

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
М. В. ЛОМОНОСОВА»
Механико-математический факультет
Кафедра высшей алгебры

На правах рукописи

Богачев Николай Владимирович

РЕФЛЕКТИВНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ РЕШЁТКИ

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата математических наук НИУ ВШЭ

Научный руководитель:
профессор, доктор физико-математических наук
Эрнест Борисович Винберг

Москва 2019

Благодарности

Прежде всего, я очень рад поблагодарить своего учителя и научного руководителя профессора Эрнеста Борисовича Винберга за постановку интересных и красивых задач, постоянное внимание к работе, доброе отношение, многочисленные обсуждения, бесценные идеи и советы, без которых данная работа несомненно не была бы написана.

Я очень благодарен своим друзьям и коллегам Рафаэлю Гульельметти, Александру Колпакову, Александру Перепечко, Анне Феликсон и многим другим за интересные обсуждения и сотрудничество. А также я благодарю своих друзей Никиту Алексева, Алексея Наумова, Александра Перепечко и Александра Полянского за постоянную поддержку, которая помогла мне справиться со многими трудностями.

За ценные обсуждения моих и других исследований, за теплое отношение, гостеприимство и за интерес к моей работе я благодарю Дэниела Аллкока, Михаила Викторовича Белолипецкого, Валерия Алексеевича Гриценко, Рут Келлерхальс, Вячеслава Валентиновича Никулина и Осипа Владимировича Шварцмана.

Я очень рад поблагодарить организаторов конференций и воркшопов в Швейцарии, Франции и России за прекрасную возможность выступить с докладами.

Я также выражаю огромную признательность профессору Андрею Михайловичу Райгородскому, благодаря которому я оказался на кафедре дискретной математики факультета инноваций и высоких технологий МФТИ. Финансовая поддержка моей работы осуществлялась в основном за счёт лаборатории продвинутой комбинаторики и сетевых приложений МФТИ, где я работаю научным сотрудником с 2017 года. Я благодарен коллективу этих подразделений Физтеха за прекрасную рабочую атмосферу и поддержку.

Частичная финансовая поддержка моей работы в течение последних двух лет была также оказана фондами Саймонса, РФФИ и РНФ.

Я благодарен своим родителям, Владимиру Игоревичу и Анне Николаевне Богачевым, открывшим мне мир математики.

И конечно же я очень благодарен своей семье, жене Анастасии и сыну Александру, за то, что они были всегда рядом, за поддержку и любовь в течение всего этого времени.

Оглавление

1	Введение	5
1.1	Основные понятия и предварительные сведения	5
1.1.1	Дискретные группы отражений	5
1.1.2	Арифметические группы отражений и рефлексивные гиперболические решётки	6
1.1.3	Открытые проблемы	9
1.2	Результаты работы	10
1.2.1	Результаты главы 3	10
1.2.2	Результаты главы 4	14
1.2.3	Результаты главы 5	15
1.3	Апробация работы	16
1.4	Основные обозначения	16
2	Дискретные группы отражений	18
2.1	Три главные геометрии	18
2.1.1	Евклидово пространство \mathbb{E}^n	18
2.1.2	Сферическое пространство \mathbb{S}^n	18
2.1.3	Пространство Лобачевского \mathbb{H}^n	19
2.2	Многогранники в \mathbb{X}^n	19
2.2.1	Гиперплоскости и полупространства, выпуклые и остроугольные многогранники	20
2.2.2	Комбинаторное строение и матрица Грама остроугольных многогранников	21
2.3	Дискретные группы движений и фундаментальные многогранники	22
2.4	Группы отражений и многогранники Кокстера	23
2.4.1	Определения	23
2.4.2	Абстрактные группы Кокстера и схемы Кокстера	24
2.4.3	Группы отражений в \mathbb{E}^n и \mathbb{S}^n	25
2.4.4	Группы отражений в \mathbb{H}^n	25
2.5	Квадратичные решётки	28
2.6	Арифметические дискретные группы простейшего типа	30

2.7	Арифметические группы отражений и рефлексивные гиперболические решётки	32
2.8	Известные методы классификации	33
2.8.1	Метод Винберга	33
2.8.2	Методы Никулина и Аллкока	35
2.8.3	Метод Шарлау	35
2.9	Известные результаты	36
3	Алгоритм Винберга и проект VinAl	39
3.1	Общее описание алгоритма Винберга	39
3.2	Компьютерные реализации алгоритма Винберга	40
3.3	Основные шаги программы VinAl и вспомогательные результаты . . .	40
3.3.1	Выбор базисной точки	40
3.3.2	Построение фундаментального конуса	41
3.3.3	Разложение корней решётки	41
3.3.4	Вывод корней	42
3.3.5	Подпрограмма решения квадратичных диофантовых уравнений	42
3.4	Программа для решеток над $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$	42
3.5	Исследование на устойчивую рефлексивность	43
3.5.1	Алгоритм Винберга	43
3.5.2	Метод “плохих” отражений	43
3.6	Доказательство нерелексивности	44
3.6.1	Метод Бугаенко понижения размерности	44
3.6.2	Метод бесконечной симметрии	44
3.7	Результаты работы программы	44
4	Устойчиво рефлексивные гиперболические \mathbb{Z}-решётки ранга 4	48
4.1	Метод наиболее удаленного ребра	48
4.1.1	Ограничения на длину ребра E для \mathbb{Q} -арифметических компакт- ных многогранников Кокстера в \mathbb{H}^3	50
4.1.2	Доказательство теоремы 1.2.1 и ограничения на $ (u_3, u_4) $	52
4.2	Короткий список решёток-кандидатов	54
4.2.1	План нахождения короткого списка решёток-кандидатов . . .	54
4.2.2	Короткий список решёток-кандидатов	56
4.3	Исследование на (1,2)-рефлексивность и доказательство теоремы 1.2.2	58
5	Устойчиво рефлексивные гиперболические решётки ранга 4 над $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$	60
5.1	Метод наиболее удалённого ребра	60
5.2	Короткий список решёток-кандидатов	61
5.2.1	План нахождения короткого списка решёток-кандидатов . . .	61

5.2.2	Короткий список решёток-кандидатов	61
5.3	Исследование на устойчивую рефлексивность	64
5.3.1	Решётки с ортогональным базисом	64
5.3.2	Решетки с неортогональным базисом	69
Литература		74

Глава 1

Введение

1.1. Основные понятия и предварительные сведения

1.1.1. Дискретные группы отражений

Пусть \mathbb{X}^n — одно из трех пространств постоянной кривизны, то есть либо n -мерное евклидово пространство \mathbb{E}^n , либо n -мерная сфера \mathbb{S}^n , либо n -мерное (гиперболическое) пространство Лобачевского \mathbb{H}^n . О различных моделях и геометрии этих пространств см. параграф 2.1.

Рассмотрим выпуклый многогранник P в пространстве \mathbb{X}^n . Если мы подействуем на P группой Γ , порождённой отражениями в гиперплоскостях его граней, то может получиться так, что образы этого многогранника при действии разными элементами группы Γ покроют всё пространство \mathbb{X}^n и не будут иметь попарно общих внутренних точек. В таком случае мы будем говорить, что группа Γ является *дискретной группой отражений*, а многогранник P является её *фундаментальным многогранником*. Если многогранник P является *ограниченным* (или, эквивалентно, *компактным*), то группа Γ называется *кокомпактной группой отражений*, если же многогранник P имеет *конечный объём*, то группа Γ называется *коконечной* или *дискретной группой конечного кообъёма*.

Какие свойства характеризуют фундаментальные многогранники P для дискретных групп отражений? Например, всякие две гиперплоскости H_i и H_j , ограничивающие P , либо не пересекаются, либо образуют двугранный угол, равный π/n_{ij} , где $n_{ij} \in \mathbb{Z}$, $n_{ij} \geq 2$.

Такие многогранники называют *многогранниками Кокстера*, поскольку дискретные группы отражений (значит, и их фундаментальные многогранники) для $\mathbb{X}^n = \mathbb{E}^n, \mathbb{S}^n$ были определены и найдены Г. Кокстером в 1933 году (см. работу [35]).

В 1967 году (см. [19]) Э. Б. Винберг разработал теорию дискретных групп, порождённых отражениями в пространствах Лобачевского. Он предложил новые методы исследований гиперболических групп отражений, в частности, описание таких групп в виде схем Кокстера, сформулировал и доказал критерий арифметичности для

групп отражений и привел ряд различных примеров. В главе 2 мы приводим подробное описание теории дискретных групп, порождённых отражениями.

1.1.2. Арифметические группы отражений и рефлексивные гиперболические решётки

Пусть \mathbb{F} — вполне вещественное поле алгебраических чисел, A — кольцо его целых элементов. Для удобства будем считать, что оно является кольцом главных идеалов.

Определение 1.1.1. *Свободный конечно-порождённый A -модуль L , снабжённый скалярным умножением (\cdot, \cdot) сигнатуры $(n, 1)$ со значениями в A , называется гиперболической решёткой, если для всякого нетождественного вложения $\sigma : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$ квадратичное пространство $L \otimes_{\sigma(A)} \mathbb{R}$ положительно определено.*

Пусть L — гиперболическая решётка. Тогда векторное пространство

$$\mathbb{E}^{n,1} = L \otimes_{\text{id}(A)} \mathbb{R}$$

является $(n + 1)$ -мерным вещественным пространством Минковского. Группа $\Gamma = \mathcal{O}'(L)$ целочисленных (то есть с коэффициентами из A) линейных преобразований, сохраняющих решётку L и отображающих на себя каждую связную компоненту конуса

$$\mathfrak{C} = \{v \in \mathbb{E}^{n,1} \mid (v, v) < 0\} = \mathfrak{C}^+ \cup \mathfrak{C}^-,$$

является дискретной группой движений пространства Лобачевского. Здесь подразумевается векторная модель пространства Лобачевского \mathbb{H}^n , заданная как множество точек гиперboloида

$$\{v \in \mathbb{E}^{n,1} \mid (v, v) = -1\},$$

лежащих внутри конуса \mathfrak{C}^+ . Группа движений $\text{Isom}(\mathbb{H}^n) = \mathcal{O}'_{n,1}(\mathbb{R})$ есть группа псевдоортогональных преобразований пространства $\mathbb{E}^{n,1}$, оставляющая на месте конус \mathfrak{C}^+ . Более подробно о векторной модели пространства Лобачевского см. параграф 2.1.3.

Из общей теории арифметических групп (см. статью [13] А. Бореля и Хариш-Чандры 1962 года, а также работу [45] Г. Мостова и Т. Тамагавы 1962 года) известно, что если решётка L изотропна (то есть ассоциированная с ней квадратичная форма представляет нуль; заметим, что это может быть выполнено только для решеток над $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$), то факторпространство \mathbb{H}^n/Γ (то есть фундаментальная область группы Γ) некомпактно, но имеет конечный объём (в таком случае говорят, что Γ — дискретная подгруппа конечного кообъёма), а во всех остальных случаях оно компактно. При $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ доказательство этих утверждений было впервые дано в 1937 году в работе [18] Б. А. Венкова.

Определение 1.1.2. Две подгруппы Γ_1 и Γ_2 какой-либо группы называются соизмеримыми, если группа $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ является подгруппой конечного индекса в каждой из них.

Определение 1.1.3. Группы Γ , полученные указанным выше способом, и все соизмеримые с ними дискретные подгруппы группы $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ называются арифметическими дискретными группами простейшего типа. Поле \mathbb{F} называется полем определения (или основным полем) группы Γ (и всех групп, соизмеримых с ней).

Примитивный вектор $e \in L$ называется корнем или, более точно, k -корнем, где $k = (e, e) > 0$, если $2(e, x) \in kA$ для всех $x \in L$. Всякий корень e определяет ортогональное отражение (называемое k -отражением, где $k = (e, e)$) в пространстве $\mathbb{E}^{n,1} = L \otimes_{\text{id}(A)} \mathbb{R}$

$$\mathcal{R}_e : x \mapsto x - \frac{2(e, x)}{(e, e)}e,$$

которое сохраняет решётку L . Отражение \mathcal{R}_e определяет отражение в пространстве \mathbb{H}^n относительно гиперплоскости

$$H_e = \{x \in \mathbb{H}^n \mid (x, e) = 0\},$$

называемой зеркалом отражения \mathcal{R}_e .

Обозначим через $\mathcal{O}_r(L)$ подгруппу группы $\mathcal{O}'(L)$, порождённую всеми содержащимися в ней отражениями.

Определение 1.1.4. Гиперболическая решётка L называется рефлексивной, если индекс $[\mathcal{O}'(L) : \mathcal{O}_r(L)]$ конечен.

Теорема 1.1.1. (ВИНБЕРГ, 1967, см. [19])

Дискретная группа отражений конечного кообъёма является арифметической группой отражений с полем определения \mathbb{F} (или \mathbb{F} -арифметической), если она содержится в качестве подгруппы конечного индекса в группе вида $\mathcal{O}'(L)$, где L — какая-то (автоматически рефлексивная) гиперболическая решетка над вполне вещественным полем \mathbb{F} .

Теперь мы сформулируем несколько фундаментальных теорем о существовании арифметических групп отражений и кокомпактных групп отражений в пространствах Лобачевского.

Теорема 1.1.2. (ВИНБЕРГ, 1984, см. [23])

1. Компактные многогранники Кокстера отсутствуют в пространствах Лобачевского \mathbb{H}^n при $n \geq 30$.
2. Арифметические группы отражений отсутствуют в пространствах Лобачевского \mathbb{H}^n при $n \geq 30$.

Следующий важный результат принадлежит сразу нескольким авторам.

Теорема 1.1.3. Для каждого $n \geq 2$ существует лишь конечное с точностью до подобия число рефлексивных гиперболических решёток сигнатуры $(n, 1)$. Аналогично, для каждого $n \geq 2$ существует лишь конечное с точностью до сопряжения число максимальных арифметических групп отражений в пространствах \mathbb{H}^n .

Доказательство этой теоремы разбивается на следующие этапы:

- 1980, 1981 — В. В. Никулин доказал конечность числа максимальных арифметических групп отражений в пространствах \mathbb{H}^n при $n \geq 10$, см. [47, 49];
- 2005 — Д. Д. Лонг, К. Маклахлан и А. В. Рид доказали конечность числа максимальных арифметических групп отражений в размерности $n = 2$, см. [37];
- 2005 — И. Агол доказал конечность в размерности $n = 3$, см. [1];
- 2007 — В. В. Никулин по индукции доказал конечность в оставшихся размерностях $4 \leq n \leq 9$, см. [52];
- 2008 — И. Агол, М. В. Белолипецкий, П. Сорм и К. Уайт независимо провели доказательство теоремы конечности для всех размерностей с помощью спектрального метода, см. [2] (см. также недавний обзор [9] М. В. Белолипецкого).

Наложив дополнительные ограничения на поле определения \mathbb{F} , можно получить более строгие оценки в пункте 2 теоремы 1.1.2. Сформулируем более общий результат о степенях определения арифметических групп отражений, который является результатом усилий разных авторов в разные десятилетия (!) 20 и 21 веков.

Теорема 1.1.4. Пусть число $d = [\mathbb{F} : \mathbb{Q}]$ обозначает степень поля определения \mathbb{F} арифметической группы отражений Γ . Тогда

- (Винберг, 1984, см. [23]) В пространствах Лобачевского \mathbb{H}^n размерности $n \geq 30$ не существует арифметических групп отражений.
- (Винберг, 1984, см. [23]) В пространствах Лобачевского \mathbb{H}^n размерности $n \geq 22$ не существует арифметических групп отражений с полем определения, отличным от $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ и $\mathbb{Q}[\cos(2\pi/7)]$.
- (Винберг, 1984, см. [23]) В пространствах Лобачевского \mathbb{H}^n размерности $n \geq 14$ не существует арифметических групп отражений с полем определения, отличным от $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{6}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}]$ и $\mathbb{Q}[\cos(2\pi/m)]$, где $m = 7, 9, 11, 15, 16$, или 20.
- (Никулин, 2011, см. [53]) В пространствах \mathbb{H}^n размерности $4 \leq n \leq 13$ степень d не больше 25.

- (Белолипецкий и Линовиц, 2014, см. [8]) В пространстве Лобачевского \mathbb{H}^3 степень d не больше 9.
- (Линовиц, 2017, см. [36]) На плоскости Лобачевского \mathbb{H}^2 степень d не больше 7.

Таким образом, степень d поля определения арифметических групп отражений не больше 25 во всех размерностях.

(Это лучшая известная на данный момент оценка.)

Данные результаты дают надежду на то, что все рефлексивные гиперболические решётки, а также и максимальные арифметические группы отражений можно классифицировать. Основы теории арифметических групп отражений в пространствах Лобачевского мы приводим в параграфах 2.6 и 2.7 главы 2 настоящей диссертации. Про инварианты квадратичных решёток чуть более подробно мы рассказываем в параграфе 2.5.

1.1.3. Открытые проблемы

Сказанное выше подводит нас к следующим фундаментальным открытым проблемам, связанным с теорией дискретных групп отражений и многогранников Кокстера в пространствах Лобачевского \mathbb{H}^n .

Проблема 1. Какова максимальная размерность пространства Лобачевского, в котором существует компактный многогранник Кокстера? Аналогичный вопрос открыт и для многогранников Кокстера конечного объёма.

Проблема 2. Классификация всех рефлексивных гиперболических решёток и максимальных арифметических групп отражений.

Замечание 1. Проблема классификации фактически поставлена Э. Б. Винбергом в 1967 году. Дальнейшие результаты 70–80-х годов прошлого века (а также и недавние результаты) подтверждают, что есть надежда на решение этой проблемы.

Хорошим инструментом для решения обеих проблем является алгоритм Винберга (1972 год, см. [20]) построения фундаментального многогранника для гиперболической группы отражений. Практически он эффективен для арифметических групп отражений.

Рекордный пример компактного многогранника Кокстера был найден В. О. Бугаенко при $n = 8$ (см. [17]), хотя известно лишь, что $n < 30$ (см. теорему 1.1.2).

Рекордный пример многогранника Кокстера конечного объёма принадлежит Р. Борчердсу в размерности $n = 21$ (см. [14]). При этом известно, что многогранники Кокстера конечного объёма могут существовать только при $n < 996$ (см. работы [56] М. Н. Прохорова и [60] А. Г. Хованского, 1986 год).

Оба этих примера пришли из арифметических групп отражений. Многогранник Бутаенко является фундаментальным многогранником для некоторой арифметической группы отражений над полем $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ в пространстве \mathbb{H}^8 , а многогранник Борчердса является фундаментальным многогранником для арифметической группы отражений над полем \mathbb{Q} в пространстве \mathbb{H}^{21} .

Более того, Д. Аллок, используя элегантный и простой трюк удвоения («a simple doubling trick») построил бесконечные серии (см. [3]) многогранников Кокстера конечного объема в пространствах Лобачевского вплоть до размерности 19, а также компактных многогранников Кокстера вплоть до размерности 6. Отметим также, что в размерностях 7 и 8 есть как арифметические бесконечные серии, так и неарифметические.

Классификация всех дискретных групп отражений конечного кообъёма в пространствах Лобачевского не представляется возможной. Эффективное описание дискретных групп отражений конечного кообъёма в пространствах \mathbb{H}^n получено лишь при $n = 2$ (см. работу [55] А. Пуанкаре 1882 года) и при $n = 3$ (знаменитые теоремы Е. М. Андреева 1970 года, см. [5] и [6]).

В классификации арифметических групп отражений достигнуты более существенные успехи. Над полем определения \mathbb{Q} рефлексивные гиперболические решётки сигнатуры $(n, 1)$ (а также максимальные арифметические группы отражений в \mathbb{H}^n) классифицированы при $n = 2$ (В.В. Никулин, 2000, см. [51] и Д. Аллок, 2011, см. [4]), $n = 4$ (Р. Шарлау и К. Вальхорн, 1989–1993, см. [58, 61]), $n = 5$ (И. Туркал, 2017, см. [59]) и для некомпактного случая при $n = 3$ (Р. Шарлау и К. Вальхорн, 1989–1993, см. [57, 58]).

Также получена классификация рефлексивных гиперболических решёток сигнатуры $(2, 1)$ с полем определения $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ (А. Марк, 2015, см. [42, 43]).

Во всех остальных случаях проблема 2 остаётся до сих пор открытой. Об этих и других результатах мы расскажем подробнее в параграфе 2.9.

1.2. Результаты работы

Основные результаты настоящей диссертации получены в главах 3, 4 и 5 и приведены ниже в пунктах 1.2.1, 1.2.2 и 1.2.3.

1.2.1. Результаты главы 3

Проект VinAl: для гиперболических решёток над \mathbb{Z}

Глава посвящена алгоритму Винберга и созданию инструментария для решения проблем 1 и 2. С помощью различных компьютерных реализаций алгоритма Винберга были исследованы на рефлексивность десятки гиперболических решёток над \mathbb{Z} и

$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Таким образом удалось получить еще много новых арифметических компактных многогранников Кокстера в пространствах Лобачевского.

Как было сказано выше, алгоритм Винберга является эффективным способом построения фундаментальных многогранников для арифметических групп отражений.

Попытки реализовать на компьютере алгоритм Винберга предпринимались с 80х годов прошлого века, но все они ограничивались решётками частного вида, как правило, имеющими ортогональный базис. Упоминания о таких программах можно встретить, к примеру, в работах В. О. Бугаенко (1992, см. [17]), Р. Шарлау и К. Вальхорн (1992, см. [58]), В. В. Никулина (2000, см. [51]) и Д. Аллкока (2011, см. [4]). Но сами программы не были опубликованы, за исключением работы В. В. Никулина, в которой приведён код программы для решёток нескольких частных видов. Единственной известной реализацией, опубликованной вместе с подробной документацией, является программа Р. Гульельметти 2016 года¹, работающая с решётками, имеющими ортогональный базис, инвариантные множители которых свободны от квадратов. Р. Гульельметти применял её в своей диссертации для классификации рефлексивных решёток с ортогональным базисом, элементы которого имеют малые скалярные квадраты (2017, см. [29]). Эта программа работает эффективно во всех размерностях, где существуют рефлексивные решётки.

В данной работе представлена собственная реализация (проект VinAl) алгоритма Винберга для произвольных гиперболических \mathbb{Z} -решёток без каких-либо ограничений. Эта программа написана в 2017 году совместно с А. Ю. Перепечко и опубликована в Интернете (см. [12]). Её подробное описание доступно в статье [63].

Программа была проверена на значительном количестве известных рефлексивных гиперболических решёток. Помимо этого, нами был найден ряд новых рефлексивных решёток.

