dfrac{\sin \omega_c n}{\omega_c n}$

$\delta(n)$ là đáp ứng xung của bộ lọc thông tất pha 0 (ví dụ như một dây dẫn tín hiệu) vì chúng cho tất cả các tín hiệu đi qua với mọi tần số.

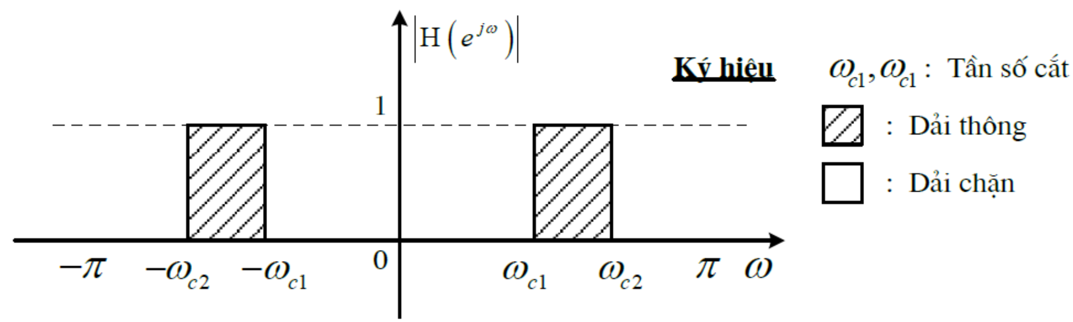
# c. Bộ lọc thông dải lý tưởng:

**Định nghĩa:**

Đáp ứng biên độ của bộ lọc số thông dải lý tưởng được định nghĩa như sau:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \begin{cases} 1 & -\omega_{c2} \le \omega \le -\omega_{c1} \\ & \omega_{c1} \le \omega \le \omega_{c2} \\ 0 & \omega \ne \end{cases}$$

$$-\pi \le \omega_c \le \pi$$




Đáp ứng tần số của bộ lọc số thông dải lý tưởng pha không :

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} 1 & -\omega_{c2} \le \omega \le -\omega_{c1} \\ & \omega_{c1} \le \omega \le \omega_{c2} \\ 0 & \omega \ne \end{cases}$$

$$-\pi \le \omega_c \le \pi$$

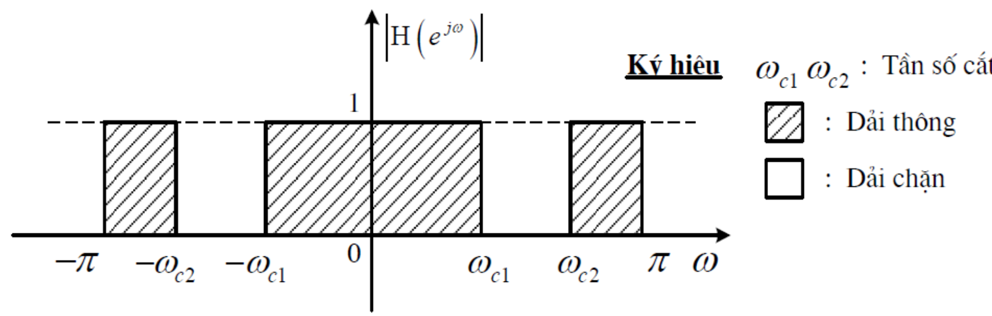
$$h(n) = \frac{\omega_{c2}}{\pi}\frac{\sin\omega_{c2}n}{\omega_{c2}n} - \frac{\omega_{c1}}{\pi}\frac{\sin\omega_{c1}n}{\omega_{c1}n}$$

# d. Bộ lọc chắn dải lý tưởng

**Định nghĩa:**

Đáp ứng biên độ của bộ lọc số chắn dải lý tưởng được định nghĩa như sau:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \begin{cases} & -\pi \le \omega \le -\omega_{c2} \\ 1 & -\omega_{c1} \le \omega \le \omega_{c1} \\ & \omega_{c2} \le \omega \le \pi \\ 0 & \omega \ne \end{cases}$$

