Chương 2. Tín hiệu rời rạc và hệ thống xử lý tín hiệu rời rạc

Nội dung

- Tín hiệu rời rạc theo thời gian
- Phân tích hệ thống rời rạc tuyến tính bất biến theo thời gian
- Hệ thống rời rạc theo thời gian được mô tả thông qua phương trình sai phân
- Tích chập
- Tương quan của các tín hiệu

Tín hiệu rời rạc theo thời gian

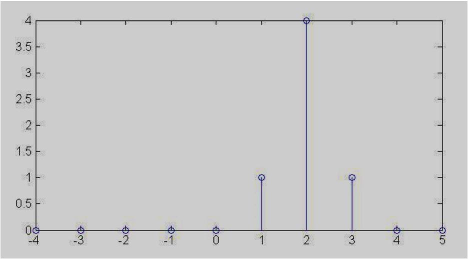
- *T/h rời rạc theo thời gian:* t/h chỉ được xác định ở những giá trị nhất định của thời gian.
- *x(n)* chỉ được định nghĩa đối với các giá trị nguyên của n.
- T/h hình sin rời rạc theo thời gian:

$$x(n) = A.\cos\left(\omega n + \theta\right)$$

$$x(n) = A.\cos\left(2\pi fn + \theta\right)$$

Tín hiệu rời rạc theo thời gian

- **Các phương pháp biểu diễn t/h RRTG**
  - Phương pháp đồ thị:



  - Biểu diễn bằng hàm:

$$x(n) = \begin{cases} 1 \text{ vôùn} = 1,3 \\ 4 \text{ vôùn} = 2 \\ 0 \text{ vôùcaù giaùtròcoøn laïi} \end{cases}$$

  - Biểu diễn bằng bảng:

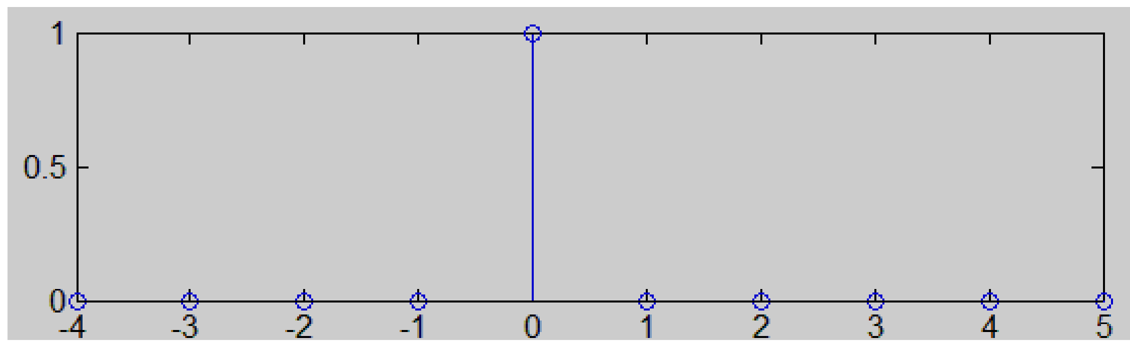
n	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
x(n)	...	0	0	0	1	4	1	0	0	...

  - Biểu diễn qua dãy số:

Tín hiệu rời rạc theo thời gian

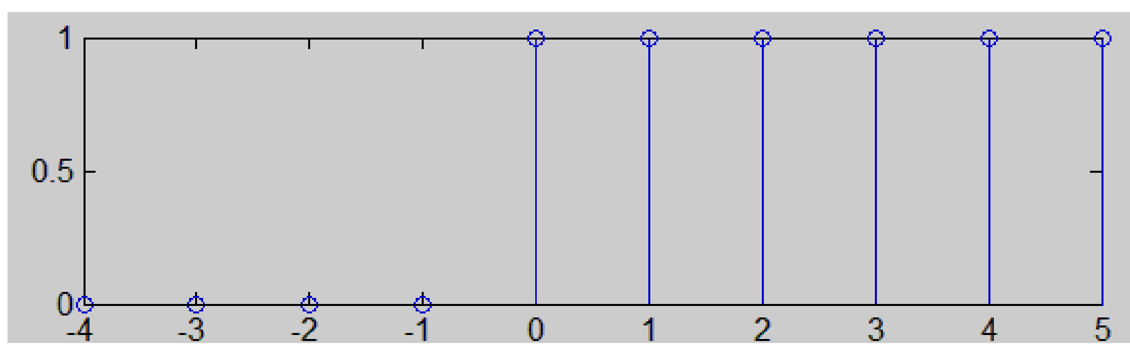
- **Một vài mẫu tín hiệu rời rạc cơ bản**
  - Dãy mẫu đơn vị (*Unit sample sequence*).

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 \text{ vôùn} = 0 \\ 0 \text{ vôùn} \neq 0 \end{cases}$$



  - Dãy nhảy bậc đơn vị *(Unit step signal)*

$$u(n) = \begin{cases} 1 \text{ vôùn } \geq \ 0 \\ 0 \text{ vôùn} < 0 \end{cases}$$



Tín hiệu rời rạc theo thời gian

- **Một vài mẫu tín hiệu rời rạc cơ bản**
  - Mối quan hệ của dãy mẫu đơn vị và dãy nhẩy bậc đơn vị

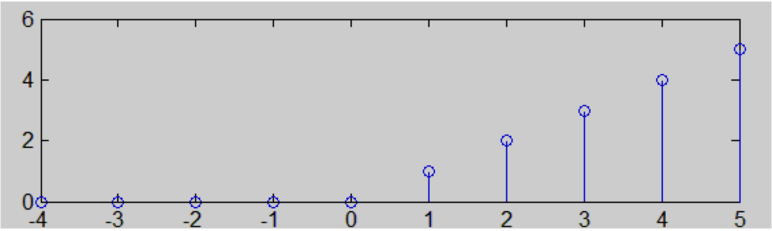
$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

Tín hiệu rời rạc theo thời gian

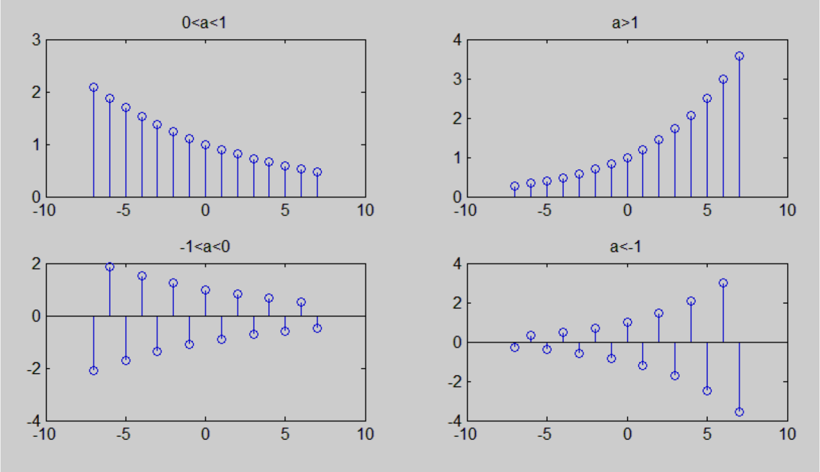
- **Một vài mẫu tín hiệu rời rạc cơ bản**
  - Tín hiệu dốc đơn vị *(Unit ramp signal)*

$$u_r(n) = \begin{cases} n \text{ vôùn } \geq 0 \\ 0 \text{ vôùn} < 0 \end{cases}$$



