

## BÀI TẬP GIẢI TÍCH I CHO CÁC LỚP TÍN CHỈ

### CHƯƠNG I: GIỚI HẠN DÃY SỐ

**1.1.** Viết các số phức sau dưới dạng đại số.

a.  $\frac{1}{1+3i} - \frac{1}{1-3i}$  ;    b.  $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{10}$  ;    c.  $\frac{(1+i)(2+3i)(4-2i)}{(1+2i)^3(1-i)}$  ;    d.  $\sqrt[3]{4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i}$

**1.2.**

a. Cho số phức  $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$ , tính  $z^{2012}$ .

b. Tìm phần thực và ảo của  $z = (1 + \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ;

c. Biểu diễn hàm số  $\cos 5x$ ,  $\sin 5x$  theo các hàm số  $\cos x$ ,  $\sin x$ .

**1.3.** Giải các phương trình sau trong tập số phức.

a.  $(z^2 + 3z + 6)^2 + 2z(z^2 + 6) - z^2 = 0$ ;    b.  $(z^2 - 4z + 5)^2 + (z + 1)^2 = 0$

c.  $x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 100 = 0$ ;    c.  $z^4 - z^3 + \frac{z^2}{2} + z + 1 = 0$

**1.4. (Olympic 2000)** Cho số tự nhiên  $m > 1$  và số phức  $z$  có môđun bằng 1. Chứng minh rằng

phương trình  $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^m = z$  chỉ có các nghiệm thực.

**1.5.** Bằng định nghĩa hãy chứng minh sự hội tụ của các dãy số với phân tử tổng quát thứ  $n$  tương ứng sau:

a.  $u_n = \frac{n+1}{4n+1}$  ;    b.  $u_n = \frac{n^2}{n^3+1}$  ;    c.  $u_n = \frac{3+(-3)^n}{4^n}$

**1.6.** Tính các giới hạn sau:

a.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} \right)$ ;

b.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right)$

c.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \cos 2n}$ ;

d.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an + 2} - n)$  (với  $a$  là tham số)

**1.7.** Cho dãy  $\{u_n\}$  với  $u_n = \frac{a_n}{b_n}$  với  $a_n = 2a_{n-1} + 3b_{n-1}$ ,  $b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$ ,  $a_0 > 0$ ,  $b_0 > 0$

a. Chứng tỏ rằng  $a_n > 0$ ,  $b_n > 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

b. Biểu diễn  $u_{n+1}$  qua  $u_n$ .

c. Tính  $u_{n+1} - u_n$  và chứng tỏ rằng  $\{u_n\}$  đơn điệu. Hãy tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

**1.8.** Tìm giới hạn của dãy sau:

a.  $u_n = \frac{2}{u_{n-1}} + 1, u_0 = 1,$

b.  $u_n = \sqrt{1 + u_{n-1}}, u_0 = \sqrt{3}.$

c.  $u_n(3 + u_{n-1}) + 1 = 0, u_0 = 1,$

d.  $u_n = \sqrt{a + u_{n-1}}, (n > 1), u_1 = \sqrt{a}, a > 0.$

e.  $u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}, u_1 = 0, u_2 = 1,$

f.  $u_n = \frac{1}{2} + \frac{u_{n-1}^2}{2}, u_1 = \frac{1}{2}.$

**1.9 (Olympic 2005)** Cho dãy số  $\{u_n\}$  xác định bởi công thức  $u_{n+1} = u_n^2 - 2, u_1 = 5$ . Hãy tính

giới hạn  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n}.$

## CHƯƠNG II: PHÉP TÍNH VI PHÂN CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

**2.1.** Tìm miền xác định của các hàm số sau:

$$y = \sqrt{1 - \ln(x^2 - 1)}; y = \frac{1}{2|x| + |x-1| - 3}; y = \frac{1}{\sqrt{2x-5}} + \arcsin \frac{2x+1}{x-2}; y = \log \frac{x^2 - 3x + 2}{x+1} + \ln x$$

**2.2.** Tìm miền giá trị của các hàm số sau :

$$y = \sqrt{-x^2 + x + 2}; y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}; y = \frac{1 + \sin^2 x}{1 + \cos^2 x}; y = \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}$$

