Chương 4. Biến đổi Fourier và ứng dụng

Chương 4. Biến đổi Fourier và ứng dụng

- Giới thiệu chung
- Phân tích tín hiệu trong miền tần số
- Biến đổi Fourier rời rạc
- Ứng dụng của biến đổi Fourier
- Thuật toán FFT

Phân tích tín hiệu trong miền tần số

- **Tín hiệu rời rạc**
  - **Tín hiệu rời rạc tuần hoàn:** $x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi n/N}$

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}; c_{k+N} = c_k$$

  - Ví dụ: Tìm biến đổi Fourier của tín hiệu $x(\mathrm{n}) = 3\cos(\pi\,\mathrm{n}/4)$

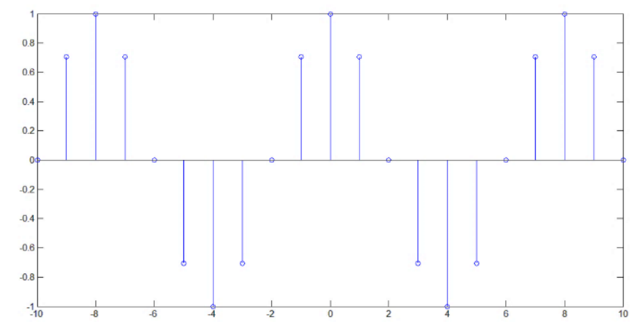
$$x(\mathrm{n}) = 3\cos(\pi\,\mathrm{n}/4) = \frac{3}{2}\left(e^{j\pi n/4} + e^{-j\pi n/4}\right)$$

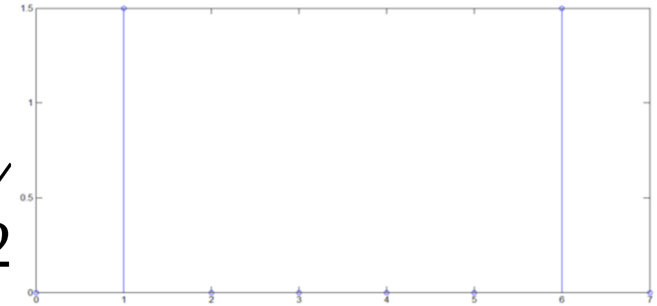
$$= \frac{3}{2}\left(e^{j2\pi n/8} + e^{-j2\pi n/8}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(e^{j2\pi n/8} + e^{j2\pi(7-8)n/8}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(e^{j2\pi n/8} + e^{j2\pi 7n/8}\right)$$

$$c_0 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0; c_1 = c_7 = 3/2$$





Phân tích tín hiệu trong miền tần số

- **Tín hiệu rời rạc**
  - **Tín hiệu rời rạc không tuần hoàn:**

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

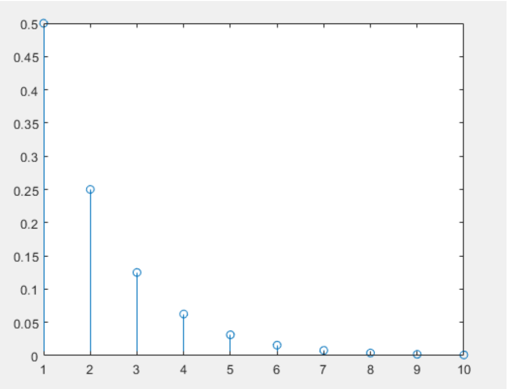
$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{i\omega n} d\omega$$

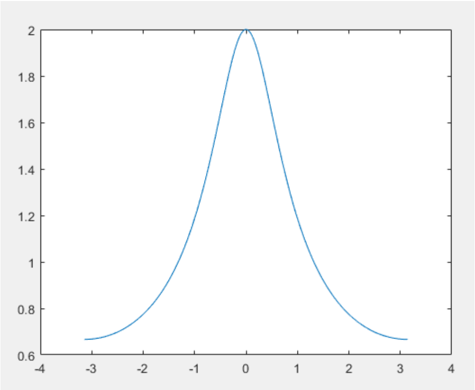
$$X(\omega + 2\pi) = X(\omega)$$

  - Ví dụ: Tìm biến đổi Fourier của tín hiệu

$$x(\mathrm{n}) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$\mathrm{X}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - \tfrac{1}{2} e^{-j\omega}}$$





Tính chất	Miền thời gian	Miễn tần số
	$x(n)$ $x_1(n)$ $x_2(n)$	$X(\omega)$ $X_1(\omega)$ $X_2(\omega)$
Tuyến tính	$a_1x_1(n)+a_2x(n)$	$a_1X_1(\omega)+a_2X_2(\omega)$
Trễ thời gian	$x(n-k)$	$e^{-j\omega k}X(\omega)$
Trễ tần số	$e^{j\omega_0 n}x(n)$	$X(\omega-\omega_0)$
Lấy biến đảo	$x(-n)$	$X(-\omega)$
Định lý điều biên	$x(n)\cos\omega_0 n$	$\frac{1}{2}[X(\omega+\omega_0)+X(\omega-\omega_0)]$
Vi phân trong miền tần số	$nx(n)$	$j\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Tổng chập	$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(\omega).X_2(\omega)$

Biến đổi Fourier rời rạc (DFT)

- Lấy mẫu tín hiệu trong miền tần số:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \Rightarrow X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \mathrm{W}_N^{kn}$$

- Khôi phục lại x(n) từ mẫu X(k):
  - Tín hiệu x(n) độ dài hữu hạn
  - Độ dài L<=N:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N} \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

Biến đổi Fourier rời rạc (DFT)

- Cặp biến đổi Fourier rời rạc:

$$x = \left[x(0) \quad x(1) \quad \ldots \quad x(N-1) \right] \qquad x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j 2\pi k n / N}$$

$$\Updownarrow$$

$$X = \left[X(0) \quad X(1) \quad \ldots \quad X(N-1) \right] \qquad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j 2\pi k n / N}$$

Biến đổi Fourier rời rạc (DFT)

- Cặp biến đổi Fourier rời rạc:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\left(\cos\left(2\pi kn/N\right) - j\sin\left(2\pi kn/N\right)\right)$$

$$\operatorname{Re} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cos\left(2\pi kn/N\right)$$

$$\operatorname{Im} X(k) = -\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\sin\left(2\pi kn/N\right)$$

Biến đổi Fourier rời rạc (DFT)