Некоторые результаты работы нашей программы представлены в таблице 1. Здесь $U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ обозначает стандартную двумерную гиперболическую решётку, а A_n — евклидову корневую решётку типа A_n . Все представленные в данной таблице решётки новые, за исключением решёток $[-1] \oplus A_3$ и $[-4] \oplus A_3$.

Также нами установлена рефлексивность решёток вида

$$[-2] \oplus A_2 \oplus \underbrace{[1] \oplus \dots \oplus [1]}_{n-1}$$

при $n \leq 6$.

На данный момент программа эффективно работает при $2 \leq n \leq 5$. Тем самым, она оказывается, к примеру, полезной в открытой проблеме классификации рефлексивных решёток в размерности $n = 3$ и уже успешно применялась автором диссертации для получения частичных результатов для данной классификации.

¹см. проект AlVin <https://rgugliel.github.io/AlVin>

Таблица 1.1: Решётки вида $[-k] \oplus A_3$, $[-k] \oplus [1] \oplus A_2$ для некоторых $k \leq 15$, а также $U \oplus [36] \oplus [6]$.

L	# граней	t (сек)	L	# граней	t (сек)
$[-1] \oplus A_3$	4	0,7	$[-1] \oplus [1] \oplus A_2$	4	0,6
$[-2] \oplus A_3$	5	1,9	$[-2] \oplus [1] \oplus A_2$	6	0,8
$[-3] \oplus A_3$	5	1,0	$[-3] \oplus [1] \oplus A_2$	5	0,6
$[-4] \oplus A_3$	4	0,66	$[-4] \oplus [1] \oplus A_2$	5	1,02
$[-5] \oplus A_3$	6	1,56	$[-5] \oplus [1] \oplus A_2$	7	1,9
$[-6] \oplus A_3$	6	1,5	$[-6] \oplus [1] \oplus A_2$	8	1,2
$[-8] \oplus A_3$	7	1,72	$[-7] \oplus [1] \oplus A_2$	11	19,2
$[-9] \oplus A_3$	9	79,5	$[-8] \oplus [1] \oplus A_2$	6	1,02
$[-10] \oplus A_3$	12	1,72	$[-9] \oplus [1] \oplus A_2$	5	0,9
$[-12] \oplus A_3$	5	1.02	$[-10] \oplus [1] \oplus A_2$	11	11
$[-15] \oplus A_3$	12	28,7	$[-15] \oplus [1] \oplus A_2$	15	44
$U \oplus [36] \oplus [6]$	15	56,6	$[-30] \oplus [1] \oplus A_2$	20	36,6

Алгоритм Винберга для гиперболических решёток над $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$

Поскольку автором исследовалась также рефлексивность решёток над $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, то возникла необходимость написать программу для алгоритма Винберга над квадратичными полями. На текущий момент получилась программа для решёток над $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, которую нужно каждый раз немного править для каждой новой решётки. Она предусматривает возможность того, что исследуемая нами решетка оказалась с неортогональным базисом. Коды программы опубликованы в Интернете: <https://github.com/nvbogachev/VinAlg-Z-sqrt-2->

Для решеток, чьи квадратичные формы диагональны, удобнее использовать программу Р. Гульельметти, о которой упоминалось выше. Работа авторской программы была отчасти проверена на решётках таблицы 1.5. В ближайшем будущем планируется слияние авторской программы для решеток над $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ с проектом VinAl. Дальнейшая работа над проектом, реализующим алгоритм Винберга для произвольных решеток уже над квадратичными полями $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, ведется совместно с А. Ю. Перепечко.

В результате экспериментов с разными программами удалось получить новые серии рефлексивных гиперболических решеток различных рангов над различными квадратичными полями. Часть этих результатов получена автором совместно с А. А. Колпаковым в 2017-2018 гг.

Полученные результаты приведены в таблицах 1.2–1.6. В этих таблицах мы указываем сначала вид решетки сигнатуры $(n, 1)$, затем размерность n соответствующего пространства Лобачевского, а затем количество граней для фундаментального многогранника Кокстера соответствующей группы отражений.

Таблица 1.2: Унимодулярные решётки над $\mathbb{Q}[\sqrt{13}]$ и $\mathbb{Q}[\sqrt{17}]$.

L	n	# граней	L	n	# граней
$[-\frac{3+\sqrt{13}}{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	2	4	$[-4 - \sqrt{17}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	2	4
$[-\frac{3+\sqrt{13}}{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	3	9	$[-4 - \sqrt{17}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	3	6
$[-\frac{3+\sqrt{13}}{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	4	40	$[-4 - \sqrt{17}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	4	20

Таблица 1.3: Некоторые решётки над $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$.

L	n	# граней	L	n	# граней
$[-1 - \sqrt{5}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	2	4	$[-1 - \sqrt{5}] \oplus [2] \oplus \dots \oplus [2] \oplus [1]$	2	4
$[-1 - \sqrt{5}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	3	5	$[-1 - \sqrt{5}] \oplus [2] \oplus \dots \oplus [2] \oplus [1]$	3	5
$[-1 - \sqrt{5}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	4	7	$[-1 - \sqrt{5}] \oplus [2] \oplus \dots \oplus [2] \oplus [1]$	4	7
$[-1 - \sqrt{5}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	5	13	$[-1 - \sqrt{5}] \oplus [2] \oplus \dots \oplus [2] \oplus [1]$	5	13
$[-1 - \sqrt{5}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	6	18	$[-1 - \sqrt{5}] \oplus [2] \oplus \dots \oplus [2] \oplus [1]$	6	18

Таблица 1.4: Некоторые решётки над $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

L	n	# граней	L	n	# граней
$[-\sqrt{2}] \oplus [2 + \sqrt{2}] \oplus [1]$	2	4	$[-7 - 5\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	2	3
$[-\sqrt{2}] \oplus [2 + \sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	3	6	$[-7 - 5\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	3	5
$[-\sqrt{2}] \oplus [2 + \sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	4	10	$[-7 - 5\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	4	7
$[-\sqrt{2}] \oplus [2 + \sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	5	31	$[-7 - 5\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	5	11
			$[-7 - 5\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	6	45

Таблица 1.5: Некоторые решётки над $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

L	n	# граней	L	n	# граней
$[-\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus [1]$	2	4	$[-1 - \sqrt{2}] \oplus [2 + \sqrt{2}] \oplus [1]$	2	4
$[-\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	3	6	$[-1 - \sqrt{2}] \oplus [2 + \sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	3	6
$[-\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	4	8	$[-1 - \sqrt{2}] \oplus [2 + \sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	4	8
$[-\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	5	27	$[-1 - \sqrt{2}] \oplus [2 + \sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	5	27

1.2.2. Результаты главы 4

Определение 1.2.1. Число $k \in A$, $k > 0$, называется устойчивым, если $k \mid 2$ в кольце A .

Например, при $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, $A = \mathbb{Z}$, это определение выполняется при $k \leq 2$. А при $\mathbb{F} = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ и $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ устойчивыми будут числа 1, 2 и $2 + \sqrt{2}$ (с точностью до умножения на обратимый элемент кольца).

Определение 1.2.2. Отражение \mathcal{R}_e называется устойчивым, если число (e, e) устойчиво.

Пусть L — гиперболическая решётка над кольцом целых A . Обозначим через $S(L)$ подгруппу группы $\mathcal{O}'(L)$, порождённую устойчивыми отражениями.

Определение 1.2.3. Гиперболическая решётка L называется устойчиво рефлексивной, если индекс $[\mathcal{O}'(L) : S(L)]$ конечен.

Замечание 2. В статьях [10], [62] и [11] устойчиво рефлексивные решетки над \mathbb{Z} называются (1,2)-рефлексивными, поскольку для $A = \mathbb{Z}$ только числа 1 и 2 являются устойчивыми.

Определение 1.2.4. Гиперболическая \mathbb{Z} -решётка L называется 2-рефлексивной, если группа $\mathcal{O}'(L)$ с точностью до конечного индекса порождена 2-отражениями.

Замечание 3. Все 2-рефлексивные гиперболические \mathbb{Z} -решетки уже классифицированы: для ранга $\neq 4$ это было сделано В. В. Никулиным в 1979, 1981 и 1984 годах, см. [46, 48, 50], а для ранга 4 это было сделано Э. Б. Винбергом в 1981–2007 годах (см. [27]). Предположительно, устойчиво рефлексивные решетки должны образовывать более широкий класс рефлексивных решеток.

Пусть P — остроугольный компактный многогранник в \mathbb{H}^3 и пусть E — некоторое его ребро. Обозначим через F_1 и F_2 грани многогранника P , содержащие ребро E , а через u_3 и u_4 — единичные внешние нормали к граням F_3 и F_4 , содержащим вершины ребра E , но не само ребро.

Определение 1.2.5. Грани F_3 и F_4 будем называть обрамляющими гранями ребра E , а число $|(u_3, u_4)|$ — его шириной.

Поставим в соответствие ребру E набор $\bar{\alpha} = (\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{14}, \alpha_{24})$, где α_{ij} — угол между гранями F_i и F_j .

Основными результатами главы 4 являются следующие два утверждения, второе из которых доказывается с помощью первого.

Теорема 1.2.1. Фундаментальный многогранник всякой \mathbb{Q} -арифметической кокомпактной группы отражений в \mathbb{H}^3 имеет ребро ширины меньше, чем 4,14.

(Напомним, что \mathbb{Q} -арифметической группой отражений называется всякая порождённая отражениями подгруппа конечного индекса группы вида $\mathcal{O}'(L)$, где L — рефлексивная гиперболическая решётка над \mathbb{Z} . Она может быть кокомпактной только в случае анизотропности решётки L .)

На самом деле получен более сильный результат. А именно, доказано, что существует ребро ширины $t_{\tilde{\alpha}}$, где $t_{\tilde{\alpha}} \leq 4,14$ — число, зависящее от набора $\tilde{\alpha}$ двугранных углов вокруг этого ребра (см. теорему 4.1.2).

Для формулировки результатов классификации устойчиво рефлексивных гиперболических решёток введём некоторые обозначения:

- $[C]$ — квадратичная решётка, скалярное умножение в которой в некотором базисе задается симметричной матрицей C ,
- $d(L) := \det C$ — дискриминант решётки $L = [C]$,
- $L \oplus M$ — ортогональная сумма решёток L и M ,
- $[k]L$ — квадратичная решётка, полученная из L умножением всех скалярных произведений на $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 1.2.2. *Всякая устойчиво рефлексивная анизотропная гиперболическая \mathbb{Z} -решётка над \mathbb{Z} ранга 4 изоморфна либо одной из двух решёток $[-7] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1]$ и $[-15] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1]$, либо чётной подрешётке индекса 2 одной из них.*

Указанные решётки на самом деле являются даже 2-рефлексивными (см. [27]).

Автор надеется, что применённый в этой работе метод наиболее удалённого ребра (см. параграф 4.1) применим для классификации рефлексивных анизотропных гиперболических решёток ранга 4.

1.2.3. Результаты главы 5

Теорема 1.2.3. *Фундаментальный многогранник всякой $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ -арифметической группы отражений в \mathbb{H}^3 имеет ребро ширины меньше, чем 4,14.*

Как и ранее, на самом деле получен более сильный результат. А именно, доказано, что существует ребро ширины $t_{\tilde{\alpha}}$, где $t_{\tilde{\alpha}} \leq 4,14$ — число, зависящее от набора $\tilde{\alpha}$ двугранных углов вокруг этого ребра (см. теорему 5.1.1).

Теорема 1.2.4. *Всякая максимальная устойчиво рефлексивная гиперболическая решётка ранга 4 над $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ изоморфна одной из следующих семи решёток:*

N°	L	$\# \text{ граней}$	$d(L)$
1	$[-1 - \sqrt{2}] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1]$	5	$-1 - \sqrt{2}$
2	$[-1 - 2\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1]$	6	$-1 - 2\sqrt{2}$
3	$[-5 - 4\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1]$	5	$-5 - 4\sqrt{2}$
4	$[-11 - 8\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1]$	17	$-11 - 8\sqrt{2}$
5	$[-\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1]$	6	$-\sqrt{2}$
6	$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 2 & \sqrt{2} - 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} - 1 & 2 - \sqrt{2} \end{bmatrix} \oplus [1]$	6	$-\sqrt{2}$
7	$[-7 - 5\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1]$	5	$-7 - 5\sqrt{2}$

1.3. Апробация работы

Результаты диссертации докладывались:

- на семинаре „Группы Ли и теория инвариантов“ под руководством Э.Б. Винберга, Д.А. Тимашёва и И.В. Аржанцева, Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, май 2016 г. и октябрь 2017 г.;
- на шестой школе-конференции „Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов“, МГУ&НМУ, Москва, Россия, январь-февраль 2017 г.;
- на семинаре С.П. Новикова „Геометрия, топология и математическая физика“, Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, март 2017 г.;
- на международной конференции „Геометрия и топология“ в честь К. Бавара, Институт математики, Бордо, Франция, ноябрь 2017 г.;
- на семинаре „Гиперболическая геометрия и комбинаторные структуры“, Институт математики, Университет в г. Невшатель, Швейцария, ноябрь 2017 г.;
- на семинаре „Автоморфные формы и их приложения“ под руководством В.А. Гриценко, Математический факультет НИУ ВШЭ, Москва, Россия, февраль 2018 г.;
- на международной конференции „Автоморфные формы и алгебраическая геометрия“, ПОМИ им. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия, май 2018 г.

1.4. Основные обозначения

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ — множества натуральных, целых, рациональных, вещественных и комплексных чисел соответственно,
- \mathbb{E}^n — n -мерное пространство Евклида,

- \mathbb{S}^n — n -мерная сфера в \mathbb{R}^{n+1} ,
- \mathbb{H}^n — n -мерное (гиперболическое) пространство Лобачевского,
- $\text{Isom}(\mathbb{X}^n)$ — группа движений (изометрий) пространства \mathbb{X}^n ,
- $[C]$ — квадратичная решётка, скалярное умножение в которой в некотором базисе задается симметричной матрицей C ,
- $d(L) := \det C$ — дискриминант решётки $L = [C]$,
- $L \oplus M$ — ортогональная сумма решёток L и M ,
- $[k]L$ — квадратичная решётка, полученная из L умножением всех скалярных произведений на $k \in \mathbb{Z}$,
- $L^* = \{x \in L \otimes \mathbb{Q} \mid \forall y \in L \ (x, y) \in \mathbb{Z}\}$ — сопряжённая решётка,
- $\mathcal{O}(L)$ — группа автоморфизмов (ортогональная группа) решётки L ,
- $\mathcal{O}'(L)$ — подгруппа группы $\mathcal{O}(L)$ автоморфизмов гиперболической решётки L ,
- $\mathcal{O}_r(L)$ — подгруппа группы $\mathcal{O}(L)$, порождённая отражениями,
- Γ — дискретная группа движений пространства \mathbb{X}^n ,
- $U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ — стандартная двумерная гиперболическая решётка,
- A_n — корневая евклидова решётка типа A_n ,
- $O_n(\mathbb{R})$ — ортогональная группа евклидова пространства \mathbb{R}^n ,
- $SO_n(\mathbb{R})$ — специальная ортогональная группа евклидова пространства \mathbb{R}^n ,
- $O_{p,q}(\mathbb{R})$ — ортогональная группа псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{p,q}$.

Глава 2

Дискретные группы отражений

2.1. Три главные геометрии

Известно, что существует ровно три *пространства постоянной кривизны* — односвязных полных римановых многообразия с постоянной во всех точках кривизной всякого двумерного направления. Эти пространства — пространство Евклида, многомерная сфера и (гиперболическое) пространство Лобачевского. Кривизна этих пространств равна 0, 1 и -1 соответственно. В этой главе мы обсудим модели всех трёх знаменитых геометрий, а также обсудим устройство многогранников, групп движений и дискретных групп отражений в них. Также в этой главе мы даем предварительные сведения об арифметических группах отражений.

2.1.1. Евклидово пространство \mathbb{E}^n

Рассмотрим n -мерное векторное пространство \mathbb{R}^n со стандартным евклидовым скалярным умножением

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Метрика в (аффинном) евклидовом пространстве \mathbb{E}^n задается следующим образом:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x - y, x - y)}.$$

Отметим, что

$$\text{Isom}(\mathbb{E}^n) = O_n(\mathbb{R}) \times T_n,$$

где $O_n(\mathbb{R})$ — ортогональная группа пространства \mathbb{R}^n , а $T_n \simeq \mathbb{R}^n$ — группа параллельных переносов в нём.

2.1.2. Сферическое пространство \mathbb{S}^n

Модель сферического пространства получается при рассмотрении пространства \mathbb{R}^{n+1} с евклидовым скалярным умножением

$$(x, y) = x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Положим

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x, x) = 1\}.$$

На этом пространстве скалярное умножение задаёт угловую метрику

$$\cos \rho(x, y) = (x, y).$$

Здесь группа движений состоит из ортогональных преобразований пространства \mathbb{R}^{n+1} :

$$\text{Isom}(\mathbb{S}^n) = O_{n+1}(\mathbb{R}).$$

2.1.3. Пространство Лобачевского \mathbb{H}^n

Пусть $\mathbb{E}^{n,1}$ — псевдоевклидово пространство (Минковского), снабжённое скалярным умножением

$$(x, y) = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

сигнатуры $(n, 1)$. Известно, что множество

$$\mathfrak{C} = \{x \in \mathbb{E}^{n,1} \mid (x, x) < 0\}$$

является открытым конусом в $\mathbb{E}^{n,1}$ с двумя связными компонентами $\mathfrak{C}^+ = \{x \in \mathfrak{C} \mid x_0 > 0\}$ и $\mathfrak{C}^- = \{x \in \mathfrak{C} \mid x_0 < 0\}$. Векторной моделью n -мерного пространства Лобачевского \mathbb{H}^n является множество лучей в \mathfrak{C}^+ , выходящих из начала координат. Лучи, лежащие на границе конуса \mathfrak{C}^+ , соответствуют бесконечно удалённым точкам (или, как говорят, точкам на абсолюте) пространства Лобачевского. Иными словами, $\mathbb{H}^n \simeq \mathfrak{C}^+/\mathbb{R}^+$. Можно также сказать, что \mathbb{H}^n — суть точки связной компоненты гиперboloида

$$\{x \in \mathbb{E}^{n,1} \mid (x, x) = -1, x_0 > 0\},$$

лежащей внутри конуса \mathfrak{C}^+ . Бесконечно удалённые точки соответствуют изотропным точкам пространства Минковского, то есть таким x , что $(x, x) = 0$.

Расстояние в пространстве Лобачевского задаётся скалярным умножением по правилу

$$\text{ch } \rho(x, y) = -(x, y).$$

Обозначим группу всех псевдоортогональных преобразований пространства $\mathbb{E}^{n,1}$ через $O_{n,1}(\mathbb{R})$, а через $O'_{n,1}(\mathbb{R})$ — её подгруппу индекса 2, состоящую из преобразований, не меняющих местами связные компоненты \mathfrak{C}^+ и \mathfrak{C}^- . Тогда группа $\text{Isom}(\mathbb{H}^n) \simeq O'_{n,1}(\mathbb{R})$ и является группой движений пространства Лобачевского в этой модели.

2.2. Многогранники в \mathbb{X}^n

Здесь и далее мы будем обозначать через \mathbb{X}^n одно из трех пространств постоянной кривизны: \mathbb{E}^n , \mathbb{S}^n или \mathbb{H}^n .

2.2.1. Гиперплоскости и полупространства, выпуклые и остроугольные многогранники

Гиперплоскостями в \mathbb{E}^n мы будем называть множества вида

$$H_{e,t} = \{x \in \mathbb{E}^n \mid (x, e) + t = 0\},$$

где $e \in \mathbb{R}^n$ — вектор с $(e, e) > 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Гиперплоскости в $\mathbb{X}^n = \mathbb{S}^n$ и $\mathbb{X}^n = \mathbb{H}^n$ определяются как множества вида

$$H_e = \{x \in \mathbb{X}^n \mid (x, e) = 0\},$$

где $e \in \mathbb{R}^n$ — вектор с $(e, e) > 0$.

Нормируем для удобства вектор e так, чтобы $(e, e) = 1$.

Определим *отражения* в пространствах \mathbb{X}^n относительно гиперплоскостей. В пространстве \mathbb{E}^n *отражение* относительно гиперплоскости $H_{e,t}$ задается по правилу

$$\mathcal{R}_{e,t}(x) = x - 2((e, x) + t)e.$$

В таком случае инвариантная гиперплоскость $H_{e,t}$ называется *зеркалом* отражения $\mathcal{R}_{e,t}$.

Аналогично, в пространствах \mathbb{S}^n и \mathbb{H}^n определяется отражение

$$\mathcal{R}_e(x) = x - 2(e, x)e$$

относительно гиперплоскости H_e (также называемой *зеркалом* отражения \mathcal{R}_e).

Далее, определим полупространства $H_e^- = \{x \in \mathbb{X}^n \mid (x, e) \leq 0\}$ и $H_e^+ = \{x \in \mathbb{X}^n \mid (x, e) \geq 0\}$

Определение 2.2.1. *Выпуклым многогранником в пространстве \mathbb{X}^n называется пересечение конечного числа полупространств, имеющее непустую внутренность. Обобщённым выпуклым многогранником называется пересечение такого семейства полупространств (возможно, бесконечного), что любой шар пересекает только конечное число их граничных гиперплоскостей.*

Определение 2.2.2. *(Обобщённый) выпуклый многогранник называется остроугольным, если все его двугранные углы не превосходят $\pi/2$, и многогранником Кокстера, если все его двугранные углы имеют вид π/k , где $k \in \{2, 3, \dots, \infty\}$.*

Определение 2.2.3. *(Обобщённый) выпуклый многогранник называется компактным (или ограниченным), если находится внутри какого-то шара, и многогранником конечного объёма, если $\text{Vol}_{\mathbb{X}^n}(P) < \infty$.*

Заметим, что в случае $\mathbb{X}^n = \mathbb{E}^n, \mathbb{S}^n$ из конечности объема многогранника автоматически вытекает его компактность. В пространстве Лобачевского конечность объема выпуклого многогранника означает, что он является выпуклой оболочкой конечного числа обычных или бесконечно удаленных (иногда говорят идеальных) вершин.

Могут существовать многогранники, все вершины которых лежат на абсолюте. Например, можно взять треугольник с тремя нулевыми углами.

Гранями многогранника мы будем называть его $(n - 1)$ -мерные грани, которые в свою очередь являются пересечениями его граничных гиперплоскостей с ним самим.