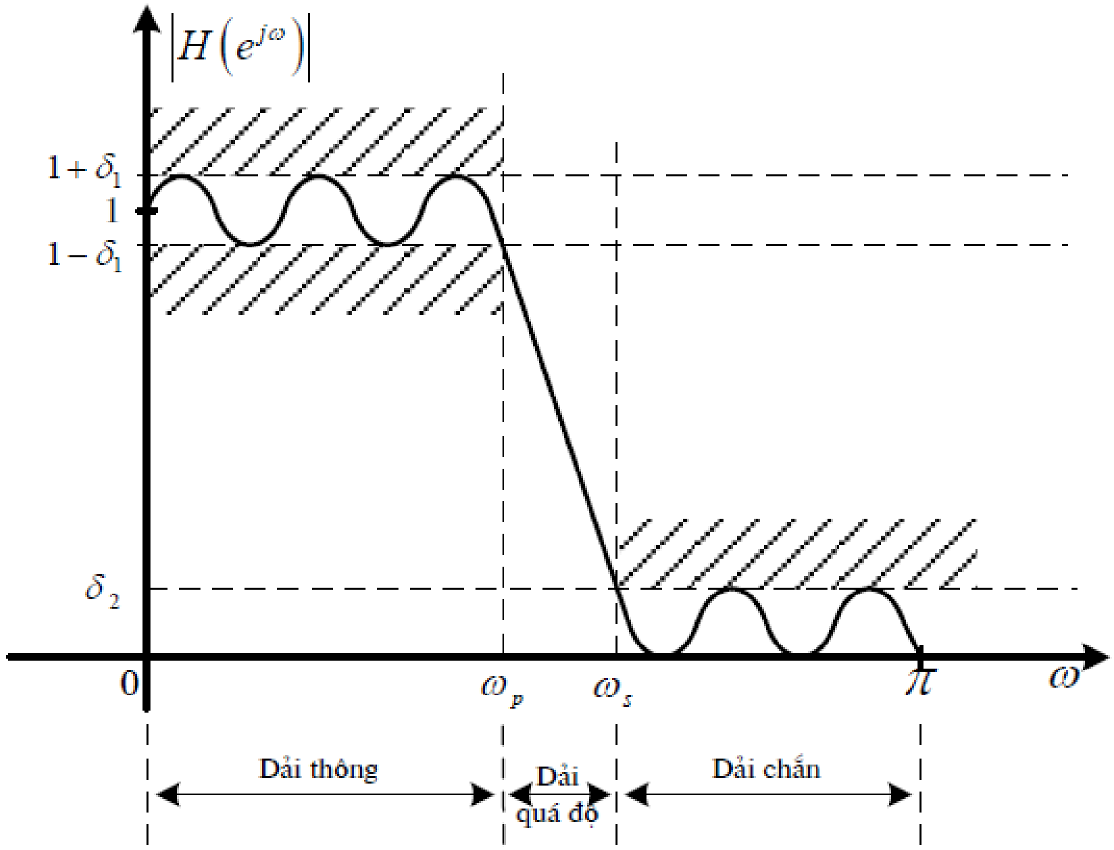



Đáp ứng tần số của bộ lọc số chắn dải lý tưởng pha 0

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} & -\pi \le \omega \le -\omega_{c2} \\ 1 & -\omega_{c1} \le \omega \le \omega_{c1} \\ & \omega_{c2} \le \omega \le \pi \\ 0 & \omega \ne \end{cases} \qquad -\pi \le \omega_c \le \pi$$

$$h(n) = \delta(n) - \frac{\omega_{c2}}{\pi}\frac{\sin \omega_{c2} n}{\omega_{c2} n} + \frac{\omega_{c1}}{\pi}\frac{\sin \omega_{c1} n}{\omega_{c1} n}$$

# 3.5.3. Các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thực tế




Có 4 tham số quyết định chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số là:

+ Tần số giới hạn dải thông $\omega_p$
+ Tần số giới hạn dải chắn $\omega_s$
+ Độ gợn sóng dải thông $\delta_1$
+ Độ gợn sóng dải chắn $\delta_2$

Về mặt lý tưởng các độ gợn sóng dải thông, dải chắn càng nhỏ càng tốt, tần số giới hạn dải thông và dải chắn càng gần nhau để cho dải quá độ càng nhỏ càng tốt.

