Гиперболическая геометрия и пространства Лобачевского

Лекция 6: классификация движений в пространстве Лобачевского

Богачев Николай Владимирович

ИППИ РАН & МФТИ

Весна 2022

Содержание

1. Движения в H^n

Пусть $F: H^n \to H^n$ — движение / изометрия, то есть это диффеоморфизм, сохр. риманову метрику $g_H(\cdot,\cdot)$.

В том числе F сохр. метрику ρ_H:

$$\rho_H(x,y) = \rho_H(F(x), F(y)).$$

Какие бывают движения?

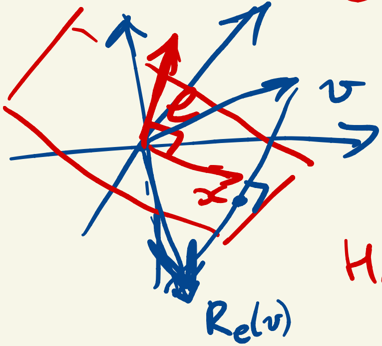
Рассмотрим сначала евклидово пространство E^n.

– параллельные переносы $x \mapsto x + a = t_a(x)$

– отражение относит. гиперплоскостей:

• проход. через начало коорд.

$e \in \mathbb{R}^n$; $H_e \supset \{0\}$;



$H_e = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x,e)=0\}$

если $e=(a_1,\dots,a_n)$, то

H_e зад. ур-ем $x_1a_1 + \dots + x_na_n = 0$.

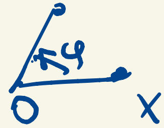
Отражение отн H_e имеет вид:

$$R_e(v) = v - \frac{2(e,v)}{(e,e)}\cdot e$$

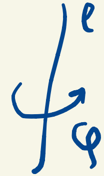
• H_e не проход. через 0: $H_{e,t} = \{x\in\mathbb{R}^n \mid \underset{\substack{\| \\ 0}}{(x,e)+t}\}$

$$R_{e,t}(v) = v - \frac{2((e,v)+t)}{(e,e)}\, e.$$

– Повороты / вращения.



- повороты вокруг точки в пл-ти E^2 (центральные симметрии)
- вращения вокруг прямой $l \subset E^3$.



Теор. 1) $\forall \gamma \in \mathrm{Isom}(E^n)$ $\exists R_1, \dots, R_{n+1}$ – отражения, т.ч.

$$\gamma = R_1 \circ \dots \circ R_{n+1}.$$

2) Подгруппа параллельных переносов $\mathbb{R}^n \triangleleft \mathrm{Isom}(E^n)$. $\quad (\gamma^{-1} t_a \gamma \overset{?}{=} t_{\gamma(a)})$.

3) $\mathrm{Isom}(E^n) = \mathbb{R}^n \rtimes O_n(\mathbb{R})$.

4) $\mathrm{Isom}(S^n) = O_{n+1}(\mathbb{R})$ (т.к. $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$).

Движения в пр-ве Лобачевского $\mathbb{H}^n$.

Вспомним, что гиперпл-ти в $\mathbb{H}^n$ зад. ур-ем $(x, e) = 0$,

где $e \in \mathbb{R}^{n,1}$: $(e, e) > 0$. $\quad \{(x,x) = -1\}$.

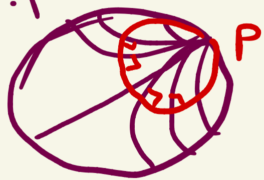
Отражения в $\mathbb{H}^n$: $\quad R_e(x) = x - \dfrac{2(e,x)}{(e,e)} e$.

Есть также и аналоги остальных эл-тов кон порядка.

Центр. симм. относит. т. $p \in \mathbb{H}^n$ имеет вид:

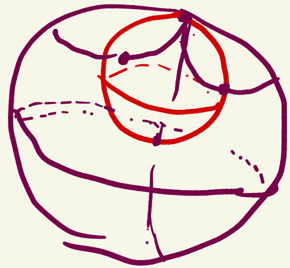
$$S_p(x) = x + 2(p,x)\,p \quad (\text{т.к. } (p,p) = -1,\ p \in \mathbb{H}^n).$$

Опр. Пусть $p \in \partial \mathbb{H}^n$. Орисфера с центром в т. p — это гиперповерхность $\perp$ всем прямым, проход. через точку p.

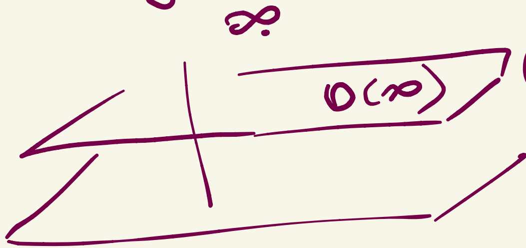


Предл. 1) В вект. модели H^n орисфера $O(p)=\{x\in H^n \mid (x,p)\equiv const\}$.

2) В модели Пуанкаре в шаре $O(p)$ – евклидова сфера без p, касающаяся $S^{n-1}=\partial H^n$ в т. p.



