Дифференциальная геометрия и топология

Лекция 13: риманова метрика и римановы многообразия, геодезические, изометрии и движения, локальные изометрии и накрытия

Богачев Николай Владимирович

ИППИ РАН & МФТИ

Весна 2022

Содержание

1. Риманова метрика и римановы многообразия

<u>Опр.</u> Риманова метрика на гладком многообр. M — это положит. опред. симм. тензорное 2-поле, т.е. это тензор $g = \sum_{i,j} g_{ij}(x)\, dx_i \otimes dx_j$, где $g_{ij} = g_{ji}$, и матрица

матрица Грама

$(g_{ij}) = G > 0$ (полож. опр., т.е. $(Gv, v) > 0 \ \forall v \neq 0$).

(т.е. тензор g применяется к парам векторов (u, v) из T_pM)

Метрический тензор g — это по сути сечение симметрич. квадрата кокасат. расслоения $S^2(T^*M)$, т.ч. $g_p > 0$ во всех $p \in M$.

То есть это симм. билин. форма g_{ij}, положит. опред., живущая в каждом слое T_pM и гладко завис. от $p \in M$.

Опр Риманово многообразие (M, g) — это мн-е M, снабженное рим. метрикой g.

Пример 1) $\mathbb{R}^n$ с риман. метрикой $g = dx_1 \otimes dx_1 + \ldots + dx_n \otimes dx_n$.

(еще можно встретить обознач. $ds^2 = dx_1^2 + \ldots + dx_n^2$. это соотв. стандартной евклид. метрике.

2) Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — гладкое подмн-е. Тогда T_pM — это m-мерная пл-ть в $\mathbb{R}^n$. Мы можем ограничить евкл. скал. умн-е $(\cdot, \cdot)$ на T_pM, где $p \in M$.

$\dim M = m$

Таким образом, мы получим индуцированную с $\mathbb{R}^n$ риманову метрику на M.

Зачем нужна риманова метрика?

- Можем считать углы между касат. векторами (и кривыми):

$$\cos \angle(u,v) = \frac{g_p(u,v)}{\sqrt{g_p(u,u)\cdot g_p(v,v)}}, \text{ где } u,v \in T_pM.$$

- Длины векторов $\|v\| = \sqrt{g_p(v,v)}$, где $v \in T_pM$.

(Т.е. риманова метрика — это аналог скал. произведения для касат. векторов)

- Длины кривых $\gamma(t)$: $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t),\gamma'(t))}$

Тогда $L(\gamma)\big|_{t\in[a,b]} = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt.$

– Можем вычислять объемы. Определим форму объема: $\mathrm{vol}_g = \mathrm{vol}_M = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \in \Omega^n(M)$.

где $n = \dim M$.

Тогда для $U \subset M$ $\mathrm{vol}(U) = \int_U \mathrm{vol}_g$.

Заметим, что стандартный базис $\frac{\partial}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial}{\partial x_n}$ ортонормирован для мн-ия $\mathbb{R}^n$, так что риманов объем для $\mathbb{R}^n$ совпадает со станд. объемом, т.к. $G = (g_{ij}) = E$.

Естеств. вопрос: почему $\exists$ риманова метрика на M и сколько их?

Теор. Всякое гладкое мн-е M допускает риманову метрику. (и их может быть бескон. много)

Док-во: Существование можно доказывать 2-мя способами.

I сп: по теор Уитни $\exists$ вложение $F: M \to \mathbb{R}^N$, далее индуц. метрику с $\mathbb{R}^N$ на $F(M)$, затем с помощью диффео $F: M \to F(M)$ переносим на M.

II сп. Пусть $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ – атлас на M. В каждой карте U_α положим $g_\alpha = \varphi_\alpha^* \cdot g_E$, где g_E – евкл. метр. в $\mathbb{R}^n$.

(т.е. g_α в лок. коорд. имеет вид $g_\alpha = \sum_{i,j} \delta_{ij}\, dx_i \otimes dx_j$

$= dx_1^2 + \ldots + dx_n^2$.

Пусть h_α — разб. 1, подч. атласу $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$,

Тогда $g = \sum\limits_\alpha h_\alpha g_\alpha$, т.е.