# Chương IV: BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ RỜI RẠC k

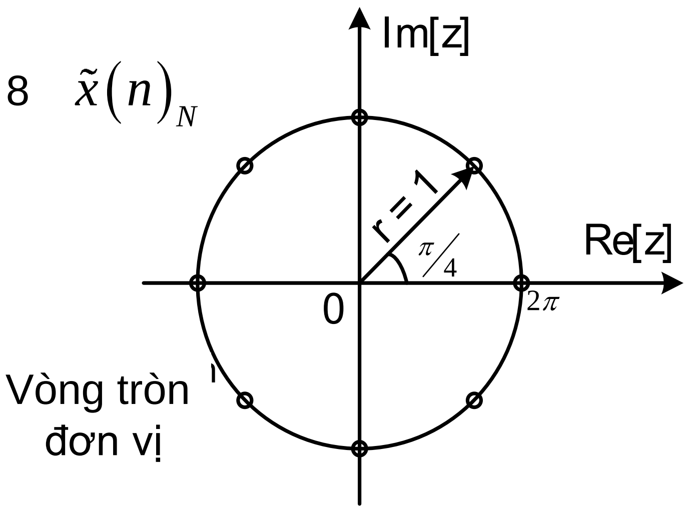
# 4.1 Mở đầu

•Biến đổi Fourier chính là biến đổi z được thực hiện liên tục trên vòng tròn đơn vị.
•Nhưng đối với một dãy tuần hoàn bất kỳ với chu kỳ N, ta thấy không cần thiết phải thực hiện biến đổi Fourier liên tục mà chỉ cần lợi dụng tính chất tuần hoàn để thực hiện biến đổi Fourier theo các điểm đặc biệt trên đường tròn đơn vị tương ứng với chu kỳ N của tín hiệu tuần hoàn

**Ví du:** cho t/h tuần hoàn chu kỳ 8 $\tilde{x}(n)_N$

N = 8 Chia 8 phần:

$$\omega_k = \frac{2\pi}{8}k = \frac{\pi}{4}k$$



# 4.2 BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC DFT ĐỐI VỚI DÃY TUẦN HOÀN CÓ CHU KỲ N.

**4.2.1 Định nghĩa**

Biến đổi Fourier rời rạc của một dãy tuần hoàn có chu kỳ N được định nghĩa như sau:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n).e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n).e^{-j\omega_k n}$$

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$$

Đặt:

$$W_N^{kn} = e^{-j\omega_k n} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n).W_N^{kn}$$

Ký hiệu toán tử:

$$\mathrm{DFT}\left[\tilde{x}(n)\right] = \tilde{X}(k)$$

$$\tilde{x}(n) \xrightarrow{\mathrm{DFT}} \tilde{X}(k)$$

Cho dãy tuần hoàn chu kỳ N = 10

$$\tilde{x}(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 4 \\ 0 & 5 \le n \le 9 \end{cases}$$

Tim $\tilde{X}(k)$

Giải

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{9} \tilde{x}(n).W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{4} 1.e^{-j\frac{2\pi}{10}kn}$$

$$\tilde{X}(k) = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{10}k.5}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{10}k}}$$

$$\tilde{X}(k) = \frac{2j\sin\frac{\pi k}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}k}}{2j\sin\frac{\pi k}{10} e^{-j\frac{\pi}{10}k}} = \frac{\sin\frac{\pi k}{2}}{\sin\frac{\pi k}{10}} e^{-j\frac{\pi 4}{10}k} = A(k)e^{j\theta(k)} = \left|\tilde{X}(k)\right| e^{j\varphi(k)} \qquad k = 0 \div 9$$

**Lưu ý:** Khi tính toán ta chỉ cần xác định với k chạy từ 0 đến 9, các chu kỳ khác lặp lại.

# Biểu diễn DFT dưới dạng ma trận

Từ ĐN: $$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n).W_N^{kn}$$

Ta khai triển

$$\tilde{X}(0) = \tilde{x}(0)W_N^0 + \tilde{x}(1)W_N^0 + \tilde{x}(2)W_N^0 + \cdots + \tilde{x}(N-1)W_N^0$$

$$\tilde{X}(1) = \tilde{x}(0)W_N^0 + \tilde{x}(1)W_N^1 + \tilde{x}(2)W_N^2 + \cdots + \tilde{x}(N-1)W_N^{(N-1)}$$

$$\tilde{X}(2) = \tilde{x}(0)W_N^0 + \tilde{x}(1)W_N^2 + \tilde{x}(2)W_N^4 + \cdots + \tilde{x}(N-1)W_N^{2(N-1)}$$

$$\tilde{X}(N-1) = \tilde{x}(0)W_N^0 + \tilde{x}(1)W_N^{N-1} + \tilde{x}(2)W_N^{2(N-1)} + \cdots + \tilde{x}(N-1)W_N^{(N-1)(N-1)}$$

Ta ký hiệu:

$$\tilde{X}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{X}(0) \\ \tilde{X}(1) \\ \tilde{X}(2) \\ \vdots \\ \tilde{X}(N-1) \end{bmatrix} \qquad \tilde{x}(n) = \begin{bmatrix} \tilde{x}(0) \\ \tilde{x}(1) \\ \tilde{x}(2) \\ \vdots \\ \tilde{x}(N-1) \end{bmatrix} \qquad W_N = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \dots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{(N-1)} \\ W_N^0 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{X}(k) = W_N \ \tilde{x}(n)$$

