

## РЕГУЛЯРНЫЕ И КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ

ДГТ 3♦1. Проверьте, что отображение  $\mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $t \mapsto \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}, \frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)$ , является вложением.

ДГТ 3♦2. Докажите, что гладкое отображение  $f(t) = (t, t^2, t^3)$  является вложением. Постройте такое гладкое отображение  $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  максимального ранга, что  $f(\mathbf{R}) = F^{-1}((0, 0))$ .

ДГТ 3♦3. Проверьте, что 0 является единственным критическим значением отображения  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ . Проверьте, что если  $ab > 0$ , то  $f^{-1}(a)$  и  $f^{-1}(b)$  диффеоморфны.

ДГТ 3♦4. Покажите, что множество матриц ранга 1 является гладким 3-мерным подмногообразием в пространстве  $\text{Mat}_2(\mathbf{R})$  квадратных матриц  $2 \times 2$ .

ДГТ 3♦5. В каких точках отображение  $(x, y) \mapsto (x, xy, y^2)$  является погружением? Какое можно выкинуть одномерное подмногообразие в  $\mathbf{R}^2$ , чтобы отображение стало вложением?

## Дополнительные задачи

ДГТ 3♦6. Решить одну из двух задач:

ДГТ 2♦3 Выяснить, является ли гладким подмногообразием в  $\mathbf{R}^2 = \langle x, y \rangle$  подмножество, заданное уравнением  $x^4 + y^4 = 8xy^2$ .

ДГТ 2♦7 Выяснить, является ли гладким подмногообразием в  $\mathbf{R}^3 = \langle x, y, z \rangle$  подмножество, заданное уравнением  $x^2(z - 1) + y^2z = 0$ .

ДГТ 3♦7. Покажите, что множество матриц ранга  $r$  является гладким подмногообразием коразмерности  $(m - r)(n - r)$  в пространстве  $\text{Mat}_{m,n}(\mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}^{mn}$ .

ДГТ 3♦8. (Задача ДГТ 2♦8) Найти критические точки и значения гладкого отображения  $F: \text{SO}_3(\mathbf{R}) \rightarrow \text{SO}_3(\mathbf{R})$ , где  $F(A) = A^3$ .

## РЕГУЛЯРНЫЕ И КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ

ДГТ 3♦1. Проверьте, что отображение  $\mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $t \mapsto \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}, \frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)$ , является вложением.

ДГТ 3♦2. Докажите, что гладкое отображение  $f(t) = (t, t^2, t^3)$  является вложением. Постройте такое гладкое отображение  $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  максимального ранга, что  $f(\mathbf{R}) = F^{-1}((0, 0))$ .

ДГТ 3♦3. Проверьте, что 0 является единственным критическим значением отображения  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ . Проверьте, что если  $ab > 0$ , то  $f^{-1}(a)$  и  $f^{-1}(b)$  диффеоморфны.

ДГТ 3♦4. Покажите, что множество матриц ранга 1 является гладким 3-мерным подмногообразием в пространстве  $\text{Mat}_2(\mathbf{R})$  квадратных матриц  $2 \times 2$ .

ДГТ 3♦5. В каких точках отображение  $(x, y) \mapsto (x, xy, y^2)$  является погружением? Какое можно выкинуть одномерное подмногообразие в  $\mathbf{R}^2$ , чтобы отображение стало вложением?

## Дополнительные задачи

ДГТ 3♦6. Решить одну из двух задач:

ДГТ 2♦3 Выяснить, является ли гладким подмногообразием в  $\mathbf{R}^2 = \langle x, y \rangle$  подмножество, заданное уравнением  $x^4 + y^4 = 8xy^2$ .

ДГТ 2♦7 Выяснить, является ли гладким подмногообразием в  $\mathbf{R}^3 = \langle x, y, z \rangle$  подмножество, заданное уравнением  $x^2(z - 1) + y^2z = 0$ .

ДГТ 3♦7. Покажите, что множество матриц ранга  $r$  является гладким подмногообразием коразмерности  $(m - r)(n - r)$  в пространстве  $\text{Mat}_{m,n}(\mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}^{mn}$ .

ДГТ 3♦8. (Задача ДГТ 2♦8) Найти критические точки и значения гладкого отображения  $F: \text{SO}_3(\mathbf{R}) \rightarrow \text{SO}_3(\mathbf{R})$ , где  $F(A) = A^3$ .