

Геометрия, арифметика и динамика

дискретных групп.

Богачев Николай Владимирович
(Сколтех & МФТИ)

Лекция 7

I Введение (было)

II Топология (было)

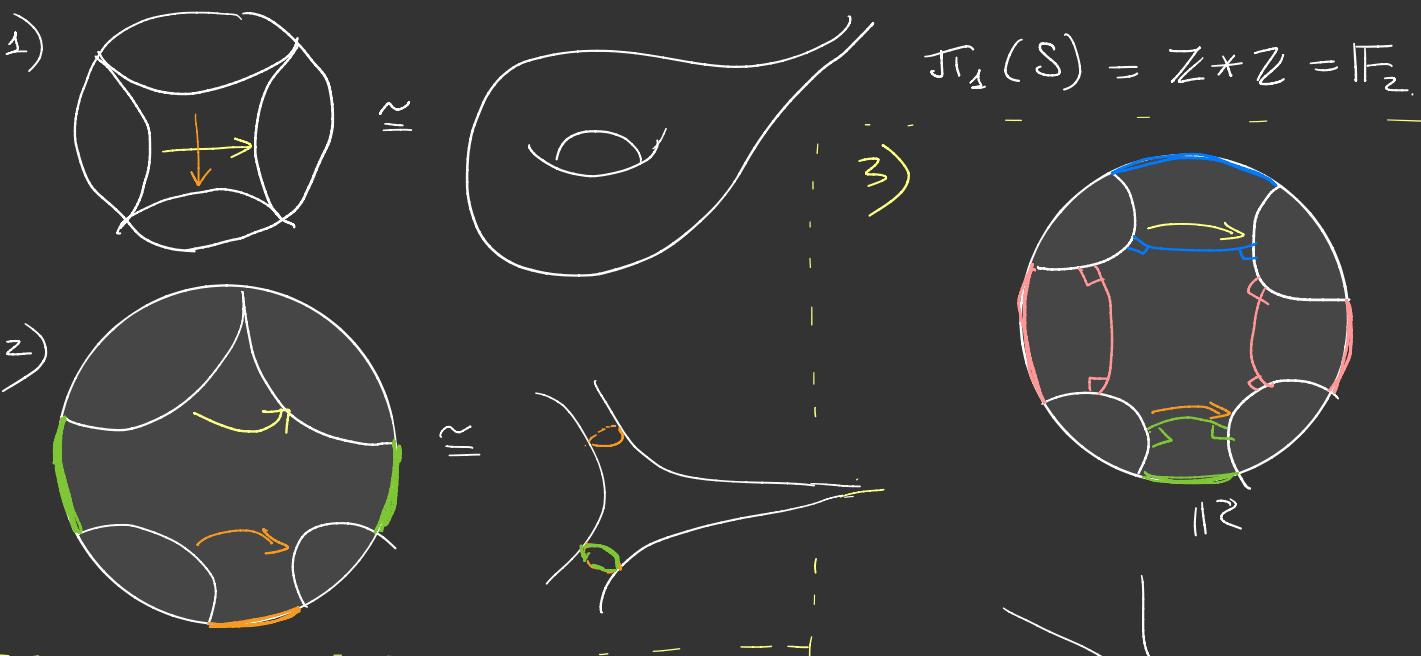
III Риманова геометрия (было)

IV Действие групп, геометрическая теория групп, дискретные подгруппы групп Ли.

V Гиперболические поверхности, многообразия, орбифолды.

Группы отражений. Решетки в $\text{Isom}(\mathbb{E}^n)$, $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$.

① Примеры гиперболических поверхностей



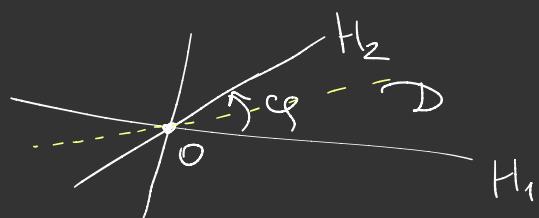
Можно рассм. $C_\Gamma = \text{Conv Hull}(\Lambda_\Gamma)$.