# 4.2.2 Định nghĩa biến đổi Fourier rời rạc ngược IDFT đối với dãy tuần hoàn.

Biến đổi Fourier rời rạc ngược IDFT được định nghĩa như sau:

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k).e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Hay:

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k).W_N^{-kn}$$

Ký hiệu:

$$\mathrm{IDFT}\left[\tilde{X}(k)\right] = \tilde{x}(n) \qquad \tilde{X}(k) \xrightarrow{\mathrm{IDFT}} \tilde{x}(n)$$

Cách tính IDFT hoàn toàn giống DFT chỉ khác dấu (–) , (+) và hệ số 1/N trước dấu ∑. Vì vậy ta chỉ cần xét DFT rồi suy ra biến đổi IDFT. Về mặt thuật toán là như nhau.

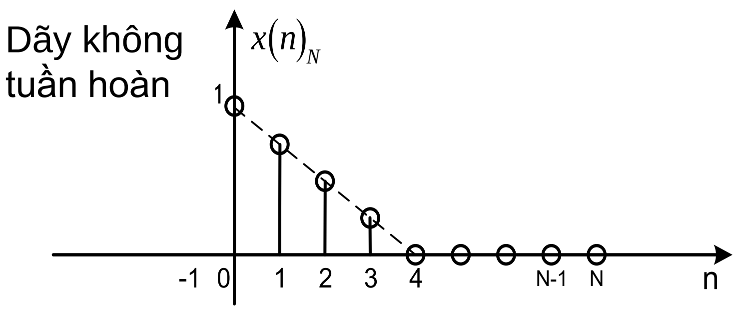
$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n).e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad W_N^{kn} = e^{-j\omega_k n} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

**Bảng 4.1 Tổng kết các tính chất của DFT đối với dãy tuần hoàn có chu kỳ N**

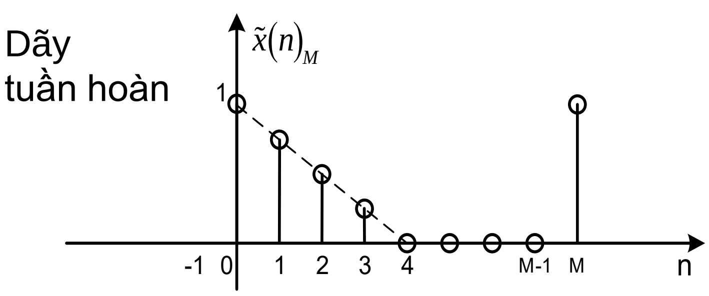
| Miền n | Miền k |
|---|---|
| $\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-kn}$ | $\tilde{X}(k) = \sum_{k=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{kn}$ |
| $a\tilde{x}_1(n)_N + b\tilde{x}_2(n)_N$ | $a\tilde{X}_1(k)_N + b\tilde{X}_2(k)_N$ |
| $\tilde{x}(n-n_0)_N$ | $W_N^{kn_0}\tilde{X}(k)$ |
| $W_N^{ln}\tilde{x}(n)$ | $\tilde{X}(k+l)$ |
| $\tilde{x}_1(n)_N \left(\tilde{*}\right)_N \tilde{x}_2(n)_N$ | $\tilde{X}_1(k)_N\ \tilde{X}_2(k)_N$ |
| $\tilde{x}_1(n)_N\ \tilde{x}_2(n)_N$ | $\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}_1(l)_N\ \tilde{X}_1(k-l)_N$ <br> $\tilde{X}_1(k)_N \left(\tilde{*}\right) \tilde{X}_2(k)_N$ |
| $\tilde{x}(n)$ thực | $\tilde{X}(k) = \tilde{X}^*(-k)$ |
| | $\mathrm{Re}\left[\tilde{X}(k)\right] = \mathrm{Re}\left[\tilde{X}(-k)\right]$ |
| | $\mathrm{Im}\left[\tilde{X}(k)\right] = \mathrm{Im}\left[\tilde{X}(-k)\right]$ |
| | $\left\lvert\tilde{X}(k)\right\rvert = \left\lvert\tilde{X}(-k)\right\rvert$ |
| | $\arg\left[\tilde{X}(k)\right] = -\arg\left[\tilde{X}(-k)\right]$ |

