B7. Inferential Statistics

Bổ sung cho giáo trình

2021

Nội dung bổ sung

1. **Inferential Statistics**
2. **Standard Error**
3. **Confidence Intervals**
4. **Correlation**
5. **Hypothesis testing**

1. Inferential Statistics

- **Thống kê suy luận**
  - suy luận về tổng thể/quần thể (*population*) dựa trên mẫu (*sample*) chứa các quan sát (*observations*)
  - lấy mẫu (*sampling*) → *sampling error*: không thể hiện đặc trưng của tổng thể

> *"You don't have to eat the whole ox to know that the meat is tough."*
> [Samuel Johnson]

1. Inferential Statistics (tt.)

- **Lấy mẫu ngẫu nhiên đơn giản** (*simple random sampling*)

  A) Từ một tổng thể hữu hạn có N phần tử:
  - ở mỗi bước, các phần tử có cùng xs được chọn → n phần tử
  - hoàn lại hay không hoàn lại (sampling w./without replacement)
  - số lượng mẫu $\frac{N!}{n!(N-n)!}$: mỗi mẫu có cùng xs được chọn

  B) Từ một tổng thể vô hạn (vô cùng lớn): n phần tử được chọn một cách độc lập

1. Inferential Statistics (tt.)

- **Lấy mẫu ngẫu nhiên phân tầng** *(stratified random sampling)*
  - lấy mẫu theo xác suất (phương sai tương đối nhỏ)
  - tổng thể được phân chia thành nhiều tầng (cấu trúc phân cấp, tập hợp những phần tử "tương đồng")
  - một mẫu ngẫu nhiên đơn giản được lấy theo từng tầng

1. Inferential Statistics (tt.)

- **Lấy mẫu theo cụm** *(cluster sampling)*
  - lấy mẫu theo xác suất
  - tổng thể được chia thành nhiều cụm, mỗi cụm là một đại diện thu nhỏ của tổng thể (VD: khu vực địa lý)
  - một mẫu ngẫu nhiên đơn giản được lấy từ theo từng cụm

1. Inferential Statistics (tt.)

- **Lấy mẫu hệ thống** (*systematic sampling*)
  - lấy mẫu theo xác suất
  - phân tầng theo tỷ lệ
  - chọn ngẫu nhiên 1 trong k phần tử

  VD: lấy cỡ mẫu 50 phần tử từ tổng thể 5000 phần tử
  → lần lượt chọn 1 trong số 100 phần tử của hệ thống

1. Inferential Statistics (tt.)

- **Lấy mẫu thuận tiện** (*convenience sampling*)
  - lấy mẫu PHI xác suất
  - lấy mẫu dựa trên sự thuận tiện

  VD: lấy mẫu từ các sinh viên, những người tình nguyện, …

- **Lấy mẫu phán đoán** (*judgment sampling*)
  - lấy mẫu PHI xác suất
  - lấy mẫu dựa trên ý kiến phán đoán, đánh giá của chuyên gia

1. Inferential Statistics (tt.)

- **Sự thiên lệch (*bias*): mẫu không đại diện (đúng) cho tổng thể**
  - *convenience bias*: thiên lệch do chú trọng tính thuận lợi
  - *judgement bias*: thiên lệch do ý kiến phán đoán, đánh giá
  - *size bias*: cỡ mẫu quá nhỏ không chứa đủ các phần tử đại diện

1. Inferential Statistics (tt.)

- **Tham số và đặc trưng**
  - ước lượng giá trị tham số của tổng thể: μ, σ, …
  - tính toán đặc trưng của mẫu quan sát (*thống kê mẫu*): $\bar{x}$, s, …
- **Lấy mẫu N lần, mỗi lần n đối tượng (quan sát)**
  - các biến ngẫu nhiên X_1, X_2, …, X_N

1. Inferential Statistics (tt.)

- **Nội suy** (*interpolation*)
  - ước lượng các điểm dữ liệu mới TRONG phạm vi tập dữ liệu đã quan sát được

    $\{ (x_i, y_i) \} \Rightarrow (x, y)$: $x \in (\min(x_i), \max(x_i))$
  - suy luận dựa vào bản chất của hiện tượng
  - đường cong (thường là đa thức) nội suy các điểm đã quan sát

1. Inferential Statistics (tt.)

- **Ngoại suy** (*extrapolation*)
  - ước lượng các điểm dữ liệu mới NGOÀI phạm vi tập dữ liệu đã quan sát được → dựa vào mối quan hệ với các biến độc lập

    $\{ (x_i, y_i) \} \Rightarrow (x, y)$: $x \notin (\min(x_i), \max(x_i))$
  - quan sát sự biến động của hiện tượng → rút ra những quy luật → dự đoán sự phát triển của hiện tượng

Nội dung bổ sung

1. Inferential Statistics
2. **Standard Error**
3. Confidence Intervals
4. Correlation
5. Hypothesis testing

2. Standard Error

- **Bài toán xác suất**
  - tổng thể có r phần tử
  - thí nghiệm: chọn n (n << r) phần tử của tổng thể (lấy mẫu)
- **Trung bình mẫu, độ lệch chuẩn của mẫu: các biến ngẫu nhiên**

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}} \qquad SEM = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

  - có phân phối xác suất $\rightarrow \mu_{\bar{X}}, \sigma_{\bar{X}}$
  - $\bar{X}, s$: các *đại lượng ước lượng điểm* của μ, σ

2. Standard Error (tt.)

- **Phân phối mẫu** (*sampling distribution*): **phân phối xác suất của thống kê mẫu (các giá trị kết quả tính toán từ N lần lấy mẫu)**
  - phân phối của *trung bình mẫu* → ước lượng μ (của tổng thể)
  - phân phối của *phương sai mẫu* → ước lượng σ^2 (của tổng thể)

$$
\begin{array}{lcll}
S_1 = \{x_{11}, \ldots, x_{1j}, \ldots, x_{1n}\} & \rightarrow & \bar{x}_1 & s_1^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
S_i = \{x_{i1}, \ldots, x_{ij}, \ldots, x_{in}\} & \rightarrow & \bar{x}_i & s_i^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
S_N = \{x_{N1}, \ldots, x_{Nj}, \ldots, x_{Nn}\} & \rightarrow & \bar{x}_N & s_N^2 \\
 & & \downarrow & \downarrow \\
 & & \mu & \sigma^2
\end{array}
$$

2. Standard Error (tt.)

- **Phân phối mẫu** (*sampling distribution*)
  - $X_1, X_2, \ldots, X_n$: *independent and identically distributed* (*i.i.d.*)
  - $X_1, X_2, \ldots, X_n$: cùng kỳ vọng và phương sai

$$\mu_{\bar{X}} = E\left[\bar{X}\right] = E[X] = \mu_X$$

$$\sigma^2_{\bar{X}} = Var\left(\bar{X}\right) = \frac{Var(X)}{n} = \frac{\sigma^2_X}{n}$$

X: phân phối của tổng thể ban đầu

2. Standard Error (tt.)

- **Sai số chuẩn** (*Standard Error – SE*)
  - *standard deviation of the means*: sự thay đổi của mean trong các lần lấy mẫu

$$s_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \qquad SEM = \frac{s_{\bar{X}}}{\sqrt{n}}$$

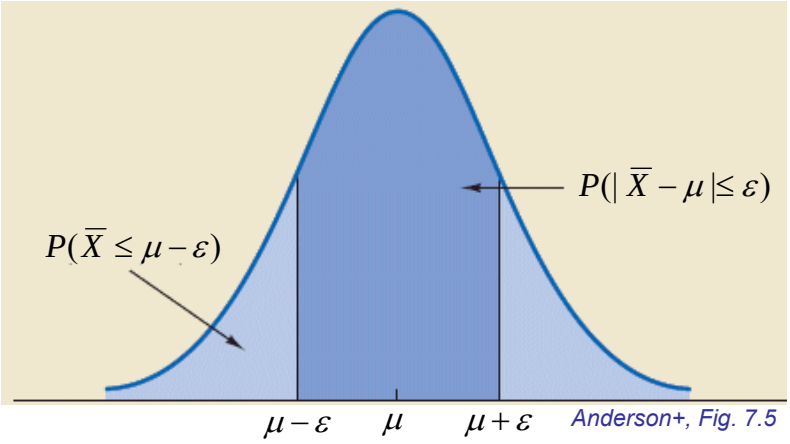
  - mức độ trung bình mẫu cách xa trung bình tổng thể σ
  - *đại lượng ước lượng điểm* của độ lệch chuẩn tổng thể σ
  - được dùng để ước lượng khoảng tin cậy (*Confidence Interval*)

2. Standard Error (tt.)

- **Tổng thể có phân phối chuẩn** $\Rightarrow \bar{X} \sim N(\mu,\sigma) \quad \forall n$
- **Tổng thể KHÔNG có phân phối chuẩn** $\rightarrow$ **áp dụng CLT**
  - nếu kích thước mẫu n đủ lớn thì trung bình mẫu gần xấp xỉ với phân phối chuẩn (phân bố 'xung quanh' μ)
  - mean của trung bình mẫu $\rightarrow \mu$

2. Standard Error (tt.)

- Sau một lần lấy mẫu, xác suất để trung bình mẫu sai lệch so với μ không vượt quá ε là bao nhiêu ?



Anderson+, Fig. 7.5

2. Standard Error (tt.)

- Các tham số chưa biết của 1 quần thể
  - điểm (tốt nghiệp) trung bình (*mean* μ) của sinh viên trường A ?
  - tỉ lệ (*proportion* p) sinh viên trường A hút thuốc lá ?