$g_p(u,v) = \sum\limits_\alpha h_\alpha \, g_\alpha|_p(u,v)$, где $\forall p, v \neq 0 \in T_pM$ $g_p(v,v) > 0$.

Пример: 1) Рассмотрим верхнюю полупл-ть $U^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$. На U^2 сущ. обычная евкл. метрика $g_U = dx \otimes dx + dy \otimes dy = dx^2 + dy^2$, т.е. если $v = (v_1, v_2) \in T_p U^2$, то $g_E(v,v) = v_1^2 + v_2^2$.

$\left(v = v_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right)$.

Но есть и другая — гиперболическая — метрика на U^2:

$$g_u := \frac{dx \otimes dx + dy \otimes dy}{y^2}.$$

Опр. Рим. мн-ие (U^2, g_u) — модель пл-ти Лобачевского H^2 (еще можно встретить обозн.: L^2; Λ^2) в модели верхней полупл-ти.

2. Примеры римановых метрик: I квадр. форма.

Пусть $f: \underset{u_1 \dots u_m}{U} \overset{\subset \mathbb{R}^m}{\longrightarrow} \mathbb{R}^n$ — рег. гл. пов-ть, $m < n$.

Напр., $f(U) = M \subset \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^2$.

Тогда известно, что векторы $f_{u_j} = \frac{\partial f}{\partial u_j}$ образуют

Базис пр-ва T_pM (пл-ть в $\mathbb{R}^n$).

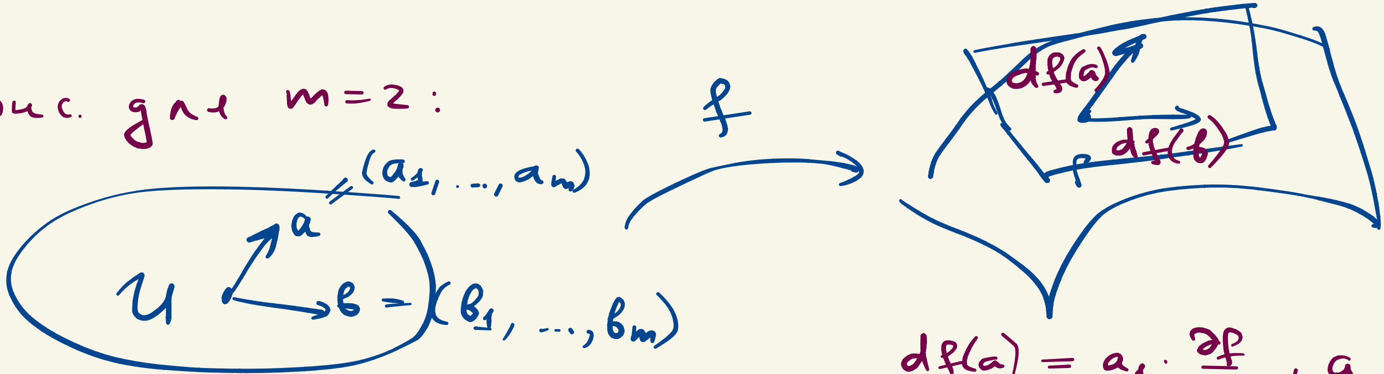
Индуцируем скал. произв. с $\mathbb{R}^n$ на T_pM след. обр.:

$I(a,b) = \langle df(a), df(b) \rangle$, где

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скал. произв. на $\mathbb{R}^n$.

$F(U) \subset \mathbb{R}^n$

рис. для $m=2$:



$$df(a) = a_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial u_1} + a_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial u_2}$$

Заметим, что

$$I(a,b) = a^t G b = (a_1 \ldots a_m)\, G \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$ где $G = \mathrm{Gram}(f_{u_1}, \ldots, f_{u_m})$.

