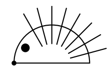
Степень отображения и индекс

ДГТ 12◇1. Не существует гладкого отображения круга на его границу, тождественного на ней («барабан нельзя смять на его обод»).

ДГТ 12◇2. Не существует гладкого касательного поля на сфере $\mathbf{S}^2$, нигде не обращающегося в ноль («теорема о причёсывании ежа»).



ДГТ 12◇3. На $\mathbf{S}^3$ существует ненулевое касательное векторное поле.

ДГТ 12◇4. Будем считать, что $\mathbf{S}^1 \subset \mathbf{C}$. Тогда можно определить

$$\varphi_n : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1, \quad z \mapsto z^n.$$

Докажите, что для любого многочлена $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, не принимающего нулевые значение, и некоторого достаточно большого $R > 0$ отображение

$$P_R : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1, \quad z \mapsto \frac{P(Rz)}{|P(Rz)|}$$

гладко гомотопно отображению $\varphi_{\deg P}$. Найдите степень отображения P_R, сравните её со степенью P_0 и докажите основную теорему алгебры.

Дополнительные задачи

Рассмотрим n-мерное многообразие N и два его замкнутых подмногообразия P и Q размерности p и q соответственно. Пусть они трансверсальны и $p + q = n$. Тогда их пересечение состоит из конечного числа точек $x_1, \dots, x_m$. Если N, P, Q ориентированы, то каждой точке x_j приписывается знак по следующему правилу. Пусть $\tau^p_{(j)}$ – ориентирующий касательный репер к P в точке x_j, $\tau^q_{(j)}$ — ориентирующий касательный репер к Q в точке x_j. Точке x_j приписывается знак «+», если $\tau = (\tau^p_{(j)}, \tau^q_{(j)})$ является ориентирующим репером к N, и знак «-» в противном случае. Знак этот обозначается $\operatorname{sign} x_j(P \circ Q)$ и называется *знаком пересечения*.

Индексом пересечения P и Q называется $P \circ Q = \sum\limits_{i=1}^{m} \operatorname{sign} x_i(P \circ Q)$. В неориентированном случае сумма берется по модулю два. Легко проверить, что верно следующее: $P \circ Q = (-1)^{pq} Q \circ P$. Если подмногообразия Q_1, Q_2 гомотопны, то их индексы пересечения с любым P совпадают: $Q_1 \circ P = Q_2 \circ P$ (доказательство этого факта аналогично доказательству того, что степень отображения инвариантна относительно гомотопии).

ДГТ 12◇5. Как выглядит теорема о причёсывании ежа для $\mathbf{S}^n$ при $n > 3$?

ДГТ 12◇6. Индекс пересечения двух замкнутых подмногообразий евклидова пространства всегда равен нулю.

ДГТ 12◇7. Гладкое отображение из круга в себя имеет неподвижную точку (теорема Брауэра).

ДГТ 12◇8. Замкнутое связное $(n-1)$-мерное подмногообразие M пространства $\mathbf{R}^n$ всегда разделяет $\mathbf{R}^n$ на две части (и потому ориентируемо).