Phân tích và Thiết kế THUẬT TOÁN

Hà Đại Dương

duonghd@mta.edu.vn

Web: fit.mta.edu.vn/~duonghd

Bài 13 - Phương pháp nhánh cận (Branch and Bound)

PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬ TOÁN

NỘI DUNG

I. Giới thiệu
II. Lược đồ chung
III. Bài toán áp dụng
IV. Bài tập

I. Giới thiệu

Phương pháp quay lui, vét cạn có thể giải các bài toán tối ưu, bằng cách lựa chọn phương án tối ưu trong tất cả các lời giải tìm được. Nhưng nhiều bài toán không gian các lời giải là quá lớn, nên áp dụng phương pháp pháp quay lui khó đảm bảo về thời gian cũng như kỹ thuật. Cho nên ta cần phải cải tiến thuật toán quay lui để hạn chế bớt việc duyệt các phương án. Có nhiều cách cải tiến, trong đó có phương pháp nhánh cận.

I. Giới thiệu

Phương pháp nhánh cận là một cải tiến của phương pháp quay lui, dùng để tìm lời giải tối ưu của bài toán. Ý tưởng chính của nó như sau :

Trong quá trình duyệt ta luôn giữ lại một phương án mẫu (có thể xem là lời giải tối ưu cục bộ – chẳng hạn có giá nhỏ nhất tại thời điểm đó). Đánh giá nhánh cận là phương pháp tính giá của phương án ngay trong quá trình xây dựng các thành phần của phương án theo hướng đang xây dựng có thể tốt hơn phương án mẫu hay không. Nếu không ta lựa chọn theo hướng khác.

II. Lược đồ chung

Giả sử bài toán tối ưu cho là :

Tìm Min{f(x) : x $\in$ D};

Với $X = \left\{ a = (a_1, \cdots, a_n) \in \prod_{i=1}^{n} A_i : P(x) \right\}$; $|A_i| < \infty; \forall i = \overline{1,n}$. P là một tính chất trên $\prod_{i=1}^{n} A_i$.

Nghiệm của bài toán nếu có sẽ được biểu diễn dưới dạng :$x = (x_1,...,x_n)$

Trong quá trình liệt kê theo phương pháp quay lui, ta xây dựng dần các thành phần của nghiệm.

II. Lược đồ chung

Một bộ phận i thành phần $(x_1, .., x_i)$ sẽ gọi là một lời giải (phương án) bộ phận cấp i. Ta gọi X_i là tập các lời giải bộ phận cấp i, $\forall i = \overline{1,n}$.

Đánh giá cận là tìm một hàm g xác định trên các X_i sao cho :

$$g(x_1,\cdots,x_i) \le Min\{f(a) : a = (a_1,\cdots,a_n) \in X, x_i = a_i, \forall i = \overline{1,i}\}$$

Bất đẳng thức này có nghĩa là giá trị $g(x_1,\cdots,x_i)$ không lớn hơn giá trị của các phương án mở rộng từ lời giải bộ phận $(x_1,\cdots,x_i)$.

Sau khi tìm được hàm đánh giá cận g, ta dùng g để giảm bớt chi phí duyệt các phương án theo phương pháp quay lui.

II. Lược đồ chung

Giả sử x* là lời giải tốt nhất hiện có (phương án mẫu), còn f* là giá trị tốt nhất tương ứng f* = f(x*).

Nếu $g(x_1,\cdots,x_i)$ > f* thì :

$$f^* < g(x_1,\cdots,x_i) \le Min\{f(a) : a = (a_1,\cdots,a_n) \in X, x_i = a_i, \forall i = \overline{1,i}\}$$

Nên chắc rằng các lời giải mở rộng từ $(x_1,\cdots,x_i)$ sẽ không tốt hơn phương án mẫu, do đó có thể bỏ đi không cần phát triển lời giải bộ phận $(x_1,\cdots,x_i)$ để tìm lời giải tối ưu của bài toán.

