Гиперболическая геометрия и пространства Лобачевского

Лекция 5: движения, плоскости, прямые, объемы в разных моделях пространства Лобачевского

Богачев Николай Владимирович

ИППИ РАН & МФТИ

Весна 2022

Содержание

1. Метрики, углы, объёмы в пространстве Лобачевского

Напомним, что имеются 4 изометричные модели пр-ва Лобачевского:

(H^n, ρ_H) — гиперболоид (векторная модель)

(B^n, ρ_B) — конформная модель Пуанкаре в шаре

(K^n, ρ_K) — проективная модель Клейна

(U^n, ρ_U) — конф. модель Пуанкаре в верхнем полупр-ве.

$(g(\cdot,\cdot) = g_{ij}(x))$

Напомним, что на римановом мн-ии (M, g_M) мы умеем считать длины, углы, объемы: $L(\gamma)_{[a,b]} = \int_a^b \sqrt{g(\dot\gamma,\dot\gamma)}\, dt$; $\underset{\text{угол}}{\angle}(\gamma_1,\gamma_2) = \dfrac{g(\dot\gamma_1,\dot\gamma_2)}{\sqrt{g(\dot\gamma_1,\dot\gamma_1)\, g(\dot\gamma_2,\dot\gamma_2)}}$ $\angle(\dot\gamma_1,\dot\gamma_2)$ // при $t=t_0$, здесь $\gamma_1(t_0)=\gamma_2(t_0)$.

где $\dot\gamma = \gamma'(t)$, $vol(U) = \int_U \sqrt{\det g|_x}\, dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$, где $x\in U$.

Риманова метрика g_M позволяет опред-ть геодезические на M и превратить M в метрич. пр-во с метрикой ρ_M.

(Почему говорят "метрич. тензор"? Ответ: $g = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx_i \otimes dx_j$ — тензор типа $(0,2)$, где $(g_{ij})>0$.)

Предл. Пусть g_E — метрический тензор в E^n (евкл. пр-во). Пусть $B^n \subset E^n$ — един. шар, явл. моделью H^n в B^n. Тогда $g_B = \left(\dfrac{2}{1-\|x\|^2}\right) g_E$.

Док-во: Рассм. отобр. $\underset{\mu}{\underset{\parallel}{\zeta^{-1}}}: B^n \to H^n$, $\underset{\mu(x)}{\underset{\parallel}{\zeta^{-1}(x)}} = \left(\dfrac{1+\|x\|^2}{1-\|x\|^2}, \dfrac{2x_1}{1-\|x\|^2}, \ldots, \dfrac{2x_n}{1-\|x\|^2}\right)$.

Заметим, что вращения вокруг оси x_0 — изометрии в H^n.

Они коммутируют с изом. $\zeta : H^n \to B^n$, значит, явл. изом. в B^n.

Можем считать, что $x = (x_1, 0, 0, \dots, 0) \in B^n$. Тогда

$$\mu(x) = \frac{2}{1-\|x\|^2} \langle \underbrace{\frac{1+\|x\|^2}{2}; \; x_1, \dots, x_n}_{\mu_1(x)} \rangle \;; \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{2}{1-\|x\|^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j} 2(1-x_1^2-\dots-x_n^2)^{-1} =$$

$$= \frac{2 \cdot 2x_j}{(1-\|x\|^2)^2}. \text{ Тогда } \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_x \left(\frac{2}{1-\|x\|^2}\right) = \begin{cases} \dfrac{4x_1}{(1-x_1^2)^2}, & j=1 \\ 0, & j>1 \end{cases}$$

$$d_x\mu = \frac{4x_1}{(1-x_1^2)^2} \cdot \left. \left(\frac{1+\|x\|^2}{2}, x_1 \dots x_n \right) \right|_{x=(x_1,0,\dots,0)} +$$

$$d_x\mu = \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i \le n+1 \\ j \le n}}$$

$$\mu : B^n \to H^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

$$+ \frac{2}{(1-x_1^2)} \cdot d_x \mu_1 =$$

$$= \frac{2}{1-x_1^2} \begin{pmatrix} \frac{2x_1}{1-x_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1+x_1^2}{1-x_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что столбцы этой матрицы образуют ортонорм. базис пр-ва $T_{\mu(x)} H^n$, т.е. $d_x\mu$ — гомотетия с коэф. $\frac{2}{1-x_1^2} \Rightarrow g_B = \left(\frac{2}{1-x_1^2}\right)^2 g_E$.

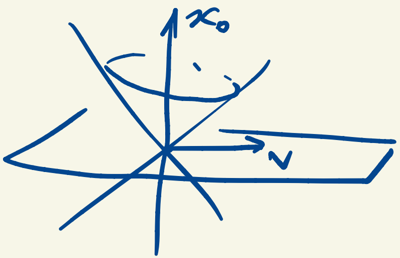
Следствие Модель B^n — конформная в том смысле, что гипербол. углы = евклидовым.

