Гиперболическая геометрия и пространства Лобачевского

Лекция 4: модели пространства Лобачевского; планиметрия

Богачев Николай Владимирович

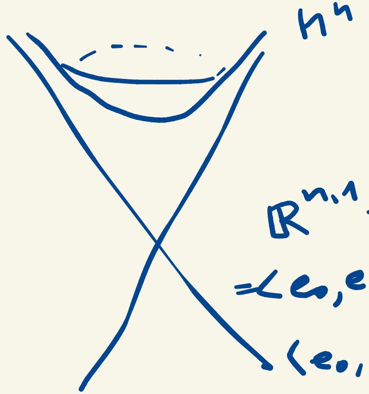
ИППИ РАН & МФТИ

Весна 2022

Содержание

1.

1. Изометричные модели пр-ва H^n



$\mathbb{R}^{n,1} = \langle e_0, e_1, \dots, e_n \rangle$.

$(e_0, e_0) = -1$

$(e_j, e_j) = +1$

$j = 1, \dots, n$.

I Вект. модель пр-ва H^n:

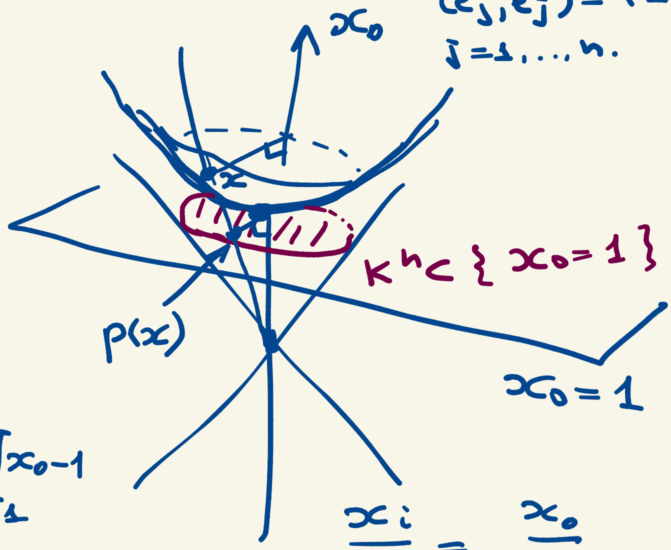
$$H^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid (x,x) = -1,\ x_0 > 0 \}$$

$x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, где

$$(x,y) = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

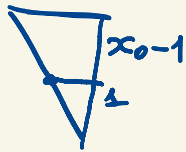
$$\cosh \rho(x,y) = -(x,y).$$

II Проективная модель Клейна K^n:



$$p: H^n \to K^n = \{ (1, \underset{\bar{x}}{\underbrace{\bar{x}}}) \mid \|\bar{x}\|_E < 1 \}.$$

$$p(x) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right)$$



$$\frac{x_i}{\bar{x}_i} = \frac{x_0}{1}$$

Вполне геодезические подмногообр-я $=$ плоскости в H^n $=$ сечения H^n плоскостями: проецируются в сечения шара K^n плоскостями, проход. через центр.

Значит, прямые в модели K^n $=$ хорды шара.

Определим метрику $\rho_H(x,y) =: \rho_K(p(x),p(y))$.

(или $\rho_K(\hat{x},\hat{y}) = \rho_H(p^{-1}(\hat{x}),p^{-1}(\hat{y}))$.)

Предл. $\hat{x}=(1,\bar{x})$
$$\cosh \rho_K(\hat{x},\hat{y}) = \cosh \rho_K(\bar{x},\bar{y}) = \frac{1-\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sqrt{(1-\|\bar{x}\|^2)(1-\|\bar{y}\|^2)}},$$
где $\bar{x}\cdot\bar{y}$ – станд. евкл. скал. умн; $\|\bar{x}\|^2=\bar{x}\cdot\bar{x}$.