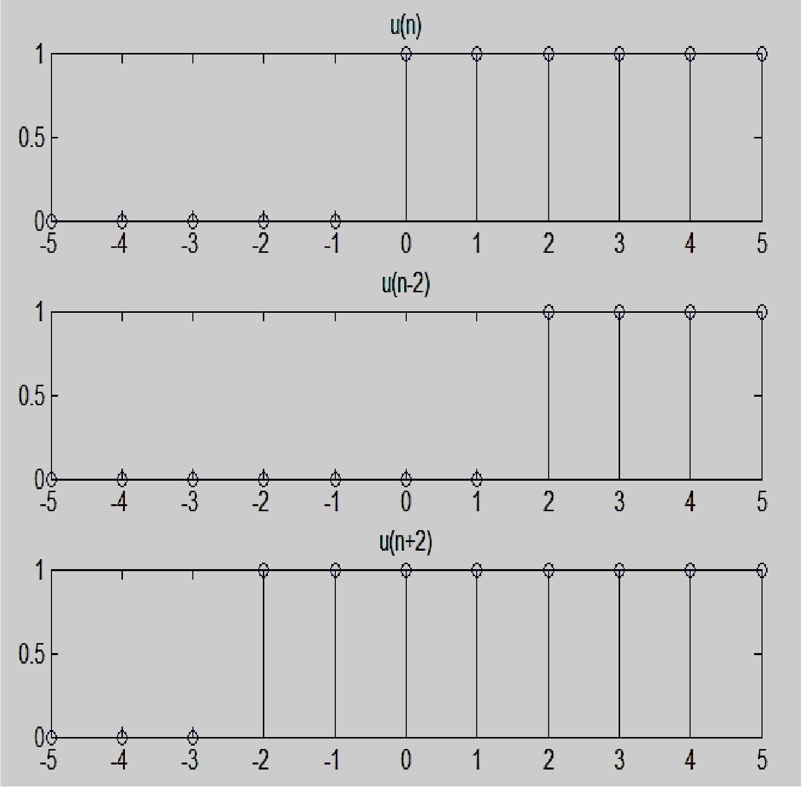
  - Tín hiệu mũ *(exponential signal)*

$$x(n) = a^n$$



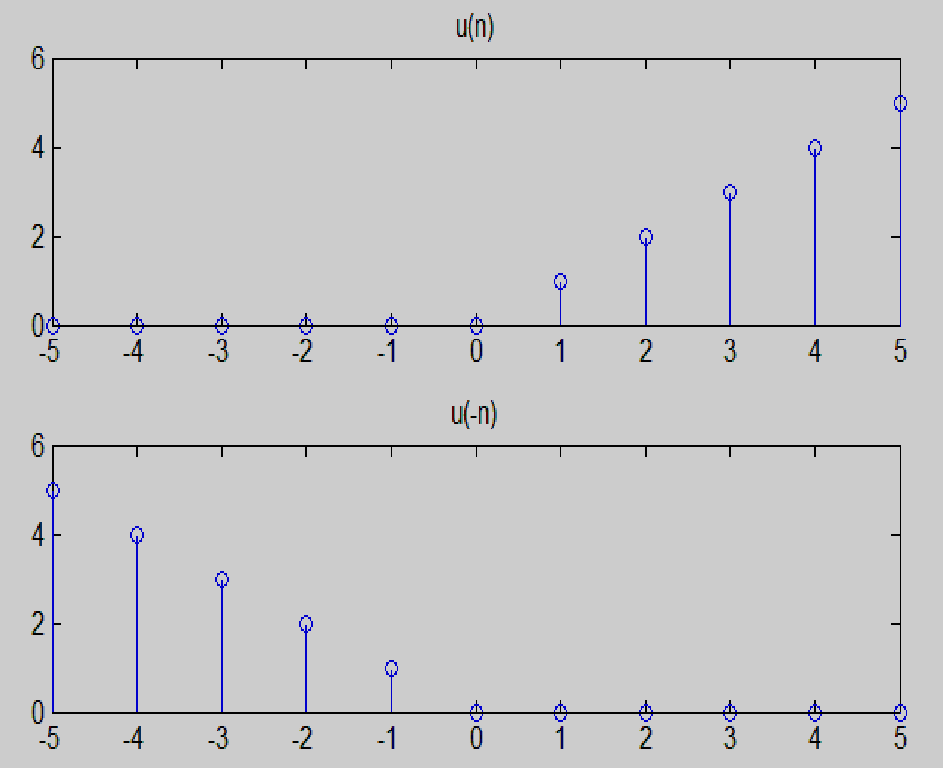
Tín hiệu rời rạc theo thời gian

- **Các phép toán cơ bản**
  - Phép dịch biến độc lập: x(n – k)
    - Phép làm trễ (k > 0):
      - Làm trễ x(n) đi k mẫu
      - Trên đồ thị, là sự dịch phải tín hiệu đi k mẫu
    - Phép vượt trước (k < 0):
      - Lấy trước x(n) k mẫu
      - Trên đồ thị, là sự dịch trái tín hiệu đi k mẫu



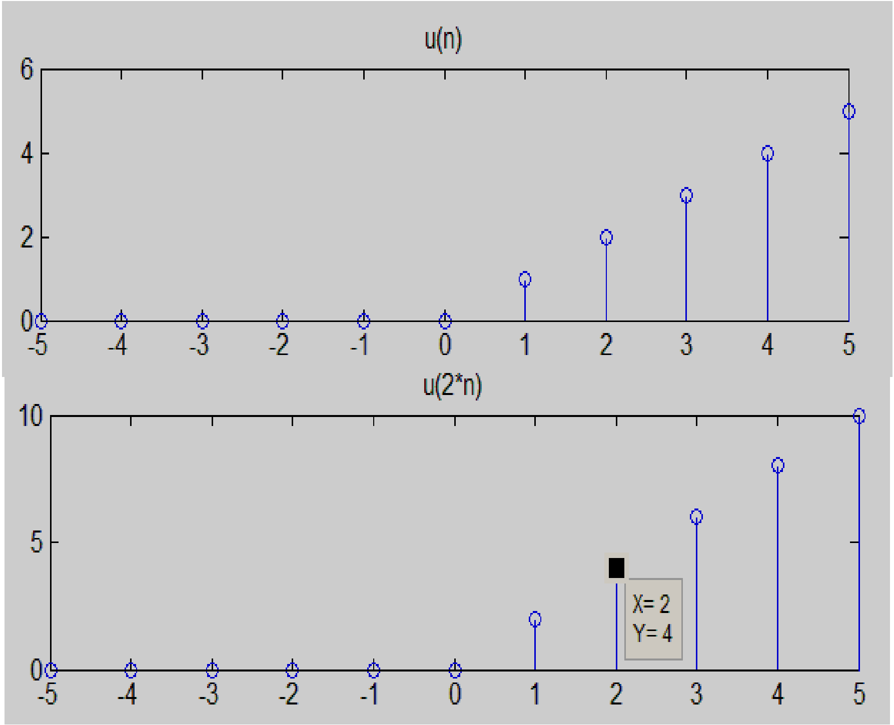
Tín hiệu rời rạc theo thời gian

- **Các phép toán cơ bản:**
  - Phép đảo:
    - Thay thế ***n*** bởi ***–n***
    - Trên đồ thị, là phép lấy đối xứng t.h qua trục.



Tín hiệu rời rạc theo thời gian

- **Các phép toán cơ bản**
  - Phép co giãn theo thời gian
    - Thay thế **n** bởi **μn** (μ nguyên)
    - Tái lấy mẫu tín hiệu



Tín hiệu rời rạc theo thời gian

- **Các phép toán cơ bản**
  - Phép cộng, nhân, lấy tỉ lệ:
    - Phép cộng:

$$y(n) = x_1(n) + x_2(n).$$

    - Phép nhân:

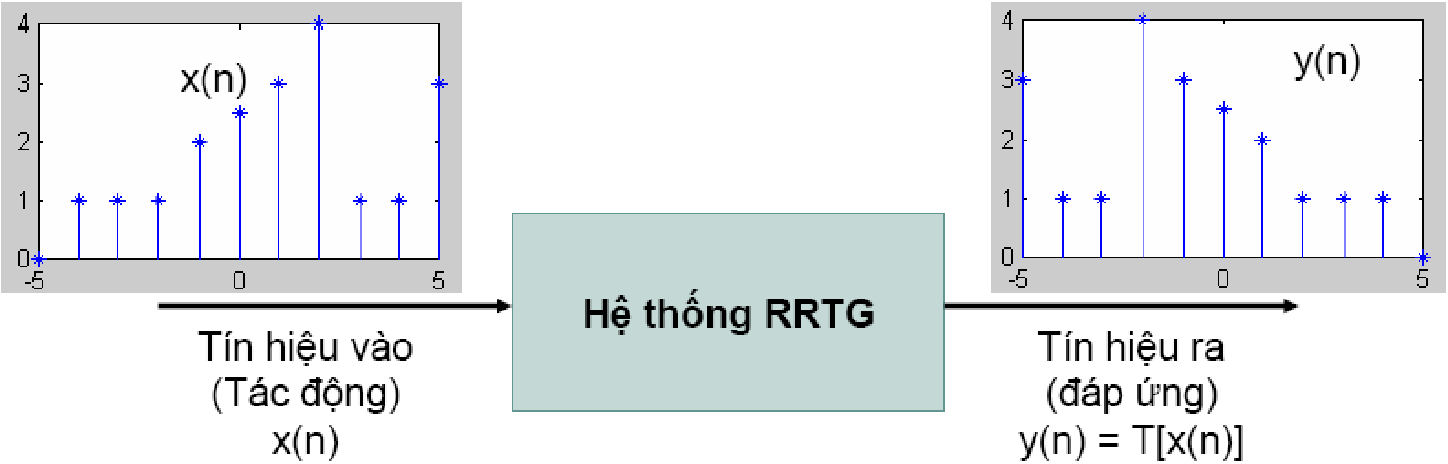
$$y(n) = x_1(n).x_2(n).$$

    - Phép lấy tỉ lệ:

$$y(n) = ax_1(n)$$

Hệ thống tín hiệu rời rạc

- Hệ thống tín hiệu rời rạc bao gồm những thiết bị, thuật toán, nhằm thực hiện các phép toán trên tín hiệu rời rạc



  - Không quan tâm tới cấu trúc bên trong mà chỉ quan tâm mối quan hệ vào/ra.
  - Ta gọi y(n) là đáp ứng của hệ thống T với kích thích x(n).

