HỌC VIỆN BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

o0o

Chương 1. Lôgic mệnh đề, tập hợp, ánh xạ và đại số Boole

ĐẠI SỐ

Bộ môn Toán, Khoa cơ bản 1

Hà Nội - 2023

Chương 1. Lôgic mệnh đề, tập hợp, ánh xạ và đại số Boole

Chương 1. Lôgic mệnh đề, tập hợp, ánh xạ và đại số Boole

Định nghĩa

Mệnh đề là một câu khẳng định hoặc đúng hoặc sai, chứ không thể vừa đúng vừa sai.

Ví dụ 1. Trong các câu dưới đây, câu nào là một mệnh đề?

a) Washington, D.C. là thủ đô của Mỹ.
b) Hà Nội không phải là thủ đô của Việt Nam.
c) $2 + 2 < 3$.
d) Bây giờ là mấy giờ?
e) Hãy làm bài tập cẩn thận.
f) $x + y = z$.

- Thường dùng các chữ cái như $p, q, r, s, \ldots$ để ký hiệu các mệnh đề.
- Quy ước một mệnh đề đúng có giá trị chân lí bằng 1, một mệnh đề sai có giá trị chân lí bằng 0.
- Mệnh đề phức hợp được xây dựng từ các mệnh đề đơn giản hơn bằng các phép liên kết lôgic mệnh đề.

Phép phủ định

Phủ định của mệnh đề p, ký hiệu $\overline{p}$ (hoặc $\neg p$), là mệnh đề

"Không phải là p."

Bảng 1: Bảng chân trị của mệnh đề phủ định.

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

Phép hội

- Hội của hai mệnh đề p và q, ký hiệu $p \wedge q$, là mệnh đề " p và q."
- Mệnh đề $p \wedge q$ chỉ đúng khi cả hai mệnh đề p, q cùng đúng và sai khi ít nhất một trong hai mệnh đề p hoặc q sai.

Bảng 2: Bảng chân trị của mệnh đề hội.

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Phép tuyển

- Tuyển của hai mệnh đề p và q, ký hiệu $p \vee q$, là mệnh đề " p hoặc q."
- Mệnh đề $p \vee q$ chỉ đúng khi ít nhất một trong hai mệnh đề p hoặc q đúng và sai khi cả hai mệnh đề p, q cùng sai .

Bảng 3: Bảng chân trị của mệnh đề tuyển.

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Phép kéo theo

Mệnh đề p kéo theo q, ký hiệu $p \Rightarrow q$, là mệnh đề chỉ sai khi p đúng và q sai, còn đúng trong mọi trường hợp còn lại.

Bảng 4: Bảng chân trị của mệnh đề kéo theo.

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Ví dụ 2. Cho các mệnh đề

$$p: \text{"Bạn lái xe với tốc độ trên 60 km/h"}$$
$$q: \text{"Bạn bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép"}$$

Biểu diễn các mệnh đề sau bằng cách dùng p, q và các phép liên kết lôgic mệnh đề.

a) Bạn không lái xe với tốc độ trên 60 km/h.

b) Bạn lái xe với tốc độ trên 60 km/h nhưng bạn không bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép.

c) Nếu bạn không lái xe với tốc độ trên 60 km/h thì bạn sẽ không bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép.

Phép tương đương

Mệnh đề $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ được gọi là mệnh đề p tương đương q, ký hiệu $p \Leftrightarrow q$.

Bảng 5: Bảng chân trị của mệnh đề tương đương.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Một mệnh đề phức hợp được gọi là hằng đúng nếu nó luôn đúng với mọi giá trị chân lí của các mệnh đề thành phần.
- Ta ký hiệu mệnh đề tương đương hằng đúng là $\equiv$ thay cho $\Leftrightarrow$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng các mệnh đề $p \Rightarrow q$ và $\overline{p} \vee q$ là tương đương hằng đúng.

