Внешние формы

Пусть $V = \mathbb{R}^n$ — векторное пространство с базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$, а V^* — пространство *линейных функционалов* на V с двойственным базисом $\{e^1, \ldots, e^n\}$, то есть $e^i(e_j)$ равно 1 при $i = j$ и 0 иначе.

Внешняя k-форма на V — это кососимметрическая k-линейная функция. Пространство внешних k-форм

$$\Lambda^k(V) = \langle e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_k} \mid j_1 < \ldots < j_k \rangle$$

имеет размерность C_n^k.

Звезда Ходжа $\star\colon \Lambda^k(V) \to \Lambda^{n-k}(V)$ — это изоморфизм линейных пространств, заданный формулой

$$\star(e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_k}) = \operatorname{sgn} \sigma_{j_1,\ldots,j_n} \cdot e^{j_{k+1}} \wedge \ldots \wedge e^{j_n},$$

где $\sigma_{j_1,\ldots,j_n}$ — перестановка n различных чисел.

Скалярное произведение позволяет отождествлять формы и k-векторы: $\sharp\colon \Lambda^k \to \Lambda_k,\ e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_k} \mapsto e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_k}$, и $\flat = \sharp^{-1}$

ГКП-7, упр.1. Пусть $\omega^k \in \Lambda^k(V)$, где k нечётно. Докажите, что $\omega^k \wedge \omega^k = 0$.

ГКП-7, упр.2. Пусть $a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \in \mathbb{R}^3$. Докажите, что отображение $a \mapsto a^\flat$ — изоморфизм пространств $\mathbb{R}^3 \cong \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$. Проверьте, что $a^\flat = a_1e^1 + a_2e^2 + a_3e^3$.

ГКП-7, упр.3. Пусть $\omega_1 = e^1 + e^2 + e^3,\ \omega_2 = e^1 - e^2 + 2e^3 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$. Вычислите $\star\omega_1$, $\star\omega_2$ и $\star(\omega_1 \wedge \omega_2)$.

ГКП-7, упр.4. Пусть $\omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$.

(a) Покажите, что $\star(\star\omega) = -\omega$ для $n = 2$ и $\star(\star\omega) = \omega$ для $n = 3$.

(b) Покажите, что $\star(\star\omega) = (-1)^{n+1}\omega$ для любого $n \geq 2$.

(c*) Что можно сказать про $\star(\star\omega)$, если ω — внешняя k-форма?

Дифференциальные формы

На многообразии M в точке p касательное пространство $\mathrm{T}_p(M)$ имеет базис $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$, а двойственное ему *кокасательное* пространство $\mathrm{T}_p^*(M)$ имеет двойственный базис $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$.

Дифференциальная k-форма

$$\omega = \sum_{j_1<\ldots<j_k} \omega_{j_1\ldots j_k}(x) dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}$$

— это набор k-форм в касательных пространствах к M, гладко зависящий от точки: $\omega_{j_1\ldots j_k}(x)$ — гладкие функции. *Внешний дифференциал* $d\colon \Lambda^k(V) \to \Lambda^{k+1}(V)$ переводит k-форму ω в $k+1$-форму

$$d\omega = \sum_{j_1<\ldots<j_k} d\omega_{j_1\ldots j_k}(x) dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}$$

.

ГКП-7, упр.5. Докажите, что

(b) $d^2\omega = d \circ d(\omega) = 0$ для всех ω.

(c) $d(\omega_1^k \wedge \omega_2^m) = d\omega_1^k \wedge \omega_2^m + (-1)^k \omega_1^k \wedge d\omega_2^m$.

ГКП-7, упр.6. *Кодифференциал* δ переводит $\omega \in \Lambda^k(M)$ в $\delta\omega := \star(d(\star\omega))$.

(a) Докажите, что если $k = 0$, то $\delta\omega = 0$.

(b) Докажите, что если $\omega \in \Lambda^k(M)$, то $\delta\omega \in \Lambda^{k-1}(M)$.

(c) Вычислите $\delta\omega$ для $\omega = e^y dx + (x+y)^2 dy \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$.