2. Standard Error (tt.)

- **Ước lượng điểm** (*point estimate*)

  Quần thể có tham số Φ cần ước lượng $\Rightarrow$ tìm giá trị $\varphi \approx \Phi$

  Không gian tham số (*parameter space*) Ω: các giá trị có thể của Φ

  Các biến ngẫu nhiên: $X_1, X_2, \ldots, X_n$

  Mẫu $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$: các giá trị quan sát của $X_1, X_2, \ldots, X_n$

  Hàm ước lượng (*estimator*): $h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

  Ước lượng điểm là giá trị kết quả từ mẫu (thống kê mẫu):

  $$\varphi = h(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$$

2. Standard Error (tt.)

- **Ước lượng điểm** (*point estimator*)

  VD: $\Omega_{GPA} = \{ \mu \mid 0 \le \mu \le 10 \}$

  μ estimator: $h(X_1, X_2, \cdots, X_n) = \overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$

  μ point estimate (dựa trên mẫu): $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$

  σ^2 estimator: $h(X_1, X_2, \cdots, X_n) = S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

  σ^2 point estimate (dựa trên mẫu): $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

  Sai số chuẩn = độ lệch chuẩn của ước lượng điểm

2. Standard Error (tt.)

- **Ước lượng điểm** (*point estimator*)
  - tồn tại vô số khả năng chọn lựa estimator h
  - hàm h tốt nhất → cho giá trị kết quả φ xấp xỉ giá trị thật của Φ
  - so sánh các hàm h_1 và h_2 ?

2. Standard Error (tt.)

- **Maximum Likelihood Estimation** (MLE)

Các biến ngẫu nhiên: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ từ 1 phân phối:

Bộ tham số: $(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m) \in \Omega$

Hàm phân phối PDF: $f(x_i;\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_n)$

Mẫu quan sát: $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

Likelihood function: $L(\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_n)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_n)$

Maximum Likelihood Estimate: $\hat{\varphi}=(h_1(x),h_2(x),\cdots,h_m(x))$

là điểm cực đại của hàm $L(\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_n)$

2. Standard Error (tt.)

- **Maximum Likelihood Estimation** (MLE)

  VD: Cân nặng của phụ nữ Mỹ ~ N(μ, σ)

  Lấy mẫu 10 phụ nữ có cân nặng (lbs):

  { 115, 122, 130, 127, 149, 160, 152, 138, 149, 180 }

$$f(x_i;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L(\mu,\sigma)=\sigma^{-n}(2\pi)^{-n/2}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\hat{\mu}=\sum_{i=1}^{n}x_i=142.2$$

2. Standard Error (tt.)

- **Ước lượng điểm** (*point estimator*)
  - *không chệch* (*unbiased*): kỳ vọng của các mẫu = φ

    $E[\, h(X_1, X_2, \ldots, X_n)\,] = \varphi$
  - *vững chắc* (*consistent*): cỡ mẫu n càng lớn thì ước lượng Φ càng chính xác
  - *hiệu quả* (*most efficient*): không chệch, vững chắc, phương sai thấp nhấp (ít thay đổi theo các mẫu khác nhau)

2. Standard Error (tt.)

- **Ước lượng điểm** (*point estimator*)
  - có thật sự $\varphi \approx \Phi$?
  - mức độ xấp xỉ giữa φ và Φ ?
  - 'khoảng' (đoạn) [L, U] chứa giá trị của tham số Φ ?
  - mức độ tin cậy của khoảng [L, U] ?

Nội dung bổ sung

1. Inferential Statistics
2. Standard Error
3. **Confidence Intervals**
4. Correlation
5. Hypothesis testing

3. Confidence Intervals

- **'Khoảng' (đoạn) tin cậy** (*Confidence Interval for One Mean – CI*)

$\Phi \in [L, U]$

CI = ước lượng điểm ± sai số biên (*margin of error*)

Mỗi CI có 1 *hệ số tin cậy* (*confidence coefficient* hay *proportion*), ký hiệu: $(1 - \alpha)$

hay mức độ tin cậy (*confidence level*), ký hiệu: $(1 - \alpha)100\%$

Các giá trị thông dụng của hệ số tin cậy (mức độ tin cậy):

0.90 (90%), 0.95 (95%), 0.99 (99%)

VD: Với mức tin cậy 95%, chiều cao trung bình của SV trường A nằm trong khoảng từ 158cm đến 165cm

3. Confidence Intervals (tt.)

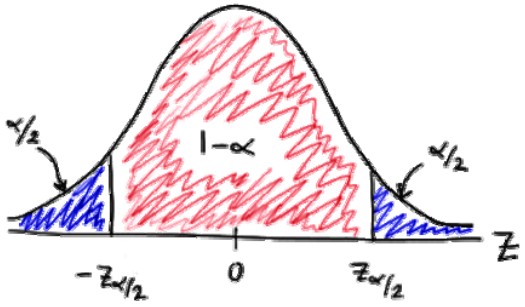
- **Z-interval của μ: một CI đặc biệt**

$z_{\alpha/2}$: Z-value tạo vùng bên *phải*, dưới đường phân phối có diện tích = $\alpha/2$

$$P(z_{\alpha/2} \leq Z) = \alpha/2$$

$-z_{\alpha/2}$: Z-value tạo vùng bên *trái*, dưới đường phân phối có diện tích = $\alpha/2$

$$P(Z \leq -z_{\alpha/2}) = \alpha/2$$



3. Confidence Intervals (tt.)

❑ **Z-interval của μ: một CI đặc biệt**

Giả sử: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ~ phân phối chuẩn

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad Z = \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Nếu biết trước σ của tổng thể thì với mức độ tin cậy $(1 - \alpha)100\%$, khoảng tin cậy Z-interval của μ:

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Nếu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ không phải phân phối chuẩn → n đủ lớn + CLT

3. Confidence Intervals (tt.)

❑ **Z-interval của μ: một CI đặc biệt**

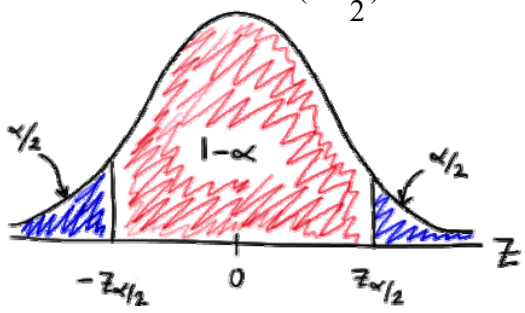
VD: Mức độ tin cậy 90% (0.90) ⇒ $\alpha = 0.10 \Rightarrow \alpha / 2 = 0.05$

Giá trị trong bảng Z: $P(Z \le \alpha)$

Giá trị cần có: $P(-\alpha/2 \le Z \le \alpha/2)$

Tra bảng Z với giá trị: $(1 - 0.05) = 0.95 \Rightarrow z_{\alpha/2} \approx 1.645$

$(1 - \frac{\alpha}{2})$



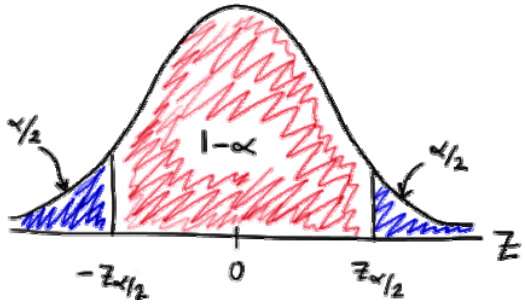
3. Confidence Intervals (tt.)

- **Z-interval của μ: một CI đặc biệt**

  VD: Mức độ tin cậy 95% (0.95) $\Rightarrow \alpha / 2 = 0.025 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$

  Mức độ tin cậy 99% (0.99) $\Rightarrow \alpha / 2 = 0.005 \Rightarrow z_{\alpha/2} \approx 2.576$

  Mức độ tin cậy 99.5% (0.995) $\Rightarrow \alpha / 2 = 0.0025 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.81$



3. Confidence Intervals (tt.)

- **Z-interval của μ: một CI đặc biệt**

  Độ dài Z-interval của μ: $d = 2z_{\alpha/2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

  - σ đã cố định → không thể hiệu chỉnh để tăng hay giảm d
  - n tăng → d giảm
  - $z_{\alpha/2}$ giảm → d giảm

3. Confidence Intervals (tt.)

- **t-interval của μ**

Nếu không biết trước σ: ước lượng σ dựa trên phương sai mẫu s theo phân phối T

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

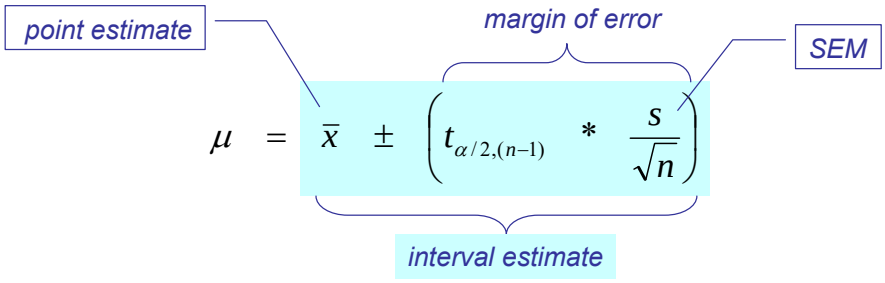
Ta có: $T = \dfrac{(\bar{X} - \mu)}{s/\sqrt{n}}$ có phân phối t với **(n – 1)** bậc tự do