Hệ thống tín hiệu rời rạc

- **Phân loại HTRRTG**
  - Hệ nhớ và không nhớ
    - Hệ không nhớ: đáp ứng của hệ thống chỉ phục thuộc vào t.h vào tại thời điểm đó mà không phụ thuộc vào các giá trị mẫu của t.h trong quá khứ và tương lại.
    - Ngược lại, ta có hệ nhớ.
  - Hệ bất biến và hệ biến thiên:
    - Hệ bất biến: đặc trưng vào ra không thay đổi theo thời gian

$$x(n) \xrightarrow{T} y(n)$$

$$\Rightarrow \quad x(n-k) \xrightarrow{T} y(n-k) \qquad \forall x(n), \forall k$$

Hệ thống tín hiệu rời rạc

- **Phân loại HTRRTG**
  - Hệ tuyến tính và phi tuyến
    - Nguyên lý xếp chồng (superposition principle): với mọi hằng số a_1, a_2, và mọi dãy tín hiệu vào $x_1(n)$, $x_2(n)$ ta có:

$$\boxed{T\left[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)\right]=a_1T\left[x_1(n)\right]+a_2T\left[x_2(n)\right]}$$

Hệ thống tín hiệu rời rạc

- **Phân loại HTRRTG**
  - Hệ tuyến tính và phi tuyến
    - **Nguyên lý xếp chồng** tổng quát:

$$\boxed{\begin{gathered} x(n)=\sum_{k=1}^{M} a_k x_k(n) \xrightarrow{T} y(n)=\sum_{k=1}^{M} a_k y_k(n) \text{ vôùi} \\ y_k(n)=T\left[x_k(n)\right]; k=1,\ldots,M \end{gathered}}$$

- Hệ thống **tuyến tính** là hệ thỏa mãn nguyên lý xếp chồng; Ngược lại ta có hệ **phi tuyến**.

Hệ thống tín hiệu rời rạc

- **Phân loại HTRRTG**
  - Hệ nhân quả và hệ không nhân quả
    - Hệ **nhân quả**: hệ chỉ phụ thuộc vào các mẫu hiện tại và quả khứ mà không phụ thuộc vào mẫu tương lai. Đáp ứng của hệ thống được biểu diễn như sau:

$$y(n) = F\left[x(n), x(n-1), x(n-2), \ldots\right]$$

    - Ngược lại, ta có hệ không nhân quả.

Hệ thống tín hiệu rời rạc

- **Phân loại HTRRTG**
  - Hệ ổn định và không ổn định
    - Hệ **ổn định** (Hệ BIBO ,bounded input – bounded output): là hệ mà đầu ra là hữu hạn nếu đầu vào hữu hạn.
    - Ngược lại là hệ không ổn định

Hệ thống tín hiệu rời rạc

- **Phân loại HTRRTG**
  - Ví dụ: Xét HTRRTG với mối quan hệ vào – ra:

$$y(n) = T\left[x(n)\right] = x(n) - x(n-1)$$

    - Đây là hệ nhớ hữu hạn, hệ nhân quả, hệ ổn định.
    - Tính chất tuyến tính?
    - Tính chất bất biến?
    - Minh họa bằng ví dụ trên MATLAB

Hệ thống tín hiệu rời rạc

- **Phân loại HTRRTG**
  - Ví dụ : Khảo sát tính chất tuyến tính và bất biến của các HTRRTG, sau đó minh họa bằng ví dụ cụ thể trên MATLAB:

$$y(n) = T_1\left[x(n)\right] = nx(n)$$

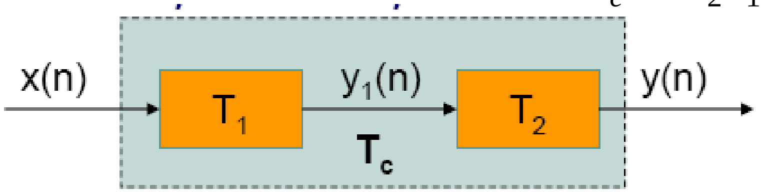
$$y(n) = T_2\left[x(n)\right] = x(-n)$$

$$y(n) = T_3\left[x(n)\right] = x(n)\cos\omega_0 n$$

Hệ thống tín hiệu rời rạc

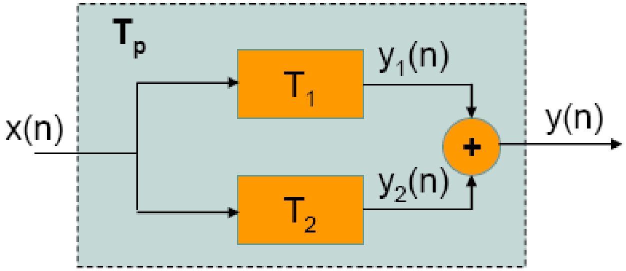
- **Liên kết HTRRTG**
  - 2 phương pháp liên kết:
    - Liên kết theo tầng: $y(n) = T_2\left[y_1(n)\right] = T_2T_1\left[x(n)\right]$

$$T_c = T_2T_1$$



    - Liên kết song song $y(n) = T_1\left[x(n)\right] + T_2\left[x(n)\right] = (T_2 + T_1)\left[x(n)\right]$

$$T_p = T_2 + T_1$$



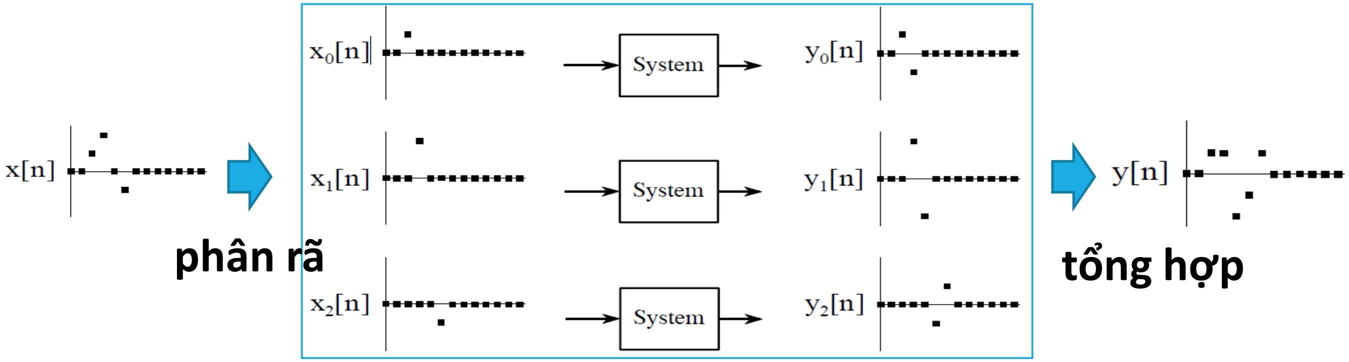
Phân tích hệ thống LTI

- **Kỹ thuật phân tích hệ thống LTI**
  - PP 1: Giải quyết trực tiếp biểu thức thể hệ mối quan hệ vào/ra của hệ LTI:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

Phân tích hệ thống LTI

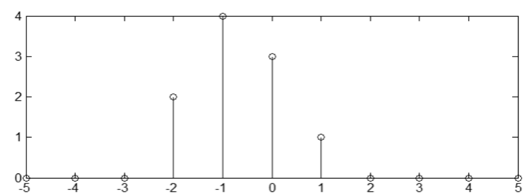
- **Kỹ thuật phân tích hệ thống LTI**
  - PP 2:
    - Phân tích tín hiệu vào thành tổng của các tín hiệu đơn giản
    - Xác định đáp ứng của các tín hiệu đơn giản đó.
    - Sử dụng t/c tuyến tính, xác định đáp ứng tổng.