- Ví dụ: Tìm biến đổi Fourier rời rạc 4 điểm của dãy

x(n) = {1, 2, 3}

$$\operatorname{Re} X(k) = \sum_{n=0}^{3} x(n)\cos\left(2\pi kn/4\right)$$

$$\operatorname{Re} X(0) = \sum_{n=0}^{3} x(n)\cos(0) = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\operatorname{Re} X(1) = 1\times\cos(0) + 2\times\cos\left(2\pi/4\right) + 3\times\cos\left(4\pi/4\right) = -2$$

$$\operatorname{Re} X(2) = 2; \operatorname{Re} X(3) = -2$$

$$\boxed{X(k) = \begin{bmatrix} 6 & -2-2j & 2 & -2+2j \end{bmatrix}}$$

$$\operatorname{Im} X(k) = -\sum_{n=0}^{3} x(n)\sin\left(2\pi kn/4\right)$$

$$\operatorname{Im} X(0) = -\sum_{n=0}^{3} x(n)\sin(0) = 0$$

$$\operatorname{Im} X(1) = -1\times\sin(0) - 2\times\sin\left(2\pi/4\right) - 3\times\sin\left(4\pi/4\right) = -2$$

$$\operatorname{Im} X(2) = 0; \operatorname{Im} X(3) = 2$$

Biến đổi Fourier rời rạc (DFT)

- Cặp biến đổi Fourier rời rạc:

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\left(\cos\left(2\pi kn/N\right) + j\sin\left(2\pi kn/N\right)\right)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\left(\cos\left(2\pi kn/N\right) + j\sin\left(2\pi kn/N\right)\right)$$

$$= \frac{1}{N}\left(\begin{array}{l} X(0)\left(\cos\left(0\right) + j\sin\left(0\right)\right) + X(1)\left(\cos\left(2\pi n/N\right) + j\sin\left(2\pi n/N\right)\right) \\ +\ldots + X(\mathrm{N}-1)\left(\cos\left(2\pi(N-1)n/N\right) + j\sin\left(2\pi(N-1)n/N\right)\right) \end{array}\right)$$

- x(n) là tín hiệu thực:

$$Nx(n) = \mathrm{Re}\, X(0)\cos\left(0\right) + \mathrm{Re}\, X(1)\cos\left(2\pi n/N\right) + .. + \mathrm{Re}\, X(\mathrm{N}-1)\cos\left(2\pi(N-1)n/N\right)$$

$$-\mathrm{Im}\, X(0)\sin\left(0\right) - \mathrm{Im}\, X(1)\sin\left(2\pi n/N\right) - \ldots - \mathrm{Im}\, X(N-1)\sin\left(2\pi(N-1)n/N\right)$$

Biến đổi Fourier rời rạc (DFT)

- Ví dụ: Tìm biến đổi Fourier ngược của dãy:

$$X(k) = [6 \quad -2-2j \quad 2 \quad -2+2j]$$

$$\begin{aligned}4*x(n) \quad &= 6\cos(0) + (-2)\cos(2\pi n/4) + 2\cos(4\pi n/4) - 2\cos(6\pi n/4) - \\ &\sin(0) + 2\sin(2\pi n/4) - 0\sin(4\pi n/4) - 2\sin(6\pi n/4) \\ &= 6 - 2\cos(\pi n/2) + 2\cos(\pi n) - 2\cos(3\pi n/2) + 4\sin(\pi n/2)\end{aligned}$$

$$4*x(0) = 4$$

$$4*x(1) = 8$$

$$\boxed{x(n) = [1 \quad 2 \quad 3]}$$

$$4*x(2) = 12$$

$$4*x(3) = 0$$

Biến đổi Fourier rời rạc (DFT)

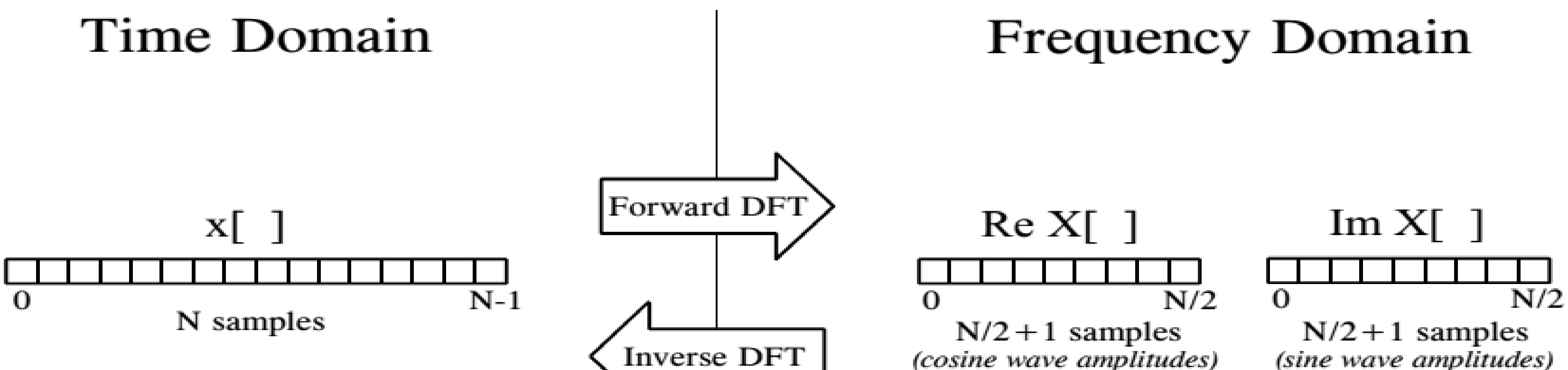
- Ví dụ: Tìm biến đổi Fourier rời rạc 8 điểm của dãy:

$$x(n) = \{1, 2, -3, 2, 1, 3, 4, 1\}$$

  - Có nhận xét gì về biến đổi Fourier rời rạc thu được?