Т.е. $\mathrm{Mat}(I) = \begin{pmatrix} \langle \frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_1} \rangle & \cdots & \langle \frac{\partial f}{\partial u_m}, \frac{\partial f}{\partial u_1} \rangle \\ \vdots & \ddots & \\ & \cdots & \langle \frac{\partial f}{\partial u_m}, \frac{\partial f}{\partial u_m} \rangle \end{pmatrix}$

$I(x,x)$ – I квадр. форма пов-ти $f(U) = M \subset \mathbb{R}^n$.

<u>Пример</u>: $S^2 \subset \mathbb{R}^3$; $f: U \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

$$f(u_1,u_2) = \begin{pmatrix} f_1(u_1,u_2) \\ f_2(u_1,u_2) \\ f_3(u_1,u_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u_1 \cdot \cos u_2 \\ \cos u_1 \cdot \sin u_2 \\ \sin u_1 \end{pmatrix}$$

$$f_{u_1} = (-\sin u_1 \cdot \cos u_2, \ -\sin u_1 \cdot \sin u_2, \ \cos u_1)$$

$$f_{u_2} = (-\cos u_1 \cdot \sin u_2, \ \cos u_1 \cdot \cos u_2, \ 0)$$

Тогда $G = \mathrm{Mat}(\mathrm{I}) = \mathrm{Mat}(g_{S^2}) =$

$$= \begin{pmatrix} \langle f_{u_1}, f_{u_1} \rangle & \langle f_{u_1}, f_{u_2} \rangle \\ \langle f_{u_1}, f_{u_2} \rangle & \langle f_{u_2}, f_{u_2} \rangle \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \sin^2 u_1 (\cos^2 u_2 + \sin^2 u_2) + \cos^2 u_1 & \begin{array}{c} \sin u_1 \cos u_1 \sin u_2 \cos u_2 - \\ {}'' - \sin u_1 \cos u_1 \sin u_2 \cos u_2 \\ 0 \end{array} \\ \hline 0 & \cos^2 u_1 (\sin^2 u_2 + \cos^2 u_2) \end{array}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u_1 \end{pmatrix}$$ — матрица Грама римановой метрики на сфере S^2, индуц. из $\mathbb{R}^3$.

Например, для $a = (a_1, a_2) \in T_p S^2$, где $p = (p_1, p_2)$,

имеем $\|a\| = \sqrt{g_{S^2}(a,a)} = a_1^2 + \cos^2 p_1 \cdot a_2^2$.

$$\cos \angle(a,b) = \frac{g_{S^2}(a,b)}{\|a\| \cdot \|b\|} = \dots$$

3. Расстояние (метрика) и геодезические.

Пусть (M, g) — связное рим. мн-е.

<u>Опр</u>. Расст. $\rho(p,q)$ между точками p и q на

рим. мн-ии M опред. след. обр.:

$$\rho(p,q) = \inf_{\gamma} L(\gamma)\Big|_{[0,1]}, \text{ где } \gamma:[0,1]\to M,\ \gamma(0)=p,\ \gamma(1)=q.$$

Предл. (без док-ва) (M,ρ) — метрич. пр-во.

Опр. Геодезическая на M — это кривая

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ (инт.), где $\|\gamma'(t)\| \equiv \text{const} = k$, и при

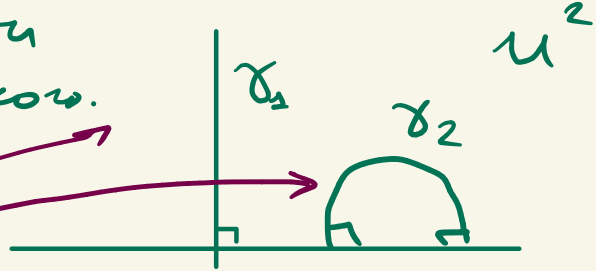
этом γ локально реализует расст., т.е.

$$\forall t \in I\ \exists [t_0,t_1] \ni t:\ \rho(\gamma(t_0),\gamma(t_1)) = L(\gamma)\Big|_{[t_0,t_1]} = k(t_1-t_0).$$

Примеры 1) (E^n, g_E) : геодезические = аффинные прямые

2) $(S^n; g_{S^n})$, где S^n – 1-сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$, геодезическими явл-ся дуги "больших" окр-тей, которые суть сечения S^n 2-мерными пл-тями, проход. через центр сферы.