Các tính chất

TC1.	$\overline{\overline{p}} \equiv p$	Luật phủ định kép
TC2.	$(p \Rightarrow q) \equiv (\overline{p} \vee q)$	
TC3.	$p \vee q \equiv q \vee p,\ p \wedge q \equiv q \wedge p$	Luật giao hoán
TC4.	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	Luật kết hợp
	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	
TC5.	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Luật phân phối
	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	
TC6.	$\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$	Luật De Morgan
	$\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$	
TC7.	$p \Rightarrow q \equiv \overline{q} \Rightarrow \overline{p}$	Luật phản chứng
TC8.	Mệnh đề $p \wedge \overline{p}$ luôn sai, mệnh đề $p \vee \overline{p}$ luôn đúng	
TC9.	$p \vee p \equiv p, p \wedge p \equiv p$	
TC10.	$p \vee (p \wedge q) \equiv p, p \wedge (p \vee q) \equiv p$	

Chương 1. Lôgic mệnh đề, tập hợp, ánh xạ và đại số Boole

1.2.1 Khái niệm tập hợp

- Khái niệm tập hợp và phần tử là các khái niệm cơ bản của toán học, không thể định nghĩa qua các khái niệm đã biết.
- Một cách trực quan, ta có thể xem tập hợp như một sự tụ tập các đối tượng nào đó mà mỗi đối tượng là một phần tử của tập hợp.
- Để chỉ a là một phần tử của tập hợp A, ta viết $a \in \mathrm{A}$.
- Để chỉ a không phải là một phần tử của tập hợp A, ta viết $a \notin \mathrm{A}$.

Biểu diễn tập hợp

Ta thường mô tả tập hợp theo các cách sau:

1) Liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp trong dấu ngoặc nhọn.
2) Nêu tính chất đặc trưng của các phần tử tạo thành tập hợp.
   - Tập hợp có thể được mô tả bằng cách nêu tính chất đặc trưng của các phần tử thông qua khái niệm hàm mệnh đề.
   - Hàm mệnh đề S xác định trong tập hợp D là một câu khẳng định "x có tính chất S", ký hiệu $S(x)$, $x \in D$. Khi cho biến x một giá trị cụ thể thì ta được một mệnh đề.
   - Tập hợp các phần tử $x \in D$ sao cho $S(x)$ đúng được gọi là miền đúng của hàm mệnh đề $S(x)$, ký hiệu $D_{S(x)}$ hoặc $\{x \in D |\ S(x)\}$.
3) Biểu đồ Venn.

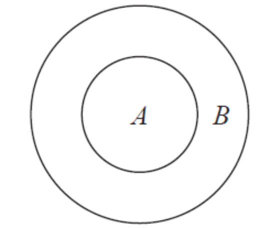
Các tập hợp số thường gặp:

- Tập các số tự nhiên $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- Tập các số nguyên $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
- Tập các số nguyên dương $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- Tập các số hữu tỉ $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, \text{ and } q \neq 0\}$.
- Tập các số thực $\mathbb{R}$.
- Tập các số phức $\mathbb{C}$.

1.2.2 Tập hợp con

Định nghĩa

Tập A được gọi là một tập con của B, ký hiệu $A \subset B$ hoặc $B \supset A$, nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B.



Hình 2.1: Biểu đồ Venn biểu diễn A là một tập con của B.

Chú ý:

- Để chứng minh $A \subset B$, ta chỉ cần chứng minh nếu $x \in A$ thì $x \in B$.
- Để chứng minh $A \not\subset B$, chỉ cần tìm một phần tử $x \in A$ sao cho $x \notin B$.

Tập hợp bằng nhau

Hai tập hợp A và B được gọi là bằng nhau, ký hiệu $A = B$, nếu

$$A \subset B \text{ và } B \subset A.$$

Tập rỗng

Tập rỗng, ký hiệu $\emptyset$, là tập không chứa phần tử nào.

Nhận xét: Với mọi tập hợp S, ta có

$$\emptyset \subset S \text{ và } S \subset S.$$

- Ký hiệu là $\mathcal{P}(S)$ là tập hợp gồm tất cả các tập con của S. Nếu S có n phần tử thì $\mathcal{P}(S)$ có 2^n phần tử.

