BT chương 6

6.2. Trong không gian $\mathbb{R}^2$ xét dạng song tuyến tính xác định bởi:

$$\eta\big(\underbrace{(x_1,y_1)}_{v},\underbrace{(x_2,y_2)}_{v}\big)=x_1x_2-2x_1y_2-2y_1x_2+5y_1y_2.$$

a) Chứng minh $(\mathbb{R}^2,\eta)$ là không gian véc tơ Euclide.

b) Trực chuẩn hoá Gram-Schmidt cơ sở $\{(1,0),(0,1)\}$ của $\mathbb{R}^2$.

η là tích vô hướng trên $\mathbb{R}^2$.

b) $S=\{u_1,u_2\}$

$$v_1=\frac{u_1}{\|u_1\|}$$

$$\overline{v_2}=u_2-\langle u_2,v_1\rangle v_1 \;;\quad v_2=\frac{\overline{v_2}}{\|\overline{v_2}\|}$$

$S\to$ cơ sở trực chuẩn $\{v_1;v_2\}$

$$v=(x_1,y_1)\Rightarrow \|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}=\sqrt{\eta(v,v)}$$

$$=\sqrt{x_1^2-2x_1y_1-2y_1x_1+5y_1^2}$$

$$=\sqrt{x_1^2-4x_1y_1+5y_1^2}$$

$$S=\{\underbrace{(1,0)}_{u_1};\underbrace{(0,1)}_{u_2}\}$$

$$u_1=(1,0)\Rightarrow \|u_1\|=\sqrt{1^2-4.1.0+5.0^2}=1$$

x_1, y_1

$$\Rightarrow v_1=\frac{u_1}{\|u_1\|}=u_1=(1,0)$$

$$\overline{v_2}=u_2-\langle u_2,v_1\rangle v_1$$

$$\langle u_2, v_1\rangle = \eta(u_2, v_1) = \eta\left((\overset{x_1}{0}, \overset{y_1}{1}), (\overset{x_2}{1}, \overset{y_2}{0}) \right)$$
$$= 0.1 - 2.0.0 - 2.1.1 + 5.1.0 = -2$$

$$\Rightarrow \bar{v}_2 = (0, 1) - (-2)(1, 0)$$
$$= (0, 1) + (2, 0) = (2, 1)$$

$$\|\bar{v}_2\| = \sqrt{2^2 - 4.2.1 + 5.1^2} = 1 \Rightarrow v_2 = \frac{\bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|} = \bar{v}_2 = (2,1)$$

Vậy trực chuẩn hoá Gram-Schmidt cơ sở đã cho ta được cơ sở trực chuẩn: $\{(1,0);(2,1)\}$

6.6. Trong không gian véc tơ Euclide V. Chứng minh rằng: với mọi $u,v,w\in V$, $\|u-v\|^2 \le 2\left(\|u-w\|^2 + \|w-v\|^2\right)$.

$$d(u,v) = \|u-v\|$$

6.20. Với mỗi dạng toàn phương Q sau hãy viết ma trận trong cơ sở chính tắc và tìm cơ sở để biểu thức tọa độ của Q trong cơ sở này có dạng chính tắc:

c) $Q(\underbrace{x_1,x_2,x_3}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ PP Lagrange

+) Giả sử $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$

Biểu thức toạ độ của Q trong cơ sở B là

$$Q(u) = \underbrace{x_1x_2} + x_1x_3 + x_2x_3, \quad u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$$

Đặt $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \end{cases}$ ta có

$$Q(u) = (y_1+y_2)(y_1-y_2) + (y_1+y_2)x_3 + (y_1-y_2)x_3$$
$$= \underbrace{y_1^2} - y_2^2 + \underbrace{2y_1x_3}$$

$$= (y_1^2 + 2y_1x_3) - y_2^2$$

$$= (y_1^2 + 2y_1x_3 + x_3^2) - x_3^2 - y_2^2$$

$$= (y_1 + x_3)^2 - x_3^2 - y_2^2$$

Đặt $\begin{cases} z_1 = y_1 + x_3 \\ z_2 = x_3 \\ z_3 = y_2 \end{cases}$ ta có $Q(u) = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$

