HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

o0o

Chương 1: Các khái niệm cơ bản về xác suất

XÁC SUẤT THỐNG KÊ

Bộ môn Toán, Khoa Cơ bản 1

Hà Nội - 2023

Chương 1: Các khái niệm cơ bản về xác suất

1. 1.1 Phép thử và biến cố
2. 1.2 Định nghĩa xác suất và các tính chất
3. 1.3 Xác suất có điều kiện
4. 1.4 Dãy phép thử Bernoulli

Chương 1: Các khái niệm cơ bản về xác suất

1. 1.1 Phép thử và biến cố
2. 1.2 Định nghĩa xác suất và các tính chất
3. 1.3 Xác suất có điều kiện
4. 1.4 Dãy phép thử Bernoulli

1.1.1 Phép thử

- Một phép thử có thể coi là một thí nghiệm, một phép đo hay một sự quan sát hiện tượng nào đó.
- Phép thử ngẫu nhiên là phép thử mà ta không đoán trước được kết quả của nó.
  Từ nay ta sẽ gọi tắt phép thử ngẫu nhiên là phép thử.
- Tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử được gọi là không gian mẫu, kí hiệu Ω.

Ví dụ 1.

- Gieo một con súc sắc (cân đối, đồng chất trên mặt phẳng cứng) là một phép thử.
  Không gian mẫu $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Tung một đồng xu (cân đối, đồng chất trên mặt phẳng cứng) là một phép thử.
  Không gian mẫu $\Omega = \{S, N\}$, trong đó S kí hiệu cho kết quả "mặt sấp xuất hiện", N kí hiệu cho kết quả "mặt ngửa xuất hiện".

1.1.2 Biến cố

Biến cố là một tập con của không gian mẫu.

Các loại biến cố:

- Biến cố chắc chắn: Ω
- Biến cố không thể: $\varnothing$
- Biến cố ngẫu nhiên

1.1.3 Quan hệ giữa các biến cố

Quan hệ kéo theo

- Biến cố A được gọi là kéo theo biến cố B, kí hiệu $A \subset B$, nếu A xảy ra thì B cũng xảy ra.
- Nếu A kéo theo B và B kéo theo A thì ta nói A bằng B và viết $A = B$.

Ví dụ 2. Một lớp có 50 sinh viên nam và 30 sinh viên nữ. Chọn ngẫu nhiên từ lớp đó ra 2 sinh viên. Gọi

A là biến cố 2 sinh viên được chọn đều là nam,
B là biến cố 2 sinh viên được chọn đều là nữ,
C là biến cố 2 sinh viên được chọn cùng giới.

Ta có: $A \subset C, B \subset C$

Tổng của hai biến cố

Biến cố C được gọi là tổng của hai biến cố A và B, kí hiệu $C = A \cup B$, nếu C xảy ra khi và chỉ khi A xảy ra hoặc B xảy ra.

Biến cố A được gọi là tổng của các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$, kí hiệu $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, nếu A xảy ra khi và chỉ khi ít nhất một trong các biến cố A_i xảy ra, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Tích của hai biến cố

Biến cố C được gọi là tích của hai biến cố A và B, kí hiệu $C = AB$ (hoặc $C = A \cap B$), nếu C xảy ra khi và chỉ khi cả hai biến cố A và B cùng xảy ra.

Biến cố A được gọi là tích của các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$, kí hiệu $A = A_1 A_2 \ldots A_n$ (hoặc $A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$), nếu A xảy ra khi và chỉ khi tất cả các biến cố A_i xảy ra, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Hai biến cố xung khắc

Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc với nhau nếu chúng không đồng thời xảy ra trong cùng một phép thử.

Nhận xét. Nếu A và B xung khắc thì $AB = \varnothing$.

Biến cố đối lập

Biến cố đối lập của biến cố A, kí hiệu $\overline{A}$, là biến cố xảy ra khi và chỉ khi A không xảy ra.

Nhận xét. $A \cap \overline{A} = \varnothing, A \cup \overline{A} = \Omega$.

