

Дифференциальная геометрия и топология

Богачев Николай Владимирович

ИППИ РАН & МФТИ

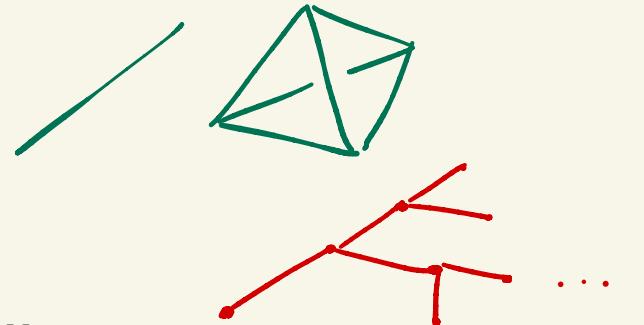
Весна 2022

Введение: что изучаем, какие объекты и структуры, значение геометрии в мире фундаментальной и прикладной математики

1. Что такое «Геометрия»?

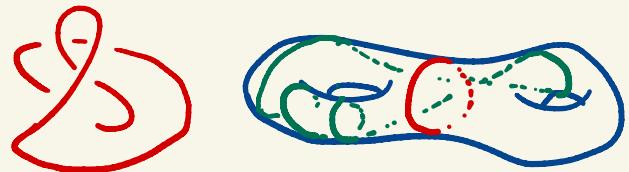
Геометрические объекты:

а) линейные: прямые, плоскости, подпространства, многогранники



б) дискретные: системы точек в пространстве, графы, дискретные сетки

в) гладкие: кривые, поверхности, многообразия



Группы преобразований:

- группы движений/изометрий: переносы, повороты, отражения, ...



- группы симметрий множеств (многогранников, графов, ...)

- группы аффинных преобразований: гомотетия, ...

$$\overrightarrow{Ox'} = \lambda \overrightarrow{Ox}$$
A hand-drawn diagram showing a point O at the origin. Two vectors originate from O: one labeled x pointing towards the bottom-right, and another labeled x' pointing towards the top-right. A green arrow above the vectors indicates they are parallel, representing a homothety.

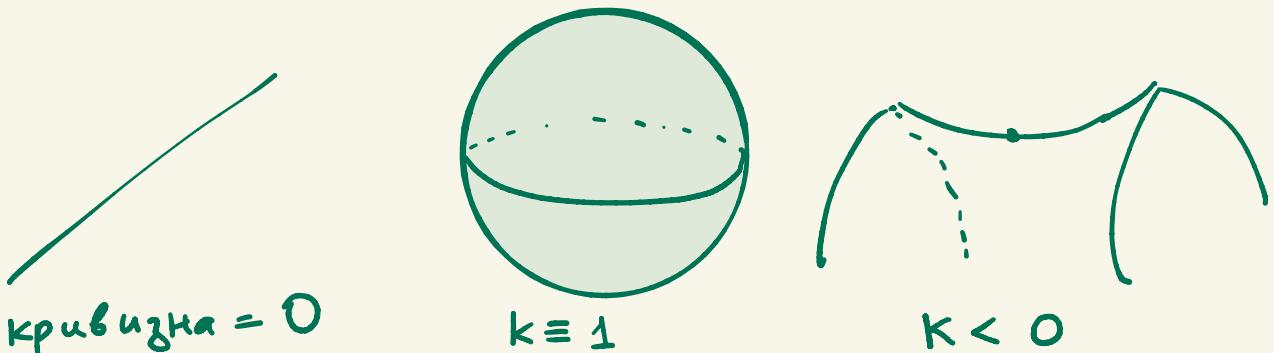
- группы гомеоморфизмов, диффеоморфизмов, полиномиальных морфизмов, ...

2. Дифференциальная геометрия и риманова геометрия

Дифф. геометрия — гладкие кривые, поверхности, многообразия



Риманова геометрия (Riemannian geometry) — римановы многообразия (снабженные метрикой), кратчайшие линии (геодезические), кривизна (curvature), углы между кривыми, площади, объемы, и т.д.



