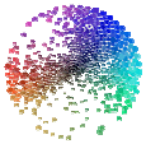


# B5. Descriptive Statistics

*Bổ sung cho giáo trình*

2021

## Nội dung bổ sung

1. **Thống kê mô tả**
2. **Các đại lượng về trung tâm**
3. **Các đại lượng về độ phân tán**
4. **Các đại lượng về hình dáng phân phối**

# 1. Thống kê mô tả

- **Dữ liệu** (*data*)
- **Thông tin** (*information*)
- **Tri thức** (*knowledge*)



# 1. Thống kê mô tả (tt.)

- **Analytics**
  - descriptive
  - predictive
  - prescriptive

# 1. Thống kê mô tả (tt.)

- **Hình thức mô tả (tóm tắt) dữ liệu**
  - bảng
  - biểu đồ, đồ họa
  - số: vị trí, độ phân tán, hình dáng, mối liên hệ



# 1. Thống kê mô tả (tt.)

- **Primary data**
  - Primary data is data that is collected by a researcher from first-hand sources, using methods like surveys, interviews, or experiments. It is collected with the research project in mind, directly from primary sources

- **Secondary data**
  - Secondary data is data gathered from studies, surveys, or experiments that have been run by other people or for other research.

*https://www.statisticshowto.datasciencecentral.com/primary-data-secondary/* (09/2019)

# 1. Thống kê mô tả (tt.)

- **Tập dữ liệu** (*data set*)
  - rời rạc (discrete data): có thể "đếm được" (counted)
  - liên tục (continuous data): có thể "đo lường được" (measured) trên một thang đo (scale) → đơn vị, thứ nguyên → chia nhỏ
  - phân nhóm (grouped data): class intervals
  - nominal, ordinal, numerical
- **Phân phối** ([*frequency*] *distribution*)

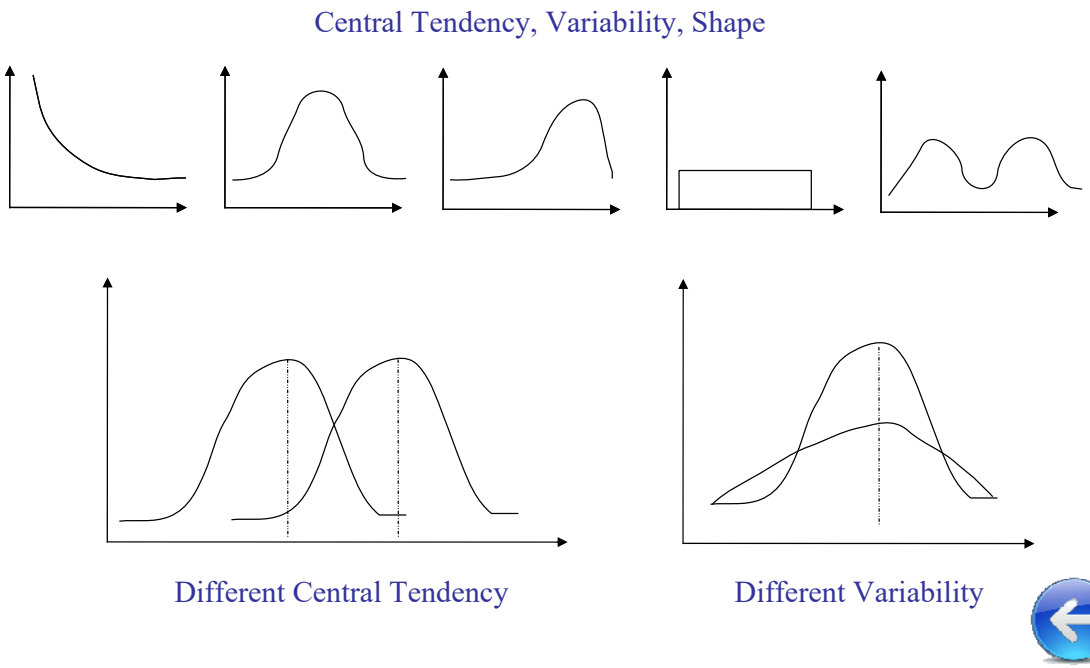
  tần số $f(x_i)$: số lần $x_i$ xuất hiện trong tập dữ liệu (mẫu, quần thể)



# 1. Thống kê mô tả (tt.)

- **Thuật ngữ**
  - *population*: tổng thể/quần thể (các đối tượng)
  - *sample*: mẫu (tập con của quần thể đang được khảo sát)

# 1. Thống kê mô tả (tt.)






# Nội dung bổ sung

1. Thống kê mô tả
2. **Các đại lượng về trung tâm**
3. Các đại lượng về độ phân tán
4. Các đại lượng về hình dáng phân phối

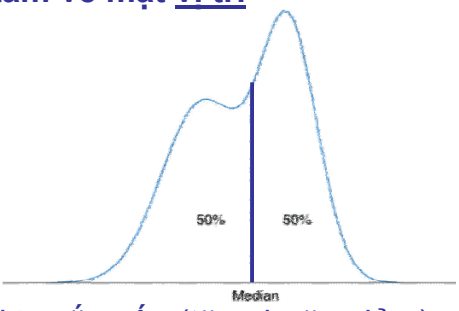
# 2. Các đại lượng về trung tâm

- **Một giá trị số thể hiện vị trí/xu thế "trung tâm" của tập dữ liệu → điểm đặc trưng, điển hình, đại diện**
  - median
  - Pythagorean means
  - mode