Thủ tục quay lui sửa lại thành

thủ tục nhánh cận như sau :

```
Try (i) ≡
        for (j = 1 → n)
            if( Chấp nhận được )
            {
                Xác định x_i theo j;
                Ghi nhận trạng thái mới;
                if(i == n)
                        Cập nhật lời giải tối ưu ;
                else
                {
                        Xác định cận g(x_1,···,x_i) ;
                        if( g(x_1,···,x_i) ≤ f* )
                                Try (i+1);
                }
                // Trả bài toán về trạng thái cũ
            }
```

II. Lược đồ chung

Thực chất của phương pháp nhánh cận là tìm kiếm theo chiều sâu trên cây liệt kê lời giải như phương pháp quay lui, chỉ khác có một điều là khi tìm được x_i mà đánh giá cận $g(x_1,\cdots,x_i) > f^*$ thì ta cắt bỏ các nhánh con từ x_i đi xuống, mà quay lên ngay cha của nó là x_{i-1}.

Vấn đề là xác định hàm đánh giá cận như thế nào ?

III. Bài toán áp dụng

I. Bài toán người du lịch

1. Bài toán

Một người du lịch muốn tham quan n thành phố $T_1,.., T_n$. Xuất phát từ một thành phố nào đó, người du lịch muốn đi qua tất cả các thành phố còn lại, mỗi thành phố đi qua đúng 1 lần rối quay trở lại thành phố xuất phát.

Gọi C_{ij} là chi phí đi từ thành phố T_i đến T_j . Hãy tìm một hành trình thỏa yêu cầu bài toán sao cho chi phí là nhỏ nhất.

III. Bài toán áp dụng

I. Bài toán người du lịch

2. Ý tưởng

Gọi π là một hoán vị của $\{1,.., n\}$ thì một hành trình thỏ yêu cầu bài toán có dạng : $T_{\pi(1)} \rightarrow T_{\pi(2)} \rightarrow \ \ldots \ \rightarrow T_{\pi(n)}$.

Nên có tất cả n! hành trình như thế.

Nếu ta cố định một thành phố xuất phát, chẳng hạn T_1, thì có (n-1)! hành trình.

III. Bài toán áp dụng

I. Bài toán người du lịch

2. Ý tưởng

Bài toán chuyển về dạng :

Tìm Min{f(a_2,.., a_n) : (a_2,.., a_n) là hoán vị của {2,..,n}}.

Với $f(a_1,\cdots,a_n) = C_{1,a_2} + C_{a_2,a_3} + \cdots + C_{a_{n-1},a_n} + C_{a_n 1}$

Cách giải bài toán sẽ kết hợp đánh giá nhánh cận trong quá trình liệt kê phương án của thuật toán quay lui.

III. B toá

I. Bài toán người du lịch

3. Thiết kế

Input	$C = (C_{ij})$	
Output	- $x^* = (x_1,\ldots,x_n)$	// Hành trình tối ưu
	- $f^* = f(x^*)$	// Giá tri tối ưu

```
Try (i) ≡
    for (j = 1 → n)
        if( Chấp nhận được )
        {
            Xác định x_i theo j;
            Ghi nhận trạng thái mới;
            if(i == n)
                Cập nhật lời giải tối ưu;
            else
            {
                Xác định cận g(x_1,···,x_i) ;
                if( g(x_1,···,x_i) ≤ f* )
                    Try (i+1);
            }
            // Trả bài toán về trạng thái cũ
        }
```

III. Bài toán áp dụng

I. Bài toán người du lịch

3. Thiết kế

- Nếu ta cố định xuất phát từ T_1, ta duyệt vòng lặp từ $j = 2$.
- Đánh giá nhánh cận :

  Đặt : $CMin = Min\{C_{ij} : i, j \in \{1,..,n\}$

  Giả sử vào bước i ta tìm được lời giả bộ phận cấp i là $(x_1,..,x_i)$, tức là đã đi qua đoạn đường $T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \ldots \rightarrow T_i$, tương ứng với chi phí :

  $S_i = C_{1x_2} + C_{x_2x_3} + \cdots + C_{x_{i-1}x_i}$

III. Bài toán áp dụng

I. Bài toán người du lịch

3. Thiết kế

Để phát triển hành trình bộ phận này thành một hành trình đầy đủ, ta còn phải đi qua n-i+1 đoạn đường nữa, gồm n-i thành phố còn lại và đoạn quay lại T_1.

Do chi phí mỗi một trong n-i+1 đoạn còn lại không nhỏ hơn CMin, nên hàm đánh giá cận có thể xác định như sau :

$$g(x_1, \cdots, x_i) = S_i + (n - i + 1)CMin$$

III. Bài toán áp dụng

I. Bài toán người du lịch

3. Thiết kế

- Điều kiện chấp nhận được của j là thành phố T_j chưa đi qua. Ta dùng một mảng logic Daxet[] để biểu diễn trạng thài này

$$Daxet[j] = \begin{cases} 1; T_j \text{ đã được đi qua} \\ 0; T_j \text{ chưa được đi qua} \end{cases}$$

Mảng Daxet[ ] phải được bằng 0 tất cả.

