

Дифференциальная геометрия и топология

Лекция 13: риманова метрика и римановы многообразия,
геодезические, изометрии и движения, локальные изометрии и
накрытия

Богачев Николай Владимирович

ИППИ РАН & МФТИ

Весна 2022

Содержание

1. Риманова метрика и римановы многообразия
2. Примеры римановых метрик: I квадратичная форма поверхности
3. Расстояния (метрика) и геодезические
4. Полные римановы многообразия
5. Изометрии и локальные изометрии, накрытия, дискретные группы движений

1. Риманова метрика и римановы многообразия

Оп. Риманова метрика на гладком многообр. M — это положит. опред. симм. тензорное 2-поле, т.е. это

тензор $g = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i \otimes dx_j$, где $g_{ij} = g_{ji}$, и называ

(g_{ij}) = $G > 0$ (матрица Грама)

(g_{ij}) = $G > 0$ (положит. опр., т.к. $(Gv, v) > 0$ для $v \neq 0$).

(т.е. тензор g применяется к парам векторов (u, v) из $T_p M$).

Метрический тензор g — это по сути сечения симметрич.

квадратичного расстояния $\sqrt{g_p} > 0$ во всех $p \in M$.

$$S^2(T^*M)$$

То есть это симм. билин. форма g_{ij} , положит. опр.,
живущая в каждом сеч. $T_p M$ и гладко завис. от $p \in M$.

Оп Риманов многообразие (M, g) — это лице M ,
снабженное рим. метрикой g .

Пример 1) \mathbb{R}^n с риман. метрикой $g = dx_1 \otimes dx_1 + \dots + dx_n \otimes dx_n$.

Легко можно проверить обузнаг. $ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2$.
Это есть стандартной евклид. метрике.

2) Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — локале подмн-е. Тогда $T_p M \rightarrow$
 $\dim M = m$

m -мерка на \mathbb{R}^n . Мы можем оратишил
евкл. скал. умн-е (\cdot, \cdot) на $T_p M$, где $p \in M$.

Таким образом, мы получим индукционную с \mathbb{R}^n
риманову метрику на M .

Задача 2. Задана риманова метрика?

- Можем считать что метрика касат. векторами (и кривыми):

$$\cos L(u, v) = \frac{g_p(u, v)}{\sqrt{g_p(u, u) \cdot g_p(v, v)}}, \text{ где } u, v \in T_p M.$$

- Для векторов $\|v\| = \sqrt{g_p(v, v)}$ $\Rightarrow v \in T_p M$.

(т.е. риманова метрика — это аналог склн.)

Продолжим эту касат. векторы)

- Для кривых $\gamma(t)$: $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}$

$$Т. уга L(\gamma)|_{t \in [a, b]} = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

- Можно вычислить объем. Определим форму

объема: $\text{vol}_g = \text{vol}_M = \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \in \Omega^n(M)$.

т.е. $n = \dim M$.

Тогда для $U \subset M$ $\text{vol}(U) = \int_U \text{vol}_g$.

Заметим, что стандартный базис $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ ортогональный

в \mathbb{R}^n , так что при любом объеме для \mathbb{R}^n складывается симметрическим образом, т.к. $G = (g_{ij}) = E$.

Естественный вопрос: почему \exists Риманова метрика на M и сколько их?

Теор. Всекое гладкое мн-с M получает
риманову метрику. (и их может быть бескн.мног.)

Док-вх: Существование можно доказывать 2-мя
способами.

I сп: по теор Уитни З біз жерене $F: M \rightarrow \mathbb{R}^N$,
длялкк междуц. метрику с \mathbb{R}^N на $F(M)$,
затем с помощью зображ $F: M \rightarrow F(M)$
перенести на M .

II сп. Пусть $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ — атлас на M . В картигой
карти U_α гладкую $g_\alpha = \varphi_\alpha^* g_E$, же g_E — евкл.
метр.
(т.е. g_E в кок. коорд. имеет вид $g_E = \sum_{i,j} \delta_{ij} dx_i \otimes dx_j$
 $\in \mathbb{R}^n$)
 $= dx_1^2 + \dots + dx_n^2$.