Тогда $\Gamma \backslash C_\Gamma$ prop. discr., и в данном случае C_Γ / Γ - компакт!

Convex cocompact action

2) Группы отражений — простейшие примеры

1) Рассмотрим $\Gamma = \langle R_{H_1}, R_{H_2} \rangle$. Тогда $R_{H_2} \circ R_{H_1} = \text{Rot}_O^{2\varphi}$, где $\varphi = \angle(H_1, H_2)$. Если Γ -группа и



$D = H_1 \cap H_2$ — фигура, конус генераторов Γ , то $(\text{Rot}_O^{2\varphi})^k = \text{Id}$, т.е. $\varphi = \frac{\pi}{k}$.

(Или же наименьшее отр.-е, которое разделяет D).

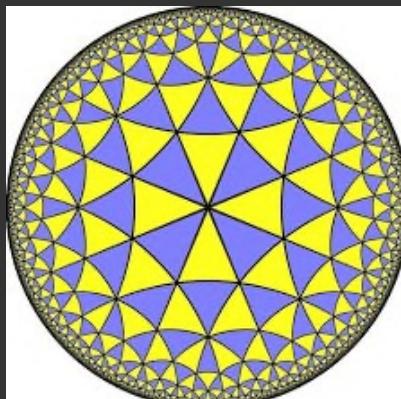
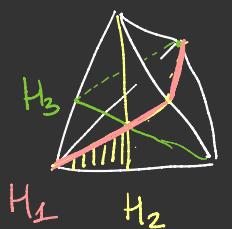
Следовательно, друг. многоугольники для диспер-группы, порожд. отражениями, имеют углы вида $\frac{\pi}{k}$ — многоугольники Кокстера.

2) Треугольники Кокстера.

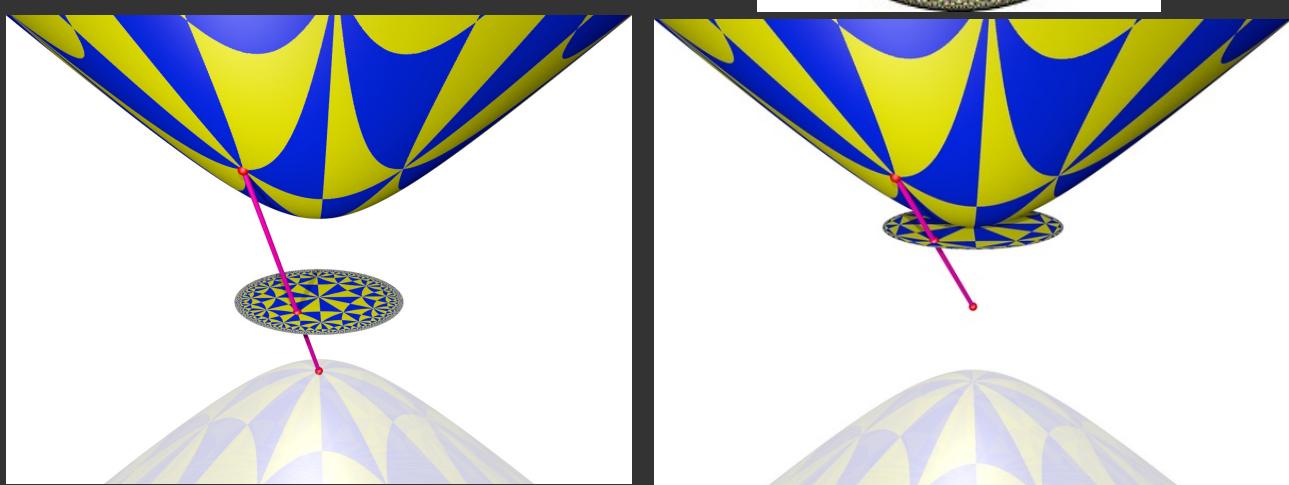
$$E^2: \quad \frac{\pi}{k} + \frac{\pi}{l} + \frac{\pi}{m} = \pi \Rightarrow (k, l, m) = (2, 4, 4), (2, 3, 6), (3, 3, 3)$$



$$S^2: \quad \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} > 1 \Rightarrow (k, l, m) = (2, 2, n), (2, 3, 3), (2, 3, 4), (2, 3, 5)$$



$$H^2: \quad \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} < 1 \quad - \text{ бесконечные многоугольники.}$$



③ Модулярная группа Клейна $PSL_2(\mathbb{Z})$.