**2.3.** Tính các giới hạn sau

a)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - 11x - 21}{x^2 - 9x + 14}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt{x+1} - 3}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{x+1}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x-1};$

f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1};$

g)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{3x-1}}{x-3}$

h)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 + 2x + 1}{3x^2 + 5} \right)^{(x^2 - 2)}$

k)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

l)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$

m)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{1 - \tan^2 x}$

**2.4.** Tính các giới hạn sau.

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x}{\sin \frac{x}{2} \cdot \arctan x}$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos x) \arcsin x}{x \tan^2 x}$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos 5x) \arcsin 2x}{(e^{2x}-1) \tan^2 x}$
- 4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(e^{x-1}-1)}{\ln x}$
- 5)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \ln x}{\arctan^2(x-1)}$
- 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1+3 \sin x)}$
- 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \sin 5x}{(e^{3x}-1) \ln(1+\tan x)}$
- 8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{\ln(1+3x^2)}$
- 9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\ln^2(1-2x)}$
- 10)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 3x} - 1}{\ln(1+\tan 2x)}$
- 11)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x} - e^{\sin 2x}}{\ln(1+2x)}$
- 12)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x}$
- 13)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin 3x} - 1}{\ln(1+\tan 2x)}$
- 14)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}{\arctan^2 x}$
- 15)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \tan^2 x\right)^{\frac{1}{\ln(1+x \sin 3x)}}$
- 16)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{3x} + \sin 2x\right)^{\cot x}$
- 17)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x^2 e^x\right)^{\frac{1}{1-\cos 7x}}$
- 18)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x + \tan 5x}{3x + x^5}$
- 19)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x - \sin^2 x}{\tan^2 x + \ln(1+7x)}$
- 20)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2-x^5)}{(e^x-1)^2 + \tan^3 x}$
- 21)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x(\cos 4x-1)}{\ln(1+x^3) + \arcsin^5 x}$

## 2.5. Khảo sát tính liên tục của các hàm số

$$1) f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x} & \text{khi } x > 0 \\ 2x^2-3x+2 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{khi } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

## 2.6. Xác định các giá trị của tham số để các hàm sau liên tục trên miền xác định

$$a) f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{nếu } x \leq 1 \\ 4-ax^2 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}; \quad b) f(x) = \begin{cases} 2 \sin x & \text{khi } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \sin x + b & \text{khi } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{khi } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 3x+a & \text{khi } x \geq 0 \\ \frac{\sin 2x \ln(1+x^2)}{x^3} & \text{khi } x < 0 \end{cases} \quad d) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln(1+x^2)} & \text{khi } x > 0 \\ (1+3\sin^2 x) & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$$

**2.7. Tìm điểm gián đoạn và phân loại điểm gián đoạn của các hàm số sau**

$$\begin{aligned} 1) y &= \frac{x^2-4}{x^2+x-6} & 2) y &= \frac{x^3-2x^2}{3|x-2|} & 3) y &= \frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4} \\ 4) y &= \frac{\sqrt[3]{5x-4}-1}{x^2-x} & 5) y &= x \cot x & 6) y &= \frac{1}{1-e^{2-x}} \\ 7) y &= \frac{1}{x^2+e^{\frac{1}{x-3}}} & 8) y &= \begin{cases} 4 & \text{khi } |x| > 2 \\ 2 & \text{khi } x=0, x=\pm 2 \\ 4-x^2 & \text{khi } 0 < |x| < 2 \end{cases} & 9) y &= \begin{cases} \frac{1-\cos 3x}{\ln(1+2x^2)} & \text{khi } x < 0 \\ -2x^2+1 & \text{khi } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

**2.8. Tính các đạo hàm của hàm số sau:**

$$\begin{aligned} a) y &= \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} & b) y &= \arcsin \frac{2x}{x^2+1} & c) y &= \ln(x+\sqrt{5+x^2}) \\ d) y &= e^{2x+1} \ln \sin x & e) y &= x^{-x} 2^x x^2 & f) y &= x^{x^x} \end{aligned}$$

**2.9.** Cho hàm số  $f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-1000)$ . Tính  $f'(1)$

**2.10. Xét tính khả vi của các hàm số sau:**

$$\begin{aligned} a. f(x) &= \begin{cases} e^x & ; x > 0 \\ 1+\sin x & ; x \leq 0 \end{cases} & b. f(x) &= \begin{cases} \ln(1+x) & \text{khi } x > 0 \\ \sin x + \cos x - 1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases} \\ c. y &= |(x-1)(x-2)^2(x-3)^2| & d. y &= |x| + |x+2| \end{aligned}$$

**2.11. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau:**

$$\begin{aligned} a) y &= \frac{1}{x-x^2} & b) y &= \sin ax \cdot \sin bx & c) y &= \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}, y^{(20)} \\ d) y &= (x^2+1)\sin x & e) y &= e^{ax} \sin(bx+c) & f) y &= e^x \cdot \sin x \\ g) & \text{Chứng minh hàm số } y = x^{n-1} e^{\frac{1}{x}} \text{ thỏa mãn } y^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

**2.12. Tính:**

$$a) d(xe^x); \quad b) d(\sqrt{x^2+a^2}); \quad c) \frac{d}{d(x^3)}(x^3-7x^6+11x^9); \quad d) \frac{d}{d(\cos x^2)}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)$$