Док-во: Запишем обратное отобр. $p^{-1}: K^n \subset \mathbb{R}^n \to H^n$: $\bar{x}\in\langle e_1,\dots,e_n\rangle \mapsto (x_0,\bar{x})\in\mathbb{R}^{n,1}$.

$$q(x) = p^{-1}(\bar{x}) = \frac{\bar{x}+e_0}{\|\bar{x}+e_0\|}.$$

Тогда $\cosh \rho_K(\bar{x},\bar{y}) =$
$$= \cosh \rho_H(q(\bar{x}),q(\bar{y})) = -\left\langle \frac{\bar{x}+e_0}{\|\bar{x}+e_0\|}, \frac{\bar{y}+e_0}{\|\bar{y}+e_0\|}\right\rangle = \frac{1-\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sqrt{(1-\bar{x}\cdot\bar{x})(1-\bar{y}\cdot\bar{y})}}.$$

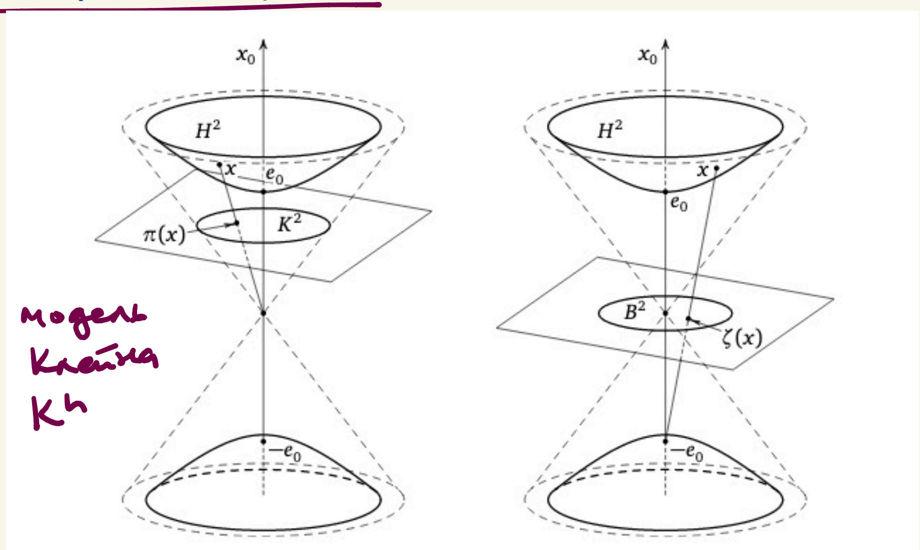
III Конформная модель Пуанкаре в шаре B^n

Рассм. стереограф. проекцию

$\zeta : H^n \to B^n \subset \mathbb{R}^n = \{x_0 = 0\}$.

$$\zeta(x) = \left(\frac{x_1}{1+x_0}, \dots, \frac{x_n}{1+x_0}\right).$$

$x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$



модель Клейна K^n

Построим обратное отобр.

$\zeta^{-1} : B^n \to H^n$

$\zeta^{-1}(\bar{x}) = \bar{x} + \lambda(\bar{x} + e_0)$, где $\langle \zeta^{-1}(\bar{x}), \zeta^{-1}(\bar{x}) \rangle = -1$.

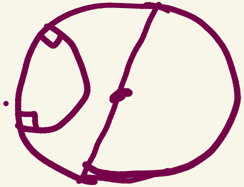
Нетрудно увидеть, что $\zeta^{-1}(\bar{x}) = \left(\frac{1+\|\bar{x}\|^2}{1-\|\bar{x}\|^2}, \frac{2x_1}{1-\|\bar{x}\|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1-\|\bar{x}\|^2}\right)$.

Определим метрику в B^n: $\rho_B(\bar{x}, \bar{y}) := \rho_H(\zeta^{-1}(\bar{x}), \zeta^{-1}(\bar{y}))$.

Предл. $\cosh \rho_B(\bar{x}, \bar{y}) = 1 + \dfrac{2\|\bar{x} - \bar{y}\|}{(1-\|\bar{x}\|^2)(1-\|\bar{y}\|^2)}$.

