Римановы многообразия

Пусть $p \in M$ — точка в римановом многообразии M, $v \in T_pM$ — единичный касательный вектор. Тогда известно, что существует единственная максимальная нетривиальная геодезическая γ, выходящая из точки p в направлении v с единичной скоростью.

ДГТ 13◇1. Пусть $M = \mathbf{S}^n$, $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{H}^n$. Покажите, что:

(a) $\gamma(t) = \cos(t)\cdot p + \sin(t)\cdot v$, если $M = \mathbf{S}^n$;

(b) $\gamma(t) = p + tv$, если $M = \mathbf{R}^n$;

(c) $\gamma(t) = \cosh(t)\cdot p + \sinh(t)\cdot v$, если $M = \mathbf{H}^n$.

ДГТ 13◇2. Пусть $\mathbb{U}^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0\}$ с гиперболической метрикой

$$g_U = (dx \otimes dx + dy \otimes dy)/y^2.$$

Какова матрица Грама метрики g_U ? Покажите, что геодезические в этой метрики суть вертикальные прямые $x = \mathrm{const}$ и полуокружности с центром на оси x.

ДГТ 13◇3. В предыдущей задаче элемент площади есть 2-мерная форма объема, которая равна $\mathrm{vol}_g = \sqrt{\det(g_U)}\cdot dx \wedge dy$. Найдите ее.

(a) Найдите площадь идеального треугольника.

(b) Найдите площадь гиперболического треугольника в $\mathbb{U}^2$ с углами α, β, γ.