+) Biểu diễn biến cũ theo biến theo mới

$$x_1 = y_1 + y_2 = (z_1 - x_3) + z_3$$
$$= z_1 - z_2 + z_3$$

$$x_2 = y_1 - y_2 = (z_1 - x_3) - z_3 = z_1 - z_2 - z_3$$

Vậy $\begin{cases} x_1 = z_1 - z_2 + z_3 \\ x_2 = z_1 - z_2 - z_3 \\ x_3 = z_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ cơ sở mới là $B' = \{ e_1' = (1,1,0); (-1,-1,1); (1,-1,0) \}$

+) Không làm đc bằng pp Jacobi

6.22. Tìm λ tương ứng để mỗi dạng toàn phương sau xác định dương:

a) $Q(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+\lambda x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$.

+) Ma trận của Q trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{bmatrix}$$

+) Các định thức con chính của A là

$D_1 = 5$, $D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \xlongequal[H_3 \to H_3 + H_2]{H_1 \to H_1 - H_2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

$= 3.1.(\lambda-1) + 1.(-1).1 + 0 - 0 - 0 - (\lambda-1).2.1$

$= 3(\lambda-1) - 1 - 2(\lambda-1) = \lambda - 2$

+) Q xác định dương $\Leftrightarrow \begin{cases} D_1 > 0 \\ D_2 > 0 \\ D_3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda - 2 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 2$.

Q xác định âm $\Leftrightarrow \begin{cases} D_1 < 0 \\ D_2 > 0 \\ D_3 < 0 \end{cases}$

5.13. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ có ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 5\\ 6 & -2 & 4\end{bmatrix}$ trong cơ sở $\mathscr{B}=\{q_1,q_2,q_3\}$; $q_1=3t+3t^2$, $q_2=-1+3t+2t^2$, $q_3=3+7t+2t^2$.

a) Tìm tọa độ trong cơ sở $\mathscr{B}$ ảnh của các véc tơ của cơ sở $\mathscr{B}$:

$$[f(q_1)]_{\mathscr{B}},\ [f(q_2)]_{\mathscr{B}},\ [f(q_3)]_{\mathscr{B}}.$$

b) Tìm $f(q_1)$, $f(q_2)$, $f(q_3)$.

c) Tìm $f(1+t^2)$.

a) $[f(q_1)]_{B} = \begin{bmatrix}1\\2\\6\end{bmatrix}$; $[f(q_2)]_{B} = \begin{bmatrix}3\\0\\-2\end{bmatrix}$

$[f(q_3)]_{B} = \begin{bmatrix}-1\\5\\4\end{bmatrix}$

b) $f(q_1) = 1q_1 + 2q_2 + 6q_3$

$= 3t + 3t^2 + 2(-1+3t+2t^2) + 6(3+7t+2t^2)$

$= 16 + 51t + 19t^2$

$f(q_2) = 3q_1 - 2q_3 = \dots$

$f(q_3) = -q_1 + 5q_2 + 4q_3 = \dots$

c) Ta có $1+t^2 = c_1q_1 + c_2q_2 + c_3q_3$

$\Leftrightarrow 1+t^2 = c_1(3t+3t^2) + c_2(-1+3t+2t^2)$
$+ c_3(3+7t+2t^2)$

$$\Leftrightarrow \quad 1+t^2 = -c_2 + 3c_3 + (3c_1 + 3c_2 + 7c_3)t + (3c_1 + 2c_2 + 2c_3)t^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -c_2 + 3c_3 = 1 \\ 3c_1 + 3c_2 + 7c_3 = 0 \\ 3c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{1+t^2 = q_1 - q_2}$$

$$\Rightarrow f(1+t^2) = f(q_1) - f(q_2)$$

$$= \ldots\ldots$$