3. Евклидова и неевклидова геометрии

E^2

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$



S^2

ℓ

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi/2$$



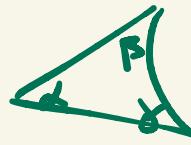
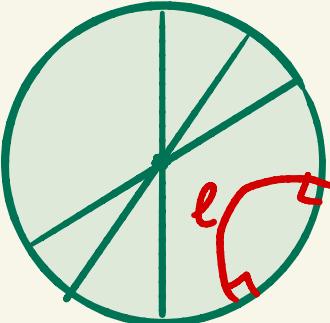
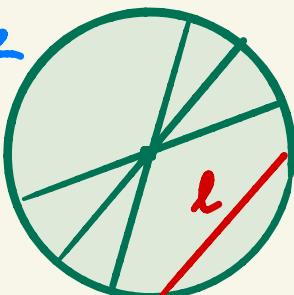
Открытие пространства Лобачевского

H^n

— одно из величайших научных открытий 19 века.

Первая официальная публикация — 1829 год, Н.И. Лобачевский. Параллельно этим занимались К. Гаусс и Я. Бойяи.

H^2



$$\alpha + \beta + \gamma < \pi$$

4. Геометрии и группы — эрлангенская программа Клейна, модельные геометрии, программа геометризации Терстона

Геометрия — пара (G, X) , где G — группа преобразований, действующая на множестве X

Примеры:

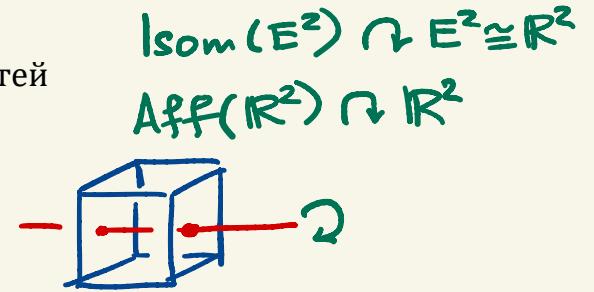
а) школьная планиметрия, по сути, состоит из двух частей

б) аналогично школьная стереометрия

в) $(\text{Sym}(P), P)$ — группа симметрий многогранника P

г) более общо: группы изометрий метрических пространств $\text{Isom}(X)$, группы гомеоморфизмов $\text{Homeo}(M)$ и группы дiffeоморфизмов $\text{Diffeo}(M)$ многообразий, группы автоморфизмов $\text{Aut}(X)$ алгебраических многообразий X , ...

д) конечно-порожденные группы, дискретные группы



Модельные геометрии

Модельная геометрия (G, X) — односвязное гладкое многообразие X с транзитивным действием группы Ли G

$$(\text{Isom}(E^n), E^n)$$

$$\text{Isom } E^n = \mathbb{R}^n \rtimes O_n(\mathbb{R})$$

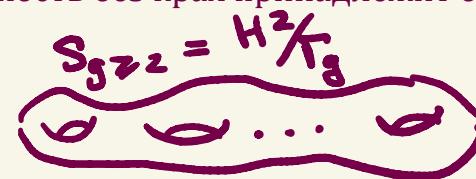
$$(\text{Isom}(S^n), S^n), \quad \text{где } S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\text{Isom}(S^n) = O_{n+1}(\mathbb{R})$$

Геометризация 2-мерных поверхностей: теорема об униформизации

Теорема об униформизации

Всякая односвязная риманова поверхность (1-мерное комплексное многообразие) конформно эквивалентна либо открытому диску в \mathbb{C} , либо сфере Римана $\mathbb{C} \cup \infty$, либо комплексной плоскости. Таким образом, всякая 2-мерная поверхность без края принадлежит одному из трех типов: $S^2\mathbb{X}$, $\mathbb{R}^2\mathbb{X}$, $H^2\mathbb{X}$.

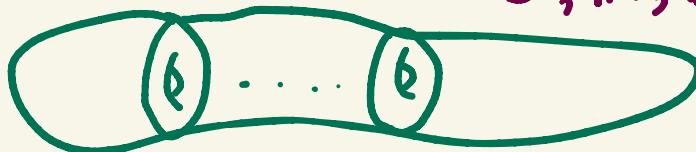
Классификация: S^2  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  $S_{g,2g}$ 

Программа геометризации Терстона: 3-многообразия

Теорема (Thurston's Geometrization Conjecture 1982 = Perelman's Theorem 2002)

Всякое связное компактное 3-многообразие M с (возможно, пустой) границей, состоящей из 2-мерных торов, можно так разрезать на блоки вдоль конечного семейства попарно непересекающихся торов, что внутренность каждого блока будет реализовывать одну из 8 модельных геометрий.