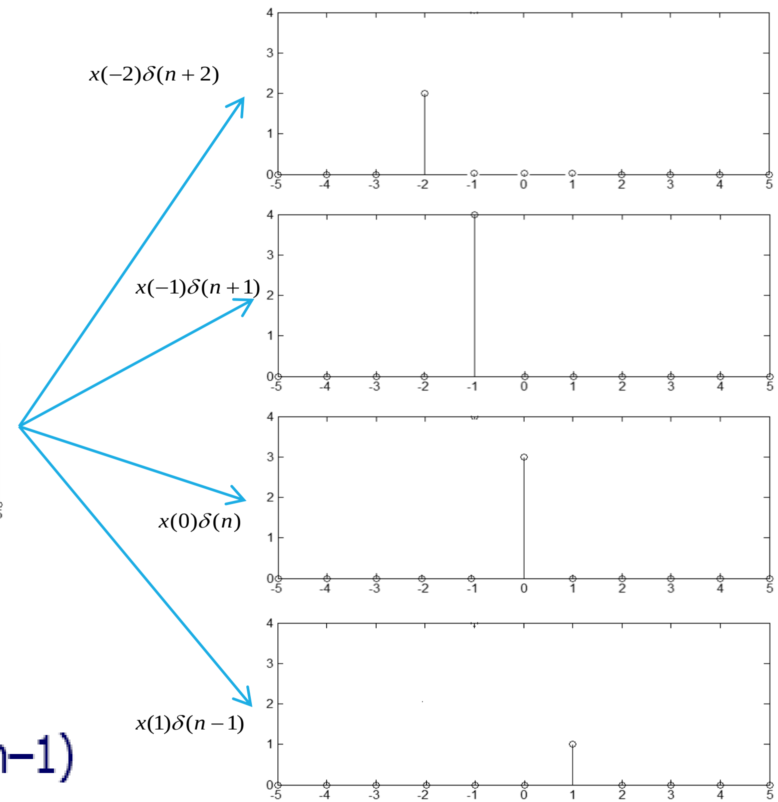


Phân tích hệ thống LTI

- **Phân tích THRR thành các xung đơn vị**

$$\boxed{x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)\delta(n-k)}$$





$x(n) = \{2 \quad 4 \quad \underset{\uparrow}{3} \quad 1\}$

$x(n) = 2\delta(n+2) + 4\delta(n+1) + 3\delta(n) + \delta(n-1)$

Phân tích hệ thống LTI

- **Phân tích THRR thành các xung đơn vị**
  - Khi x(n) được phân tích thành tổng của các xung đơn vị, ta có đáp ứng của hệ LTI:

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)T\left[\delta(n-k)\right]$$

  - Đáp ứng của hệ thống đối với dãy xung đơn vị được gọi là ***đáp ứng xung***

$$h(n) = T\left[\delta(n)\right]$$

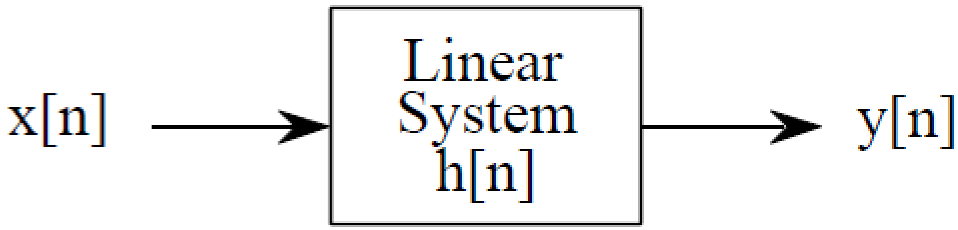
Phân tích hệ thống LTI

- **Đáp ứng xung:**
  - Trong các ứng dụng xử lý ảnh, xử lý âm thanh hệ thống thường đóng vai trò một bộ lọc (filter) nhằm tăng cường mối quan hệ giữa các giá trị tín hiệu lân cận nhau, qua đó loại bỏ nhiễu hoặc trích chọn thông tin. Vì vậy *đáp ứng xung* còn được gọi là *nhân của bộ lọc*: filter kernel, convolution kernel hay kernel, point spread function (PSF)…

Phân tích hệ thống LTI

- **Tích chập:**

$$y(n) = T[x(n)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \overset{k/h}{=} x(n) * h(n)$$



$$x[n] * h[n] = y[n]$$

Phân tích hệ thống LTI

- **Ví dụ minh họa hoạt động của hệ LTI:**
  - Cho h/t với đáp ứng xung h(n) = {1, 2}. Xác định đáp ứng của h.t với x(n) = {1, -1, 2}
    - Phân tích x(n) thành tổng của các xung đơn vị

$$x(n) = 1 \times \delta(n) + (-1) \times \delta(n-1) + 2 \times \delta(n-2)$$

    - Tính đáp ứng ra với từng dãy

$$T\left[1 \times \delta(n)\right] = 1 \cdot h(n) = \{1, 2\}$$

$$T\left[(-1) \times \delta(n-1)\right] = (-1) \cdot h(n-1) = \{0, -1, -2\}$$

$$T\left[2 \times \delta(n-2)\right] = 2 \cdot h(\mathrm{n}-2) = \{0, 0, 2, 4\}$$

$$y(n) = \{1, 1, 0, 4\}$$

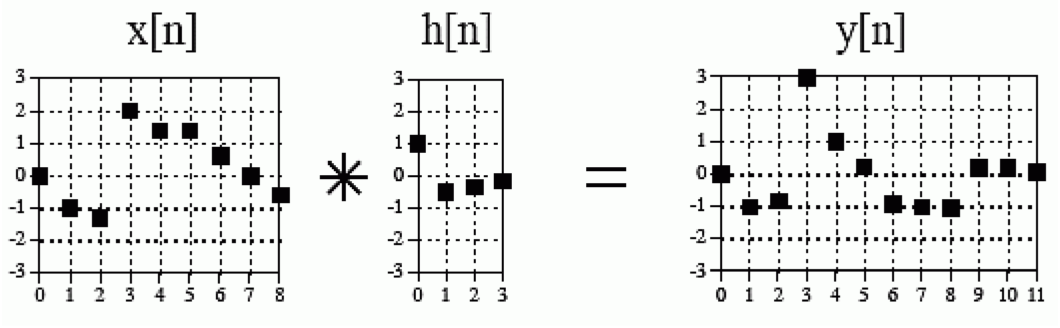
Phân tích hệ thống LTI

- **Thuật toán tính tích chập:**
  - Thuật toán Input Side
  - Thuật toán Ouput Side

Phân tích hệ thống LTI

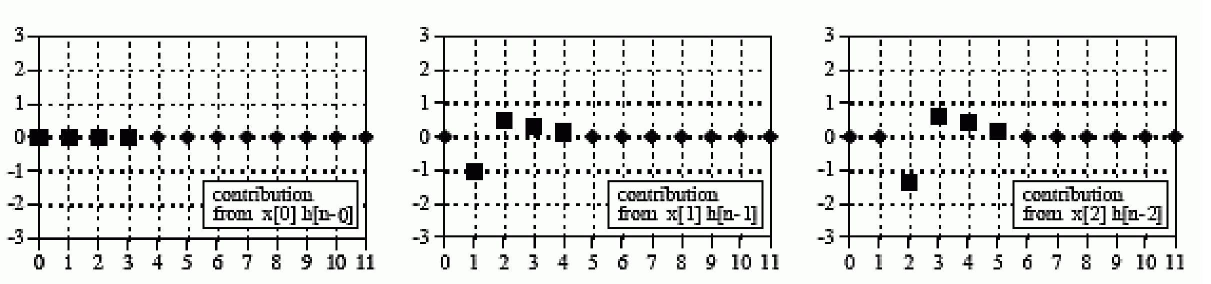
- Thuật toán tính tích chập:
  - **Thuật toán Input Side**

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$



- Dịch h(n) → h(n-k)
- Lấy tỉ lệ

  $y_k(n)=x(k)\ h(n-k)$
- Tín hiệu y(n) là tổng của các tín hiệu $y_k(n)$.