Với mức độ tin cậy (1 – α)100%, khoảng tin cậy t-interval của μ:

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2,(n-1)}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

3. Confidence Intervals (tt.)

- **t-interval của μ**



3. Confidence Intervals (tt.)

❑ **Trường hợp dữ liệu ban đầu không phải phân phối chuẩn**

$$T = \frac{(\overline{X} - \mu)}{s/\sqrt{n}}$$

- Khi n tăng: T ~ phân phối chuẩn bất chấp phân phối ban đầu
- Khi n đủ lớn: Z-interval và t-interval cho kết quả tương tự nhau

3. Confidence Intervals (tt.)

❑ **Xác định cỡ mẫu n khi biết phương sai tổng thể σ**

$$\overline{x} \pm z_{\alpha/2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Gọi ε là sai số biên mong muốn (chấp nhận được):

$$\varepsilon = z_{\alpha/2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad \Rightarrow \quad n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\varepsilon}\right)^2$$

Nội dung bổ sung

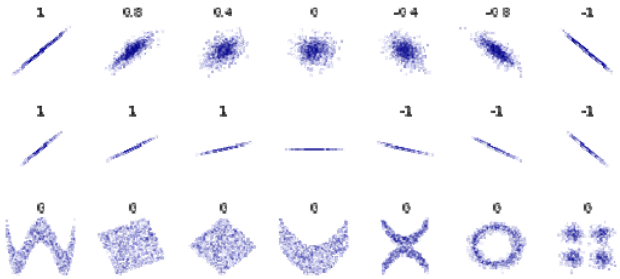
1. Inferential Statistics
2. Standard Error
3. Confidence Intervals
4. **Correlation**
5. Hypothesis testing

4. Correlation

- **Pearson correlation**

$$correlation(x,y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}).(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.(y_i - \bar{y})^2}}$$

- x, y độc lập $\Rightarrow$ correlation(x, y) = 0; điều ngược lại không đúng



www.wikipedia.org (09/2019)

4. Correlation (tt.)

- **Spearman rank correlation**
  - quan hệ thứ tự của hai dãy: ordinal, interval, ratio
  - không có tham số (*nonparametric*): giá trị trung bình, …

$$\rho = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)} \in [-1, \quad 1]$$

d_i: độ lệch giữa x_i và y_i

4. Correlation (tt.)

- **Spearman rank correlation**

VD: 2 dãy số KHÔNG có đồng hạng

i	A(i)	Rank_A(i)	B(i)	Rank_B(i)	d(i)
1	35	3	30	5	-2
2	23	5	33	3	2
3	47	1	45	2	-1
4	17	6	23	6	0
5	10	7	8	8	-1
6	43	2	49	1	1
7	9	8	12	7	1
8	6	9	4	9	0
9	28	4	31	4	0

$$\rho = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)} = 0.9$$

4. Correlation (tt.)

- **Spearman rank correlation**

VD: 2 dãy số CÓ đồng hạng

i	A(i)	Rank_A(i)	B(i)	Rank_B(i)	Rank_B'(i)	d(i)
1	35	3	30	5	5.5	-2.5
2	23	5	33	3	3	2
3	47	1	45	2	2	-1
4	17	6	30	5	5.5	0.5
5	10	7	8	8	8	-1
6	43	2	49	1	1	1
7	9	8	12	7	7	1
8	6	9	4	9	9	0
9	28	4	31	4	4	0

$$\rho = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)} = 0.88$$

Nội dung bổ sung

1. Inferential Statistics
2. Standard Error
3. Confidence Intervals
4. Correlation
5. **Hypothesis testing**

5. Hypothesis Testing

- **Kiểm định giả thuyết**
  - một giả thuyết *không chắc chắn* về 1 tham số của tổng thể
  - dựa trên dữ liệu mẫu → nên hay không nên *bác bỏ* giả thuyết ?
- **Giả thuyết thống kê** (*statistical hypothesis*)
  - giả thuyết về một vấn đề của tổng thể (tham số, phân phối, …)
  - H_0 (*null hypothesis*): giả thuyết 'vô hiệu' cần kiểm định
  - H_1, H_a (*alternative hypothesis*): giả thuyết đảo/đối thuyết của H_0

5. Hypothesis Testing (tt.)

- **Kiểm định hiệu lực của một phát biểu ('đáng nghi ngờ')**

  VD: Nhà sx cho biết thời gian máy thở cung cấp oxy TB = 75 phút

  Đơn vị quản lý chất lượng lấy mẫu ngẫu nhiên để kiểm tra: '*thời gian cung cấp oxy (trung bình) không ngắn hơn 75 phút*'.

$$\begin{cases} H_0: \quad \mu \geq 75 \longleftarrow \text{điều phát biểu (giả định là đúng)} \\ H_a: \quad \mu < 75 \end{cases}$$

  Đơn vị QL không cần quan tâm (ước lượng) g.trị thật sự của μ, chủ yếu có đúng với điều phát biểu hay không mà thôi.

- bằng chứng thống kê *cho phép bác bỏ* H_0 hoặc ngược lại, *không cho phép bác bỏ* $H_0 \Rightarrow H_0$ có hiệu lực

5. Hypothesis Testing (tt.)

❑ **Kiểm định giả thuyết nghiên cứu ("mong đợi")**

VD: Mẫu xe hiện hành tiêu thụ 5 lít xăng / 100 km (1 lít → 20km)

Nhóm kỹ sư tiến hành một số cải tiến trên hệ thống phun xăng → hy vọng 1 lít đi được hơn 22km

$$\begin{cases} H_0: & \mu \le 22 \\ H_a: & \mu > 22 \end{cases} \longleftarrow \textit{điều mong đợi}$$

- bằng chứng thống kê *không cho phép bác bỏ* H_0, cần thực hiện những nghiên cứu khác, hoặc ngược lại, *cho phép bác bỏ* H_0 ⇒ ủng hộ kết quả nghiên cứu

5. Hypothesis Testing (tt.)

❑ **Kiểm định giả thuyết cả 2 phía**

VD: Số mặt hàng TB / hóa đơn tại 1 siêu thị trong năm qua là 8.

Bộ phận nghiên cứu thị trường muốn xem xét có hay không có sự thay đổi về số lượng mặt hàng trung bình / hóa đơn

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 8 \\ H_a: & \mu \ne 8 \end{cases} \longleftarrow \textit{'hai phía' của ngưỡng đều có vai trò}$$

- bằng chứng thống kê *cho phép bác bỏ* H_0, hoặc ngược lại, *không cho phép bác bỏ* H_0 ⇒ H_0 có hiệu lực

VD2: Kiểm soát chất lượng sản phẩm (*lot-acceptance sampling*).

5. Hypothesis Testing (tt.)

❑ **3 loại kiểm định giả thuyết**

- hai phía (*two-tailed*/*two-sided test*)

$$\begin{cases} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_a: & \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

- một phía (*one-tailed*/*one-sided test*)

$$\begin{cases} H_0: & \theta_0 \leq \theta \\ H_a: & \theta_0 > \theta \end{cases} \quad (left-tailed)$$

$$\begin{cases} H_0: & \theta \leq \theta_0 \\ H_a: & \theta > \theta_0 \end{cases} \quad (right-tailed)$$

5. Hypothesis Testing (tt.)

❑ **Giả thuyết thống kê**: ***mạnh dạn bác bỏ, miễn cưỡng chấp nhận***

- *tiêu chuẩn kiểm định*: phân phối xs được dùng trong kiểm định
- 2 loại sai sót trong kiểm định

	H_0 ĐÚNG	H_0 SAI
Không bác bỏ H_0	Kết luận đúng	**Sai lầm loại II**
Bác bỏ H_0	**Sai lầm loại I**	Kết luận đúng

- *mức ý nghĩa* kiểm định (*level of significane*) α

α = P(xs sai lầm loại I)

Nếu chi phí cho sai lầm loại I lớn $\rightarrow$ chọn α thấp, và ngược lại.

5. Hypothesis Testing (tt.)

- **Giả thuyết thống kê**: ***mạnh dạn bác bỏ, miễn cưỡng chấp nhận***
  - *năng lực kiểm định* $(1 - \beta)$

$$\beta = P(\text{xs sai lầm loại II})$$

$$(1 - \beta) = P(\text{bác bỏ } H_0 \mid H_0 \text{ sai})$$

  - "không bác bỏ H_0" thay vì "chấp nhận H_0": tránh sai lầm loại II

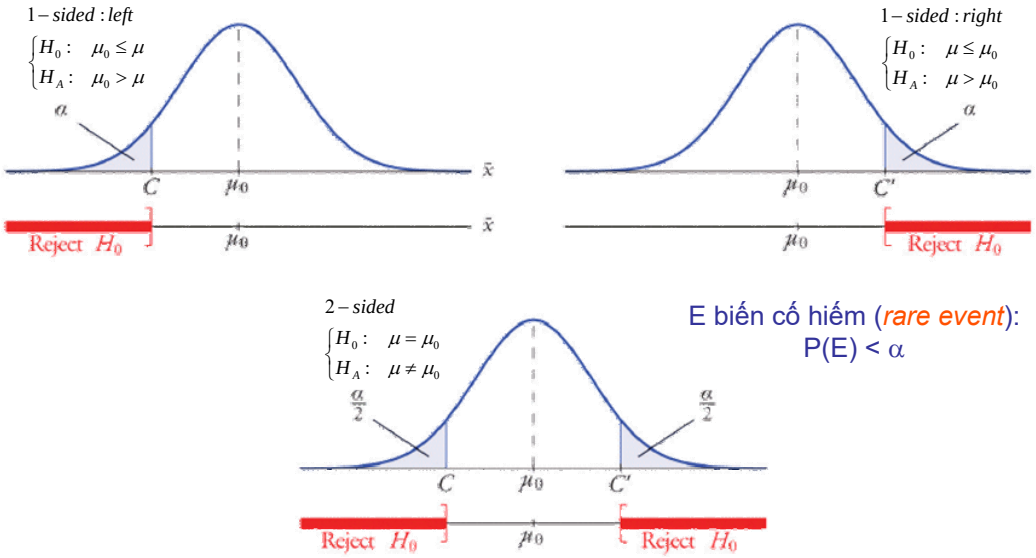
5. Hypothesis Testing (tt.)

