

Analysis and Design of Algorithms

Lecture 11,12

Backtracking Method

Lecturer: Hoa Tat Thang

Nội dung

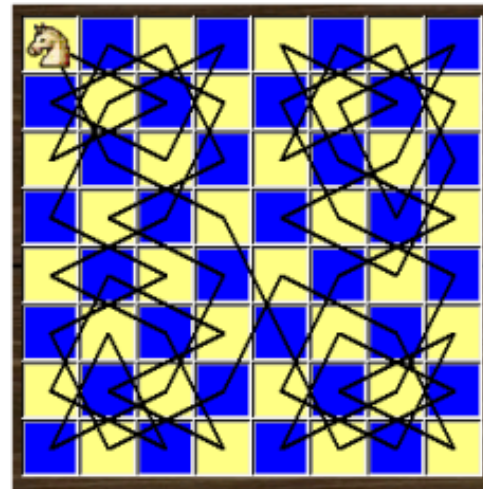
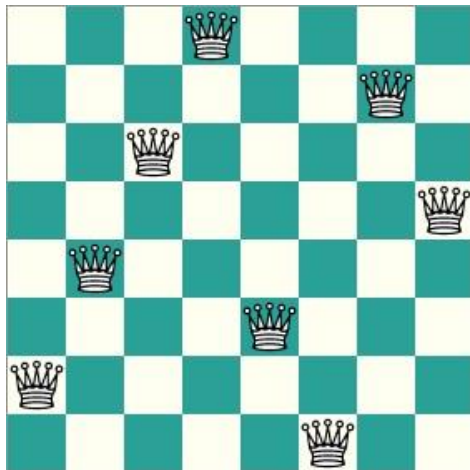
1. Lược đồ chung
2. Bài toán 8 hậu
3. Bài toán ngựa đi tuần
4. Trò chơi Sudoku
5. Liệt kê dãy nhị phân độ dài N
6. Liệt kê các hoán vị
7. Duyệt đồ thị

Nội dung

- 1. Lược đồ chung**
2. Bài toán 8 hậu
3. Bài toán ngựa đi tuần
4. Trò chơi Sudoku
5. Liệt kê dãy nhị phân độ dài N
6. Liệt kê các hoán vị
7. Duyệt đồ thị

Giới thiệu

- Phương pháp quay lui dùng để giải các bài toán mà lời giải của nó **X** là một tập các phần tử x_1, x_2, \dots, x_n .
- Ví dụ: Bài toán 8 hậu, Mã đi tuần ...

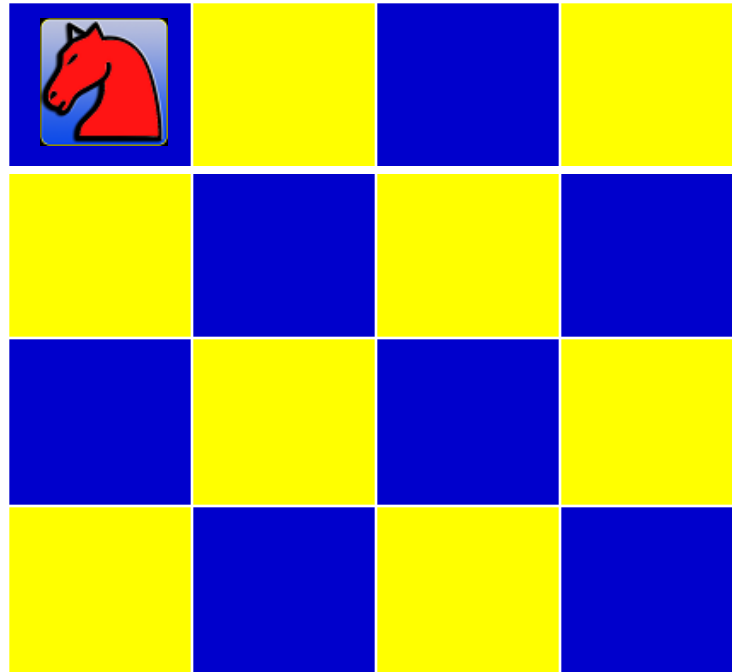


Ý tưởng

- Ý tưởng chính của phương pháp quay lui là các bước hướng tới lời giải cuối cùng của bài toán dựa trên việc **Thử-và-Sai**.
- Tại mỗi bước:
 - Nếu có 1 lựa chọn được chấp nhận thì ghi nhận lại lựa chọn này và tiến hành các bước thử tiếp theo;
 - Nếu tất cả các lựa chọn không được chấp nhận thì trở lại bước trước, xóa bỏ sự ghi nhận của ứng viên và chọn lựa ứng viên tiếp theo.

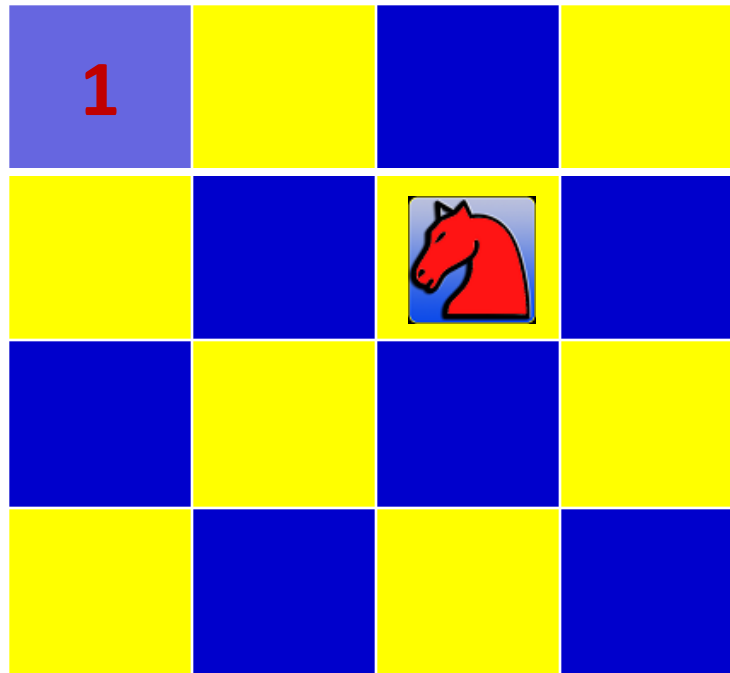
Ví dụ

- Mã đi tuần trên bàn cờ 4 x 4 (bắt đầu từ Ô(1,1))