III. Bài toán áp dụng

I. Bài toán người du lịch

3. Thiết kế

- Xác định x_i theo j bằng câu lệnh gán : $x_i = j$

  Cập nhật trạng thái mới : Daxet[j] = 1.

  Cập nhật lại chi phí sau khi tìm được x_i : $S = S + C_{x_{i-1}x_i}$

III. Bài toán áp dụng

I. Bài toán người du lịch

3. Thiết kế

- Cập nhật lời giải tối ưu :

  Tính chi phí hành trình vừa tìm được :

  Tong = S + $C_{x_n 1}$;

  Nếu (Tong < f*) thì

  Lgtu = x;

  f* = Tong;

III. Bài toán áp dụng

I. Bài toán người du lịch

3. Thiết kế

- Thao tác huỷ bỏ trạng thái : Daxet[j] = 0.
  Trả lại chi phí cũ : S = S- $C_{x_{i-1}x_i}$

4. Cài đặt

toá

```
void Try(int i)
{
    int j, Tong, g;
    for (j = 2; j <= n; j++)
        if(!Daxet[j])
        {
            x[i] = j;
            Daxet[j] = 1;
            S = S + C[x[i-1]][x[i]];
            if(i==n)
            {   //Cap nhat hanh trinh toi uu
                Tong = S + C[x[n]][x[1]];
                if(Tong < Gttu)
                {
                    Gan(Httu,x,n);
                    Gttu = Tong;
                }
            }
            else
            {
                g = S + (n-i+1)*Cmin; //Danh gia can
                if ( g < Gttu)   Try(i+1);
            }
            S = S - C[x[i-1]][x[i]];
            Daxet[j] = 0;
        }
}
```

4. Cài đặt

toá

```
void Init()
{
        int i, j;
        Cmin = VC;//Chi phi nho nhat giua 2 thanh pho
        for(i = 1; i <= n; i++)
                Daxet[i] = 0;
        for(i = 1; i <= n; i++)
                for(j = 1; j <= n; j++)
                        if(Cmin>C[i][j])
                                Cmin = C[i][j];
        Gttu = VC;//Gia tri toi uu  f*
        S = 0;
        x[1] = 1; // Xuat phat tu dinh 1
}
```