- **Miền bác bỏ** (*rejection region*)**: chứa những giá trị thống kê** (không phải xs) **làm cơ sở bác bỏ H_0**
  - quy trình kiểm định bắt đầu bằng sự giả định H_0 là đúng
  - nếu trị thống kê (dựa trên mẫu) thuộc miền này $\rightarrow$ bác bỏ H_0
  - α được sử dụng để xác định (tính toán) miền bác bỏ

5. Hypothesis Testing (tt.)

❑ **Miền bác bỏ: chứa các giá trị thống kê làm cơ sở bác bỏ H_0**

- các *giá trị tới hạn* (*critical value*) C, C': tra các bảng phân phối



E biến cố hiếm (*rare event*):
P(E) < α

5. Hypothesis Testing (tt.)

❑ **Miền bác bỏ: chứa các giá trị thống kê làm cơ sở bác bỏ H_0**

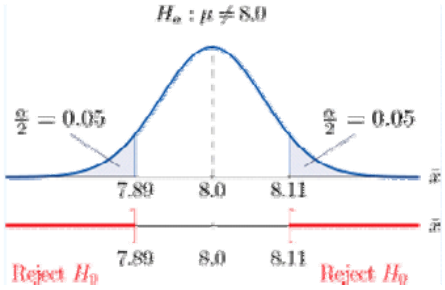
VD: $\begin{cases} H_0: & \mu = 8.0 \\ H_a: & \mu \ne 8.0 \end{cases}$ *cỡ mẫu* $n = 5$ $\quad \sigma = 0.15 \quad \alpha = 0.10$

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 8.0 \qquad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.15}{\sqrt{5}} = 0.067$$

α/2 = 0.05 ⇒ (1 – α/2) = 0.95 → tra Z table: $z_{0.05} \approx 1.645$

C = 8.0 – (1.645)(0.067) = 7.89

C' = 8.0 + (1.645)(0.067) = 8.11



Nếu trung bình của 1 mẫu < 7.89 hay > 8.11 thì bác bỏ H_0.

5. Hypothesis Testing

5.1 Kiểm định trung bình tổng thể μ

- Trường hợp ĐÃ biết σ
- Trường hợp CHƯA biết σ

5.2 Kiểm định (so sánh) trung bình 2 mẫu

5.3 Kiểm định Chi bình phương

5.4 Kiểm định A/B

5.5 Phân tích phương sai (Analysis Of Variance – ANOVA)

5.1 Kiểm định trung bình tổng thể

❑ **Trường hợp ĐÃ BIẾT σ trước khi lấy mẫu**

- khai thác dữ liệu trong quá khứ hoặc từ nguồn thông tin khác
- tổng thể có *phân phối chuẩn* hoặc *cỡ mẫu đủ lớn* (n ≥ 30)

Giả thuyết	$1-sided: right$ $\begin{cases} H_0: & \mu \le \mu_0 \\ H_a: & \mu > \mu_0 \end{cases}$	$1-sided: left$ $\begin{cases} H_0: & \mu_0 \le \mu \\ H_a: & \mu_0 > \mu \end{cases}$	$2-sided$ $\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_a: & \mu \ne \mu_0 \end{cases}$
Thống kê kiểm định	$z = \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$		

sai số chuẩn SE

5.1 Kiểm định trung bình tổng thể (tt.)

❑ **Trường hợp ĐÃ BIẾT σ trước khi lấy mẫu**

VD: $\begin{cases} H_0: & 3 = \mu_0 \le \mu \\ H_a: & \mu < \mu_0 = 3 \end{cases}$ $\sigma = 0.18$ $n = 36$ $\alpha = 0.01$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n} = 0.18 / \sqrt{36} = 0.03 \qquad z = \frac{(\bar{x} - 3)}{0.03}$$

Giả sử lấy mẫu và có: $\bar{x} = 2.92$

$\Rightarrow$ $z = -2.67$

→ quy tắc kết luận về H_0 dựa trên z ?

5.1 Kiểm định trung bình tổng thể (tt.)

❑ **Phương pháp bác bỏ dựa trên giá trị tới hạn**

- cột mốc cho giá trị thống kê kiểm định
- tạo miền bác bỏ tương ứng với diện tích = α

Miền bác bỏ H_0	$1-sided: right$	$1-sided: left$	$2-sided$
	$z_\alpha \le z$	$z \le -z_\alpha$	$(z \le -z_{\alpha/2}) \vee (z_{\alpha/2} \le z)$

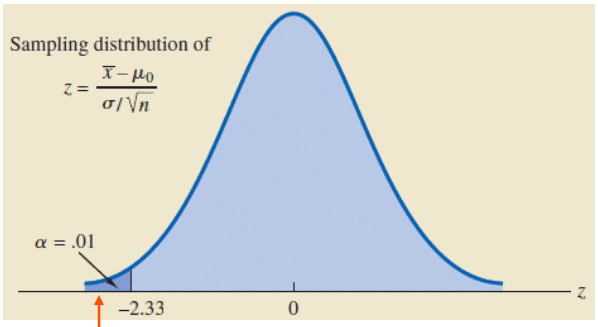
5.1 Kiểm định trung bình tổng thể (tt.)

❑ **Trường hợp ĐÃ BIẾT σ trước khi lấy mẫu**

VD: Với phần diện tích $\alpha = 0.01$, tra (ngược) bảng Z:

$\alpha = 0.01 \Rightarrow z_\alpha = -2.33$

Vì $z = -2.67 < -2.33 = z_\alpha$ cho nên có thể bác bỏ H_0.



5.1 Kiểm định trung bình tổng thể (tt.)

❑ **Phương pháp bác bỏ dựa trên trị số p** (*p-value*)

- Với mỗi mức ý nghĩa $\alpha \rightarrow$ miền bác bỏ
- Trị số p: ngưỡng xác suất còn có thể chấp nhận giả thuyết H_0
  $\Rightarrow$ H_0 luôn luôn bị bác bỏ với mọi $p < \alpha$
- Nếu p quá nhỏ thì H_0 gần như bị bác bỏ hoàn toàn
- Trị số p có thể được tính toán từ giá trị thống kê kiểm định

5.1 Kiểm định trung bình tổng thể (tt.)

❑ **Trường hợp ĐÃ BIẾT σ trước khi lấy mẫu**

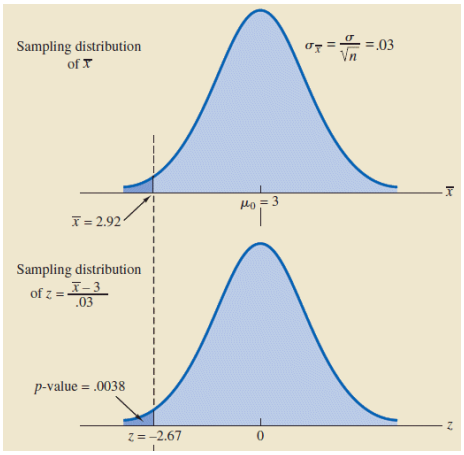
VD: $\bar{x} = 2.92$ có đủ nhỏ (so với $\mu_0 = 3$) để bác bỏ H_0 ?

$$z = -2.67 \quad \Rightarrow \quad p = P(Z \le -2.67)$$

Tra (xuôi) bảng Z, (dòng –2.6, cột 0.07), ta có: p = 0.0038

α = 0.01 nghĩa là chấp nhận mức xs (sai lầm) là 0.01 để bác bỏ H_0.

Vì p < α cho nên có thể bác bỏ H_0.



5.1 Kiểm định trung bình tổng thể (tt.)

❑ **Trường hợp ĐÃ BIẾT σ trước khi lấy mẫu**

VD: Mức độ hài lòng hiện tại = 77/100. Lấy ý kiến của 20 khách, ⇒ mức độ hài lòng trung bình là 80/100. Mức độ hài lòng của khách có thật sự tăng hay không, với α = 0.01 và σ = 8 ?

Giả thuyết $1 - sided : right$

$$\begin{cases} H_0: & \mu \le \mu_0 = 77 \\ H_a: & \mu > \mu_0 = 77 \end{cases}$$

Trị thống kê $z = \dfrac{(80-77)}{8/\sqrt{20}} = 1.68$

Kết luận: $z = 1.68 < z_{1\%} = 2.33 \Rightarrow$ *KHÔNG BÁC BỎ* H_0.