**2.13.**

a) Chứng minh rằng với mọi  $m$ , phương trình  $x^3 - 3x + m = 0$  không thể có 2 nghiệm khác nhau trong  $[0,1]$ .

b) Chứng minh rằng phương trình  $f'(x) = 0$  có 3 nghiệm thực, trong đó

$$f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$$

c) Cho  $f(x)$  khả vi trên  $[a,b]$  và có đạo hàm đến cấp hai trên  $(a,b)$ . Chứng minh rằng với mọi  $x \in (a,b)$  có thể tìm được ít nhất số  $C_x \in (a,b)$  sao cho

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(C_x)$$

**2.14.** Chứng minh các bất đẳng thức sau đây:

a.  $\frac{a-b}{a} \leq \ln \frac{a}{b} \leq \frac{a-b}{b}$ ,  $(0 < b \leq a)$ ;      b.  $\frac{\alpha - \beta}{\cos^2 \beta} \leq \tan \alpha - \tan \beta \leq \frac{\alpha - \beta}{\cos^2 \alpha}$ ,  $(0 < \beta \leq \alpha < \frac{\pi}{2})$ ,

c.  $nb^{n-1}(a-b) \leq a^n - b^n \leq na^{n-1}(a-b)$ ,  $(b < a)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,

d.  $|\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|$ .

**2.15.** Sử dụng qui tắc L'Hopital tính các giới hạn sau:

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-4x}}{\ln(1+x)}$

2)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt{2+x} + x}$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi/2 - \arctan x}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$

4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x - e^{-x}}$

6)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{e^{x^2}} - 1}{2 \arctan(x^2) - \pi}$

7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{x \sin 5x}$

8)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$

9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \sin 2x - \cos x}{1 - \cos 5x}$

10)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x}$

11)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x} - e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}$

12)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16}$

13)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1 + 2 \ln \sin x}$

14)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + \tan \frac{\pi x}{2}}{\cot \pi x}$

15)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(\pi/2 - \arctan x)}$

16)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

17)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})} \right]$

18)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right)$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \quad 20) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x} \right) \quad 21) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \right)$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{7x+2}{x-1} - \frac{9}{\ln x} \right) \quad 23) \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{3x+4}{x-3} - \frac{13}{\ln(x-2)} \right) \quad 24) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right]$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 1} \tan \frac{\pi x}{2} \cdot \ln(2-x) \quad 26) \lim_{x \rightarrow +\infty} \{ x [\ln(x+1) - \ln x] \}$$

$$27) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2} \quad 28) \lim_{x \rightarrow 4} (x-4) \cot(\pi x)$$

$$29) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \arctan x) \ln x \quad 30) \lim_{x \rightarrow \pi/2} (x - \pi/2) \tan x$$

$$31) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)(\pi - 2 \arctan x) \quad 32) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x - 1) \tan^2 2x$$

$$33) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \cdot \tan \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \quad 34) \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \cdot \ln(1-x)$$

$$35) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x \quad 36) \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\tan x)^{\tan 2x} \quad 37) \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\sin 2x)^{\tan^2 2x}$$

$$38) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{\sin(\pi x)}} \quad 39) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1 - \cos x}} \quad 40) \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\frac{1}{\cot x}}$$

$$41) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arctan x}{x} \right)^{\frac{1}{1 - \cos 4x}} \quad 42) \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\cos 2x + \tan x)^{\frac{1}{(4x - \pi)^2}} \quad 43) \lim_{x \rightarrow 0} (e^{\sin x} + \sin 2x - 3x)^{\frac{1}{\cos x - 1}}$$

$$44) \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}} \quad 45) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} \quad 46) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$47) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi/2 - \arctan x)^{\frac{1}{x}} \quad 48) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}} \quad 49) \lim_{x \rightarrow \pi} (\sin x)^{\frac{1}{\ln(\sin 5x)}}$$

**2.16 (Olympic 2003)** Cho hàm số  $f(x)$  khả vi trên  $[a, b]$  và thỏa mãn

$$\begin{cases} f(a) = \frac{1}{2}(a-b) \\ f(b) = \frac{1}{2}(b-a) \end{cases}; f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0. \text{ Chứng minh rằng tồn tại các số đôi một khác nhau}$$