Biến đổi Fourier rời rạc (DFT)

- Phần thực đối xứng qua đường thẳng x = N/2
- Phần ảo đối xứng qua tâm (N/2,0)



$$ReX[k] = \sum_{i=0}^{N-1} x[i] \cos(2\pi k i / N)$$

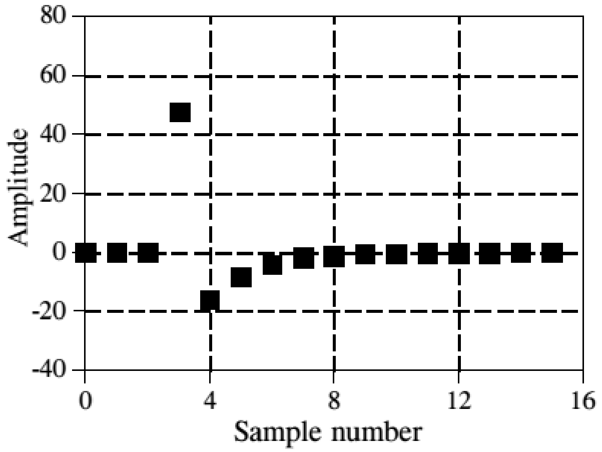
$$ImX[k] = -\sum_{i=0}^{N-1} x[i] \sin(2\pi k i / N)$$

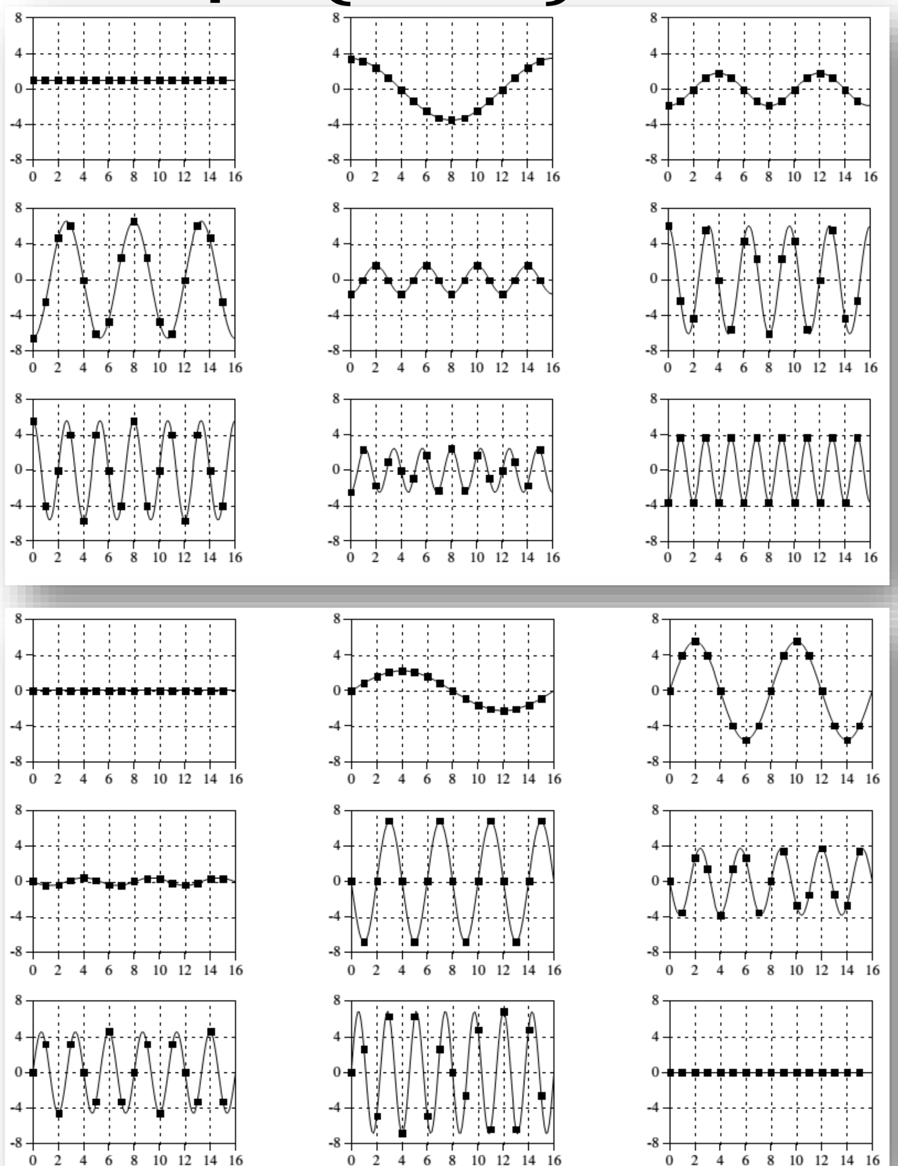
$$x[i] = \sum_{k=0}^{N/2} Re\bar{X}[k] \cos(2\pi k i / N) + \sum_{k=0}^{N/2} Im\bar{X}[k] \sin(2\pi k i / N)$$

$$Re\bar{X}[k] = \frac{ReX[k]}{N/2} \qquad Re\bar{X}[0] = \frac{ReX[0]}{N}$$

$$Im\bar{X}[k] = -\frac{ImX[k]}{N/2} \qquad Re\bar{X}[N/2] = \frac{ReX[N/2]}{N}$$

Biến đổi Fourier rời rạc (DFT)





Ứng dụng của DFT

- Phân tích phổ của tín hiệu:
  - Tín hiệu có độ dài hữu hạn -> tính DFT trực tiếp
  - Tín hiệu dài, vô hạn -> cửa sổ hóa:

$$\hat{x}(n) = x(n).\mathrm{w}(n)$$

  - w(n): hàm cửa sổ
  - Hàm cửa sổ có chiều dài L chỉ phân biệt được các tần số cách nhau ít nhất: $\Delta\omega = 2\pi / L$

