Chương 3. Biến đổi Z và ứng dụng

Nội dung

- Khái niệm
- Tính chất
- Biến đổi Z ngược
- Biến đổi Z một phía
- Biến đổi Z và hệ thống LTI

Khái niệm

- Tổng quát
  - Là một cách biểu diễn khác của t.h
  - Chuyển tín hiệu từ miền thời gian n sang miền phức z
  - Dễ dàng khảo sát t.h và các hệ thống trong một số trường hợp (dựa vào t.c của biến đổi z)
- Công thức:

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}}$$

- Ký hiệu:

$$X(z) = Z\{x(n)\}$$

$$x(n) \xrightarrow{Z} X(z)$$

- Miền hội tụ (ROC):

$$ROC = \{z \mid |X(z)| < \infty\}$$

Khái niệm

- Ví dụ:

$$x_1(n) = \{2, \underline{5}, 3, 1\} \xrightarrow{Z} X_1(z) = 2z + 5 + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^2}, ROC: z \neq 0, \infty$$

$$x_2(n) = \{\underline{2}, 5, 3, 1\} \xrightarrow{Z} X_2(z) = 2 + \frac{5}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{1}{z^3}, ROC: z \neq 0$$

$$x_3(n) = \delta(n) \xrightarrow{Z} X(z) = 1, ROC:$$ toaøn boä maët phaúng Z

$$x_4(n) = \delta(n-k) \xrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{z^k}, ROC:$$ toaøn boä maët phaúng Z

Khái niệm

- Ví dụ: xác định biến đổi Z của các tín hiệu:

$$x(n) = u(n)$$

- Lời giải:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^{n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$ROC: \left|z^{-1}\right| < 1 \rightarrow \boxed{|z| > 1}$$

Khái niệm

- Ví dụ: xác định biến đổi Z của các tín hiệu:

$$x(n) = -u(-n-1)$$

- Lời giải:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

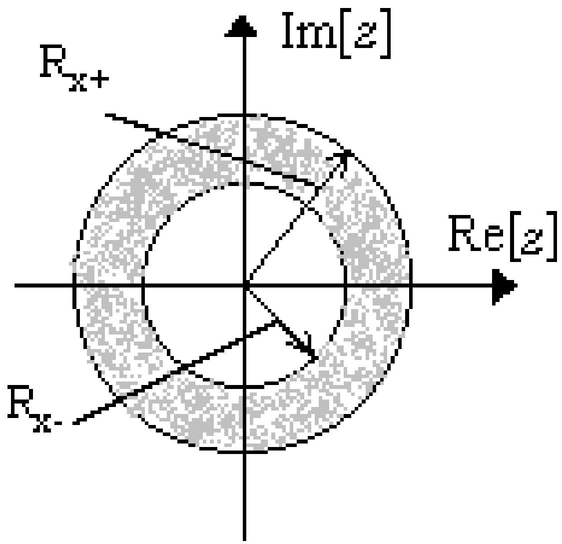
$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^{-n} = -\sum_{k=1}^{\infty} z^{k}$$

$$= -\left(\frac{1}{1-z} - 1\right) = -\frac{z}{1-z} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

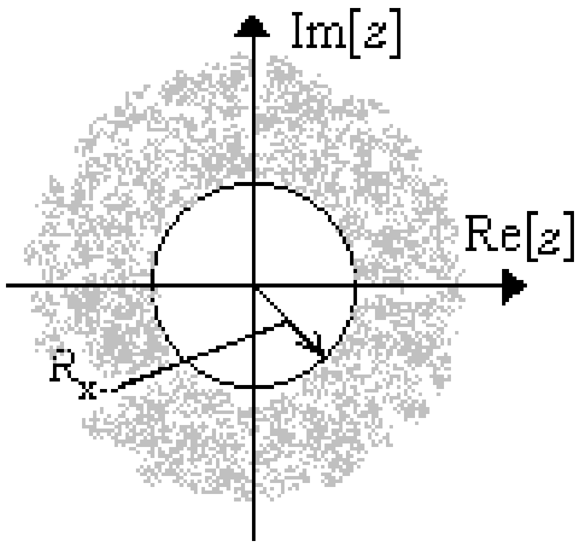
$$ROC: |z| < 1 \rightarrow \boxed{|z| < |1|}$$