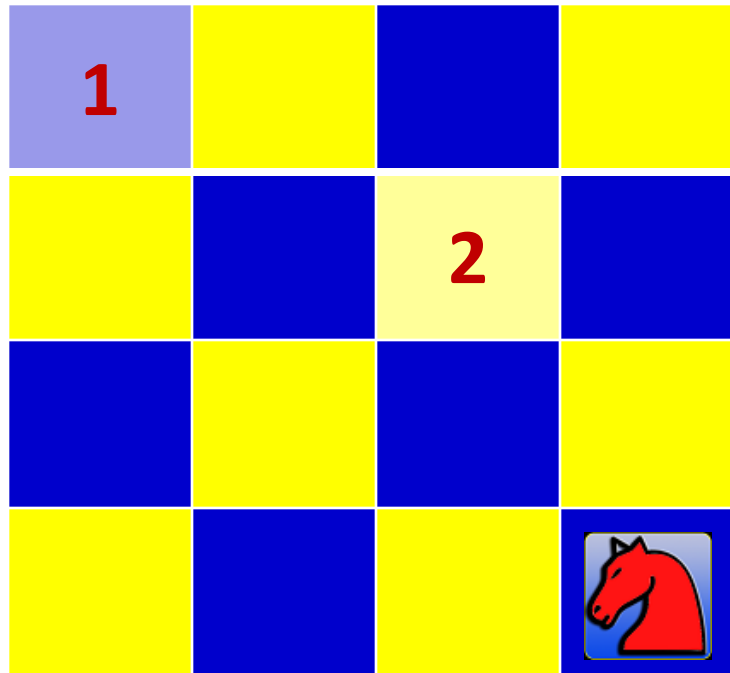
Ví dụ

- Mã đi tuần trên bàn cờ 4 x 4 (bắt đầu từ Ô(1,1))




Ví dụ

- Mã đi tuần trên bàn cờ 4 x 4 (bắt đầu từ Ô(1,1))




Ví dụ

- Mã đi tuần trên bàn cờ 4 x 4 (bắt đầu từ Ô(1,1))

1	14	5	
8	11	2	
13	4	9	6
10	7	12	3


Ví dụ

- Mã đi tuần trên bàn cờ 4 x 4 (bắt đầu từ Ô(1,1))

1		5	
8	11	2	
13	4	9	6
10	7	12	3


Ví dụ

- Mã đi tuần trên bàn cờ 4 x 4 (bắt đầu từ Ô(1,1))

1		5	
8	11	2	
	4	9	6
10	7	12	3


Ví dụ

- Mã đi tuần trên bàn cờ 4 x 4 (bắt đầu từ Ô(1,1))

1		5	
8	11	2	
	4	9	6
10	7		3

Ví dụ

- Mã đi tuần trên bàn cờ 4 x 4 (bắt đầu từ Ô(1,1))

1		5	
8	11	2	
	4	9	6
10	7	12	3

Quay lui

- Khi quay lui điểm quan trọng của thuật toán là phải ghi nhớ tại mỗi bước đi để tránh trùng lặp khi quay lui.
- Dễ thấy cấu trúc ngăn xếp khá phù hợp để lưu trữ các thông cần ghi nhớ như đề cập ở trên.
- Đệ qui là kỹ thuật thường được sử dụng trong phương pháp quay lui.

Lược đồ chung

- Lời giải bài toán có thể mô tả dạng 1 vector n chiều $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ thỏa mãn một điều kiện nào đó.
- Giả sử đã xây dựng được $i-1$ thành phần $(x_1, x_2, \dots, x_{i-1})$, cần xác định thành phần thứ i :
 - Nếu khả năng k nào đó phù hợp \rightarrow lấy $x_i=k$, ghi nhận trạng thái đã dùng của k . Nếu $i=n \rightarrow$ có được 1 lời giải.
 - Nếu không có khả năng nào cho x_i thì quay lui và chọn lại x_{i-1} .

Lược đồ chung ...

Try(i) \equiv

for (j = 1 \rightarrow k)

If (x_i chấp nhận được khả năng j)

{

Xác định x_i theo khả năng j;

Ghi nhận trạng thái mới;

if(i < n)

Try(i+1);

else

Ghi nhận nghiệm;

Trả lại trạng thái cũ cho bài toán;

}

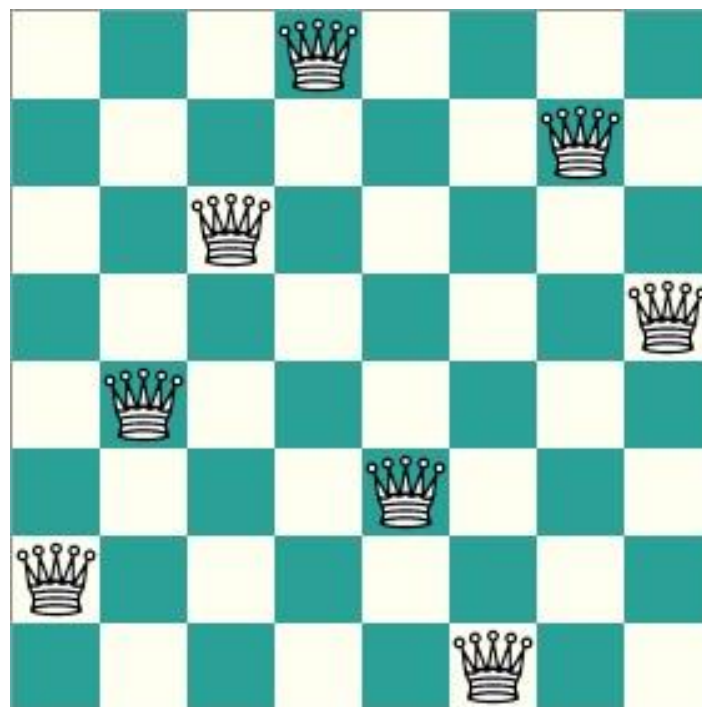
Nội dung

1. Lược đồ chung
- 2. Bài toán 8 hậu**
3. Bài toán ngựa đi tuần
4. Trò chơi Sudoku
5. Liệt kê dãy nhị phân độ dài N
6. Liệt kê các hoán vị
7. Duyệt đồ thị

Bài toán

- Hãy tìm cách xếp 8 con hậu trên một bàn cờ vua sao cho không con nào ăn được nhau.