Ứng dụng của DFT

- Phân tích phổ của tín hiệu:
  - Hàm cửa sổ:
    - Cửa sổ hình chữ nhật

$$w[i]=1$$

    - Cửa sổ Hanning

$$w[i]=0.5(1-\cos(2\pi i/(\mathrm{L}-1))$$

    - Cửa sổ Hamming

$$w[i]=0.54-0.46\cos(2\pi i/L)$$

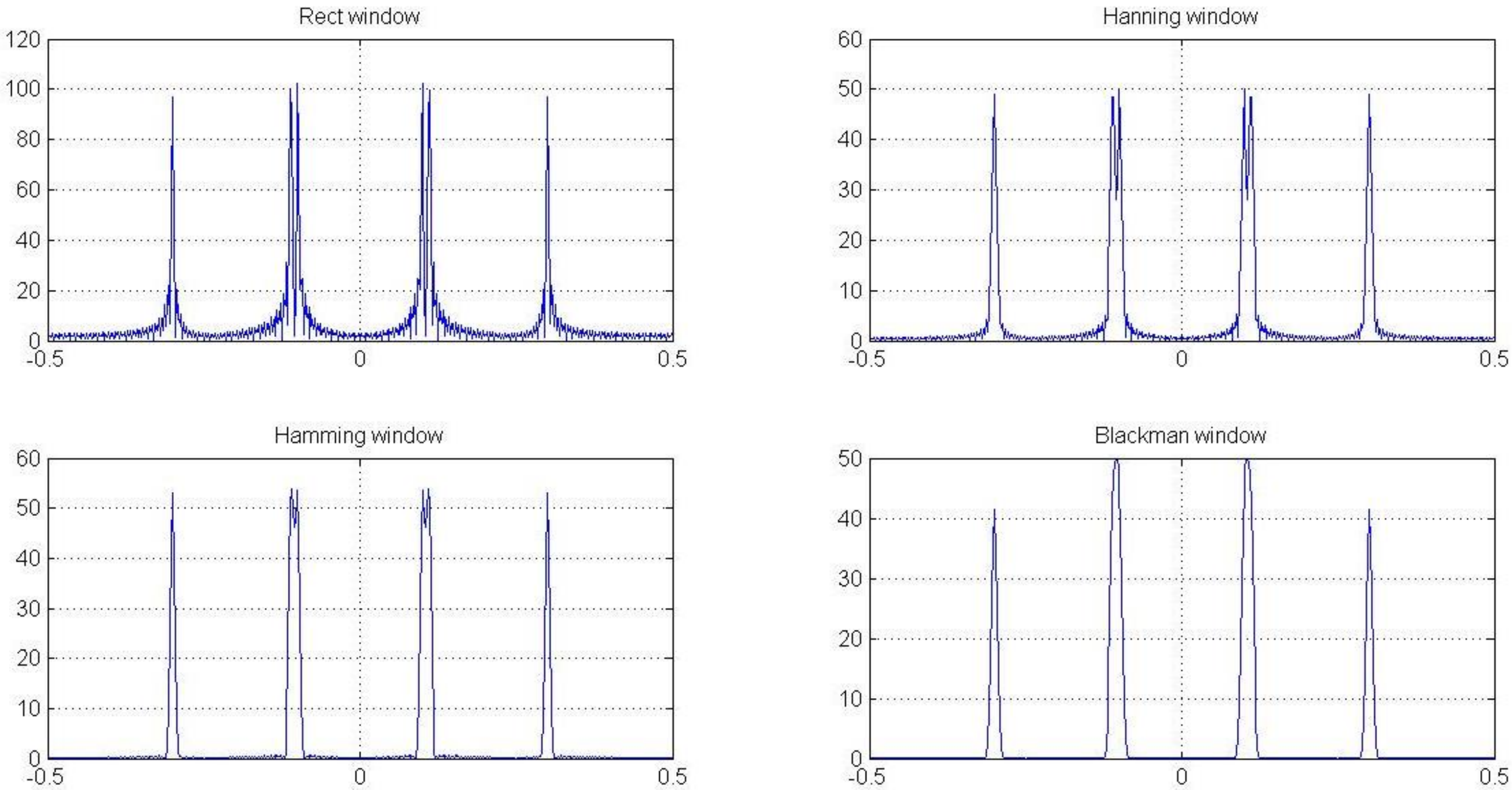
    - Cửa sổ Blackman

$$w[i]=0.42-0.5\cos(2\pi i/L)+0.08\cos(4\pi\,\mathrm{i}/\,\mathrm{L})$$

Ứng dụng của DFT

- Phân tích phổ của tín hiệu:

x = cos (0.2*pi*n)+cos (0.22*pi*n)+cos (0.6*pi*n); L = 200



Ứng dụng của DFT

- Phân tích hệ thống LTI:
  - Đáp ứng của hệ thống LTI được xác định theo công thức tổng chập:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

  - Đầu vào là tín hiệu mũ phức:

$$x(n) = Ae^{j\omega n} \qquad -\infty < n < \infty$$

  - Đáp ứng của hệ thống:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\left[Ae^{j\omega(n-k)}\right] = A\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}\right]e^{j\omega n}$$

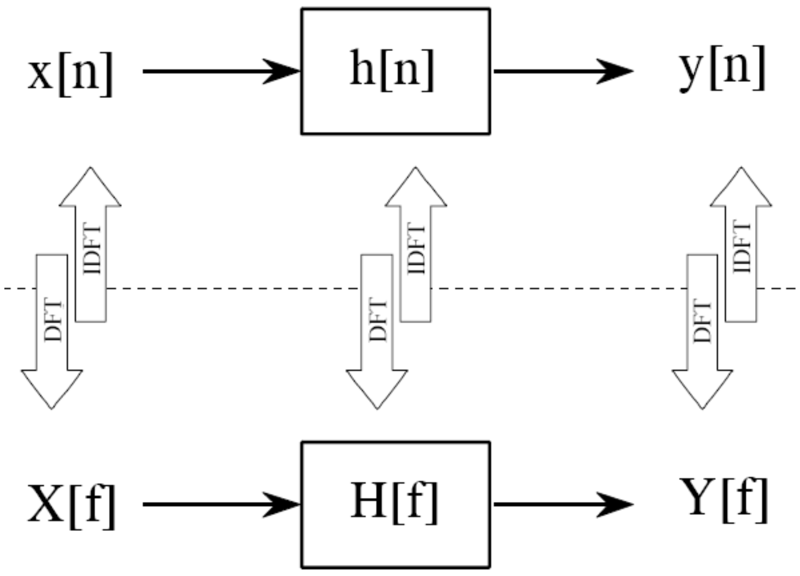
$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(n) = AH(\omega)e^{j\omega n}}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Ứng dụng của DFT