$$c_1, c_2, c_3 \in (a, b) \text{ sao cho } f'(c_1).f'(c_2).f'(c_3) = 1$$

### CHƯƠNG III : PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN

#### A. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

3.1. Tính các tích phân sau:

- 1)  $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$
- 2)  $\int \frac{(1-x)^2}{x^3 \sqrt{x}} dx$
- 3)  $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx$
- 4)  $\int (2^x + 3^x)^2 dx$
- 5)  $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx$
- 6)  $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$
- 7)  $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$
- 8)  $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$
- 9)  $\int \frac{dx}{x^4 - 1}$
- 10)  $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$
- 11)  $\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$
- 12)  $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx$
- 13)  $\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$
- 14)  $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} dx$
- 15)  $\int \cot^2 x dx$
- 16)  $\int \tan^2 x dx$
- 17)  $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$
- 18)  $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$
- 19)  $\int (3x+1)^3 dx$
- 20)  $\int \frac{dx}{\sqrt{-2x+1}}$
- 21)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$
- 22)  $\int \frac{dx}{4x^2 - 1}$
- 23)  $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 2}}$
- 24)  $\int \frac{dx}{\cos^2 9x}$
- 25)  $\int (3x^3 + 1)^3 x^2 dx$
- 26)  $\int (x^2 + 1)^{10} x dx$
- 27)  $\int x^2 \cos(x^3 + 2) dx$
- 28)  $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}}{x} dx$
- 29)  $\int \frac{dx}{x(2 + \ln^2 x)}$
- 30)  $\int e^{3x^2+1} x dx$
- 31)  $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}} dx$
- 32)  $\int \frac{\arccot 3x}{1+9x^2} dx$
- 33)  $\int \frac{\arcsin x - \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$34) \int \frac{1 + \cos x}{(x + \sin x)^3} dx$$

$$35) \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1 + \tan x}}$$

$$36) \int \frac{x + \sqrt{\arctan 2x}}{1 + 4x^2} dx$$

$$37) \int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$$

$$38) \int \frac{e^x + e^{2x}}{1 - e^x} dx$$

$$39) \int \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sqrt{3 - \sin^4 x}} dx$$

**3.2.** Sử dụng phương pháp đổi biến số hãy tính các tích phân sau

$$1) \int x^3 (1 - 2x^4)^{10} dx$$

$$2) \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$$

$$3) \int \frac{\sqrt{3x+5}}{x} dx$$

$$4) \int x^3 \sqrt{a - x^2} dx$$

$$5) \int \frac{\sin 4x}{\cos^2 2x + 4} dx$$

$$6) \int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x + 1}} dx$$

$$7) \int \sqrt{e^{3x} + e^{2x}} dx$$

$$8) \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$$

$$9) \int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x \ln x} dx$$

$$10) \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}$$

$$11) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{2-x^2}}$$

$$12) \int \frac{x^2 - x}{(x-2)^5} dx$$

$$13) \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx$$

$$14) \int \frac{(x+1)dx}{x(1+xe^x)}$$

$$15) \int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$16) \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$17) \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$$

$$18) \int \frac{dx}{(x^2 - 1)^{3/2}}$$

$$19) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$20) \int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$21) \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$$

**3.3.** Dùng phương pháp tích phân từng phần tính các tích phân sau:

$$1) \int \sin x \cdot \ln(\tan x) dx; \quad 2) \int x^3 \cos(2x^2) dx \quad 3) \int x^3 \ln^2 x dx; \quad 4) \int (x^3 + 2x^2 + 1)e^{-2x} dx$$

$$5) \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx; \quad 6) \int e^{-2x} (\cos 3x - \sin 4x) dx; \quad 7) \int \sin \sqrt[3]{x} dx; \quad 8) \int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx$$

$$9) \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx \quad ; \quad 10) \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx \quad ; \quad 11) \int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad ; \quad 12) \int \ln(x + \sqrt{16+x^2}) dx$$

**3.4.** Tính tích phân các hàm hữu tỷ sau:

$$1) \int \frac{2x^2 + x + 3}{x^3 + 3x^2 + 3x + 2} dx \quad ; \quad 2) \int \frac{5x^3 - 17x^2 + 18x - 5}{(x-1)^3(x-2)} dx; \quad 3) \int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+9)} dx; \quad 4) \int \frac{2x dx}{(1+x)(1+x^2)^2}$$



$$5) \int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}; \quad 6) \int \frac{(3x+1)dx}{x(x^2+1)^2}; \quad 7) \int \frac{3x^2+5x+12}{(x^2+3)(x^2+1)} dx; \quad 8) \int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1} dx;$$

**3.5. Tính tích phân các hàm lượng giác sau:**

$$\begin{array}{lll} 1) \int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5} & 2) \int \frac{dx}{3 + 5\sin x + 3\cos x} & 3) \int \frac{dx}{3\sin x + \cos x} \\ 4) \int \frac{dx}{(3 + \cos 5x)\sin 5x} & 5) \int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x - \sin^2 x - 1} dx & 6) \int \frac{\cos^5 x}{\sin x} dx \\ 7) \int \frac{\sin 2x}{4\cos^2 x + 12\cos x - 7} dx & 8) \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x + 4\sin x \cos x} & 9) \int \frac{3\cos x + 4\sin x}{5\cos x + 2\sin x} dx \\ 10) \int \frac{2\sin x + 3\cos x}{\sin^2 x \cos x + 9\cos^3 x} dx & 11) \int \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} & 12) \int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x} \\ 13) \int \frac{\cos 2x}{\sin^3 x - \cos^3 x} dx & 14) \int \frac{3\cos x + 7\sin x}{5\cos x + 2\sin x} dx & 15) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x (\sin x + \cos x)} dx \end{array}$$