Теор. Плоскости в H^n переходят под действием ξ в центр. сечения шара B^n или в куски сфер $\perp \partial B^n = S^{n-1}$.

В частн., прямые в модели B^n = диаметры или дуги окр-тей $\perp$ абсолюту.



IV Конформная модель Пуанкаре U^n в полупр-ве

Рассм. верхнее (замкн.) полупр-во $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n \geqslant 0\}$.

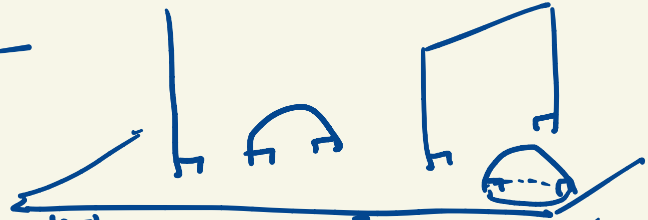
и его внутренность $U = \mathrm{int}(\mathbb{R}^n_+) = \{x \mid x_n > 0\}$.

Существует конф. отобр.: $B^n \xrightarrow{\text{диффео}} U^n$ (инверсия),

которое переводит $\left\{\begin{matrix}\text{плоскости} \\ \text{и} \\ \text{сферы}\end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{пл-ти} \\ \text{и} \\ \text{сферы}\end{matrix}\right\}$.

U^n — конф. модель для H^n в верхнем полупр-ве.

Плоскости и прямые в U^n —



$\mathbb{R}^{n-1} = \{x_n = 0\}$

Рассмотрим отображение: $h: U^n \to B^n$, где

$h = \sigma \circ R$, где R – отражение относит. гиперплоски $\mathbb{R}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$,
σ – инверсия относит. сферы $S(e_n; \sqrt{2})$.

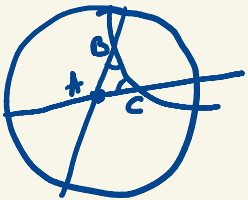
Определим метрику в U^n: $\rho_U(x,y) = \rho_B(h(x), h(y))$.

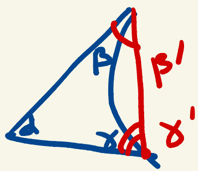
Предл. $\cosh \rho_U(x,y) = 1 + \dfrac{\|x-y\|^2}{2x_n y_n}$.

Замеч. 1) h, σ, R – конф. отобр., т.е. сохр. углы

2) модели B^n и U^n тоже обе конформны; в частн., гиперб. углы между прямыми, плоскостями = евклидовым углам между соотв. плоскостями, сферами, и т.д.

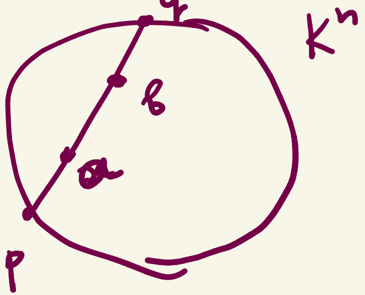
3) В $\Delta(\alpha,\beta,\gamma) \subset H^2$ $\alpha+\beta+\gamma < \pi$.





$\alpha+\beta+\gamma < \alpha+\beta'+\gamma' = \pi$.

Предл.



Тогда $\rho_K(a,b) = \frac{1}{2}\left|\ln[a,b;p,q]\right|$.

Док-во: Можно считать, что $a = (a_0, a_1, 0, \ldots, 0)$ и $b = (b_0, b_1, 0, \ldots, 0)$, и

геодезическая γ, соед. a и b, зад. ур-ми $x_2 = \ldots = x_n = 0$,

$x_0 = \cosh t$,

$x_1 = \sinh t$.

Тогда $\rho(a,b) = |t_a - t_b|$.

Рассм. проекцию $H^n \to K^n$: $a \mapsto \hat{a}$, где

$\hat{a} = (1, \bar{a}) = \left(1, \frac{a_1}{a_0}, 0, \ldots, 0\right)$; $\hat{b} = \left(1, \frac{b_1}{b_0}, 0, \ldots, 0\right)$.