То есть, $\text{int(block)} = X/\Gamma$, где $\Gamma < \text{Isom}(X)$ — дискретная группа движений, действующая свободно на пространстве X : S^3 , \mathbb{R}^3 , H^3 , $S^2 \times \mathbb{R}$, $H^2 \times \mathbb{R}$, Nil , Sol , $\widehat{\text{SL}}_2$.



Теорема (Фундаментальная теорема дифференциальной топологии)

$$M \approx N$$

Пусть M и N — два гладких n -многообразия, $n < 4$. Если M и N гомеоморфны, тогда они и диффеоморфны. При $n > 3$ это неверно.

$$M \not\cong N$$

Замечание: обобщенная гипотеза Пуанкаре верна для всех n в категории топологических многообразий (Фридман и Смейл), но для гладких верна при $n=1, 2, 3, 5, 6$, а при $n=4$ до сих пор открыта. При $n=7$ известны контрпримеры (Милнор).

Теорема (гипотеза Пуанкаре)

Всякое односвязное компактное 3-многообразие диффеоморфно S^3 .

Роль пространства Лобачевского в маломерной геометрии и топологии:

Теорема (гиперболизации)

Всякое связное компактное 3-многообразие M без края, для которого является гиперболическим, то есть

$$M \cong \mathbb{H}^3 / \Gamma, \text{ где } \Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^3).$$

$$\begin{aligned} \text{card } \pi_1(M) &= \infty \\ \pi_1(M) &\not\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

Теорема Терстона о классификации узлов

(Теория узлов)

дисперсия

Пусть K — узел в 3-сфере. Если K — не торический и не сателлитный, то

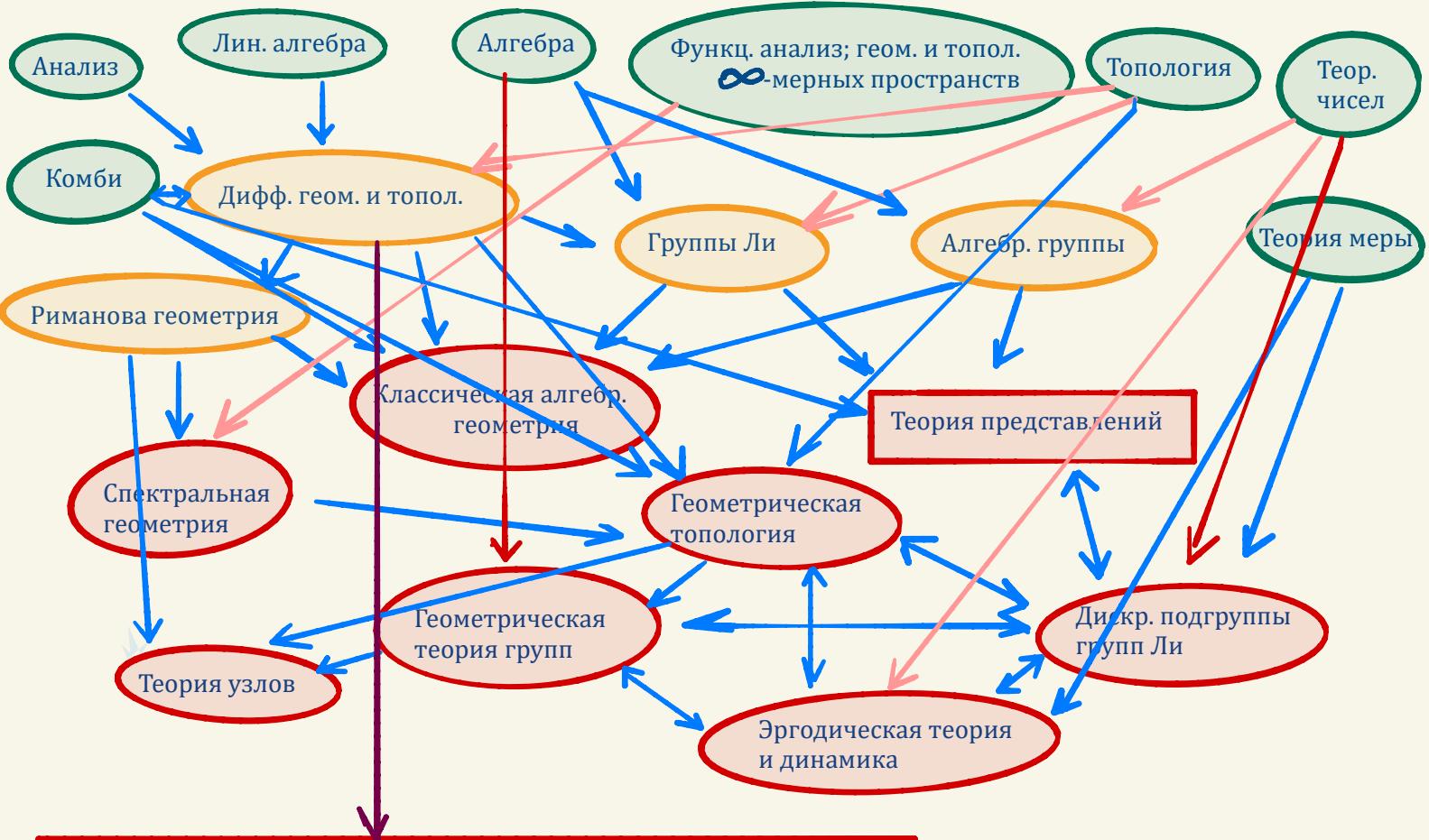
$$S^3 \setminus K \cong \mathbb{H}^3 / \Gamma.$$

