6.20. Với mỗi dạng toàn phương Q sau hãy viết ma trận trong cơ sở chính tắc và tìm cơ sở để biểu thức tọa độ của Q trong cơ sở này có dạng chính tắc:

e) $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1{}^2 + 3x_2{}^2 + 4x_3{}^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

+) PP Lagrange

$$Q(u) = \left(2x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3\right) + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 3x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 - x_1(x_2 - 2x_3) + \left(\frac{x_2 - 2x_3}{2}\right)^2\right]$$

$$- \frac{(x_2 - 2x_3)^2}{2} + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 3x_2x_3$$

$$= 2\left(x_1 - \frac{x_2 - 2x_3}{2}\right)^2 + \underbrace{\frac{5}{2}x_2^2 - x_2x_3} + 2x_3^2$$

$$= 2\left(x_1 - \frac{x_2 - 2x_3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}\left(x_2^2 - \frac{2}{5}x_2x_3 + \frac{1}{25}x_3^2\right)$$

$$- \frac{1}{10}x_3^2 + 2x_3^2$$

$$= 2\left(\underbrace{x_1 - \frac{x_2 - 2x_3}{2}}\right)^2 + \frac{5}{2}\left(\underbrace{x_2 - \frac{1}{5}x_3}\right)^2 + \frac{19}{10}x_3^2$$

$p = 3,\ q = 0$

Đặt $\begin{cases} y_1 = x_1 - \dfrac{x_2 - 2x_3}{2} \\ y_2 = x_2 - \dfrac{1}{5} x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ $\Rightarrow Q(u) = 2y_1^2 + \frac{5}{2} y_2^2 + \frac{19}{10} y_3^2$

e) $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

PP Jacobi

+) Ma trận của Q trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -3/2 \\ 2 & -3/2 & 4 \end{bmatrix}$$

+) Các định thức con chính của A

$$D_1 = 2, \quad D_2 = 5, \quad D_3 = \det A = \frac{19}{2}$$

$$Q(u) = \frac{1}{D_1} y_1^2 + \frac{D_1}{D_2} y_2^2 + \frac{D_2}{D_3} y_3^2$$

$$= \frac{1}{2} y_1^2 + \frac{2}{5} y_2^2 + \frac{10}{19} y_3^2$$

Câu D.8.2: Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ xác định bởi:

$$f(x,y,z,t) = (x+y+z+mt, x+y+mz+t, x+my+z+t, mx+y+z+t)$$

Viết ma trận của f trong cơ sở chính tắc. Tìm các giá trị m để:

a) f là một đẳng cấu;

b) $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.

Câu D.9.2: Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^4$ xét hệ véc tơ $\mathscr{S}$:

$$u_1 = (1,1,0,-1),\ u_2 = (1,2,1,3),\ u_3 = (1,1,-9,2),\ u_4 = (16,-13,1,3)$$

a) Chứng tỏ rằng $\mathscr{S}$ là một hệ trực giao và là một cơ sở của $\mathbb{R}^4$.

b) Tìm tọa độ của véc tơ $v = (x,y,z,t)$ trong cơ sở $\mathscr{S}$.

Câu D.10.2: Cho u_1, u_2 là hai véc tơ trực giao độc lập tuyến tính của không gian véc tơ Euclide

D.8.2:

a) Ma trận chính tắc của f là $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

f là đẳng cấu $\Leftrightarrow$ A khả nghịch $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

$$\det A = \begin{vmatrix} m+3 & 1 & 1 & m \\ m+3 & 1 & m & 1 \\ m+3 & m & 1 & 1 \\ m+3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$H_1 \to H_1 - H_4$

$H_2 \to H_2 - H_4$

$H_3 \to H_3 - H_4$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & m-1 \\ 0 & 0 & m-1 & 0 \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \\ m+3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (m-1)(-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 0 & m-1 \\ 0 & m-1 & 0 \\ m+3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(m-1)(m-1) \begin{vmatrix} 0 & m-1 \\ m+3 & 1 \end{vmatrix} = (m-1)^3(m+3)$$

Vậy f là đẳng cấu $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -3 \end{cases}$

b) $\dim \operatorname{Ker} f = 4 - r(A)$

$\dim \operatorname{Ker} f = 1 \Leftrightarrow \boxed{r(A) = 3}$

$\det A = (m-1)^3(m+3) \Rightarrow$ Nếu $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -3 \end{cases}$ thì $\det A \neq 0$

$\Rightarrow r(A) = 4$

$$m = 1 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 1$$

$$\boxed{m = -3} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A có định thức con cấp 3: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$$

$\Rightarrow r(A) = 3$

Vậy $m = -3$.

D. 9.2b)

$$v = \frac{\langle v, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle v, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 + \frac{\langle v, u_3\rangle}{\|u_3\|^2} u_3 + \frac{\langle v, u_4\rangle}{\|u_4\|^2} u_4$$

$$= \frac{x+y-t}{3} u_1 + \frac{x+2y+z+3t}{15} u_2 + \frac{x+y-9z+2t}{87} u_3 + \frac{16x-13y+z+3t}{435} u_4$$

Vậy tọa độ của véc tơ v trong cơ sở $\mathcal{G}$ là

$$\left(\frac{x+y-t}{3}, \frac{x+2y+z+3t}{15}, \frac{x+y-9z+2t}{87}, \frac{16x-13y+z+3t}{435}\right).$$

Câu 37. Cho W_1, W_2 là các không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$. Khẳng định nào dưới đây **không đúng**?

A. Nếu $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$ thì $\dim W_1 + \dim W_2 = 3$.

B. $W_1 + W_2$ là tổng trực tiếp khi và chỉ khi $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$.

C. Nếu $W_1 = \{(x, y, 0) |\ x, y \in \mathbb{R}\}; W_2 = \{(0, y, y) |\ y \in \mathbb{R}\}$ thì $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

D. Nếu $W_1 = \{(x, y, 0) |\ x, y \in \mathbb{R}\}; W_2 = \{(x, y, z) |\ x - y + 2z = 0\}$ thì $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 \Rightarrow$ A đúng

$W_1 + W_2$ là tổng trực tiếp $\Leftrightarrow W_1 \cap W_2 = \{0\}$

$\Leftrightarrow \dim(W_1 \cap W_2) = 0$

$\Rightarrow$ B đúng

C. $u \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow u = (x, y, z) = \underbrace{(x, y-z, 0)}_{\in W_1} + \underbrace{(0, z, z)}_{\in W_2}$

cách tách này là duy nhất

$\Rightarrow \mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2 \Rightarrow$ C đúng