3) Пусть $p=\infty$ в модели U^n верхней полуплоскости. Тогда $O(p)$ – евклидовы горизонтальные гиперпл-ти.

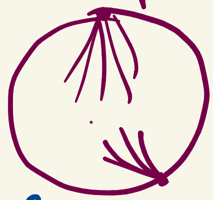


Заметим, что $g_H=\frac{1}{x_n^2}g_E$ – постоянен на гиперпл-тях $x_n\equiv const$, след. $O(\infty)\cong E^{n-1}$ изометрична.

Отсюда получаем ещё один тип движений в H^n – евклидовы движения в орисферах $O(\infty)$. Такие элементы называются параболическими.

2. Теорема о классификации движений в H^n

Предл. Всякое движение $F: H^n \to H^n$ единств. образом продолжается до гомеоморфизма $\bar{F}: \bar{H}^n \to \bar{H}^n$.



(идея: $p \longleftrightarrow [\gamma]$.)
геод. лучи из p.

Теор. Пусть $F: H^n \to H^n$ — движение.

Тогда выполнено ровно одно из трех след. усл-ий:

1) $\mathrm{Fix}(F) \cap H^n \neq \emptyset$ (эллиптические)

Если $\mathrm{Fix}(F) \ni x \in H^n$ и $x = 0$ в модели B^n, тогда

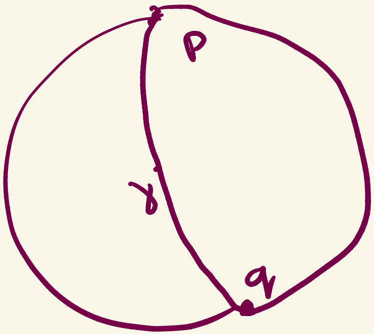
$$F(x) = Ax, \text{ где } A \in O_n(\mathbb{R}).$$

2) $\mathrm{Fix}(F) \cap H^n = \emptyset$, но $\exists p \in S^{n-1} = \partial H^n$: $\{p\} = \mathrm{Fix}(F) \cap \partial H^n$. (параболические)

Если $(x,t) \in U^n = \left\{(x,t) \;\middle|\; \begin{matrix} x \in \mathbb{R}^{n-1} \\ t > 0 \end{matrix}\right\}$,

то тогда $F((x,t)) = (Ax + b, t)$, где $A \in O_{n-1}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^{n-1}$.

3) $\mathrm{Fix}(F) \cap \mathbb{H}^n = \varnothing$ и $\mathrm{Fix}(F) \cap \partial \mathbb{H}^n = \{p, q\}$. (локсодромический эл-т)



Если $p = 0$ и $q = \infty$ в модели $\mathcal{U}^n$, тогда $F((x,t)) = \lambda(Ax, t)$, где $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$, $t > 0$, $A \in O_{n-1}(\mathbb{R})$

Ось локсодр. эл-та: $\gamma(t)$, где $\gamma(-\infty) = p$, $\gamma(+\infty) = q$.

Более того, если $F \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2) = PSL_2(\mathbb{R}) \rtimes \langle \tau \rangle$ или $F \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3) = PSL_2(\mathbb{C}) \rtimes \langle \tau \rangle$, тогда

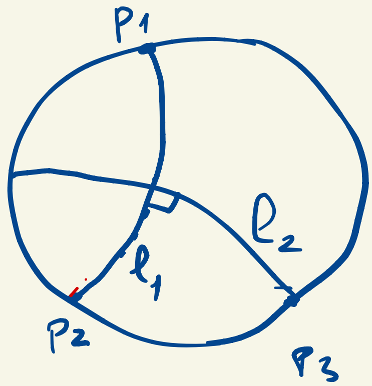
$F \in (1) \iff \mathrm{trace}(F) \in (-2, 2)$

$F \in (2) \iff \mathrm{trace}(F) = \pm 2$

$F \in (3) \iff \mathrm{trace}(F) = [-2,2]^c = \begin{cases} \mathbb{R} \setminus [-2,2] : & \mathbb{H}^2 \\ \mathbb{C} \setminus [-2,2] : & \mathbb{H}^3 \end{cases}$.

Док-во: Продолжим F до гомеоморфизма $F : \overline{\mathbb{H}^n} \to \overline{\mathbb{H}^n}$.

По теор. Брауэра $Fix(F) \cap \overline{H^n} \neq \emptyset$. Если $\exists$ точки



$p_1, p_2, p_3 \in Fix(F) \cap \partial H^n$. Тогда прямая $l_1 = \overline{p_1 p_2}$ — инвар. отн. F.

Действ., сначала нетрудно проверить, что любые три точки на одной прямой переходят в 3 т. на одной прямой. Отсюда $F(l_1) \subset l$ — прямая. Но точки $x_n \to p_1$ и $y_n \to p_2$ на l_1 будут иметь образы, сход. к тем же p_1 и p_2. Следовательно, прямая l тоже соединяет p_1 и p_2. Но тогда $l = l_1$, значит, l_1 явл. F-инв. Аналогично, можно показать, что прямая $l_2 \perp l_1$, т.что $p_3 \in l_2$, тоже F-инв.