Насколько много гладких структур в одной геометрии? Сложнейший вопрос!

Для гиперболических ($n > 2$)-многообразий — теоремы жесткости Мостова, Прасада, Маргулиса.

Для $n=2$ — теория пространств модулей, теория Тайхмюллера, mapping class groups.

5. Место дифференциальной геометрии в фундаментальной и прикладной математике



Отдельный мир: дискретная дифференциальная геометрия, CS, ML, DS, etc

Предварительные сведения

6. Дифференцируемые функции. Дифференциал и его геометрический смысл.

Опр. 1) $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ на лин. дифф. в т. $a \in \mathbb{R}^n$, если

$\exists A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ - лин. оператор, т.к.

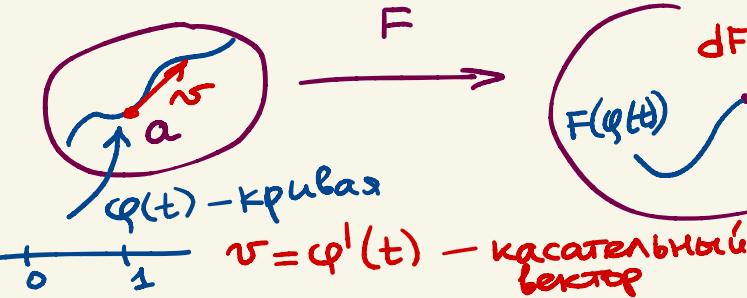
$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\|F(a+\tau) - F(a) - A\tau\|}{\|\tau\|} = 0$$

2) Обозн: $A = dF$; Утв: $\text{Mat}(dF) = \begin{matrix} \text{матр.} \\ \text{Якоби} \end{matrix} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1,..,m \\ j=1,..,n}}$

3) $F \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, если $\frac{\partial^k F}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}$ сущ. и непр.
 $F \in C^\infty$, если $F \in C^k \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots$.

Геометрический смысл дифференциала

$$U \subset \mathbb{R}^n$$



$$V \subset \mathbb{R}^m$$

$dF(v)$ - касат. вектор
к кривой $F \circ q(t)$ в т. $F(a)$.

т.е. $dF: T_a U \rightarrow T_{F(a)} V$

7. Теоремы о неявной и обратной функциях

Теорема об обратном отображении

Пусть $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F \in C^k(\mathbb{R}^n)$; $dF \in GL(\mathbb{R}^n)$ в т. $a \in \mathbb{R}^n$.