# 4.4 BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC DFT ĐỐI VỚI DÃY KHÔNG TUẦN HOÀN CÓ CHIỀU DÀI HỮU HẠN N.

Chúng ta đã xét biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy tuần hoàn có chu kỳ N.
Ưu điểm nổi bật của biến đổi Fourier rời rạc DFT là biến đổi xuôi và biến đổi ngược đều được thực hiện cùng một thuật toán.
Nhưng trên thực tế không phải lúc nào chúng ta cũng gặp dãy tuần hoàn.
Ta xét dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn như sau:




Ta coi dãy có chiều dài N như trên là một chu kỳ của một dãy tuần hoàn có chu kỳ M như sau:




M ≥ N thường chọn M = $2^{\gamma}$

# Định nghĩa cặp DFT đối với dãy có chiều dài hữu hạn N

**Biến đổi xuôi DFT**

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & k \ne \end{cases}$$

Ký hiệu:

$$\mathrm{DFT}\left[x(n)\right] = X(k)$$

$$x(n) \xrightarrow{\mathrm{DFT}} X(k)$$

**Biến đổi ngược IDFT**

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \ne \end{cases}$$

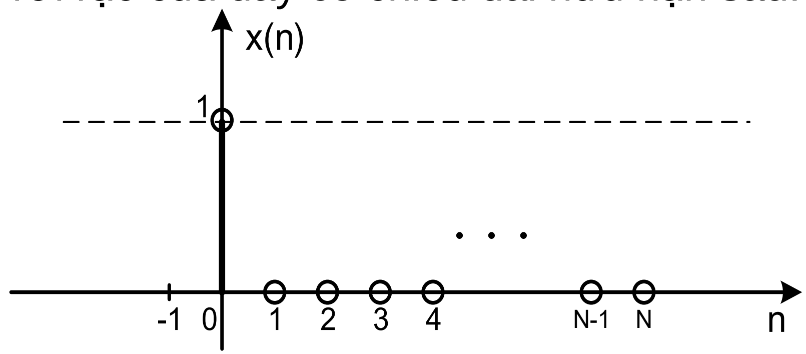
Ký hiệu:

$$\mathrm{IDFT}\left[X(k)\right] = x(n)$$

$$X(k) \xrightarrow{\mathrm{IDFT}} x(n)$$

# Ví dụ

Hãy tìm biến đổi Fourier rời rạc của dãy có chiều dài hữu hạn sau: $x(n) = \delta(n)$

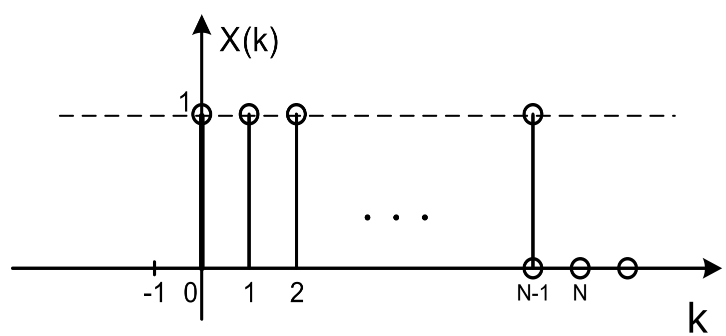



Áp dụng định nghĩa::

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & k \ne \end{cases}$$

Chỉ có một giá trị

$$x(n)\Big|_{n=0} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad X(k) = \begin{cases} 1 & 0 \le \text{k} \le N-1 \\ 0 & \text{k} \ne \end{cases}$$