Khái niệm

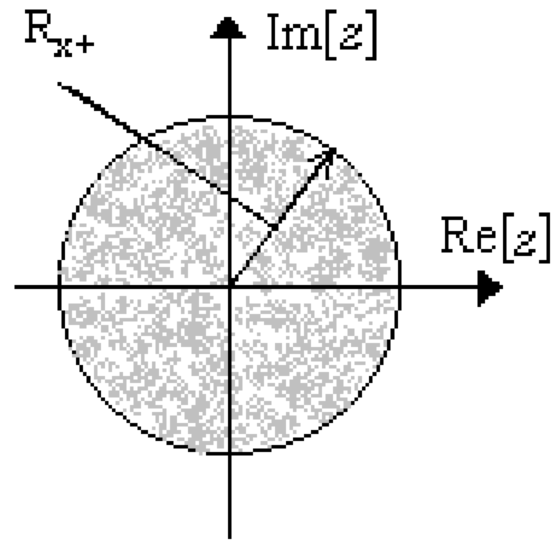
- Miền hội tụ với các loại tín hiệu:



a. Dãy không nhân quả.



b. Dãy nhân quả.



c. Dãy phản nhân quả

Tính chất của biến đổi Z

- Tuyến tính:

$$x_1(n) \xrightarrow{Z} X_1(Z); ROC_1$$

$$x_2(n) \xrightarrow{Z} X_2(Z); ROC_2$$

$$\Rightarrow a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \xrightarrow{Z} a_1X_1(Z) + a_2X_2(Z); ROC_1 \cap ROC_2$$

- Tính trễ:

$$x(n) \xrightarrow{Z} X(Z); ROC$$

$$\Rightarrow x(n-k) \xrightarrow{Z} z^{-k}X(Z); \left[\begin{array}{l} ROC \setminus \{z=0\}\,(k>0) \\ ROC \setminus \{z=\infty\}\,(k<0) \end{array}\right.$$

Tính chất của biến đổi Z

- Ví dụ: Tìm biến đổi Z của các dãy sau:

$$x_1(n) = u(n-2)$$
$$x_2(n) = u(-n+1)$$

- Lời giải:
  - $$u(n) \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}} \left(ROC: |z| > 1\right) \qquad \Rightarrow u(n-2) = \frac{z^{-2}}{1-z^{-1}} \left(ROC: |z| > 1\right)$$
  - $$-u(-n-1) \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}} \left(ROC: |z| < 1\right)$$

$$\Rightarrow u(-n+1) = (-1)u(-(n-2)-1) \xrightarrow{Z} \frac{-z^{-2}}{1-z^{-1}} \left(ROC: |z| < 1 \setminus \{z=0\}\right)$$

Tính chất của biến đổi Z

- Nhân với hàm mũ

$$x(n) \xrightarrow{Z} X(Z); ROC: r_2 < |z| < r_1$$

$$\Rightarrow a^n x(n) \xrightarrow{Z} X(a^{-1}z); ROC: |a| r_2 < |z| < |a| r_1$$

- Ví dụ:

$$a^n u(n) \xrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}}; ROC: |z| > |a|$$

Tính chất của biến đổi Z

- Lấy biến đảo:

$$x(n) \xrightarrow{Z} X(Z); ROC: r_2 < |z| < r_1$$

$$\Rightarrow x(-n) \xrightarrow{Z} X(z^{-1}); ROC: 1/r_1 < |z| < 1/r_2$$

- Liên hợp phức:

$$x(n) \xrightarrow{Z} X(Z); ROC: r_2 < |z| < r_1$$

$$\Rightarrow x^*(n) \xrightarrow{Z} X^*(z^*); ROC: r_2 < |z| < r_1$$

- Đạo hàm trong miền Z:

$$x(n) \xrightarrow{Z} X(Z); ROC: r_2 < |z| < r_1$$

$$\Rightarrow nx(n) \xrightarrow{Z} z\frac{dX(z)}{dz}; ROC: r_2 < |z| < r_1$$

Tính chất của biến đổi Z

- Biến đổi Z của tích chập:

$$x_1(n) \xrightarrow{Z} X_1(Z); ROC_1$$

$$x_2(n) \xrightarrow{Z} X_2(Z); ROC_2$$

$$\Rightarrow x_1(n) * x_2(n) \xrightarrow{Z} X_1(z) X_2(z); ROC_1 \cap ROC_2$$

- Định lý giá trị đầu: Nếu x(n) là dãy nhân quả:

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

Tính chất của biến đổi Z

- Ví dụ: Xác định biến đổi Z của tín hiệu:

$$x(n) = \left(\cos \omega n\right) u(n)$$

- Lời giải:

$$x(n) = \left(\cos \omega n\right) u(n) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega n} u(n) + e^{-j\omega n} u(n)\right)$$

$$X(z) \quad = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - e^{j\omega} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\omega} z^{-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2 - z^{-1}\left(e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right)}{1 - z^{-1}\left(e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right) + z^{-2}}$$

$$= \frac{1 - z^{-1} \cos \omega}{1 - 2z^{-1} \cos \omega + z^{-2}} \qquad ROC = \left\{|z| > \left|e^{j\omega}\right|\right\} \cap \left\{|z| > \left|e^{-j\omega}\right|\right\} = |z| > 1$$

Một số cặp biến đổi z cơ bản

Tín hiệu	Biến đổi z	ROC
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$na^n u(n)$	$\dfrac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$-na^n u(-n-1)$	$\dfrac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$

Tính chất của biến đổi Z

Tính chất	Miền thời gian	Miễn Z	ROC
	$x(n)$ $x_1(n)$ $x_2(n)$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$	$r_2 < \lvert z\rvert < r_1$ ROC_1 ROC_2
Tuyến tính	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$	$ROC_1 \cap ROC_2$
Trễ	$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$	$ROC_x \setminus \{z=0\}$ (k>0) $ROC_x \setminus \{z=\infty\}$ (k<0)
Nhân với hàm mũ	$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$	$\lvert a\rvert r_2 < \lvert z\rvert < \lvert a\rvert r_1$
Lấy biến đảo	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$1/r_1 < \lvert z\rvert < 1/r_2$
Liên hợp phức	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	$r_2 < \lvert z\rvert < r_1$
Đạo hàm trong miền Z	$nx(n)$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$	$r_2 < \lvert z\rvert < r_1$
Tổng chập	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z).X_2(z)$	$ROC_1 \cap ROC_2$

Biến đổi Z ngược

- Công thức:

$$x(n) \xrightarrow{Z} X(z)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

$$x = Z^{-1}(X)$$

- C là đường cong khép kín **bao quanh gốc tọa độ** và nằm **trong miền hội tụ** của X(z).
- Phương pháp tìm biến đổi z ngược:
  - Tính trực tiếp tích phân.
  - Phương pháp khai triển X(z) thành chuỗi lũy thừa
  - Sử dụng các tính chất của biến đổi Z và các cặp biến đổi Z của các dãy cơ bản.

Biến đổi Z ngược

- **Tìm biến đổi Z ngược bằng cách tính trực tiếp giá trị tích phân:**
  - Khái niệm giá trị thặng dư: $\boxed{\operatorname{Res}(F, z_0) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C F(z)dz}$
    - z_0 là cực đơn của F(z): Nếu df(z)/dz tồn tại trên và bên trong C thì:

$$\operatorname{Res}(F, z_0) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C F(z)dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

$$= \begin{cases} f(z_0) = F(z)(z - z_0) & \text{neáu } z_0 \text{ naèm ôû trong C} \\ 0 & \text{neáu } z_0 \text{ naèm ôû ngoaøi C} \end{cases}$$

- z_0 là cực bậc k của f(z): Nếu tồn tại đạo hàm bậc k-1 của f(z) thì:

$$\operatorname{Res}(F, z_0) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C F(z)dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^k}dz$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}f(z_0)}{dz^{k-1}} = \frac{1}{(k-1)!}\left.\frac{d^{k-1}F(z)(z - z_0)^k}{dz^{k-1}}\right|_{z=z_0} & \text{neáu } z_0 \text{ naèm trong C} \\ 0 & \text{neáu } z_0 \text{ naèm ngoaøi C} \end{cases}$$

Biến đổi Z ngược

- **Tìm biến đổi Z ngược bằng cách tính trực tiếp giá trị tích phân:**
  - Trong trường hợp tổng quát, P(z) là hàm giải tích trong C trừ hữu hạn các cực: z_1, z_2, …, z_n nằm trong đường cong C, ta có:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C P(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}(\mathrm{P}, z_i)$$

Biến đổi Z ngược

- **Tìm biến đổi Z ngược bằng cách tính trực tiếp giá trị tích phân:**
  - Ví dụ: Tìm biến đổi Z ngược của: $\boxed{X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}};ROC:|z|>1}$
  - Ta có:

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz=\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{z^{n-1}}{1-z^{-1}}dz=\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{z^{n}}{z-1}dz$$