Тогда $\exists U_0 \ni a$, $V_0 \ni F(a)$: $F|_{U_0}: U_0 \rightarrow V_0$ — C^k -диффеоморфизм,

т.е. $F|_{U_0}$ — биективно; $F|_{U_0}, F^{-1}|_{V_0} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ в т. $a = F(a)$ соответ.

Теорема об неявной функции

Пусть $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^k(\mathbb{R}^{n+m}; \mathbb{R}^n)$; $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и

$F(a, b) = 0$. Пусть $dF_{(a, b)} = (\underbrace{dF_{(a, b)}|_{\mathbb{R}^n}}_{A_1}; \underbrace{dF_{(a, b)}|_{\mathbb{R}^m}}_{A_2})$ — т. з.

$dF_{(a, b)}|_{\mathbb{R}^n} \in GL(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\exists U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ и $V \subset \mathbb{R}^m$, т. з.

$(a, b) \in U$ и $\forall y \in V \exists! x = g(y)$, где $g \in C^k(V, \mathbb{R}^n)$, $g(b) = a$,

$F(g(y)), y \in V$ и $dg_b = -A_1^{-1} \cdot A_2$.

8. Гладкие подмногообразия в \mathbb{R}^n

Опр. Гладкое d -мерное подмн-е в \mathbb{R}^n — такое мн-во, которое локально есть образ регулярного отобр-я: $F: \mathbb{R}^d \xrightarrow{k} \mathbb{R}^n$; $d \leq n$;

$\text{rank } dF$ — максимальен в каждой точке $x \in U$, т.е.

$$\text{rank } dF = d.$$

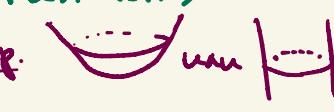
Эквив. задание подмн-й

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{лок}} \begin{cases} x_{d+1} = \varphi_{d+1}(x_1, \dots, x_d) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(x_1, \dots, x_d) \end{cases} \\ & \xrightarrow{\text{лок}} \begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \text{где } m = n - d \quad u \\ & \quad \text{rank} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = m. \end{aligned}$$

Примеры 1) $d=0$ — гипср. подмн-во; $d=n$ — $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто.

2) $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ — k -мерная плоскость;

3) $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$; $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x, x) = 1\}$.

4) Любой регулярный пол-тз $F: U \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^n$, где $\text{rank}(dF) = d$ (Без изломов — вложенные подмн-и в \mathbb{R}^n). Напр. 

9. Абстрактные гладкие многообразия с краем

Пусть M — хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой.

Опр.

Внутренняя карта — пара (U, φ) , где $U \subset M$, $\varphi: U \xrightarrow[\text{откр.}]{} \mathbb{R}^n$ homeo (гомеоморф.)

Краевая карта — (V, ψ) , где $\psi: V \rightarrow V^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\} = \mathbb{R}_+^n$ (upper half-space)

Опр. (U_1, φ_1) и (U_2, φ_2) согласованы, если функции "склейки"

$\varphi_{12}: \varphi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (гладкие).

Опр. Атлас на M — система попарно совм. карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, где $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$

Опр. Гладкое n -мерное многообразие (n -многообразие) —

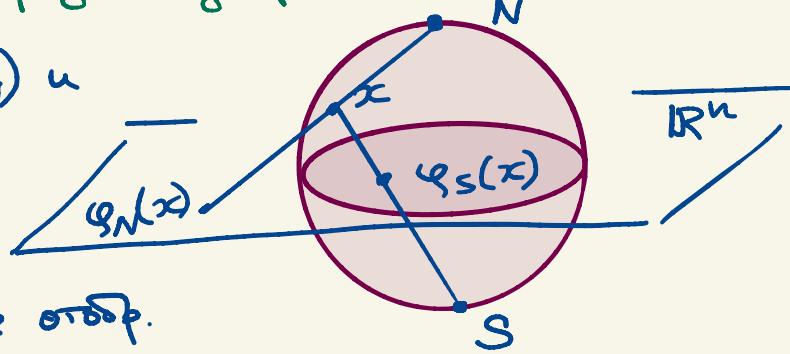
это хаусд. топ. пр-во, снабж. системой эквив. атласов.