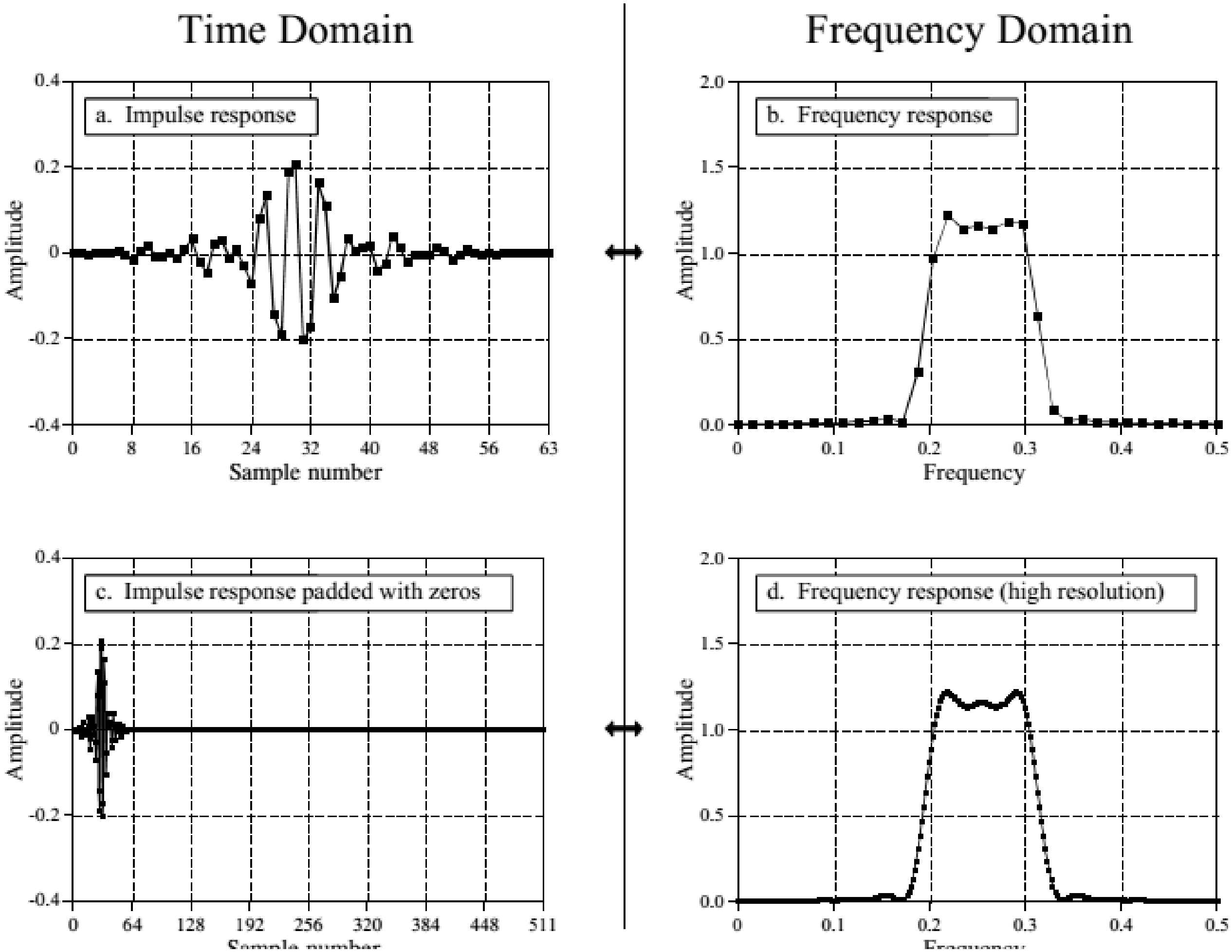
- Phân tích hệ thống LTI:



- h(n) = {1,2,4};x(n) = {1,2,2,1}
- y(n) bằng tích chập
- Sử dụng DFT_4 điểm và 8 điểm: Tính H, X, Y = H.X;
- So sánh kết quả của y và IDFT(Y).

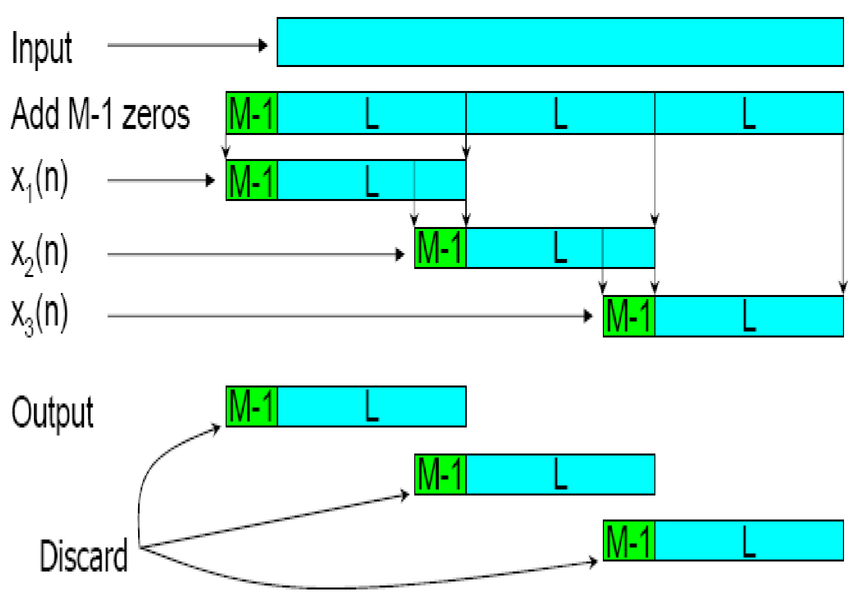
Ứng dụng của DFT

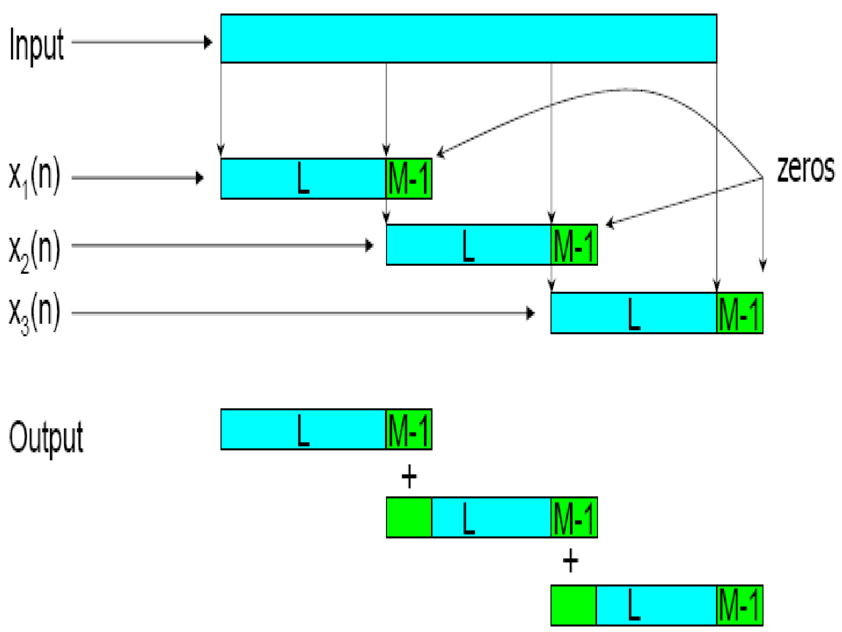
- Phân tích hệ thống LTI:



Ứng dụng của DFT

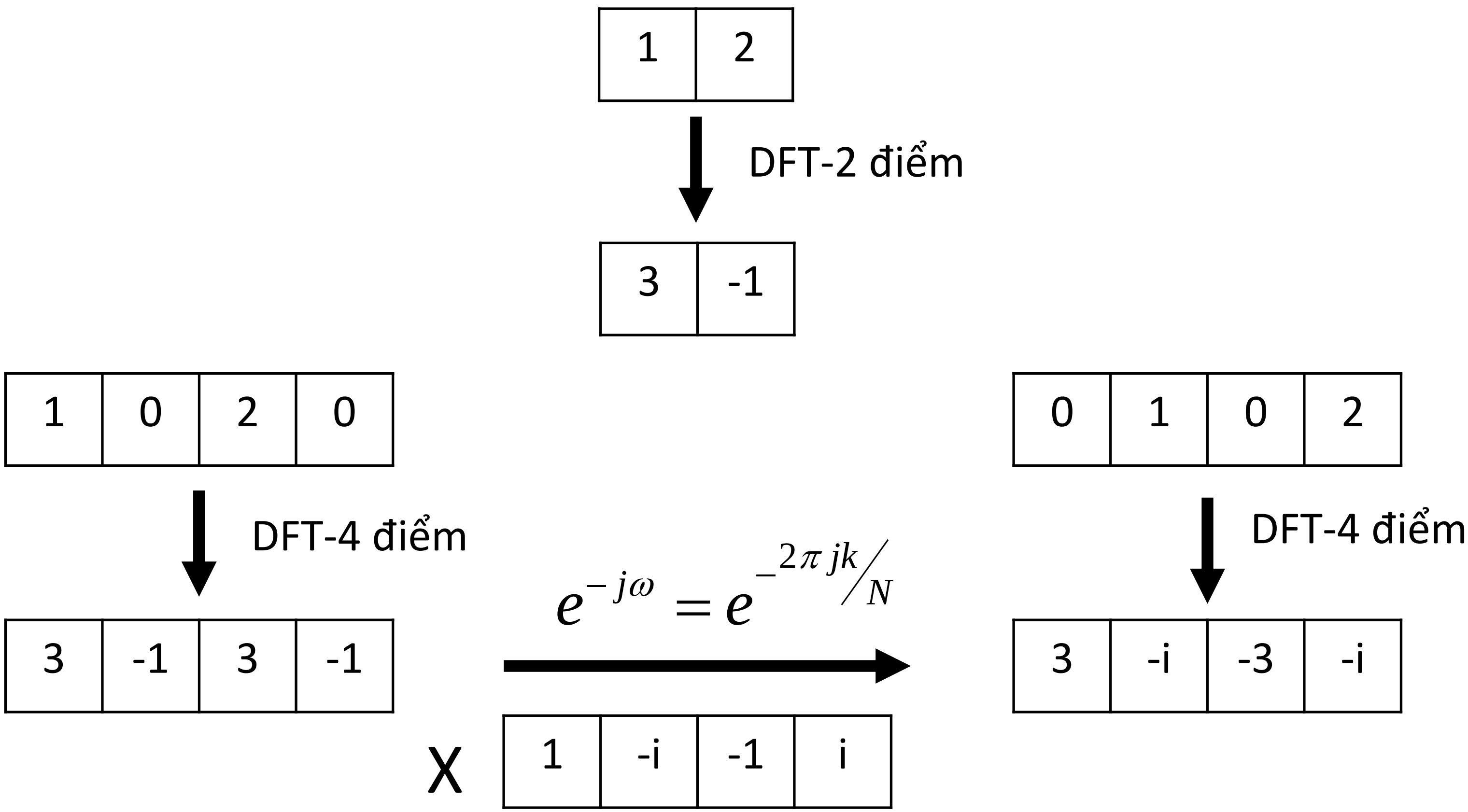
- Sử dụng DFT trong lọc tuyến tính:
  - Nếu dãy đầu vào dài: chia thành các Block độ dài L.
  - Phương pháp đặt kề nhau, phương pháp xếp chồng