Trong đó **C là đường tròn bán kính lớn hơn 1.**

- Nếu n>=0:

$$x(n)=\mathrm{Res}\left(F,1\right)=(z-1)\frac{z^n}{z-1}\bigg|_{z=1}=1$$

- Nếu n=-k (k>0):

$$x(-k)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{1}{z^k(z-1)}dz=\mathrm{Res}\left(F,1\right)+\mathrm{Res}\left(F,0\right)$$

$$=\left(F(z)(z-1)\right)\Big|_{z=1}+\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}\left(F(z)z^k\right)}{dz}\bigg|_{z=0}=\frac{1}{z^k}\bigg|_{z=1}+\frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^{(k)}\bigg|_{z=0}=1+\frac{(-1)^{k+1}}{(z-1)^k}\bigg|_{z=0}=0$$

$$\boxed{\Rightarrow x(n)=u(n)}$$

Biến đổi Z ngược

- **Tìm biến đổi Z ngược bằng cách tính trực tiếp giá trị tích phân:**
  - Ví dụ: Tìm biến đổi Z ngược của: $\boxed{X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}};ROC:|z|<1}$
  - Ta có: $$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{z^{n-1}}{1-z^{-1}}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{z^n}{z-1}dz$$

Trong đó **C là đường tròn bán kính nhỏ hơn 1.**

- Nếu n>=0: $$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{z^n}{(z-1)}dz = \text{Res}(F,1) = 0$$
- Nếu n=-1: $$x(-k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{1}{z^k(z-1)}dz = \text{Res}(F,0) + \text{Res}(F,1)$$

$$= \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz}\left(\frac{1}{z-1}\right)\Bigg|_{z=0} + 0 = \frac{(-1)^{k+1}}{(z-1)^k}\Bigg|_{z=0} = -1$$

$$\boxed{\Rightarrow x(n) = -u(-n-1)}$$

Biến đổi Z ngược

- **Khai triển X(z) thành chuỗi lũy thừa:**
  - Nếu X(z) được khai triên thành chuỗi lũy thừa:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n}$$

thì X(z) là biến đổi Z của dãy:

$$x(n) = a_n$$

  - Ví dụ: Tìm biến đổi Z ngược của:

$$X(z) = (z^2 + 1)(1 - 2z^{-1} + 3z^{-2}) \qquad ROC: 0 < |z| < \infty$$

$$X(z) = z^2 - 2z + 4 - 2z^{-1} + 3z^{-2} \quad = \sum_{n=-2}^{2} x(n) z^{-n}$$

$$x(n) = \{1, -2, \underset{\uparrow}{4}, -2, 3\}$$

Biến đổi Z ngược

- **Khai triển X(z) thành chuỗi lũy thừa:**
  - Ví dụ: Tìm biến đổi Z ngược của:

$$X(z) = \frac{1}{1+2z^{-1}}, \text{ for } |z| > 0.5.$$

  - Theo khai triển Taylor ta có:

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \text{ for } |t| < 1.$$

Do vậy: $X(z) = \frac{1}{1+2z^{-1}}, \text{ for } |z| > 0.5$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-2z^{-1})^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n z^{-n}$$

$$\boxed{x(n) = (-2)^n u(n)}$$

Biến đổi Z ngược

- **Khai triển X(z) thành chuỗi lũy thừa:**
  - Ví dụ: Tìm biến đổi Z ngược của:
  - Do x(n) là dãy nhân quả nên:

$$\boxed{X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} : |z| > 2}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \qquad = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots$$

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1-2z^{-1} \\ \cline{2-2}
-\;1-2z^{-1} & 1 + 2z^{-1} + 2^2 z^{-2} + \cdots \\ \cline{1-1}
2z^{-1} & \\
-\;2z^{-1} - 2^2 z^{-2} & \\ \cline{1-1}
2^2 z^{-2} & \\
\;\cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{array}$$

$$\Rightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n}$$

$$\boxed{\Rightarrow x(n) = 2^n u(n)}$$

Biến đổi Z ngược

- Tìm biến đổi Z ngược sử dụng các tính chất của biến đổi Z và các cặp biến đổi Z của các dãy cơ bản.
- Ví dụ: Tìm biến đổi Z ngược của:

$$X(z) = \frac{1}{1-0.3z^{-1}}, \quad \text{ROC } |z| > 0.3.$$

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1-0.3z^{-1}}, \ \text{ROC: } |z| > 0.3.$$

$$X(z) = \frac{1-0.3z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0.5z^{-1})}.$$