Ví dụ 4. Tìm $\mathcal{P}(S)$ biết $S = \{0, 1, 2\}$.

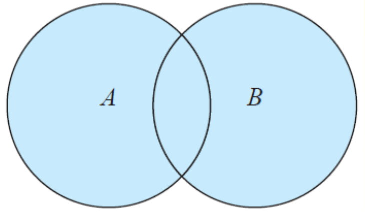
1.2.3 Các phép toán tập hợp

- Hợp của hai tập hợp A và B, ký hiệu $A \cup B$, là tập hợp

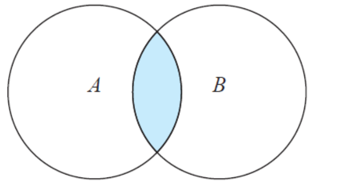
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

- Giao của hai tập hợp A và B, ký hiệu $A \cap B$, là tập hợp

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$



(a) Biểu đồ Venn biểu diễn $A \cup B$.



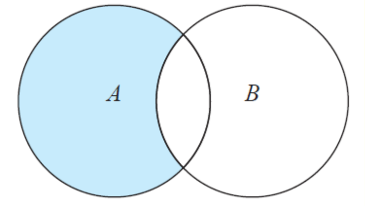
(b) Biểu đồ Venn biểu diễn $A \cap B$.

- Hiệu của A và B, ký hiệu $A \setminus B$ hoặc $A - B$, là tập hợp

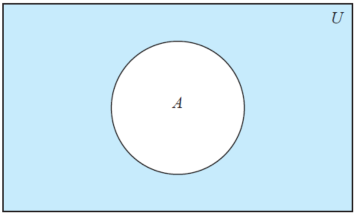
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

- Thông thường giả thiết tất cả các tập được xét là các tập con của một tập cố định gọi là tập phổ dụng U. Tập $U \setminus A$ được gọi là phần bù của A trong U, ký hiệu C_U^A hoặc $\overline{A}$.

$$\overline{A} = U \setminus A = \{x \mid x \notin A\}$$



(c) Biểu đồ Venn biểu diễn $A \setminus B$.



(d) Biểu đồ Venn biểu diễn $\overline{A}$.

Phép hợp và giao của n tập hợp

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$
$$= \{x \mid (x \in A_1) \vee (x \in A_2) \vee \ldots \vee (x \in A_n)\}$$
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$
$$= \{x \mid (x \in A_1) \wedge (x \in A_2) \wedge \ldots \wedge (x \in A_n)\}$$

Ví dụ 5.

Với $i = 1, 2, \ldots,$ đặt $A_i = \{i, i+1, i+2, \ldots\}$. Tìm $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

Các tính chất

TC1.	$A \cup A = A, A \cap A = A$	
TC2.	$A \cup B = B \cup A,\ \ A \cap B = B \cap A$	Tính giao hoán
TC3.	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	Tính kết hợp
	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	
TC4.	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Tính phân phối
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
TC5.	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	Luật De Morgan
TC6.	$\overline{\overline{A}} = A,\ \ A \cup \emptyset = A,\ \ A \cap U = A$	
TC7.	$A \cup \overline{A} = U, A \cap \overline{A} = \emptyset$	
TC8.	$A \setminus B = A \cap \overline{B}$	
TC9.	$A \cap B \subset A \subset A \cup B,$	
	$A \cap B \subset B \subset A \cup B$	
TC10.	$A \subset C$ và $B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C$	
	$D \subset A$ và $D \subset B \Rightarrow D \subset A \cap B$	

1.2.4 Lượng từ phổ biến, lượng từ tồn tại

Giả sử $S(x)$ là một hàm mệnh đề xác định trong tập D có miền đúng $D_{S(x)}$. Khi đó