Рассмотрим группу $PSL_2(\mathbb{R}) = \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$. Она состоит из преобразований $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, где $(\text{состав - сохр. ориентацию})$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$. (S)

Группа $\text{Isom}(\mathbb{H}^2) = PSL_2(\mathbb{R}) \times \langle \tau \rangle$ содержит также и несоставл. движения (меняющие ориентацию) вида

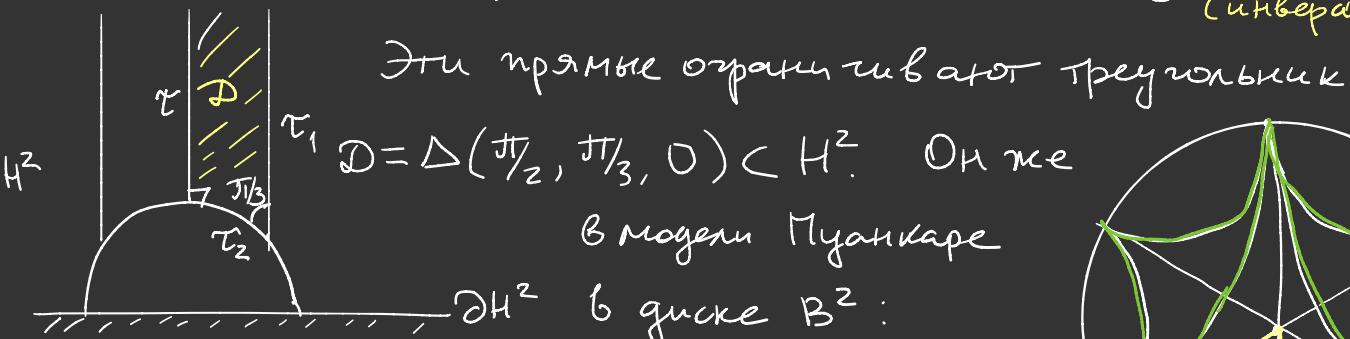
$$z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = -1. \quad (\text{Нан., } \tau \text{ на } \mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\} \text{ и } \tau \text{ на } \partial \mathbb{H}^2 = S^1 = \{z \mid \text{Im}(z) = 0\} \cup \infty = \mathbb{R} \cup \infty) \quad (N)$$

Выше τ обозн. отражение $\tau(z) = -\bar{z}$ отн. прямой $\{\text{Re}(z) = 0\}$

Далее, рассмотрим модулярную группу Клейна $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$ и расширенную группу $\widehat{\Gamma} = \Gamma \times \langle \tau \rangle$. Группа Γ состоит из движений вида (S) с $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, а группа $\widehat{\Gamma}$ также содержит все движения (N) с коэфф. $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Несложно доказать, что $\widehat{\Gamma}$ генер. равна $\Gamma \times \langle \tau \rangle$, а также, что Γ и $\widehat{\Gamma}$ являются дискретными.

Группа $\widehat{\Gamma}$ содержит отражения $\tau: z \mapsto -\bar{z}$ отн. $\{\text{Re}(z) = 0\}$,

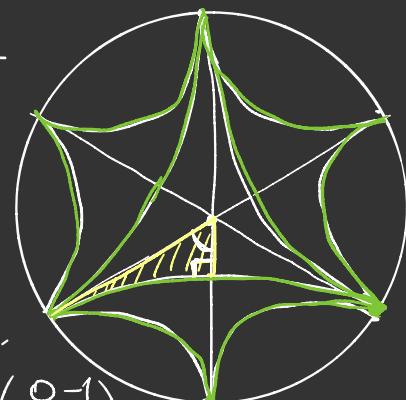
$$\tau_1: z \mapsto 1 - \bar{z} \quad \text{отн. прямой } \{\text{Re}(z) = \frac{1}{2}\} \quad \text{и} \quad \tau_2: z \mapsto \frac{1}{\bar{z}} \quad \text{отн. } \{|z| = 1\} \quad (\text{инверсия})$$



$$\text{Заметим, что } \tau = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Далее, } \tau_1 \circ \tau(z) = 1 + z \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \tau_2 \circ \tau(z) = -\frac{1}{z} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Эти матрицы являются членами элемент. преобразованиями строк и столбцов. Можно проверить, что каждую матрицу из $SL_2(\mathbb{Z})$ можно таким образом привести к $\pm I$. Следовательно, она