Tính tích chập nhờ biến đổi z

- Ví dụ: Tính tích chập x(n) của 2 tín hiệu sau:

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) \qquad x_2(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

- Ta có:

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) \xrightarrow{Z} X_1(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}; ROC: |z| > 1/4$$

$$x_2(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \xrightarrow{Z} X_2(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}; ROC: |z| > 1/2$$

- Mặt khác:

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \xrightarrow{Z} X(z) = X_1(z)X_2(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}; ROC: |z| > 1/2$$

$$X(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} - \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)} \xrightarrow{z^{-1}} \boxed{x(n) = \left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)u(n)}$$

Biến đổi Z một phía

- Biến đổi Z một phía chỉ quan tâm đến tín hiệu x(n) tại các thời điểm n>=0:

$$X(z)^{+} = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

- Ký hiệu:

$$X(z)^{+} = Z^{+}\left\{x(n)\right\}$$

$$x(n) \xrightarrow{Z^{+}} X(z)$$

- Đặc điểm:
  - Biến đổi Z một phía chỉ chứa thông tin tín hiệu với n>0
  - Chỉ là duy nhất đối với tín hiệu nhân quả. $X(z) = X(z)^{+}$
  - ROC nằm bên ngoài hình tròn bán kính r nào đó -> không xét đến ROC trong biến đổi z một phía.

Biến đổi Z một phía

- Ví dụ:

$$x_1(n) = \{2, \underline{5}, 3, 1\} \xrightarrow{Z} X_1(z)^+ = 5 + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^2}$$

$$x_2(n) = \{2, 1, \underline{5}, 3, 1\} \xrightarrow{Z} X_2(z)^+ = 5 + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^2}$$

$$x_3(n) = \delta(n) \xrightarrow{Z} X_3(z)^+ = 1$$

$$x_4(n) = \delta(n-k) \xrightarrow{Z} X_4(z)^+ = \frac{1}{z^k}$$

$$x_5(n) = \delta(n+k) \xrightarrow{Z} X_5(z)^+ = 0$$

Biến đổi Z một phía

- Các tính chất của biến đổi Z một phía giống biến đổi Z hai phía, trừ **tính trễ**:

Nếu $x(n) \xrightarrow{Z^+} X^+(z)$ thì

$$x(n-k) \xrightarrow{Z^+} z^{-k}\left(X^+(z) + \sum_{n=1}^{k} x(-n)z^{n}\right), k > 0$$

$$x(n+k) \xrightarrow{Z^+} z^{k}\left(X^+(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(-n)z^{-n}\right), k > 0$$

- **Định lý giá trị cuối:**

Nếu $x(n) \xrightarrow{Z^+} X^+(z)$ thì: $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = \lim\limits_{z\to 1}(z-1)X^+(z)$

Biến đổi Z một phía

- Tìm biến đổi Z một phía của các tín hiệu sau:

$$x_1(n) = u(n)$$
$$x_2(n) = u(n-3)$$
$$x_3(n) = u(n+4)$$

$$X_1^+(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$X_2^+(z) = z^{-3}\left(X_1^+(z) + u(-1)z + u(-2)z^2 + u(-3)z^3\right) = \frac{z^{-3}}{1-z^{-1}}$$

$$X_3^+(z) = z^4\left(X_1^+(z) - u(0) + u(1)z^{-1} + u(2)z^{-2} + u(3)z^{-3}\right) = \frac{z^4}{1-z^{-1}} - z^4 - z^3 - z^2 - z$$

Sử dụng biến đổi Z một phía giải PTSP

- Xác định đáp ứng xung của hệ thống nhân quả:

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$$

- Lấy biến đổi z một phía cả 2 vế ta có:

$$Y^+(Z) - 3z^{-1}\left(Y^+(Z) + y(-1)z\right) - 4z^{-2}\left(Y^+(Z) + y(-1)z + y(-2)z^2\right) = X^+(z) + 2z^{-1}\left(X^+(z) + x(-1)\right)$$

$$\rightarrow Y^+(z) = \frac{X^+(z) + 2z^{-1}\left(X^+(z) + x(-1)\right) + 3y(-1) + 4z^{-1}y(-1) + 4y(-2)}{1 - 3z^{-1} - 4z^{-2}}$$

