

CHƯƠNG 3: BÀI TOÁN LIỆT KÊ

Môn học: Toán Rời rạc 1

Giảng viên: Nguyễn Kiều Linh

Email: linhmk@ptit.edu.vn

Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông

Hà Nội, năm 2023

<http://www.ptit.edu.vn>



Nội dung chính

1 Giới thiệu bài toán liệt kê

2 Phương pháp sinh

3 Phương pháp quay lui

Giới thiệu bài toán liệt kê

- Bài toán đưa ra danh sách tất cả các cấu hình tổ hợp có thể có được gọi là bài toán liệt kê tổ hợp.
- Khác với bài toán đếm là tìm kiếm một công thức cho lời giải, bài toán liệt kê lại cần xác định một thuật toán để theo đó có thể xây dựng được lần lượt tất cả các cấu hình cần quan tâm.
- Một thuật toán liệt kê phải đảm bảo hai nguyên tắc:
 - ▶ Không được lặp lại một cấu hình
 - ▶ Không được bỏ sót một cấu hình

Ví dụ 1

Cho tập hợp các số a_1, a_2, \dots, a_n và số M . Hãy tìm tất cả các tập con k phần tử của dãy số $\{a_n\}$ sao cho tổng số các phần tử trong tập con đó đúng bằng M .

Ví dụ 2

Một thương nhân đi bán hàng tại tám thành phố. Chị ta có thể bắt đầu hành trình của mình tại một thành phố nào đó nhưng phải qua 7 thành phố kia theo bất kỳ thứ tự nào mà chị ta muốn. Hãy chỉ ra lộ trình ngắn nhất mà chị ta có thể đi.

Nội dung chính

- 1 Giới thiệu bài toán liệt kê
- 2 Phương pháp sinh
- 3 Phương pháp quay lui

Phương pháp sinh

Phương pháp sinh có thể áp dụng để giải các bài toán liệt kê tổ hợp đặt ra nếu như hai điều kiện sau được thực hiện:

- (i) Có thể xác định được một thứ tự trên tập các cấu hình tổ hợp cần liệt kê. Từ đó có thể xác định được cấu hình tổ hợp đầu tiên và cuối cùng trong thứ tự đã được xác định.
- (ii) Xây dựng được thuật toán từ cấu hình chưa phải là cuối cùng có thể đưa ra cấu hình kế tiếp sau nó.

Ta gọi thuật toán trong điều kiện (ii) là **thuật toán sinh kế tiếp**.

Thuật toán sinh

Bước 1 (Khởi tạo):

<Thiết lập cấu hình đầu tiên>;

Bước 2 (Bước lặp):

```
{   while (<Lặp khi cấu hình chưa phải cuối cùng>)
```

```
    <Đưa ra cấu hình hiện tại>;
```

```
    <Sinh ra cấu hình kế tiếp>;
```

```
}
```

<Đưa ra cấu hình cuối cùng>;

Ví dụ 3

Liệt kê (duyệt) các chuỗi nhị phân có độ dài n . Chuỗi

$$X = (x_1 x_2 \dots x_n) : x_i = 0, 1; i = 1, 2, \dots, n$$

được gọi là chuỗi nhị phân có độ dài n .

Ví dụ với $n = 4$, ta có 16 chuỗi nhị phân dưới đây:

STT	$X = (x_1 \dots x_n)$	$F(X)$	STT	$X = (x_1 \dots x_n)$	$F(X)$
1	0000	0	9	1000	8
2	0001	1	10	1001	9
3	0010	2	11	1010	10
4	0011	3	12	1011	11
5	0100	4	13	1100	12
6	0101	5	14	1101	13
7	0110	6	15	1110	14
8	0111	7	16	1111	15

Ví dụ 3

Thứ tự trên tập cấu hình:

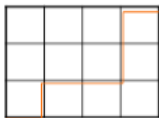
- Cấu hình đầu tiên là xâu gồm n chữ số 0
- Cấu hình cuối cùng là xâu gồm n chữ số 1
- Thuật toán sinh cấu hình tiếp theo:
 - Giả sử cấu hình hiện tại $x = x_1x_2 \dots x_n$
 - Nếu $x_i = 1$ với mọi i , thì x là cấu hình cuối cùng, thuật toán liệt kê kết thúc.
 - Gọi x_k là chữ số 0 đầu tiên tính từ bên phải của x , tức là

$$x = x_1x_2 \dots x_{k-1}011 \dots 1.$$

- Cấu hình tiếp theo $y = y_1y_2 \dots y_n$ được tạo ra như sau:
 $y_i = x_i$ với $1 \leq i \leq k-1$, $y_i = 1 - x_i$ với $k \leq i \leq n$.
Tức là, $y = x_1x_2 \dots x_{k-1}100 \dots 0$.