2.2.2. Комбинаторное строение и матрица Грама остроугольных многогранников

Комбинаторное строение остроугольных многогранников в пространствах \mathbb{E}^n и \mathbb{S}^n хорошо известно, в отличие от многогранников в пространствах Лобачевского \mathbb{H}^n .

Предложение 2.2.1. (КОКСТЕР, 1933, см. [35]) *Всякий ограниченный остроугольный многогранник в \mathbb{S}^n является симплексом, а в \mathbb{E}^n — прямым произведением симплексов.*

Известен также следующий результат, принадлежий Е.М. Андрееву (см. [7]).

Теорема 2.2.1. *Несмежные грани остроугольного многогранника в любом из трех пространств $\mathbb{E}^n, \mathbb{S}^n$ или \mathbb{H}^n не имеют общих точек.*

Матрицей Грама выпуклого многогранника

$$P = \bigcap_{k=1}^N H_k^-$$

в \mathbb{X}^n (где $H_k^- := H_{e_k}^-$ и $(e_k, e_k) = 1$) называется матрица

$$G(P) = ((e_i, e_j))_{i,j=1}^N$$

скалярных произведений его внешних нормалей.

Таким образом, если P — остроугольный многогранник, то его матрица Грама $G(P)$ представляет из себя матрицу, у которой на диагонали стоят единицы и $g_{ij} \leq 0$ для $i \neq j$.

Более того,

$$g_{ij} = (e_i, e_j) = \begin{cases} -\cos \angle(H_i, H_j), & \text{если грани } H_i \text{ и } H_j \text{ пересекаются;} \\ -1, & \text{если грани } H_i \text{ и } H_j \text{ параллельны;} \quad [?] \\ -\operatorname{ch} \rho(H_i, H_j), & \text{если грани } H_i \text{ и } H_j \text{ расходятся.} \end{cases}$$

Зная комбинаторное устройство остроугольных многогранников в \mathbb{E}^n и \mathbb{S}^n , легко определить по произвольной матрице с единицами на диагонали и неположительными числами вне нее, является ли она матрицей Грама какого-то остроугольного многогранника в одном из этих пространств. Оказывается, что восстановить многогранник по его матрице Грама можно и в пространстве Лобачевского.

Теорема 2.2.2. (Винберг, 1985, см. [24]) Пусть $G = (g_{ij})$ — неразложимая симметричная матрица сигнатуры $(n, 1)$ с единицами на диагонали и неположительными элементами вне диагонали. Тогда в n -мерном пространстве Лобачевского \mathbb{H}^n существует выпуклый многогранник P , матрица Грама которого совпадает с G . Многогранник определен однозначно с точностью до движения пространства \mathbb{H}^n .

2.3. Дискретные группы движений и фундаментальные многогранники

Определение 2.3.1. Семейство подмножеств пространства \mathbb{X}^n называется локально конечным, если у каждой точки существует окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом подмножеств из этого семейства.

Определение 2.3.2. Подгруппа $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{X}^n)$ называется дискретной группой движений, если для всякой точки $x \in \mathbb{X}^n$ семейство $\{\gamma x : \gamma \in \Gamma\}$ локально конечно.

Заметим, что подгруппа $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{X}^n)$ является дискретной группой движений тогда и только тогда, когда все орбиты Γx дискретны (в топологическом смысле) и все стабилизаторы Γ_x конечны.

Примеры дискретных групп движений:

- Группа параллельных переносов $T_{\{e_1, \dots, e_n\}}$ на целочисленные линейные комбинации некоторого базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ в пространстве \mathbb{E}^n ;
- Группа S_n , действующая на пространстве \mathbb{E}^n перестановками декартовых координат;
- Группа $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ преобразований вида $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ на плоскости Лобачевского \mathbb{H}^2 в модели Пуанкаре верхней полуплоскости — так называемая модулярная группа Кляйна;
- Группы симметрий $\text{Sym}(P)$ многогранников $P \subset \mathbb{E}^n$, или группы симметрий дискретных подмножеств.

Определение 2.3.3. Разбиением пространства \mathbb{X}^n называется его локально конечное покрытие замкнутыми областями, не имеющими попарно общих внутренних точек.

Определение 2.3.4. Замкнутая область $D \subset \mathbb{X}^n$ называется фундаментальной областью дискретной группы движений $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{X}^n)$, если подмножества γD , где $\gamma \in \Gamma$, составляют разбиение пространства \mathbb{X}^n .

Смысл понятия фундаментальной области состоит, грубо говоря, в том, что это хорошее в топологическом смысле подмножество, содержащее представителей всех орбит группы Γ , причем почти из всех орбит – ровно по одному представителю.

Фундаментальная область данной дискретной группы движений не является однозначно определенным объектом. В её выборе, как правило, имеется функциональный произвол.

Пример 1. • Фундаментальной областью группы $T_{\{e_1, \dots, e_n\}}$ можно выбрать параллелепипед, натянутый на эти вектора в какой-либо точке \mathbb{R}^n . Также можно взять элементарную область, ограниченную сверху и снизу одинаковым куском графика гладкой функции.

- Фундаментальной областью группы S_n можно выбрать конус $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$.
- Фундаментальной областью группы $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ может служить треугольник с одной бесконечно удаленной вершиной, задаваемый в модели Пуанкаре неравенствами $|\text{Re } z| \leq \frac{1}{2}, \quad |z| \geq 1$.

Определение 2.3.5. Дискретная группа движений $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{X}^n)$ называется дискретной группой конечного кообъема или кристаллографической (или ко-конечной), если ее фундаментальная область имеет конечный объем в \mathbb{X}^n .

Определение 2.3.6. Дискретная группа движений $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{X}^n)$ называется кокомпактной, если ее фундаментальная область является ограниченным (компактным) множеством в \mathbb{X}^n .

Теорема 2.3.1. (см., например, [26]) Всякая дискретная группа движений пространства постоянной кривизны обладает фундаментальной областью, являющейся обобщенным выпуклым многогранником.

Следствие 2.3.1. Всякая кристаллографическая группа движений пространства \mathbb{E}^n является кокомпактной.

2.4. Группы отражений и многогранники Кокстера

2.4.1. Определения

Дискретная группа движений, порожденная отражениями в гиперплоскостях, в пространстве \mathbb{X}^n , называется группой отражений.

Дискретные группы отражений представляют особый интерес благодаря простому комбинаторному описанию своих фундаментальных многогранников. Известен следующий результат, восходящий еще к Г. Кокстеру. Но первое доказательство этой теоремы в общем виде для всех пространств постоянной кривизны принадлежит, по всей видимости, Э.Б. Винбергу.

Теорема 2.4.1. *Всякая группа отражений в пространстве \mathbb{X}^n порождается отражениями относительно стенок (граней) какого-то многогранника Кокстера.*

Теорема 2.4.2. *Пусть $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{X}^n)$ — дискретная группа движений, и пусть Γ_R — её подгруппа, порождённая всеми отражениями, входящими в Γ . Обозначим через P_R фундаментальный многогранник (Кокстера) группы Γ_R . Тогда $\Gamma_R \triangleleft \Gamma$ и $\Gamma = \Gamma_R \rtimes \Delta$, где $\Delta = \Gamma \cap \text{Sym}(P_R)$.*

Последняя теорема означает, в частности, что если Γ является дискретной группой конечного кообъёма, а её подгруппа отражений является подгруппой конечного индекса, то и многогранник P_R имеет конечный объём. Это простое соображение нам понадобится в дальнейшем, когда мы будем вводить арифметические группы отражений.

Теорема 2.4.3. *Пусть P — обобщённый многогранник Кокстера в пространстве \mathbb{X}^n . Тогда группа, порождённая отражениями относительно его граней, является дискретной и многогранник P является её фундаментальной областью.*

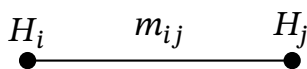
2.4.2. Абстрактные группы Кокстера и схемы Кокстера

Абстрактной группой Кокстера называется группа Γ с фиксированной системой образующих S и определяющими соотношениями вида $g^2 = e$ и $(gg')^{m(g,g')} = e$ для произвольных различных $g, g' \in S$, где $m(g, g') \in \{2, 3, 4, \dots, +\infty\}$.

Алгебраически это записывается так:

$$\Gamma = \langle g \in S \mid g^2 = (gg')^{m(g,g')} = e \rangle.$$

Схемой (графом или диаграммой) Кокстера (или Кокстера-Винберга) многогранника Кокстера P называется граф, вершины которого соответствуют граням многогранника P , а ребра — двугранным углам между ними. А именно, вершины схемы, соответствующие граням H_i и H_j , соединяются ребром кратности $(m_{ij} - 2)$ или ребром с весом m_{ij} , если $\angle(H_i, H_j) = \frac{\pi}{m_{ij}}$; жирным ребром с весом ∞ , если грани H_i и H_j параллельны; пунктирным ребром с весом $\text{ch } \rho(H_i, H_j)$, если грани H_i и H_j расходятся (см. рис.).



$$\text{если } \angle(H_i, H_j) = \frac{\pi}{m_{ij}}$$

$$\begin{array}{ll}
\begin{array}{c} H_i \quad \quad \quad H_j \\ \bullet \text{-----} \bullet \end{array} & \text{если } H_i \parallel H_j, \text{ то есть } \angle(H_i, H_j) = 0 \\
\begin{array}{c} H_i \quad \text{ch } \rho(H_i, H_j) \quad H_j \\ \bullet \text{-----} \bullet \end{array} & \text{если грани } H_i \text{ и } H_j \text{ расходятся.}
\end{array}$$

Обычно кратные ребра используют при малых значениях m_{ij} (при $m_{ij} = 2, 3, 4, 5$), например, если угол между гранями равен $\pi/2$, то соответствующие вершины схемы Кокстера не соединяются вовсе, а если угол равен, например, $\pi/4$, то рисуют двойное ребро.

Схемы Кокстера были впервые введены самим Гарольдом Кокстером для классификации дискретных групп отражений на сфере и в евклидовом пространстве. Для пространств Лобачевского схемы Кокстера были модифицированы Э.Б. Винбергом (добавление пунктирной линии).

2.4.3. Группы отражений в \mathbb{E}^n и \mathbb{S}^n

Схемы сферических многогранников Кокстера конечного объёма (а также и многогранных конусов Кокстера в евклидовом пространстве) — это в точности эллиптические схемы Кокстера, а схемы евклидовых многогранников — параболические.

В таблице 2.1 и таблице 2.2 приведены связные эллиптические и параболические схемы Кокстера.

Зная все эллиптические и параболические схемы Кокстера, несложно определить и по гиперболическому многограннику Кокстера (точнее, по его схеме Кокстера), является ли он компактным или имеет ли он конечный объём. А именно, в окрестности всякой обычной своей вершины он является симплексом, поскольку пересечение соответствующего многогранного конуса задает группу отражений на сфере. В окрестности бесконечно удалённых вершин многогранник ведет себя как многогранник Кокстера в пространстве Евклида. Следовательно, вершинам многогранника Кокстера конечного объёма в \mathbb{H}^n соответствуют эллиптические или параболические подсхемы. Вершинам компактного многогранника соответствуют только эллиптические подсхемы.

2.4.4. Группы отражений в \mathbb{H}^n

Группы отражений в пространствах Лобачевского \mathbb{H}^n часто называют *гиперболическими группами отражений*. При $n = 2$ группы, имеющие фундаментальный многоугольник конечной площади, были полностью описаны А. Пункаре в 1882 году (см. [55]), а при $n = 3$ описание коконечных гиперболических групп отражений вытекает из знаменитых теорем Е. М. Андреева 1970 года (см. [5, 6]).

Также следует отметить, что в отрыве от арифметичности изучаются многогранники Кокстера, имеющие достаточно простое комбинаторное строение. Читателю

Таблица 2.1:

Связные эллиптические схемы Кокстера

$A_n (n \geq 1)$	
$B_n (= C_n) (n \geq 2)$	
$D_n (n \geq 4)$	
E_6	
E_7	
E_8	
F_4	
G_2^m	
H_3	
H_4	

Таблица 2.2:

Связные параболические схемы Кокстера

\tilde{A}_1	
$\tilde{A}_n (n \geq 2)$	
$\tilde{B}_n (n \geq 3)$	
$\tilde{C}_n (n \geq 2)$	
$\tilde{D}_n (n \geq 4)$	
\tilde{E}_6	
\tilde{E}_7	
\tilde{E}_8	
\tilde{F}_4	
\tilde{G}_2	

рекомендуется обратить внимание на работы В. С. Макарова 1965-1966 г. (см. [39, 40]), значительно стимулировавшие интерес к гиперболическим группам отражений. Многогранники, построенные Макаровым, представляют из себя бесконечные серии призм Кокстера в пространстве \mathbb{H}^3 . Полное описание призм Кокстера конечного объема получено в работе И. М. Каплинской в 1974 г. (см. [34]).

О более новых исследованиях в области гиперболических многогранников Кокстера см. работу [31] А. Феликсон и П. Тумаркина 2014 г., а также созданный ими сайт <http://www.maths.dur.ac.uk/users/anna.felikson/Polytopes/polytopes.html> (см. [32]).

2.5. Квадратичные решётки

В этом параграфе изложим необходимые сведения о неопределённых квадратичных решётках. Более подробное изложение см., например, в [33] или [23].

Пусть A — кольцо главных идеалов. *Квадратичным A -модулем* называется свободный A -модуль конечного ранга, снабжённый невырожденной симметрической билинейной формой со значениями в A , называемой *скалярным умножением*. В частности, квадратичный \mathbb{Z} -модуль называется *квадратичной решёткой*. Через $[C]$ обозначим стандартный модуль A^n , скалярное умножение в котором определено матрицей Грама C . *Квадратичным пространством* называется свободный \mathbb{F} -модуль конечного ранга над полем \mathbb{F} .

Дискриминантом $d(L)$ квадратичного A -модуля L называется определитель матрицы Грама базиса модуля L . Он определен с точностью до умножения на элемент группы $(A^*)^2$ (где A^* обозначает группу обратимых элементов кольца A) и может рассматриваться как элемент полугруппы $A/(A^*)^2$. Квадратичный A -модуль L называется *унимодулярным*, если $d(L) \in A^*$.

Ненулевой вектор $x \in L$ называется *изотропным*, если $(x, x) = 0$. Квадратичный модуль L называется *изотропным*, если он содержит хотя бы один изотропный вектор, в противном случае он называется *анизотропным*.

Так как $(\mathbb{Z}^*)^2 = 1$, дискриминант $d(L)$ квадратичной решётки L — это просто целое число. Унимодулярность квадратичной решётки L равносильна тому, что она совпадает со своей *сопряжённой* решёткой

$$L^* = \{x \in L \otimes \mathbb{Q} : \forall y \in L (x, y) \in \mathbb{Z}\}.$$

Инвариантные множители матрицы Грама базиса решётки L называются *инвариантными множителями* решётки L .

Всякая квадратичная решётка L определяет квадратичное вещественное векторное пространство $L_\infty = L \otimes \mathbb{R}$ и, для любого простого p , — квадратичный \mathbb{O}_p -модуль $L_p = L \otimes \mathbb{O}_p$, где \mathbb{O}_p — кольцо целых p -адических чисел. Сигнатура пространства L_∞ называется *сигнатурой* решётки L . Очевидно, что если квадратичные решётки L и M

изоморфны, то они имеют одинаковую сигнатуру и $L_p \simeq M_p$ для любого простого p . Обратное также верно при следующих условиях:

- (i) L неопределенна;
- (ii) для любого простого p решётка L имеет два инвариантных множителя, делящихся на одну и ту же степень p .

Структура квадратичных \mathbb{O}_p -модулей описывается следующим образом. Всякий такой модуль L_p допускает разложение Жордана

$$L_p = L_p^{(0)} \oplus [p]L_p^{(1)} \oplus [p^2]L_p^{(2)} \oplus \dots,$$

где все $L_p^{(j)}$ – унимодулярные квадратичные \mathbb{O}_p -модули. Эти модули определены с точностью до изоморфизма при $p \neq 2$; при $p = 2$ их ранги и чётности определены однозначно.

Предложение 2.5.1. (см., напр., [23]) Если L — максимальная квадратичная решётка, то есть не содержащаяся ни в какой другой квадратичной решётке, то

$$L_p = L_p^{(0)} \oplus [p]L_p^{(1)}.$$

для всех простых $p \mid d(L)$.

Определение 2.5.1. Пусть $a, b \in \mathbb{Q}_p^*$. Положим

$$(a, b)_p = \begin{cases} 1, & \text{если уравнение } ax^2 + by^2 = 1 \text{ имеет решение в } \mathbb{Q}_p^*; \\ -1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Число $(a, b)_p$ называется символом Гильберта.

Известно, что при $p \neq 2$ (соответственно при $p = 2$) группу $\mathbb{Q}_p^*/(\mathbb{Q}_p^*)^2$ можно рассматривать как векторное пространство над $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ размерности 2 (соответственно 3). Символ Гильберта является невырожденной симметрической билинейной формой на этом векторном пространстве.

Напомним определение инварианта Хассе квадратичного пространства V над полем \mathbb{Q}_p . Пусть a_1, \dots, a_m — скалярные квадраты векторов какого-либо ортогонального базиса пространства V .

Определение 2.5.2. Число

$$\varepsilon_p(V) = \prod_{i < j} (a_i, a_j)_p$$

называется инвариантом Хассе квадратичного пространства V .

Известны следующие теоремы.

Теорема 2.5.1. (См., напр., [33], стр. 76, лемма 2.6)

Квадратичное пространство V ранга 4 над полем \mathbb{Q}_p анизотропно тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- (1) $d(V) \in (\mathbb{Q}_p^*)^2$;
- (2) $\varepsilon_p(V) = -(-1, -1)_p$.

Заметим, что всякое квадратичное пространство V ранга > 4 над полем \mathbb{Q}_p изотропно.

Теорема 2.5.2. (Сильный принцип ХАССЕ, см., напр., [33], стр. 92, теор. 1.1)

Квадратичное пространство V над полем \mathbb{Q} изотропно тогда и только тогда, когда квадратичное пространство $V \otimes \mathbb{Q}_p$ изотропно для всех p , включая ∞ .

Теорема 2.5.3. (Слабый принцип ХАССЕ, см., напр., [33], стр. 93, теор. 1.2)

Два рациональных квадратичных пространства изоморфны над полем \mathbb{Q} тогда и только тогда, когда они изоморфны над \mathbb{R} и всеми \mathbb{Q}_p .

Похожие результаты имеются и для пространств над вполне вещественными полями алгебраических чисел, но мы ими не будем пользоваться.

2.6. Арифметические дискретные группы простейшего типа

Определение 2.6.1. Пусть $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$ – вполне вещественное поле алгебраических чисел и A – кольцо его целых элементов. Невырожденная квадратичная форма

$$f(x) = \sum_{i,j=0}^n a_{ij}x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{F},$$

называется допустимой, если

- она имеет сигнатуру $(n, 1)$
- и для любого нетождественного вложения $\sigma : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$ форма $f^\sigma(x) = \sum a_{ij}^\sigma x_i x_j$ положительно определена.

В таком случае группа $\mathcal{O}'(f, A)$ целочисленных (с коэффициентами из кольца A) линейных преобразований, сохраняющих форму f и не меняющих местами связанные компоненты конуса $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x) < 0\}$, является дискретной группой движений пространства \mathbb{H}^n , и называется арифметической дискретной группой.

Иными словами, мы можем рассмотреть гиперболическую решетку, скалярное умножение в которой задается допустимой формой f . Сформулируем более строгое определение.

Определение 2.6.2. Свободный конечно-порождённый A -модуль L , снабжённый скалярным умножением (\cdot, \cdot) сигнатуры $(n, 1)$ со значениями в A , называется гиперболической решёткой, если для всякого нетождественного вложения $\sigma : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$ квадратичное пространство $L \otimes_{\sigma(A)} \mathbb{R}$ положительно определено. (Скалярное умножение в L соответствует некоторой допустимой квадратичной форме.)

Пусть L — гиперболическая решётка. Тогда векторное пространство $\mathbb{E}^{n,1} = L \otimes_{\text{id}} \mathbb{R}$ является $(n + 1)$ -мерным вещественным пространством Минковского. Группа $\Gamma = \mathcal{O}'(L)$ целочисленных (то есть с коэффициентами из A) линейных преобразований, сохраняющих решётку L и отображающих на себя каждую связную компоненту конуса

$$\mathfrak{C} = \{v \in \mathbb{E}^{n,1} \mid (v, v) < 0\} = \mathfrak{C}^+ \cup \mathfrak{C}^-,$$

является дискретной группой движений пространства Лобачевского. Здесь подразумевается векторная модель пространства Лобачевского \mathbb{H}^n , заданная как множество точек гиперboloида

$$\{v \in \mathbb{E}^{n,1} \mid (v, v) = -1\},$$

лежащих внутри конуса \mathfrak{C}^+ . Группа движений $\text{Isom}(\mathbb{H}^n) = \mathcal{O}'_{n,1}(\mathbb{R})$ есть группа псевдоортогональных преобразований пространства $\mathbb{E}^{n,1}$, оставляющая на месте конус \mathfrak{C}^+ . Более подробно о векторной модели пространства Лобачевского см. параграф 2.1.3.

Из общей теории арифметических групп (см. статью [13] А. Бореля и Хариш-Чандры 1962 года, а также работу [45] Г. Мостова и Т. Тамагавы 1962 года) известно, что если $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ и решётка L изотропна (то есть ассоциированная с ней квадратичная форма представляет нуль), то факторпространство \mathbb{H}^n/Γ (то есть фундаментальная область группы Γ) некомпактно, но имеет конечный объём (в таком случае говорят, что Γ — дискретная подгруппа конечного кообъёма), а во всех остальных случаях оно компактно. При $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ доказательство этих утверждений было впервые дано в 1937 году в работе [18] Б. А. Венкова.

Определение 2.6.3. Две подгруппы Γ_1 и Γ_2 какой-либо группы называются соизмеримыми, если группа $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ является подгруппой конечного индекса в каждой из них.

Определение 2.6.4. Группы Γ , полученные указанным выше способом, и все соизмеримые с ними дискретные подгруппы группы $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ называются арифметическими дискретными группами простейшего типа. Поле \mathbb{F} называется полем определения (или основным полем) группы Γ (и всех групп, соизмеримых с ней).

2.7. Арифметические группы отражений и рефлексивные гиперболические решётки

Примитивный вектор $e \in L$ называется *корнем* или, более точно, k -*корнем*, где $k = (e, e) > 0$, если $2(e, x) \in kA$ для всех $x \in L$. Всякий корень e определяет ортогональное отражение (называемое k -отражением, где $k = (e, e)$) в пространстве $\mathbb{E}^{n,1}$

$$\mathcal{R}_e : x \mapsto x - \frac{2(e, x)}{(e, e)}e,$$

которое сохраняет решётку L . Отражение \mathcal{R}_e определяет отражение в пространстве \mathbb{H}^n относительно гиперплоскости

$$H_e = \{x \in \mathbb{H}^n \mid (x, e) = 0\},$$

называемой *зеркалом* отражения \mathcal{R}_e .