Phân tích hệ thống LTI

- Thuật toán tính tích chập:
  - **Thuật toán Input Side**
    - Giả sử tín hiệu input x[n] gồm N điểm từ 0 đến N-1, đáp ứng xung của hệ thống h[n] là tín hiệu gồm M điểm từ 0 tới M-1, khi đó output là tín hiệu gồm N+M-1 điểm từ 0 đến N+M-2 được tính như sau:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)h(n-k)$$

Phân tích hệ thống LTI

- Thuật toán tính tích chập:
  - **Thuật toán Input Side**
    - Ví dụ: Tính tích chập của 2 dãy
      - x(n) = {$\underline{3}$, 1, 5, 2, 8};
      - h(n) = {1 $\underline{2}$ 1};
    - Tính đầu ra tương ứng với từng xung:

$$y_o(n) = x(0)h(n) = 3 \times \{1,\ \underline{2}, 1\}$$

$$y_1(n) = x(1)h(n-1) = 1 \times \{\underline{1}, 2, 1\}$$

$$y_2(n) = x(2)h(n-1) = 5 \times \{\underline{0}, 1, 2, 1\}$$

…

Phân tích hệ thống LTI

- Thuật toán tính tích chập:
  - **Thuật toán Input Side**
    - Ví dụ: Tính tích chập của 2 dãy
      - x(n) = {3, 1, 5, 2, 8};
      - h(n) = {1 2 1};
    - Tính đầu ra tương ứng với từng xung:

$$y_o(n) = x(0)h(n) = 3\times\{1, 2, 1\}$$

$$y_1(n) = x(1)h(n-1) = 1\times\{0, 1, 2, 1\}$$

$$y_2(n) = x(2)h(n-1) = 5\times\{0, 0, 1, 2, 1\}$$

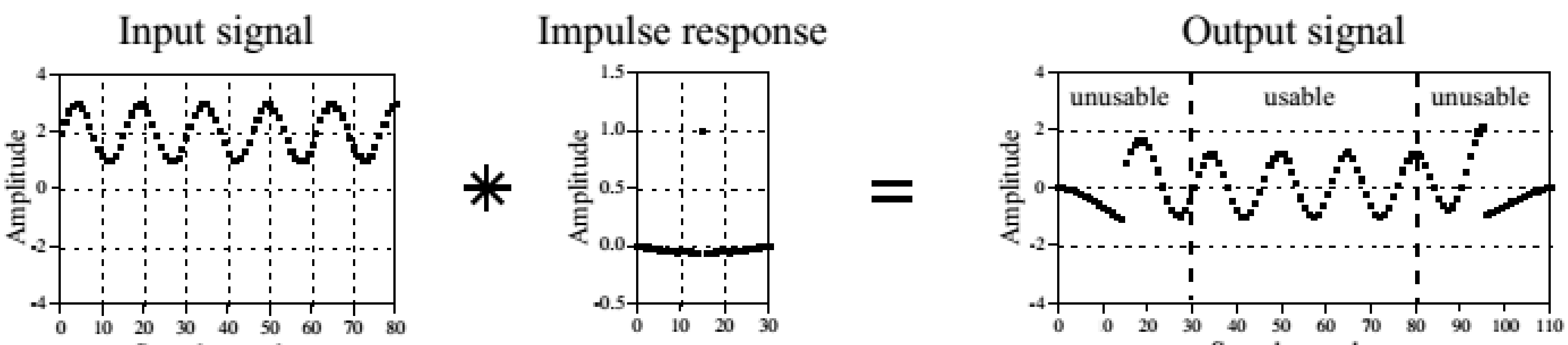
…

Phân tích hệ thống LTI

- Thuật toán tính tích chập:
  - **Thuật toán Input Side**
    - Bài tập trên lớp:
      - Giả sử tín hiệu input x[n] gồm N điểm từ 0 đến N-1, đáp ứng xung của hệ thống h[n] là tín hiệu gồm M điểm từ 0 tới M-1. Viết chương trình tích đáp ứng ra của h.t theo thuật toán Input Side.
      - So sánh kết quả với hàm `conv(x,h)` trong MATLAB. Nhận xét.

Phân tích hệ thống LTI

- Thuật toán tính tích chập:
  - **Thuật toán Input Side**
    - Bài tập trên lớp:
      - x(n) = cos(2*pi/5*n) (n = 0 - 80);
      - h(n) = Delta(n-15) (n = 0 - 30);
      - Tính và vẽ y(n) = x(n)*h(n);
      - So sánh x(n) và y(n); nhận xét

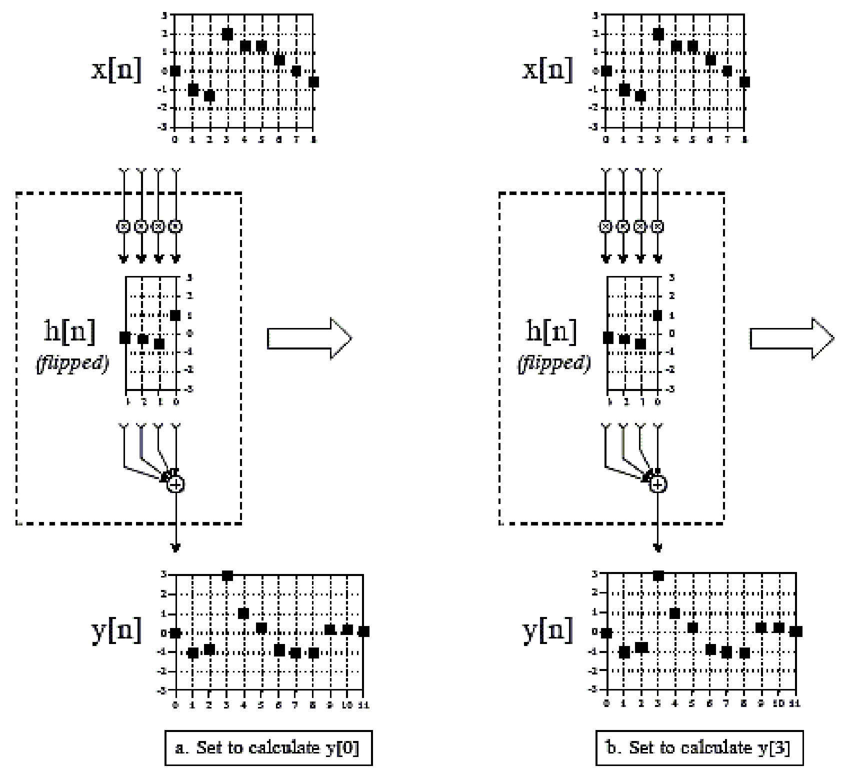


Phân tích hệ thống LTI

- Thuật toán tính tích chập:
  - **Thuật toán Output Side**

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n_0 - k)$$

- Đảo h(k) → h(-k)
- Dịch $h(n_0 - k)$
- Nhân dãy: $v_{n_0}(k)=x(k)\,h(n_0 - k)$
- Tính tổng các số hạng trong dãy v_{n_0}.



Phân tích hệ thống LTI

- Thuật toán tính tích chập:
  - **Thuật toán Output Side**
    - Ví dụ: Cho hệ thống với đáp ứng xung h(n) = {1, <u>2</u>, -1}. Xác định đáp ứng của h.t với kích thích x(n) = {<u>1</u>, 2, -3, 4}.

$$h(-k) = \{-1, \underline{2}, 1\};\, x(n) = \{\underline{1}, 2, -3, 4\}$$

$$y(0) = \sum_k x(k)h(-k) = (-1)\times 0 + 2\times 1 + 1\times 2 + 0\times(-3) + 0\times 4 = 4$$

$$y(1) = \sum_k x(k)h(-k+1) = \ldots$$

Phân tích hệ thống LTI

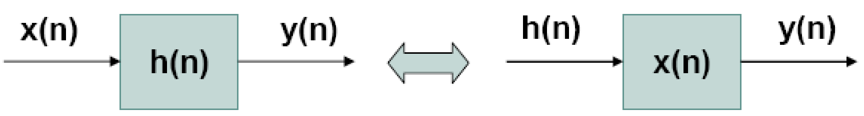
- Thuật toán tính tích chập:
  - **Thuật toán Output Side**
    - Bài tập trên lớp: Giả sử tín hiệu output x[n] gồm N điểm từ 0 đến N-1, đáp ứng xung của hệ thống h[n] là tín hiệu gồm M điểm từ 0 tới M-1. Viết chương trình tích đáp ứng ra của h.t theo thuật toán Output Side. So sánh kết quả với hàm `conv(x,h)` trong MATLAB. Nhận xét.

```
for i = 0: M+N-2   %loop for each sample of output signal Y
    Y(i)=0;
    for j = 0: M-1  %loop for each point in impulse H
        if (i-j>=0 || i-j<=N-1)
            Y(i)=Y(i)+H(j)*X(i-j);
        end;
    end;
end;
```