- Mệnh đề "$\forall x \in D, S(x)$" là một mệnh đề đúng nếu $D_{S(x)} = D$ và sai trong trường hợp ngược lại.
  Ký hiệu $\forall$ (đọc là với mọi) được gọi là lượng từ phổ biến.
  Nếu không sợ nhầm lẫn ta thường bỏ qua $x \in D$ và viết tắt $\forall x, S(x)$ thay cho $\forall x \in D, S(x)$.
- Mệnh đề "$\exists x \in D, S(x)$" là một mệnh đề đúng nếu $D_{S(x)} \neq \emptyset$ và sai trong trường hợp ngược lại.
  Ký hiệu $\exists$ (đọc là tồn tại) được gọi là lượng từ tồn tại.
- Mệnh đề "$\exists ! x \in D, S(x)$" là một mệnh đề đúng nếu $D_{S(x)}$ có đúng một phần tử và sai trong trường hợp ngược lại

Phủ định các lượng từ

- Phủ định của mệnh đề "$\exists x \in D, S(x)$" là mệnh đề "$\forall x \in D, \overline{S(x)}$".
- Phủ định của mệnh đề "$\forall x \in D, S(x)$" là mệnh đề "$\exists x \in D, \overline{S(x)}$".

Ví dụ 6. Xác định phủ định của các mệnh đề "$\forall x, x^2 > x$" và "$\exists x, x^2 = 2$".

Phép hợp và giao suy rộng

Cho I là một tập hợp tùy ý.

- Hợp của các tập $A_i, i \in I$, ký hiệu $\bigcup_{i \in I} A_i$, là tập hợp

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$$

- Giao của các tập $A_i, i \in I$, ký hiệu $\bigcap_{i \in I} A_i$, là tập hợp

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$$

- Hợp của các tập $A_i, i = 1, 2, \ldots$ được ký hiệu là $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.
- Giao của các tập $A_i, i = 1, 2, \ldots$ được ký hiệu là $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

Ví dụ 7. Giả sử $A_i = \{1, 2, 3, ..., i\},\ i = 1, 2, \ldots$. Khi đó

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{Z}^+$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{1\}$$

1.2.5 Tích Đề các

Tích Đề các của hai tập hợp

Tích Đề các của hai tập hợp A và B, ký hiệu $A \times B$, là tập hợp

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Ví dụ 8. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c\}$ và $B = \{1, 2\}$.
Tìm $A \times B$ và $B \times A$.

Tích Đề các của n tập hợp

Tích Đề các của các tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ký hiệu $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ hoặc $\prod_{i=1}^{n} A_i$, là tập hợp

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, \forall i = 1, 2, \ldots, n\}$$

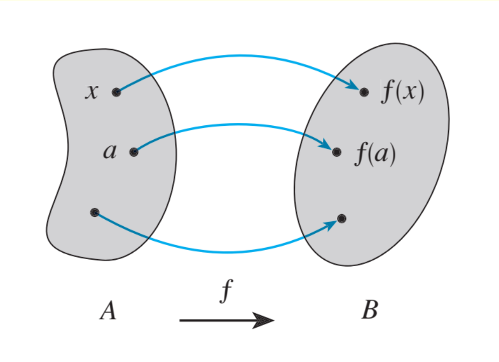
Chú ý:
$A^n = A \times A \times \ldots \times A = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A, \forall i = 1, 2, \ldots, n\}$

Ví dụ 9. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c\}, B = \{x, y\}$, và $C = \{0, 1\}$. Tìm $A \times B \times C$.

Chương 1. Lôgic mệnh đề, tập hợp, ánh xạ và đại số Boole

Cho hai tập hợp khác rỗng A và B. Một ánh xạ f từ A vào B là một quy tắc đặt tương ứng mỗi phần tử $x \in A$ với một và chỉ một phần tử $y \in B$, ký hiệu

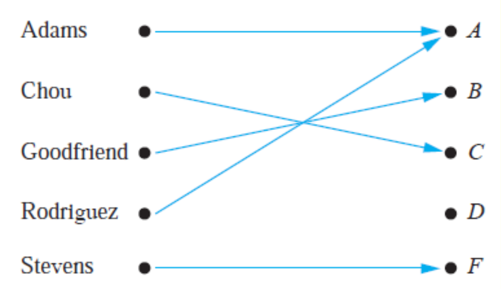
$$\begin{aligned} f : & A \to B \\ & x \mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

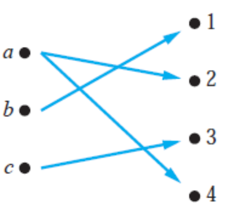


Hình 3.1: Ánh xạ $f : A \to B$.