Пусть h_2 - пяд. 1, подг. атласы $\{U_2, \varphi_2\}$,

тогда $g = \sum_{\lambda} h_2 g_{\lambda}$, т.е.

$$g_p(u, v) = \sum_{\lambda} h_2 g_{\lambda p}(u, v), \text{ где } \forall p, r \neq 0 \in \Gamma_p M \\ g_p(v, v) > 0. \quad \blacksquare$$

Пример: 1) Рассмотрим верхнюю полупл-ть $U^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$. На U^2 можно обозначить евклид. метрику $g_U = dx \otimes dx + dy \otimes dy = dx^2 + dy^2$, т.е. если $v = (v_1, v_2) \in \Gamma_p U^2$, то $g_E(v, v) = v_1^2 + v_2^2$.
 $(v = v_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \cdot \frac{\partial}{\partial y})$.

Но есть и другая - гиперболическая - метрика на U^2 :

$$g_u := \frac{dx \otimes dx + dy \otimes dy}{y^2}.$$

Онр. Рим. метрика (\mathbb{H}^2, g_u) — модель гиперболической плоскости \mathbb{H}^2 (она же можно вспомнить как модель верхней полуплоскости).

2. Примеры римановых метрик: I квадр. форма.

Пусть $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ — регул. поб-ть, $m < n$.

Напр., $f(u) = M \in \mathbb{R}^3$, $u \in \mathbb{R}^2$.

Тогда известно, что вектор $f_{u_j} = \frac{\partial f}{\partial u_j}$ образует

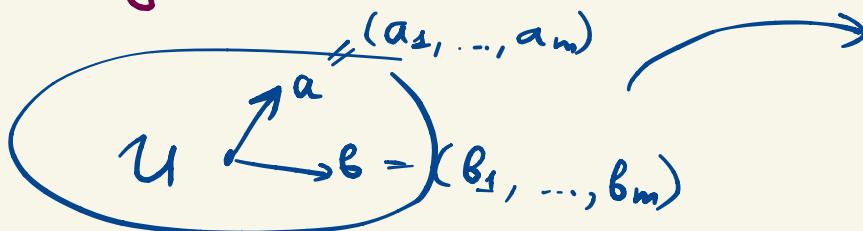
Сайчас уп-ва $T_p M$ ($n_{\text{н-р}} \in \mathbb{R}^n$).

Индуцируем скал. произв. $\in \mathbb{R}^n$ на $T_p M$ симм. обр.:

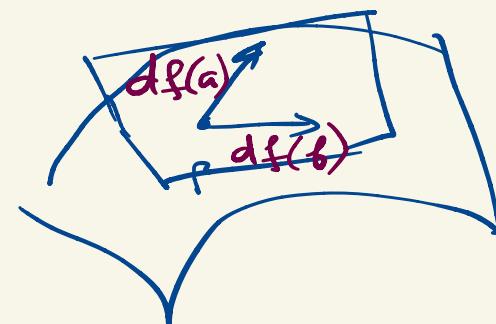
$$I(a, b) = \langle df(a), df(b) \rangle, \text{ где}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скал. произв. на \mathbb{R}^n .

посл. гд-е $m=2$:



$$f(u) \in \mathbb{R}^n$$



$$df(a) = a_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial u_1} + a_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial u_2}$$

Задача 1, 2, 3

$$I(a, b) = a^t G b = \underbrace{\widehat{a}_1 \widehat{a}_m}_{G} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \text{ где } G = \text{Гран}(f_{u_1}, \dots, f_{u_m}).$$

$$\text{т.е. } \text{Mat}(I) = \begin{pmatrix} \langle \frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_1} \rangle & \dots & \langle \frac{\partial f}{\partial u_m}, \frac{\partial f}{\partial u_1} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \frac{\partial f}{\partial u_m}, \frac{\partial f}{\partial u_m} \rangle & \dots & \langle \frac{\partial f}{\partial u_m}, \frac{\partial f}{\partial u_n} \rangle \end{pmatrix}$$

$I(x, \omega) - I$ квадр. форма на \mathbb{R}^n $f(u) = M \in \mathbb{R}^n$

Пример: $S^2 \subset \mathbb{R}^3$; $f: U \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

$$f(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} f_1(u_1, u_2) \\ f_2(u_1, u_2) \\ f_3(u_1, u_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u_1 \cdot \cos u_2 \\ \cos u_1 \cdot \sin u_2 \\ \sin u_1 \end{pmatrix}$$