Тогда $p = l_1 \cap l_2$ — F-инв., т.е. $F(p) = p$ и $p \in Fix(F) \cap H^n$.

Сказанное выше покрывает все эллипт. изом-ии из п. 1)

Пусть теперь $\mathrm{Fix}(F) \cap H^4 = \emptyset$. Тогда $\mathrm{card}(\mathrm{Fix}(F) \cap \partial H^4) \leq 2$

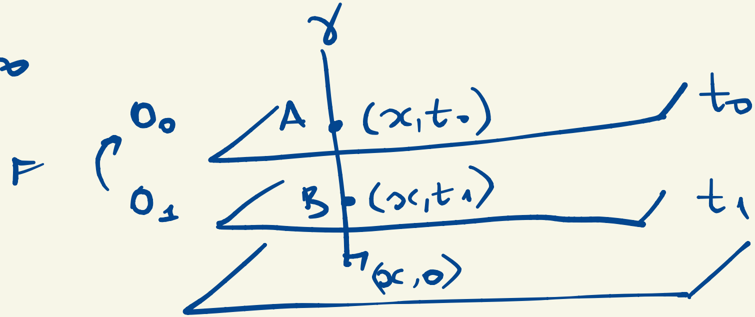
(только что доказано!)

Если в п. 2) $F(\infty) = \infty$, то F : орисферы $\mapsto$ орисферы.

Пусть $F(O_0) = O_1$ и пусть

$F' : O_1 \to O_0$ — такое отобр., что

$F'(x, t_1) = (x, t_0)$.



Нетрудно проверить, что

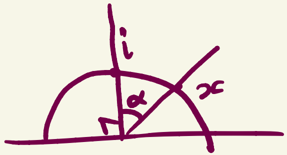
F' — сжимающее отобр. Тогда $F \circ F' : O_1 \to O_1$ — тоже сжимающее и имеет неподв. точку (x, t_1). Значит,

$F(x, t_0) = (x, t_1)$. Тогда F сохр. γ — геод. между A и B.

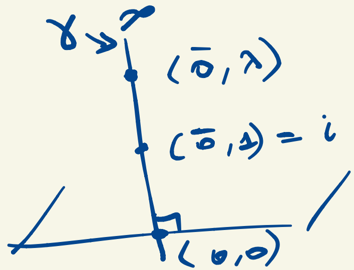
Тогда $(x, 0)$ — неподв. точка — противоречие.

След. все орисферы инвариантны. Поскольку $O_0 \cong E^{n-1}$, то $F \curvearrowright O_0$ как евкл. движение $F(x,t) = (Ax+b\,, t)$.

Лемма



$$\cosh \rho(x,i) = \frac{1}{\cos\alpha}.$$



В случае 3) рассм. ось γ локсодр. эл-та F:

На оси γ эл-т F действует переносом $(0,1) \mapsto (0,\lambda)$. Случай $\lambda = 1$ невозм., т.к. иначе $(0,1)$ – неподв.

Тогда $dF|_{(0,1)} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, где $A \in O_{n-1}(\mathbb{R})$.

Наконец, пусть $F \in Isom(H^2)$ или $Isom(H^3)$. Тогда

- если $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det F = 1$; $a,b,c,d \in \mathbb{R}$; $F(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$; $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}(z) \geq 0$:

и если $\underset{\frac{az+b}{cz+d}}{\underset{\shortparallel}{F(z)}} = z$, тогда $cz^2 + (d-a)z - b = 0$.

Дискриминант этого ур-я с[illegible] $= (d-a)^2 + 4bc = (d+a)^2 - 4 =$

$$= (\operatorname{trace} F)^2 - 4.$$

Поэтому, F имеет неподв. т. $z \in \mathbb{H}^2 \iff (\operatorname{trace} F)^2 - 4 < 0$.

– Если $(\operatorname{trace} F)^2 > 4$, то $\exists\, p, q \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cong S^1 \cong \partial \mathbb{H}^2$, где $p, q \in \operatorname{Fix}(F)$.

– Если $(\operatorname{trace} F)^2 = 4$, то мы имеем ровно 1 неподв. точку.

Пусть теперь $F \in PSL_2(\mathbb{C})$. Тогда F сопряжена одной из матриц $\pm\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$, где $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Получаем изометрии

$(z,t) \mapsto (z+1, t)$ или $(z,t) \mapsto (\lambda^2 z, |\lambda|^2 t)$. $(\bar\lambda = \lambda^{-1})$

$\operatorname{trace} F = \pm 2$

$F(\infty) = \infty$

$F(z,t) = (z,t) \iff |\lambda| = 1$, т.е.

$\operatorname{trace} F = \lambda + 1/\lambda \in (-2, 2)$.

Если $|\lambda| \neq 1$, то $0, \infty \in \operatorname{Fix}(F)$.