Край ∂M мн-я M — это изображение всех граничных точек в краевых картах, т.е. $\partial M = \{\psi^{-1}(x_n=0)\} \mid (\psi, \psi)-\text{краевая карта}\}$.
Многообр. с краем, если $\partial M \neq \emptyset$, и без края, если $\partial M = \emptyset$.

Примеры 1) \mathbb{R}^n - 1-карта $(\mathbb{R}^n, \text{id})$; $U \subset \mathbb{R}^n$ откп. область.

2) Замкн. шар $\overline{B^n} \subset \mathbb{R}^n$; $\partial \overline{B^n} = S^{n-1}$.

3) $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ - гладкое n -многообразие без края. Миним. атлас состоит из 2 карт: $(S^n \setminus \{N\}, \varphi_N)$ и $(S^n \setminus \{S\}, \varphi_S)$. Проверьте, что



1) $\varphi_N: S^n \setminus N \rightarrow \mathbb{R}^n$ - гомеоморфизм

2) $\varphi_{NS}: \varphi_N(x) \mapsto \varphi_S(x)$ - гладкое отображ.

4) $U^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ - n -мерк-е, $\partial U^n = \mathbb{R}^{n-1}$.

5) $\mathbb{RP}^n = P(\mathbb{R}^{n+1})$ - проективное n -меркое пр-во $= \{l \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid l \ni \{0\}\}$.

Атлас из $n+1$ карты: $U_j = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mid x_j \neq 0\}$.

Метрика топологии на \mathbb{RP}^n : $\rho(x, y) = L(x, y), x, y$ - прямк.

$\varphi_j: U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$; $\varphi_j(x_0 : \dots : x_n) = \left(\frac{x_0}{x_j}, \frac{x_1}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j} \right)$.

6) $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкое регулярное отобр. Тогда
 $M = f(U) \subset \mathbb{R}^n$ является гладким n -мерным (ног)атт-ем.
 (Атлас карт строится на основе теор. о неявной/обратной ф-циях).

7) Аналогично, если $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} f_1(x) = c_1 \\ \vdots \\ f_k(x) = c_k \end{array}\}$ задано ид.

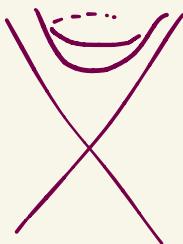
Уп-ии. т.к. $\text{rank } J(f_1, \dots, f_k) = k$ вблизи на M , тогда
 M является гладким $(n-k)$ -многообразием.

Частные случаи: 7.1) $S^n = \{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$

7.2) $H^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid \begin{array}{l} -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = -1 \\ x_0 > 0 \end{array}\}$

7.3) $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \mid \det(A) = 1\}$

$\dim SL_n(\mathbb{R}) = n^2 - 1$, т.к. $\det(A)$ — гладкая
 регулярная функция от $(a_{ij}, \dots, a_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}$.



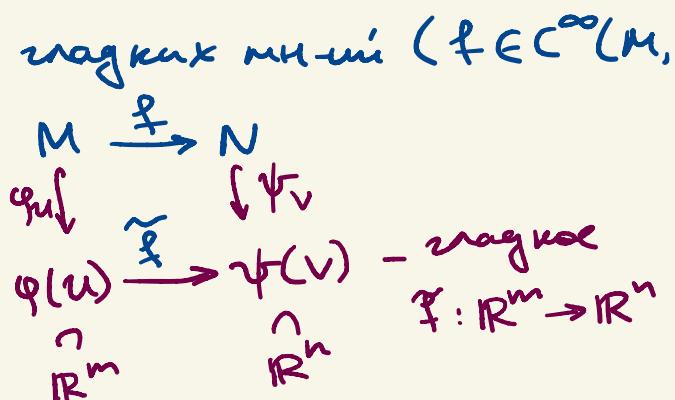
10. Касательное пространство и расслоение. Гладкие отображения. Погружения и вложения.

Опр.