- x(n) = δ(n), nên:

$$\rightarrow H^+(z) = \frac{1 + 3y(-1) + 2z^{-1} + 4z^{-1}y(-1) + 4y(-2)}{1 - 3z^{-1} - 4z^{-2}}$$

- Nếu hệ thống nhân quả và được khởi tạo relaxed:

$$H^+(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - 3z^{-1} - 4z^{-2}}$$

$$\rightarrow h(n) = \left(-\frac{1}{5}(-1)^n + \frac{6}{5}4^n\right)u(n)$$

Sử dụng biến đổi Z một phía giải PTSP

- Sử dụng biến đổi Z một phía để xác định y(n), n>=0:

$$y(n)=\frac{1}{2}y(n-1)+x(n); x(n)=n\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n), y(-1)=1;$$

- Lấy biến đổi Z một phía cả hai vế của PTSP:

$$Y^+(z)=\frac{1}{2}z^{-1}\left(Y^+(z)-y(-1)z\right)+X^+(z)$$

$$x(n)=n\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)\xrightarrow{z^+}X^+(z)=\frac{1}{3}\frac{z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^2}$$

$$Y^+(z)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)=\frac{1}{2}y(-1)+X^+(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^2}$$

$$\rightarrow Y^+(z)=\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}+\frac{1}{3}\frac{z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^2}$$

Sử dụng biến đổi Z một phía giải PTSP

$$f(z)=\frac{z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{2}}=\frac{A}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}+\frac{B}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{2}}+\frac{C}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$A=f(z)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\Bigg|_{z^{-1}=2}=\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}2\right)^{2}}=18$$

$$B=f(z)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{2}\Bigg|_{z^{-1}=3}=\frac{3}{\left(1-\frac{1}{2}3\right)}=-6$$

$$C=\frac{1}{3}z^{-2}\frac{d}{dz}\left(f(z)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{2}\right)\Bigg|_{z^{-1}=3}=-12\left(z^{-1}=0\rightarrow 0=A+B+C=18-6+C\right)$$

$$\rightarrow Y^{+}(z)=\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}+\frac{6}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}-\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{2}}-\frac{4}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$\rightarrow y(n)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)+6\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)-2(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(n)-4\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(n)$$

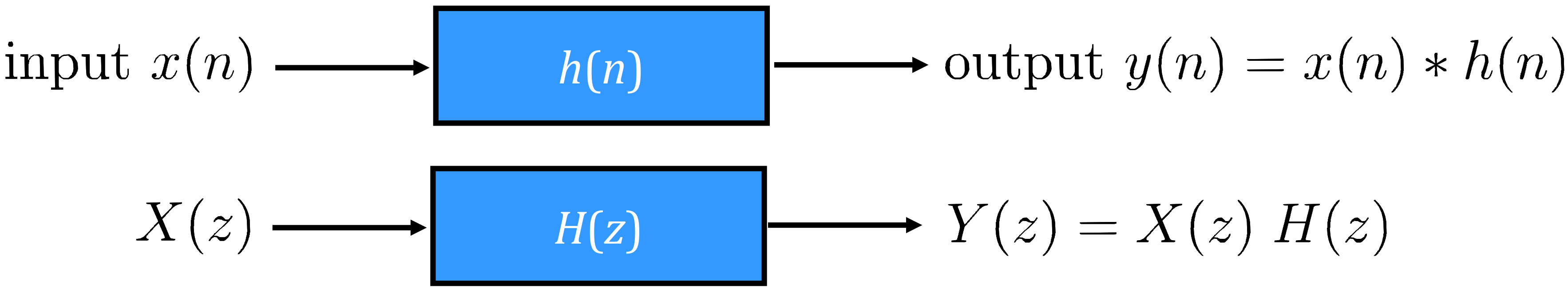
$$\rightarrow \boxed{y(n)=\frac{13}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)-2n\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(n)-6\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(n)}$$

Biến đổi Z và hệ thống LTI

- Tìm một trong các tín hiệu x(n), y(n), h(n) khi biết 2 tín hiệu còn lại.
- Cực, không, miền hội tụ và tính ổn định
- Biến đổi Z và phương trình sai phân