**3.6. Tính tích phân các hàm vô tỷ**

$$\begin{array}{lll} 1) \int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt{x}} dx & 2) \int \frac{\sqrt[6]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx & 3) \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}} \\ 4) \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} & 5) \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}} & 6) \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[3]{2x-1}} \\ 7) \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{x+1} & 8) \int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \frac{dx}{(2-x)^2} & 9) \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x} \\ 10) \int \frac{5x+1}{\sqrt{4x^2+4x+2}} dx & 11) \int \frac{-4x+2}{\sqrt{-9x^2+12x-3}} dx & 12) \int (-3x+7) \sqrt{x^2+4x+5} dx \\ 13) \int (3x+4) \sqrt{-4x^2+4x} dx & 14) \int \frac{3x^3+2x+1}{\sqrt{x^2+4x+13}} dx & 15) \int \frac{-4x^3+5x^2+3x+1}{\sqrt{-4x^2+4x}} dx \\ 16) \int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{-x^2+4x-3}} & 17) \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2+x+1}} & 18) \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}} \end{array}$$

**3.7. Tính các tích phân sau:**

$$1) \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}; \quad 2) \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx; \quad 3) \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}; \quad 4) \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$$

$$5) \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}} dx; \quad 6) \int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad 7) \int \frac{\arctan e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)} dx.$$

## B: TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

**3.8.** Sử dụng trực tiếp định nghĩa, tính các tích phân xác định sau:

$$a) \int_0^1 x^2 dx; \quad b) \int_1^2 e^x dx; \quad c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

**3.9.** Sử dụng tổng tích phân, tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right); \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left( \frac{1^2}{n+1} + \frac{2^2}{n+2} + \dots + \frac{n^2}{2n} \right)$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}} \right); \quad d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right)$$

**3.10.** Tính các tích phân xác định sau:

$$1) \int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}} dx \quad 2) \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}} \quad 3) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3+1)}{x^2 \sqrt{4-x^2}} dx$$

$$4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x} \quad 5) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x+1)^4} \quad 6) \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$$

$$7) \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}} dx \quad 8) \int_1^e \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x} dx \quad 9) \int_3^{\sqrt{3}} x^2 \sqrt{9-x^2} dx$$

$$10) \int_0^3 \sqrt{\frac{x}{6-x}} dx \quad 11) \int_1^3 \frac{dx}{x \sqrt{x^2+5x+1}} \quad 12) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^7 2x dx$$

$$13) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx \quad 14) \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx \quad 15) \int_0^{\sqrt{5}} x^5 \sqrt{1+x^2} dx$$

**3.11.** Tính các tích phân sau:

$$1) \int_0^1 (2x+1)e^{-x} dx; \quad 2) \int_1^2 (x^2+3x) \log_2 x dx; \quad 3) \int_{-1}^1 x^3 \cdot \arctan x dx; \quad 4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$$

$$5) \int_0^1 (2x^3+x+3)e^{-3x} dx; \quad 6) \int_0^{\pi} e^x \sin x dx \quad 7) \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$$

**3.12.** Tính diện tích của miền phẳng giới hạn bởi các đường

- 1)  $y^2 = 16 - 8x, y^2 - 24x = 48$ ; 2)  $y = (x+1)^2, x = \sin \pi y, y = 0, (0 \leq y \leq 1)$ ;  
 3)  $y = \frac{1}{1+x^2}, y = \frac{x^2}{2}$ ; 4)  $y^2 = 16 - 8x, y^2 - 24x = 48$ ; 5)  $y = x^2, y = \frac{x^2}{2}, y = 2x$ .

**3.13.**

a. Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo hình phẳng giới hạn bởi các đường cong sau khi quay quanh trục Ox.

1.  $y = x^2 - 4x + 3, y = -2x + 3$ ; 2.  $y = x^2; y = 12 - 4x; y = 0; x \geq 0$   
 3.  $y = 9 - x^2; 9x + 2y - 18 = 0$ ; 4.  $x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 + 2x = 0$

b. Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo hình phẳng giới hạn bởi các đường cong sau khi quay quanh trục Oy.

