Группы и алгебры Ли - 2

Введем стандартные обозначения: G — группа Ли, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G) = TG$ — ее касательная алгебра Ли, $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbf{C} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$ — комплексификация алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (в этом случае $\mathfrak{g}$ и G называются вещественными формами алгебры $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ и группы $G_{\mathbf{C}} = G(\mathbf{C})$ соответственно).

Например, ясно, что группы Ли $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{SO}_{p,q}(\mathbf{R})$ — вещественные формы групп Ли $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbf{C})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbf{C})$, $\mathrm{SO}_{p+q}(\mathbf{C})$, соответственно.

Связная группа Ли G называется простой, если она не имеет нетривиальных связных нормальных подгрупп (NB: это определение слабее классического определения простых групп). Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется простой, если она не имеет нетривиальных идеалов. Известно, что если G связна, то G проста тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ проста.

ДГТ 5◇1. Докажите, что группа Ли $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ проста, показав, что ее алгебра Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ проста.

Указание: Рассмотрите порождающие матрицы:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите коммутаторы $[H,E_+]$, $[H,E_-]$ и $[E_+,E_-]$. Далее, возьмите произвольный элемент X идеала $\mathfrak{a}$ в базисе H,E_+,E_- и найдите $[H,X]$ и $[H,[H,X]]$.

ДГТ 5◇2. Докажите, что группа Ли $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$ проста.

ДГТ 5◇3. Докажите, что если комплексификация $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ проста, то и алгебра Ли $\mathfrak{g}$ проста. Докажите, что группа Ли $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ проста.

ДГТ 5◇4. Покажите, что группа Ли SU_n (как группа Ли над $\mathbf{R}$) является вещественной формой группы Ли $\mathrm{SL}_n(\mathbf{C})$, а группа U_n — вещественная форма $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Выведите отсюда, что SU_2 — простая группа Ли.

Дополнительные задачи

ДГТ 5◇5. Докажите, что $\mathrm{Ad}\colon \mathrm{SU}_2 \to \mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$ — сюръективный гомоморфизм с ядром $\{\pm E\}$. Выведите отсюда, что SU_2 — простая группа Ли.

ДГТ 5◇6. Докажите, что группа Ли $\mathrm{SO}_4(\mathbf{R})$ не проста.

Указание: Построить гомоморфизм $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2 \to \mathrm{SO}_4(\mathbf{R})$).

ДГТ 5◇7. Докажите, что $\mathrm{Ad}\colon \mathrm{SL}_2(\mathbf{R}) \to \mathrm{SO}_{2,1}(\mathbf{R})^\circ$ — сюръективный гомоморфизм с ядром $\{\pm E\}$. Выведите отсюда, что группа Ли $\mathrm{SO}_{2,1}(\mathbf{R})$ проста.

ДГТ 5◇8. Докажите, что $\mathrm{Ad}\colon \mathrm{SL}_2(\mathbf{C}) \to \mathrm{SO}_3(\mathbf{C})$ — сюръективный гомоморфизм с ядром $\{\pm E\}$. Выведите отсюда, что группа Ли $\mathrm{SO}_3(\mathbf{C})$ проста.