- Ví dụ: Đây là 1 PA



Ý tưởng thuật toán

Ý tưởng (**Thử và Sai**) bài toán 8 hậu

1. Lần lượt xếp các con hậu vào bàn cờ
2. Giả sử đã xếp được i con hậu (từ 1 đến i)
3. Xếp hậu thứ $i+1$
 - a. Nếu tìm được 1 ô hợp lệ (không bị các con hậu trước đó ăn) \rightarrow xếp hậu thứ $i+1$ vào vị trí vừa tìm thấy. Lặp lại bước 3.
 - b. Nếu không tìm được ô hợp lệ \rightarrow tìm vị trí phù hợp khác để đặt lại hậu thứ i .

Phương án (nghiệm) của bài toán

- Nhận xét: Mỗi con hậu phải nằm trên 1 hàng
- Dùng mảng $x[1..8]$ để thể hiện một phương án của bài toán:
 - Chỉ số mảng i : dòng chứa con hậu thứ i (chỉ số dòng là cố định)
 - Giá trị $x[i]$ ($i=1..8$): là cột đặt con hậu thứ i
- Bài toán xếp hậu trở thành: Lần lượt xác định giá trị các thành phần của $x[i]$, $i=1..8$.

Ví dụ

- Phương án nghiệm

$x[1]=4$

$x[2]=7$

$x[3]=3$

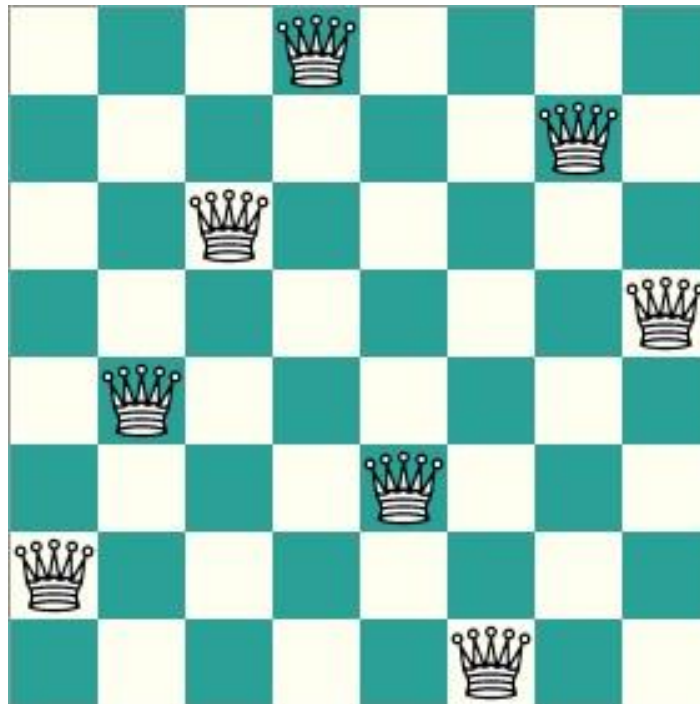
$x[4]=8$

$x[5]=2$

$x[6]=5$

$x[7]=1$

$x[8]=6$

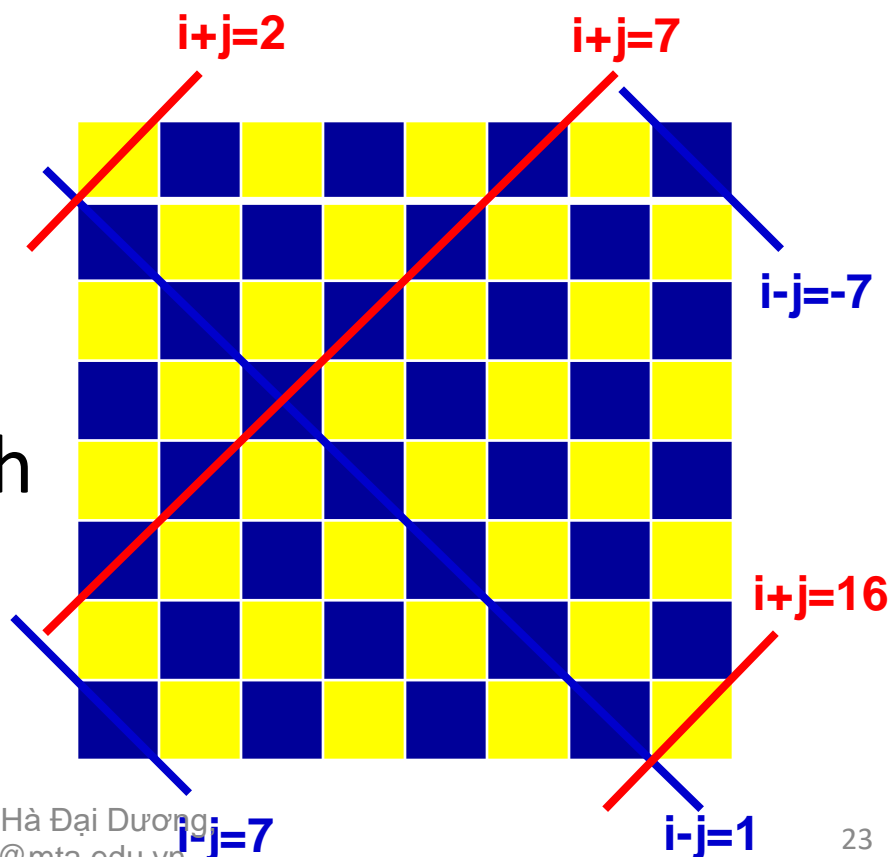


Ứng viên

- Tại bước i
 - Cần xác định giá trị k , là chỉ số cột, cho $x[i]$, $k=\{1,\dots,8\}$.
 - Nếu ứng viên được chọn là j , nghĩa là $x[i]=j$, khi đó cần “đánh dấu” là cột j đã được chọn để bước sau không chọn lại.
- Tổ chức mảng $a[j]$, $j=1..8$, để ghi nhận cột j đã được chọn hay chưa, $a[j]=1$ là cột j chưa được chọn và $a[j]=0$ là cột j đã được chọn.