представима в виде слова из матриц $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\pm 1}$ и $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\pm 1}$. Значит,

$\hat{\Gamma}$ порождается отражениями T, T_1, T_2 относ. сторон D .

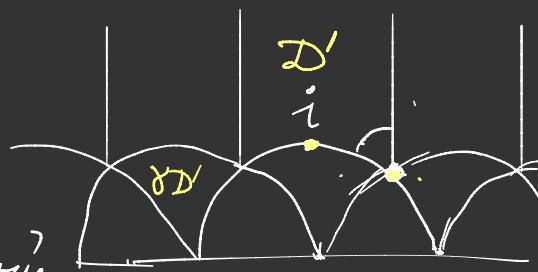
Отсюда получаем, что фунд. обл. для группы $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$

есть треугольник $D' = D \cup_{\parallel} T(D)$, причем Γ порождается

центр. симм. $T_1 \circ T_2$ с центром в i и поворотом $T_2 \circ T_1$ на $\frac{2\pi}{3}$ вокруг

$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Можно доказать, что между

этими элементами нет соотношений. (метод Пуанкаре)



Отсюда вытекает следующий нетривиальный

факт: $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ (чт. $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).

④ Группы отражений, многоугольники Кокстера и теория Винберга

1882 Poincaré, Dyck — классификация групп $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$

т.е. в том числе и

многоугольники Кокстера

в \mathbb{H}^2 . (Для E^2 и S^2 довольно

просто).



\cong



$$S_g = \mathbb{H}^2 / \Gamma_g.$$

Оп. Особые выпуклые многоугольники $P = \bigcap_{k=1}^{\infty} H_k \subset X^n$ наяву. мн-ком Кокстера, если $H_i \neq H_j$ либо $L(H_i, H_j) = \frac{m_{ij}}{m_{ij}}$, че $m_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 2} = \{2, 3, \dots\}$,

либо $H_i \parallel H_j$, т.е. $m_{ij} = \infty$ (если $X = \mathbb{H}^n$, то $H_i \cap H_j \in \partial \mathbb{H}^n$ и $\text{clos}(H_i) \cap \text{clos}(H_j) \neq \emptyset$)

либо, в случае $X^n = \mathbb{H}^n$, $H_i \cap H_j$ — расход., т.е. $H_i \cap H_j = \emptyset$.

Матрица Грама $G(P) = G(e_1, \dots, e_n)$, че $P = \bigcap_{k=1}^N H_k$.

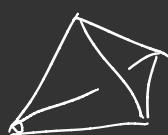
Примеры 1) Многоугольники Кокстера в E^2, S^2, \mathbb{H}^2 (см. выше).

2)Правильные многоугольники в E^3 , например,

куб



или симплекс



т.е. дают хорошие замощения пр-ва E^3 .

Теор. ($X^n = E^n, S^n$ - Coxeter; $g \in X^n = H^n$ - Винберг)

1) Пусть $\Gamma < \text{Isom}(X^n)$ - дискр. груп, порожд. отражениями. Тогда её фунд. мн-к является мног-ком Кокстера P , при этом $\Gamma = \Gamma(P)$ явл. группой, порожд. отражениями в гиперплоскостях граний мн-ка P .

2) Верно и обратное: пусть $P < X^n$ - мн-к Кокстера. Тогда $\Gamma = \Gamma(P) < \text{Isom}(X^n)$ - дискретна, и P - её фунд. мн-к.

Теор. (Кокстер, 1934 г., Ann. of Math.)