5.1 Kiểm định trung bình tổng thể (tt.)

- **Các bước kiểm định giả thuyết dựa trên mẫu dữ liệu thu thập**

B1. *Xây dựng giả thuyết*: H_0 và H_a.

B2. *Chọn mức ý nghĩa* α: .1, .05, .01 ($\rightarrow$ độ tin cậy .9, .95, .99).

B3. *Tính giá trị thống kê kiểm định*: chọn phân phối và công thức thống kê kiểm định $\rightarrow$ tính toán giá trị dựa trên mẫu dữ liệu.

A. Phương pháp dựa trên trị số p:

B4a. *Tính trị số p*: dựa trên giá trị thống kê kiểm định, tra (xuôi) bảng Z.

B5a. *Rút ra kết luận về* H_0: bác bỏ H_0 nếu $p \leq \alpha$.

B. Phương pháp dựa trên giá trị tới hạn:

B4b. *Xác định miền bác bỏ*: ứng với α, tra (ngược) bảng Z $\rightarrow z_\alpha$

B5b. *Rút ra kết luận về* H_0: dựa trên miền bác bỏ.

5.1 Kiểm định trung bình tổng thể (tt.)

- **Kiểm định 2 phía dựa trên khoảng tin cậy**

$$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_a: & \mu \neq \mu_0 \end{cases} \qquad CI_\alpha = \bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Nếu $\mu_0 \in CI_\alpha = \left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$ thì không bác bỏ H_0, và ngược lại.

5.1 Kiểm định trung bình tổng thể (tt.)

❑ **Trường hợp CHƯA BIẾT σ trước khi lấy mẫu**

- Nếu cỡ mẫu đủ lớn ($n \geq 30$) thì dùng phương sai mẫu (theo CLT, X không cần có phân phối chuẩn)
- Nếu ($n < 30$) thì X cần có *phân phối chuẩn*

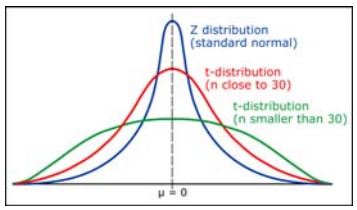
	Lower Tail Test	Upper Tail Test	Two-Tailed Test
Hypotheses	$H_0: \mu \geq \mu_0$ $H_a: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu \leq \mu_0$ $H_a: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_a: \mu \neq \mu_0$
Test Statistic	$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$	$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$	$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$
Rejection Rule: *p*-Value Approach	Reject H_0 if p-value $\leq \alpha$	Reject H_0 if p-value $\leq \alpha$	Reject H_0 if p-value $\leq \alpha$
Rejection Rule: Critical Value Approach	Reject H_0 if $t \leq -t_\alpha$	Reject H_0 if $t \geq t_\alpha$	Reject H_0 if $t \leq -t_{\alpha/2}$ or if $t \geq t_{\alpha/2}$

[Anderson+, p.402]

5.1 Kiểm định trung bình tổng thể (tt.)

❑ **Phân phối T** (*Student's T distribution*)

$$T \sim \left(0, \frac{df}{df-2}\right)$$



Khi df đủ lớn thì $\sigma \to 1$ và T có phân phối chuẩn tắc

Những trường hợp khả dụng:

- tổng thể X ~ (μ, σ)
- X phân phối đối xứng, unimodal (1 đỉnh), không outlier, n ≥ 30
- X phân phối nhọn vừa phải, unimodal, không outlier, n ≥ 40

5.1 Kiểm định trung bình tổng thể (tt.)

- **Bậc tự do** (*degrees of freedom*)
  - số lượng tối đa giá trị quan sát có thể thay đổi 1 cách độc lập

    Giả sử mẫu S có kích thước là n: $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

    a) Giá trị của các quan sát trong S có thể tùy ý (không có quan hệ ràng buộc nào) $\Rightarrow$ df = n

    b) Nếu biết giá trị của $\overline{S}$ thì giá trị của x_i sẽ "*bị ràng buộc*" (không còn tự do) bởi $\overline{S}$ và tập DF = S – { x_i }
    $\Rightarrow$ df = (n – 1)

5.1 Kiểm định trung bình tổng thể (tt.)

- **Kiểm định T** (*T-test*)
  - kiểm định sự khác biệt về đặc trưng (tham số) giữa 2 nhóm
  - kiểm định sự khác biệt bên trong 1 nhóm
  - t-score càng lớn $\Rightarrow$ sự khác biệt giữa các nhóm càng lớn
  - t-score càng lớn $\Rightarrow$ khả năng mà kết quả lặp lại rất cao
- **Các loại T-test**
  - *One sample*: kiểm định mean của 1 nhóm với mean đã cho
  - *Independent samples*: so sánh means của 2 nhóm
  - *Paired sample*: so sánh means của 1 nhóm (nhiều lần/mẫu)

5.1 Kiểm định trung bình tổng thể (tt.)

- **Trường hợp CHƯA BIẾT σ trước khi lấy mẫu**

VD: Thang điểm đánh giá sân bay: 0 đến 10; ngưỡng 7.0 là tốt. Lấy ý kiến 60 hành khách, điểm đánh giá trung bình là 7.25, với độ lệch chuẩn của mẫu s = 1.052. Với mức ý nghĩa α = .05, sân bay có thật sự tốt ?

$$1-sided: right$$

$$\begin{cases} H_0: & \mu \le \mu_0 = 7 \\ H_a: & \mu > \mu_0 = 7 \end{cases} \qquad t = \frac{(7.25-7)}{1.052/\sqrt{60}} = 1.84$$

Phân phối mẫu có bậc tự do là 59. Kiểm định phía phải nên p là diện tích dưới đường phân phối, bên phải của t = 1.84

$$t_{59,0.05} = 1.671 < t = 1.84 < 2.001 = t_{59,0.025}$$

$$\Rightarrow \quad 0.025 < p < 0.05 = \alpha \quad \Rightarrow \text{ BÁC BỎ } H_0.$$

5.1 Kiểm định trung bình tổng thể (tt.)

- **Trường hợp CHƯA BIẾT σ trước khi lấy mẫu**

VD: Tuổi thọ trung bình của bóng đèn là 65 giờ. Lấy ngẫu nhiên 21 bóng đèn, có tuổi thọ trung bình là 62.5 giờ. Tuổi thọ của bóng đèn có được cải thiện hay không, với α = .01 và s_X = 3 ?

$$1-sided: left$$

$$\begin{cases} H_0: & 65 = \mu_0 \le \mu \\ H_a: & 65 = \mu_0 > \mu \end{cases}$$

$$t = \frac{(62.5-65)}{3/\sqrt{21}} = -3.82$$

$$t = -3.82 < -t_{20,0.01} = -2.528 \Rightarrow \text{ BÁC BỎ } H_0.$$

5. Hypothesis Testing

5.1 Kiểm định trung bình tổng thể μ

5.2 Kiểm định (so sánh) trung bình 2 mẫu

- 2 mẫu độc lập đã biết phương sai
- 2 mẫu độc lập chưa biết phương sai
- 2 mẫu phụ thuộc

5.3 Kiểm định Chi bình phương

5.4 Kiểm định A/B

5.5 Phân tích phương sai (Analysis Of Variance – ANOVA)

5.2 Kiểm định trung bình 2 mẫu

❑ **Kiểm định 2 mẫu độc lập** (*Independent Samples Test*)

VD: sự khác biệt giữa chiều cao trung bình của SV nam và nữ

- sự khác biệt giữa means của 2 nhóm có phải là do tình cờ ?
- biến độc lập, kiểu categorical (VD: giới tính) ⇒ tạo 2 nhóm
- biến phụ thuộc X (VD: chiều cao), liên tục ~ phân phối chuẩn

5.2 Kiểm định trung bình 2 mẫu (tt.)

❑ **Kiểm định z với 2 mẫu độc lập** (*Independent Samples Test*)

- Trường hợp ĐÃ BIẾT các phương sai trước khi lấy mẫu

Giả thuyết	$1-sided: right$ $\begin{cases} H_0: & \mu_X - \mu_Y \le D_0 \\ H_a: & \mu_X - \mu_Y > D_0 \end{cases}$	$1-sided: left$ $\begin{cases} H_0: & D_0 \le \mu_X - \mu_Y \\ H_a: & D_0 > \mu_X - \mu_Y \end{cases}$	$2-sided$ $\begin{cases} H_0: & \mu_X - \mu_Y = D_0 \\ H_a: & \mu_X - \mu_Y \ne D_0 \end{cases}$
Thống kê kiểm định	$z = \dfrac{(\bar{x}-\bar{y})-D_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n_X}+\dfrac{\sigma_Y^2}{n_Y}}}$		

5.2 Kiểm định trung bình 2 mẫu (tt.)

❑ **Kiểm định t với 2 mẫu độc lập** (*Independent samples T-test*)

- Trường hợp CHƯA BIẾT các phương sai (*khác nhau*)

$$t = \frac{(\bar{x}-\bar{y})-D_0}{\sqrt{\dfrac{s_X^2}{n_X}+\dfrac{s_Y^2}{n_Y}}} \qquad df = \frac{\left(\dfrac{s_X^2}{n_X}+\dfrac{s_Y^2}{n_Y}\right)^2}{\dfrac{1}{(n_X-1)}\left(\dfrac{s_X^2}{n_X}\right)^2+\dfrac{1}{(n_Y-1)}\left(\dfrac{s_Y^2}{n_Y}\right)^2}$$

s_X, s_Y: các phương sai mẫu

df: bậc tự do (*degrees of freedom*)