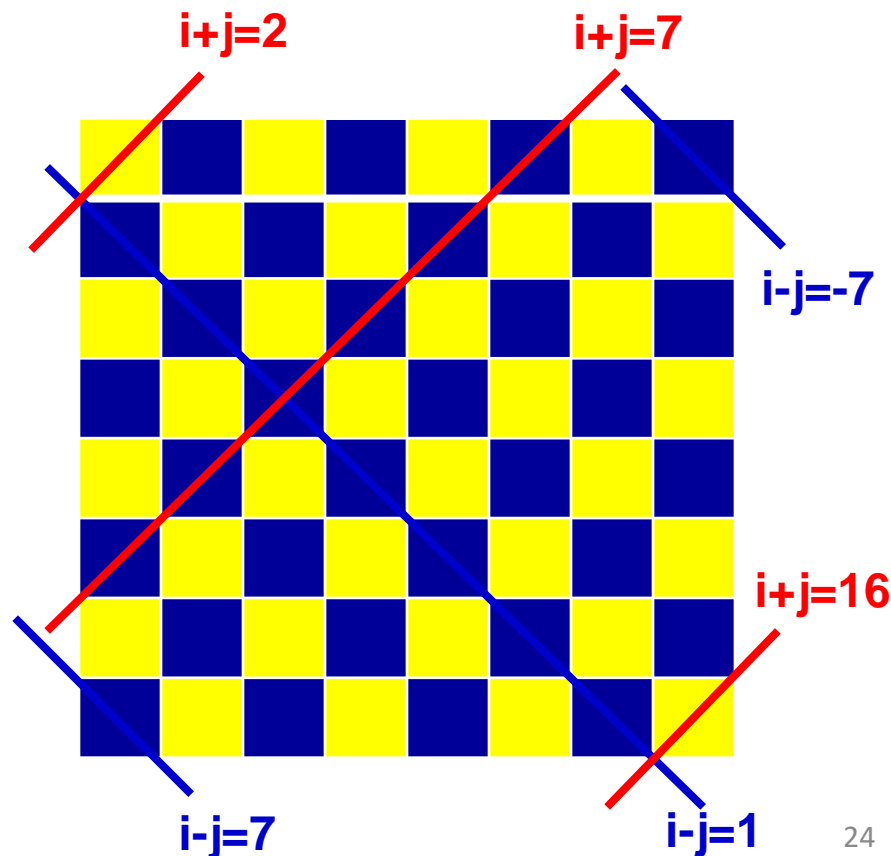
Tính hợp lệ

- Hậu ở dòng i , chỉ được đặt vào cột j nếu $i-1$ hầu đã đặt trước đó không “ăn” được hậu ở vị trí $[i,j]$ (dòng i , cột j).
- Trên đường chéo đỏ:
 - Giá trị $i+j$ là hằng số
 - Có giá trị từ **2** đến **16**
- Trên đường chéo xanh
 - Giá trị $i-j$ là hằng số
 - Có giá trị từ **-7** đến **7**



Tính hợp lệ ...

- Mảng **$b[k]$** , $k=2..16$, nếu $b[k]=1$, được đặt ở đường chéo thuận k .
- Mảng **$c[k]$** , $k=-7..7$, nếu $c[k]=1$, được đặt ở đường chéo nghịch k .



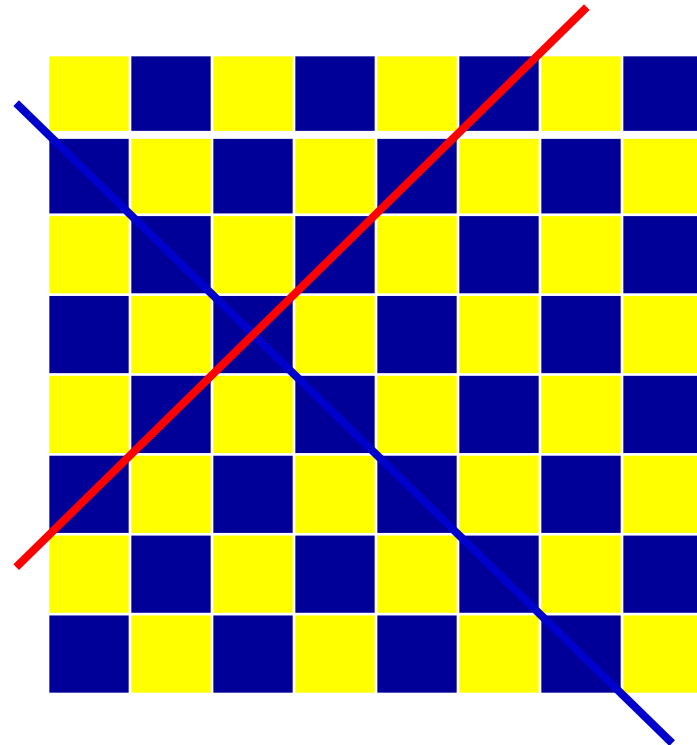
Tính hợp lệ ...