Классификация многогранников Кокстера конечного объема в $X^n = E^n$ и S^n (существуют для всех $n \geq 2$). Ответ будет представлен ниже в виде списка эллиптических и параболических диаграмм Кокстера.

1966 год, Макаров - Компактные призмы Кокстера в H^3
(первые примеры неархим. подгрупп в $PO_{3,1}(\mathbb{R})$)

Теория Э.Б. Винберга гиперболич. групп отражений (1967, Mat. Сборник)

- описание многогранников Кокстера в H^n с помощью их матриц Грама и диаграмм/схем/графов Кокстера.
- Критерии компактности и конечности объема на основе подматриц и подсхем.
- Критерий арифметичности и квадратичности для групп отражений.

Опр. Обобщ. кон. мн-к назыв. остроугольным, если $\angle(H_\alpha, H_\beta) \leq \frac{\pi}{2}$. (Частный случай: мн-ки Кокстера).

Теор. (Андреев, 1970).

Классификация остроугл. мн-ков конечного объема в H^3 .

Теор. (Винберг, 1981 и 1984, доклад на ICM 1983).

Не существует компактных мн-ков Кокстера в $H^{n \geq 30}$.

Теор. (Прохоров 1986, Хованский, 1986).

Не существует мн-ков Кокстера конечн. объема в $H^{n \geq 996}$.

Теор. (Винберг)

О существ. и единств. остроугл. мн-ка в H^n с заданной матр. Грама:

$$\text{Пусть } G^T = G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & g_{ij} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, g_{ij} \leq 0,$$

и $G \sim (n, 1, 0, \dots, 0)$

Тогда $\exists!$ остроугл. РСН: $G = G(P)$

Let $P = \bigcap_{k=1}^N H_k^-$ be a Coxeter polytope.
Coxeter diagrams/schemes/graphs

$H_i \xrightarrow{m_{ij}} H_j$ if $\angle(H_i, H_j) = \frac{\pi}{m_{ij}}$

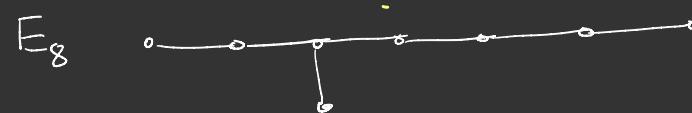
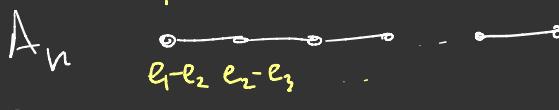
$H_i \xrightarrow{\infty} H_j$ if $H_i \parallel H_j$ ($\angle(H_i, H_j) = \frac{\pi}{\infty} = 0$).

$H_i \dashv g_{ij} \dashv H_j$ $g_{ij} = \cosh \rho(H_i, H_j) = |\langle e_i, e_j \rangle_{n,1}| > 1$

Coxeter classification of connected diagrams

Elliptic (S^n)

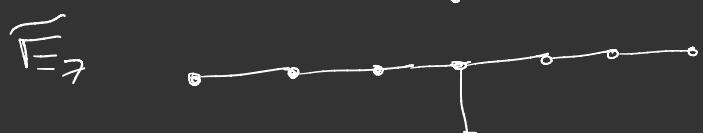
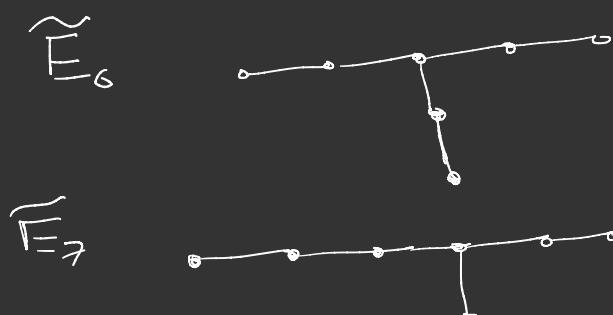
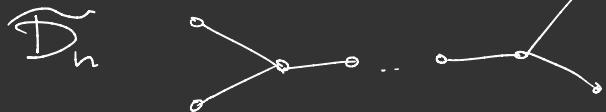
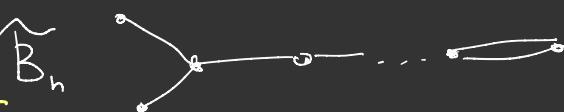
(Simple roots and Dynkin diagrams for Lie groups)



$$G_2^m = \begin{smallmatrix} m \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$$

$$D_m^{\text{II}} = \text{Dih}_m$$

Parabolic (E^n)

