

## ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Пусть  $M$  — хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой. Внутренняя карта на  $M$  — это пара  $(U, \varphi)$ , где  $\varphi$  — гомеоморфизм некоторой области  $U \subset M$  в  $\mathbf{R}^n$  или в открытый шар  $B^n \subset \mathbf{R}^n$ . Краевая карта — это пара  $(V, \psi)$ , где  $\psi$  есть гомеоморфизм из  $V$  в замкнутое полупространство

$$\mathbf{R}_+^n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_n \geq 0\}.$$

Две карты  $(U_1, \varphi_1)$  и  $(U_2, \varphi_2)$  называются согласованными, если склейки

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}: \varphi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2)$$

задаются дифференцируемыми (мы будем требовать  $C^\infty$ -гладкими) функциями. Атласом называется система согласованных карт, покрывающая все пространство  $M$ . Два атласа называются эквивалентными, если каждая карта первого атласа согласована с каждой картой второго атласа. Топологическое пространство  $M$  с указанными выше условиями вместе с классом эквивалентных атласов называется *гладким  $n$ -многообразием*.

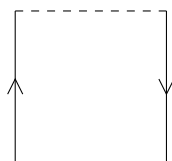
**1♦1.** Докажите, что  $\mathbf{R}P^n = P(\mathbf{R}^{n+1})$  является гладким  $n$ -многообразием без края (дать атлас из  $n + 1$  карты, см. лекции).

**1♦2.** Ограниченный цилиндр  $C = [0, 1] \times \mathbf{S}^1$ . Покажите, что  $C$  является двумерным гладким многообразием с краем  $\partial C = \mathbf{S}^1 \cup \mathbf{S}^1$  (нужно предъявить атлас).

**1♦3.** Докажите, что комплексное проективное пространство  $\mathbf{C}P^1 = P(\mathbf{C}^2)$  является 2-мерным вещественным многообразием, диффеоморфным  $\mathbf{S}^2$ .

**1♦4.** Рассмотрим  $\mathbf{R}^4 = \mathbf{C}^2$  с координатами  $(z, w)$ . Пусть  $M$  есть пересечение трехмерной сферы  $\{|z|^2 + |w|^2 = 1\}$  и конуса  $|z| = |w|$ . Докажите, что  $M$  диффеоморфно тору  $\mathbf{T}^2$ .

**1♦5.** Докажите, что лента Мёбиуса  $Mb$  является гладким 2-мерным многообразием с краем  $\partial Mb = \mathbf{S}^1$ . *Указание:* постройте сначала атлас для открытой ленты Мёбиуса  $Mb \setminus \partial Mb$  (открытый квадрат, у которого отождествлены две противоположных стороны, например, вертикальных, с разными ориентациями).



Открытая лента Мёбиуса  $Mb \setminus \partial Mb$ .

1♦6. Снабдить множество всех прямых на плоскости  $\mathbf{R}^2$  структурой гладкого многообразия. Доказать, что оно диффеоморфно открытому листу Мебиуса.

1♦7. Доказать, что специальная ортогональная группа

$$\mathrm{SO}_n(\mathbf{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbf{R}) \mid A^t A = E, \det A = 1\}$$

является гладким многообразием; найдите его размерность. Докажите также, что  $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$  и  $\mathbf{R}P^3$  диффеоморфны.

1♦8. Докажите, что комплексная окружность  $\{z_1^2 + z_2^2 = 1\} \subset \mathbf{C}^2$  диффеоморфна цилиндру без границы.

1♦9. Пусть  $\mathbf{R}^{n,1}$  — пространство Минковского, то есть  $\mathbf{R}^{n+1}$ , снабженное скалярным произведением  $\langle x, y \rangle$  сигнатуры  $(n, 1)$ , где

$$\langle x, x \rangle = x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2.$$

Докажите, что если  $\langle x, x \rangle < 0$  и  $\langle y, y \rangle < 0$ , то тогда  $\langle x, y \rangle < 0$ .

1♦10. Пусть  $\mathbf{H}^n$  — связная компонента гиперboloида

$$\langle x, x \rangle = x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1,$$

где  $\langle x, y \rangle$  — скалярное произведение сигнатуры  $(n, 1)$  в пространстве  $\mathbf{R}^{n,1}$ . Докажите, что отображение  $\rho : \mathbf{H}^n \times \mathbf{H}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , где  $\cosh \rho(x, y) = -\langle x, y \rangle$ , является корректно определенной метрикой, и, следовательно,  $\mathbf{H}^n$  является метрическим пространством.