- Như vậy hậu i (dòng i) được đặt vào cột j nếu:

$$b[i+j] = 1$$

và

$$c[i-j] = 1$$



Try(i) \equiv

```
{
    for (j = 1; j <= 8; j++)
        if (a[j] && b[i+j] && c[i-j])
            {
                x[i] = j; a[j] = 0;
                b[i+j] = 0; c[i-j] = 0;
                if (i < 8 )
                    Try (i+1);
                else
                    Xuất(x);
                /* Sau khi in 1 lời giải xong, trả lại
                   tình trạng ban đầu còn trống cho hàng
                   a[j], đường chéo i+j và đường chéo
                   i-j, để tìm lời giải khác */
                a[ j ] = 1; b[i+j] = 1; c[i-j] = 1;
            }
}
```

Cài đặt

Khởi tạo

a[j] = 1

b[i+j] = 1

c[i-j] = 1

Minh họa

- Một lời giải của bài toán với $N=8$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
1	5	8	6	3	7	2	4

H							
				H			
							H
					H		
		H					
						H	
	H						
			H				

Kết quả

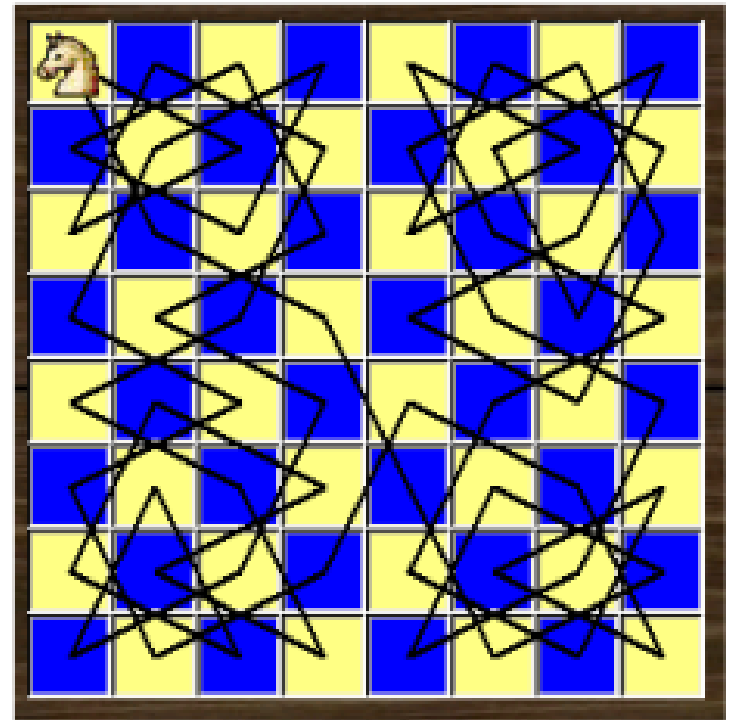
- Độ phức tạp thuật toán: $T(n) = ???$
- Viết hàm `Xuat(x)`: in phương án lựa chọn ra màn hình.
- Code, chạy thử và trình bày kết quả

Nội dung

1. Lược đồ chung
2. Bài toán 8 hậu
- 3. Bài toán ngựa đi tuần**
4. Trò chơi Sudoku
5. Liệt kê dãy nhị phân độ dài N
6. Liệt kê các hoán vị
7. Duyệt đồ thị

Bài toán

- Trên bàn cờ vua, con mã ở vị trí (x_0, y_0)
- Hãy chỉ ra hành trình để con mã đi qua tất cả các ô, mỗi ô 1 lần.
- Ví dụ: Đây là 1 PA trên bàn cờ 8x8 khi mã bắt đầu từ ô $(1,1)$



Ý tưởng thuật toán

Ý tưởng (**Thử và Sai**) bài toán mã đi tuần

1. Đặt ngựa tại vị trí (x_0, y_0) di chuyển ngựa theo luật cờ vua.
2. Giả sử đã đi được $i-1$ bước.
3. Xét nước đi thứ i
 - a. Nếu tìm được 1 nước đi hợp lệ (và ngựa chưa qua lần nào) \rightarrow xếp nước đi thứ i của ngựa vào vị trí vừa tìm thấy. Lặp lại bước 3.
 - b. Nếu không tìm được ô hợp lệ \rightarrow tìm vị trí phù hợp khác để đặt lại bước đi thứ $i-1$ của ngựa.

Phương án nghiệm

- Dùng mảng 2 chiều $h[x,y]$ ($x=1..N, y=1..N$) với qui ước:
 - $h[x,y] = 0$ là ô (x,y) chưa có ngựa đi qua
 - $h[x,y] = k$ là ngựa đã qua ô (x,y) ở nước thứ k .
- Bài toán trở thành: Xác định giá trị mảng h là nước đi của mã trong hành trình đi qua tất cả các ô bắt đầu từ (x_0, y_0) . Khi $N \times N$ ô được đi qua ta có 1 phương án (nghiệm) thể hiện cách đi của mã.

Ví dụ

- Một phương án để mã đi tuần trên bàn cờ 5x5 bắt đầu từ ô (1,1) là

1	18	13	8	3
12	7	2	19	14
17	24	21	4	9
22	11	6	15	20
25	16	23	10	5

Ứng viên

- Tại bước i

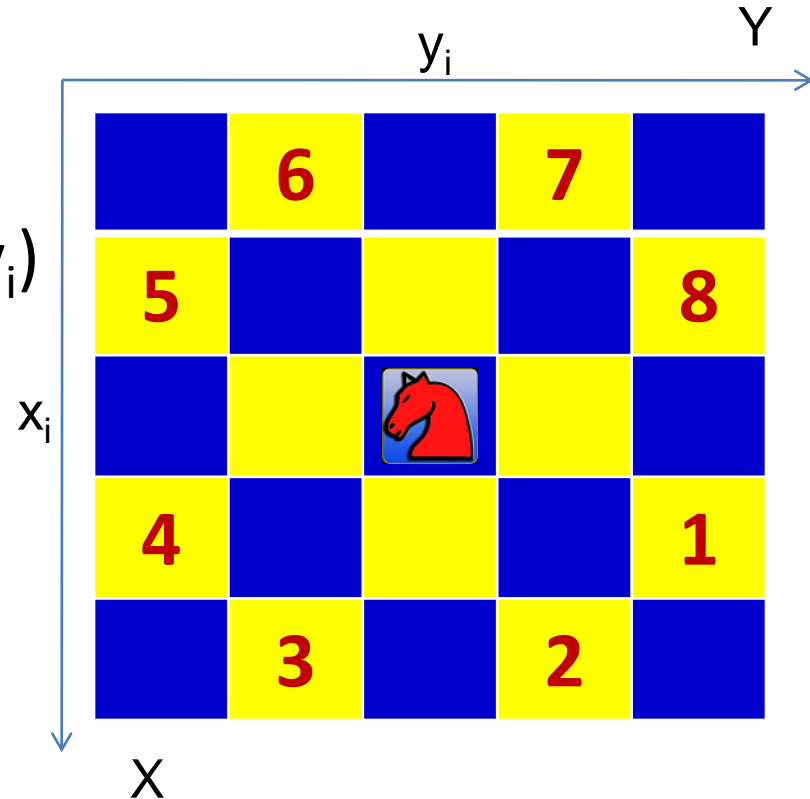
- Vị trí mã đang đứng là (x_i, y_i)