- A: tập nguồn, B: tập đích.
- Nếu $f(a) = b$ thì b được gọi là ảnh của a và a được gọi là một nghịch ảnh của b.
- Tập giá trị của f, ký hiệu $\mathrm{Im}f$, là tập hợp

$$\mathrm{Im}f = \{f(x) | x \in A\} = \{y \in B | \exists x \in A, y = f(x)\}$$





Hai ánh xạ bằng nhau

Hai ánh xạ $f : A \to B$ và $g : A' \to B'$ được gọi là bằng nhau, ký hiệu $f = g$, nếu

$$\begin{cases} A = A', B = B' \\ f(x) = g(x), \text{ với mọi } x \in A \end{cases}$$

Ảnh và nghịch ảnh của một tập hợp

Cho ánh xạ $f : A \to B$ và các tập hợp $S \subset A$, $C \subset B$.

- Tập $f(S) = \{f(x) | x \in S\}$ được gọi là ảnh của S qua ánh xạ f.
- Tập $f^{-1}(C) = \{x \in A |\ f(x) \in C\}$ được gọi là nghịch ảnh của C qua ánh xạ f.
  Nếu $C = \{y\}$, ta viết $f^{-1}(y) = \{x \in A |\ f(x) = y\}$.

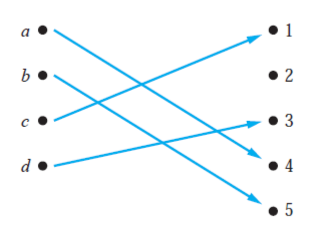
Chú ý:

- $y \in f(S) \Leftrightarrow \exists x \in S, y = f(x)$
- $x \in f^{-1}(C) \Leftrightarrow f(x) \in C$

Đơn ánh

Ánh xạ $f : A \to B$ được gọi là đơn ánh nếu

$$\forall a, b \in A, f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

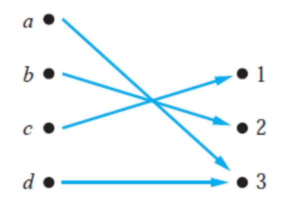


Ví dụ 10. Xác định xem ánh xạ dưới đây có là đơn ánh không?

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = x^2$$

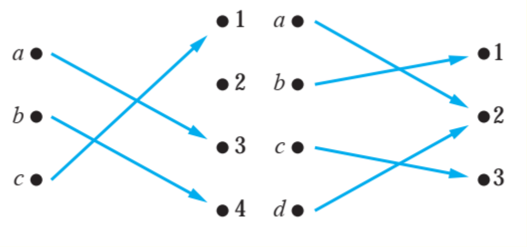
Toàn ánh

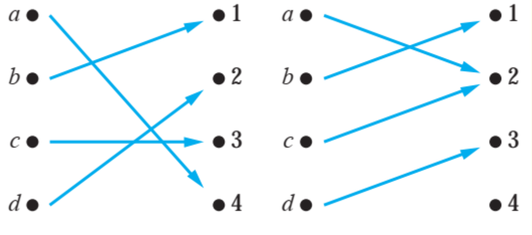
Ánh xạ $f : A \to B$ được gọi là toàn ánh nếu $\forall b \in B, \exists a \in A$ sao cho $f(a) = b$.



Song ánh

Ánh xạ $f : A \to B$ được gọi là song ánh nếu nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.




a
b
c
d
1
2
3
4
a
b
c
d
1
2
3
4

Chú ý: Nếu ánh xạ $f : A \to B$ được cho dưới dạng công thức xác định ảnh $y = f(x)$ thì ta có thể xác định tính chất đơn ánh, toàn ánh của ánh xạ f bằng cách giải phương trình:

$$f(x) = y,\ y \in B, \tag{1}$$

trong đó ta coi x là ẩn, y là tham số.