1.  $y = x^2 - 4x + 3, y = -2x + 3$ ; 2.  $y = x^2; y = 12 - 4x; y = 0; x \geq 0$   
 3.  $y = 9 - x^2; 9x + 2y - 18 = 0$ ; 4.  $x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 + 2x = 0$   
 5.  $x^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$ ; 6.  $y = x^3, y = 2x$ .

**3.14.** Tính độ dài đường cong cho bởi các phương trình sau

- 1)  $y = e^x; 0 \leq x \leq 1$ ; 2)  $y = a \ln \frac{a^2}{a^2 - x^2}; 0 \leq x \leq b < a$   
 3)  $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}, 0 < b \leq y \leq a$ ; 4)  $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ .  
 5)  $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}y, 1 \leq y \leq e$ ; 6)  $x = a \cos^3 t; y = \sin^3 t, a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi$   
 7.  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$ .

**3.15.** Tính diện tích mặt tròn xoay khi quay các đường cong sau theo các trục:

- 1)  $y = \frac{x^3}{3}, 0 \leq x \leq a$  quay quanh Ox.  
 2)  $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln y, 1 \leq y \leq e$  quay quanh Oy  
 3)  $y^2 = 4x, (0 \leq x \leq 1)$  khi quay quanh Ox.  
 5)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  quay quanh Oy.

**3.16.** Chứng minh các đẳng thức sau:

- a.  $\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}, (x > 0)$ ;  
 b.  $\int_{\frac{1}{e}}^{\tan x} \frac{tdt}{1+t^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{\cot x} \frac{dt}{t(1+t^2)} = 1$ ,

$$c. \int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} dt = \frac{\pi}{4}.$$

### C. TÍCH PHÂN SUY RỘNG CÓ CẶN VÔ HẠN

**3.16.** Tính các tích phân suy rộng sau

$$\begin{array}{lll} 1) \int_2^{+\infty} \left( \frac{1}{x^2-1} + \frac{2}{(x+1)^2} \right) dx & 2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} & 3) \int_3^{+\infty} \frac{2x+5}{x^2+3x-10} dx \\ 4) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+8)^2} & 5) \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx & 6) \int_0^{+\infty} (2x^3+4x^2+6x)e^{-3x} dx \\ 7) \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+1)^3} & 8) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-5x+7} & 9) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} \\ 10) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} & 11) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x)^2} dx & 12) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} \\ 13) \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+x-6)} & 14) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} & 15) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} \end{array}$$

**3.17.** Khảo sát sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau:

$$\begin{array}{lll} 1) \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 3x}{\sqrt[3]{x^4+1}} dx & 2) \int_0^{+\infty} \left( e^{-\frac{1}{x^2}} - e^{-\frac{4}{x^2}} \right) dx & 3) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan \frac{x}{2+x^2} dx \\ 4) \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} \left( e^{\frac{1}{3x}} - 1 \right) dx & 5) \int_0^{+\infty} \left( \cos \frac{5}{x} - \cos \frac{7}{x} \right) dx & 6) \int_1^{+\infty} \ln \left( \frac{x^2+\sqrt{x}}{x^2-x} \right) \cdot \tan \frac{1}{x^2} dx \\ 7) \int_1^{+\infty} \ln \left( 1 + \tan^2 \frac{1}{x} \right) dx & 8) \int_1^{+\infty} \frac{x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{x^2+1} dx & 9) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{x}+5x^2} dx \\ 10) \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt[5]{3x^{15}+2x+1}} & 11) \int_1^{+\infty} \frac{3x^2+1}{\sqrt[3]{x^9+\ln x}} dx & 12) \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x(x+2)}}{x^2+3\ln x} dx \\ 13) \int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+e^{-x}}} dx & 14) \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^3+\sin x} dx & 15) \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \\ 16) \int_1^{+\infty} \frac{x\sqrt{\ln x}}{x^3+3x+\ln x} dx & 17) \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt{3x^3+5x^2+1}} dx & 18) \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx \end{array}$$

## D. TÍCH PHÂN SUY RỘNG CÓ HÀM DƯỚI DẤU TÍCH PHÂN CÓ ĐIỂM CỰC

3.18. Tính các tích phân suy rộng sau:

$$1) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$2) \int_0^2 \frac{dx}{(1-x)^2}$$

$$3) \int_0^1 \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

$$4) \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$

$$5) \int_{-3}^3 \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

$$6) \int_0^2 \frac{(x^3+1)dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$$

$$7) \int_0^2 \frac{x^5 dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$8) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$9) \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