Phân tích hệ thống LTI

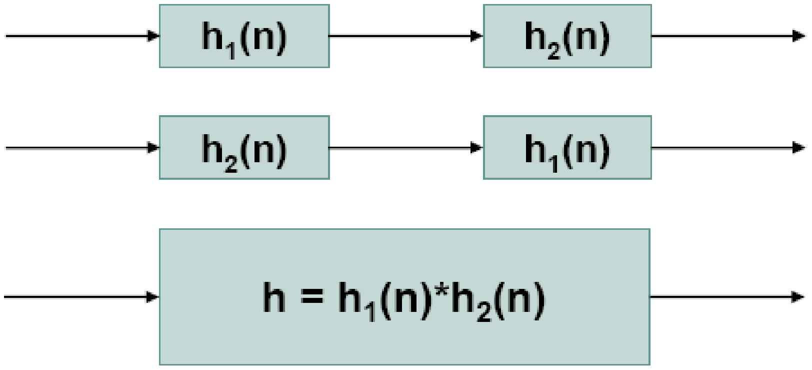
- **Tính chất của tích chập**
  - Tính chất giao hoán

$$\boxed{x * h = h * x}$$



  - Tính chất kết hợp

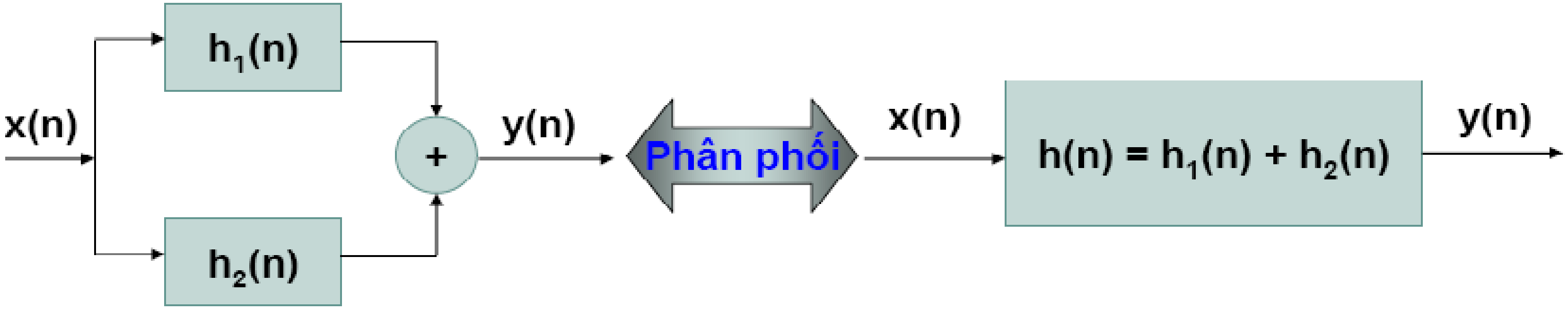
$$\boxed{\begin{aligned}(x * h_1) * h_2 &= x * (h_1 * h_2) \\ &= (x * h_2) * h_1\end{aligned}}$$



Phân tích hệ thống LTI

- **Tính chất của tích chập**
  - Tính chất phân phối:

$$\boxed{x * (h_1 + h_2) = x * h_1 + x * h_2}$$



Phân tích hệ thống LTI

- **Tích chập 2D:**

$f(x-1,y-1)$	$f(x-1,y)$	$f(x-1,y+1)$
$f(x,y-1)$	$f(x,y)$	$f(x,y+1)$
$f(x+1,y-1)$	$f(x+1,y)$	$f(x+1,y+1)$

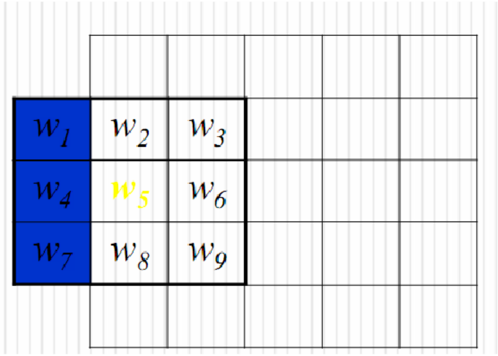
1	1	1
1	1	1
1	1	1

Bộ lọc làm trơn 3×3

$$g(x,y)=\frac{1}{9}[f(x-1,y-1)+f(x-1,y)+f(x-1,y+1)+$$
$$f(x,y-1)+f(x,y)+f(x,y+1)+$$
$$f(x+1,y-1)+f(x+1,y)+f(x+1,y+1)]$$

Phân tích hệ thống LTI

- **Tích chập 2D:**



0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	10	15	15	45	25	14	23	0
0	12	14	255	12	25	12	45	0
0	25	56	25	12	45	255	12	0
0	14	48	98	51	12	15	20	0
0	12	32	36	34	25	26	24	0
0	12	14	5	7	54	12	51	0
0	14	56	25	14	20	47	12	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1
1	1	1
1	1	1

=R(	36	40	42	15	16	10
15	47	50	51	49	51	40
19	61	63	59	49	49	40
21	38	44	38	53	48	39
15	30	36	36	26	27	16
16	23	25	24	27	30	19
11	14	13	14	17	22	14

Phân tích hệ thống LTI

- Hệ LTI nhân quả:
  - Hệ thống LTI là nhân quả khi và chỉ khi h(n) = 0 với mọi n<0.
  - Đáp ứng của hệ thống LTI nhân quả:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{+\infty}h(k)x(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)h(n-k)$$

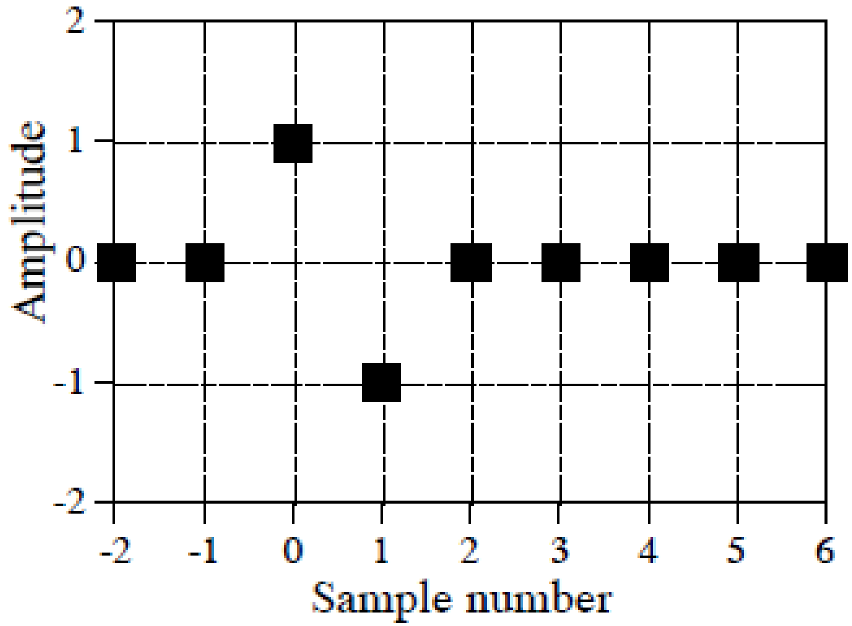
  - Tín hiệu nhân quả: x(n) = 0 với n<0.
  - Nếu tín hiệu vào của h.t LTI nhân quả là t/h nhân quả thì đáp ứng của h.t đó được xác định như sau:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{n}h(k)x(n-k)=\sum_{k=0}^{n}x(k)h(n-k)$$

  - Đáp ứng của h.t nhân quả đối với tín hiệu nhân quả là một tín hiệu nhân quả y(n) = 0 với mọi n<0.