Предл. k-мерные пл-ти в модели B^n = k-мерные подпр-ва $\mathbb{R}^n$ или k-мер сферы $\perp \partial B^n = S^{n-1}$.

Идея док-ва:

1) k-мер. пл-ть = $\bigcap$ гиперпл-тей, т.е. дост. рассм. гиперпл-ть в H^n = $v^\perp \cap H^n$, где $\langle v, v\rangle > 0$.

2) Разобрать 2 случая: v — горизонт. вектор
v — не горизонт, тогда м.сч., что $v = (1, 0, \dots, 0, a)$, где $a > 1$.



Тогда $v^\perp = H^n \cap \{a x_0 = x_n\}$.
Далее посмотреть на образ гиперпл-ти и убедиться, что это будет сфера с центром (?) $(0, 0, \dots, a)$.

Опр. Пусть $S(x_0, r)$ — сфера в $\mathbb{R}^n$ с центром x_0 и радиусом r.

Тогда инверсия отн. $S(x_0, r)$ есть $\varphi(x) = x_0 + r^2 \dfrac{x - x_0}{\|x - x_0\|^2}$.

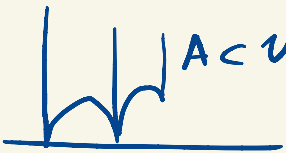
Заметим, что $\exists$ инв. $\varphi : B^n \to U^n$:

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0, -1) + 2\frac{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + 1)}{\|x\|^2 + 2x_n + 1} =$$

$$= \frac{1}{\|x\|^2 + 2x_n + 1}\left(2x_1, \dots, 2x_{n-1}, 1 + \|x\|^2\right).$$

Предл. $g_U = \dfrac{1}{x_n^2} g_E$.

Следствие



$A \subset U^2 \cong H^2$, $U^2 = \langle x, y \rangle, y > 0$

$$\mathrm{Area}(A) = \int_A \frac{dx\,dy}{y^2}.$$

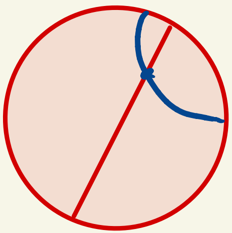
2. Взаимное расположение подпр-в

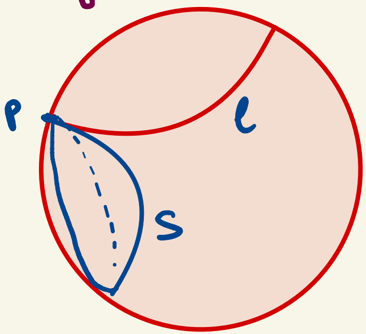
Теор Пусть S и S' — две пл-ти в H^n. Тогда возм. 3 след. конфигурации

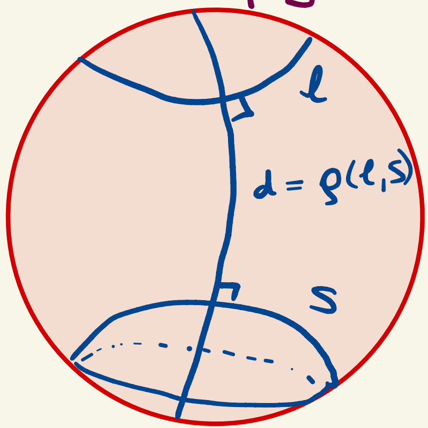
1) $S \cap S' \neq \emptyset$ (пересекаются в H^n)

2) $S \cap S' = \emptyset$ и $\bar{S} \cap \bar{S}' = \{pt\} \in \partial H^n$, $\rho(S, S') = 0$ и не существует геодезической $\perp$ обеим: S и S'.

3) $\bar{S} \cap \bar{S}' = \emptyset$. В этом случае $\rho(S, S') > 0$ и существует единств. геод. $\ell \perp S$, $\ell \perp S'$, причем отрезок ℓ между S и S' имеет длину $\rho(S, S')$, и такой отрезок нужной длины тоже единств.





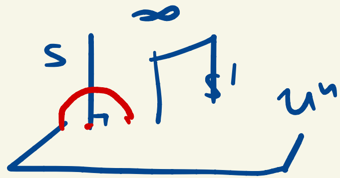


Док-во: Если $\bar S \cap \bar S' \ni \{p,q\}$, то $\underset{\text{геод.}}{\overline{pq}} \subset \bar S \cap \bar S'$ и $S \cap S' \neq \emptyset$

В пункте (2) восп. моделью U^n. Будем считать, что $\bar S \cap \bar S' = \infty$

Тогда S и S' – вертик. евкл. пл-ти, след.,

$\rho(S, S') = 0$ и $\nexists$ геод $\perp S$ и S'.