Ví dụ 3. Một máy sản xuất ra 3 sản phẩm. Gọi

A_1 là biến cố sản phẩm thứ nhất là chính phẩm,

A_2 là biến cố sản phẩm thứ 2 là chính phẩm,

A_3 là biến cố sản phẩm thứ 3 là chính phẩm.

Hãy biểu diễn các biến cố sau thông qua 3 biến cố trên:

a) A : cả 3 sản phẩm được sản xuất ra đều là chính phẩm,

b) B : cả 3 sản phẩm được sản xuất ra đều là phế phẩm,

c) C : trong 3 sản phẩm được sản xuất ra có đúng 1 chính phẩm,

d) D : trong 3 sản phẩm được sản xuất ra có ít nhất 2 chính phẩm.

Hệ đầy đủ các biến cố

Các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là một hệ đầy đủ các biến cố nếu:

- $A_i A_j = \varnothing \ \forall i \neq j$,
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

Chú ý: $A, \overline{A}$ là một hệ đầy đủ các biến cố.

Ví dụ 4. Gieo một con súc sắc. Gọi

A_i là biến cố xuất hiện mặt i chấm, $i = 1, 2, \ldots, 6$,

A là biến cố xuất hiện mặt có số chấm chẵn.

Ta có:

$A_1, A_2, \ldots, A_6$ là một hệ đầy đủ các biến cố;

$A, \overline{A}$ là một hệ đầy đủ các biến cố.

1 1.1 Phép thử và biến cố

2 1.2 Định nghĩa xác suất và các tính chất

3 1.3 Xác suất có điều kiện

4 1.4 Dãy phép thử Bernoulli

1.2.1 Định nghĩa cổ điển của xác suất

- Xác suất của biến cố A, kí hiệu $P(A)$, là một số đặc trưng cho khả năng xuất hiện biến cố A khi phép thử được thực hiện.
- Giả sử A là biến cố liên quan đến một phép thử chỉ có một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện. Khi đó

$$P(A) = \frac{\text{số kết quả thuận lợi cho biến cố } A}{\text{số kết quả có thể xảy ra}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Ví dụ 5. Một nhóm sinh viên có 6 nam và 4 nữ. Giảng viên cần chọn ra 3 em. Tính xác suất để chọn ra được 2 em nam và 1 em nữ.

1.2.2 Định nghĩa xác suất theo thống kê

- Giả sử ta tiến hành n phép thử với cùng một hệ điều kiện thấy có n_A lần xuất hiện biến cố A. Tỉ số $f_n(A) = \dfrac{n_A}{n}$ được gọi là tần suất xuất hiện biến cố A.
- Người ta chứng minh được khi n tăng lên vô hạn thì $f_n(A)$ tiến đến một giới hạn xác định. Ta định nghĩa giới hạn này là xác suất của biến cố A.

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f_n(A)$$

Ví dụ 6. Một công ty bảo hiểm muốn xác định xác suất để một người đàn ông 25 tuổi sẽ bị chết trong vòng một năm sắp tới, người ta theo dõi 100.000 nam thanh niên 25 tuổi và thấy có 138 người chết. Vậy xác suất cần tìm xấp xỉ bằng $\dfrac{138}{100.000} = 0,00138$.

1.2.3 Các tính chất của xác suất

Các tính chất cơ bản của xác suất:

$$0 \leq P(A) \leq 1, P(\varnothing) = 0, P(\Omega) = 1$$

Quy tắc cộng xác suất

- Nếu A, B là hai biến cố bất kỳ thì

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

- Nếu A, B, C là ba biến cố bất kỳ thì

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) =& P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) \\ & - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \end{aligned}$$

Nhận xét.

1) Nếu A và B là hai biến cố xung khắc thì

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

2) $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

3) Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các biến cố đôi một xung khắc thì

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Ví dụ 7. Trong một vùng dân cư tỉ lệ người mắc bệnh tim là 9%, mắc bệnh huyết áp là 12% và mắc cả 2 bệnh là 7%. Chọn ngẫu nhiên một người trong vùng đó. Tính xác suất để:

a) người đó mắc bệnh tim hoặc bệnh huyết áp,

b) người đó không mắc cả bệnh tim và bệnh huyết áp.

