Подмногообразия. Трансверсальность

Подмногообразия $S_1, S_2 \subset M$ *трансверсальны*, если в каждой точке $x \in S_1 \cap S_2$ выполнено $T_x S_1 + T_x S_2 = T_x M$.

Пусть $F\colon N \to M$ — гладкое отображение, $S \subset M$. Тогда F и S *трансверсальны*, если для всякой точки $x \in F^{-1}(S)$ выполнено $T_{F(x)}M = T_{F(x)}S + d_x F(T_x N)$.

Теорема 1. *Рассмотрим гладкое сюръективное отображение $F\colon X \to Y$, где $\partial X \neq \varnothing$, $\partial Y = \varnothing$. Предположим, что оба отображения F и $\partial F = F|_{\partial X}$ трансверсальны подмногообразию без края $Z \subset Y$. Тогда $F^{-1}(Z)$ — подмногообразие с краем*

$$\partial F^{-1}(Z) = F^{-1}(Z) \cap \partial X,$$

причем $\operatorname{codim}_X F^{-1}(Z) = \operatorname{codim}_Y Z$.

ДГТ 4◇1. Пересекаются ли трансверсально в $\mathbf{R}^2$ две единичные окружности с центрами $(1;0)$ и $(-1;0)$? А с центрами $(1;0)$ и $(0;1)$?

ДГТ 4◇2. Для каких значений $a \in \mathbf{R}$ гиперболоид $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ пересекает сферу $x^2 + y^2 + z^2 = a$ трансверсально?

ДГТ 4◇3. Пусть отображение $f\colon \mathbf{R}^3_+ \to \mathbf{R}$ задано следующим образом $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + xz$. Докажите, что $f^{-1}(1)$ является подмногообразием с краем, и найдите его край.

ДГТ 4◇4. Пусть $X, Y \subset Z$ — два трансверсальных подмногообразия. Докажите, что для всякой точки $z \in X \cap Y$ выполнено $T_z(X \cap Y) = T_z X \cap T_z Y$.

Дополнительные задачи

ДГТ 4◇5. Докажите теорему 1 для случая, когда Z — связное подмногообразие и $\dim Z \leqslant 1$.

ДГТ 4◇6. Докажите теорему 1 для случая, когда Z — связное компактное подмногообразие и $\dim Z = 2$.