- Nếu với mỗi $y \in B$ phương trình (1) có không quá 1 nghiệm $x \in A$ thì f là đơn ánh.
- Nếu với mỗi $y \in B$ phương trình (1) luôn có nghiệm $x \in A$ thì f là toàn ánh.
- Nếu với mỗi $y \in B$ phương trình (1) có duy nhất 1 nghiệm $x \in A$ thì f là song ánh.

Ví dụ 11. Cho các ánh xạ $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi:

$$f(x) = \frac{1}{x-1},\ g(x) = \frac{3x}{x^2+1}.$$

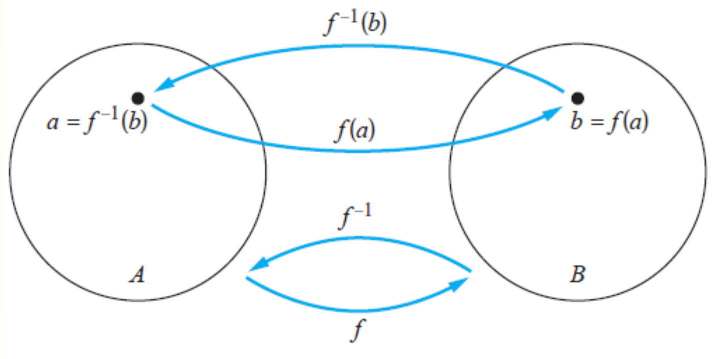
Ánh xạ nào là đơn ánh, toàn ánh? Tìm $\mathrm{Im}f$, $\mathrm{Im}g$.

1.3.3 Ánh xạ ngược

Định nghĩa

Giả sử $f : A \to B$ là một song ánh. Khi đó, ta có thể xác định một ánh xạ từ B vào A bằng cách đặt tương ứng mỗi phần tử $y \in B$ với phần tử duy nhất $x \in A$ sao cho $f(x) = y$. Ánh xạ này được gọi là ánh xạ ngược của f, ký hiệu f^{-1}. Vậy

$$f^{-1} : B \to A,\ \ f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$



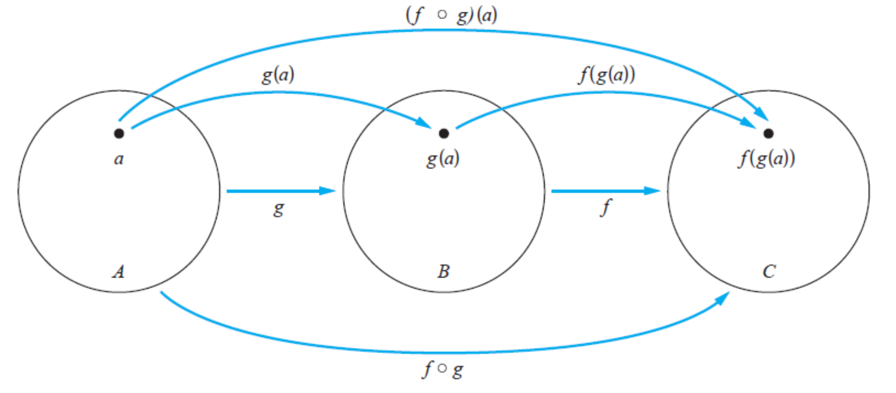
Ví dụ 12. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$. Ánh xạ f có phải là song ánh không? Nếu có, hãy xác định ánh xạ ngược của f.

1.3.4 Hợp của hai ánh xạ

Định nghĩa

Cho hai ánh xạ $g : A \to B,\ f : B \to C$. Hợp của hai ánh xạ g và f, ký hiệu $f \circ g$, là ánh xạ được xác định bởi

$$f \circ g : A \to C,\ (f \circ g)(x) = f(g(x)), \forall x \in A.$$


$(f \circ g)(a)$
$g(a)$
$f(g(a))$
a
$g(a)$
$f(g(a))$
g
f
A
B
C
$f \circ g$

Ví dụ 13. Cho các ánh xạ $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi:

$$f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = \frac{3x}{x^2+1}.$$

Xác định ánh xạ tích $g \circ f$. Có đẳng thức $g \circ f = g$ không?