ГКП-7, упр.7. Обобщённый Лапласиан на k-формах задаётся по формуле

$$\Delta := \delta d + d\delta = \star d \star d + d \star d \star .$$

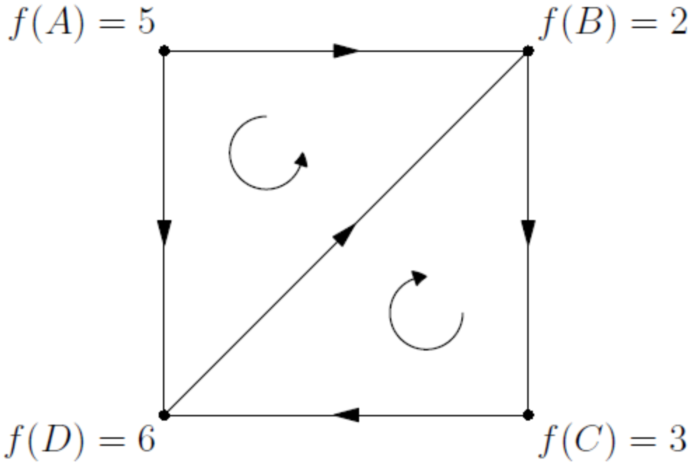
(a) Пусть $f(x,y) = xy + 2y^2$. Вычислите Δf, используя формулу выше и стандартную формулу из анализа. Сравните результат.

(b) Вычислите $\Delta\omega$ для $\omega = xdx + zdy - ydz \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$.

ГКП-7, упр.8. Пусть $\omega = 2dx + xdy$ — дифференциальная 1-форма на $\mathbb{R}^2$, $A = (0,0)$, $B = (1,1)$. Проинтегрируйте ω вдоль ориентированных отрезков AB и BA. Как соотносятся эти два значения?

Дискретные внешние формы

ГКП-7, упр.9. Пусть V — сетка с вершинами $A = (0, 1)$, $B = (1, 1)$, $C = (1, 0)$, $D = (0, 0)$, а $f: V \to \mathbb{R}$ — функция на вершинах, то есть 0-форма, как на рисунке:



Вычислите df и $d(df)$.

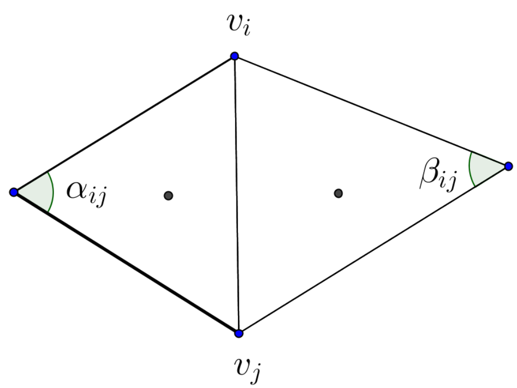
ГКП-7, упр.10. Для тех же V и f, что в предыдущей задаче, рассмотрим $h: V \to \mathbb{R}$ со значениями $h(A) = -3$, $h(B) = 0$, $h(C) = 2$, $h(D) = 3$. Вычислите

(1) $f \wedge_{0,0} h$,
(2) $w = (df) \wedge_{1,0} h$,
(3) $(dw) \wedge_{2,0} h$,
(4) $(df) \wedge_{1,1} (dh)$.

ГКП-7, упр.11. Пусть $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — дифференциальная 0-форма, заданная формулой $g = y^2(x + 2y)$.

(a) Предъявите дискретизацию формы g на сетке V из предыдущих задач (через значения в вершинах). Обозначим её $\tilde{g}: V \to \mathbb{R}$.
(b) Найдите (гладкий) дифференциал dg.
(c) Найдите (дискретный) дифференциал $d\tilde{g}$.
(d) Проинтегрируйте 1-форму из (b) по каждому ребру сетки.
(e) Почему ответы в (c) и (d) оказались одинаковы?

ГКП-7, упр.12. Обозначим углы напротив ребра (v_i, v_j) так, как показано на рисунке.



Используя общую формулу оператора Лапласа

$$\Delta\omega = (\star d \star d + d \star d \star)\omega,$$

выведите дискретную формулу Лапласиана:

$$(\Delta f)_i = \frac{1}{2 \cdot \mathrm{Area}(v_i^*)} \cdot \sum_j (\mathrm{ctg}\,\alpha_{ij} + \mathrm{ctg}\,\beta_{ij})(f(v_i) - f(v_j)),$$

где f — функция на сетке.