Bài tập 1

Cho một hình chữ nhật gồm $n \times m$ hình vuông đơn vị. Hãy liệt kê tất cả các đường đi từ đỉnh cuối của ô vuông cuối cùng phía bên trái đến đỉnh đầu của ô vuông trên cùng phía bên phải. Biết mỗi bước đi chỉ được phép dịch chuyển sang bên phải hoặc lên trên theo các cạnh của hình vuông đơn vị.



Bài tập 2

Hãy liệt kê tất cả các xâu nhị phân có độ dài n sao cho mỗi xâu nhị phân có duy nhất một dãy k bit 1 liên tiếp.

Bài tập 3

Hãy liệt kê tất cả các xâu nhị phân có độ dài n sao cho mỗi xâu nhị phân có duy nhất một dãy m bit 1 liên tiếp và duy nhất một dãy có k bit 0 liên tiếp.

Bài tập 4

Chuỗi ký tự $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ được gọi là chuỗi ký tự AB nếu $x_i = A$ hoặc $x_i = B$. Chuỗi X được gọi là chuỗi AB bậc k nếu X tồn tại duy nhất một dãy k ký tự A liên tiếp. Hãy liệt kê tất cả các chuỗi AB bậc k .

Bài tập 5

Cho dãy số $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ gồm n số tự nhiên khác nhau và số tự nhiên k . Hãy liệt kê tất cả các dãy con của dãy số A sao cho tổng các phần tử của dãy con đó đúng bằng k .

Ví dụ 4 (liệt kê các tổ hợp)

- Liệt kê (duyệt) các tổ hợp chập k của $1, 2, \dots, n$.
- Mỗi tổ hợp chập k của $1, 2, \dots, n$ là một tập con k phần tử khác nhau của $1, 2, \dots, n$.
- Ví dụ với $n = 5, k = 3$ ta sẽ có C_5^3 tập con dưới đây

Stt	Tập con $X = \{x_1, \dots, x_k\}$	Stt	Tập con $X = \{x_1, \dots, x_k\}$
1	$\{1, 2, 3\}$	6	$\{1, 4, 5\}$
2	$\{1, 2, 4\}$	7	$\{2, 3, 4\}$
3	$\{1, 2, 5\}$	8	$\{2, 3, 5\}$
4	$\{1, 3, 4\}$	9	$\{2, 4, 5\}$
5	$\{1, 3, 5\}$	10	$\{3, 4, 5\}$

Ví dụ 4 (liệt kê các tổ hợp)

Thứ tự tự nhiên duyệt các tổ hợp chập k . Có thể xác định được nhiều trật tự khác nhau trên các tổ hợp. Tuy nhiên, thứ tự đơn giản nhất có thể được xác định như sau (Thứ tự Từ điển):

- Ta gọi tập con $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ là đứng trước tập con $Y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ nếu tìm được chỉ số t sao cho $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_{t-1} = y_{t-1}, x_t < y_t$.
- Ví dụ tập con $X = (1, 2, 3)$ đứng trước tập con $Y = (1, 2, 4)$ vì với $t = 3$ thì $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 < y_3$.
- Tập con (cấu hình) đầu tiên là $X = (1, 2, \dots, k)$, tập con (cấu hình) cuối cùng là $(n - k + 1, \dots, n)$.
Như vậy điều kiện 1 của thuật toán sinh được thỏa mãn.