III. Bài toán áp dụng

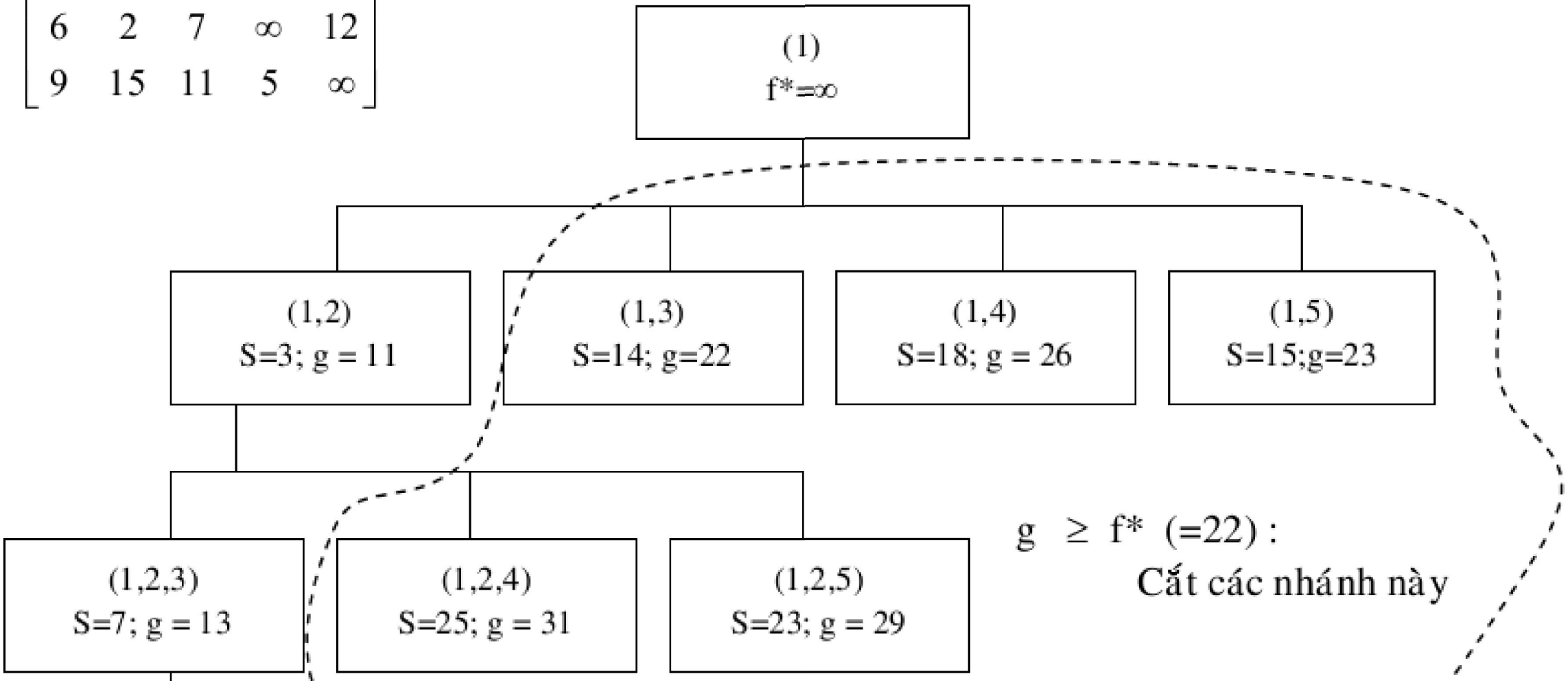
I. Bài toán người du lịch

Ví dụ minh họa

Ma trận chi phí :

$$C = \begin{bmatrix} \infty & 3 & 14 & 18 & 15 \\ 3 & \infty & 4 & 22 & 20 \\ 17 & 9 & \infty & 16 & 4 \\ 6 & 2 & 7 & \infty & 12 \\ 9 & 15 & 11 & 5 & \infty \end{bmatrix}$$

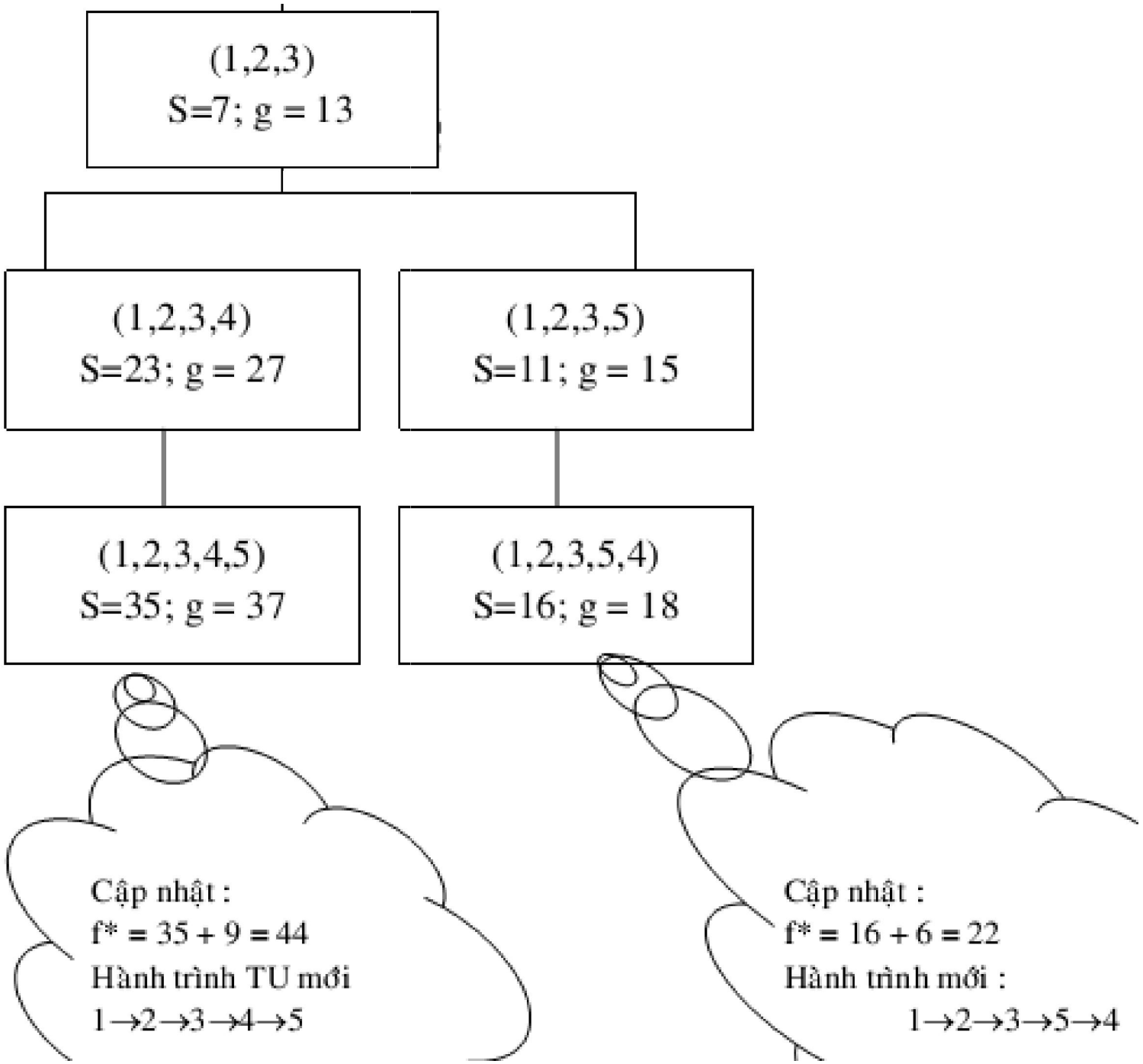
$$C = \begin{bmatrix} \infty & 3 & 14 & 18 & 15 \\ 3 & \infty & 4 & 22 & 20 \\ 17 & 9 & \infty & 16 & 4 \\ 6 & 2 & 7 & \infty & 12 \\ 9 & 15 & 11 & 5 & \infty \end{bmatrix}$$