- Theo luật cờ vua mã có thể di chuyển tới nhiều nhất là 8 ô (hình bên)

- Tọa độ 8 vị trí so với vị trí hiện tại (x_i, y_i) lần lượt là:

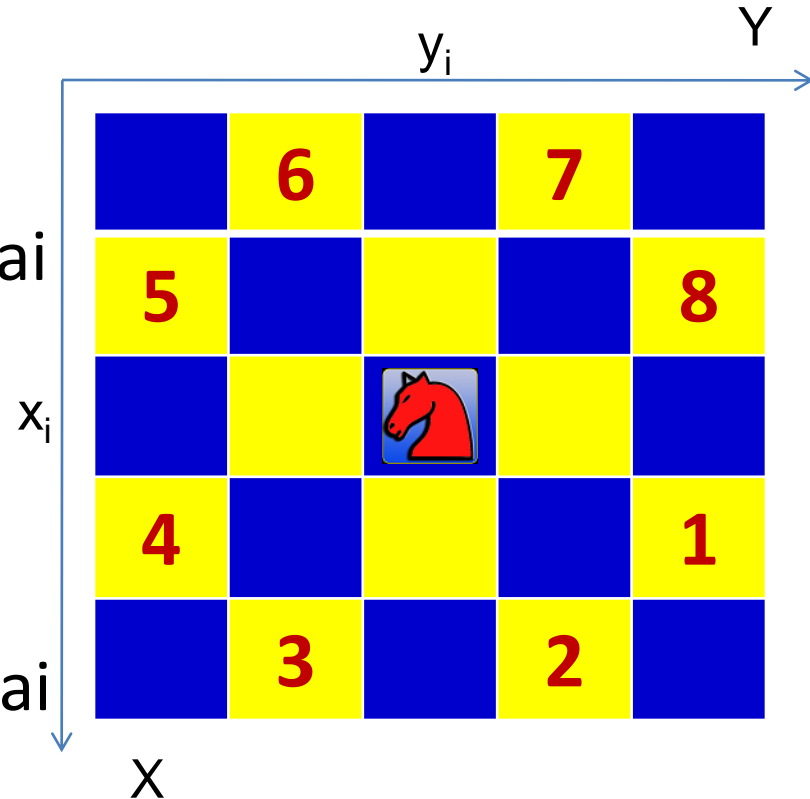
$(x_i+1, y_i+2), (x_i+2, y_i+1), (x_i+2, y_i-1), (x_i+1, y_i-2)$

$(x_i-1, y_i-2), (x_i-2, y_i-1), (x_i-2, y_i+1), (x_i-1, y_i+2)$



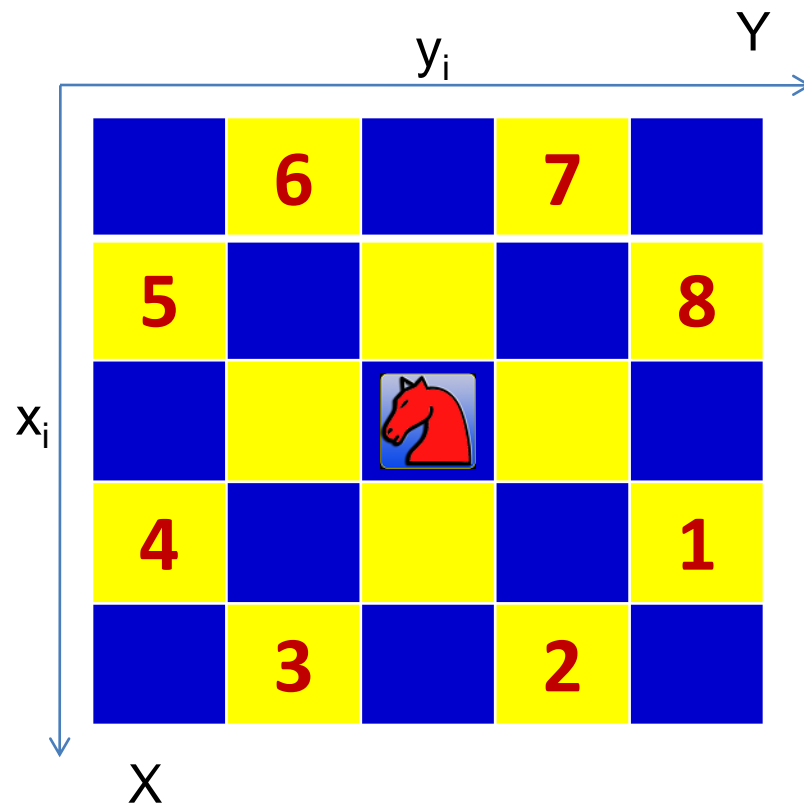
Ứng viên

- Tại bước i
 - Dùng mảng $a[1..8]$ mô tả sai khác tọa độ X so với x_i , theo trên ta có:
 $a=(1,2,2,1,-1,-2,-2,-1)$
 - Dùng mảng $b[1..8]$ mô tả sai khác tọa độ Y so với y_i , theo trên ta có:
 $b=(2,1,-1,-2,-2,-1,1,2)$