Обозначим через $\mathcal{O}_r(L)$ подгруппу группы $\mathcal{O}'(L)$, порождённую всеми содержащимися в ней отражениями.

Определение 2.7.1. Гиперболическая решётка L называется *рефлексивной*, если индекс $[\mathcal{O}'(L) : \mathcal{O}_r(L)]$ конечен.

Теорема 2.7.1. (ВИНБЕРГ, 1967, см. [19])

Дискретная группа отражений конечного кообъёма является арифметической группой отражений с полем определения \mathbb{F} (или \mathbb{F} -арифметической), если она содержится в качестве подгруппы конечного индекса в группе вида $\mathcal{O}'(L)$, где L — какая-то (автоматически рефлексивная) гиперболическая решетка над вполне вещественным полем \mathbb{F} .

Э.Б. Винберг сформулировал и доказал критерий арифметичности (см. [19]) для дискретной группы отражений, который позволяет эффективно определить по матрице Грама фундаментального многогранника, является ли заданная кокомпактная группа отражений арифметической, и позволяет также найти ее основное поле в случае положительного ответа.

Пусть L — гиперболическая решётка над \mathbb{Z} . Обозначим через $\mathcal{O}_r(L)$, $\mathcal{O}_r^{(2)}(L)$ и $\mathcal{O}_r^{(1,2)}(L)$ подгруппы группы $\mathcal{O}'(L)$, порожденные всеми отражениями, всеми 2-отражениями и всеми 1- и 2-отражениями, содержащимися в $\mathcal{O}'(L)$, соответственно. Гиперболическая решетка L называется *рефлексивной*, *2-рефлексивной* или *(1,2)-рефлексивной*, если подгруппа $\mathcal{O}_r(L)$, $\mathcal{O}_r^{(2)}(L)$ или $\mathcal{O}_r^{(1,2)}(L)$ соответственно имеет конечный индекс в $\mathcal{O}'(L)$. Решетка L рефлексивна, 2-рефлексивна или (1,2)-рефлексивна тогда и только тогда, когда фундаментальный многогранник группы $\mathcal{O}_r(L)$, $\mathcal{O}_r^{(2)}(L)$ и $\mathcal{O}_r^{(1,2)}(L)$ соответственно имеет конечный объем в пространстве Лобачевского \mathbb{H}^n . Очевидно, что всякое конечное расширение 2-рефлексивной или (1,2)-рефлексивной гиперболической решетки также является 2-рефлексивной или (1,2)-рефлексивной решеткой соответственно.

Определение 2.7.2. Число $k \in A$, $k > 0$, называется устойчивым, если $k \mid 2$ в кольце A .

Например, при $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, $A = \mathbb{Z}$, это определение выполняется при $k \leq 2$. А при $\mathbb{F} = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ и $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ устойчивыми будут числа 1, 2 и $2 + \sqrt{2}$ (с точностью до умножения на обратимый элемент кольца).

Определение 2.7.3. Отражение \mathcal{R}_e называется устойчивым, если число (e, e) является устойчивым.

Пусть L — гиперболическая решётка над кольцом целых A . Обозначим через $S(L)$ подгруппу группы $\mathcal{O}'(L)$, порождённую устойчивыми отражениями.

Определение 2.7.4. Гиперболическая решётка L называется устойчиво рефлексивной, если индекс $[\mathcal{O}'(L) : S(L)]$ конечен.

Замечание 4. В статьях [10], [62] и [11] устойчиво рефлексивные решетки над \mathbb{Z} называются (1,2)-рефлексивными, поскольку для $A = \mathbb{Z}$ только числа 1 и 2 являются устойчивыми (то есть для решеток над \mathbb{Z} группы $S(L)$ и $\mathcal{O}_r^{(1,2)}(L)$ совпадают).

Очевидно, что всякое конечное расширение устойчиво рефлексивной гиперболической решётки также является устойчиво рефлексивной решёткой.

2.8. Известные методы классификации

2.8.1. Метод Винберга

В этом параграфе мы опишем метод, применённый Э.Б. Винбергом (см. [27]) для классификации 2-рефлексивных гиперболических решеток ранга 4.

Определение 2.8.1. Вершина трехмерного выпуклого многогранника называется простой, если она принадлежит ровно трем граням.

Известно, что выпуклый многогранник конечного объема в \mathbb{H}^3 — это то же, что выпуклая оболочка конечного числа обычных и бесконечно удаленных вершин.

Пусть P — многогранник Кокстера конечного объема в \mathbb{H}^3 . Тогда всякая обычная вершина многогранника P является простой, а всякая бесконечно удаленная вершина либо проста, либо принадлежит 4 граням, из которых любые две смежные перпендикулярны, а несмежные параллельны.

В работе [27] было доказано следующее предложение.

Предложение 2.8.1. Всякий многогранник Кокстера конечного объема в \mathbb{H}^3 имеет либо треугольную грань, либо 4-угольную с не более чем тремя непростыми вершинами, либо 5-угольную с не более чем одной непростой вершиной.

Доказательство. Обозначим через B , P и Γ соответственно количество вершин, ребер и граней многогранника P . Справедлива формула Эйлера:

$$B - P + \Gamma = 2. \quad (2.1)$$

Обозначим через B_3 и B_4 соответственно количество простых и непростых вершин многогранника P , а для всякой грани F через $B_3(F)$ и $B_4(F)$ - количество простых и непростых вершин, принадлежащих грани F . Очевидно, что

$$B = B_3 + B_4 \quad (2.2)$$

$$2P = 3B_3 + 4B_4 \quad (2.3)$$

Из (2.1–2.3) следует, что

$$\Gamma - \frac{1}{2}B_3 - B_4 = 2,$$

откуда

$$\Gamma > \frac{1}{2}B_3 + B_4 = \sum_F \left(\frac{1}{6}B_3(F) + \frac{1}{4}B_4(F) \right)$$

Следовательно, существует такая грань F , что

$$\frac{1}{6}B_3(F) + \frac{1}{4}B_4(F) < 1.$$

Ясно, что такая грань не может иметь более 5 сторон, откуда перебором конкретных случаев и получаем доказательство утверждения. ■

Пусть теперь F — грань (из предл. 2.8.1) фундаментального многогранника P группы $\mathcal{O}_r^{(2)}(L)$ для некоторой 2-рефлексивной гиперболической решетки L ранга 4. Пусть F_1, \dots, F_k — смежные с ней грани, где как известно $k = 3, 4$ или 5. Обозначим через u_1, \dots, u_k соответствующие этим граням корни, через u — корень, соответствующий грани F . Пусть L' — решетка, порожденная векторами u_1, \dots, u_k, u (то есть $L = [G(u_1, \dots, u_k, u)]$).

Если F является треугольной гранью, то матрица G будет невырождена, причем все ее элементы будут ограничены. Следовательно, таких матриц будет конечное небольшое число. Если смежных граней четыре или пять, то $\text{rk } G = 4$, а значит $\det G = 0$. Это дает ограничения на элементы матрицы, благодаря которым у нас опять остается конечное число матриц Грама $G(u_1, \dots, u_k, u)$.

При $k = 3$ или 4 тип решетки L' можно определить по матрице Грама $G = G(u_1, \dots, u_k, u)$. Если $k = 5$, то одна из смежных граней опускается, затем рассматривается матрица Грама $G(u_1, u_2, u_3, u_4, u)$.

Итак, мы определили тип решетки L' . Она имеет конечный индекс в L . Ясно, что решетка L лежит между решетками L' и $(L')^*$, причем $[(L')^* : L']^2 = |d(L')|$. Отсюда вытекает неравенство $[L : L']^2 \leq |d(L')|$. Пользуясь этой оценкой, в каждом случае по решетке L' можно найти ее всевозможные расширения конечного индекса. Таким

образом, можно получить конечное число решеток-кандидатов, которые остается исследовать на 2-рефлексивность с помощью алгоритма Винберга и других методов, изложенных в главе 3.

2.8.2. Методы Никулина и Аллкока

В своих ранних работах (см. лемму 3.2.1 в [48] и доказательство теоремы 4.1.1 в [49]) В. В. Никулин доказал следующее утверждение¹.

Теорема 2.8.1. Пусть P — выпуклый многогранник конечного объёма в \mathbb{H}^n . Тогда в нём существует такая грань F , что для любых смежных с F граней F_1 и F_2 многогранника P верно неравенство

$$\operatorname{ch} \rho(F_1, F_2) \leq 7,$$

где $\rho(\cdot, \cdot)$ — расстояние в пространстве Лобачевского².

В доказательстве этого утверждения грань F выбиралась как наиболее удалённая от некоторой фиксированной точки O внутри многогранника P . Заметим, что эта теорема позволяет сразу оценить модуль скалярного произведения единичных внешних нормалей к граням, смежным с гранью F . Действительно, если F_1 и F_2 пересекаются или параллельны, эта величина совпадает с косинусом двугранного угла между этими гранями, а если эти грани расходятся, то она равна гиперболическому косинусу расстояния между ними.

В.В. Никулин и Д. Аллкок применяли этот результат для классификации рефлексивных гиперболических решеток ранга 3 (см. [51] и [4]).

Применение этого результата происходит аналогично тому, как было в методе Винберга. Рассматривается наиболее удаленная грань, берутся корни, являющиеся внешними нормальными к ней и к смежным с ней граням. Эти корни порождают некоторую подрешетку. В силу дополнительных геометрических соображений оказывается, что всего возможно лишь конечное число таких подрешеток и их надрешеток конечного индекса. Все они образуют список решеток-кандидатов, который остается проверить на рефлексивность. Для этого, как правило, используется алгоритм Винберга.

2.8.3. Метод Шарлау

Р. Шарлау, а также его ученики К. Вальхорн и И. Туркал использовали следующую теорему для классификации максимальных изотропных гиперболических решеток.

¹Мы приводим данное утверждение в удобном для нас виде, хотя явно оно так нигде не формулировалось.

²В работах Никулина квадраты длин нормалей к граням равны 2, поэтому в его работах фигурирует оценка $(\delta, \delta') \leq 14$.

Теорема 2.8.2. (см. [57], [58], [61] и [59]) Пусть L — максимальная изотропная рефлексивная гиперболическая решётка ранга 4, 5 или 6. Тогда

$$L = [\alpha]U \oplus M,$$

где $\alpha = 1$ или 2 , а M является евклидовой решёткой.

Далее, используя различные соображения (связанные с изучением рода фуксовых групп и массами евклидовых решёток), они сводили перебор решеток к конечному списку.

2.9. Известные результаты

Теперь мы сформулируем известные результаты, преимущественно посвященные арифметическим группам отражений в пространствах Лобачевского. Помимо указанных ниже ссылок, почти все данные результаты освещены в недавнем обзоре [9].

- 1933 год, Г. Кокстер, см. [35]. Перечислил все кристаллографические группы отражений пространств \mathbb{E}^n и \mathbb{S}^n . Для удобства их классификации придумал диаграммы.
- 1937 год, Б.А. Венков, см. [18]. Группа $\mathcal{O}'(L)$ для гиперболической решетки над \mathbb{Z} дискретно действует на пространстве \mathbb{H}^n и ее фундаментальный многогранник имеет конечный объем.
- 1962 год, А. Борель и Хариш-Чандра (см. [13]) и Г. Мостов и Т. Тамагава (см. [45]). Арифметическая группа $\mathcal{O}'(f, A)$ является кокомпактной за исключением случая $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, $A = \mathbb{Z}$, разобранного Венковым (см. выше).
- 1967 год, Э.Б. Винберг (см. [19]). Сформулировал проблему описания дискретных групп отражений. Развил язык схем Кокстера для многогранников в \mathbb{H}^n , в частности, придумал, как по схеме Кокстера определять, имеет ли многогранник конечный объем. Сформулировал и доказал критерий арифметичности для кокомпактных групп отражений пространства Лобачевского. Привел ряд различных примеров.
- 1970 год, Е.М. Андреев (см. [5, 6]). Теорема, дающая простые необходимые и достаточные условия для реализуемости в \mathbb{H}^3 остроугольного многогранника конечного объема. Отсюда получается классификация дискретных групп отражений конечного кообъема в \mathbb{H}^3 .
- 1972 год, Э.Б. Винберг (см. [20, 22]). Эффективный алгоритм, позволяющий для всякой арифметической группы построить фундаментальный многогранник для ее подгруппы отражений, и определить, имеет ли он конечный объем.

- 1972, 1978 год. Э.Б. Винберг и И.М. Каплинская (см. [20, 21, 25]) Классификация унимодулярных рефлексивных гиперболических решёток над \mathbb{Z} .
- 1980 – 1981 год, В.В. Никулин (см. [48, 49]). При фиксированном $n \geq 2$ и фиксированной степени поля \mathbb{F} имеется лишь конечное число с точностью до подобия максимальных арифметических групп отражений. При $n \geq 9$ доказана конечность числа максимальных арифметических групп отражений во всех размерностях.
- 1984 год, Э.Б. Винберг (см. [23]). Отсутствие кокомпактных групп отражений в \mathbb{H}^n при $n \geq 30$, одновременно отсутствие арифметических групп отражений в тех же размерностях.
- 1979, 1981 и 1984 год, В. В. Никулин [46, 48, 50]. Классификация всех 2-рефлексивных гиперболических решеток ранга $n + 1 \neq 4$.
- 1986 год, В. Прохоров и А. Хованский (см. [56, 60]). Отсутствие многогранников Кокстера конечного объема в пространствах Лобачевского \mathbb{H}^n при $n \geq 996$.
- 1984, 1990 и 1992 год, В.О. Бугаенко (см. [15, 16, 17]). Классификация унимодулярных рефлексивных гиперболических решёток над $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}[(1 + \sqrt{5})/2]$ и $\mathbb{Z}[\cos(2\pi/7)]$.
- 1989 – 1993 год, Р. Шарлау и К. Вальхорн (см. [57, 58, 61]). Классификация всех максимальных изотропных рефлексивных гиперболических решеток ранга 4 и 5.
- 1996 год, Ф. Эссельманн (см. [30]). Доказал отсутствие рефлексивных гиперболических решеток ранга $n + 1 > 22$ и $n + 1 = 21$. При $n + 1 = 22$ известен рефлексивный пример Р. Борчердса (см. [14]).
- 2000 год, В.В. Никулин (см. [51]). Найдены все рефлексивные гиперболические решетки ранга 3, дискриминанты которых свободны от квадратов.
- 2007 год. Э.Б. Винберг(см. [27]). Классифицировал все 2-рефлексивные гиперболические решетки ранга 4.
- 2006 год, Д. Лонг, К. Маклахлан и А. Рид (см. [37]). Конечность числа максимальных арифметических групп отражений на плоскости \mathbb{H}^2 .
- 2006 год, И. Агол (см. [1]). Конечность числа максимальных арифметических групп отражений в пространстве \mathbb{H}^3 .
- 2007 год, В.В. Никулин (см. [52]). Окончательно установил конечность числа максимальных арифметических групп отражений в пространствах Лобачевского во всех размерностях.

- 2008 год, (независимо, но позже Никулина) И. Агол, М. Белолипецкий, К. Сторм и П. Уайт (см. [2]) доказали конечность числа максимальных арифметических групп отражений во всех размерностях с помощью спектрального метода.
- 2011 год, Д. Аллкок (см. [4]). Классифицировал вообще все рефлексивные гиперболические решетки ранга 3.
- 2015 год, А. Марк (см. [41]). Классификация рефлексивных гиперболических решеток над \mathbb{Z} вида $[-p] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$, где p — простое число.
- 2015 год, А. Марк (см. [42]). Классификация всех рефлексивных гиперболических решеток над $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ранга 3, свободных от квадратов.
- 2017 год, И. Туркал (см. [59]). Классификация всех рефлексивных гиперболических решеток над \mathbb{Z} ранга 6, свободных от квадратов.
- 2016–2018 год, Н.В. Богачев (см. [10, 62, 11]). Классификация всех устойчиво рефлексивных анизотропных гиперболических решеток над \mathbb{Z} ранга 4.
- 2018–2019 год, Н.В. Богачев (см. главу 5). Классификация всех максимальных устойчиво рефлексивных гиперболических решеток над $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ранга 4.

Глава 3

Алгоритм Винберга и проект VinAI

3.1. Общее описание алгоритма Винберга

Как было сказано ранее, в 1972 году Э.Б. Винберг предложил эффективный алгоритм, позволяющий построить фундаментальный многогранник для любой дискретной группы отражений в пространстве Лобачевского. В этом разделе мы опишем алгоритм Винберга, следуя [20]. Выберем произвольную точку $v_0 \in \mathbb{H}^n$, которую будем называть *базисной*. Фундаментальная область P_0 её стабилизатора Γ_{v_0} — это многогранный конус в \mathbb{H}^n . Пусть H_1, \dots, H_m — грани этого конуса, а a_1, \dots, a_m — внешние нормали к ним. Определим полупространства

$$H_k^- = \{x \in \mathbb{E}^{n,1} : (x, a_k) \leq 0\}.$$

Тогда $P_0 = \bigcap_{j=1}^m H_j^-$.

Существует единственный фундаментальный многогранник P группы Γ , содержащийся в P_0 и содержащий точку v_0 . Его грани, содержащие v_0 , образованы гранями конуса H_1, \dots, H_m . Поиск остальных граней H_{m+1}, \dots и соответствующих внешних нормалей a_{m+1}, \dots осуществляется по индукции. А именно, в качестве H_j берётся такое зеркало, что ортогональный ему вектор a_j удовлетворяет условиям

- 1) $(v_0, a_j) < 0$;
- 2) $(a_i, a_j) \leq 0$ для всех $i < j$;
- 3) расстояние $\rho(v_0, H_j)$ минимально при выполнении условий 1) и 2).

Если же $\Gamma = \mathcal{O}_r(L)$ для некоторой решетки L , то нормали a_j являются корнями этой решётки.

Длины корней $\{a_j\}$ удовлетворяют следующему полезному условию.

Предложение 3.1.1. (Винберг, 1984, см. [23]) *Скалярные квадраты корней в квадратичной решётке L являются делителями удвоенного последнего инвариантного множителя решётки L .*

Алгоритм Винберга завершает работу, если на каком-то шаге получается многогранник Кокстера конечного объема.

3.2. Компьютерные реализации алгоритма Винберга

Попытки реализовать на компьютере алгоритм Винберга предпринимались с 80-х годов прошлого века, но все они ограничивались решётками частного вида, как правило, имеющими ортогональный базис. Упоминания о таких программах можно встретить, к примеру, в работах В. О. Бугаенко (1992, см. [17]), Р. Шарлау и К. Вальхорн (1992, см. [58]), В. В. Никулина (2000, см. [51]) и Д. Аллкока (2011, см. [4]). Но сами программы не были опубликованы, за исключением работы В. В. Никулина, в которой приведён код программы для решёток нескольких частных видов. Единственной известной реализацией, опубликованной вместе с подробной документацией, является программа Р. Гульельметти 2016 года¹, работающая с решётками, имеющими ортогональный базис, инварианты множители которых свободны от квадратов. Р. Гульельметти применял её в своей диссертации для классификации рефлексивных решёток с ортогональным базисом, элементы которого имеют малые длины (2017, см. [29]). Эта программа работает эффективно во всех размерностях, где существуют рефлексивные решётки.

В данной работе представлена собственная реализация (проект VinAl) алгоритма Винберга для произвольных гиперболических решёток без каких-либо ограничений. Программа, написанная в 2017 году совместно с А. Ю. Перепечко, опубликована в Интернете (см. [12]), а её подробное описание доступно в статье [63]. Программа была проверена на значительном количестве известных рефлексивных гиперболических решёток.

3.3. Основные шаги программы VinAl и вспомогательные результаты

3.3.1. Выбор базисной точки

На вход программа получает квадратную матрицу G размера $n + 1$, задающую скалярное умножение сигнатуры $(n, 1)$ в гиперболической решётке $L = [G]$ (здесь $[C]$ обозначает квадратичную решётку со скалярным умножением, заданным в некотором базисе симметричной матрицей C). Программа находит такую замену координат над \mathbb{Q} , что в новых координатах матрица скалярного произведения — диагональная с отрицательным первым диагональным элементом. В качестве базисной точки u_0 берётся примитивный вектор решётки, пропорциональный первому вектору нового базиса.

¹см. проект AlVin <https://rgugliel.github.io/AlVin>

3.3.2. Построение фундаментального конуса

Пусть v_0 принадлежит m -мерной грани фундаментального конуса группы $\mathcal{O}_r(L)_{v_0}$, $1 \leq m \leq n$. Поскольку внешние нормали a_1, \dots, a_m к граням фундаментального конуса перпендикулярны к v_0 в пространстве $\mathbb{E}^{n,1}$, то они лежат в евклидовом пространстве $V_1 = \langle v_0 \rangle^\perp$. Но по предложению 3.1.1 их длины ограничены, их число конечно, и мы можем их найти с помощью сопрограммы, которая описана в пункте 3.3.5 данной статьи. В частности, порождённая этими нормальми группа отражений $\mathcal{O}_r(L)_{v_0}$ конечна, то есть является эллиптической группой Кокстера ранга m .

Построение фундаментального конуса происходит следующим образом. В начале берём конус C , равный всему пространству V , а затем выполняем последовательно для каждого корня в V_1 следующую процедуру: если зеркало H_a данного корня a пересекает внутренность C , то заменяем конус C на его пересечение с полупространством $H_a^- = \{v \mid (a, v) \leq 0\}$. Это конечная процедура, выдающая в качестве C фундаментальную область группы $\mathcal{O}_r(L)_{v_0}$.

3.3.3. Разложение корней решётки

Предложение 3.3.1. Решётка $L' = (L \cap V_1) \oplus \mathbb{Z}v_0$ является подрешёткой конечного индекса в решётке L , причём L/L' является циклической группой, порядок которой $s = |L/L'|$ является делителем числа (v_0, v_0) .

Доказательство. Образ всякого элемента решетки L при факторизации по L' однозначно определяется скалярным произведением с вектором v_0 по модулю (v_0, v_0) .

■

Следствие 3.3.1. Существуют такие векторы $w_1, \dots, w_s \in L$, что $L = \bigsqcup_{i=1}^s (w_i + L')$. В частности, все векторы $a \in L$ единственным образом записываются в виде $a = a_0 v_0 + v_1 + w_t$, где $a_0 \in \mathbb{Z}$, $v_1 \in L \cap V_1$, $1 \leq t \leq s$.