Chương 1. Lôgic mệnh đề, tập hợp, ánh xạ và đại số Boole

1.4.1 Định nghĩa và các tính chất cơ bản của đại số Boole

Định nghĩa

Một tập hợp B cùng với hai phép toán hai ngôi $\vee, \wedge : B \times B \to B$ và một phép toán một ngôi $' : B \to B$ được gọi là một đại số Boole, ký hiệu $(B, \vee, \wedge, ')$, nếu các tiên đề sau được thỏa mãn:

1) Các phép toán $\vee, \wedge$ có tính kết hợp, nghĩa là $\forall a, b, c \in B$,

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c.$$

2) Các phép toán $\vee, \wedge$ có tính giao hoán, nghĩa là $\forall a, b \in B$,

$$a \vee b = b \vee a, a \wedge b = b \wedge a.$$

3) Tồn tại phần tử không $0 \in B$ và phần tử đơn vị $1 \in B, 1 \neq 0$ sao cho $\forall a \in B$,

$$a \vee 0 = a, a \wedge 1 = a.$$

4) Với mọi $a \in B$ tồn tại $a' \in B$ là phần tử đối của a sao cho

$$a \vee a' = 1, a \wedge a' = 0.$$

5) Phép toán $\vee$ phân phối đối với phép toán $\wedge$ và phép toán $\wedge$ phân phối đối với phép toán $\vee$, nghĩa là $\forall a, b, c \in B$,

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Ví dụ 14. Giả sử X là một tập hợp khác rỗng. Xét

$$\mathcal{P}(X) = \{A|A \subset X\}.$$

- Các phép toán $\vee$, $\wedge$ lần lượt là phép hợp và phép giao các tập con của X.
- Phép toán một ngôi $'$ là phép lấy phần bù của tập con trong X.

Khi đó $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, ')$ là một đại số Boole với phần tử không là $\emptyset$ và phần tử đơn vị là X.

Ví dụ 15. Xét $B_2 = \{0, 1\}$. Ta định nghĩa

$$a \vee b = \begin{cases} 1 & \text{nếu } a = 1 \text{ hoặc } b = 1, \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

$$a \wedge b = \begin{cases} 1 & \text{nếu } a = b = 1, \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases}$$

$$a' = \begin{cases} 1 & \text{nếu } a = 0, \\ 0 & \text{nếu } a = 1. \end{cases}$$

Khi đó $(B_2, \vee, \wedge, ')$ là một đại số Boole với phần tử không là 0, phần tử đơn vị là 1.

Các tính chất cơ bản của đại số Boole

Giả sử $(B, \vee, \wedge, ')$ là một đại số Boole. Khi đó với mọi $a, b \in B$ ta có

1) $a \vee a = a, a \wedge a = a$.
2) $0' = 1, 1' = 0$.
3) $a \vee 1 = 1, a \wedge 0 = 0$.
4) $a \vee (a \wedge b) = a, a \wedge (a \vee b) = a$ (Tính hấp thu).
5) Nếu tồn tại $c \in B$ sao cho $a \vee c = b \vee c$ và $a \wedge c = b \wedge c$ thì $a = b$.
6) Nếu $a \vee b = 1$ and $a \wedge b = 0$, then $b = a'$.
7) $(a \vee b)' = a' \wedge b'$ và $(a \wedge b)' = a' \vee b'$ (Công thức De Morgan).

1.4.2 Công thức Boole, hàm Boole và nguyên lý đối ngẫu

Công thức Boole

Một biểu thức chứa các biến được liên kết bởi một số hữu hạn lần các phép toán $\vee, \wedge, '$ và hai phần tử 0, 1 của đại số Boole $(B, \vee, \wedge, ')$ được gọi là một công thức Boole.

Mỗi công thức Boole xác định một hàm nhận giá trị thuộc B. Hàm này được gọi là hàm Boole.