Тогда $(\hat{a}\hat{b}) \cap (\partial K^n = S^{n-1}) = \left\{\begin{matrix} p = (1, 1, 0, \ldots, 0) \\ q = (1, -1, 0, \ldots, 0) \end{matrix}\right\}$.

Далее, $\left|[\hat{a},\hat{b};\hat{p},\hat{q}]\right| = \dfrac{\|\hat{a}\hat{p}\|}{\|\hat{a}\hat{q}\|} : \dfrac{\|\hat{b}\hat{p}\|}{\|\hat{b}\hat{q}\|} =$

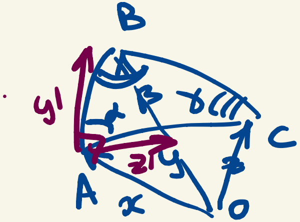
$$= \frac{\left|\frac{a_1}{a_0}-1\right|}{\left|\frac{a_1}{a_0}+1\right|} : \frac{\left|\frac{b_1}{b_0}-1\right|}{\left|\frac{b_1}{b_0}+1\right|} = \frac{|\tanh t_a - 1|}{|\tanh t_a + 1|} : \frac{|\tanh t_b - 1|}{|\tanh t_b + 1|} =$$

$\cosh t_a = a_0$, $\sinh t_a = a_1$

$= e^{2|t_a - t_b|}$, откуда $\rho(\hat{a},\hat{b}) = |t_a - t_b| = \frac{1}{2}\ln\left|[\hat{a},\hat{b};\hat{p},\hat{q}]\right|$. $\boxtimes$

2. Планиметрия: метрические соотн. в Δ

Рассм. $\Delta(x,y,z)$, где $x,y,z \in H^2$ (вект. модель).



$x = \overline{OA}$, $y = \overline{OB}$, $z = \overline{OC}$

Заметим, что $y' = y + (x,y)x \in \operatorname{span}(x,y)$,

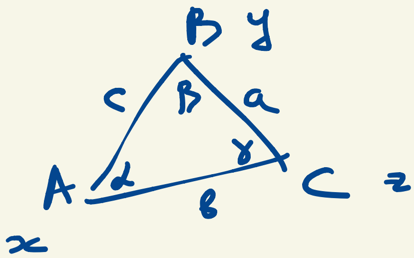
$y' \perp x$ $\big((x,y) + (x,y)(-1) = 0\big)$, касается стороны AB.

Аналогично, вектор $z' = z + (z,x)\cdot x$ с началом в A,

касающийся стороны AC.

Тогда

$$\cos\angle BAC = \frac{(y',z')}{\sqrt{(y',y')\cdot(z',z')}} = \frac{(z,y)+(z,x)(x,y)}{\sqrt{(1-(x,y)^2)(1-(z,x)^2)}}$$



На пл-ти H^2 имеем:

$$(x,y) = -\cosh c$$
$$(x,z) = -\cosh b$$
$$(y,z) = -\cosh a$$

Отсюда $\cos\alpha = \dfrac{-\cosh a + \cosh b \cdot \cosh c}{\sinh b \cdot \sinh c}$ I Теор. косинусов.

Теор (I теор. косинусов)

$$\cosh a = \cosh b \cdot \cosh c - \sinh b \cdot \sinh c \cdot \cos \alpha$$

Теор (Пифагор для H^2): если $\alpha = \pi/2$, то $\cosh a = \cosh b \cdot \cosh c$.

Теор (от. метрич. соотн-я в Δ)

(двойств. или II теор. косин.)

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cosh a.$$

(Теор. синусов)

$$\frac{\sin \alpha}{\sinh a} = \frac{\sin \beta}{\sinh b} = \frac{\sin \gamma}{\sinh c}.$$

Док-во Теор. синусов $\Leftarrow$ Теор косинусов..

(Теор косинусов)* $\Leftarrow$ простых выкладок ? <u>Упр</u>.
на x, y, z.

$\boxtimes$