Выпишем условие 3) минимальности расстояния алгоритма Винберга в полученном разложении. Обозначая $l = (v_0, v_0) \in \mathbb{Z}_{<0}$, $k = (a, a)$, получаем:

$$\mathrm{sh} \rho(H_a, v_0) = \frac{|(a, v_0)|}{\sqrt{(a, a)(v_0, v_0)}} = \frac{|a_0 l + (w_t, v_0)|}{\sqrt{k l}}.$$

Значит, расстояние от зеркала H_a до базисной точки определяется целым числом a_0 , компонентой w_t и длиной самого корня a . Но длина корня (см. предложение 1) и номер компоненты w_t допускают конечное число вариантов. Таким образом, все корни разбиваются на подмножества, задаваемые тройками (a_0, w_t, k) , на которых мы задаём линейный порядок по расстоянию от зеркала H_a до точки v_0 .

3.3.4. Вывод корней

После того как фундаментальный многогранный конус найден, программа перебирает корни согласно введённому выше линейному порядку на тройках (a_0, w_t, k) . Для каждой тройки вектор a определяется компонентой $v_1 \in V_1$ из условия $(a, a) = k$ и находится с помощью сопрограммы из пункта 3.3.5. Поэтому для каждой тройки поиск корня, подходящего под условия 1) и 2), происходит за конечное время. Найденный корень будет удовлетворять условию 3) в силу порядка на тройках.

Каждый раз, когда найден очередной корень a_j , программа добавляет его к системе предыдущих корней и проверяет, является ли система корней (a_1, \dots, a_j) системой внешних нормалей многогранника Кокстера конечного объёма. Для проверки конечности объёма известно несколько программ, в частности, программа В. О. Бугаенко, а также используемая нами программа² Р. Гульельметти (см. статью [28]).

Таким образом, программа последовательно выводит корни, являющиеся внешними нормальными искомого многогранника P . Если на каком-то шаге они задают многогранник конечного объёма, то программа заканчивает работу.

3.3.5. Подпрограмма решения квадратичных диофантовых уравнений

Практически вся вычислительная сложность алгоритма Винберга заключается в поиске решений квадратичного диофантова уравнения вида $xAx^t + Bx^t + c = 0$, где A — положительно определённая целочисленная симметричная матрица порядка n , B — целочисленная строка длины n , $x = (x_1, \dots, x_n)$ — строка неизвестных, $c \in \mathbb{Z}$. В нашем проекте данная задача решена с помощью Python-сопрограммы, действующей индукцией по n . А именно, поскольку решения лежат на некотором эллипсоиде, x_n может принимать лишь конечное число целых значений. Подпрограмма находит их при помощи метода сопряжённых градиентов и для каждого значения x_n сводит к $(n - 1)$ -мерной задаче в гиперплоскости $\{x_n = \text{const}\}$. При $n = 1$ подпрограмма находит целочисленные корни квадратного трёхчлена.

3.4. Программа для решеток над $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

Для классификации устойчиво рефлексивных решеток над $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ возникла необходимость написать программу, которую надо немного переделывать для каждой новой решетки. В дальнейшем планируется совместно с А.Ю. Перепечко сделать эту программу такой же универсальной, как и проект VinAl для решёток над \mathbb{Z} . Более того, планируется осуществить слияние этих программ в единый проект, реализующий алгоритм Винберга для решеток над квадратичными полями $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

²См. проект CoxIter: <https://github.com/rgugliel/CoxIter>

Текущая версия программы работает довольно просто. Она приводит произвольную решетку L к диагональному базису над $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ и записывает условие того, что предыдущие координаты принадлежат кольцу целых $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Затем она воспроизводит шаги алгоритма Винберга, следуя в основном реализации Р. Гульельметти (подробное описание см. в [29]).

Автором было реализовано также в виде отдельного программного кода доказательство нерелективности некоторых решеток, использующее методы понижения размерности и поиска симметрии бесконечного порядка, разработанные В. О. Бугаенко (см. [17] и [29]). Эти методы применяются также в проекте Р. Гульельметти.

3.5. Исследование на устойчивую рефлективность

3.5.1. Алгоритм Винберга

Несомненно можно проводить алгоритм Винберга не для группы $\mathcal{O}_r(L)$, а для группы $S(L)$. Для этого достаточно проводить перебор только по устойчивым отражениям. Но как правило эффективнее оказывается проводить алгоритм для всей группы $\mathcal{O}_r(L)$.

3.5.2. Метод “плохих” отражений

Если удалось найти фундаментальный многогранник группы $\mathcal{O}_r(L)$ для некоторой гиперболической решётки L , то легко выяснить, является ли она устойчиво рефлективной. Можно рассмотреть подгруппу Δ , порождённую неустойчивыми отражениями (будем называть такие отражения “плохими”) в стенках фундаментального многогранника группы $\mathcal{O}_r(L)$. Верна (см. лемму в §12 в [27]) следующая лемма.

Лемма 3.5.1. *Решётка L является устойчиво рефлективной тогда и только тогда, когда она рефлективна и группа Δ конечна.*

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$\mathcal{O}_r(L) = S(L) \rtimes \Delta.$$

Это утверждение доказывается аналогично лемме в §12 в работе [27]. ■

На самом деле, для доказательства того, что решётка не является устойчиво рефлективной, достаточно построить лишь часть фундаментального многогранника, в которой найдётся бесконечная подгруппа, порождённая плохими отражениями.

3.6. Доказательство нерелективности

3.6.1. Метод Бугаенко понижения размерности

В 1992 году В. О. Бугаенко в статье [17] доказал теорему, позволяющую доказывать нерелективность и релективность некоторых решеток с помощью повышения и понижения размерности соответственно.

Теорема 3.6.1. Пусть гиперболическая решетка L_1 разлагается в прямую сумму гиперболической решетки L_2 и эллиптической решетки M . Пусть также Λ_1 и Λ_2 — пространства Лобачевского, векторные модели которых построены в пространствах $V_1 = L_1 \otimes \mathbb{R}$ и $V_2 = L_2 \otimes \mathbb{R}$ соответственно. Тогда существует такой фундаментальный многогранник группы $\mathcal{O}_r(L_1)$, что его пересечение с подпространством Λ_2 пространства Λ_1 является фундаментальным многогранником P_2 для группы $\mathcal{O}_r(L_2)$.

Следствие 3.6.1. Если выполнено условие теоремы и L_1 — релективная гиперболическая решетка, то L_2 также является релективной гиперболической решеткой.

3.6.2. Метод бесконечной симметрии

В 1992 году В.О. Бугаенко доказал следующую лемму (см. [17]).

Лемма 3.6.1. Пусть H — дискретная подгруппа в $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$. Тогда группа H бесконечна тогда и только тогда, когда существует какая-то ее подгруппа, не имеющая неподвижных точек в \mathbb{H}^n .

Благодаря этому доказательство нерелективности сводится к следующему. Если нам известна уже хотя бы часть фундаментального многогранника P группы $\mathcal{O}_r(L)$, то мы можем найти несколько симметрий имеющейся схемы Кокстера.

В случае, если эти симметрии сохраняют решетку L , группа, ими порождённая, переводит многогранник P в себя. Если у этой группы нет неподвижных точек, тогда группа $\mathcal{O}_r(L)$ автоматически оказывается подгруппой бесконечного индекса в группе $\mathcal{O}'(L)$.

3.7. Результаты работы программы

Программа была протестирована на значительном количестве решёток ранга $n + 1 \leq 5$. Для $n = 2$ примеры брались из классификации релективных гиперболических решёток ранга 3 (В. В. Никулин, см. [51]), для $n = 3$ и $n = 4$ — из классификации максимальных релективных изотропных³ гиперболических решёток рангов

³Гиперболическая решётка L называется *изотропной*, если соответствующая ей квадратичная форма представляет нуль, и *анизотропной*, если не представляет.

L	# граней	t (сек)	L	# граней	t (сек)
$[-1] \oplus A_3$	4	0,7	$[-1] \oplus [1] \oplus A_2$	4	0,6
$[-2] \oplus A_3$	5	1,9	$[-2] \oplus [1] \oplus A_2$	6	0,8
$[-3] \oplus A_3$	5	1,0	$[-3] \oplus [1] \oplus A_2$	5	0,6
$[-4] \oplus A_3$	4	0,66	$[-4] \oplus [1] \oplus A_2$	5	1,02
$[-5] \oplus A_3$	6	1,56	$[-5] \oplus [1] \oplus A_2$	7	1,9
$[-6] \oplus A_3$	6	1,5	$[-6] \oplus [1] \oplus A_2$	8	1,2
$[-8] \oplus A_3$	7	1,72	$[-7] \oplus [1] \oplus A_2$	11	19,2
$[-9] \oplus A_3$	9	79,5	$[-8] \oplus [1] \oplus A_2$	6	1,02
$[-10] \oplus A_3$	12	1,72	$[-9] \oplus [1] \oplus A_2$	5	0,9
$[-12] \oplus A_3$	5	1.02	$[-10] \oplus [1] \oplus A_2$	11	11
$[-15] \oplus A_3$	12	28,7	$[-15] \oplus [1] \oplus A_2$	15	44
$U \oplus [36] \oplus [6]$	15	56,6	$[-30] \oplus [1] \oplus A_2$	20	36,6

Таблица 3.1: Решётки вида $[-k] \oplus A_3$, $[-k] \oplus [1] \oplus A_2$ для некоторых $k \leq 15$, а также $U \oplus [36] \oplus [6]$.

4 и 5 (Р. Шарлау и К. Вальхорн, см. [58]), а также для $n = 3$ из классификационных работ Э. Б. Винберга (см. [27]) и классификации устойчиво рефлексивных решеток (см. [10], [62] и [11]).

Во всех проведённых тестах результаты программы в точности совпадают с вычислениями, проведёнными некогда вручную.

Помимо этого, нами был найден ряд новых рефлексивных решёток. Некоторые результаты работы нашей программы представлены в таблице 3.1. Здесь $U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ обозначает стандартную двумерную гиперболическую решётку, а A_n — евклидову корневую решётку типа A_n . Все представленные в данной таблице решётки новые, за исключением решёток $[-1] \oplus A_3$ и $[-4] \oplus A_3$.

Также нами установлена рефлексивность решёток вида

$$[-2] \oplus A_2 \oplus \underbrace{[1] \oplus \dots \oplus [1]}_{n-1}$$

при $n \leq 6$.

На данный момент программа эффективно работает при $2 \leq n \leq 5$. Тем самым, она оказывается, к примеру, полезной в открытой проблеме классификации рефлексивных решёток в размерности $n = 3$ и уже успешно применялась автором диссертации для получения классификации устойчиво рефлексивных гиперболических решеток.

Алгоритм Винберга для гиперболических решёток над $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$

Поскольку мы исследовали также рефлексивность решёток над $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, то возникла необходимость написать программу для алгоритма Винберга над квадратичными полями. На текущий момент получилась программа для решёток над $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, которую нужно каждый раз немного править для каждой новой решётки. Она преду-

L	n	# граней	L	n	# граней
$[-\frac{3+\sqrt{13}}{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	2	4	$[-4 - \sqrt{17}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	2	4
$[-\frac{3+\sqrt{13}}{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	3	9	$[-4 - \sqrt{17}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	3	6
$[-\frac{3+\sqrt{13}}{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	4	40	$[-4 - \sqrt{17}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	4	20

Таблица 3.2: Унимодулярные решётки над $\mathbb{Q}[\sqrt{13}]$ и $\mathbb{Q}[\sqrt{17}]$.

L	n	# граней	L	n	# граней
$[-1 - \sqrt{5}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	2	4	$[-1 - \sqrt{5}] \oplus [2] \oplus \dots \oplus [2] \oplus [1]$	2	4
$[-1 - \sqrt{5}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	3	5	$[-1 - \sqrt{5}] \oplus [2] \oplus \dots \oplus [2] \oplus [1]$	3	5
$[-1 - \sqrt{5}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	4	7	$[-1 - \sqrt{5}] \oplus [2] \oplus \dots \oplus [2] \oplus [1]$	4	7
$[-1 - \sqrt{5}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	5	13	$[-1 - \sqrt{5}] \oplus [2] \oplus \dots \oplus [2] \oplus [1]$	5	13
$[-1 - \sqrt{5}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	6	18	$[-1 - \sqrt{5}] \oplus [2] \oplus \dots \oplus [2] \oplus [1]$	6	18

Таблица 3.3: Некоторые решётки над $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$.

сматривает возможность того, что исследуемая нами решетка оказалась с неортогональным базисом. Коды программы опубликованы в Интернете: <https://github.com/nvbogachev/VinAlg-Z-sqrt-2->

Для решеток с ортогональным базисом удобно использовать программу Р. Гульельметти, о которой упоминалось выше. Работа авторской программы была отчасти проверена на решётках таблицы 3.5.

В результате экспериментов с разными программами автору удалось получить новые серии рефлексивных гиперболических решеток различных рангов над различными квадратичными полями. Часть этих результатов получена совместно с А. А. Колпаковым в 2017-2018 гг.

Полученные результаты приведены в таблицах 3.2–3.5. В этих таблицах указывается сначала вид решетки сигнатуры $(n, 1)$, затем указана размерность n соответствующего пространства Лобачевского, а затем количество граней для фундаментального многогранника Кокстера соответствующей группы отражений.

L	n	# граней	L	n	# граней
$[-\sqrt{2}] \oplus [2 + \sqrt{2}] \oplus [1]$	2	4	$[-7 - 5\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	2	3
$[-\sqrt{2}] \oplus [2 + \sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	3	6	$[-7 - 5\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	3	5
$[-\sqrt{2}] \oplus [2 + \sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	4	10	$[-7 - 5\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	4	7
$[-\sqrt{2}] \oplus [2 + \sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	5	31	$[-7 - 5\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	5	11
			$[-7 - 5\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	6	45

Таблица 3.4: Некоторые решётки над $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

L	n	# граней	L	n	# граней
$[-\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus [1]$	2	4	$[-1 - \sqrt{2}] \oplus [2 + \sqrt{2}] \oplus [1]$	2	4
$[-\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	3	6	$[-1 - \sqrt{2}] \oplus [2 + \sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	3	6
$[-\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	4	8	$[-1 - \sqrt{2}] \oplus [2 + \sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	4	8
$[-\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	5	27	$[-1 - \sqrt{2}] \oplus [2 + \sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]$	5	27

Таблица 3.5: Некоторые решётки над $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

Глава 4

Устойчиво рефлексивные гиперболические \mathbb{Z} -решётки ранга 4

В данной главе мы приводим классификацию устойчиво рефлексивных гиперболических \mathbb{Z} -решёток ранга 4. Напомним, что в силу того, что числа 1 и 2 и есть все устойчивые числа в кольце \mathbb{Z} , группа $\mathcal{O}_r^{(1,2)}(L)$ совпадает с группой $S(L)$. Вместо устойчивой рефлексивности мы будем иногда говорить об (1,2)-рефлексивности. В данном случае эти понятия равнозначны.

4.1. Метод наиболее удаленного ребра

В этом параграфе мы описываем *метод наиболее удаленного ребра* (следуя работам [10], [62] и [11]), который эффективно применяется для классификации устойчиво рефлексивных решеток. Имеет место следующее следствие из теоремы 2.8.1.

Предложение 4.1.1. *Во всяком остроугольном компактном (то есть ограниченном) многограннике $P \subset \mathbb{H}^3$ существует ребро ширины не больше 7.*

Доказательство. Следуя Никулину (см. [49]) рассмотрим точку O внутри многогранника P . Пусть E — наиболее удалённое¹ от нее ребро, а F — грань, содержащая это ребро. Пусть E_1, E_2 — стороны этой грани, выходящие из разных концов ребра E .

Рассмотрим точку O' — проекцию точки O на грань F . Заметим, что O' — внутренняя точка грани F , так как иначе оказалось бы, что точка O лежит вне какого-то двугранного угла, примыкающего к грани F (поскольку многогранник P остроугольный). Далее, поскольку ребро E является наиболее удалённым ребром многогранника для точки O , то

$$\rho(O, E) \geq \rho(O, E_i), \quad i = 1, 2.$$

Отсюда и из теоремы о трех перпендикулярах следует, что расстояние от точки O' до ребра E не меньше расстояния от этой точки до остальных ребер грани F . Это означает, что к точке O' внутри многоугольника F применима теорема 2.8.1.

¹В остроугольном многограннике расстояние от внутренней точки до грани (любой размерности) равно расстоянию до подпространства этой грани.

Далее, пусть F_3, F_4 — грани (с единичными внешними нормальными u_3 и u_4 соответственно) многогранника P , обрамляющие ребро E и содержащие соответственно ребра E_1 и E_2 . Ясно, что расстояние между гранями не превосходит расстояния между их ребрами. Следовательно,

$$-(u_3, u_4) = \text{ch } \rho(F_3, F_4) \leq \text{ch } \rho(E_1, E_2) \leq 7.$$

■

Пусть теперь P является фундаментальным многогранником группы $\mathcal{O}_r(L)$ для анизотропной гиперболической решётки L ранга 4. Решётка L рефлексивна тогда и только тогда, когда многогранник P компактен (то есть ограничен).

Пусть E — ребро многогранника P ширины не больше, чем t . В силу предложения 4.1.1 мы можем обеспечить $t \leq 7$ (если возьмём наиболее удаленное ребро от некоторой фиксированной точки O внутри многогранника P). Пусть u_1, u_2 (соответственно u_3, u_4) — корни решётки L , ортогональные граням, в которых лежит ребро E (соответственно обрамляющим граням), и являющиеся внешними нормальными этих граней. Обозначим эти грани через F_1, F_2, F_3, F_4 соответственно. Если $(u_3, u_3) = k$, $(u_4, u_4) = l$, то

$$|(u_3, u_4)| \leq t\sqrt{kl} \leq 7\sqrt{kl}. \quad (4.1)$$

Поскольку мы решаем задачу классификации (1,2)-рефлексивных решёток, то нам надо рассматривать фундаментальные многогранники арифметических групп, порождённых 1- и 2-отражениями. В таком случае нам известны ограничения на все элементы матрицы $G(u_1, u_2, u_3, u_4)$, так как все грани F_i попарно пересекаются кроме, быть может, пары граней F_3 и F_4 . Но в случае, если F_3 и F_4 не пересекаются, расстояние между этими гранями ограничено благодаря неравенству (4.1). Таким образом, все элементы матрицы $G(u_1, u_2, u_3, u_4)$ целочисленны и ограничены, значит, имеется лишь конечное число возможных матриц Грама $G(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

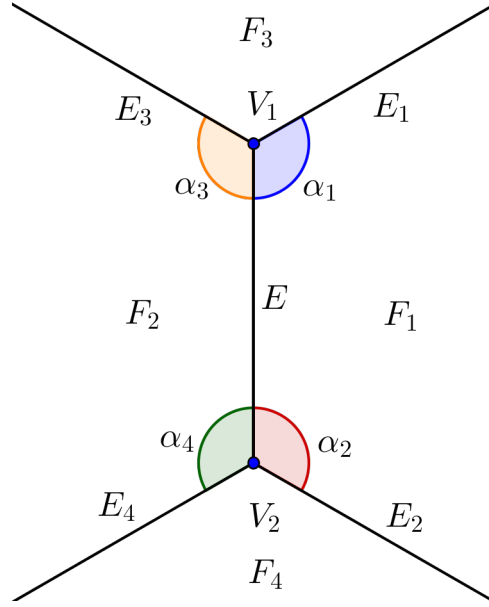
Векторы u_1, u_2, u_3, u_4 порождают некоторую подрешётку L' конечного индекса решётки L . Более точно, решётка L лежит между решётками L' и $(L')^*$, причём

$$[(L')^* : L']^2 = |d(L')|.$$

Отсюда вытекает, что $|d(L')|$ делится на $[L : L']^2$. Пользуясь этим, мы будем находить в каждом случае по решётке L' всевозможные ее расширения.

Для уменьшения перебора матриц $G(u_1, u_2, u_3, u_4)$ мы воспользуемся дополнительными соображениями, которые позволят нам получить более строгие ограничения на число $|(u_3, u_4)|$, чем в неравенстве (4.1).

Рис. 4.1: Наиболее удалённое ребро



4.1.1. Ограничения на длину ребра E для \mathbb{Q} -арифметических компактных многогранников Кокстера в \mathbb{H}^3

В этом подразделе можно считать, что P является компактным остроугольным многогранником в пространстве \mathbb{H}^3 .

Сохраняя предположения и обозначения предыдущих разделов, обозначим вершины наиболее удалённого от некоторой фиксированной точки O внутри многогранника P ребра E через V_1 и V_2 . Двугранные углы между гранями F_i и F_j обозначим через α_{ij} .

Пусть E_1 и E_3 — ребра многогранника P , выходящие из вершины V_1 , а ребра E_2 и E_4 — из V_2 , причем ребра E_1 и E_2 лежат в грани F_1 . Длину ребра E обозначим через a , а плоские углы между ребрами E_j и E — через α_j (см. рис. 1).

Теорема 4.1.1. *Длина наиболее удалённого ребра удовлетворяет неравенству:*

$$a < \operatorname{arsh} \left(\frac{\operatorname{th}(\ln(\operatorname{ctg}(\frac{\alpha_{12}}{4})))}{\operatorname{tg}(\frac{\alpha_3}{2})} \right) + \operatorname{arsh} \left(\frac{\operatorname{th}(\ln(\operatorname{ctg}(\frac{\alpha_{12}}{4})))}{\operatorname{tg}(\frac{\alpha_4}{2})} \right).$$

Доказательство. Обозначим через O_1 и O_2 ортогональные проекции точки O на грани F_1 и F_2 соответственно. По теореме о трех перпендикулярах обе эти точки при проекции на ребро E попадают в одну и ту же точку A , которая является проекцией точки O на это ребро. В силу остроугольности многогранника P точка A является внутренней точкой ребра E .

Таким образом, мы получаем плоский четырёхугольник AO_1OO_2 , в котором $\angle A = \alpha_{12}$ (двугранный угол между гранями F_1 и F_2), $\angle O_1 = \angle O_2 = \pi/2$, $AO_1 = a_1$, $AO_2 = a_2$ (см. рис. 2).