**Bảng 4.2 Tính chất của DFT đối với các dãy có chiều dài hữu hạn N.**

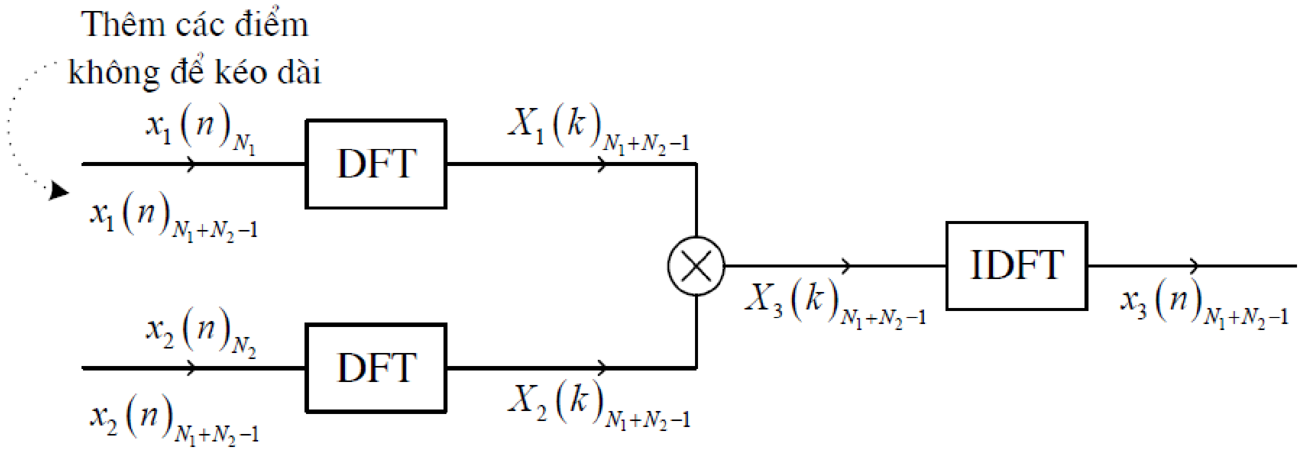
| Miền n | Miền tần số rời rạc k |
|---|---|
| $x(n)_N = \begin{cases} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)_N W_N^{-kn} & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \ne \end{cases}$ | $X(k)_N = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)_N W_N^{kn} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & k \ne \end{cases}$ |
| $ax(n)_{N_1} + bx(n)_{N_2} = x(n)_{N_3}$, $N_3 = \max[N_1, N_2]$ | $aX_1(k)_{N_3} + bX_2(k)_{N_3} = X_3(k)_{N_3}$ |
| $x(n-n_0)_N$ | $W_N^{kn_0} X(k)_N$ |
| $W_N^{-k_0 n} x(n)$ | $X(k-k_0)_N$ |
| $\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)_N\, x_2(n-m)_N = x_1(n)_N (*)_N\, x_2(n)_N$ | $X_1(k)_N\, X_2(k)_N$ |
| $x_1(n)_N\, x_2(n)_N$ | $\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} X_1(l)_N\, X_2(k-l)_N$ |
| $x^*(n)_N$ | $X^*(-k)_N$ |
| $x^*(-n)_N$ | $X^*(k)_N$ |
| $\mathrm{Re}\left[x(n)_N\right]$ | $\frac{1}{2}X(k)_N + \frac{1}{2}X^*(-k)_N$ |
| $j\,\mathrm{Re}\left[x(n)_N\right]$ | $\frac{1}{2}X(k)_N - \frac{1}{2}X^*(-k)_N$ |
| Với $x(n)_N$ thực | $X(k)_N = X^*(-k)_N$ |
| | $X^*(k)_N = X(-k)_N$ |
| | $\mathrm{Re}\left[X(k)_N\right] = \mathrm{Re}\left[X(-k)_N\right]$ |
| | $\mathrm{Im}\left[X(k)_N\right] = -\mathrm{Im}\left[X(-k)_N\right]$ |
| | $\left\|X(k)_N\right\| = \left\|X(-k)_N\right\|$ |
| | $\arg\left[X(k)_N\right] = -\arg\left[X(-k)_N\right]$ |
| $\sum_{n=0}^{N-1} \left\|x(n)\right\|^2$ | $\frac{1}{N}\sum_{h=0}^{N-1} \left\|X(k)_N\right\|^2$ |

# 4.5 Tính tích chập tuyến tính bằng biến đổi DFT

- Điều kiện để ta có thể sử dụng phép chập vòng để tính phép chập tuyến tính đối với 2 dãy có chiều dài hữu hạn $x_1(n)_{N1}$ và $x_2(n)_{N2}$ là chiều dài chúng ta chọn để thực hiện phép chập N3 phải thoả mãn: N3≥ N1+N2-1
- Ở đây, trước tiên ta phải bổ xung các mẫu bằng 0 để tăng chiều dài và tối thiểu bằng N1+N2-1 sau đó mới thực hiện phép chập vòng:

$$x_3(n)_{N_1+N_2-1} = x_1(n)_{N_1} (*)_{N_1+N_2-1} x_2(n)_{N_2}$$

- Tính phép chập tuyến tính thông qua phép chập vòng ta sẽ lợi dụng được ưu thế của biến đổi Fourier rời rạc là biến đổi xuôi ngược cùng một thuật toán, do vậy cải thiện hiệu năng tính toán đáng kể, hơn nữa phép chập sang miền tần số rời rạc trở thành phép nhân cho nên thực hiện cũng đơn giản hơn rất nhiều.