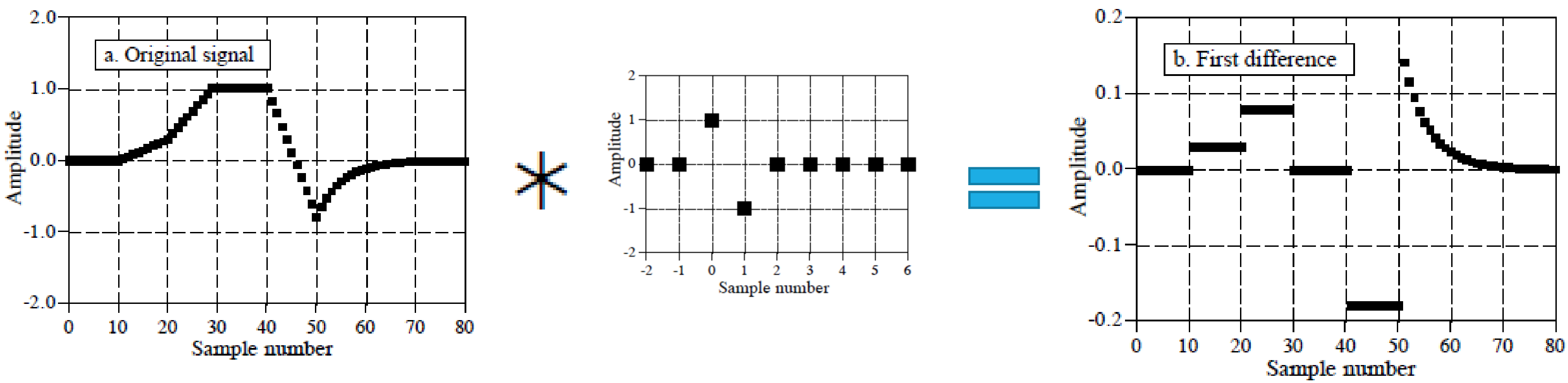
Phân tích hệ thống LTI

- Hệ LTI nhân quả:
  - Ví dụ: Phép tính vi phân $y[n] = x[n] - x[n-1]$



Phân tích hệ thống LTI

- Hệ LTI nhân quả:
  - Ví dụ: Phép tính vi phân $y[n] = x[n] - x[n-1]$



Phân tích hệ thống LTI

- Hệ LTI ổn định:
  - H.t LTI ổn định khi và chỉ khi dãy đáp ứng xung h(n) là khả tổng tuyệt đối:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < \infty$$

  - Ví dụ: Hệ thống LTI với đáp ứng xung:

$$h(n) = \begin{cases} a^n (n \geq 0) \\ b^n (n < 0) \end{cases}$$

ổn định khi và chỉ khi $|a| < 1$ và $|b| > 1$

Phân tích hệ thống LTI

- Hệ thống LTI – FIR và IIR
  - Hệ thống FIR **(F**inite – duration **I**mpulse **R**esponse – Hệ thống với đáp ứng xung có chiều dài hữu hạn**)**

    $$h(n) = 0 \text{ với } n<0 \text{ và } n \geq M$$

    $$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)$$

  - Ngược lại, ta có hệ thống IIR (**I**nfinite – duration **I**mpulse **R**esponse – Hệ thống với đáp ứng xung có chiều dài vô hạn)

Phân tích hệ thống LTI

- Hệ thống LTI đệ quy
  - Xét hệ thống tích lũy trung bình của t/h với mối quan hệ vào – ra:

$$y(n) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} x(k)$$

  - Tính y(n) bằng phương pháp đệ quy:

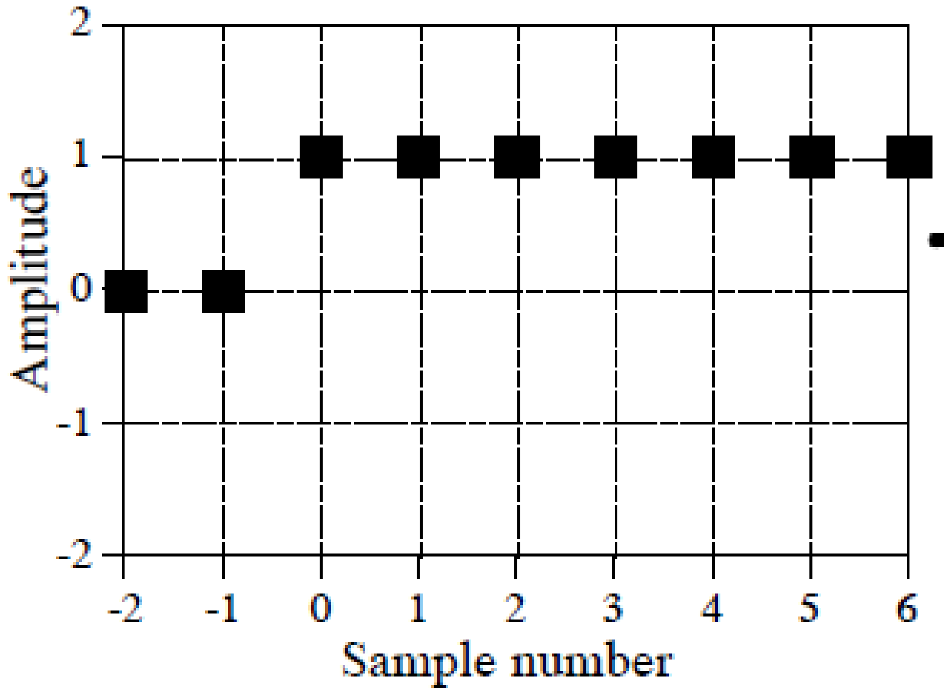
$$y(n) = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} x(k) + x(n)\right) = \frac{1}{n+1}\big(ny(n-1) + x(n)\big)$$

$$\boxed{y(n) = \frac{n}{n+1}y(n-1) + \frac{1}{n+1}x(n)}$$

  - H.t đệ quy là hệ thống có đáp ứng không chỉ phụ thuộc vào tín hiệu vào mà còn phụ thuộc vào giá trị đáp ứng tại quá khứ.

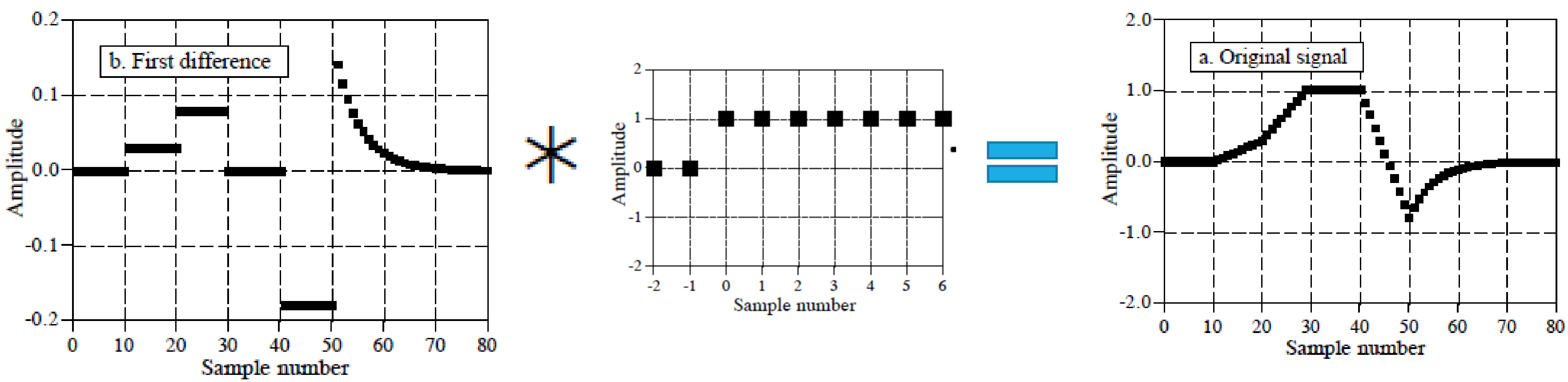
Phân tích hệ thống LTI

- Hệ thống LTI đệ quy:
  - Ví dụ: $y[n] = x[n] + y[n-1]$



Phân tích hệ thống LTI

- Hệ thống LTI đệ quy:
  - Ví dụ: $$y[n] = x[n] + y[n-1]$$



HTRR mô tả bởi PTSP

- Ví dụ: Xét hệ thống LTI đệ quy: $y(n) = ay(n-1) + x(n)$
- Giả sử hệ thống bị tác động bởi tín hiệu x(n) n≥0 và điều kiện khởi tạo của hệ thống là y(-1):

$$y(0) = ay(-1) + x(0)$$
$$y(1) = ay(0) + x(1) = a^2 y(-1) + ax(0) + x(1)$$
$$y(2) = ay(1) + x(2) = a^3 y(-1) + a^2 x(0) + ax(1) + x(2)$$
$$\dots$$
$$y(n) = ay(n-1) + x(n) = a^{n+1} y(-1) + \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k)$$

- Nếu y(-1) = 0:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k) \rightarrow h(n) = a^n u(n)$$

HTRR mô tả bởi PTSP

$$y(n) = a^{n+1}y(-1) + \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k)$$

- Nếu y(-1) = 0 → đáp ứng tại trạng thái không, **đáp ứng cưỡng bức** (zero-state response - force response):

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k)$$

- Nếu y(-1) ≠ 0 và x(n) = 0 (không có tín hiệu vào) → đáp ứng đầu vào bằng không, **đáp ứng tự nhiên** (zero – input response , natural response): $y_{zi}(n) = a^{n+1}y(-1)$

$$\boxed{y(n) = y_{zs}(n) + y_{zi}(n)}$$

HTRR mô tả bởi PTSP

- Dạng tổng quát của PT SPTT HSH biểu diễn hệ thống đệ quy:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=1}^{M} b_k x(n-k)$$

HTRR mô tả bởi PTSP

- Hệ thống là hệ thống tuyến tính nếu thỏa mãn điều kiện sau:
  - Đáp ứng tổng của h.t bằng tổng của đáp ứng cưỡng bức và đáp ứng tự nhiên
  - Đáp ứng cưỡng bức t/m nguyên lý xếp chồng
  - Đáp ứng tự nhiên t/m nguyên lý xếp chồng.
- Hệ thống nhân quả được mô tả qua PT SPTT HSH là hệ thống tuyến tính, bất biến.