Tính hợp lệ

- Tại bước i
 - Vị trí ứng viên của bước $i+1$ được xác định tại tọa độ $(x_i + a[k], y_i + b[k])$ với $k=1..8$
- Tính hợp lệ:
 - Ứng viên tại tọa độ $(x_i + a[k], y_i + b[k])$ với $k=1..8$ được chấp nhận nếu $h[x_i + a[k], y_i + b[k]] = 0$.
 - Ngoài ra $(x_i + a[k], y_i + b[k])$ phải nằm trong bàn cờ



Cài đặt

```
Try(i, x, y) ≡  
  for(k = 1; k <= 8; k++)  
  {  
    u = x + a[k];  
    v = y + b[k];  
    if (1 <= u ,v <= n &&h[u][v] == 0)  
    {  
      h[u][v] = i;  
      if (i < n*n)  
        Try(i+1,u,v);  
      else  
        xuất_h(); // In ma trận h  
    }  
    h[u][v] = 0;  
  }
```

Minh họa

- Với $N=5$, mã xuất phát tại (1,1)

1	6	15	10	21
14	9	20	5	16
19	2	7	22	11
8	13	24	17	4
25	18	3	12	23

Minh họa

- Với $N=6$, mã xuất phát tại (2,3)

36	17	6	29	8	11
19	30	1	10	5	28
16	35	18	7	12	9
23	20	31	2	27	4
34	15	22	25	32	13
21	24	33	14	3	26

Kết quả

- Độ phức tạp thuật toán: $T(n) = ???$
- Viết hàm `Xuat_h(x)`: in phương án lựa chọn ra màn hình.
- Code, chạy thử và trình bày kết quả
- Lưu ý: Tùy vào kích thước bàn cờ, bài toán chỉ có lời giải ở một số vị trí bắt đầu (x_0, y_0) nhất định.

Nội dung

1. Lược đồ chung
2. Bài toán 8 hậu
3. Bài toán ngựa đi tuần
- 4. Trò chơi Sudoku**
5. Liệt kê dãy nhị phân độ dài N
6. Liệt kê các hoán vị
7. Duyệt đồ thị

Bài toán

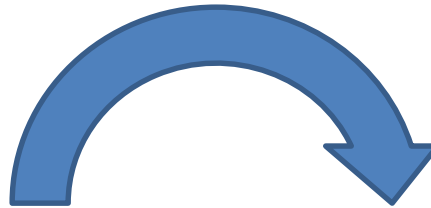
- Trò chơi: Cho hình vuông được chia thành 9x9 ô, trên đó 1 số ô đã có sẵn các số từ 1 đến 9.



- Hãy đặt các số từ 1-9 vào các ô trống sao cho: 1 hàng, 1 cột, 1 vùng 3x3 đều có đủ các số từ 1-9.

Ví dụ

Ban đầu



5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Ý tưởng thuật toán

Ý tưởng (**Thử và Sai**) bài toán Sudoku

1. Cần xếp N ô trống
2. Giả sử đã xếp được đến ô thứ i .
3. Xét ô thứ $i+1$
 - a. Nếu tìm được 1 giá trị thích hợp \rightarrow xếp giá trị đó vào ô thứ $i+1$ vừa tìm thấy. Lặp lại bước 3.
 - b. Nếu không tìm được 1 giá trị hợp lệ \rightarrow tìm giá trị phù hợp khác để đặt lại cho ô thứ i .

Phương án nghiệm

- Dùng mảng 2 chiều **$S[x,y]$** ($x=1..9$, $y=1..9$) để lưu giá trị số Sudoku:
 - $S[x,y]$** = 0 là ô (x,y) chưa được xử lý
 - $S[x,y]$** = k ($k=1..9$) là giá trị số Sudoku.
- Bài toán trở thành: Xác định giá trị mảng **S** là các số Sukodu. Khi tất cả các ô được đặt ta có 1 phương án (nghiệm) thể hiện 1 cách chơi Sukodu.

Ứng viên

- Ứng viên (giá trị) có thể đặt cho ô có tọa độ (x_i, y_i) là giá trị k :

$$k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Tính hợp lệ

- Ứng viên k được đặt vào ô (x_i, y_i) nếu
 - Trên hàng x_i chưa có giá trị k
 - Trên cột y_i chưa có giá trị k
 - Vùng 3×3 chứa (x_i, y_i) chưa có giá trị k

Cài đặt

- Tính hợp lệ, hàm $\text{FEASIBLE}(S[1, 2, \dots, 9][1, 2, \dots, 9], x, y, k)$

$\text{FEASIBLE}(S[1, 2, \dots, 9][1, 2, \dots, 9], x, y, k)$:

for $i \leftarrow 1$ to 9

if $S[x][i] = k$

return FALSE

for $i \leftarrow 1$ to 9

if $S[i][y] = k$

return FALSE

$a \leftarrow \lfloor (x - 1) / 3 \rfloor, b \leftarrow \lfloor (y - 1) / 3 \rfloor$

for $i \leftarrow 3a + 1$ to $3a + 3$

for $j \leftarrow 3b + 1$ to $3b + 3$

if $S[i][j] = k$

return FALSE

return TRUE

Biên soạn: Hà Đại Dương,
duonghd@mta.edu.vn


```

SUDOKU( $S[1, 2, \dots, 9][1, 2, \dots, 9], x, y$ ):
    if  $y = 10$ 
        if  $x = 9$ 
            print  $S$ 
        else
            SUDOKU( $S[1, 2, \dots, 9][1, 2, \dots, 9], x + 1, 1$ )
    else if  $S[x][y] = \emptyset$ 
        for  $k \leftarrow 1$  to  $9$ 
            if FEASIBLE( $S, x, y, k$ )
                 $S[x][y] \leftarrow k$ 
                SUDOKU( $S[1, 2, \dots, 9][1, 2, \dots, 9], x, y + 1$ )
                 $S[x][y] \leftarrow \emptyset$       [[for next branching]]
    else                                [[ $S[x][y]$  is given]]
        SUDOKU( $S[1, 2, \dots, 9][1, 2, \dots, 9], x, y + 1$ )