5.2 Kiểm định trung bình 2 mẫu (tt.)

- **Kiểm định t với 2 mẫu độc lập** (*Independent samples T-test*)

  VD: Kiểm định $\mu_X = \mu_Y \Rightarrow$ 2-sided test $\Rightarrow \alpha/2$

  X = { 19.7, 20.4, 19.6, 17.8, 18.5, 18.9, 18.3, 18.9, 19.5, 21.95 }

  Y = { 28.3, 26.7, 20.1, 23.3, 25.2, 22.1, 17.7, 27.6, 20.6, 13.7,
  23.2, 17.5, 20.6, 18, 23.9, 21.6, 24.3, 20.4, 23.9, 13.3 }

  $\bar{X}$ = 19.4, s^2_X = 1.4, $\bar{Y}$ = 21.6, s^2_Y = 17.1

  t = 2.24787, df = 24.38 $\rightarrow$ 24

  Tra t-table: (α = 0.05, df = 24) $\Rightarrow t_{\alpha/2,df}$ = 2.064 < t = 2.24787

  $\Rightarrow$ bác bỏ $H_0 \Rightarrow$ 2 means khác nhau

5.2 Kiểm định trung bình 2 mẫu (tt.)

- **Kiểm định t với 2 mẫu độc lập** (*Independent samples T-test*)
  - Trường hợp CHƯA BIẾT các phương sai (*giống nhau*)

$$t = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - D_0}{\sqrt{\frac{s_X^2}{n_X} + \frac{s_Y^2}{n_Y}}}$$

s_X, s_Y: các phương sai mẫu

($n_X + n_Y - 2$): bậc tự do

5.2 Kiểm định trung bình 2 mẫu (tt.)

- **Kiểm định t với 2 mẫu độc lập** (*Independent samples T-test*)

VD: $X = \{ 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6 \}$

$Y = \{ 1, 2, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 9 \}$

$t = -1.69, \quad df = (10 + 10 - 2) = 18$

Tra t-table: $(\alpha = 0.05, df = 18) \Rightarrow t_{\alpha/2,df} = 2.101$

$-2.101 = -t_{\alpha/2,df} < t = -1.69 < t_{\alpha/2,df} = 2.101$

$\Rightarrow$ không thể bác bỏ H_0

(p-value = 0.1073 > α)

5.2 Kiểm định trung bình 2 mẫu (tt.)

- **Kiểm định mẫu phụ thuộc/liên quan** (*Paired / correlated T-test*)
  - 2 mẫu có những cặp đôi (matched pairs) cùng đơn vị đo lường
  - đo lường nhiều lần trên 1 tổng thể ('đo' bệnh nhân TRƯỚC và SAU khi điều trị)

5.2 Kiểm định trung bình 2 mẫu (tt.)

- **Kiểm định mẫu phụ thuộc/liên quan** (*Paired / correlated T-test*)

$$d_i = (x_i - y_i) \qquad \bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} \qquad s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (d_i - \bar{d})^2}{(n-1)}}$$

$$t = \frac{\bar{d}}{s_d / \sqrt{n}}$$

df = (n – 1)

5.2 Kiểm định trung bình 2 mẫu (tt.)

- **Kiểm định mẫu phụ thuộc/liên quan** (*Paired / correlated T-test*)

VD: X = { 6.0, 5.0, 7.0, 6.2, 6.0, 6.4 }

Y = { 5.4, 5.2, 6.5, 5.9, 6.0, 5.8 }

$$\bar{d} = \frac{1.8}{6} = 0.3 \qquad s_d = \sqrt{\frac{0.56}{5}} = 0.335$$

$$t = \frac{0.3}{0.335 / \sqrt{6}} = 2.20$$

Tra t-table: (α = 0.05, df = 5) $\rightarrow$ $t_{\alpha/2,df}$ = 2.571

–2.571 = $-t_{\alpha/2,df}$ < t = 2.20 < $t_{\alpha/2,df}$ = 2.571

$\Rightarrow$ không thể bác bỏ H_0

(p-value = 0.08 > α)

5. Hypothesis Testing

5.1 Kiểm định trung bình tổng thể μ

5.2 Kiểm định (so sánh) trung bình 2 mẫu

5.3 Kiểm định Chi bình phương

5.4 Kiểm định A/B

5.5 Phân tích phương sai (Analysis Of Variance – ANOVA)

5.3 Kiểm định Chi bình phương

❑ **Phân phối Chi bình phương χ^2** (*Chi-squared distribution*)

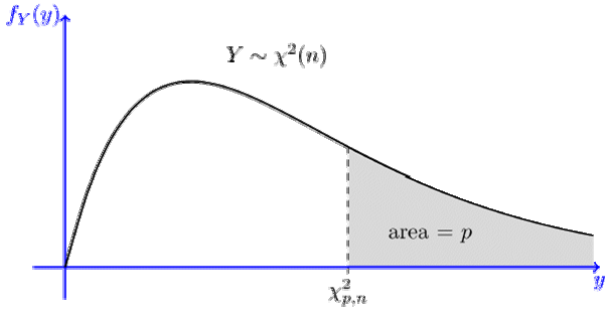
Các biến ngẫu nhiên, độc lập: $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n \sim N(0, 1)$

$$Y = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2 \sim \chi^2(n)$$

với n bậc tự do

$$f(y) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{n}{2}}, \quad \forall y > 0 \qquad \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{(\alpha-1)} e^{-x} dx, \quad \forall \alpha > 0$$

- E[Y] = n
- Var(Y) = 2n
- n lớn → tiệm cận phân phối chuẩn



5.3 Kiểm định Chi bình phương (tt.)

❑ **Kiểm định <u>tính độc lập</u> của 2 biến kiểu phân loại** (*categorical*)

X có thể lấy các giá trị (categories/levels) $x_1, x_2, \ldots, x_m$

Y có thể lấy các giá trị (categories/levels) $y_1, y_2, \ldots, y_n$

Giả thuyết:

H_0: X và Y độc lập

H_a: X và Y không độc lập

5.3 Kiểm định Chi bình phương (tt.)

❑ **Kiểm định tính độc lập của 2 biến kiểu phân loại** (*categorical*)

- Bảng tương quan (*contingency table*): $O \in M_{m,n}(\}^{+}), o_{ij} \geq 5$

$$\begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \hline x_1 & o_{11} & o_{12} & \ldots & o_{1n} \\ x_2 & o_{21} & o_{22} & \ldots & o_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m & o_{m1} & o_{m2} & \ldots & o_{mn} \end{array}$$

*tổng giá trị dòng **i***

$$R_i = \sum_{j=1}^{n} o_{ij}$$

$$C_j = \sum_{i=1}^{m} o_{ij}$$

*tổng giá trị cột **j***

$$S = \sum_{i=1}^{m} R_i = \sum_{j=1}^{n} C_j$$

tổng giá trị ma trận

5.3 Kiểm định Chi bình phương (tt.)

❑ **Kiểm định tính độc lập của 2 biến kiểu phân loại** (*categorical*)

- trị thống kê χ^2

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(o_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}} \qquad e_{ij} = \frac{R_i C_j}{S}$$

o_{ij}: giá trị quan sát (observation)

e_{ij}: giá trị kỳ vọng (expectation)

bậc tự do df = (m – 1)(n – 1)

- miền bác bỏ $H_0 = [\lambda_\alpha^2, \infty)$: nếu giá trị χ^2 > critical value λ_α^2 (tra bảng) thì có sự phụ thuộc đáng kể giữa 2 biến
- giá trị χ^2 càng nhỏ → mối quan hệ càng lớn

5.3 Kiểm định Chi bình phương (tt.)

❑ **Kiểm định tính độc lập của 2 biến kiểu phân loại** (*categorical*)

- các quan sát (observations) và các kỳ vọng (expectations)

	B1		B2		B3		
	O	E	O	E	O	E	
A1	91	**79.55**	104	**111.8**	235	**238.7**	430
A2	39	**29.6**	73	**41.6**	48	**88.8**	160
A3	18	**38.85**	31	**54.6**	161	**116.6**	210
	148		208		444		800

$\chi^2 = 86.02$

Tra bảng χ^2: ($\alpha = 0.05$, df = 4) → $\chi_{\alpha,df} = 9.488$

$9.488 = \chi_{\alpha,df} < \chi^2 = 86.02$

⇒ bác bỏ H_0 ⇒ có mối quan hệ phụ thuộc

5. Hypothesis Testing

5.1 Kiểm định trung bình tổng thể μ

5.2 Kiểm định (so sánh) trung bình 2 mẫu

5.3 Kiểm định Chi bình phương

5.4 Kiểm định A/B

5.5 Phân tích phương sai (Analysis Of Variance – ANOVA)

5.4 Kiểm định A/B

- **Kiểm định A/B** (*A/B testing* / *split testing*)
  - so sánh hiệu quả của 2 phương án
  - hiệu quả dựa trên tỉ lệ chuyển đổi (*conversion rate – CR*): số lượng tương tác / tổng số thử nghiệm
  - áp dụng kiểm định χ^2

    A (hay B) có 2 mức: $|DOM(A)| = 2$

    H_0: Không có sự khác biệt về CR giữa A và B

    H_a: Có sự khác biệt về CR giữa A và B

5. Hypothesis Testing

5.1 Kiểm định trung bình tổng thể μ

5.2 Kiểm định (so sánh) trung bình 2 mẫu

5.3 Kiểm định Chi bình phương

5.4 Kiểm định A/B

5.5 Phân tích phương sai (Analysis Of Variance – ANOVA)

5.5 Phân tích ANOVA

❑ **Kiểm định trung bình của NHIỀU tổng thể** (*One-way ANOVA*)