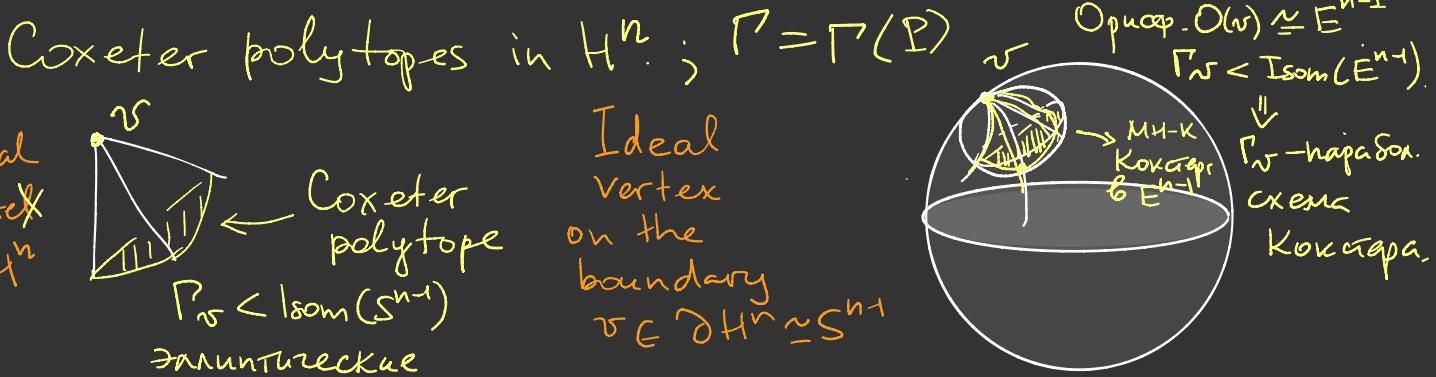


$$\widetilde{E}_2^6 = \widetilde{E}_2$$

$$\widetilde{I}_2 = \widetilde{I} = \widetilde{A}_1$$

$$1 \xrightarrow{6} 2 \xrightarrow{3} 3 \rightsquigarrow \begin{array}{l} 1 \\ \diagdown \\ 2 \\ \diagup \\ 3 \end{array}$$

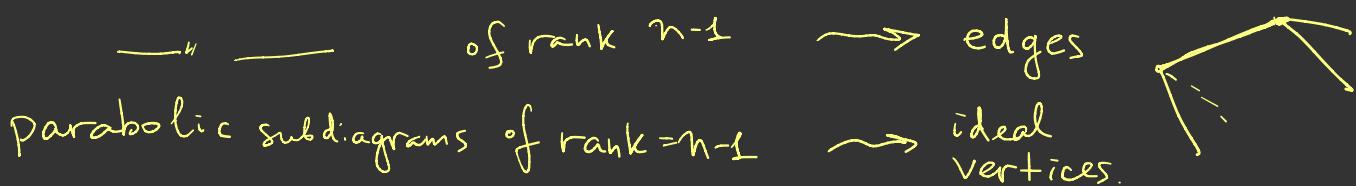
$$\infty$$



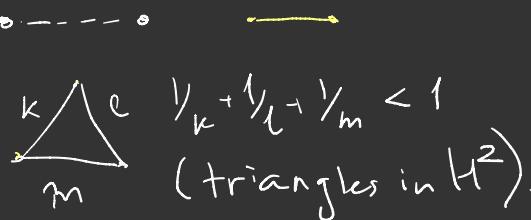
Coxeter diagram/scheme/graph of P is $S(P)$.

rank $S(P) := \text{rank}(G(P))$; signature of S = signat. of G .