# 4.6 PHÉP CHẬP NHANH (PHÉP CHẬP PHÂN ĐOẠN)

- Trên thực tế, chúng ta thường gặp trường hợp phải thực hiện biến đổi Fourier rời rạc với các dãy có chiều dài khác xa nhau, một dãy trong phép DFT quá dài sẽ dẫn đến vượt quá dung lượng của bộ nhớ thời gian tính toán quá lớn không cho phép, để có được mẫu đầu tiên của kết quả ta phải đợi kết thúc tất cả quá trình tính toán. Khi gặp vấn đề trên ta phải chia tính toán ra thành nhiều giai đoạn.
- Giả sử chúng ta xét một hệ thống với đầu vào x(n) có chiều dài N, đáp ứng xung h(n) có chiều dài M, ta thấy rằng trên thực tế N >> M. Khi thực hiện phép chập tuyến tính để xác định đầu ra y(n) của hệ thống y(n)=x(n)*h(n) thông qua DFT ta phải thực hiện các bước sau theo phương pháp Stockham

# 4.6 PHÉP CHẬP NHANH (tt)

- Chia đầu vào x(n) ra thành nhiều dãy con:

$$x(n)_N = \sum_i x_i(n)_{N_1}$$

với

$$x_i(n)_{N_1} = \begin{cases} x(n) & iN_1 \le n \le (i+1)N_1 - 1 \\ 0 & n \ne \end{cases}$$

- Thực hiện chập từng dãy con với nhau:

$$y_i(n)_{N_1+M-1} = h(n)_M * x_i(n)_{N_1}$$

Phép chập này được thực hiện thông qua phép chập vòng nhờ DFT. Ở đây, chiều dài thực hiện DFT là $N_1$+M-1.

- Sau đó chúng ta tổ hợp các kết quả thành phần:

$$y(n) = \sum_i y_i(n)_{N_1+M-1}$$

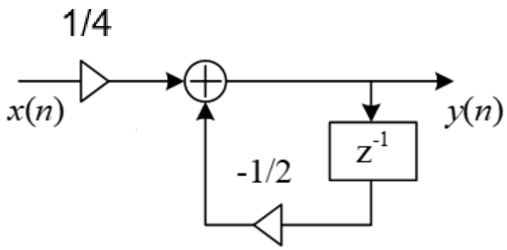
Chiều dài thực hiện DFT sẽ được chọn theo bảng Helm như sau:

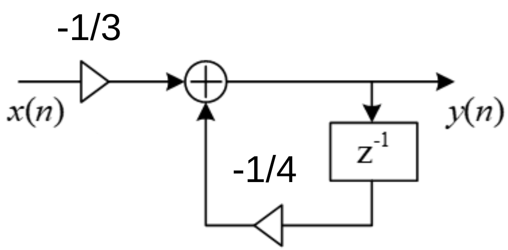
# Bảng HELM chọn chiều dài thực hiện DFT

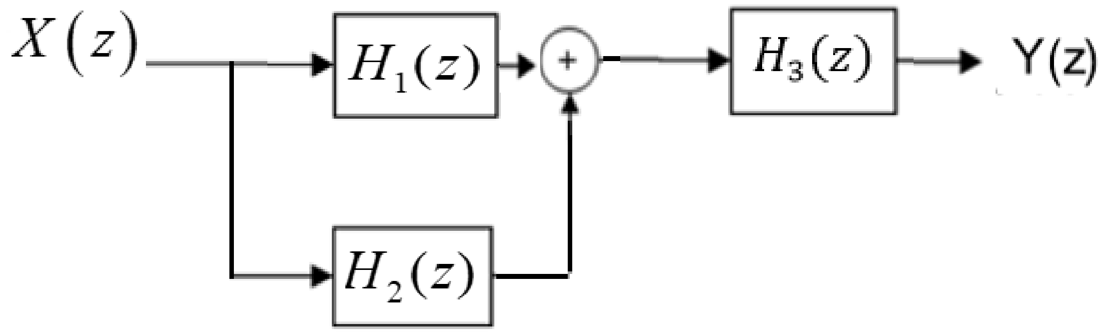
| Chiều dài của h(n)<br>M | Chiều dài của DFT<br>$N_1 + M - 1$ |
|---|---|
| ≤ 10 | 32 |
| 11-17 | 64 |
| 18-29 | 128 |
| 30-52 | 256 |
| 53-94 | 512 |
| 95-171 | 1024 |
| 172-310 | 2048 |
| 311-575 | 4096 |
| 576-1050 | 8192 |
| 1051-2000 | 16.384 |
| 2001-3800 | 32.768 |
| 3801-7400 | 65.536 |
| 7401-1480 | 131.072 |

# Tổng kết

1. Cặp biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy tuần hoàn có chu kỳ N.
2. Cặp biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy có chiều dài hữu hạn N.
3. Các tính chất của biến đổi Fourier rời rạc DFT.
4. Thực hiện phép chập nhanh.