- mối quan hệ giữa một biến phụ thuộc (định lượng, liên tục) với một biến độc lập (phân hoạch dữ liệu thành k nhóm)
- k = 2: áp dụng t-test để so sánh trung bình của 2 nhóm

  VD: Chiều cao trung bình ↔ giới tính (2 nhóm: Nam, Nữ)
- k > 2: áp dụng t-test để so sánh từng cặp đôi

  Số lần kiểm định: $n = \binom{k}{2} = \frac{k!}{2!(k-2)!}$ → không hiệu quả

  Nếu 1 lần t-test có xs sai lầm loại I là α thì sai lầm tích lũy: ($n\alpha$)

⇒ Phương pháp ANOVA (*Ronald FISHER*)

5.5 Phân tích ANOVA (tt.)

- **Kiểm định trung bình của NHIỀU tổng thể** (*One-way ANOVA*)

  k nhóm từ biến độc lập P (các dân tộc)

  Sự khác nhau/biến thiên của biến phụ thuộc X (chiều cao):

  - giữa những cá thể trong một nhóm (*within-group variation*) s_W: hoàn toàn do yếu tố ngẫu nhiên
  - giữa những cá thể thuộc k nhóm (*between-group variation*) s_B: vừa do yếu tố ngẫu nhiên, vừa do đặc trưng của từng nhóm (do tác động của biến độc lập)

5.5 Phân tích ANOVA (tt.)

- **Kiểm định trung bình của NHIỀU tổng thể** (*One-way ANOVA*)

  Phân tích tỉ số phương sai:

$$F = \frac{s_B}{s_W} = \frac{s_{random} + s_P}{s_{random}}$$

  - Nếu $F \approx 1 \Rightarrow s_P$ nhỏ: tác động của P không đáng kể, nghĩa là sự biến thiên của X giữa các nhóm chủ yếu là do ngẫu nhiên $\Rightarrow$ không có sự khác biệt đáng kể giữa các $\mu_1, \ldots, \mu_k$
  - Nếu $F >> 1 \Rightarrow s_P$ lớn: P có tác động mạnh đến biến thiên của X $\Rightarrow$ có tối thiểu 1 sự khác biệt đáng kể giữa các $\mu_1, \ldots, \mu_k$

5.5 Phân tích ANOVA (tt.)

- **Kiểm định trung bình của NHIỀU tổng thể** (*One-way ANOVA*)
  - các quan sát độc lập
  - các quần thể có phương sai giống nhau
  - các quần thể có phân phối chuẩn

5.5 Phân tích ANOVA (tt.)

- **Kiểm định trung bình của NHIỀU tổng thể** (*One-way ANOVA*)

H_0: $\mu_1 = \ldots = \mu_k$

H_a: Có tối thiểu 1 sự khác biệt giữa các $\mu_1, \ldots, \mu_k$

Xét mẫu thứ j gồm n_j quan sát: $\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{n_j,j} \end{pmatrix} \rightarrow \bar{x}_j$

$\bar{x}$: TB toàn bộ dữ liệu (k nhóm)

Tổng bình phương (*sum of squares*) biến thiên trong nhóm:

$$SSW_j = \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 \qquad SSW = \sum_{j=1}^{k} SSW_j \qquad dfW = (n-k)$$

Tổng bình phương biến thiên giữa các nhóm:

$$SSB = \sum_{j=1}^{k} n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2 \qquad dfB = (k-1)$$

5.5 Phân tích ANOVA (tt.)

❑ **Kiểm định trung bình của NHIỀU tổng thể** (*One-way ANOVA*)

ANOVA table

	SS	df	Mean of squares (MS)
Within	SSW	$(n-k)$	$MSW = \frac{SSW}{dfW}$
Between	SSB	$(k-1)$	$MSB = \frac{SSB}{dfB}$

$$F = \frac{MSB}{MSW}$$

- F lớn hơn giá trị lý thuyết $F_{\alpha,dfB,\ dfW} \Rightarrow$ bác bỏ H_0 (có khác biệt)
- giá trị F càng lớn $\Rightarrow$ sự khác biệt càng lớn

5.5 Phân tích ANOVA (tt.)

❑ **Kiểm định trung bình của NHIỀU tổng thể** (*One-way ANOVA*)

VD: Dữ liệu của 4 nhóm đối tượng

A	B	C	D
8	7	28	26
9	17	21	16
11	10	26	13
4	14	11	12
7	12	24	9
8	24	19	10
5	11		11
	22		17
			15
Mean	7.4286	14.6250	21.5000	14.3333	Overall 14.4717
nj	7	8	6	9	30
SSB	347.2422	0.1879	296.3798	0.1724	643.9823
SSW	33.7143	247.8750	185.5000	212.0000	679.0893

Source	df	SS	MS
B	3	643.9823	214.6608
W	26	679.0893	26.1188
		F statistic	8.2186

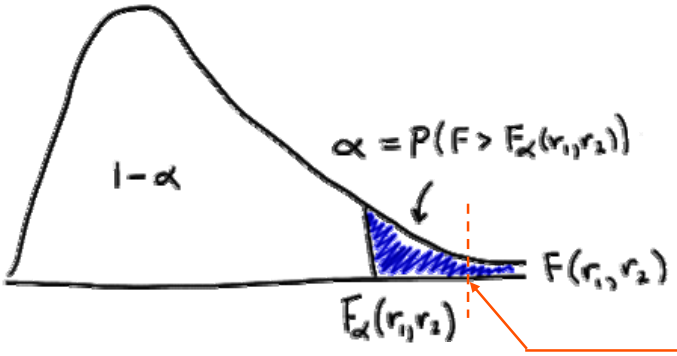
5.5 Phân tích ANOVA (tt.)

❑ **Kiểm định trung bình của NHIỀU tổng thể** (*One-way ANOVA*)

Tra F-table: $\alpha = .05$, $df_B = 3$, $df_W = 26 \rightarrow F_\alpha = 2.98 < F = 8.2126$

$\Rightarrow$ bác bỏ $H_0 \Rightarrow$ có sự khác biệt đáng kể

(hoặc trị số $p < \alpha \Rightarrow$ bác bỏ H_0)



https://newonlinecourses.science.psu.edu/stat414/node/294/ (10/2019)

5.5 Phân tích ANOVA (tt.)

❑ **Kiểm định trung bình của NHIỀU tổng thể** (*One-way ANOVA*)

VD: Dữ liệu của 4 nhóm đối tượng

A	B	C	D	
25	45	30	54	
30	55	29	60	
28	29	33	51	
36	56	37	62	
29	40	27	73	Overall
Mean				
nj				
SSB				
SSW				

5.5 Phân tích ANOVA (tt.)

❑ **Kiểm định trung bình của NHIỀU tổng thể** (*One-way ANOVA*)

- ANOVA không xác định rõ những (μ_i, μ_j) nào có sự khác biệt
- hậu kiểm (*post-hoc test*) khi cần xác định các (μ_i, μ_j) khác biệt: Least Significant Difference (LSD), Tukey HSD test, Scheffe's test, Bonferroni test, …

5.5 Phân tích ANOVA (tt.)

❑ **Kiểm định Tukey HSD** (*Tukey's Honest Significant Difference*)

H_0: $\mu_i = \mu_j$

H_a: $\mu_i \neq \mu_j$

$$HSD = \frac{\left|\bar{x}_i - \bar{x}_j\right|}{\sqrt{\frac{MSW}{k}}}$$

Tra bảng Q (*Studentized Range Distribution*): $Q_{\alpha,\, k,\, df = n - k}$

- Nếu các mẫu khác kích cỡ → kiểm định *Tukey-Kramer*

$$HSD = \frac{\left|\bar{x}_i - \bar{x}_j\right|}{\sqrt{\frac{MSW}{2}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}}$$

5.5 Phân tích ANOVA (tt.)

- **Kiểm định trung bình của NHIỀU tổng thể** (*One-way ANOVA*)
  - kiểm định các quần thể có phân phối chuẩn: Shapiro-Wilk test
  - kiểm định các quần thể có cùng σ: Levene test, Bartlett test, …

    $\rightarrow$ nếu KHÔNG cùng σ thì áp dụng kiểm định Welch

5.5 Phân tích ANOVA (tt.)

- **Kiểm định Levene**

H_0: $\sigma_1 = \ldots = \sigma_k$

H_a: Có tối thiểu 1 sự khác biệt giữa các $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$

$$L = \frac{(n-k)}{(k-1)} \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (\bar{x}_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (z_{ij} - \bar{x}_i)^2} \qquad z_{ij} = \left| x_{ij} - \bar{x}_i \right|$$

Tra bảng F: $F_{\alpha,\, k-1,\, df = n-k}$

5.5 Phân tích ANOVA (tt.)

❑ **Kiểm định Welch (không cùng phương sai)**

H_0: $\mu_1 = \ldots = \mu_k$

H_a: Có tối thiểu 1 sự khác biệt giữa các $\mu_1, \ldots, \mu_k$

$$W = \frac{(\bar{x} - \bar{y})}{\sqrt{\frac{s_X^2}{n_X} + \frac{s_Y^2}{n_Y}}} \qquad df = \frac{\left(\frac{s_X^2}{n_X} + \frac{s_Y^2}{n_Y}\right)^2}{\frac{1}{(n_X - 1)}\left(\frac{s_X^2}{n_X}\right)^2 + \frac{1}{(n_Y - 1)}\left(\frac{s_Y^2}{n_Y}\right)^2}$$

