Дифференциальные формы и операции с расслоениями

Дифференциальная k-форма на гладком многообразии M — это k-форма (кососимметричная полилинейная функция) на T^*M, гладко зависящая от точки $x \in M$, то есть ω имеет следующий вид (в слое $T^*_x M$)

$$\omega_x = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \omega_{j_1 \dots j_k}(x)\, dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}.$$

Пусть $f : M \to N$ — гладкое отображение гладких многообразий. Для произвольной k-формы ω на многообразии N определим её *обратный образ* $f^*\omega$ в слое $T^*_a M$следующим образом

$$(f^*\omega)_a(v_1, \dots, v_k) = \omega_{f(a)}(df|_a(v_1), \dots, df|_a(v_k)),$$

где $a \in M$ и $v_1, \dots, v_k \in T_a M$.

ДГТ 9◇1. Докажите, что:

(a) Определение $d\omega$ корректно, то есть не зависит от выбора координат (отсюда следует, что форма $d\omega$ определена на всём многообразии M, а не только на карте U).

(b) Если $\omega_1 \in \Lambda^k(M)$, то $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2$.

(c) Если $f : M \to N$ — гладкое отображение, то $d(f^*\omega) = f^* d\omega$

(d) Для любой формы ω выполнено $d^2\omega = 0$.

ДГТ 9◇2. Пусть (x, y, z) — декартовы координаты в $\mathbf{R}^3$ и

$$\omega = x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy.$$

(a) Запишите форму ω в сферических координатах (r, φ, θ).

(b) Вычислите $d\omega$ как в декартовых, так и в сферических координатах.

(c) Пусть $\iota : \mathbf{S}^2 \hookrightarrow \mathbf{R}^3$ — вложение. Вычислите $\iota^*\omega$ в координатах φ, θ (в области, где эти координаты определены).

(d) Покажите, что форма $\iota^*\omega$ всюду отлична от нуля.

ДГТ 9◇3. Пусть $f : E \to X$ — расслоение со слоем F, $g : D \to X$ — расслоение со слоем G. Будем говорить, что D является *подрасслоением* E, если $D \subset E$ (подмногообразие), $G \subset F$ и $g = f|_D$.

Пусть $\xi : E \to X$ — вещественное векторное расслоение. Определим *расслоение сфер* следующим образом $S(\xi) : S(E) \to X$, где $S(E) = E|_{\|v\|=1}$. Заметим, что на $S(E)$ действует $\mathbb{Z}_2$. Определим *проективизацию* расслоения: $\mathbf{R}P(\xi) = S(\xi)/\mathbf{Z}_2$. Её можно определить иначе: $\mathbf{R}^*$ действует послойным умножением на E. Тогда $\mathbf{R}P(\xi) : \mathbf{R}P(E) \to X$, где $\mathbf{R}P(E) = E/\mathbf{R}^*$. Слоем этого расслоения будет проективное пространство.

Докажите следующее: пусть ξ и γ — вещественные расслоения над X, причем γ – одномерное. Тогда $\mathbf{R}P(\xi \otimes \gamma) \cong \mathbf{R}P(\xi)$.

ДГТ 9◇4. Пусть $\xi : E \to X$, $\pi : G \to X$ — векторные расслоения над X. Тогда можем определить Hom-расслоение $\mathrm{Hom}(\xi, \pi)$, где слоем над точкой x является $\mathrm{Hom}(E_x, G_x)$.

Покажите, что гомоморфизм векторных расслоений $f : E \to G$ эквивалентен сечению тензорного произведения G с E^*, т.е.

$$\mathrm{Hom}(\xi, \pi) \cong \Gamma_X(E^* \otimes G),$$

где $\Gamma_X(E)$ обозначает пространство сечений расслоения E над X.

ДГТ 9◇5. Пусть η — тавтологическое расслоение над $\mathbf{R}P^n$ (определение смотри в 7◇4). Покажите, что $T\mathbf{R}P^n \cong \mathrm{Hom}(\eta, \eta^\perp)$.