Ví dụ 4 (liệt kê các tổ hợp)

Thuật toán sinh cấu hình (tổ hợp) tiếp theo

- Giả sử cấu hình hiện tại là $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$
- Nếu $x_i = n - k + i$ với mọi $i = 1, 2, \dots, k$ thì X là cấu hình cuối cùng. Thuật toán duyệt kết thúc.
- Gọi t là chỉ số lớn nhất (x_t là số đầu tiên từ phải sang) sao cho $x_t < n - k + t$.
- Cấu hình tiếp theo $Y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ được sinh ra như sau:

$$y_i = x_i \text{ với } i < t,$$

$$y_t = x_t + 1,$$

$$y_i = y_t + (i - t) \text{ với } i > t.$$

Bài tập 6

-Cho dãy số $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ và số tự nhiên P . Hãy liệt kê tất cả các dãy con k phần tử của dãy số A sao cho tổng các phần tử của dãy con đó đúng bằng P .

-Ví dụ. $A = (5, 10, 15, 20, 25, 30, 35)$, $n = 7$, $k = 3$, $P = 50$ ta sẽ có các dãy con sau:

$(5, 10, 35),$

$(5, 20, 25),$

$(10, 15, 25),$

Bài tập 7

- Cho dãy số $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Liệt kê tất cả các dãy con k phần tử tăng dần tự nhiên của dãy số A .
- Ví dụ. $A = (1, 3, 2, 4, 5)$, $n = 5$, $k = 3$ ta có các dãy con tăng dần tự nhiên như sau:

(1, 3, 4)

(1, 3, 5)

(1, 2, 4)

Ví dụ 5 (liệt kê các hoán vị)

- Liệt kê (duyệt) các hoán vị của $1, 2, \dots, n$.
- Mỗi hoán vị của $1, 2, \dots, n$ là một cách xếp có tính đến thứ tự của $1, 2, \dots, n$.
- Số các hoán vị là $n!$. Ví dụ với $n = 3$ ta có 6 hoán vị dưới đây.

STT	Hoán vị $X = (x_1, \dots, x_n)$
1	(1, 2, 3)
2	(1, 3, 2)
3	(2, 1, 3)
4	(2, 3, 1)
5	(3, 1, 2)
6	(3, 2, 1)

Ví dụ 5 (liệt kê các hoán vị)

Thứ tự tự nhiên duyệt hoán vị: Có thể xác định được nhiều trật tự khác nhau trên các hoán vị. Tuy nhiên, thứ tự đơn giản nhất (từ điển) có thể được xác định như sau:

- Hoán vị $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ được gọi là đứng sau hoán vị $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ nếu tồn tại chỉ số k sao cho $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_{k-1} = y_{k-1}, x_k < y_k$.
- Ví dụ hoán vị $X = (1, 2, 3)$ được gọi là đứng sau hoán vị $Y = (1, 3, 2)$ vì tồn tại $k = 2$ để $x_1 = y_1$, và $x_2 < y_2$.
- Cấu hình đầu tiên là $(1, 2, \dots, n)$.
- Cấu hình cuối cùng là $(n, n-1, \dots, 1)$.

Ví dụ 5 (liệt kê các hoán vị)

Thuật toán sinh cấu hình (hoán vị) tiếp theo

- Giả sử cấu hình hiện tại là $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
- Nếu $x_{i-1} > x_i$ với mọi i , thì X là cấu hình cuối cùng. Thuật toán sinh kết thúc.
- Gọi t là chỉ số lớn nhất (chỉ số đầu tiên từ bên phải) sao cho $x_{t-1} < x_t$.
- Cấu hình tiếp theo $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ được sinh ra như sau:
 - ▶ $y_i = x_i$ với $i \leq t-2$
 - ▶ y_{t-1} bằng phần tử nhỏ nhất trong tập x_t, \dots, x_n và lớn hơn x_{t-1} (ký hiệu là a)
 - ▶ y_t, \dots, y_n là dãy sắp xếp tăng dần gồm các số trong tập $\{x_{t-1}, x_t, \dots, x_n\} \setminus \{a\}$.