$g \geq f^*$ (=22) :

Cắt các nhánh này

$$C = \begin{bmatrix} \infty & 3 & 14 & 18 & 15 \\ 3 & \infty & 4 & 22 & 20 \\ 17 & 9 & \infty & 16 & 4 \\ 6 & 2 & 7 & \infty & 12 \\ 9 & 15 & 11 & 5 & \infty \end{bmatrix}$$



III. Bài toán áp dụng

II. Bài toán cái túi

1. Bài toán

Có n loại đồ vật, mỗi loại có số lượng không hạn chế. Đồ vật loại i, đặc trưng bởi trọng lượng Wi và giá trị sử dụng Vi, với mọi $i \in \{1,..,n\}$.

Cần chọn các vật này đặt vào một chiếc túi xách có giới hạn trọng lượng m, sao cho tổng giá trị sử dụng các vật được chọn là lớn nhất.

III. Bài toán áp dụng

II. Bài toán cái túi

2. Ý tưởng

Đặt : $D = \left\{ u = (u_1, \cdots, u_n) \in N^n : \sum_{i=1}^{n} u_i w_i \le m \right\}$

và : $f : D \to R^+$

$(u_1, \cdots, u_n) \mapsto f(u_1, \cdots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \; ; (u_1, \cdots, u_n) \in D$

Bài toán chiếc túi xách chuyển về bài toán sau :

Tìm x* ∈ D : f* = f(x*) = $\{ f(u) : u \in D \}$

Cho nên ta sẽ kết hợp đánh giá nhánh cận trong quá trình liệt kê các lời giải theo phương pháp quay lui.

II. Bài toán cái túi

3. Thiết kế thuật toán

```
Try(i) ≡
    for(j = 1 → t)
        if(Chấp nhận được)
        {
            Xác định x_i theo j;
            Ghi nhận trạng thái mới;
            if(i==n)
                Cập nhật lời giải tối ưu;
            else
            {
                Xác định cận trên g;
                if( g(x_1,..., x_i) ≤ f*)
                    Try(i+1);
            }
            Trả lại trạng thái cũ cho bài toán;
        }
```

III. Bài toán áp dụng

II. Bài toán cái túi

3. Thiết kế thuật toán

- Cách chọn vật :

  Xét mảng đơn giá : $Dg = \left(\frac{v_1}{w_1}, \cdots, \frac{v_n}{w_n} \right)$

  Ta chọn vật theo đơn giá giảm dần.

  Không mất tính tổng quát, ta giả sử các loại vật cho theo thứ tự giảm dần của đơn giá.