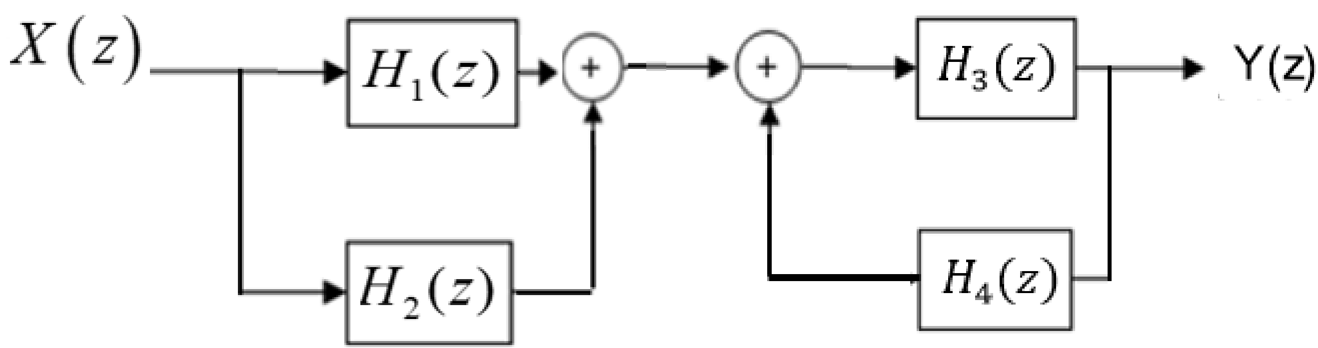


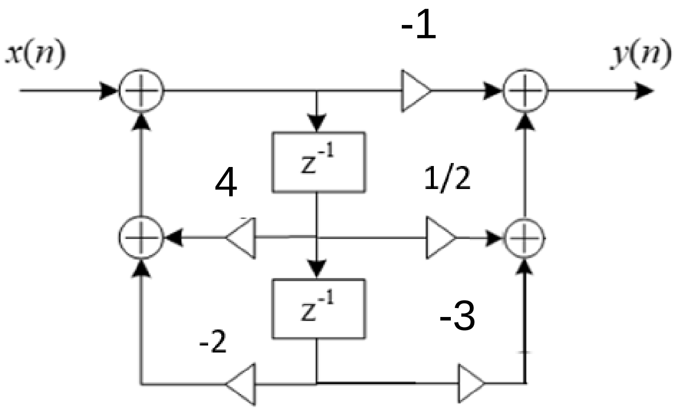



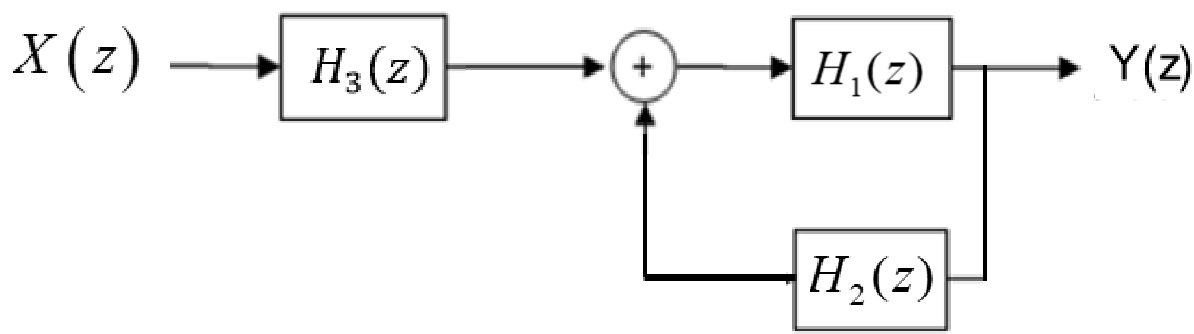

$H_3(z)$

$H_2(z)$





-1
x(n)
y(n)
z-1
4
1/2
z-1
-3
-2

X(z)
H3(z)
H1(z)
Y(z)
H2(z)