Bài tập 8

- Một dãy số tự nhiên bất kỳ $A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ được gọi là một **đường nguyên tố bậc k** nếu tổng k phân tử liên tiếp bất kỳ của dãy số A_n là một số nguyên tố ($k \leq n$).
- Ví dụ dãy số $A_n = \{3, 27, 7, 9, 15\}$ là một đường nguyên tố bậc 3.
- Cho dãy số A_n . Hãy liệt kê tất cả các đường nguyên tố bậc k có thể có được tạo ra bằng cách trao đổi các phần tử khác nhau của dãy số A_n .
- Ví dụ với dãy $A = (3, 7, 9, 15, 27)$ ta sẽ thành lập được 4 dãy nguyên tố thuần nhất bậc 3 như dưới đây:

3	27	7	9	15
15	9	7	3	27
15	9	7	27	3
27	3	7	9	15

Nội dung chính

- 1 Giới thiệu bài toán liệt kê
- 2 Phương pháp sinh
- 3 Phương pháp quay lui

Thuật toán quay lui

- Giả sử ta cần xác định bộ $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ thỏa mãn một số ràng buộc nào đó. Ứng với mỗi thành phần x_i ta có m_i khả năng cần lựa chọn.
- Ứng với mỗi khả năng j trong m_i khả năng của thành phần x_i ta cần thực hiện:
 - Kiểm tra khả năng j có được chấp thuận cho thành phần x_i hay không?
 - Khả năng j được chấp thuận :
 - nếu i là thành phần cuối cùng ($i = n$), thì ta ghi nhận nghiệm của bài toán,
 - nếu i chưa phải cuối cùng ta xác định thành phần thứ $i + 1$ tương tự cách làm với i .
 - Khả năng j không được chấp thuận thì xét khả năng tiếp theo
 - Nếu không có khả năng j nào được chấp thuận cho thành phần x_i thì ta quay lại bước trước đó ($i - 1$) và làm tương tự như với thành phần x_i .

Thuật toán quay lui

```
BackTrack (int i ){  
    for (j = <Khả năng 1>; j <= ni; j++) {  
        if (<Chấp thuận khả năng j>) {  
            X[i] = <khả năng j>;  
            if (i == n)  
                Result();  
            else  
                BackTrack(i + 1);  
        }  
    }  
}
```

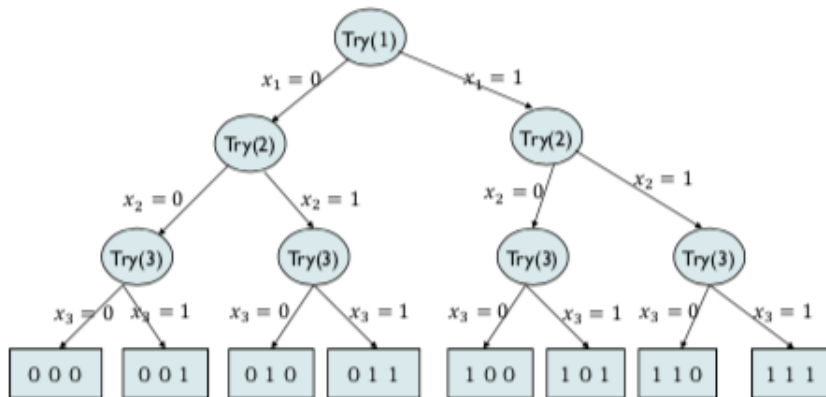
Ví dụ 6

Liệt kê (duyệt) các xâu nhị phân có độ dài n . Xâu

$X = (x_1 x_2 \dots x_n) : x_i = 0, 1; i = 1, 2, \dots, n$ được gọi là xâu nhị phân có độ dài n .

```
Void Try (int i ){  
    for (int j = 0; j <= 1; j ++){  
        X[i] = j;  
        if (i == n)  
            Result();  
        else  
            Try(i + 1);  
    }  
}
```

Để duyệt các xâu nhị phân có độ dài n ta chỉ cần gọi thủ tục Try(1).