Biến đổi Z và hệ thống LTI

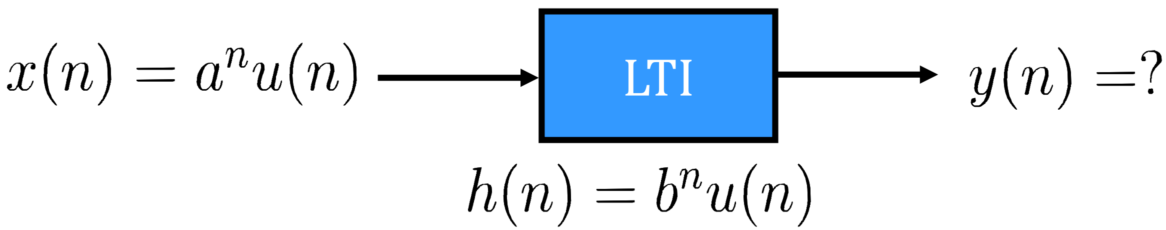
- Theo tính chất của biến đổi Z ta có:



- Do vậy, khi biết 1 trong 3 tín hiệu x(n), y(n), h(n) ta có thể tìm được tín hiệu còn lại dựa vào biến đổi Z của chúng

Biến đổi Z và hệ thống LTI

- Ví dụ: Tính đầu ra của hệ thống: (a≠b)



- Xác định biến đổi Z của x(n) và h(n):

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \text{ and } H(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}}$$

- Xác định Y(z):

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})} = \frac{a}{a-b}\frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{b}{b-a}\frac{1}{1-bz^{-1}}$$

- Tìm biến đổi Z ngược, ta thu được y(n).

Biến đổi Z và hệ thống LTI

- Xác định đáp ứng của hệ thống khi:

$$h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n} u(n)$$

$$x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n} u(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n-1)$$

- Ta có:

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u(n) \xrightarrow{Z} H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}; ROC = |z| > \frac{1}{2}$$

$$x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n} u(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n-1) \rightarrow X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{1}{1-2z^{-1}} \; ROC \Rightarrow \frac{1}{3} < |z| < 2$$

$$Y(z) = H(z).X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{1}{1-2z^{-1}}\right) \rightarrow y(n) = ?$$

Biến đổi Z và hệ thống LTI

$$Y(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}-\frac{1}{1-2z^{-1}}\right)=\frac{3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}-\left(\frac{-1/3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{4/3}{1-2z^{-1}}\right);ROC:\frac{1}{2}<|z|<2$$

$$=\frac{10}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-2\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}-\frac{4}{3}\frac{1}{1-2z^{-1}}$$

$$\rightarrow \boxed{y(n)=\left(\frac{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)u(n)+\frac{4}{3}2^{n}u(-n-1)}$$

Biến đổi Z và hệ thống LTI

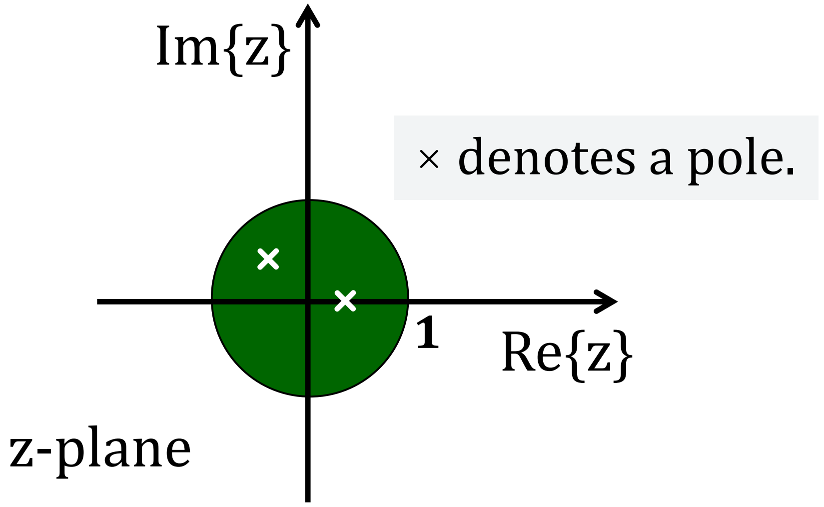
- Cực: Giá trị của z mà H(z) tiến tới ∞
- Không: Giá trị của z mà $H(z) = 0$.
- Ví dụ: Cho hệ nhân quả, với hàm hệ thống:

$$H(z) = \frac{1 - 0.3z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})}$$

- Ta có các cực: $p_1 = 1$, $p_2 = 0.5$.
- Các không: $z_1 = 0.3$, $z_2 = 0$.