Рис. 2. Четырёхугольник AO_1OO_2

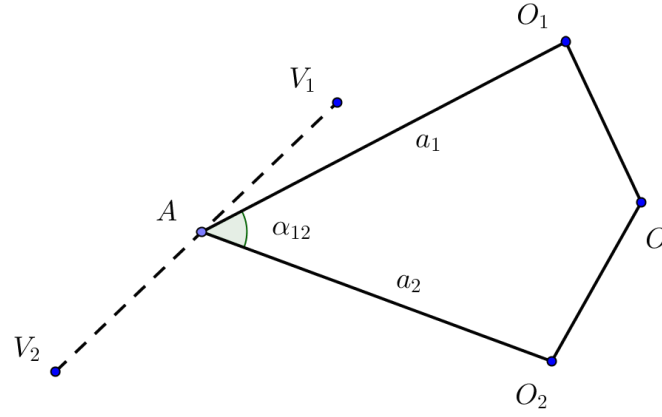
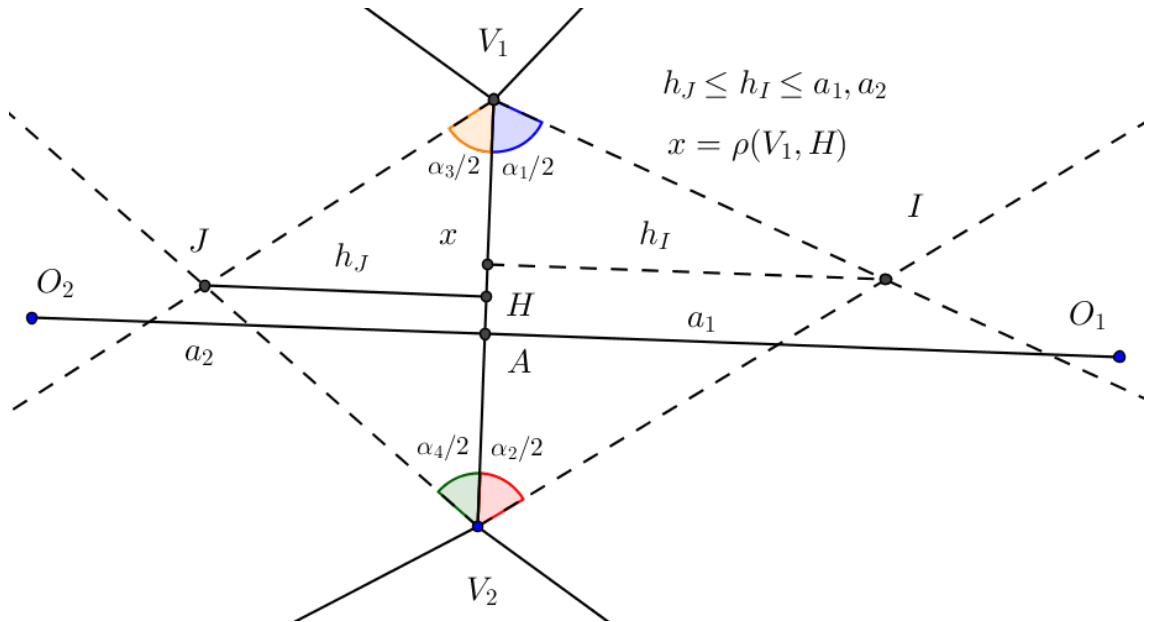


Рис. 3. Развёртка



В предельном случае, когда точка O является бесконечно удалённой, двугранный угол α_{12} составлен из так называемых углов параллельности $\Pi(a_1)$ и $\Pi(a_2)$. В нашем случае $O \in \mathbb{H}^3$, поэтому $\alpha_{12} < \Pi(a_1) + \Pi(a_2) = 2 \operatorname{arctg}(e^{-a_1}) + 2 \operatorname{arctg}(e^{-a_2})$.

Обозначим через V_1I , V_2I , V_1J , V_2J биссектрисы углов α_1 , α_2 , α_3 , α_4 соответственно. Пусть h_I и h_J — расстояния от точек I и J до ребра E . Без ограничения общности можно считать, что $h_J \leq h_I$.

Поскольку ребро E является наиболее удалённым ребром для точки O , то

$$\rho(O_1, E) \leq \rho(O_1, E_1), \rho(O_1, E_2), \quad \rho(O_2, E) \leq \rho(O_2, E_3), \rho(O_2, E_4). \quad (4.2)$$

Тогда ясно, что $h_J \leq h_I \leq a_1$, $h_J \leq a_2$, поскольку из неравенств (4.2) следует, что точки O_1 и O_2 лежат внутри плоских углов, вертикальных к углам V_1IV_2 и V_1JV_2 соответственно (развёртка граней вокруг ребра E представлена на рис. 3).

Получаем, что $\Pi(a_1), \Pi(a_2) \leq \Pi(h_J)$. Отсюда следует, что $\operatorname{arctg}(e^{-h_J}) > \alpha_{12}/4$. Таким образом,

$$h_J < \ln \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha_{12}}{4} \right) \right)$$

Введем обозначение $A_0 := \operatorname{th}(\ln(\operatorname{ctg}(\frac{\alpha_{12}}{4})))$, тогда $\operatorname{th} h_J < A_0$. Пусть H — проекция точки J на ребро E , и пусть $x = \rho(H, V_1)$.

Из прямоугольных треугольников $V_1 J H$ и $V_2 J H$ находим

$$\operatorname{th} h_J = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha_4}{2} \right) \operatorname{sh}(a - x) = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha_3}{2} \right) \operatorname{sh} x, \quad (4.3)$$

откуда получаем, что

$$\operatorname{sh} x = \frac{\operatorname{th} h_J}{\operatorname{tg}(\frac{\alpha_3}{2})} < \frac{A_0}{\operatorname{tg}(\frac{\alpha_3}{2})}, \quad \operatorname{sh}(a - x) < \frac{A_0}{\operatorname{tg}(\frac{\alpha_4}{2})}.$$

Следовательно,

$$a = x + (a - x) < \operatorname{arsh} \left(\frac{A_0}{\operatorname{tg}(\frac{\alpha_3}{2})} \right) + \operatorname{arsh} \left(\frac{A_0}{\operatorname{tg}(\frac{\alpha_4}{2})} \right),$$

что и требовалось доказать. ■

4.1.2. Доказательство теоремы 1.2.1 и ограничения на $|(u_3, u_4)|$

Пусть по-прежнему многогранник P является фундаментальным многогранником \mathbb{Q} -арифметической кокомпактной группы отражений в трёхмерном пространстве Лобачевского, а E — наиболее удалённое ребро многогранника P . Рассмотрим набор единичных внешних нормалей (u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) к граням F_1, F_2, F_3, F_4 . Заметим, что эта система векторов линейно независима. Её матрица Грама имеет вид

$$G(u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \alpha_{12} & -\cos \alpha_{13} & -\cos \alpha_{14} \\ -\cos \alpha_{12} & 1 & -\cos \alpha_{23} & -\cos \alpha_{24} \\ -\cos \alpha_{13} & -\cos \alpha_{23} & 1 & -T \\ -\cos \alpha_{14} & -\cos \alpha_{24} & -T & 1 \end{pmatrix},$$

где $T = |(u'_3, u'_4)| = \operatorname{ch} \rho(F_3, F_4)$ в случае, если грани F_3 и F_4 расходятся. (Напомним, что в противном случае $T \leq 1$, и такой случай рассматривать отдельно нет необходимости.)

Пусть $(u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*)$ — базис, двойственный базису (u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) . Тогда u_3^* и u_4^* задают в пространстве Лобачевского точки V_2 и V_1 соответственно. Действительно, соответствующий, например, точке $V_1 \in \mathbb{H}^3$ вектор v_1 пространства Минковского однозначно задаётся условиями $(v_1, u'_1) = (v_1, u'_2) = (v_1, u'_3) = 0$. Заметим, что этим же условиям удовлетворяет вектор u_4^* . Следовательно, векторы v_1 и u_4^* пропорциональны, и, значит,

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} \rho(V_1, V_2) = -(v_1, v_2) = -\frac{(u_3^*, u_4^*)}{\sqrt{(u_3^*, u_3^*)(u_4^*, u_4^*)}}.$$

Известно, что $G(u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*) = G(u_1', u_2', u_3', u_4')^{-1}$, откуда следует, что $\text{ch } a$ можно выразить через алгебраические дополнения G_{ij} элементов матрицы $G = G(u_1', u_2', u_3', u_4')$:

$$\text{ch } a = -\frac{(u_3^*, u_4^*)}{\sqrt{(u_3^*, u_3^*)(u_4^*, u_4^*)}} = \frac{G_{34}}{\sqrt{G_{33}G_{44}}}.$$

Обозначим правую часть неравенства из теоремы 4.1.1 через $F(\bar{\alpha})$, где

$$\bar{\alpha} = (\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{14}, \alpha_{24});$$

тогда из этой теоремы следует, что $\text{ch } a < \text{ch } F(\bar{\alpha})$. Отсюда имеем

$$\frac{G_{34}}{\sqrt{G_{33}G_{44}}} < \text{ch } F(\bar{\alpha}). \quad (4.4)$$

Для каждого набора $\bar{\alpha}$ мы таким образом получаем линейное неравенство относительно числа T .

Лемма 4.1.1. (i) $\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{13} > \pi$, $\alpha_{12} + \alpha_{24} + \alpha_{14} > \pi$;

(ii)

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \frac{\cos \alpha_{23} + \cos \alpha_{12} \cdot \cos \alpha_{13}}{\sin \alpha_{12} \cdot \sin \alpha_{13}}, & \cos \alpha_2 &= \frac{\cos \alpha_{24} + \cos \alpha_{12} \cdot \cos \alpha_{14}}{\sin \alpha_{12} \cdot \sin \alpha_{14}} \\ \cos \alpha_3 &= \frac{\cos \alpha_{13} + \cos \alpha_{12} \cdot \cos \alpha_{23}}{\sin \alpha_{12} \cdot \sin \alpha_{23}}, & \cos \alpha_4 &= \frac{\cos \alpha_{14} + \cos \alpha_{12} \cdot \cos \alpha_{24}}{\sin \alpha_{12} \cdot \sin \alpha_{24}} \end{aligned}$$

Доказательство. Для доказательства обоих пунктов леммы пересечём каждый из трехгранных углов с вершинами V_1 и V_2 со сферами с центрами в этих точках соответственно. В пересечении получатся сферические треугольники, углами которых являются двугранные углы α_{ij} , а длинами сторон являются плоские углы α_k . Отсюда сразу вытекает пункт (i), а пункт (ii) вытекает из двойственного правила косинусов в этих треугольниках (см., например, [26], стр. 71). ■

Известно, что двугранные углы фундаментального многогранника арифметической группы отражений с полем определения \mathbb{Q} могут быть равны только $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$ или $\pi/6$.

Нетрудно убедиться, что с учетом пункта (i) леммы 4.1.1 имеется ровно 44 различных (с точностью до нумерации углов) наборов $\bar{\alpha}$. Для каждого такого набора $\bar{\alpha}$ неравенство (4.4) даёт какую-то оценку $T < t_{\bar{\alpha}}$.

Для решения 44 линейных неравенств была составлена программа в системе компьютерной алгебры Sage², код которой доступен в Интернете³.

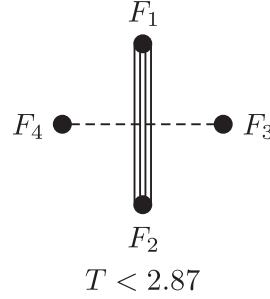
Полученные результаты представлены ниже в таблице 1 в виде набора схем Кокстера для граней F_1, F_2, F_3, F_4 . Грани F_3 и F_4 будем соединять пунктирной линией, которая будет подписана соответствующей найденной оценкой: $T < t_{\bar{\alpha}}$.

² The Sage Developers, *the Sage Mathematics Software System (Version 7.6)*, SageMath, <http://www.sagemath.org>, 2017

³ N. Bogachev, *Method of the outermost edge/bounds*, <https://github.com/nvbogachev/OuterMostEdge/blob/master/bounds.sage/>, 2017

Пример того, как выглядит схема ребра с $\tilde{\alpha} = (\pi/6, \pi/2, \pi/2, \pi/2, \pi/2)$ см. на рис. 2. На этом рисунке видим, что $t_{(\pi/6, \pi/2, \pi/2, \pi/2, \pi/2)} = 2.87$.

Рис. 4. Схема Кокстера наиболее удаленного ребра с углами $(\pi/6, \pi/2, \pi/2, \pi/2, \pi/2)$



Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 4.1.2. *Фундаментальный многогранник всякой \mathbb{Q} -арифметической кокомпактной группы отражений в \mathbb{H}^3 имеет ребро ширины меньше, чем $t_{\tilde{\alpha}}$, где $t_{\tilde{\alpha}}$ — число (зависящее от набора $\tilde{\alpha}$), указанное в таблице 1. При этом*

$$\max_{\tilde{\alpha}} \{t_{\tilde{\alpha}}\} = t_{(\pi/4, \pi/2, \pi/3, \pi/3, \pi/2)} = 4,14.$$

Числа, указанные в таблице 1, были вычислены на компьютере с точностью до восьми знаков после запятой. В таблице указано их округление вверх до второго знака после запятой, что для наших целей вполне достаточно.

Пусть E — выбранное по теореме 4.1.2 ребро минимальности $t_{\tilde{\alpha}}$ для некоторого $\tilde{\alpha}$ в фундаментальном многограннике P группы $\mathcal{O}_r(L)$, и $(u_3, u_3) = k$, $(u_4, u_4) = l$. Тогда

$$|(u_3, u_4)| \leq t_{\tilde{\alpha}} \cdot \sqrt{kl}. \quad (4.5)$$

Заметим, что данная оценка намного лучше оценки (4.1).

4.2. Короткий список решёток-кандидатов

4.2.1. План нахождения короткого списка решёток-кандидатов

Пусть P — фундаментальный многогранник группы $\mathcal{O}_r^{(1,2)}(L)$ для анизотропной гиперболической решётки L ранга 4. Для рефлексивности этой решётки необходимо и достаточно, чтобы P был компактен. Как было доказано в теореме 4.1.2, во всяком таком многограннике существует ребро E ширины меньше $t_{\tilde{\alpha}}$, где $t_{\tilde{\alpha}} \leq 4,14$ — число, зависящее от набора $\tilde{\alpha}$ двугранных углов вокруг этого ребра.

Пусть u_1, u_2, u_3, u_4 — корни решётки L , являющиеся внешними нормальными граней F_1, F_2, F_3, F_4 соответственно. Эти корни порождают некоторую подрешётку

$$L' = [G(u_1, u_2, u_3, u_4)] \subset L.$$

ТАБЛИЦА 1. Схемы Кокстера наиболее удалённого ребра

Замечание: Нумерация граней на каждой диаграмме такая же, как на рисунке 4.

$T < 2$	$T < 2.5$	$T < 2.71$	$T < 2.87$	$T < 1.74$	$T < 1.42$
$T < 1$	$T < 1.25$	$T < 2.11$	$T < 2.15$	$T < 0.88$	$T < 1.72$
$T < 1.82$	$T < 0.45$	$T < 1.22$	$T < 0.5$	$T < 1.82$	$T < 0.1$
$T < 1.29$	$T < -0.25$	$T < 1.34$	$T < 1.62$	$T < 1.73$	$T < 1.17$
$T < 0.65$	$T < 1.22$	$T < 1.26$	$T < 0.71$	$T < 0.79$	$T < 0.3$
$T < 2.58$	$T < 2.33$	$T < 2.34$	$T < 3.26$	$T < 1.54$	$T < 3.08$
$T < 1.95$	$T < 2.88$	$T < 3.14$	$T < 3.19$	$T < 4.14$	
$T < 1.87$	$T < 1.41$	$T < 1.45$			

Заметим, что элементы матрицы Грама $G(u_1, u_2, u_3, u_4)$ могут принимать конечное число различных значений. А именно, диагональные элементы равны 1 или 2, а модули всех остальных элементов g_{ij} должны быть строго меньше $\sqrt{g_{ii}g_{jj}}$, за исключением элемента $g_{34} = (u_3, u_4)$, модуль которого ограничен числом $t_{\tilde{\alpha}}\sqrt{(u_3, u_3)(u_4, u_4)}$.

Таким образом мы получим конечный список матриц $G(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Из них мы выберем те, которые соответствуют анизотропным решёткам, а затем найдём все возможные их расширения.

Для выбора анизотропных решёток мы используем компьютерную программу⁴, основанную на результатах и методах, сформулированных в параграфе 2.5 настоящей работы (более точно, программа реализует теорему 2.5.1).

Список найденных анизотропных решёток мы разобьём на классы изоморфности и оставим только по одному представителю каждого класса, после чего останется уже существенно более короткий список анизотропных попарно не изоморфных решёток. Этот шаг тоже реализуется программой, использующей принцип Хассе (теорема 2.5.3).

После этого мы находим все расширения конечного индекса полученных решёток и исследуем полученный список решёток-кандидатов на (1,2)-рефлективность с помощью методов, изложенных в главе 3.

4.2.2. Короткий список решёток-кандидатов

Итоговая программа, которая создает список чисел $t_{\tilde{\alpha}}$, а затем, используя этот список, выводит все матрицы Грама $G(u_1, u_2, u_3, u_4)$, также доступна в Интернете⁵.

В результате мы получаем на выходе матрицы $G_1 — G_7$, для каждой из которых находим все соответствующие ей расширения.

Каждой матрице Грама G_k в наших обозначениях соответствует решётка L_k , которая может иметь ещё какие-то расширения. Для каждой новой анизотропной решётки (не изоморфной никакой из предыдущих решёток) мы будем вводить обозначение $L(k)$, где число k обозначает её номер.

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, L_1 \simeq [-7] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1] := L(1);$$

⁴N. Bogachev, *Method of the outermost edge/is_anisotropic*, https://github.com/nvbogachev/OuterMostEdge/blob/master/is_anisotropic, 2017

⁵N. Bogachev, *Method of the outermost edge/CandidatesFor12Reflectivity*, https://github.com/nvbogachev/OuterMostEdge/blob/master/Is_equival, 2017

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}, L_2 \simeq [-15] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1] := L(2);$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}, L_3 \simeq [-3] \oplus [5] \oplus [1] \oplus [1] := L(3);$$

$$G_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, L_4 \simeq [-23] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1] := L(4);$$

$$G_5 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}, L_5 \simeq [-55] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1] := L(5);$$

$$G_6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, L_6 = [G_6] := L(6);$$

$$G_7 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, L_7 = [G_7] := L(7).$$

Решётки $L(1) - L(5)$ являются максимальными. Решётка $L(6)$ имеет единственное расширение индекса 2, порождённое векторами

$$\left\{ \frac{e_1 + e_2}{2}, \frac{e_1 - e_2}{2}, e_3, e_4 \right\}, \quad (4.6)$$

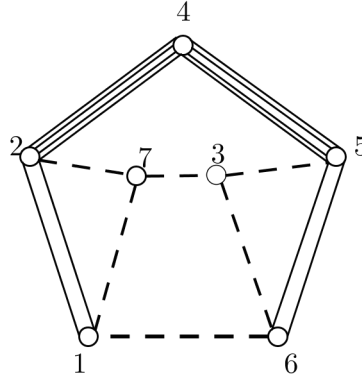
где $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ — базис решётки $L(6)$. Матрица Грама системы (4.6) эквивалентна матрице $\text{diag}(-7, 1, 1, 1)$, откуда следует, что единственным расширением в этом случае будет решётка $L(1)$. Аналогично, для решётки $L(7)$ мы находим единственное расширение индекса 2, порождённое векторами

$$\left\{ \frac{e_1 + e_2}{2}, \frac{e_1 - e_2}{2}, e_3, e_4 \right\} \quad (4.7)$$

и изоморфное $L(2)$ (здесь $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ — базис решётки $L(7)$).

Отметим, что решётки $L(6)$ и $L(7)$ являются чётными подрешётками решёток $L(1)$ и $L(2)$ соответственно.

Рис. 5. Схема Кокстера фундаментального многогранника для решётки $L(3)$



4.3. Исследование на (1,2)-рефлексивность и доказательство теоремы 1.2.2

Нам остаётся исследовать на (1,2)-рефлексивность совсем небольшое количество решёток. Решётки $L(1)$, $L(2)$, $L(6)$ и $L(7)$ являются 2-рефлексивными (см. [27]), а, значит, и (1,2)-рефлексивными.

Предложение 4.3.1. Решётка $L(3) = [-3] \oplus [5] \oplus [1] \oplus [1]$ рефлексивна, но не (1,2)-рефлексивна.

Доказательство. Для решётки $L(3)$ мы применим алгоритм Винберга. Программа находит 7 корней:

$$a_1 = (0; 0, 0, -1), \quad (a_1, a_1) = 1;$$

$$a_2 = (0; 0, -1, 1), \quad (a_2, a_2) = 2;$$

$$a_3 = (0; -1, 0, 0), \quad (a_3, a_3) = 5;$$

$$a_4 = (1; 0, 3, 0), \quad (a_4, a_4) = 6;$$

$$a_5 = (1; 1, 0, 0), \quad (a_5, a_5) = 2;$$

$$a_6 = (2; 1, 2, 2), \quad (a_6, a_6) = 1;$$

$$a_7 = (10; 6, 10, 5), \quad (a_7, a_7) = 5.$$

Матрица Грама этих корней имеет вид:

$$G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -5 \\ -1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -5 & -5 & -30 \\ 0 & -3 & 0 & 6 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & -30 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Схема Кокстера, соответствующая этой матрице Грама представлена на рис. 5.

Она задает трёхмерный многогранник Кокстера конечного объёма. В этой схеме нет параболических подсхем, поэтому данный многогранник будет ограниченным (впрочем за нас это проверяет программа *CoxIter*, написанная и опубликованная Р. Гульельметти). Заметим, что корни a_3, a_4, a_7 задают группу, порождённую “плохими” отражениями, она бесконечна, поскольку соответствующая подсхема содержит пунктирное ребро. Следовательно, решётка $L(3)$ рефлексивна, но не (1,2)-рефлексивна. ■

Нерефлексивность решётки $L(4)$ была доказана в [41] (см. также диссертацию [44]).

Предложение 4.3.2. Решётка $L(5) = [-55] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1]$ не является (1,2)-рефлексивной.