Для док-ва п.(3) рассм. $x_j \in S$ и $x_j' \in S'$: $\rho(x_j, x_j') \to \underset{\rho(S,S')}{\overset{\parallel}{d}}$.

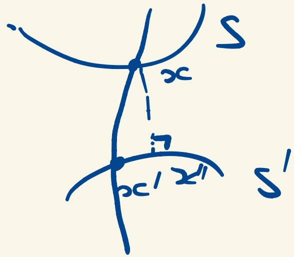
Поскольку $\overline{H^n}$ – компакт, то с точн. до подпос-ти

$x_j \to x \in \bar S$ и $x_j' \to x' \in \bar S'$. Заметим, что $x = x'$.

Пусть $\ell = \overline{xx'}$ – прямая. $L[x, x'] = d = \rho(x, x')$.

Если $\angle(\ell, S') < \pi/2$, то тогда $\exists x''$:

$xx'' \perp S'$ и $\rho(x, x'') < \underbrace{\rho(x, x')}_{= d}$ – против.



Можно реализовать S и S' как сферы в B^n,

где перпенд. геод ℓ – диаметр. Отсюда легко видеть, что других общих перпенд. нет. ☒

$\mathbb{H}^2$ – диск радиуса r в пл-ти

Теор 1) $\mathrm{Area}(D(r)) = A(r) = \pi\left(e^{r/2} - e^{-r/2}\right)^2 = 4\pi \sinh^2 \frac{r}{2} =$

$= 2\pi(\cosh r - 1)$.

2) $\mathrm{Area}(\Delta(\alpha,\beta,\gamma)) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$.

$\alpha, \beta, \gamma \geq 0$

Док-во: 1) Пусть $D(r)$ – диск с центром в 0 в модели B^2.

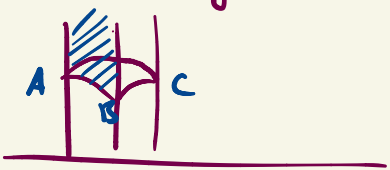
Тогда нетрудно заметить, что $D(r)$ – евкл. диск радиуса $\tanh r/2$.

Отсюда имеем: $A(r) = \int\limits_{D(r)} \left(\frac{2}{1-x^2-y^2}\right)^2 dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\operatorname{th} r/2} \left(\frac{2}{1-\rho^2}\right)^2 \rho\, d\rho\, d\theta =$

$= 2\pi \left.\frac{2}{1-\rho^2}\right|_0^{\tanh r/2} = 4\pi\left(\frac{1}{1-\operatorname{th}^2 r/2} - 1\right) = 4\pi \cdot \sinh^2 r/2$

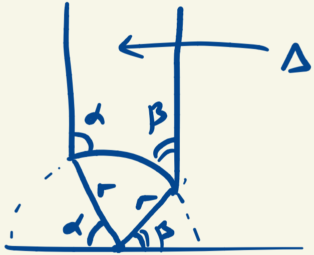
2) Возьм. модель U^2: $\mathrm{Area}(ABC) = \mathrm{Area}(AB\infty) + \mathrm{Area}(BC\infty) -$

$- \mathrm{Area}(AC\infty)$



① Остается посчитать $\mathrm{Area}(AB\infty)$: $\Delta(AB\infty) = \{(r\cos\theta, y) \mid \beta \le \theta \le \pi-\alpha,\ y \ge r\sin\theta\}$.

$\Delta(AB\infty) = T$



$\Delta(\alpha,\beta,0) = AB\infty = T$.

Отсюда имеем $\mathrm{Area}(AB\infty) \ominus$

$$\ominus \int_T \frac{1}{y^2}\,dx\,dy = \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \int_{r\sin\theta}^{\infty} \frac{-r\sin\theta}{y^2}\,dy\,d\theta =$$

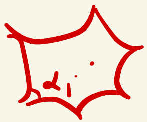
$$= \int_{\pi-\alpha}^{\beta} -r\sin\theta \cdot \frac{1}{y}\Big|_{r\sin\theta}^{\infty} d\theta = \int_{\beta}^{\pi-\alpha} \frac{r\sin\theta}{r\sin\theta}\,d\theta = \pi-\alpha-\beta.$$

Отсюда все следует.

Следствие 1) $\Delta(\alpha,\beta,\gamma) \subset H^2 \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma < \pi$.

2) Пусть P – многоуг. с внутр. угл. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, тогда

$$\mathrm{Area}(P) = (n-2)\pi - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$$



Продолж. следует: классификация движений
- эллиптические
- параболические
- локсодромические.