Biến đổi Z và hệ thống LTI

- Hệ thống LTI là nhân quả khi và chỉ khi ROC của hàm hệ thống nằm ngoài đường tròn bán kính r< ∞
- Hệ thống LTI là ổn định khi và chỉ khi vòng tròn đơn vị |z|=1 thuộc ROC của hàm hệ thống.
- Hệ thống nhân quả LTI là ổn định khi và chỉ khi tất cả các cực của H(z) nằm trong vòng tròn đơn vị.



Biến đổi Z và hệ thống LTI

Ví dụ: Xét hệ thống LTI có hàm hệ thống như sau:

$$H(z) = \frac{3 - 4z^{-1}}{1 - 3.5z^{-1} + 1.5z^{-2}} = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{2}{1 - 3z^{-1}}$$

- Hàm hệ thống có 2 cực z = 3, z= 0.5
- Nếu hệ thống là ổn định => ROC: 1/2<|z|<3
- Nếu hệ thống là nhân quả => ROC: |z|>3
- Nếu hệ thống là phản nhân quả => ROC: |z|<1/2, hệ thống không ổn định

Biến đổi Z và hệ thống LTI

- Xét hệ thống LTI được biểu diễn qua phương trình sai phân

$$y(n) = \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

- Lấy biến đổi Z cả hai vế, ta có:

$$Y(z) = \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} Y(z) + \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

- Hệ thống này được gọi là *hệ thống cực – không* với N cực và M không

Biến đổi Z và hệ thống LTI

- Nếu điều kiện khởi tạo bằng không, biến đổi Z đầu ra của hệ thống:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{B(z)}{A(z)}\frac{N(z)}{Q(z)}$$

- Giả sử hàm hệ thống có các cực đơn p_i, biến đổi z của tín hiệu vào có các cực q_j:

$$Y(z) = \sum_i \frac{A_i}{1 - p_i z^{-1}} + \sum_j \frac{Q_j}{1 - p_j z^{-1}}$$

Đáp ứng tự nhiên

Đáp ứng cưỡng bức

- Nếu x(n) = 0 -> X(z) = 0 -> Y(z) = 0 (không chính xác với hệ thống không phải là relaxed!!)

Biến đổi Z và hệ thống LTI

- Hệ thống không được khởi tạo relaxed: (sử dụng biến đổi Z một phía)

$$y(n) = \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

$$Y^+(z) = \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} \left(Y^+(z) + \sum_{n=1}^{k} y(-n) z^n \right) + \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X^+(z)$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} X(z) - \frac{\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} \left(\sum_{n=1}^{k} y(-n) z^n \right)}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$= H(z) X(z) + \frac{N_0(z)}{A(z)}$$

Biến đổi Z và hệ thống LTI

- Xác định đáp ứng của hệ thống khi:

$$h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

$$x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n-1)$$

- Ta có:

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \xrightarrow{Z} H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}; ROC = |z| > \frac{1}{2}$$

$$x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n-1) \rightarrow X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{1}{1-2z^{-1}} \; ROC \Rightarrow \frac{1}{3} < |z| < 2$$

$$Y(z) = H(z).X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{1}{1-2z^{-1}}\right) \rightarrow y(n) = ?$$

Biến đổi Z và hệ thống LTI

$$Y(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}-\frac{1}{1-2z^{-1}}\right)=\frac{3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}-\left(\frac{-1/3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{4/3}{1-2z^{-1}}\right);ROC:\frac{1}{2}<|z|<2$$

$$=\frac{10}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-2\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}-\frac{4}{3}\frac{1}{1-2z^{-1}}$$

$$\rightarrow \boxed{y(n)=\left(\frac{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)u(n)+\frac{4}{3}2^{n}u(-n-1)}$$

Bài tập ví dụ

- Xác định đáp ứng trạng thái không của hệ thống khi:

$$y(n) = -0.1y(n-1) + 0.2y(n-2) + x(n) + x(n-1); x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

- Lấy biến đổi Z cả 2 vế:

$$Y(z) = -0.1z^{-1}Y(z) + 0.2z^{-2}Y(z) + X(z) + z^{-1}X(z)$$

$$x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)z^{-1}}; ROC: |z| > \frac{1}{3}$$

$$Y(z) = \frac{1+z^{-1}}{1+0.1z^{-1}-0.2z^{-2}} \frac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)z^{-1}} \to y(n) = ?$$

$$Y(z) = \frac{1+z^{-1}}{1+0.1z^{-1}-0.2z^{-2}} \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{1+z^{-1}}{(1+0.5z^{-1})(1-0.4z^{-1})\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$