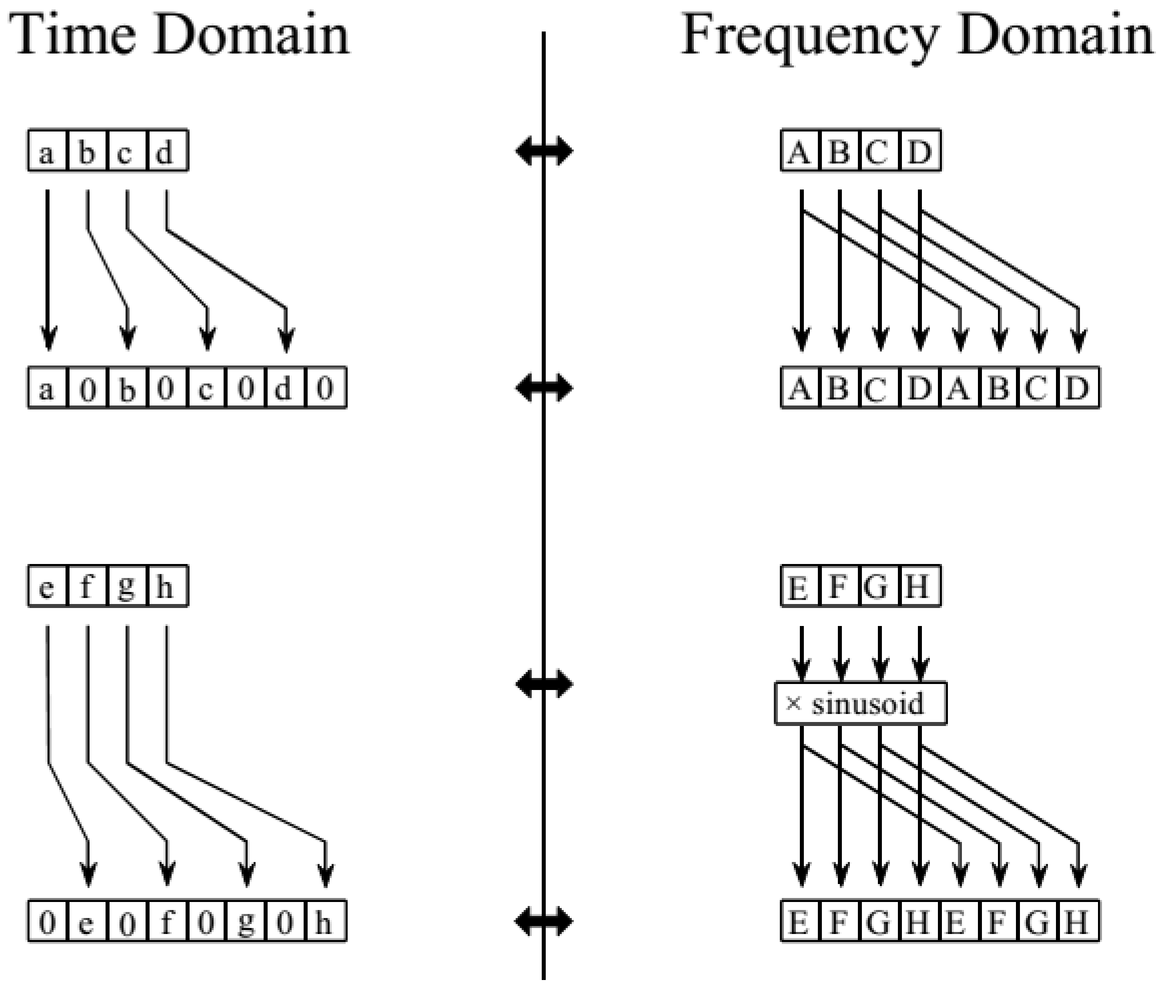


Thuật toán FFT - $N = 2^k$

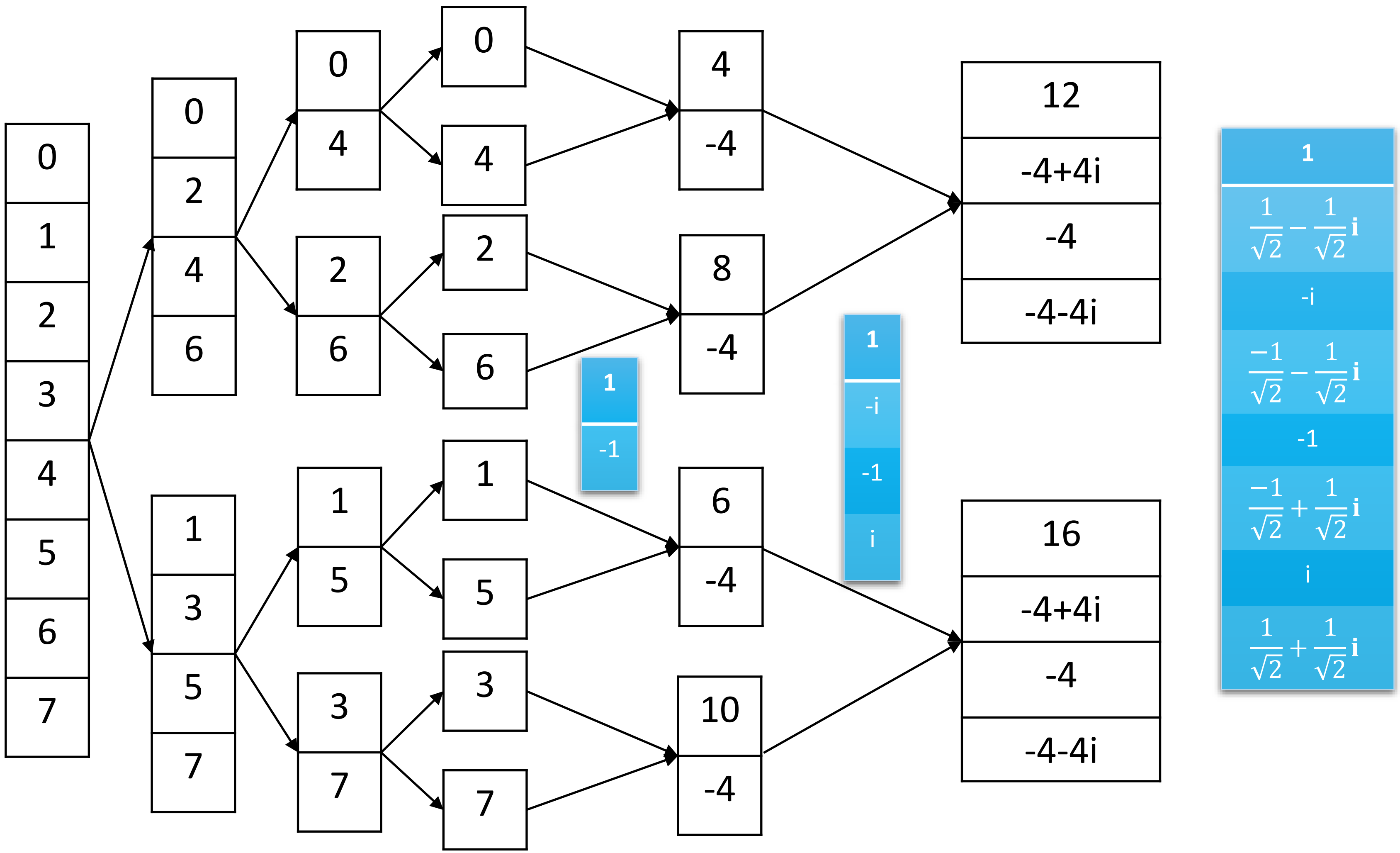
- Tính DFT – 2 điểm của x(n) = {1, 2}
- Tính DFT – 4 điểm của x(n) = {1, 0, 2, 0}
- Tính DFT – 4 điểm của x(n) = {0, 1, 0, 2}