Chương 1: Các khái niệm cơ bản về xác suất

1. 1.1 Phép thử và biến cố
2. 1.2 Định nghĩa xác suất và các tính chất
3. 1.3 Xác suất có điều kiện
4. 1.4 Dãy phép thử Bernoulli

1.3.1 Định nghĩa và tính chất của xác suất có điều kiện

Định nghĩa

Xác suất của biến cố B được tính với giả thiết biến cố A đã xảy ra được gọi là xác suất có điều kiện của B với điều kiện A, kí hiệu $P(B|A)$.

Ví dụ 8. Từ hộp có 4 bi trắng và 3 bi đỏ, rút ngẫu nhiên lần lượt 2 viên. Tính xác suất để lần thứ 2 rút được bi đỏ biết lần đầu rút được bi đỏ.

Tính chất

Nếu $P(A) > 0$ thì $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$

Ví dụ 9. Một lô hàng gồm 10 chính phẩm, 6 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên từ lô hàng ra 4 sản phẩm.

a) Tính xác suất để nhận được 4 sản phẩm cùng chất lượng.

b) Biết rằng đã lấy được 4 sản phẩm cùng chất lượng, tính xác suất để lấy được 4 phế phẩm.

Quy tắc nhân xác suất

- $P(AB) = P(A)P(B|A)$
- $P(A_1A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1A_2 \dots A_{n-1})$

Ví dụ 10. Sản phẩm trước khi xuất khẩu phải qua hai lần kiểm tra. Biết rằng 80 % sản phẩm làm ra qua được lần kiểm tra thứ nhất, 90% sản phẩm đã qua lần kiểm tra thứ nhất qua được lần kiểm tra thứ hai. Tính xác suất để làm ra được một sản phẩm đạt tiêu chuẩn xuất khẩu.

Tính độc lập của các biến cố

- Hai biến cố A và B được gọi là độc lập với nhau nếu

$$P(A|B) = P(A) \text{ hoặc } P(B|A) = P(B)$$

- Các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là độc lập với nhau nếu mỗi biến cố A_i đều độc lập với tích của một số bất kỳ các biến cố còn lại.

Nhận xét.

1) Hai biến cố A và B là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng đến khả năng xảy ra của biến cố kia.
2) Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì các cặp biến cố sau cũng độc lập: A và $\overline{B}$; $\overline{A}$ và $\overline{B}$; $\overline{A}$ và B.
3) Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

4) Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các biến cố độc lập thì

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

Ví dụ 11. Ba sinh viên A, B, C cùng làm bài thi một cách độc lập. Xác suất làm được bài thi của sinh viên A, B, C tương ứng là 0,6; 0,7 và 0,8.

a) Tính xác suất để có đúng 1 sinh viên làm được bài.

b) Tính xác suất để có ít nhất 1 sinh viên làm được bài.

c) Biết rằng có đúng 1 sinh viên làm được bài, tính xác suất để đó là sinh viên C.

Công thức xác suất đầy đủ

Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là một hệ đầy đủ các biến cố và A là một biến cố nào đó thì:

$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + \ldots + P(A_n)P(A|A_n).$$

Chú ý: Nếu phép thử gồm 2 giai đoạn và biến cố A cần tính xác suất liên quan đến giai đoạn sau thì $P(A)$ được tính bằng công thức xác suất đầy đủ và các kết quả có thể có của giai đoạn đầu chính là hệ đầy đủ các biến cố.