Доказательство. Оказывается, что для проверки на (1,2)-рефлексивность нет необходимости доводить до конца алгоритм Винберга. Используемая нами программа находит первые 8 корней

$$a_1 = (0, -1, -1, 0), \quad (a_1, a_1) = 2;$$

$$a_2 = (0, 0, 1, -1), \quad (a_2, a_2) = 2;$$

$$a_3 = (0, 1, 0, 0), \quad (a_3, a_3) = 1;$$

$$a_4 = (2, 0, 11, 11), \quad (a_4, a_4) = 22;$$

$$a_5 = (1, -4, 4, 5), \quad (a_5, a_5) = 2;$$

$$a_6 = (1, -2, 2, 7), \quad (a_6, a_6) = 2;$$

$$a_7 = (2, -5, 10, 10), \quad (a_7, a_7) = 5;$$

$$a_8 = (2, 0, 0, 15), \quad (a_8, a_8) = 5;$$

матрица Грама которых имеет вид

$$G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -11 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -5 & 0 & -15 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & -5 & 0 \\ -11 & 0 & 0 & 22 & -11 & -11 & 0 & -55 \\ 0 & -1 & -4 & -11 & 2 & -4 & 0 & -35 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 2 & -10 & -5 \\ -5 & 0 & -5 & 0 & 0 & -10 & 5 & -70 \\ 0 & -15 & 0 & -55 & -35 & -5 & -70 & 5 \end{pmatrix}.$$

Достаточно рассмотреть подгруппу, порождённую “плохими” отражениями относительно зеркал H_{a_4}, H_{a_7} и H_{a_8} . Поскольку эти зеркала расходятся, эта подгруппа бесконечна. ■

Таким образом, из выбранных нами в процессе решения задачи семи анизотропных решёток-кандидатов только четыре оказались (1,2)-рефлексивными. Это решётки $L(1), L(2), L(6), L(7)$. Тем самым теорема 1.2.2 доказана.

Глава 5

Устойчиво рефлексивные гиперболические решётки ранга 4 над $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$

5.1. Метод наиболее удалённого ребра

Метод классификации устойчиво рефлексивных гиперболических решеток ранга 4 над $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ аналогичен тому, что мы воспроизвели для классификации решёток над \mathbb{Z} .

Теорема 5.1.1. *Фундаментальный многогранник всякой $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ -арифметической компактной группы отражений в \mathbb{H}^3 имеет ребро ширины меньше, чем $t_{\tilde{\alpha}}$, где $t_{\tilde{\alpha}}$ — число, зависящее от набора $\tilde{\alpha}$. При этом*

$$\max_{\tilde{\alpha}} \{t_{\tilde{\alpha}}\} = t_{(\pi/4, \pi/2, \pi/3, \pi/3, \pi/2)} = 4,14.$$

Доказательство. Известно, что двугранные углы фундаментального многогранника арифметической группы отражений с полем определения $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ могут быть равны только $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$, $\pi/6$ или $\pi/8$.

Нетрудно убедиться, что с учетом пункта (i) леммы 4.1.1 имеется ровно 56 различных (с точностью до нумерации углов) наборов $\tilde{\alpha}$. Для каждого такого набора $\tilde{\alpha}$ неравенство (4.4) даёт какую-то оценку $T < t_{\tilde{\alpha}}$.

Для решения 56 линейных неравенств была составлена программа в системе компьютерной алгебры Sage¹, код которой доступен в Интернете².

■

Числа $t_{\tilde{\alpha}}$ были вычислены на компьютере с точностью до восьми знаков после запятой. В случае необходимости программа выводит их округление вверх до второго знака после запятой, что для наших целей вполне достаточно.

¹ The Sage Developers, *the Sage Mathematics Software System (Version 7.6)*, SageMath, <http://www.sagemath.org>, 2017

² N. Bogachev, *Method of the outermost edge/bounds*, <https://github.com/nvbogachev/OuterMostEdge/blob/master/bounds.sage/>, 2017

5.2. Короткий список решёток-кандидатов

5.2.1. План нахождения короткого списка решёток-кандидатов

Пусть P — фундаментальный многогранник группы $S(L)$ для гиперболической решётки L ранга 4 над $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Для устойчивой рефлексивности этой решётки необходимо и достаточно, чтобы P был компактен. Как было доказано в теореме 5.1.1, во всяком таком многограннике существует ребро E ширины меньше $t_{\tilde{\alpha}}$, где $t_{\tilde{\alpha}} \leq 4,14$ — число, зависящее от набора $\tilde{\alpha}$ двугранных углов вокруг этого ребра.

Пусть u_1, u_2, u_3, u_4 — корни решётки L , являющиеся внешними нормальными граней F_1, F_2, F_3, F_4 соответственно. Эти корни порождают некоторую подрешётку

$$L' = [G(u_1, u_2, u_3, u_4)] \subset L.$$

Заметим, что элементы матрицы Грама $G(u_1, u_2, u_3, u_4)$ могут принимать конечное число различных значений. А именно, диагональные элементы равны 1, 2 или $2 + \sqrt{2}$, а модули всех остальных элементов g_{ij} должны быть строго меньше $\sqrt{g_{ii}g_{jj}}$, за исключением элемента $g_{34} = (u_3, u_4)$, модуль которого ограничен числом $t_{\tilde{\alpha}}\sqrt{(u_3, u_3)(u_4, u_4)}$.

Таким образом мы получим конечный список матриц $G(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Список найденных решёток мы разобьём на классы изоморфности и оставим только по одному представителю каждого класса, после чего останется уже существенно более короткий список анизотропных попарно не изоморфных решёток.

После этого мы находим все расширения конечного индекса полученных решёток и исследуем полученный список решёток-кандидатов на устойчивую рефлексивность с помощью методов, изложенных в главе 3.

5.2.2. Короткий список решёток-кандидатов

Итоговая программа, которая создает список чисел $t_{\tilde{\alpha}}$, а затем, используя этот список, выводит все матрицы Грама $G(u_1, u_2, u_3, u_4)$, также доступна в Интернете³.

В результате мы получаем на выходе 65 матриц. Находя все максимальные решетки и оставляя лишь по одному представителю каждого класса эквивалентности, мы получаем уже список из всего лишь 15 матриц.

Каждой матрице Грама G_k в наших обозначениях соответствует решётка L_k , которая может иметь ещё какие-то расширения. Для каждой новой решётки (не изоморфной никакой из предыдущих решёток) мы будем вводить обозначение $L(k)$, где число k обозначает её номер.

³N. Bogachev, *Method of the outermost edge/CandidatesFor12Reflectivity*, https://github.com/nvbogachev/OuterMostEdge/blob/master/Is_equival, 2017

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 - \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, L_1 \simeq [-2(1 + \sqrt{2})] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1];$$

Её единственным расширением является надрешётка „индекса $\sqrt{2}$ “

$$L(1) := [-(1 + \sqrt{2})] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1].$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 - \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}, L_2 \simeq [-(1 + 2\sqrt{2})] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1] := L(2);$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 - \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}, L_3 \simeq \begin{bmatrix} 2 & -1 - \sqrt{2} \\ -1 - \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} \oplus [1] \oplus [1] := L(3);$$

$$G_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 - 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 - 2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}, L_4 \simeq \begin{bmatrix} 2 & -1 - 2\sqrt{2} \\ -1 - 2\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} \oplus [1] \oplus [1] := L(4);$$

$$G_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 - \sqrt{2} \\ 0 & -1 & -1 - \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}, L_5 \simeq [-5 - 4\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1] := L(5);$$

$$G_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 - 2\sqrt{2} \\ 0 & -1 & -1 - 2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}, L_6 \simeq [-11 - 8\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1] := L(6);$$

$$G_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 - 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -2 - 2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}, L_7 = [G_7];$$

Её единственным расширением является надрешётка „индекса $\sqrt{2}$ “

$$L(7) := [-\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1].$$

$$G_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -\sqrt{2} \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}, L_8 = [G_8];$$

Её единственным расширением является надрешётка „индекса $\sqrt{2}$ “

$$L(8) := \begin{bmatrix} 2 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 2 & \sqrt{2}-1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2}-1 & 2-\sqrt{2} \end{bmatrix} \oplus [1].$$

$$G_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -\sqrt{2}-1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2}-1 & 2 \end{pmatrix}, L_9 = [G_9];$$

Её единственным расширением является надрешётка „индекса $\sqrt{2}$ “

$$L(9) := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \oplus [1].$$

$$G_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -\sqrt{2}-2 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2}-2 & 2 \end{pmatrix}, L_{10} = [G_{10}];$$

Её единственным расширением является надрешётка „индекса $\sqrt{2}$ “

$$L(10) := \begin{bmatrix} 2 & -1-\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} \oplus [2+\sqrt{2}] \oplus [1].$$

$$G_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -\sqrt{2}-1 \\ -1 & -1 & -\sqrt{2}-1 & 2 \end{pmatrix}, L_{11} \simeq [-7-6\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1] := L(11);$$

$$G_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -2\sqrt{2}-1 \\ -1 & -1 & -2\sqrt{2}-1 & 2 \end{pmatrix}, L_{12} = [G_{12}];$$

Её единственным расширением является надрешётка индекса 2

$$L(12) := [-7 - 5\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1].$$

$$G_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -\sqrt{2} \\ -1 & -1 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}, L_{13} = [G_{13}] := L(13);$$

$$G_{14} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -\sqrt{2} - 1 \\ -1 & -1 & -\sqrt{2} - 1 & 2 \end{pmatrix}, L_{14} = [G_{14}] := L(14);$$

$$G_{15} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & -1 & 2 & -\sqrt{2} - 1 \\ -1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} - 1 & 2 \end{pmatrix}, L_{15} = [G_{15}] := L(15).$$

5.3. Исследование на устойчивую рефлексивность

Таким образом, у нас остается 15 решёток-кандидатов $L(1)$ – $L(15)$. Во всех случаях для каждой решетки $L(k)$ мы используем алгоритм Винберга, который строит фундаментальный многогранник для группы $\mathcal{O}_r(L(k))$, а затем мы проверяем выполнение условия леммы 3.5.1. Более подробно об этом см. подраздел 3.5.2.

5.3.1. Решётки с ортогональным базисом

Сначала мы исследуем решётки с ортогональным базисом. Для этого мы используем реализацию алгоритма Винберга AlVin, написанную Р. Гульельметти. (Его программа написана для решеток, задаваемых диагональными квадратичными формами с коэффициентами, свободными от квадратов.)

Предложение 5.3.1. *Решётка $L(1) = [-(1 + \sqrt{2})] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1]$ устойчиво рефлексивна.*

Доказательство. Для решётки $L(1)$ мы применяем алгоритм Винберга. Программа находит 5 корней:

$$\begin{aligned} a_1 &= (0, -1, 1, 0), \\ a_2 &= (0, 0, -1, 1), \\ a_3 &= (0, 0, 0, -1), \\ a_4 &= (1, 1 + \sqrt{2}, 0, 0), \end{aligned}$$

$$a_5 = (1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}).$$

Матрица Грама этих корней имеет вид:

$$G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -\sqrt{2}-1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -\sqrt{2}-1 \\ -\sqrt{2}-1 & 0 & 0 & \sqrt{2}+2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}-1 & 0 & \sqrt{2}+2 \end{pmatrix}$$

Она соответствует компактному трёхмерному многограннику Кокстера. По матрице Грама заметно, что группа, порождённая “плохими” отражениями, тривиальна. Следовательно, решётка $L(1)$ рефлексивна и устойчиво рефлексивна. ■

Предложение 5.3.2. Решётка $L(2) = [-(1 + 2\sqrt{2})] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1]$ устойчиво рефлексивна.

Доказательство. Для решётки $L(2)$ мы применяем алгоритм Винберга. Программа находит 6 корней:

$$a_1 = (0, -1, 1, 0),$$

$$a_2 = (0, 0, -1, 1),$$

$$a_3 = (0, 0, 0, -1),$$

$$a_4 = (1, 1 + \sqrt{2}, 0, 0),$$

$$a_5 = (1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, 1).$$

$$a_6 = (1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}).$$

Матрица Грама этих корней имеет вид:

$$G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -\sqrt{2}-1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & -\sqrt{2}-1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -\sqrt{2}-1 \\ -\sqrt{2}-1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -\sqrt{2}-1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -\sqrt{2}-1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Она соответствует компактному трёхмерному многограннику Кокстера. По матрице Грама заметно, что группа, порождённая “плохими” отражениями, тривиальна. Следовательно, решётка $L(2)$ рефлексивна и устойчиво рефлексивна. ■

Предложение 5.3.3. Решётка $L(5) = [-(5 + 4\sqrt{2})] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1]$ устойчиво рефлексивна.

Доказательство. Для решётки $L(5)$ мы применяем алгоритм Винберга. Программа находит 5 корней:

$$\begin{aligned} a_1 &= (0, -1, 1, 0), \\ a_2 &= (0, 0, -1, 1), \\ a_3 &= (0, 0, 0, -1), \\ a_4 &= (1, 3 + \sqrt{2}, 0, 0), \\ a_5 &= (1, 1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 1). \end{aligned}$$

Матрица Грама этих корней имеет вид:

$$G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -\sqrt{2} - 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -\sqrt{2} - 3 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} + 6 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Она соответствует компактному трёхмерному многограннику Кокстера. По матрице Грама заметно, что группа, порождённая “плохими” отражениями, тривиальна. Следовательно, решётка $L(2)$ рефлексивна и устойчиво рефлексивна. ■

Предложение 5.3.4. Решётка $L(6) = [-(11 + 8\sqrt{2})] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1]$ устойчиво рефлексивна.

Доказательство. Для решётки $L(6)$ мы применяем алгоритм Винберга. Программа находит 17 корней:

$$\begin{aligned} a_1 &= (0, -1, 1, 0), \\ a_2 &= (0, 0, -1, 1), \\ a_3 &= (0, 0, 0, -1), \\ a_4 &= (1, 2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, 1), \\ a_5 &= (1, 2 + 2 \cdot \sqrt{2}, 1, 0), \\ a_6 &= (1, 2 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}), \\ a_7 &= (2 + \sqrt{2}, 7 + 5 \cdot \sqrt{2}, 3 + 3 \cdot \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}), \\ a_8 &= (1 + 2 \cdot \sqrt{2}, 8 + 5 \cdot \sqrt{2}, 4 + 3 \cdot \sqrt{2}, 3 + 2 \cdot \sqrt{2}), \\ a_9 &= (1 + 2 \cdot \sqrt{2}, 8 + 6 \cdot \sqrt{2}, 3 + 2 \cdot \sqrt{2}, 2 + 2 \cdot \sqrt{2}), \\ a_{10} &= (2 + 3 \cdot \sqrt{2}, 13 + 9 \cdot \sqrt{2}, 7 + 5 \cdot \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}), \\ a_{11} &= (4 + 2 \cdot \sqrt{2}, 13 + 10 \cdot \sqrt{2}, 9 + 6 \cdot \sqrt{2}, 0), \\ a_{12} &= (4 + 4 \cdot \sqrt{2}, 19 + 14 \cdot \sqrt{2}, 9 + 6 \cdot \sqrt{2}, 8 + 6 \cdot \sqrt{2}), \\ a_{13} &= (4 + 4 \cdot \sqrt{2}, 20 + 14 \cdot \sqrt{2}, 11 + 8 \cdot \sqrt{2}, 1), \\ a_{14} &= (4 + 2 \cdot \sqrt{2}, 14 + 10 \cdot \sqrt{2}, 6 + 4 \cdot \sqrt{2}, 5 + 4 \cdot \sqrt{2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{15} &= (4 + 3 \cdot \sqrt{2}, 17 + 12 \cdot \sqrt{2}, 8 + 5 \cdot \sqrt{2}, 6 + 4 \cdot \sqrt{2}), \\
a_{16} &= (4 + 3 \cdot \sqrt{2}, 17 + 12 \cdot \sqrt{2}, 9 + 7 \cdot \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}), \\
a_{17} &= (5 + 4 \cdot \sqrt{2}, 22 + 15 \cdot \sqrt{2}, 13 + 9 \cdot \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Матрица Грамы этого набора корней соответствует компактному трёхмерному многограннику Кокстера.

Диагональ этой матрицы имеет вид:

$$[2, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1]$$

По ней видно, что группа, порождённая “плохими” отражениями, тривиальна. Следовательно, решётка $L(6)$ рефлексивна и устойчиво рефлексивна. ■

Предложение 5.3.5. Решётка $L(7) = [-\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1]$ устойчиво рефлексивна.

Доказательство. Для решётки $L(6)$ мы применяем алгоритм Винберга. Программа находит 6 корней:

$$\begin{aligned}
a_1 &= (0, -1, 1, 0), \\
a_2 &= (0, 0, -1, 1), \\
a_3 &= (0, 0, 0, -1), \\
a_4 &= (1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 0), \\
a_5 &= (1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, 0, 0), \\
a_6 &= (2 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Матрица Грама этих корней имеет вид:

$$G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -\sqrt{2} - 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -\sqrt{2} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -\sqrt{2} - 1 \\ 0 & -\sqrt{2} - 1 & 0 & \sqrt{2} + 2 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} - 2 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} + 2 & -\sqrt{2} - 2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} - 1 & 0 & -\sqrt{2} - 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Она соответствует компактному трёхмерному многограннику Кокстера. По матрице Грама заметно, что группа, порождённая “плохими” отражениями, тривиальна. Следовательно, решётка $L(6)$ рефлексивна и устойчиво рефлексивна. ■

Предложение 5.3.6. Решётка $L(11) = [-7 - 6\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1]$ является рефлексивной, но не устойчиво рефлексивной.

Доказательство. Для решётки $L(11)$ мы применяем алгоритм Винберга. Программа находит 10 корней:

$$\begin{aligned}
a_1 &= (0, -1, 1, 0), \\
a_2 &= (0, 0, -1, 1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 &= (0, 0, 0, -1), \\
a_4 &= (1, \sqrt{2} + 1, \sqrt{2} + 1, \sqrt{2} + 1), \\
a_5 &= (1, \sqrt{2} + 2, \sqrt{2} + 1, 0), \\
a_6 &= (2\sqrt{2} + 1, 6\sqrt{2} + 7, 0, 0), \\
a_7 &= (\sqrt{2} + 1, 3\sqrt{2} + 5, \sqrt{2} + 1, 1), \\
a_8 &= (\sqrt{2} + 1, 3\sqrt{2} + 4, \sqrt{2} + 2, \sqrt{2} + 2), \\
a_9 &= (4\sqrt{2} + 6, 13\sqrt{2} + 19, 7\sqrt{2} + 12, 6\sqrt{2} + 7), \\
a_{10} &= (2\sqrt{2} + 2, 6\sqrt{2} + 9, 2\sqrt{2} + 3, 2\sqrt{2} + 2).
\end{aligned}$$

Матрица Грама этого набора корней соответствует компактному трёхмерному многограннику Кокстера. Диагональ этой матрицы имеет вид

$$\{2, 2, 1, 2, 2, 2\sqrt{2} + 10, 2, 1, 2\sqrt{2} + 10\}.$$

Остается заметить, что группа, порождённая “плохими” отражениями в зеркалах H_{a_6} и $H_{a_{10}}$, бесконечна, поскольку в схеме Кокстера соответствующие вершины соединяются пунктирным ребром. Следовательно, решётка $L(11)$ рефлексивна, но не устойчиво рефлексивна. ■

Предложение 5.3.7. Решётка $L(12) = [-7 - 5\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1]$ устойчиво рефлексивна.

Доказательство. Для решётки $L(12)$ мы применяем алгоритм Винберга. Программа находит 5 корней:

$$\begin{aligned}
a_1 &= (0, -1, 1, 0), \\
a_2 &= (0, 0, -1, 1), \\
a_3 &= (0, 0, 0, -1), \\
a_4 &= (2 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 1, 0), \\
a_5 &= (1, 1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Матрица Грама этих корней имеет вид:

$$G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -\sqrt{2} - 1 \\ -\sqrt{2} & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} - 1 & 0 & \sqrt{2} + 2 \end{pmatrix}$$

Она соответствует компактному трёхмерному многограннику Кокстера. По матрице Грама заметно, что группа, порождённая “плохими” отражениями, тривиальна. Следовательно, решётка $L(12)$ рефлексивна и устойчиво рефлексивна. ■

5.3.2. Решетки с неортогональным базисом

Предложение 5.3.8. Решётка $L(3) = \begin{bmatrix} 2 & -1 - \sqrt{2} \\ -1 - \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} \oplus [1] \oplus [1]$ рефлексивна, но не устойчиво рефлексивна.

Доказательство. Заметим, что $L(3)$ изоморфна решетке с координатами

$$y = (y_0, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{Q}^4[\sqrt{2}]$$

и скалярным умножением, задаваемым квадратичной формой

$$f(y) = -(2\sqrt{2} - 1)y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$

где

$$\sqrt{2}y_0 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}], \quad y_0 + \frac{y_1 + y_2}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}], \quad y_2, y_3 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}].$$

Используемая нами программа находит 8 корней

$$a_1 = (0, 0, 0, -1),$$

$$a_2 = (0, 0, -1, 1),$$

$$a_3 = (0, -\sqrt{2}, 0, 0),$$

$$a_4 = (1 + \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}, 0, 0),$$

$$a_5 = (1 + \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{2} + 1, 0),$$

$$a_6 = (\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} + 1, \sqrt{2} + 1, 1),$$

$$a_7 = (\sqrt{2} + 1, 1, \sqrt{2} + 1, \sqrt{2} + 1),$$

$$a_8 = (3\sqrt{2} + 4, 0, 4\sqrt{2} + 5, \sqrt{2} + 3),$$

матрица Грама которых имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 - \sqrt{2} & -3 - \sqrt{2} \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -1 - \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & -2 - 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 & -2 - 3\sqrt{2} & -1 & -2 - \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 - 3\sqrt{2} & 6 + \sqrt{2} & -3 - \sqrt{2} & 0 & -2 - 3\sqrt{2} & -18 - 13\sqrt{2} \\ 0 & -1 - \sqrt{2} & -1 & -3 - \sqrt{2} & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -2 - \sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 - 3\sqrt{2} \\ -1 - \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & -2 - 3\sqrt{2} & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -3 - \sqrt{2} & -2 - 3\sqrt{2} & 0 & -18 - 13\sqrt{2} & 0 & -2 - 3\sqrt{2} & 0 & 6 + \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Достаточно рассмотреть подгруппу, порождённую “плохими” отражениями относительно зеркал H_{a_4} и H_{a_8} . Поскольку эти зеркала расходятся, эта подгруппа бесконечна. ■

Предложение 5.3.9. Решётка $L(4) = \begin{bmatrix} 2 & -1 - 2\sqrt{2} \\ -1 - 2\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} \oplus [1] \oplus [1]$ рефлексивна, но не устойчиво рефлексивна.