$$f_{u_1} = (-\sin u_1 \cdot \cos u_2, -\sin u_1 \cdot \sin u_2, \cos u_1)$$

$$f_{u_2} = (-\cos u_1 \cdot \sin u_2, \cos u_1 \cdot \cos u_2, 0)$$

Тогда $G = \text{Mat}(I) = \text{Mat}(g_{S^2}) =$

$$= \begin{pmatrix} \langle f_{u_1}, f_{u_1} \rangle & \langle f_{u_1}, f_{u_2} \rangle \\ \langle f_{u_2}, f_{u_1} \rangle & \langle f_{u_2}, f_{u_2} \rangle \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin^2 u_1 (\cos^2 u_2 + \sin^2 u_2) + \cos^2 u_1 & \sin u_1 \cos u_1 \sin u_2 \cos u_2 - \\ & \quad \cdots \\ 0 & \cos^2 u_1 (\sin^2 u_2 + \cos^2 u_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u_1 \end{pmatrix}$$

— матрица Грама Римановой метрики на сфере S^2 , идущая из \mathbb{R}^3 .

Например, где $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, где $p = (p_1, p_2)$,

имеем $\|a\| = \sqrt{g_{S^2}(a, a)} = a_1^2 + \cos^2 p_1 \cdot a_2^2$.

$$\cos \angle(a, b) = \frac{g_{S^2}(a, b)}{\|a\| \cdot \|b\|} = \dots$$

3. Рассоクトные (метрика) и геодезические.

Пара (M, g) — связное риманово.

Оп. Расср. $g(p, q)$ между точками p и q на

рим. ми-ни M опред. слег. обр:

$$g(p, q) = \inf_{\gamma} L(\gamma), \text{ где } \gamma: [0, 1] \rightarrow M, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q.$$

Предл. (δ_ϵ док-бс) (M, g) — метрик. на M.

Оп. Геодезическая на M — это кривая

$\underline{\text{норм.}}$ $\underline{\gamma: I \subset \mathbb{R}} \rightarrow M$, где $\|\gamma'(t)\| = \text{const} = k$, и при

т.ом γ локально псевдогиперболич., т.е.

$$\forall t \in I \exists [t_0, t_1] \ni t: g(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) = L(\gamma)|_{[t_0, t_1]} = k(t_1 - t_0).$$

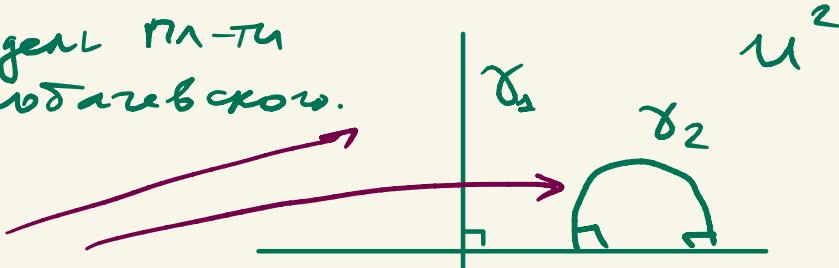
Примеры

1) (E^n, g_E) : геодезическое = евклидическое
пространство

2) $(S^n; g_{S^n})$, где S^n - 1-сфера в \mathbb{R}^{n+1} , геодезиче-
скими являются дуги "больших" окр-стей, которые
являются сечениями S^n 2-мерными пл-тами, проходя-
щими через центр сферы.

3). (M^2, g_M) - модель пл-ти
Лобачевского.

Геодезические



4. Понятие рим. ми-я

Опг 1.

Метрическое пр-во (M, g) наз. полным, если
всекај точка K има схог. $\subset M$.

Заметим, што еслі M -полно, то $M \setminus \{pt\}$ не полно.

Опг 2. Рим. ми-я (M, g) геодезически полно, если

всекај геодезически $\gamma: I \rightarrow M$ може бити
продолжена до геодезического $\tilde{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow M$, т.е.

$$\tilde{\gamma}|_I = \gamma.$$

Teop. (Хопф, Ринк).

Пусть (M, g) — связное Рим. ми-е.

Тогда са. уса. экв.:

- 1) (M, ϱ) — полное метр. мп-бо.
- 2) (M, g) — геод. полно.
- 3) $K \subset M$ — компакт $\Leftrightarrow K$ замкн. и огран. в M .

В случае, если M полно, то $\forall p \neq q \exists$ геод. γ , на которой расст. досчитается: $\varrho(p, q) = L(\gamma) \Big|_{\gamma^{-1}(p), \gamma^{-1}(q)}$

5. Изометрии и лок. изометрии

Онп Пусть $(M, g) \sim (N, h)$ — рим. ик-из.

