Регулярные и критические точки

ДГТ 3◇1. Проверьте, что отображение $\mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^2$, $t \mapsto \left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}, \frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)$, является вложением.

ДГТ 3◇2. Докажите, что гладкое отображение $f(t) = (t, t^2, t^3)$ является вложением. Постройте такое гладкое отображение $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ максимального ранга, что $f(\mathbf{R}) = F^{-1}\big((0,0)\big)$.

ДГТ 3◇3. Проверьте, что 0 является единственным критическим значением отображения $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$. Проверьте, что если $ab > 0$, то $f^{-1}(a)$ и $f^{-1}(b)$ диффеоморфны.

ДГТ 3◇4. В каких точках отображение $(x,y) \mapsto (x, xy, y^2)$ является вложением, а в каких — погружением?

ДГТ 3◇5. Покажите, что множество матриц ранга 1 является гладким 3-мерным подмногообразием в пространстве $\mathrm{Mat}_2(\mathbf{R})$ квадратных матриц 2×2.

Дополнительные задачи

ДГТ 3◇6. Решить одну из двух задач:

ДГТ 2◇3 Выяснить, является ли гладким подмногообразием в $\mathbf{R}^2 = \langle x, y\rangle$ подмножество, заданное уравнением $x^4 + y^4 = 8xy^2$.

ДГТ 2◇7 Выяснить, является ли гладким подмногообразием в $\mathbf{R}^3 = \langle x, y, z\rangle$ подмножество, заданное уравнением $x^2(z-1) + y^2 z = 0$.

ДГТ 3◇7. Покажите, что множество матриц ранга r является гладким подмногообразием *коразмерности* $(m-r)(n-r)$ в пространстве $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}^{mn}$.

ДГТ 3◇8. (Задача ДГТ 2◇8) Найти критические точки и значения гладкого отображения $F\colon \mathrm{SO}_3(\mathbf{R}) \to \mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$, где $F(A) = A^3$.