Доказательство. Заметим, что $L(4)$ изоморфна решетке с координатами

$$y = (y_0, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{Q}^4[\sqrt{2}]$$

и скалярным умножением, задаваемым квадратичной формой

$$f(y) = -(5 + 4\sqrt{2})y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$

где

$$\sqrt{2}y_0 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}], \quad \frac{y_0 + y_1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}], \quad y_2, y_3 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}].$$

Используемая нами программа находит 8 корней

$$a_1 = (0, 0, 0, -1),$$

$$a_2 = (0, 0, -1, 1),$$

$$a_3 = (0, -\sqrt{2}, 0, 0),$$

$$a_4 = (1, 3 + \sqrt{2}, 0, 0),$$

$$a_5 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{2} + 1, 0),$$

$$a_6 = (1, 1, \sqrt{2} + 1, \sqrt{2} + 1),$$

$$a_7 = (1, \sqrt{2} + 1, \sqrt{2} + 1, 1),$$

$$a_8 = (\sqrt{2} + 2, 0, 4\sqrt{2} + 5, \sqrt{2} + 3),$$

матрица Грама которых имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 - \sqrt{2} & -3 - \sqrt{2} \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -1 - \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & -2 - 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 & -2 - 3\sqrt{2} & -1 & -2 - \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 - 3\sqrt{2} & 6 + \sqrt{2} & -3 - \sqrt{2} & 0 & -2 - 3\sqrt{2} & -18 - 13\sqrt{2} \\ 0 & -1 - \sqrt{2} & -1 & -3 - \sqrt{2} & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -2 - \sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 - 3\sqrt{2} \\ -1 - \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & -2 - 3\sqrt{2} & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -3 - \sqrt{2} & -2 - 3\sqrt{2} & 0 & -18 - 13\sqrt{2} & 0 & -2 - 3\sqrt{2} & 0 & 6 + \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Достаточно рассмотреть подгруппу, порождённую “плохими” отражениями относительно зеркал H_{a_4} и H_{a_8} . Поскольку эти зеркала расходятся, эта подгруппа бесконечна. ■

Предложение 5.3.10. Решётка $L(8) := \begin{bmatrix} 2 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 2 & \sqrt{2} - 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} - 1 & 2 - \sqrt{2} \end{bmatrix} \oplus [1]$ устойчиво

рефлексивна.

Доказательство. Заметим, что $L(8)$ изоморфна решетке с координатами

$$y = (y_0, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{Q}^4[\sqrt{2}]$$

и скалярным умножением, задаваемым квадратичной формой

$$f(y) = -\sqrt{2} y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$

где

$$y_0 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}], \quad -y_2 + \frac{y_1 + y_2}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}], \quad \sqrt{2}y_2, y_3 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}].$$

Используемая нами программа находит 6 корней

$$a_1 = (0, 0, 0, -\sqrt{2}),$$

$$a_2 = (0, 0, -\sqrt{2}, 0),$$

$$a_3 = (0, -\sqrt{2}/2, 1 + \sqrt{2}/2, 0),$$

$$a_4 = (1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, 0, 0),$$

$$a_5 = (1 + \sqrt{2}, 0, 0, \sqrt{2} + 2),$$

$$a_6 = (2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, 0, 2 + \sqrt{2}),$$

матрица Грама которых имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 - 2\sqrt{2} & -2 - 2\sqrt{2} \\ 0 & 2 & -1 - \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 - \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} & -1 - \sqrt{2} & 0 & -1 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 - \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} & -4 - 3\sqrt{2} & 0 \\ -2 - 2\sqrt{2} & 0 & 0 & -4 - 3\sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} & 0 \\ -2 - 2\sqrt{2} & 0 & -1 - \sqrt{2} & 0 & 0 & 4 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Подгруппа, порожденная плохими отражениями, тривиальна. ■

Предложение 5.3.11. Решётка $L(9) := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \oplus [1]$ не является устой-

чиво рефлексивной.

Доказательство. Заметим, что $L(9)$ изоморфна решетке с координатами

$$y = (y_0, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{Q}^4[\sqrt{2}]$$

и скалярным умножением, задаваемым квадратичной формой

$$f(y) = -\sqrt{2} y_0^2 + (3 + \sqrt{2})y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$

где

$$\sqrt{2} y_1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}], \quad \frac{y_1 + y_2}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}], \quad y_1 - y_0, y_3 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}].$$

Используемая нами программа находит 9 корней

$$a_1 = (0, 0, 0, -1),$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= (0, 0, -\sqrt{2}, 0), \\
a_3 &= (0, -\sqrt{2}, 0, 0), \\
a_4 &= (1 + \sqrt{2}, 0, 0, 2 + \sqrt{2}), \\
a_5 &= (1 + \sqrt{2}, 0, 2 + \sqrt{2}, 0), \\
a_6 &= (2 + \sqrt{2}, 0, 2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}), \\
a_7 &= (1 + \sqrt{2}, 1, 1 + \sqrt{2}, 0), \\
a_8 &= (2 + 3\sqrt{2}/2, 1 + \sqrt{2}/2, 1 + \sqrt{2}/2, 2 + \sqrt{2}), \\
a_9 &= (5 + 4\sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, 0, 5 + 4\sqrt{2}),
\end{aligned}$$

матрица Грама которых имеет вид

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & -2 - \sqrt{2} & 0 & -2 - \sqrt{2} & 0 & -2 - \sqrt{2} & -5 - 4\sqrt{2} \\
0 & 2 & 0 & 0 & -2 - 2\sqrt{2} & -2 - 2\sqrt{2} & -2 - \sqrt{2} & -1 - \sqrt{2} & 0 \\
0 & 0 & 6 + 2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -2 - 3\sqrt{2} & -5 - 4\sqrt{2} & -10 - 8\sqrt{2} \\
-2 - \sqrt{2} & 0 & 0 & 2 + \sqrt{2} & -4 - 3\sqrt{2} & 0 & -4 - 3\sqrt{2} & -1 - \sqrt{2} & 0 \\
0 & -2 - 2\sqrt{2} & 0 & -4 - 3\sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} & 0 & 0 & -4 - 3\sqrt{2} & -18 - 13\sqrt{2} \\
-2 - \sqrt{2} & -2 - 2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 4 + 2\sqrt{2} & -2 - \sqrt{2} & -1 - \sqrt{2} & -8 - 5\sqrt{2} \\
0 & -2 - \sqrt{2} & -2 - 3\sqrt{2} & -4 - 3\sqrt{2} & 0 & -2 - \sqrt{2} & 2 & -1 - \sqrt{2} & -10 - 8\sqrt{2} \\
-2 - \sqrt{2} & -1 - \sqrt{2} & -5 - 4\sqrt{2} & -1 - \sqrt{2} & -4 - 3\sqrt{2} & -1 - \sqrt{2} & -1 - \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} & 0 \\
-5 - 4\sqrt{2} & 0 & -10 - 8\sqrt{2} & 0 & -18 - 13\sqrt{2} & -8 - 5\sqrt{2} & -10 - 8\sqrt{2} & 0 & 3 + \sqrt{2}
\end{pmatrix}.$$

Достаточно рассмотреть подгруппу, порождённую “плохими” отражениями относительно зеркал H_{a_3} , H_{a_6} и H_{a_9} . Поскольку зеркала H_{a_6} и H_{a_9} расходятся, эта подгруппа бесконечна. ■

Предложение 5.3.12. Решётка $L(10) := \begin{bmatrix} 2 & -1 - \sqrt{2} \\ -1 - \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} \oplus [2 + \sqrt{2}] \oplus [1]$ не является устойчиво рефлексивной.

Доказательство. Заметим, что $L(10)$ изоморфна решетке с координатами

$$y = (y_0, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{Q}^4[\sqrt{2}]$$

и скалярным умножением, задаваемым квадратичной формой

$$f(y) = -(1 + 2\sqrt{2})y_0^2 + (2 + \sqrt{2})y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$

где

$$\sqrt{2}y_0 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}], \quad \frac{y_0 + y_2}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}], \quad y_1, y_3 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}].$$

Используемая нами программа находит 8 корней

$$\begin{aligned}
a_1 &= (0, 0, 0, -1), \\
a_2 &= (0, 0, -\sqrt{2}, 0), \\
a_3 &= (0, -\sqrt{2}, 0, 0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_4 &= (\sqrt{2}/2, 0, 2 + \sqrt{2}/2, 0), \\
a_5 &= (1 + \sqrt{2}/2, 0, 1 + \sqrt{2}/2, \sqrt{2} + 2), \\
a_6 &= (1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, \sqrt{2} + 1, 0), \\
a_7 &= (2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, 0, 2 + \sqrt{2}), \\
a_8 &= (2 + \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}, 0, 0),
\end{aligned}$$

матрица Грама которых имеет вид

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & -2 - \sqrt{2} & 0 & -2 - \sqrt{2} & 0 \\
0 & 2 & 0 & -1 - 2\sqrt{2} & -1 - \sqrt{2} & -2 - \sqrt{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 4 + 2\sqrt{2} & 0 & 0 & -6 - 4\sqrt{2} & -8 - 6\sqrt{2} & -10 - 6\sqrt{2} \\
0 & -1 - 2\sqrt{2} & 0 & 4 + \sqrt{2} & 0 & 0 & -5 - 3\sqrt{2} & -5 - 3\sqrt{2} \\
-2 - \sqrt{2} & -1 - \sqrt{2} & 0 & 0 & 2 + \sqrt{2} & -6 - 4\sqrt{2} & -5 - 4\sqrt{2} & -11 - 8\sqrt{2} \\
0 & -2 - \sqrt{2} & -6 - 4\sqrt{2} & 0 & -6 - 4\sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} & -2 - \sqrt{2} & 0 \\
-2 - \sqrt{2} & 0 & -8 - 6\sqrt{2} & -5 - 3\sqrt{2} & -5 - 4\sqrt{2} & -2 - \sqrt{2} & 4 + 2\sqrt{2} & 0 \\
0 & 0 & -10 - 6\sqrt{2} & -5 - 3\sqrt{2} & -11 - 8\sqrt{2} & 0 & 0 & 4 + \sqrt{2}
\end{pmatrix}.$$

Достаточно рассмотреть подгруппу, порождённую “плохими” отражениями относительно зеркал H_{a_3} и H_{a_8} . Поскольку эти зеркала расходятся, эта подгруппа бесконечна. ■

Предложение 5.3.13. Решётки $L(13)$, $L(14)$ и $L(15)$ не рефлексивны.

Доказательство. Нереклексивность этих решёток устанавливается с помощью метода бесконечной симметрии, описанного в главе 3. Программа, реализующая этот метод, доступна по ссылке <https://github.com/nvbogachev/VinAlg-Z-sqrt-2-/blob/master/Infinite-Symm.py> ■

Теорема 5.3.1. Всякая максимальная устойчиво рефлексивная гиперболическая решётка ранга 4 над $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ изоморфна одной из следующих 7 решёток:

N°	L	# граней	Дискриминант
1	$[-1 - \sqrt{2}] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1]$	5	$-1 - \sqrt{2}$
2	$[-1 - 2\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1]$	6	$-1 - 2\sqrt{2}$
3	$[-5 - 4\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1]$	5	$-5 - 4\sqrt{2}$
4	$[-11 - 8\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1]$	17	$-11 - 8\sqrt{2}$
5	$[-\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1]$	6	$-\sqrt{2}$
6	$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 2 & \sqrt{2} - 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} - 1 & 2 - \sqrt{2} \end{bmatrix} \oplus [1]$	6	$-\sqrt{2}$
7	$[-7 - 5\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1]$	5	$-7 - 5\sqrt{2}$

Литература

- [1] Ian Agol, Finiteness of arithmetic Kleinian reflection groups. In Proceedings of the International Congress of Mathematicians: Madrid, August 22–30, 2006: invited lectures, pages 951–960, 2006.
- [2] Ian Agol, Mikhail Belolipetsky, Peter Storm, and Kevin Whyte. Finiteness of arithmetic hyperbolic reflection groups. — Groups Geom. Dyn., 2008, Vol. 2(4), p. 481 — 498.
- [3] D. Allcock. “Infinitely many hyperbolic Coxeter groups through dimension 19”, Geom. Topol. 10 (2006), 737–758.
- [4] D. Allcock. The reflective Lorentzian lattices of rank 3. — Mem. Amer. Math. Soc. 220, no 1033., American Mathematical Society, 2012, p. 1 — 125.
- [5] Е. М. Андреев. О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского. — Мат. сб., 1970, 81, с. 445–478.
- [6] Е. М. Андреев. О выпуклых многогранниках конечного объема в пространстве Лобачевского.— Мат. сб., 1970, 83, с. 256–260.
- [7] Е. М. Андреев. О пересечении плоскостей граней многогранников с острыми углами. — Мат. заметки, 1970, 8, с. 521–527.
- [8] M. Belolipetsky and B. Linowitz. On fields of definition of arithmetic Kleinian reflection groups II. Int. Math. Res. Not. IMRN, (9):2559–2571, 2014.
- [9] M. Belolipetsky. Arithmetic hyperbolic reflection groups. — Bulletin (New Series) of the Amer. Math. Soc., 2016, Vol. 53 (3), p. 437 — 475.
- [10] N. V. Bogachev. Reflective anisotropic hyperbolic lattices of rank 4. ArXiv: <https://arxiv.org/abs/1610.06148v1>
- [11] Н. В. Богачев. Классификация (1,2)-рефлективных анизотропных гиперболических решёток ранга 4. — Известия РАН, Серия математическая, 2019, том 81, выпуск 1, стр. 3–24.
- [12] N. Bogachev, A. Perepechko, *Vinberg’s algorithm*, DOI:10.5281/zenodo.1098448, <https://github.com/aperep/vinberg-algorithm>, 2017.

- [13] Armand Borel and Harish-Chandra. Arithmetic subgroups of algebraic groups. *Ann. of Math.* (2), 75:485–535, 1962.
- [14] R. Borcherds, Automorphism groups of Lorentzian lattices, *J. Algebra* 111 (1987), 133–153.
- [15] V. O. Bugaenko. Groups of automorphisms of unimodular hyperbolic quadratic forms over the ring $\mathbb{Z}[(\sqrt{5} + 1)/2]$. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, (5):6–12, 1984.
- [16] V. O. Bugaenko. On reflective unimodular hyperbolic quadratic forms. *Selecta Math. Soviet.*, 9(3):263–271, 1990. Selected translations.
- [17] V. O. Bugaenko. Arithmetic crystallographic groups generated by reflections, and reflective hyperbolic lattices. — *Advances in Soviet Mathematics*, 1992, Volume 8, p. 33 — 55.
- [18] Б. А. Венков. Об арифметической группе автоморфизмов неопределенной квадратичной формы. — *Изв. АН СССР*, 1937, том 1, выпуск 2, стр. 139–170
- [19] Э. Б. Винберг. Дискретные группы, порожденные отражениями, в пространствах Лобачевского. — *Матем. сб.*, 1967, том 72(114), номер 3, с. 471 — 488.
- [20] Э. Б. Винберг. О группах единиц некоторых квадратичных форм. — *Мат. сб.*, 1972, 87, с. 18 — 36
- [21] Э. Б. Винберг. Об унимодулярных целочисленных квадратичных формах // *Функц. анализ и его прил.* Т. 6, вып. 2. С. 24–31
- [22] E. B. Vinberg. Some arithmetical discrete groups in Lobachevskii spaces. — In: *Proc. Int. Coll. on Discrete Subgroups of Lie Groups and Appl. to Moduli* (Bombay, January 1973). — Oxford: University Press, 1975, p. 323 — 348.
- [23] Э. Б. Винберг. Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского большой размерности. — *Труды ММО*, 1984, Т. 47, с. 68 — 102.
- [24] Э. Б. Винберг. Гиперболические группы отражений. — *УМН*, 1985, 40:1, с. 29 — 66.
- [25] Винберг Э. Б. Каплинская И. М. О группах $\mathcal{O}_{18,1}(\mathbb{Z})$ и $\mathcal{O}_{19,1}(\mathbb{Z})$. // *ДАН СССР*. Т. 238, No 6, С. 1273–1275
- [26] Э. Б. Винберг, О. В. Шварцман. Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны. — *Итоги науки и техн., Сер. Современ. пробл. мат., Фундам. направления*, 1988, том 29, с. 147 — 259

- [27] Э. Б. Винберг. Классификация 2-рефлексивных гиперболических решеток ранга 4. — Труды ММО, 2007, т.68, с. 44 – 76.
- [28] R. Guglielmetti. “CoxIter - Computing invariants of hyperbolic Coxeter groups”. In: LMS Journal of Computation and Mathematics 18.1 (Dec. 2015), pp. 754–773. doi: 10.1112/S146115701500027. url: <https://dx.doi.org/10.1112/S1461157015000273>.
- [29] R. Guglielmetti. Hyperbolic isometries in (in-)finite dimensions and discrete reflection groups: theory and computations. — Switzerland, PhD Thesis, University of Fribourg, 2017.
- [30] Frank Esselmann. ber die maximale Dimension von Lorentz-Gittern mit coendlicher Spiegelungsgruppe. — Journal of Number Theory, 1996, Vol. 61, p. 103 — 144.
- [31] Anna Felikson and Pavel Tumarkin. Essential hyperbolic Coxeter polytopes. Israel J. Math., 199(1):113–161, 2014.
- [32] Anna Felikson and Pavel Tumarkin. Hyperbolic Coxeter Polytopes. 2017, WebPage: <http://www.maths.dur.ac.uk/users/anna.felikson/Polytopes/polytopes.html>.
- [33] Дж. Касселс. Рациональные квадратичные формы. — М.: Мир, 1982.
- [34] И. М. Каплинская, “О дискретных группах, порожденных отражениями в гранях симплицальных призм в пространствах Лобачевского”, Матем. заметки, 15:1 (1974), 159–164
- [35] H. S. M. Coxeter. Discrete groups generated by reflections, — Ann. of Math. (2), 35:3 (1934), 588–621.
- [36] B. Linowitz. Bounds for arithmetic hyperbolic reflection groups in dimension 2. Transformation Groups. Vol. 2, No. 3, 2018, pp. 743–753
- [37] D.D. Long, C. Maclachlan, and A.W. Reid. Arithmetic fuchsian groups of genus zero. Pure and Applied Mathematics Quarterly, 2(2):569–599, 2006.
- [38] C. Maclachlan. Bounds for discrete hyperbolic arithmetic reflection groups in dimension 2, Bull. Lond. Math. Soc., 43 (2011), 111–123.
- [39] В. С. Макаров. Об одном классе разбиений пространства Лобачевского, ДАН СССР, 161, No 2 (1965), 277–278.
- [40] В. С. Макаров. Об одном классе дискретных групп пространства Лобачевского, имеющих бесконечную фундаментальную область конечной меры, ДАН СССР, 167, No 1 (1966), 30–33.

- [41] A. Mark. Reflection groups of the quadratic form $-px_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$ with p prime. — Publ. Mat. 59, 2015, p. 353–372.
- [42] A. Mark. The classification of rank 3 reflective hyperbolic lattices over $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ — Mat. Proc. Camb. Phil. Soc. 12, 2016, p. 1–37.
- [43] A. Mark. The classification of rank 3 reflective hyperbolic lattices over $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, Ph.D. thesis, University of Texas at Austin, 2015.
- [44] J. A. Mcleod, Arithmetic hyperbolic reflection groups. — Ph.D. Thesis, Durham University (2013). Available at <http://etheses.dur.ac.uk/7743>.
- [45] G.D. Mostow and T. Tamagawa. On the compactness of arithmetically defined homogeneous spaces. Ann. of Math, 1962, Vol.76, No. 3, pp. 446–463.
- [46] В.В. Никулин. О факторгруппах групп автоморфизмов гиперболических форм по подгруппам, порожденным 2-отражениями. — Докл. АН СССР, 1979, Т. 248, вып. 6, с. 1307–1309.
- [47] В. В. Никулин, Об арифметических группах, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского, Изв. АН СССР, Сер. матем., 1980, том 44, выпуск 3, 637–669.
- [48] В.В. Никулин. О факторгруппах групп автоморфизмов гиперболическом форм по подгруппам, порожденным 2-отражениями. Алгебро-геометрические приложения — Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. М.: ВИНТИ, 1981, Т. 18, с. 3 — 14.
- [49] В. В. Никулин. О классификации арифметических групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского. — Изв. АН СССР. Сер. матем., 1981, Т. 45, выпуск 1, с. 113 – 142
- [50] В.В. Никулин. Поверхности типа $K3$ с конечной группой автоморфизмов и группой Пикара ранга 3. — Тр. МИАН. 1984. Т. 65. с. 119 — 142.
- [51] В.В. Никулин. О классификации гиперболических систем корней ранга 3. — Тр. МИАН. 2000. Т. 230, с. 1 — 255.
- [52] В.В. Никулин. Конечность числа арифметических групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского. — Изв. РАН. Сер. матем., 2007, Т. 71, выпуск 1, с. 55 — 60.
- [53] V. V. Nikulin. The transition constant for arithmetic hyperbolic reflection groups. Izv. Ross. Akad. Nauk, Ser. Mat., 75(5): 103–138, 2011.

- [54] O.T. O'Meara. Introduction to Quadratic Forms. Classics in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 1999.
- [55] H. Poincare . Theorie des groupes fuchsienues.— Acta math., 1882, 1, p. 1—62. (Русский пер. в кн. А. Пуанкаре . Избранные труды, т. III. — М.: Наука, 1974, с. 9—62.)
- [56] М. Н. Прохоров. Отсутствие дискретных групп отражений с некомпактным фундаментальным многогранником конечного объема в пространствах Лобачевского большой размерности.— Изв. АН СССР, Сер. мат., 1986, том 50, вып. 2, с. 320–332.
- [57] Rudolf Scharlau. On the classification of arithmetic reflection groups on hyperbolic 3-space. — Preprint, Bielefeld, 1989.
- [58] R. Scharlau, C. Walhorn. Integral lattices and hyperbolic reflection groups. — Asterisque. 1992, V.209, p. 279–291.
- [59] Ivica Turkalj. Reflective Lorentzian Lattices of Signature $(5, 1)$. — Dissertation, 2017, Technische Universität Dortmund.
- [60] А. Г. Хованский. Гиперплоские сечения многогранников, торические многообразия и дискретные группы в пространстве Лобачевского — Функц. ан. и его прил., 1986, том 20, вып. 1, стр. 50–61.
- [61] Claudia Walhorn. Arithmetische Spiegelungsgruppen auf dem 4-dimensionalen hyperbolischen Raum. — PhD thesis, Univ. Bielefeld, 1993.

Публикации автора по теме диссертации

- [62] Н. В. Богачев. Рефлективные анизотропные гиперболические решетки ранга 4. — Успехи математических наук, 2017, том 72, выпуск 1, стр. 193–194.
- [63] Н. В. Богачев, А. Ю. Перепечко. Алгоритм Винберга для гиперболических решёток. — Математические заметки, 2018, том 103, выпуск 5, стр. 769–774.