Тогда диффеоморфизм $f: M \rightarrow N$ называется.

изометрией, если $g(u, v) = h(df_p(u), df_p(v))$
для каждого $p \in M$ и $u, v \in T_p M$.

Теор. Рассмотрим $f, g: M \rightarrow N$ — изометрии с. рим. ик-из.

Существует $\exists p \in M: f(p) = g(p)$ и $df_p = dg_p$, то тогда $f = g$.

Онп. $f: M \rightarrow N$ — лок. изометрия, если $\forall p \in M$
существует ок-нб $U \subset M$, т.е. $f|_U$ — изометрия: $U \rightarrow f(U)$.

Предл Пусть $f: M \rightarrow N$ — лок. изом. Тогда

1) если M полно, то f является накрывающим.

2) если f -накрывающее, то M -полное $\Leftrightarrow N$ полно.

Предл. Если $f: M \rightarrow N$ лок. изом. и накрывающее
степени d , то тогда $\text{vol}(M) = d \cdot \text{vol}(N)$.

Def. $\text{Isom}(M)$ — множество групповых изометрий
 $f: M \rightarrow M$.

Teor $\text{Isom}(M)$ — группа Ли.

Примеры 1) $\text{Isom}(S^n) = O_{n+1}(\mathbb{R})$

2) $\text{Isom}(E^n) = \mathbb{R}^n \times O_n(\mathbb{R}) \hookrightarrow GL_N(\mathbb{R})$.

изометрии в E^n : $x \mapsto Ax + b$, $A \in O_n(\mathbb{R})$
 $b \in \mathbb{R}^n$.

$$\xrightarrow{\quad} \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \in GL_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Оп. $\Gamma \subset Isom(M)$ — диспер. гр. движк., если
 все орбиты дисперсии и стабил. конечн.

Утв. Γ диспер. $\Leftrightarrow \Gamma \subset Isom(M) \Leftrightarrow \forall K \subset M$
 диспер. подмн-во K компакт
 в гр. M $\text{card}\{\gamma | \gamma(k) \cap K \neq \emptyset\} < +\infty$

Оп. $\Gamma \cap M$ свободн., если все

стабилизаторы $\Gamma_p = \text{Stab}(p) = \{\gamma | \gamma p = p\} = \text{Tp чл.}$
 $\{e\}$.

Теор Пусть $\Gamma \curvearrowright M$ диспер. и свободные изометрии. Тогда вся пр-ва орбита M/Γ сущ. единственная и определяет структуру, т.е. то же покрытие $\pi: M \rightarrow M/\Gamma$ обл. лок. изом.

Пример $\Gamma = \mathbb{Z}^2 \curvearrowright E^2$ паралл. переносами:
 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+m \\ y+n \end{pmatrix}$. Тогда $E^2/\mathbb{Z}^2 \cong \text{Top}$.

6. Однородные пространства - гладкие многообразия

Напомним, что стабилизатор точки $p \in X$ для группы G обозн. через G_p .

Оп. Действие $G \curvearrowright X$ свободно, если $G_p = \{e\} \quad \forall p \in X$.

(Дифференцируемое)

Оп. Действие $G \curvearrowright X$ собственное, если $\cap_{K \text{ компакт}} K \subset X$
 $\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ - компакт.

Теор. Если $G \curvearrowright X$ - собств., своб., дифф. \Rightarrow на X/G гладкое
мн-во X , т.о. $X/G = \{ \text{орбиты } Gx \mid x \in X \}$ - гладкое мн-во,
причем $\dim X/G = \dim X - \dim G$.

Теор Пусть $H \subset G$ — подгр. Ли. Тогда на G/H ∃ ср-ра
гладкого ми-ца, при чем $G \curvearrowright G/H$ дифф. и $\dim G/H =$
 $= \dim G - \dim H$.

Теор. Пусть $G \curvearrowright X$ транзитивно, $p \in X$ — некот. точка,
 $G_p = H$. Тогда G_p — замкн. подгруппа и естеств. отобр. $G/H \rightarrow X$, $gH \mapsto gp$, явл. диффеоморфизмом перестановочным с действием группы G .