Ví dụ 6

Bài tập 9

Sử dụng thuật toán quay lui, hãy liệt kê tất cả các phần tử của tập:

$$D = \left\{ X = (x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq W \wedge \sum_{i=1}^n c_i x_i = K \right\}.$$

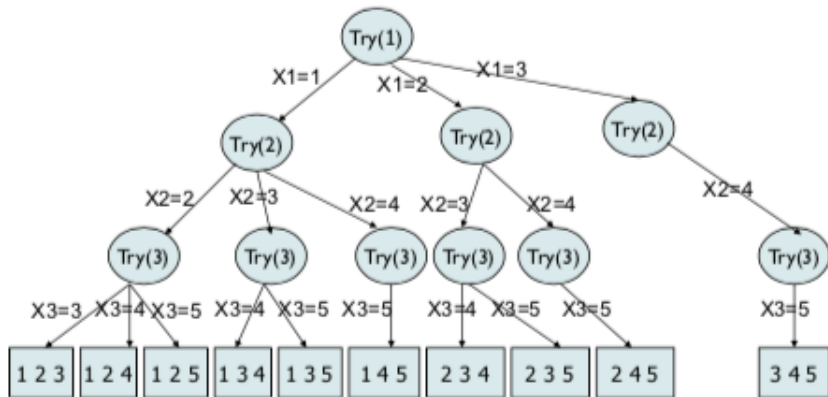
Trong đó, $x_i = 0, 1$; $c_i, a_i \in \mathbb{Z}^+$;

$$n \leq 100, W \leq 32000; K \leq 32000.$$

Ví dụ 7

- Liệt kê (duyệt) các tổ hợp chập k của $1, 2, \dots, n$.
- Mỗi tổ hợp chập k của $1, 2, \dots, n$ là một tập con k phần tử khác nhau của $1, 2, \dots, n$.

```
Void Try (int i ){  
    for (int j = X[i - 1] + 1; j <= n - k + i; j ++ ){  
# Coi X[0] = 0. Ta cần gán giá trị cho X[1], X[2], ..., X[k].  
        X[i] = j;  
        if (i == k)  
            Result();  
        else  
            Try(i + 1);  
    }  
}
```

Ví dụ 7

Bài tập 10

Sử dụng thuật toán quay lui, hãy liệt kê tất cả các phần tử của tập:

$$D = \left\{ X = (x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n x_i = K \wedge \sum_{i=1}^n a_i x_i = S \right\}.$$

Trong đó, $x_i = 0, 1; a_i \in \mathbb{Z}^+$;

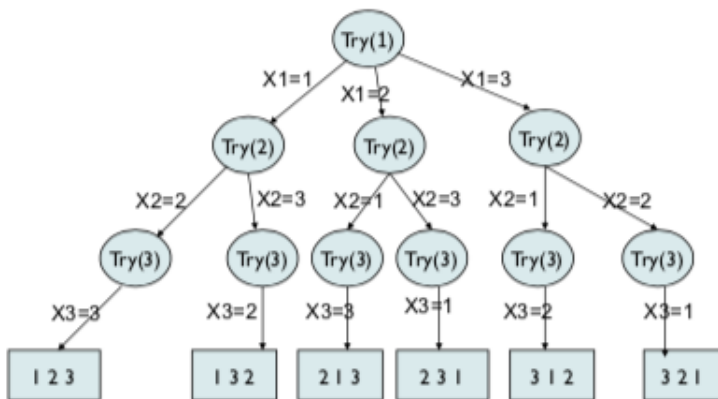
$$n \leq 100, K \leq 100; S \leq 32000.$$

Ví dụ 8

- Sử dụng phương pháp quay lui liệt kê (duyệt) các hoán vị của $1, 2, \dots, n$.
- Mỗi hoán vị $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ là bộ có tính đến thứ tự của $1, 2, \dots, n$.
- Mỗi $x_i \in X$ có n lựa chọn. Khi $x_i = j$ được lựa chọn thì giá trị này sẽ không được chấp thuận cho các thành phần còn lại.
- Để ghi nhận điều này, ta sử dụng mảng *unused*[] gồm n phần tử.
 - + Nếu *unused*[i] = True điều đó có nghĩa giá trị i được chấp thuận
 - + Nếu *unused*[i] = False tương ứng với giá trị i không được phép sử dụng.