Ví dụ 16. Tìm các giá trị của hàm Boole

$$F(x, y, z) = (x \wedge y) \vee z'; \; x, y, z \in B_2$$

Hai công thức Boole xác định cùng một hàm Boole được gọi là tương đương.

Ví dụ 17. Hai công thức Boole $x \vee (y \wedge z)$ và $(x \vee y) \wedge (x \vee z)$ là tương đương.

Ví dụ 18. Rút gọn công thức Boole:

$$(x \wedge y') \vee [x \wedge (y \wedge z)'] \vee z$$

Đối ngẫu

Hai công thức Boole được gọi là đối ngẫu nếu thay $\wedge, \vee, 0, 1$ trong một công thức lần lượt bởi $\vee, \wedge, 1, 0$ thì ta được công thức còn lại.

Ví dụ 19. Tìm công thức Boole đối ngẫu của $x \wedge (y \vee 0)$ và $x' \wedge 1 \vee (y' \vee z)$.

Nguyên lý đối ngẫu

Nếu hai công thức Boole là tương đương thì hai công thức đối ngẫu của chúng cũng tương đương.

1.4.3 Phương pháp xây dựng hàm Boole trong B_2 có giá trị thỏa mãn điều kiện cho trước

Xem xét hai phương pháp:

1. Biểu diễn hàm cần tìm dưới dạng "tổng các tích".
2. Biểu diễn hàm cần tìm dưới dạng "tích các tổng".

Phương pháp xây dựng hàm $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i \in B_2, i = 1, \ldots, n$ dưới dạng "tổng các tích":

1. Lập bảng gồm các giá trị có thể có của các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và các giá trị tương ứng của $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
2. Xét các hàng của bảng mà hàm F nhận giá trị 1. Mỗi hàng này tương ứng với một biểu thức dạng $y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_n$, trong đó $y_i = x_i$ nếu $x_i = 1$ và $y_i = x_i'$ nếu $x_i = 0$.
3. Lấy $\vee$ của các biểu thức trên ta được hàm F cần tìm.

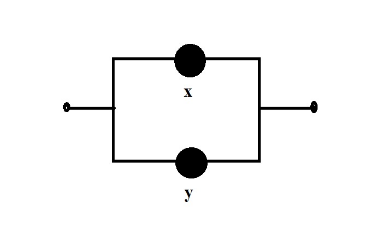
Ví dụ 20. Tìm hàm Boole $F(x, y, z)$ trong B_2 nhận giá trị 1 khi và chỉ khi

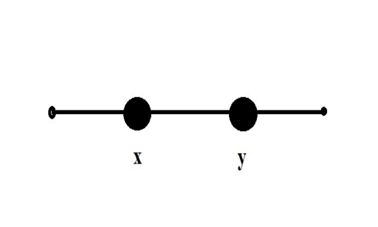
a) x và z đồng thời nhận giá trị 1, y tùy ý.

b) $x = 1$ và y, z tùy ý.

1.4.4 Ứng dụng đại số Boole vào mạng chuyển mạch

Ta chỉ xét các mạng gồm các chuyển mạch có hai trạng thái đóng và mở. Hai mạng đơn giản nhất là mạng song song cơ bản và mạng nối tiếp cơ bản.





Một mạng bất kỳ có thể nhận được bằng cách ghép nối tiếp hay song song các mạng cơ bản này.

- Ta ký hiệu các chuyển mạch bởi các chữ $x, y, z, \ldots$.
- Nếu x ở trạng thái mở ta cho x nhận giá trị 0 và ở trạng thái đóng ta cho x nhận giá trị 1.
- Hai chuyển mạch có trạng thái ngược nhau được ký hiệu bởi x và x'.
- Một mạng gồm hai chuyển mạch x và y nối song song được ký hiệu bởi $x \vee y$.
- Một mạng gồm hai chuyển mạch x và y mắc nối tiếp được ký hiệu bởi $x \wedge y$.

$\Longrightarrow$ Ta có thể biểu diễn một mạng bất kỳ bởi một công thức Boole và ngược lại.

Ví dụ 21. Tìm mạng tương đương đơn giản hơn của mạng sau.