Ví dụ 12. Một trạm chỉ phát 2 loại tín hiệu A và B với xác suất tương ứng là 0,84 và 0,16. Do có nhiễu trên đường truyền nên 1/6 tín hiệu A bị méo và được thu như là tín hiệu B, còn 1/8 tín hiệu B bị méo thành tín hiệu A. Tìm xác suất thu được tín hiệu A

Công thức Bayes

Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là một hệ đầy đủ các biến cố và A là một biến cố với $P(A) \neq 0$ thì $\forall j = 1, \ldots, n$,

$$P(A_j|A) = \frac{P(A_jA)}{P(A)} = \frac{P(A_j)P(A|A_j)}{P(A)} = \frac{P(A_j)P(A|A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A|A_i)}$$

Các xác suất $P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_n)$ được xác định trước khi phép thử được tiến hành nên thường được gọi là các xác suất tiên nghiệm, còn các xác suất $P(A_1|A), P(A_2|A), \ldots, P(A_n|A)$ được xác định sau khi phép thử được tiến hành và biến cố A đã xảy ra nên được gọi là các xác suất hậu nghiệm.

Ví dụ 13. Tại sân bay ở một thị trấn có 3 hãng hàng không A, B, C phục vụ với tỷ lệ các chuyến bay cất cánh của 3 hãng lần lượt là 45%, 30% và 25%. Tỷ lệ các chuyến bay cất cánh đúng giờ của ba hãng A, B, C tại sân bay trên lần lượt là 90%, 80% và 85%. Có một chuyến bay cất cánh đúng giờ sáng nay. Hãy tính xác suất để chuyến bay đó là của hãng hàng không A.

Ví dụ 14. Trong một vùng, tỷ lệ nam và nữ là 12 : 13. Khả năng mắc bệnh bạch tạng ở nam là 0,6% và ở nữ là 0,35%. Chọn ngẫu nhiên một người dân ở vùng này.

a) Xác suất để người đó bị mắc bệnh bạch tạng là bao nhiêu?

b) Biết người được chọn bị bệnh bạch tạng. Tính xác suất để người đó là nữ.

c) Biết người được chọn không bị bệnh bạch tạng. Khả năng người đó là nữ hay là nam cao hơn?

1. 1.1 Phép thử và biến cố
2. 1.2 Định nghĩa xác suất và các tính chất
3. 1.3 Xác suất có điều kiện
4. 1.4 Dãy phép thử Bernoulli

Dãy phép thử Bernoulli

Tiến hành một dãy n phép thử độc lập, xác suất xuất hiện biến cố A ở mỗi phép thử là như nhau và bằng p, $0 < p < 1$. Dãy n phép thử trên được gọi là một dãy phép thử Bernoulli hoặc một lược đồ Bernoulli.

Công thức Bernoulli

Gọi $P_n(k)$ là xác suất để biến cố A xuất hiện k lần trong một dãy n phép thử Bernoulli. Khi đó

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \ k = 0, 1, \ldots, n,$$

Ví dụ 15. Tín hiệu thông tin được phát đi 5 lần độc lập nhau. Xác suất thu được mỗi lần là 0,4.

a) Tìm xác suất để nguồn thu nhận được thông tin đúng 2 lần.

b) Tìm xác suất để nguồn thu nhận được thông tin đó.

c) Nếu muốn xác suất thu được tin không nhỏ hơn 0,9 thì phải phát đi ít nhất bao nhiêu lần?

Số lần xuất hiện chắc nhất

Xét một dãy n phép thử Bernoulli. Số m được gọi là số lần xuất hiện chắc nhất hoặc số lần xuất hiện có khả năng nhất nếu

$$P_n(m) \geq P_n(k), \forall k = 0, 1, \ldots n.$$

Cách tìm m:

- Tính $(n+1)p$
- m là số nguyên thỏa mãn $\boxed{(n+1)p - 1 \leq m \leq (n+1)p}$

Ví dụ 16. Một bài thi trắc nghiệm gồm 50 câu hỏi, trong mỗi câu hỏi có 4 cách trả lời và chỉ có một cách trả lời đúng. Một học sinh không học bài chỉ trả lời bằng cách đánh dấu ngẫu nhiên. Tính số câu có khả năng nhất mà học sinh đó trả lời đúng.