$f: M \rightarrow N$ — гладкое отобр. гладких мн-ий ($f \in C^\infty(M, N)$),
если это гладко в картах:

Опр. Гладкая кривая в M — это

гладкое отобр. $\gamma: \mathbb{R}^1 \rightarrow M$.



Опр.

Касат. пр-во к M в точке $x = T_x M$ — семейство классов эквивалентности векторов скорости кривых $\gamma \ni x$.

Заметим, что $\dim T_x M = n$ для всех $x \in M$. Если $f: M \rightarrow N$ — лн. отобр., то $d_f: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ — лин. отобр. касат. пр-в.

Опр.

$f: M \rightarrow N$ — погружение, если f — гладкое и $d_x f$ — инъекция ($\forall x \in M$).

$f: M \rightarrow N$ — вложение, если f — погружение и $M \cong f(M)$.

Предл.: 1) f — гладкая инъекция, M — компакт $\Rightarrow f$ — вложение
 + погружение

2) f — сопол. ($f^{-1}(K)$ -компакт), f -инъекция + погр $\Rightarrow f$ — вложение.

11. Теорема о существовании разбиения единицы, подчиненного атласу.

Пусть $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — атлас C^∞ -много M .

Опр. Разбиение единицы, подчинённое $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — это семейство непр. функций h_α со след. свойствами:

- 1) $0 \leq h_\alpha(x) \leq 1 \quad \forall x \in A$ 3) $\{\text{supp } h_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — лок. конечно
2) $\text{supp } h_\alpha \subset U_\alpha \quad \forall \alpha \in A$ 4) $\forall x \in M \quad \sum_{\alpha \in A} h_\alpha(x) = 1$.

Теорема (о существовании гладкого разбиения 1)

Для всякого гладкого многообразия с краем или без края существует гладкое разбиение (все функции в нем должны быть гладкими), подчиненное атласу.

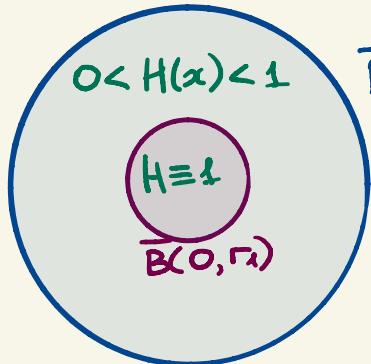
- Док-во:
- 1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$, авл. гладкой
 - 2) $\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 < r_2, \exists h(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$:
$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \leq r_1 \\ 0 < h(t) < 1 & \text{при } t \in (r_1, r_2) \\ 0 & \text{при } t \geq r_2 \end{cases}$$

Hint:
$$h(t) = \frac{f(r_2-t)}{f(r_2-t) + f(t-r_1)}$$

3) $\forall 0 < r_1 < r_2, r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \exists H(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n), H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$ т.е.

$$H \equiv 0$$

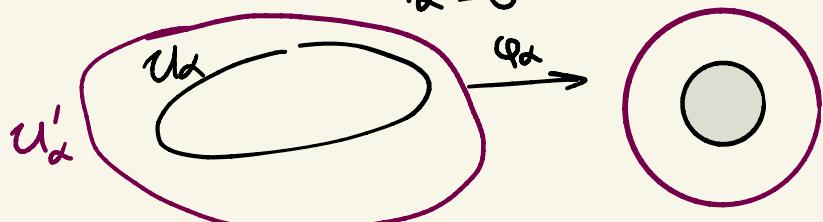
$$H(x) := h(|x|), \quad y \in h(t) \text{ из } n.(2).$$



$$\overline{B}(0, r_2)$$

4) Пусть $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow B(0, 1).$

Тогда $f_\alpha = H_\alpha \circ \varphi_\alpha$ на U'_α и
 $f_\alpha = 0$ на $M \setminus U_\alpha.$



Пусть $f(x) := \sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x).$ Ясно, что линь контактное число $f \neq 0,$
и это $f(x) > 0$ вблизи на $M.$

Тогда $g_\alpha(x) = f_\alpha(x)/f(x)$ дает гладкое разд. 1: $\sum g_\alpha = 1$
 $0 \leq g_\alpha(x) \leq 1.$

Внимание: перенумеровать под атласом (несколько атласов на 1 карту) ■