III. Bài toán áp dụng

II. Bài toán cái túi

3. Thiết kế thuật toán

- Đánh giá cận trên :

  Giả sử đã tìm được lời giải bộ phận : $(x_1, \cdots, x_i)$. Khi đó :

- Giá trị của túi xách thu được : $S = \sum_{j=1}^{i} x_j v_j = S + x_j v_j$.

- Tương ứng với trọng lượng các vật đã được xếp vào chiếc túi :

$$TL = \sum_{j=1}^{i} x_j w_j = TL + x_i w_i .$$

- Do đó, giới hạn trọng lượng của chiếc túi còn lại là : $m - TL = m - \sum_{j=1}^{i} x_j w_j$

III. Bài toán áp dụng

II. Bài toán cái túi

3. Thiết kế thuật toán

Ta có :

$$Max\left\{f(u) : u = (u_1, \cdots, u_n) \in D; u_j = x_j, \forall j = \overline{1,i}\right\} =$$

$$Max\left\{S + \sum_{j=i+1}^{n} u_j v_j : \sum_{j=i+1}^{n} u_j w_j \le m_i\right\} =$$

$$S + Max\left\{\sum_{j=i+1}^{n} u_j v_j : \sum_{j=i+1}^{n} u_j w_j \le m_i\right\} \le S + v_{i+1} * \left(\frac{m_i}{w_{i+1}}\right)$$

Do đó, cận trên cho các lời giải bộ phận cấp i có thể xác định bởi :

$$g(x_1, \cdots, x_i) = S + v_{i+1} * \left(\frac{m_i}{w_{i+1}}\right)$$

III. Bài toán áp dụng

II. Bài toán cái túi

3. Thiết kế thuật toán

- Theo biểu thức xác định cận trên g, các giá trị có thể chấp được cho x_{j+1} là :

$$t = 0 \rightarrow \left(\frac{m_i}{w_{i+1}} \right)$$

- Thao tác ghi nhận trạng thái mới khi xác định được x_i chẳng qua là cập nhật lại giá trị thu được và giới hạn trọng lượng mới của chiếc túi :

$$S = S + x_i v_i$$

$$T = = T + x_i w_i .$$

III. Bài toán áp dụng

II. Bài toán cái túi

3. Thiết kế thuật toán

- Vì vậy, thao tác trả lại trạng thái cũ cho bài toán :

$$S = S - x_i v_i$$

$$T = T - x_i w_i .$$

- Cập nhật lời giải tối ưu :

  Khi tìm được một lời giải, ta so sánh lời giải này với lời giải mà ta coi là tốt nhất vào thời điểm hiện tại để chọn lời giải tối ưu.

III. Bài toán áp dụng

II. Bài toán cái túi

3. Thiết kế thuật toán

- Các khởi tạo giá trị ban đầu :

  - $x^* = 0$; //Lời giải tối ưu của bài toán
  - $f^* = f(x^*) = 0$; // Giá trị tối ưu
  - $S = 0$; //Giá trị thu được từng bước của chiếc túi.
  - TL = ; //Trọng lượng xếp vào chiếc túi từng bước.

4. Cài đặt

```
void Try(int i)
{
   int j, t, g;
   t = (int)((m-Tl)/w[i]);
   for (j = t; j >=0 ; j--)
   {
      x[i] = j;
      Tl = Tl + w[i]*x[i];//Trong luong thu duoc
      S  = S  + v[i]*x[i];  //Gia tri thu duoc
      if(i==n)          //Cap nhat toi uu
      {
         if(S > Gttu)
         {
            Gan();
            Gttu = S;
         }
      }
      else
      {
         g = S + v[i+1]*(m-Tl)/w[i+1]; //Danh gia can
         if ( g > Gttu)  Try(i+1);
      }
      Tl = Tl - w[i]*x[i];
      S  = S  - v[i]*x[i];
   }
}
```

4. Cài đặt

```
void Init()
{
        for (int i = 1; i <= n; i++)
        {
                Patu[i] = 0;
                x[i] = 0;
        }
        S = 0;
        Gttu = 0;
        Tl = 0;

}
```

