# Вложения и погружения многообразий

Гладкое отображение $F\colon M \to N$ гладких многообразий называется *погружением*, если $dF$ инъективен всюду на $M$ (то есть для всех $p \in M$ линейное отображение $d_pF\colon T_pM \to T_{F(p)}N$ инъективно). Отображение $F$ называется *вложением*, если оно является погружением и $M$ диффеоморфно $F(M)$.

Пусть $F\colon M \to N$ — гладкое отображение гладких многообразий $M$ и $N$. Точка $p_0 \in M$ называется *регулярной точкой* отображения $F$, если линейное отображение $d_{p_0}F\colon T_{p_0}M \to T_{F(p_0)}N$ является эпиморфизмом, то есть сюръективно.

Точка $q \in N$ называется *регулярным значением* отображения $F\colon M \to N$, если или все точки прообраза $F^{-1}(q)$ являются регулярными точками отображения $F$, или $q \in N \setminus F(M)$.

*Унитарная группа*: $\mathrm{U}_n(\mathbf{C}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \mid AA^* = E\}$, а *специальная унитарная группа* задается дополнительным условием $\det A = 1$. Заметим, что группа

$$\mathrm{SU}_2(\mathbf{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{C},\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

диффеоморфна $\mathbf{S}^3$ как гладкое вещественное многообразие, т.к. по сути задается условием $a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1$.

**Вариант I**

**ДГТ 2◇1.** Определить, является ли отображение $\gamma\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ вложением или погружением, если $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, где $x(t) = \frac{2+t^2}{1+t^2}$, $y(t) = \frac{2t+t^2}{1+t^2}$.

**ДГТ 2◇2.** Найти критические точки и значения отображения $F\colon \mathrm{SO}_2(\mathbf{R}) \to \mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$, где $F(A) = A^7$.

**Вариант II**

**ДГТ 2◇3.** Выяснить, является ли гладким подмногообразием в $\mathbf{R}^2 = \langle x, y\rangle$ подмножество, заданное уравнением $x^4 + y^4 = 8xy^2$.

**ДГТ 2◇4.** Найти критические точки и значения отображения $F\colon \mathrm{O}_2(\mathbf{R}) \to \mathrm{O}_2(\mathbf{R})$, где $F(A) = A^7$.

**Вариант III**

**ДГТ 2◇5.** Определить, является ли отображение $\gamma\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ вложением или погружением, если $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, где $x(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$, $y(t) = \frac{1+t^2}{2+t^2}$.

**ДГТ 2◇6.** Найти критические точки и значения отображения $F\colon \mathrm{SU}_2(\mathbf{C}) \to \mathrm{SU}_2(\mathbf{C})$, где $F(A) = A^3$.

### Вариант IV

**ДГТ 2◇7.** Выяснить, является ли гладким подмногообразием в $\mathbf{R}^3 = \langle x, y, z\rangle$ подмножество, заданное уравнением $x^2(z-1) + y^2 z = 0$.

**ДГТ 2◇8.** Найти критические точки и значения отображения $F\colon \mathrm{SO}_3(\mathbf{R}) \to \mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$, где $F(A) = A^3$.

### Дополнительные задачи

**ДГТ 2◇9.** Доказать, что всякое произведение сфер вкладывается в $\mathbf{R}^N$ как гиперповерхность (т.е. подмногообразие коразмерности 1).

**ДГТ 2◇10.** Доказать, что двумерное многообразие ориентируемо тогда и только тогда, когда не содержит в себе $\mathrm{Mb}$.

**ДГТ 2◇11.** Построить такое погружение листа Мебиуса $\mathrm{Mb}$ в $\mathbf{R}^3$, что его граничная окружность $\mathbf{S}^1 = \partial\mathrm{Mb}$ стадартно вложена в двумерную плоскость.