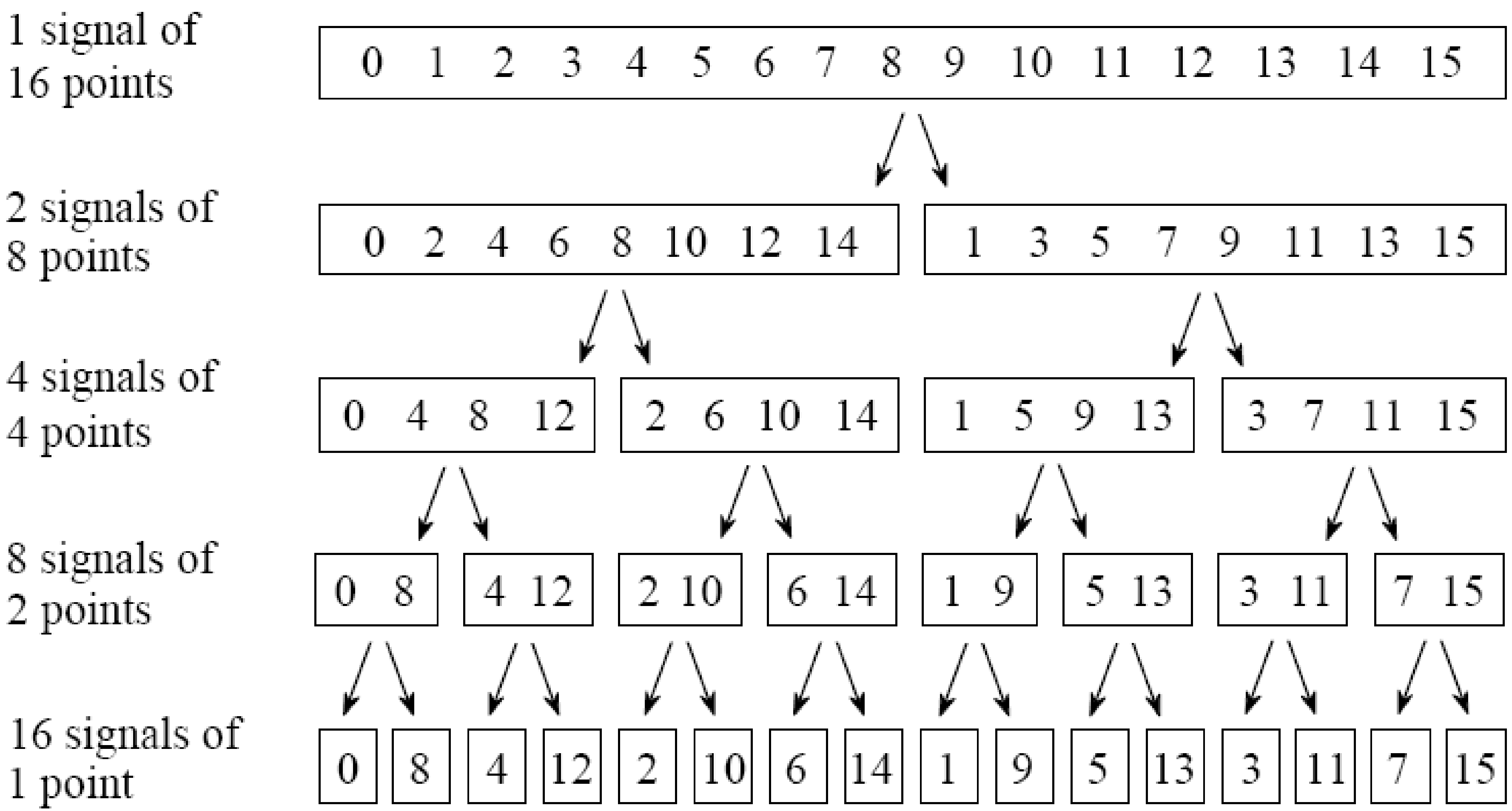
Thuật toán FFT - $N = 2^k$



Thuật toán FFT - N = 2^k



Thuật toán FFT - N = 2^k



Thuật toán FFT - N = 2^k

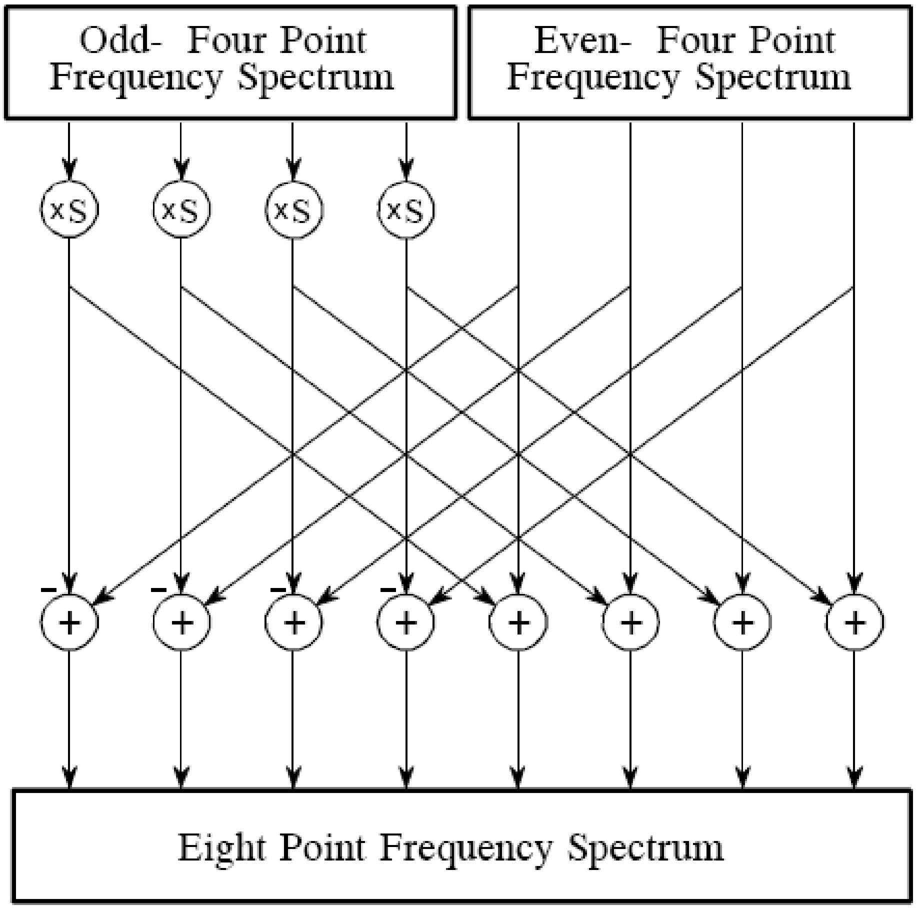
Sample numbers in normal order

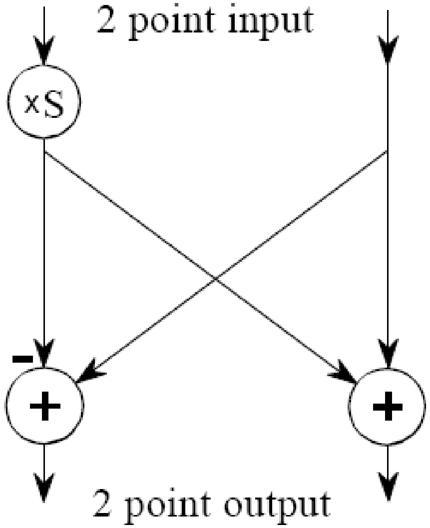
Decimal	*Binary*
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111

Sample numbers after bit reversal

Decimal	*Binary*
0	0000
8	1000
4	0100
12	1100
2	0010
10	1010
6	0100
14	1110
1	0001
9	1001
5	0101
13	1101
3	0011
11	1011
7	0111
15	1111

Thuật toán FFT - $N = 2^k$





Thuật toán FFT - N = 2^k