3.19. Khảo sát sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau:

$$1) \int_0^1 \frac{\cos^2 \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$2) \int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt{x} \cdot \sin \sqrt{x}} dx$$

$$3) \int_0^1 \sqrt{\frac{16+x^4}{16-x^4}} dx$$

$$4) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^{10}}} dx$$

$$5) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})}}$$

$$6) \int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{e^{\sin 3x} - 1}$$

$$7) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3 - 1}}$$

$$8) \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x^2)^2}}$$

$$9) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2 4x}{\sqrt{5x^{10} + 2x^9}} dx$$

$$10) \int_0^{+\infty} \frac{3x^2 + 2}{\sqrt{x^8 + 7x^3 + x}} dx$$

$$11) \int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 2x}{\sqrt{x^3 + 3x}} dx$$

$$12) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(2+x)}{\sqrt[3]{x^4 + 3x^5}} dx$$

$$13) \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}} - 1}$$

$$14) \int_0^1 \frac{dx}{\tan x - x}$$

$$15) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$$

## CHƯƠNG 4: LÝ THUYẾT CHUỖI

4.1. Chứng minh rằng các chuỗi số có số hạng tổng quát sau đây hội tụ và hãy tìm tổng của chúng.

a.  $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ ; b.  $u_n = \frac{1}{n^2 + n}$ ; c.  $u_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ ; d.  $u_n = (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$

e)  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{3^{n-1}}$ ; f)  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n}$ ; g)  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n$ ; h)  $\sum_{n \geq 0} \ln^{2n} 2$

4.2. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số có số hạng tổng quát sau đây:

a)  $u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$ ; b)  $u_n = \arctan \frac{n^2 - n}{n^2 + 1}$ ; c)  $u_n = \frac{2^n + n}{3^n + n^3 + 3}$ ; d)  $u_n = \ln(1 + \tan \frac{1}{n^2})$   
 e)  $u_n = \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n^2 + 3 \ln n}$ ; f.  $u_n = \frac{2 + \cos n}{n^\alpha}, \alpha > 0$ ; g.  $u_n = n^{-(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})}$ ; h.  $u_n = (\frac{n}{n+1})^{n^2}$   
 i)  $u_n = \frac{2^{n^2}}{n^{2^n}}$ ; j.  $u_n = \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$ ; k.  $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{n^2 + \cos^2 x} dx$ ; l.  $u_n = \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + x + 1}}$ .

**4.3.** Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi có số hạng tổng quát sau đây:

a.  $u_n = \frac{n^2}{2^n + n}$ ; b.  $u_n = \frac{3^{2^n}}{2^{3^n}}$ ; c.  $u_n = \frac{\ln(n!)}{n!}$ ; d.  $u_n = n! \prod_{k=1}^n \sin \frac{1}{2^k}$ ; e.  $u_n = \frac{2.4...(2n)}{n^n}$ ;  
 f.  $u_n = \frac{a^n}{n^2 + 1}, a > 0$ ; g.  $u_n = (\frac{n+1}{2n-1})^{n \ln n}$ ; h.  $u_n = (\arctan \frac{1}{n})^n$ ; i.  $u_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$

**4.4.** Xét sự hội tụ của các chuỗi có số hạng tổng quát sau đây:

a.  $u_n = (-1)^n (\tan \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n}})$ ; b.  $u_n = (1 - \frac{n}{\ln n})^{-n}$ ; c.  $u_n = \sin(\pi \sqrt{n^4 + 1})$ ; d.  $u_n = \frac{(-1)^{n-1} (n+1)}{n^2 + n + 2}$ ;  
 e.  $u_n = \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$ ; f.  $u_n = \sin \pi (\frac{1}{n} + n)$ ; g.  $u_n = \frac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{1 + n}$ ; h.  $u_n = \frac{(-1)^n n^2}{(\ln n)^n}$ .

**4.5.** Chứng minh rằng chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} (\frac{2x+1}{x+2})^n$  hội tụ đều trên đoạn  $[-1, 1]$

**4.6.** Cho chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$

- Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm.
- Xét sự liên tục của tổng  $S(x)$ .
- Xét sự khả vi của tổng  $S(x)$ .

**4.7.** Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa có số hạng tổng quát sau:

a.  $u_n(x) = x^n \ln n$ ; b.  $u_n(x) = (nx)^n$ ; c.  $u_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ ; d.  $u_n(x) = \frac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$   
 e.  $u_n(x) = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n (x-2)^{2n}$ ; f.  $u_n(x) = \frac{(5x)^n}{n!}$ ; g.  $u_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!}$ ; h.  $u_n(x) = \frac{x^n}{n^\alpha}, \alpha > 0$

**4.8.** Tìm miền hội tụ và tính tổng các chuỗi lũy thừa có số hạng tổng quát sau:

- a.  $u_n(x) = (3n+1)x^{3n}, n \geq 1$ ;    b.  $u_n(x) = (2^n + 3^n)x^n, n \geq 0$ ;    c.  $u_n(x) = \frac{n^2 + 3n - 1}{n+3} \frac{x^n}{n!}, n \geq 0$ ,  
 d.  $u_n(x) = \cos inhna.x^n, a > 0, n \geq 0$ ;    e.  $u_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} x^{n-1}}{n}, n \geq 1$ .

