Гладкие многообразия

Пусть M — хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой. Внутренняя карта на M — это пара (U,φ), где φ — гомеоморфизм некоторой области $U \subset M$ в $\mathbf{R}^n$ или в открытый шар $B^n \subset \mathbf{R}^n$. Краевая карта — это пара (V,ψ), где ψ есть гомеоморфизм из V в замкнутое полупространство

$$\mathbf{R}^n_+ = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_n \geq 0\}.$$

Две карты (U_1,φ_1) и (U_2,φ_2) называются согласованными, если склейки

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}\colon \varphi_2(U_1 \cap U_2) \to \varphi_1(U_1 \cap U_2)$$

задаются дифференцируемыми (мы будем требовать C^∞–гладкими) функциями. Атласом называется система согласованных карт, покрывающая все пространство M. Два атласа называются эквивалентными, если каждая карта первого атласа согласована с каждой картой второго атласа. Топологическое пространство M с указанными выше условиями вместе с классом эквивалентных атласов называется *гладким n-многообразием*.

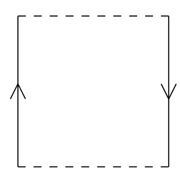
1◇1. Докажите, что $\mathbf{R}P^n = P(\mathbf{R}^{n+1})$ является гладким n-многообразием без края (дать атлас из $n+1$ карты, см. лекции).

1◇2. Ограниченный цилиндр $C = [0,1] \times \mathbf{S}^1$. Покажите, что C является двумерным гладким многообразием с краем $\partial C = \mathbf{S}^1 \cup \mathbf{S}^1$ (нужно предъявить атлас).

1◇3. Докажите, что комплексное проективное пространство $\mathbf{C}P^1 = P(\mathbf{C}^2)$ является 2-мерным вещественным многообразием, диффеоморфным $\mathbf{S}^2$.

1◇4. Рассмотрим $\mathbf{R}^4 = \mathbf{C}^2$ с координатами (z,w). Пусть M есть пересечение трехмерной сферы $\{|z|^2 + |w|^2 = 1\}$ и конуса $|z| = |w|$. Докажите, что M диффеоморфно тору $\mathbf{T}^2$.

1◇5. Докажите, что лента Мёбиуса Mb является гладким 2-мерным многообразием с краем $\partial\mathrm{Mb} = \mathbf{S}^1$. *Указание:* постройте сначала атлас для открытой ленты Мёбиуса $\mathrm{Mb} \setminus \partial\mathrm{Mb}$ (открытый квадрат, у которого отождествлены две противоположных стороны, например, вертикальных, с разными ориентациями).



Открытая лента Мёбиуса $\mathrm{Mb} \setminus \partial\mathrm{Mb}$.

1◇6. Снабдить множество всех прямых на плоскости $\mathbf{R}^2$ структурой гладкого многообразия. Доказать, что оно диффеоморфно открытому листу Мебиуса.

1◇7. Доказать, что специальная ортогональная группа

$$\mathrm{SO}_n(\mathbf{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbf{R}) \mid A^{\mathrm{t}}A = E,\ \det A = 1\}$$

является гладким многообразием; найдите его размерность. Докажите также, что $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$ и $\mathbf{R}P^3$ диффеоморфны.

1◇8. Докажите, что комплексная окружность $\{z_1^2 + z_2^2 = 1\} \subset \mathbf{C}^2$ диффеоморфна цилиндру без границы.

1◇9. Пусть $\mathbf{R}^{n,1}$ — пространство Минковского, то есть $\mathbf{R}^{n+1}$, снабженное скалярным произведением $\langle x, y\rangle$ сигнатуры $(n,1)$, где

$$\langle x, x\rangle = x_1^2 + \ldots + x_n^2 - x_{n+1}^2.$$

Докажите, что если $\langle x, x\rangle < 0$, $\langle y, y\rangle < 0$ и $x_{n+1}y_{n+1} > 0$, то тогда $\langle x, y\rangle < 0$.

1◇10. Пусть $\mathbf{H}^n$ — связная компонента гиперболоида

$$\langle x, x\rangle = x_1^2 + \ldots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1,$$

где $\langle x, y\rangle$ — скалярное произведение сигнатуры $(n,1)$ в пространстве $\mathbf{R}^{n,1}$. Докажите, что отображение $\rho : \mathbf{H}^n \times \mathbf{H}^n \to \mathbf{R}$, где $\cosh\rho(x,y) = -\langle x, y\rangle$, является корректно определенной метрикой, и, следовательно, $\mathbf{H}^n$ является метрическим пространством.