```

Minh họa

9	1	3	6	5	2	8	7	4
7	5	8	9	4	1	6	2	3
6	2	4	7	3	8	5	1	9
2	9	7	3	8	5	4	6	1
1	3	6	4	2	9	7	5	8
8	4	5	1	6	7	3	9	2
3	7	1	8	9	6	2	4	5
4	6	2	5	1	3	9	8	7
5	8	9	2	7	4	1	3	6

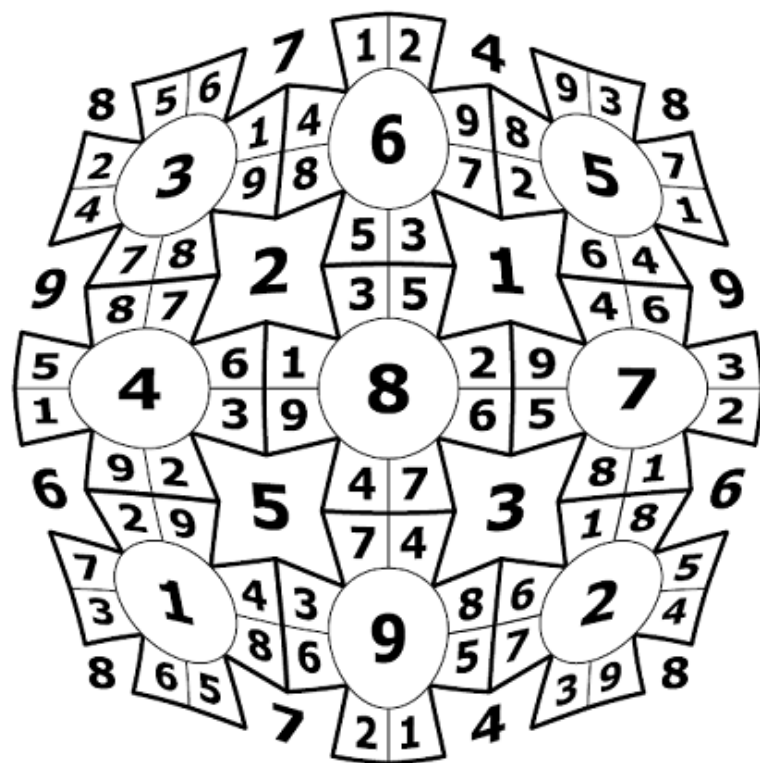
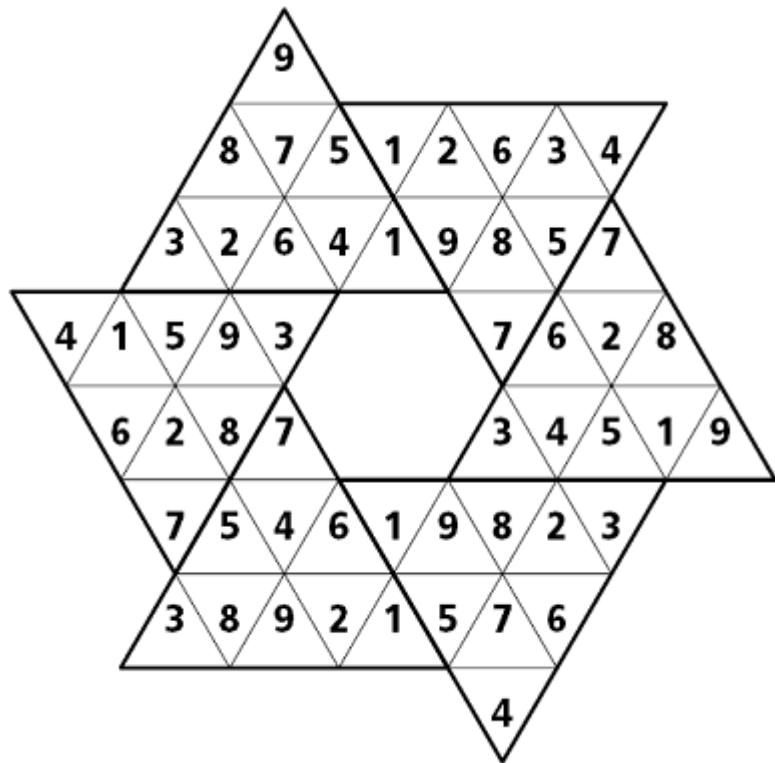
Minh họa ...

4	8	3	7	5	9	1	6	2
9	2	1	8	4	6	3	5	7
5	7	6	1	3	2	9	8	4
2	5	7	6	9	1	8	4	3
8	1	9	3	7	4	5	2	6
6	3	4	2	8	5	7	9	1
3	4	2	5	1	8	6	7	9
1	6	8	9	2	7	4	3	5
7	9	5	4	6	3	2	1	8

Minh họa ...

4	2	3	6	9	7	8	1	5
6	9	1	5	3	8	4	7	2
5	8	7	4	2	1	6	3	9
3	1	9	8	7	5	2	6	4
2	5	6	1	4	9	3	8	7
7	4	8	3	6	2	5	9	1
9	6	4	2	1	3	7	5	8
1	3	5	7	8	4	9	2	6
8	7	2	9	5	6	1	4	3

Minh họa ...



Bài tập

1. Thực hiện việc đặt 5 con hậu trên bàn cờ, thể hiện kết quả từng bước.
2. Thực hiện các nước đi của con ngựa trên bàn cờ 5x5 bắt đầu từ ô (1,2) thể hiện kết quả từng bước.

Bài tập

3. Chơi trò sudoku (theo thuật toán) với các số đã cho như sau:

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Bài tập

4. Hoàn thiện cài đặt bài toán 8 hậu
5. Hoàn thiện cài đặt bài toán mã đi tuần.
6. Hoàn thiện cài đặt trò chơi Sukodu.
7. Giải bài toán cái túi theo giải thuật quay lui.