Ví dụ 8

```
Void Try (int i ){  
    for (int j = 1; j <= n; j ++){  
        X[i] = j;  
        unused[j] = False  
        if (i == k)  
            Result();  
        else  
            Try(i + 1);  
        unused[j] = true  
    }  
}
```

Ví dụ 8

Ví dụ 9 (Bài toán n quân hậu)

- Trên bàn cờ kích cỡ $n \times n$, hãy đặt n quân hậu, mỗi quân trên 1 hàng sao cho tất cả các quân hậu đều không ăn được lẫn nhau.
- Gọi $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ là một nghiệm của bài toán. Khi đó, $x_i = j$ được hiểu là quân hậu hàng thứ i đặt ở cột j . Để các quân hậu khác không thể ăn được, quân hậu thứ i cần không được lấy trùng với bất kỳ cột nào, không được cùng đường chéo xuôi, không được cùng trên đường chéo ngược.

Ta có n cột $A = (a_1, \dots, a_n)$, có Xuôi $[2 * n - 1]$ đường chéo xuôi, Ngược $[2 * n - 1]$ đường chéo ngược.

Ví dụ 9 (Bài toán n quân hậu)

```
void Try (int i){  
    for(int j=1; j<=n; j++){  
        if( A[j] && Xuoi[ i - j + n ] && Nguoc[i + j - 1]){  
            X[i] =j;  
            A[j]=false;  
            Xuoi[ i - j + n]=false;  
            Nguoc[ i + j - 1]=false;  
            if(i==n) Result();  
            else Try(i+1);  
            A[j] = true;  
            Xuoi[ i - j + n] = true;  
            Nguoc[ i + j - 1] = true;  
        }  
    }  
}
```

Khi đó, để giải bài toán quân hậu ta chỉ cần gọi đến thủ tục Try(1).

Bài tập

I. Sử dụng thuật toán sinh, viết chương trình giải các bài tập dưới đây: 1.1. Liệt kê các xâu nhị phân có độ dài n .

1.2. Liệt kê các tập con k phần tử của $1, 2, \dots, n$.

1.3. Liệt kê các hoán vị của $1, 2, \dots, n$.

1.4. Liệt kê các cách chia số tự nhiên n thành tổng các số nhỏ hơn n .

1.5. Liệt kê tất cả các xâu nhị phân độ dài n có duy nhất một dãy k bit 0 liên tiếp và duy nhất một dãy m bit 1 liên tiếp.

1.6. Liệt kê các dãy con của dãy số A_n sao cho tổng các phần tử của dãy con đó đúng bằng k .

1.7. Liệt kê tất cả các dãy con k phần tử của dãy số A_n sao cho tổng các phần tử của dãy con đó đúng bằng B .

Bài tập

1.8. Liệt kê tất cả các cách chọn trên mỗi hàng, mỗi cột khác nhau các phần tử của ma trận vuông A cấp n sao cho tổng các phần tử đó bằng K .

1.9. Liệt kê tất cả các dãy số nguyên tố thuận nhất bậc k của dãy số A_n bằng cách trao đổi nội dung các phần tử của dãy số A_n .

1.10. Giải bài toán n quân hậu.

II. Sử dụng thuật toán quay lui, viết chương trình giải các bài tập dưới đây:

2.1. Liệt kê các xâu nhị phân có độ dài n .

2.2. Liệt kê các tập con k phần tử của $1, 2, \dots, n$.

2.3. Liệt kê các hoán vị của $1, 2, \dots, n$.

2.4. Liệt kê các cách chia số tự nhiên n thành tổng các số nhỏ hơn n .

2.5. Liệt kê tất cả các xâu nhị phân độ dài n có duy nhất một bit 0 liên tiếp và duy nhất một dãy m bit 1 liên tiếp.

Bài tập

- 2.6. Liệt kê các dãy con của dãy số A_n sao cho tổng các phần tử của dãy con đó đúng bằng k .
- 2.7. Liệt kê tất cả các dãy con k phần tử của dãy số A_n sao cho tổng các phần tử của dãy con đó đúng bằng B .
- 2.8. Liệt kê tất cả các cách chọn trên mỗi hàng, mỗi cột khác nhau các phần tử của ma trận vuông A cấp n sao cho tổng các phần tử đó đúng bằng K .
- 2.9. Liệt kê tất cả các dãy số nguyên tố thuần nhất bậc k của dãy số A_n bằng cách trao đổi nội dung các phần tử của dãy số A_n .
- 2.10. Giải bài toán n quân hậu.