Thus, elliptic subdiagrams of rank $n \rightsquigarrow$ usual vertices



Lannér diagrams = diagrams of compact = diagrams, all whose proper a Coxeter simplex = subdiags. are elliptic.



Thm (Lannér '1950)

Do not exist in $H^{\geq 5}$.
Classified in $H^2 \leq n \leq 4$

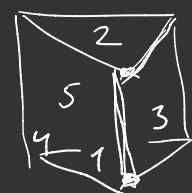
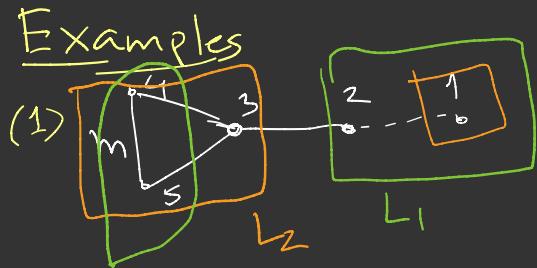
Compact conv polytope
= conv hull {usual
(finitely many) vert}
Fin Vol = Conv{us & id vert}

Theor. (Burggr., 1967, 1971-72).

Let P be a hyperbolic Coxeter n -polytope (i.e. $G(P) \sim (n, 1, 0, \dots)$)

- 1) P is compact \iff every elliptic $S_1 \subset S(P)$ can be extended to an elliptic subdiag of rank n in precisely 2 ways.
- 2) $\text{Vol}(P) < +\infty \iff$ —— can be extended to an ellipt subdiag of rank $= n$ or parabolic of rank $= n-1$ in precisely 2 ways.
- 3) If for every Lannér $S_1 \subset S(P)$ we have $\text{rank}(S_1 \sqcup S_1^\perp) = n+1$, then P is compact.

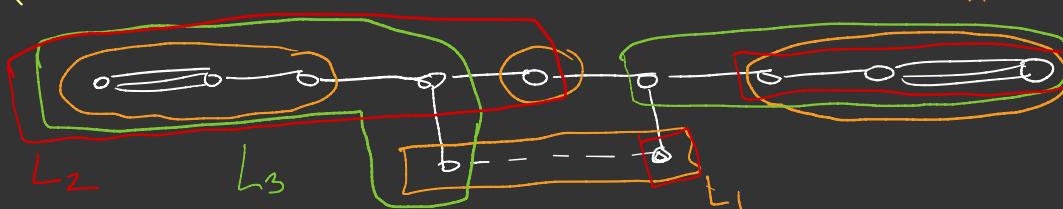




$$\text{rank}(L_1 \cup L_1^\perp) = 4$$

$$\text{rank}(L_2 \cup L_2^\perp) = 4$$

(2) Record example of Bugaenko in H⁸ (1992)
(arithmetic)



$$2 + (3+3+1) = 9$$

$$5 + (1+3) = 9$$

$$5 + 4 = 9$$

5) Поміжні б Isom(Eⁿ) та Isom(Sⁿ)

Teop. (Федоров / 1885-1891)

Суиселбет бізде олар

т.е. таких $\Gamma < \text{Ison}(E^n)$, чо

- 17 кристаллограф. груп $\in E^2$
- 230 кристал. груп $\in E^3$

$\text{Vol}(E^n/\Gamma) = \text{Vol}(\mathcal{D}) < +\infty$,

якщо \mathcal{D} -опуклі обмеж.

— — — — — — — —

Мысль $\Gamma < \text{Ison}(E^n) = \mathbb{R}^n \rtimes O_n(\mathbb{R})$. Тобто як бактерии

$\gamma = t_\gamma \cdot \Gamma_\gamma$, якщо t_γ - перенос, $\Gamma_\gamma \in O_n(\mathbb{R})$. Вважаємо обозн:

$P_\Gamma = \{\Gamma_\gamma \in O_n(\mathbb{R}) \mid \gamma \in \Gamma\}$ - ^{т.ч. точка (the point) відповідає} групі Γ .

Узвичайно, що P_Γ не обирає. явл. подгруп. Γ , та при
цьому $P_\Gamma \cong \Gamma / L$, якщо $L < \Gamma$ - подгруп-наріз. переносів.