Теор. Пусть G — группа Ли, $K \subset G$ — комп. подгр.
Тогда на ми-ци G/K ∃ G -инв. риманова метрика.
Если предс. изотропии $d: K \rightarrow GL(T_0 X)$, где $0 = eK \in X$,
то это, то метрика единств. с точностью до пост. множ-ва.

$$\underline{\text{Примеры}} \quad 1) \quad E^n = \frac{\text{Isom}(E^n)}{\text{Isom}(E^n)_0} = \frac{\mathbb{R}^n \times O_n(\mathbb{R})}{O_n(\mathbb{R})},$$

$$\text{т.к. } \text{Isom}(E^n) = \mathbb{R}^n \times O_n(\mathbb{R}) = G; \quad G_0 = O_n(\mathbb{R}).$$

$$2) \quad S^n = \frac{O_{n+1}(\mathbb{R})}{O_n(\mathbb{R})}.$$

$$3) \quad \text{Пр. по Лобачевского } H^n = \frac{O_{n+1}^+(\mathbb{R})}{O_n(\mathbb{R})}, \\ (\text{подробнее обсудим позже})$$

$$\text{здесь } H^n := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \begin{array}{l} (x, x) = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = -1 \\ x_0 > 0 \end{array} \right\}$$

$$O_{n+1}^+ < O_{n+1} = \left\{ A \in GL_{n+1}(\mathbb{R}) \mid A^T I_{n+1} A = I_{n+1} = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1) \right\},$$

$$O_{n+1}^+ - \text{нагр. нер. 2} \quad \& \quad O_{n+1}, \text{ т.е. } O_{n+1}^+(H^n) \subseteq H^n.$$

$$\text{Задача. метрика: } \cosh \rho_H(x, y) = -\langle x, y \rangle.$$

4) Если G/K - однор. групп. ли-и-е, то не обязательно

$G = \text{Isom}(X)$. Например, если $K \neq O_n$, то там не может

$$E^n = \mathbb{R}^n \times K / K.$$

5) Если Γ - дискр. групп., т.е. 0-мерная

группа Λ_0 , то $\dim X/\Gamma = \dim X$.

Замечание: $\text{Isom}(M)$ может быть свободной

тривиальной или иметь очень мало элементов.

Примеру более не подает примера многообразия

$$M = G/K, \text{ где } G = \text{Isom}(M), K = G_p.$$

Теперь Докажем, если $\forall p \in X \exists s_p \in \text{Isom}(X)$ - и.с., т.е. $s_p^2 = e$ и $d_{s_p} s_p = -\text{Id}$,

то тогда $G = \text{Isom}(X) \cong X$, G/K - групп. ли-и-е, $G/G^{\circ \cap K} \cong X$.

7. Экспоненциальное и геодезические

Def. Геог. $\gamma: I \rightarrow M$ наз. макс., если ее изги. $J \geq I + 2$.

$\gamma: J \rightarrow M$ тоже геог.

Teor. Пусть $p \in M$ и $v \in T_p M$. Тогда \exists единст. макс. геог. γ .

гег. $\gamma: I \rightarrow M$, т.ч. $0 \in I$, $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$.

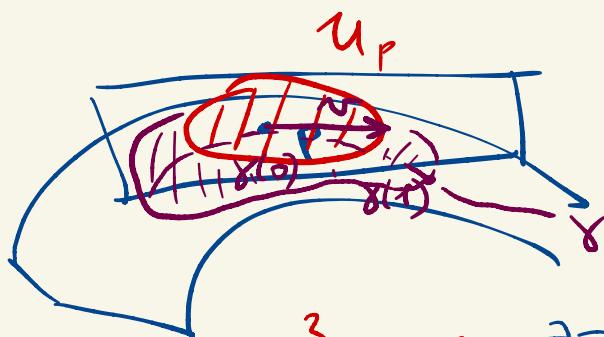
Def. Экспоненциал отобр. $\exp_p: U_p \rightarrow M$, где

$U_p \subset T_p M$, $U_p \ni$ начало координат, определяющее синг. отбр.:

$v \mapsto \gamma_v$ — макс. геог., $\gamma_v(0) = p$, $\dot{\gamma}_v(0) = v$, тогда

$$\gamma_v: I_v \rightarrow M$$

$$U_p := \{ v \in T_p M \mid s \in I_v \} \cup \exp_p(v) = \gamma_v(s)$$



Тар. $d_p \exp_p = Id_u$
 $\exp_p: u_p \rightarrow \exp_p(u_p)$ - диффео.

Замеч. Эта эксп. имеет связь с экспонентой
 в группах ли при рассм. римановых
 структ. пространств вида G/K .