Tra bảng T: $T_{\alpha,\, df}$

5.5 Phân tích ANOVA (tt.)

❑ **Kiểm định trung bình của NHIỀU tổng thể** (*Two-way ANOVA*)

- biến độc lập A tạo thành m nhóm (trên DÒNG)
- biến độc lập B tạo thành n nhóm (trên CỘT)

	B_1	B_2	$\cdots$	B_n
A_1	S_{11}	S_{12}	$\cdots$	S_{1n}
A_2	S_{21}	S_{22}	$\cdots$	S_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	S_{m1}	S_{m2}	$\cdots$	S_{mn}

S_{ij}: các mẫu cùng kích thước $|S_{ij}| = r$

- tính phương sai theo DÒNG và theo CỘT

5.5 Phân tích ANOVA (tt.)

❑ **Kiểm định trung bình của NHIỀU tổng thể** (*Two-way ANOVA*)

VD:

Genotype	*Y*1	*Y*2	*Y*3	
*G*1	1.53	4.08	6.69	n = 3
*G*1	1.83	3.84	5.97	← mẫu S_{13}
*G*1	1.38	3.96	6.33	r = 3
*G*2	3.60	5.70	8.55	
*G*2	2.94	5.07	7.95	← mẫu S_{23}
*G*2	4.02	7.20	8.94	
*G*3	3.99	6.09	10.02	
*G*3	3.30	5.88	9.63	← mẫu S_{33}
*G*3	4.41	6.51	10.38	
*G*4	3.75	5.19	11.40	
*G*4	3.63	5.37	9.66	← mẫu S_{43}
*G*4	3.57	5.55	10.53	

m = 4

5.5 Phân tích ANOVA (tt.)

❑ **Kiểm định trung bình của NHIỀU tổng thể** (*Two-way ANOVA*)

Bước 1. Tính bình phương mỗi quan sát trong mẫu S_{ij} → **$S^{(2)}$**

$$S^{(2)} = \begin{array}{c|cccc} & B_1 & B_2 & \cdots & B_n \\ A_1 & S_{11}^2 & S_{12}^2 & \cdots & S_{1n}^2 \\ A_2 & S_{21}^2 & S_{22}^2 & \cdots & S_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_m & S_{m1}^2 & S_{m2}^2 & \cdots & S_{mn}^2 \end{array}$$

Tổng giá trị ma trận $S^{(2)}$: $\left|S^{(2)}\right| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} S_{ij}^{(2)}$

5.5 Phân tích ANOVA (tt.)

❑ **Kiểm định trung bình của NHIỀU tổng thể** (*Two-way ANOVA*)

Bước 2. Tính tổng từng DÒNG, từng CỘT của S → **S⁺**

cộng các giá trị trong mẫu

$$S^+ = \begin{array}{c|cccc|c} & B_1 & B_2 & \cdots & B_n & A_i^+ \\ \hline A_1 & S_{11}^+ & S_{12}^+ & \cdots & S_{1n}^+ & A_1^+ = \sum_{j=1}^{n} S_{1j}^+ \\ A_2 & S_{21}^+ & S_{22}^+ & \cdots & S_{2n}^+ & A_2^+ = \sum_{j=1}^{n} S_{2j}^+ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_m & S_{m1}^+ & S_{m2}^+ & \cdots & S_{mn}^+ & A_m^+ = \sum_{j=1}^{n} S_{mj}^+ \\ \hline B_j^+ & B_1^+ = \sum_{i=1}^{m} S_{i1}^+ & B_2^+ = \sum_{i=1}^{m} S_{i2}^+ & \cdots & B_n^+ = \sum_{i=1}^{m} S_{in}^+ & \left|S^+\right| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} S_{ij}^+ \end{array}$$

5.5 Phân tích ANOVA (tt.)

❑ **Kiểm định trung bình của NHIỀU tổng thể** (*Two-way ANOVA*)

Bước 3. Tính các tổng bình phương.

$$CM = \frac{\left|S^+\right|^2}{rmn} \qquad SS_T = \left|S^{(2)}\right| - CM$$

$$SS_A = \frac{\sum_{i=1}^{m}(A_i^+)^2}{rn} - CM \qquad SS_B = \frac{\sum_{j=1}^{n}(B_j^+)^2}{rm} - CM$$

$$SS_{AB} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} S_{ij}^{\ 2}}{r} - CM - SS_A - SS_B$$

$$SS_E = SS_T - SS_A - SS_B - SS_{AB}$$

5.5 Phân tích ANOVA (tt.)

❑ **Kiểm định trung bình của NHIỀU tổng thể** (*Two-way ANOVA*)

Bước 4. Lập bảng Two-way ANOVA.

Source	*SS*	*df*	*MS*	*F*
$Rows(A)$	SS_A	$df_A = (m-1)$	$MS_A = \frac{SS_A}{df_A}$	$F_A = \frac{MS_A}{MS_E}$
$Columns(B)$	SS_B	$df_B = (n-1)$	$MS_B = \frac{SS_B}{df_B}$	$F_B = \frac{MS_B}{MS_E}$
$Interaction(AB)$	SS_{AB}	$df_{AB} = (m-1)(n-1)$	$MS_{AB} = \frac{SS_{AB}}{df_{AB}}$	$F_{AB} = \frac{MS_{AB}}{MS_E}$
$Error$	SS_E	$df_E = mn(r-1)$	$MS_E = \frac{SS_E}{df_E}$	

5.5 Phân tích ANOVA (tt.)

❑ **Kiểm định trung bình của NHIỀU tổng thể** (*Two-way ANOVA*)

VD:

A	B1	B2	B3
A	1.53	4.08	6.69
A	1.83	3.84	5.97
A	1.38	3.96	6.33
B	3.60	5.70	8.55
B	2.94	5.07	7.95
B	4.02	7.20	8.94
C	3.99	6.09	10.02
C	3.30	5.88	9.63
C	4.41	6.51	10.38
D	3.75	5.19	11.40
D	3.63	5.37	9.66
D	3.57	5.55	10.53
E	1.71	3.60	6.87
E	2.01	5.10	6.93
E	2.04	6.99	6.84
F	3.96	5.25	9.84
F	4.77	5.28	9.87
F	4.65	5.07	10.08

Số lớp A (m)	6
Cỡ mẫu r	3
Số lớp B (n)	3
rab	54

5.5 Phân tích ANOVA (tt.)

- **Kiểm định trung bình của NHIỀU tổng thể** (*Two-way ANOVA*)

Bước 1. Tính bình phương mỗi quan sát (Y2)

A	B1	B2	B3	
A	2.34	16.65	44.76	
A	3.35	14.75	35.64	
A	1.90	15.68	40.07	
B	12.96	32.49	73.10	
B	8.64	25.70	63.20	
B	16.16	51.84	79.92	
C	15.92	37.09	100.40	
C	10.89	34.57	92.74	
C	19.45	42.38	107.74	
D	14.06	26.94	129.96	
D	13.18	28.84	93.32	
D	12.74	30.80	110.88	
E	2.92	12.96	47.20	
E	4.04	26.01	48.02	
E	4.16	48.86	46.79	
F	15.68	27.56	96.83	
F	22.75	27.88	97.42	
F	21.62	25.70	101.61	2139.08

5.5 Phân tích ANOVA (tt.)

- **Kiểm định trung bình của NHIỀU tổng thể** (*Two-way ANOVA*)

Bước 2. Tính tổng theo dòng và cột

A	B1	B2	B3	Ai (Total)
A	4.74	11.88	18.99	35.61
B	10.56	17.97	25.44	53.97
C	11.70	18.48	30.03	60.21
D	10.95	16.11	31.59	58.65
E	5.76	15.69	20.64	42.09
F	13.38	15.60	29.79	58.77
Bj (Total)	57.09	95.73	156.48	309.30

Bước 3. Tính các tổng biến thiên

CM 1771.6017

SS(T) 367.4733

5.5 Phân tích ANOVA (tt.)

❑ **Kiểm định trung bình của NHIỀU tổng thể** (*Two-way ANOVA*)

Bước 4. Lập bảng ANOVA

Source	SS	df	MS	F statistic
Rows (A)	58.5517	5	11.7103	32.7486
Columns (B)	278.9256	2	139.4628	390.0149
AB	17.1230	10	1.7123	4.7885
Error (Residuals)	12.8730	36	0.3576	

5. Hypothesis Testing (tt.)

❑ **Kiểm chứng/xác thực chéo** (*cross-validation*)

- Train/Test split: $D = Training\_set \cup Test\_set$
- k-fold

  Chia D thành k tập con: $(D_i \cap D_j = \varnothing)$ $|D_i| \approx |D_j|$

  k = i: $Test\_set = D_i$ $Training\_set = (D - D_i)$

  Error: $\varepsilon_i = f(Training\_set, Test\_set, \theta)$

  $\varepsilon = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_k) / k$

Tài liệu tham khảo

Anderson et al., *Statistics for Business and Economics*, Cengage, 2016.

Illowsky et al., *Introductory Statistics*, OpenStax, 2017.

Nguyễn Văn Tuấn, *Các bài giảng (youtube)*, 10/2019.