HTRR mô tả bởi PTSP

- Ví dụ: Xác định đáp ứng tự nhiên của hệ thống được mô tả bởi phương trình sau:

$$y(n) = 3y(n-1) + 4y(n-2)$$

HTRR mô tả bởi PTSP

Ví dụ: Cho hệ thống RRTG được mô tả bởi phương trình sai phân:

$$y(n) = 0.7y(n-1) - 0.1y(n-2) + 2x(n) - x(n-2)$$

1. Xác định đáp ứng tự nhiên của hệ thống
2. Xác định đáp ứng cưỡng bức của hệ thống đối với t.h vào là $x(n) = u(n)$. Từ đó đưa ra biểu thức xác định đáp ứng của hệ thống,

HTRR mô tả bởi PTSP

- Đáp ứng xung:
  - Trong trường hợp hệ thống đệ quy và được khởi tạo y(n) = 0 (n<0) thì h(n) sẽ bằng **đáp ứng cưỡng bức** khi tín hiệu vào là delta(n)
  - Ví dụ: y(n) = ay(n-1) + x(n)

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k)$$

$$h(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k \delta(n-k) = a^n (n \geq 0)$$

$$h(n) = a^n u(n)$$

  - Trong hệ thống được mô tả bởi PT SPTT HSH: Vì $y_p(n)=0$ với đáp ứng đơn vị nên

$$h(n) = y_h(n)u(n)$$

Tương quan giữa 2 t.h RRTG

- Tương quan giữa 2 t.h cho phép xác định mức độ giống nhau giữa hai tín hiệu.
- Ứng dụng: Radar, Sonar, thiết bị truyền thông.

T/h phát	$x(n)$
T/h nhận	$y(n) = \alpha x(n-D) + w(n)$
α	: hệ số suy giảm t/h
D	: thời gian trễ truyền
$w(n)$	: nhiễu đường truyền

Tương quan giữa 2 t.h RRTG

- x(n) và y(n) là 2 t.h có năng lượng hữu hạn
- Tương quan chéo của t.h x đối với t.h y:

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-l)$$

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+l)y(n)$$

$$\boxed{r_{xy}(l) = x(l) * y(-l)}$$

- Tương quan chéo của t.h y đối với t.h x:

$$r_{yx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)x(n-l)$$

$$r_{yx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n+l)x(n)$$

$$\boxed{r_{xy}(l) = r_{yx}(-l)}$$

- Tự tương quan:

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n-l)$$

Tương quan giữa 2 t.h RRTG

- Ví dụ: Tính tự tương quan của x(n):

$$x(n) = a^n u(n), \text{ where } a < 1.$$

- Lời giải:

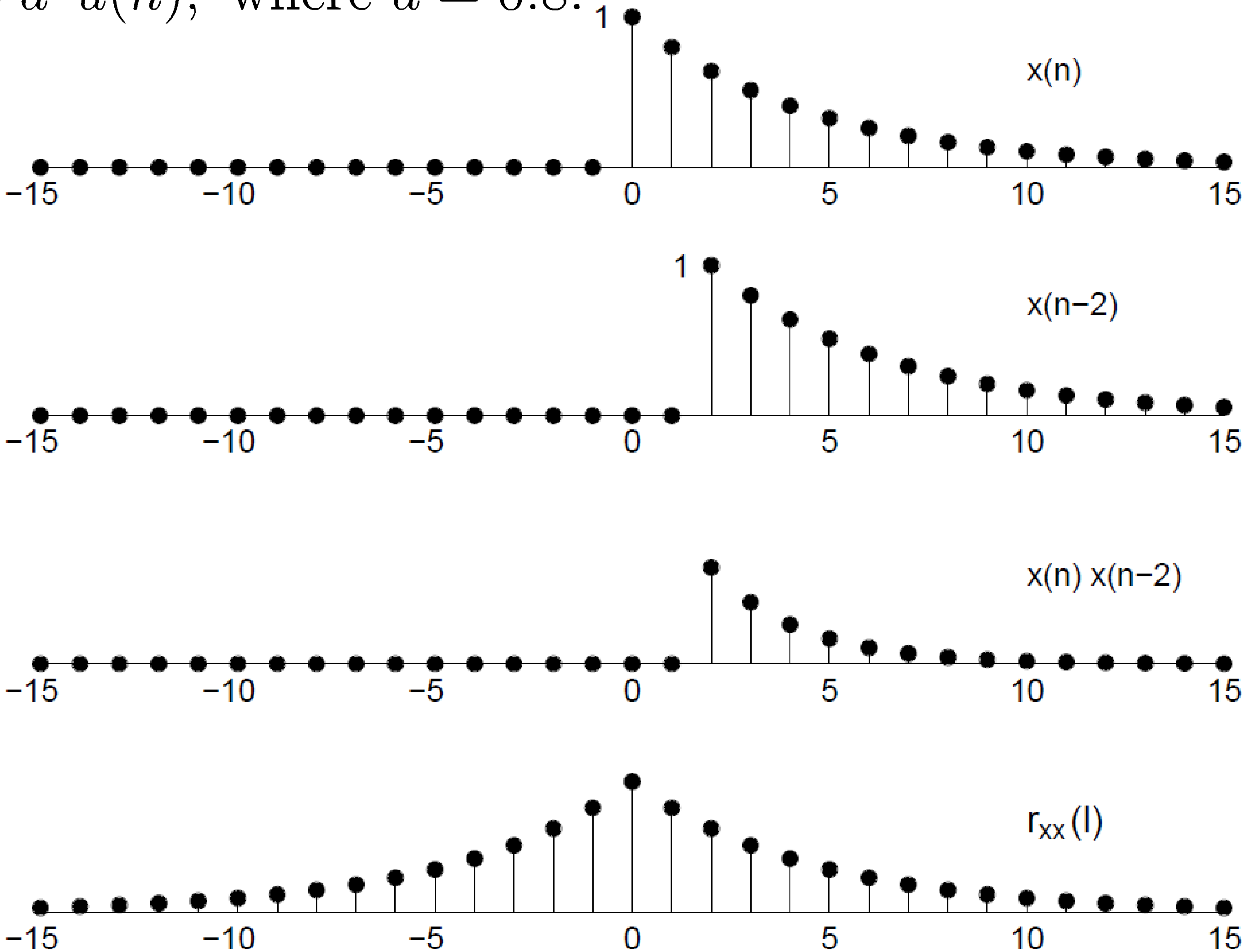
$$r_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n-l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) a^{n-l} u(n-l)$$

$$= a^{-l} \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} u(n-l)$$

$$= \begin{cases} \frac{a^{-l}}{1-a^2}, & \text{if } l < 0 \\ \frac{a^{l}}{1-a^2}, & \text{if } l \geq 0 \end{cases} = \frac{a^{|l|}}{1-a^2}$$

Tương quan giữa 2 t.h RRTG

$x(n) = a^n u(n), \text{ where } a = 0.8.$



Tương quan giữa 2 t.h RRTG

- Một số tính chất của chuỗi tương quan:

$$r_{xy}(l) = r_{yx}(-l)$$

$$r_{xx}(l) = r_{xx}(-l)$$

$$r_{xy}(l) = x(l) * y(-l)$$

$$|r_{xx}(l)| \leq r_{xx}(0)$$

$$|r_{xy}(l)| \leq \sqrt{r_{xx}(0) r_{yy}(0)}$$

$$E_x = r_{xx}(0) \text{ and } E_y = r_{yy}(0)$$