HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

o0o

Chương 4: Hệ phương trình tuyến tính

ĐẠI SỐ

Bộ môn Toán, Khoa Cơ bản 1

Hà Nội - 2023

Chương 4: Hệ phương trình tuyến tính

4.1.1 Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính

Hệ m phương trình tuyến tính n ẩn là hệ có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

trong đó

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các ẩn,
- a_{ij} là hệ số của x_j ở phương trình thứ i,
- $b_1, b_2, \ldots, b_m$ là các hệ số tự do.

- Nếu $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ thì (1) được gọi là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.
- Nghiệm của hệ (1) là bộ n số $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ sao cho

$$a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \ldots + a_{in}s_n = b_i \ \forall i = 1, \ldots, m$$

Nhận xét. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất luôn có nghiệm $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$, nghiệm này được gọi là nghiệm tầm thường.

4.1.2 Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Xét các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ và } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình (1) có thể được viết dưới dạng ma trận

$$AX = B$$

- A được gọi là ma trận hệ số,
- X được gọi là ma trận ẩn,
- B được gọi là ma trận vế phải.

4.1.3 Dạng véc tơ của hệ phương trình tuyến tính

Đặt

$$v_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}), j = 1, 2, \ldots, n,$$
$$b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$$

Khi đó hệ phương trình (1) có thể được viết dưới dạng véc tơ

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n = b$$

Nhận xét. Hệ phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$b \in \text{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

Ví dụ 1. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -3 \end{cases}$$

a) Viết lại hệ phương trình đã cho dưới dạng ma trận.

b) Viết lại hệ phương trình đã cho dưới dạng véc tơ.

Định lý 4.1 (Kronecker-Capelli)

Hệ phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$r(A) = r(\tilde{A})$$

trong đó $\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] = [A \mid B]$

$\tilde{A}$ được gọi là ma trận bổ sung của hệ.

4.3.1 Phương pháp Cramer

Hệ Cramer

Hệ n phương trình, n ẩn

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2}$$

được gọi là hệ Cramer nếu $\det A \neq 0$, trong đó A là ma trận hệ số của hệ.

Định lý 4.2

Hệ Cramer (2) có nghiệm duy nhất được cho bởi công thức:

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \ j = 1, 2, \ldots, n$$

trong đó A_j là ma trận nhận được từ A bằng cách thay cột thứ j bởi cột vế phải B.

Ví dụ 2. Giải hệ Cramer:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = a \\ x_1 + x_2 + x_3 = b \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = c \end{cases}$$

4.3.2 Phương pháp ma trận nghịch đảo

Định lý 4.3

Cho hệ phương trình tuyến tính gồm n phương trình, n ẩn được viết dưới dạng ma trận
$$AX = B.$$
Nếu A khả nghịch thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất
$$X = A^{-1}B$$

4.3.3 Phương pháp khử Gauss

Giải hệ m phương trình tuyến tính n ẩn $AX = B$ bằng phương pháp khử Gauss

Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên hàng để đưa ma trận bổ sung $\tilde{A} = [A \mid B]$ về dạng bậc thang R.

1. Nếu $r(A) \neq r(\tilde{A})$ thì hệ phương trình vô nghiệm.
   Ngược lại, viết hệ đã cho tương đương với hệ phương trình có ma trận bổ sung là R.
2. Nếu $r(A) = r(\tilde{A}) = n$ thì hệ có nghiệm duy nhất.
3. Nếu $r(A) = r(\tilde{A}) = p < n$ thì hệ có vô số nghiệm. Khi đó:
   - Gọi các ẩn tương ứng với các phần tử khác 0 đầu tiên ở mỗi hàng là ẩn chính, các ẩn còn lại là ẩn phụ.
   - Chuyển các ẩn phụ sang vế phải của hệ và giải hệ thu được từ dưới lên trên ta được công thức biểu diễn p ẩn chính qua $n-p$ ẩn phụ.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$$

Ví dụ 4. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + ax_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - ax_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = b \end{cases}$$

Tìm a, b để

a) hệ có nghiệm duy nhất.

b) hệ có vô số nghiệm.

c) hệ vô nghiệm.

Định lý 4.4

Xét một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất gồm n ẩn với ma trận hệ số A.

1) Hệ chỉ có nghiệm tầm thường khi và chỉ khi $r(A) = n$.
2) Nếu $r(A) = p < n$ thì tập hợp nghiệm của hệ là không gian véc tơ con $n - p$ chiều của $\mathbb{R}^n$.

Ví dụ 5. Tìm a sao cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + 3y + 3z = 0 \\ ax + y + 4z = 0 \end{cases}$$

chỉ có nghiệm tầm thường.

Ví dụ 6. Giả sử U là không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Tìm một cơ sở của U.

Định lý 4.5

Giả sử X_1 là một nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $AX = B$. Khi đó mọi nghiệm X_2 của hệ $AX = B$ có dạng

$$X_2 = X_0 + X_1$$

trong đó X_0 là một nghiệm của hệ phương trình thuần nhất tương ứng $AX = 0$.