**4.9.** Khai triển thành chuỗi Taylor của các hàm số sau:

- a.  $f(x) = \frac{1}{x}$  tại lân cận điểm  $x = 3$ .  
 b.  $f(x) = e^{x-1}$  tại lân cận điểm  $x = -1$ .  
 c.  $f(x) = \sin x$  tại lân cận điểm  $x = 2$ .

**4.10.** Khai triển thành chuỗi M'claurin các hàm số sau:

- a.  $f(x) = x^2 e^x$ ;    b.  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ ;    c.  $f(x) = \sin^2 x$   
 d.  $f(x) = e^x \cos x$ ;    e.  $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$ ;    f.  $f(x) = \int_0^x \cos t^2 dt$   
 g.  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 2 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

**4.12.** Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số  $f(x)$  lẻ, tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$  và  
 $f(x) = \pi - x$  với  $0 < x < \pi$ .

**4.12.** Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số  $f(x)$  chẵn, tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$  và  $f(x) = 1 - \frac{2x}{\pi}$  với  $0 < x < \pi$ . Từ đó hãy tính tổng  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ .

**4.13.** Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số:  $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$  với  $-\pi < x < \pi$

Từ đó tính tổng  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ .

**4.14.** Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số:  $f(x) = \sin \frac{x}{2}$  với  $-\pi < x < \pi$

**4.15.** Khai triển hàm số  $f(x) = \begin{cases} x & \text{khi } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \text{khi } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$  thành chuỗi theo các hàm

- a.  $\sin nx$ ;    b.  $\cos nx, n \in \mathbb{N}$

Từ đó tính tổng  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ .

**4.16.** Khai triển Fourier của hàm tuần hoàn với chu kỳ bất kỳ  $T = 2l$

$$a) f(x) = \begin{cases} 6 & \text{nếu } 0 < x < 2 \\ 3x & \text{nếu } 2 < x < 4 \end{cases}, f(x) \text{ là hàm tuần hoàn chu kì } T = 4$$

$$b) f(x) = x^2, x \in (0, \pi), f(x) \text{ là hàm tuần hoàn chu kì } T = \pi.$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } -3 < x \leq 0 \\ x & \text{nếu } 0 < x < 3 \end{cases}, f(x) \text{ là hàm tuần hoàn chu kì } T = 6.$$

Từ đó tính tổng chuỗi  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2}.$

$$d) f(x) = x - \frac{x^2}{2}, x \in [0, 2], f(x) \text{ tuần hoàn chu kì } T = 2.$$

$$e) f(x) = \begin{cases} x & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{khi } 1 < x < 2 \\ 3-x & \text{khi } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}, f(x) \text{ tuần hoàn chu kì } T = 3$$

$$f) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } -1 \leq x < 0 \\ x & \text{khi } 0 < x \leq 1 \end{cases}, f(x) \text{ tuần hoàn chu kì } T = 2.$$

$$g) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } -2 \leq x < 0 \\ x & \text{khi } 0 < x \leq 2 \\ \frac{x}{2} & \text{khi } 2 < x \leq 4 \end{cases}, f(x) \text{ tuần hoàn chu kì } T = 4.$$

**4.17.** Hãy khai triển các hàm số sau đây thành chuỗi Fourier theo hàm số sin

$$a) f(x) = x \cos x, x \in (0, \pi);$$

$$b) f(x) = x(\pi - x), 0 \leq x < \pi.$$

$$c) f(x) = \cos x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right];$$

$$d) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{nếu } 1 < x \leq \pi \end{cases}.$$

$$e) f(x) = |\cos x|;$$

$$f) f(x) = |\sin x|, x \in [-\pi, \pi].$$

**4.18.** Hãy khai triển các hàm số sau đây thành chuỗi Fourier theo hàm số cosin

$$a) f(x) = x \cos x, x \in (0, \pi). \text{ Tính tổng chuỗi } \sum_{n \geq 0} \frac{4n^2 + 1}{(4n^2 - 1)^2}$$

$$b) f(x) = \cos x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \text{ Tính } S = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{nếu } 1 < x \leq \pi \end{cases}. \text{ Tính tổng } S_1 = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n}; S_2 = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\sin n}{n}$$



d)  $f(x) = |\cos x|$ . Tính  $S_1 = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{4n^2 - 1}$ ;  $S_2 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1}$

e)  $f(x) = |\sin x|, x \in [-\pi, \pi]$ . Tính  $S = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

**4.19.** Hãy khai triển các hàm số sau đây thành chuỗi Fourier

a)  $f(x) = x, x \in (0, 2)$ .

b)  $f(x) = x^2, x \in (0, 1)$ . Tính tổng của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .