Группы и алгебры Ли

Группа Ли — это группа, снабжённая структурой гладкого многообразия таким образом, что групповые операции являются гладкими отображениями. Группа Ли $G \subset \mathrm{GL}_n(k)$, где $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, называется *линейной группой Ли*.

Векторное пространство, снабженное кососимметрической билинейной операцией $[\cdot,\cdot]$, удовлетворяющей соотношению Якоби, называется *алгеброй Ли*. Касательное пространство $\mathrm{T}_e G$ линейной группы Ли G можно снабдить естественной операцией $[A,B] = AB - BA$.

Известно, что связная группа Ли (или связная компонента G°) порождается любой своей окрестностью единицы: $G = \langle U(e)\rangle$, $e \in G$.

Если группа Ли G задаётся как множество уровня $(c_1,\dots,c_d)$ для гладкого отображения

$$F = (F_1,\dots,F_d)\colon \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^d,$$

где $\mathrm{rk}\, dF = d$ всюду на G, то тогда алгебра Ли $\mathfrak{g} = T_e G = \mathrm{Lie}(G)$ есть множество решений системы линейных уравнений

$$d_e F_1(dx_{11},\dots,dx_{nn}) = 0,\ \dots,\ d_e F_d(dx_{11},\dots,dx_{nn}) = 0.$$

ДГТ 5⋄1. Построить изоморфизм групп Ли $\mathbf{R}$ с какой-нибудь подгруппой $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$.

ДГТ 5⋄2. Представьте торы $(\mathbf{R}^*)^n$ (произведение прямых без точки), $(\mathbf{C}^*)^n$ (произведение плоскостей без точки), $\mathbf{T}^n$ (произведение окружностей) как матричные группы Ли.

ДГТ 5⋄3. Опишите алгебру Ли $\mathfrak{so}_n(\mathbf{R}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{SO}_n(\mathbf{R}))$ (из каких матриц она состоит?).

ДГТ 5⋄4. Докажите, что $\mathrm{SO}_{p,q}(\mathbf{R})$ является группой Ли, найдите ее размерность, опишите в матричном виде ее алгебру Ли $\mathfrak{so}_{p,q}(\mathbf{R})$ (из каких матриц она состоит?).

ДГТ 5⋄5. Докажите, что линейная группа Ли G связна $\Longleftrightarrow$ G линейно связна.

Дополнительные задачи

ДГТ 5⋄6. Показать, что $e^A e^B = e^{A+B} \cdot \exp\left(\frac{1}{2}[A,B]\right)$, где $A,B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$.

ДГТ 5⋄7. Доказать, что группа Ли $\mathrm{SO}_{n,1}$ состоит из двух связных компонент, причем $\mathrm{SO}^\circ_{n,1}$ состоит из преобразований, оставляющих на месте связную компоненту $\mathbf{H}^n$ гиперболоида

$$\langle x,x\rangle = x_1^2 + \ldots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1,$$

где $\langle x,y\rangle$ — скалярное произведение сигнатуры $(n,1)$ в пространстве $\mathbf{R}^{n,1}$.

Замечание: указанная здесь связная компонента $\mathbf{H}^n$ *— не что иное, как знаменитое пространство Лобачевского (его векторная модель), а группа* $\mathrm{SO}^\circ_{n,1}$ *является его полной группой движений* $\mathrm{Isom}\,\mathbf{H}^n$ *для (римановой) метрики, заданной с помощью формулы* $\cosh\rho(x,y) = -\langle x,y\rangle$.

ДГТ 5⋄8. Докажите, что группа $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ не связна, а группы $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbf{C})$ и $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ связны.