3). (U^2, g_U) – модель пл-ти Лобачевского.



Геодезические

§4. Полные рим. мн-я

Опр 1. Метрическое пр-во (M, ρ) наз. полным, если всякая посл-ть Коши сход. в M.

Заметим, что если M - полно, то $M \setminus \{pt\}$ не полно.

Опр 2. Рим. мн-е (M, g) геодезически полно, если всякая геодезическая $\gamma : I \to M$ может быть продолжена до геодезической $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to M$, т.ч. $\tilde{\gamma}|_I = \gamma$.

Теор. (Хопф, Ринов).

Пусть (M,g) — связное рим. мн-ие.

Тогда сл. усл. экв.:

1) (M,ρ) — полное метр. пр-во.

2) (M,g) — геодез. полно.

3) $K \subset M$ — компакт $\Leftarrow\Rightarrow$ K замкн. и огран. в M.

В случае, если M полно, то $\forall p \neq q$ $\exists$ геод. γ, на которой расст. достигается: $\rho(p,q) = L(\gamma)\big|_{[\gamma^{-1}(p),\gamma^{-1}(q)]}$

5. Изометрии и лок. изометрии

Опр Пусть (M, g) и (N, h) – рим. мн-ия. Тогда диффеоморфизм $f: M \to N$ назыв. изометрией, если $g(u, v) = h(df_p(u), df_p(v))$ для произв. т. $p \in M$ и $u, v \in T_pM$.

Теор. Пусть $f, g: M \to N$ – изометрии св. рим. мн-ий. Если $\exists p \in M$: $f(p) = g(p)$ и $df_p = dg_p$, то тогда $f \equiv g$.

Опр. $f: M \to N$ – лок. изометрия, если $\forall p \in M$ сущ. окр-ть $U < M$, т.ч. $f|_U$ – изометрия: $U \to f(U)$.

Предл Пусть $f: M \to N$ — лок. изом. Тогда
1) если M полно, то f явл накрытием.
2) если f — накрытие, то M — полное $\Leftrightarrow$ N полно.

Предл. Если $f: M \to N$ лок. изом. и накрытие степени d, то тогда $\mathrm{Vol}(M) = d \cdot \mathrm{Vol}(N)$.

Опр. $\mathrm{Isom}(M)$ — полная группа движений/изометрий $f: M \to M$.

Теор $\mathrm{Isom}(M)$ — группа Ли.

Примеры 1) $\mathrm{Isom}(S^n) = O_{n+1}(\mathbb{R})$
2) $\mathrm{Isom}(E^n) = \mathbb{R}^n \rtimes O_n(\mathbb{R}) \hookrightarrow GL_N(\mathbb{R})$.

изометрии в E^n: $x \longmapsto Ax + b$, $A \in O_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$.

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \in GL_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Опр. $\Gamma < \mathrm{Isom}(M)$ — дискр. гр. движ, если все орбиты дискретны и стабилиз. конечны.

Утв. Γ дискр. $\iff$ $\underset{\text{дискр. подмн-во в гр. Ли}}{\Gamma < \mathrm{Isom}(M)}$ $\iff$ $\forall \underset{\text{компакт}}{K} \subset M$ $\mathrm{card}\{\gamma \mid \gamma(K) \cap K \neq \varnothing\} < +\infty$

Опр. $\Gamma \curvearrowright M$ свободно, если все стабилизаторы $\Gamma_p = \mathrm{Stab}(p) = \{\gamma \mid \gamma p = p\} = \underset{\{e\}}{\overset{\shortparallel}{\text{трив.}}}$

Теор Пусть $\Gamma \curvearrowright M$ дискр. и свободно изометриями. Тогда на пр-ве орбит $M/_\Gamma$ сущ. единств. риманова структура, т.что накрытие $\pi: M \longrightarrow M/_\Gamma$ явл. лок. изом.

Пример $\Gamma = \mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{E}^2$ паралл. переносами:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+m \\ y+n \end{pmatrix}.$$

Тогда $\mathbb{E}^2/_{\mathbb{Z}^2} \cong$ Тор.