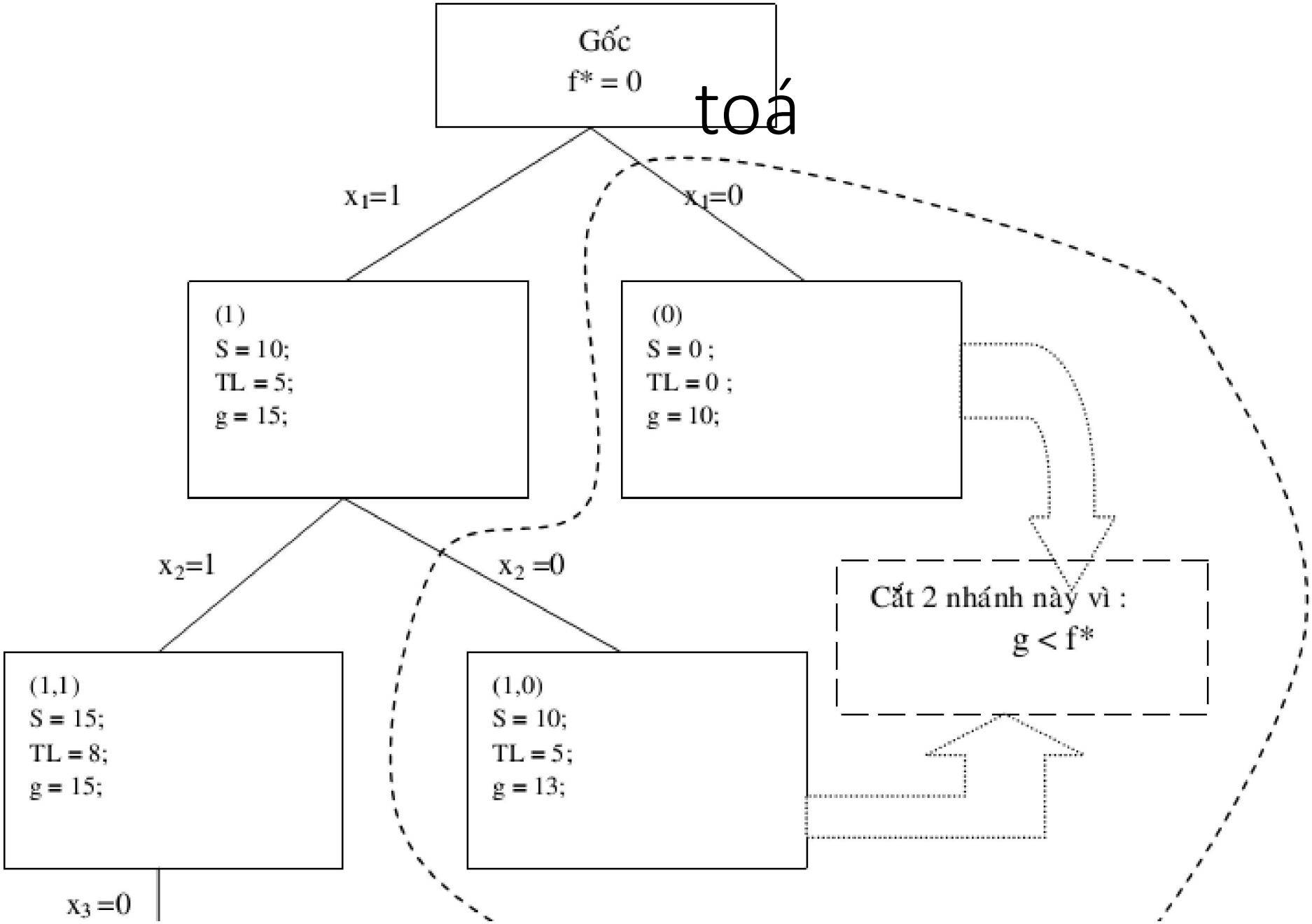
III. Bài toán áp dụng

II. Bài toán cái túi

Ví dụ minh họa

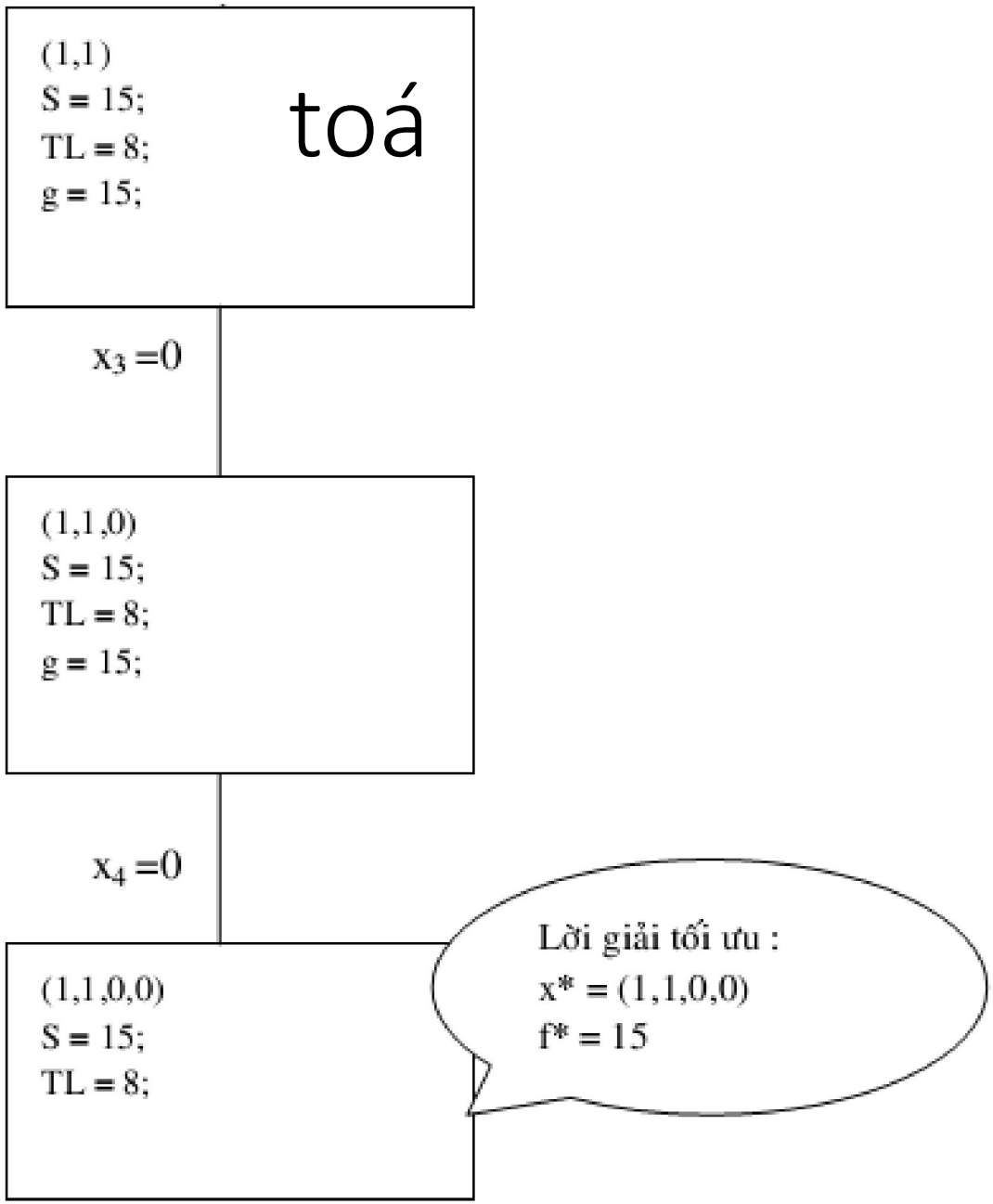
i	1	2	3	4
w	5	3	2	4
v	10	5	3	6

$m = 8$


Gốc
f* = 0
toá
x1=1
x1=0
(1)
S = 10;
TL = 5;
g = 15;
(0)
S = 0 ;
TL = 0 ;
g = 10;
x2=1
x2 =0
Cắt 2 nhánh này vì :
g < f*
(1,1)
S = 15;
TL = 8;
g = 15;
(1,0)
S = 10;
TL = 5;
g = 13;
x3 =0

II. Bài toán cái túi

Ví dụ minh họa



IV. Bài tập

1. Cài đặt thuật toán giải bài toán người du lịch (dựa trên thuật toán liệt kê các hoán vị) theo phương pháp nhánh cận. Đánh giá độ phức tạp thuật toán bằng lý thuyết, bằng thực nghiệm và so sánh.
2. 2. Cài đặt thuật toán giải bài toán cái túi (dựa trên thuật toán liệt dãy nhị phân độ dài N) theo phương pháp nhánh cận. Đánh giá độ phức tạp thuật toán bằng lý thuyết, bằng thực nghiệm và so sánh.

NỘI DUNG

I. Giới thiệu
II. Lược đồ chung
III. Bài toán áp dụng
IV. Bài tập