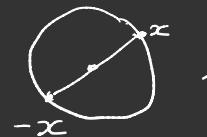
Нерутижно убедитися, що P_Γ генераторично обирається
з групами, т.е. $\Gamma_\gamma = \Gamma_{\gamma_1} \circ \Gamma_{\gamma_2}$, якщо $\gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2$. Щоне тоді,
можна показати, що $P_\Gamma < \text{Sym}(L)$.

Teor. (Бидербах; 1911)

- 1) Пусть $\Gamma \subset \text{Isom}(E^n)$, $\text{vol}(E^n/\Gamma) < +\infty$. Тогда
- $\text{card}(\text{Pr}) < +\infty$.
 - $\mathbb{Z}^n \subset \Gamma$
- как дисперсия
подпр. параллельных
перекосов
- т.е. Γ "виртуально адекватна"
(согаденевы подпр. коннекта)
-
- 2) $\forall n \exists$ лишь конечное число таких групп $\Gamma \subset \text{Isom}(E^n)$.
-

Teor. Пусть $\Gamma \cap S^n$ - своб. группировка на S^n , $\frac{\Gamma \cap S^n}{\Gamma} \neq 1$. Тогда

- $\Rightarrow S^n/\Gamma \cong P^n(\mathbb{R}) = S^n/\mathbb{Z}_2 = S^n/\{\pm I\}$,
- если $n = 2k$
- 2) Если же $n = 2k+1$, то S^n/Γ - ориентируемое.



⑥ Аффинные плоские многообразия и гипотеза Аугстедера

Рассмотрим группу $\text{Aff}(E^n) = \mathbb{R}^n \times \text{GL}_n(\mathbb{R})$. В ней также можно рассматривать диспер. подгруппы. Причем $\mu(\text{Aff}(\mathbb{R}^n)/\Gamma) < +\infty \Leftrightarrow \text{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma) < +\infty$. Что такое \mathbb{R}^n/Γ ?

Teor. Следующие определения для плоского аффинного многообразия эквивалентны:

(1) M - гладкое мк с атласом $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, где ф-ции склейки

$$\varphi_{\alpha\beta}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \in \text{Aff}(\mathbb{R}^n)|_{U_\alpha \cap U_\beta}.$$

(2) M - гладкое мк с аффинной связностью ∇ $\nabla R_\nabla \equiv 0$ и $T_\nabla \equiv 0$,
чт $T_\nabla(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ и

$$R_\nabla(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

также
кривизна
круговая

$$\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

аналитичн. конт. полн.

(3) $M = \mathbb{R}^n/\Gamma$, где $\Gamma \subset \text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ и $\Gamma \cap \mathbb{R}^n$

torsion
free

properly
discontinuous

$$\nabla_X(fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y.$$

The Auslander Conjecture (1964)

Пусть $M = \mathbb{R}^n / \Gamma$ - компактное афф- многое.

Тогда $\Gamma = J_{\Gamma}(M)$ виртуально разрещима.

(Milnor, 1968, Conj: Верна Дэй утверждала компактность)

Margulis, 1987 контр-пример, используя гиперб.

элементы $\gamma_1, \gamma_2 \in SO_{2,1}(\mathbb{R})$

Teop.

Решение Ауслендера Верна при

- $n=2$ (Несложно доказать).
- $n=3$ (Fried, Goldman, 1983)
- $4 \leq n \leq 6$ (Abels, Margulis, Soifer, 2012).
- $n=4,5$ (Tomanov, 1990-2016)

Teop. Пусть $\Gamma < PO_{n,1}(\mathbb{R})$ ^{torsion-free (!)} — полуика. Тогда $\Gamma > F_2$ и

не явн. вирт. разрещимый.

Teop. (Margulis & Vinberg, 2000)

Пусть $\Gamma < PO_{n,1}(\mathbb{R})$ — дискр. подгп, симп-тич. ограничена и не оставл. на месте ни одну плоскост или торку на ∂H^n .

Тогда Γ явн. large, т.е. симп-тич. подгп. Конечного индекса,

$$\text{т.е. } \Gamma / \Gamma_1 = F_n, n \geq 2.$$