# 2. Các đại lượng về trung tâm (tt.)

- **Đại lượng trung vị (*median*): trung tâm về mặt vi trí**




  - phần tử $\tilde{x}$ tại điểm giữa của một dãy sắp xếp (tăng hoặc giảm)
  - |X| = 2k → median là giá trị trung bình của 2 phần tử ở giữa
  - ít bị tác động bởi outliers
  - thích hợp cho tập dữ liệu bất đối xứng
  - X = { 5, 7, 8, 8, 8, 8 } ?

# 2. Các đại lượng về trung tâm (tt.)

- **Đại lượng trung bình** (*mean*)**: trung tâm về mặt giá trị**

  Trung bình cộng (*arithmetic mean*)

$$\mu_{discrete} \rightarrow \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad n = |X|$$

$$\mu_{continuous} \rightarrow \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)$$

  F(x) = Pr(X ≤ x): *Cumulative Distribution Function*

  f(x) = F'(x): *Probability Density Function*, giới hạn ∀x: f(x) > 0

  - dễ bị tác động bởi outliers và các phân phối bất đối xứng
  - trung bình lọc (*trimmed mean*): loại bỏ x% giá trị nhỏ nhất và x% giá trị lớn nhất



# 2. Các đại lượng về trung tâm (tt.)

- **Đại lượng trung bình** (*mean*)**: trung tâm về mặt giá trị**

  VD: Đánh giá môn học ở các ĐH Mỹ: A(4), B(3), C(2), D(1), F(0). Một SV có 9 tín chỉ A, 15 tín chỉ B, 33 tín chỉ C và 3 tín chỉ D. Tính điểm trung bình của sinh viên.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \qquad n = |X| \qquad \textit{weighted mean}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{(9+15+33+3)}[9*4+15*3+33*2+3*1] = \frac{150}{60} = 2.5$$

# 2. Các đại lượng về trung tâm (tt.)

- **Đại lượng trung bình** (*mean*)**: trung tâm về mặt giá trị**

  Trung bình cộng (*arithmetic mean*)

  VD:

  Nhà $\xrightarrow{30km/h}$ Cơ quan $\xrightarrow{10km/h}$ Nhà. Vận tốc trung bình ?

  Nhà $\xrightarrow{30km/h}$ Cơ quan $\xrightarrow{35km/h}$ Nhà hàng. Vận tốc trung bình ?

  - thời gian di chuyển cho mỗi đoạn !
  - đơn vị và thứ nguyên



# 2. Các đại lượng về trung tâm (tt.)

- **Đại lượng trung bình** (*mean*)**: trung tâm về mặt giá trị**

  VD: Tỷ lệ nhiễm bệnh trên 3 mẫu

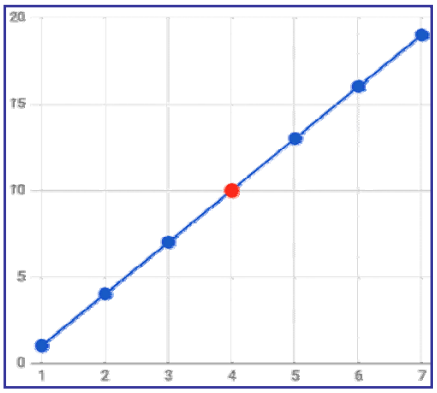
$$\frac{20}{20}=100\% \quad \frac{10}{60}\approx 17\% \quad \frac{60}{70}\approx 86\%$$

  Tỷ lệ nhiễm bệnh trung bình ?

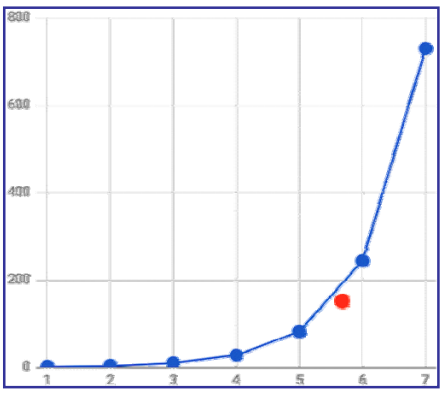
# 2. Các đại lượng về trung tâm (tt.)

❑ **Đại lượng trung bình** (*mean*)**: trung tâm về mặt giá tri**

VD: A = { 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 }  B = { 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 }




$\overline{A} = 10 = \widetilde{A}$




$27 = \widetilde{B} << \overline{B} \approx 156$



# 2. Các đại lượng về trung tâm (tt.)

❑ **Đại lượng trung bình** (*mean*)**: trung tâm về mặt giá tri**

VD: Số vốn 1 tỷ, lãi suất các năm: 2%, 5%, 7%, 8%, 10%.

Số tiền sau 5 năm ?

$V_0 = 10^9$

$V_1 = V_0 * (1 + r_1)$; $V_2 = V_1 * (1 + r_2) = V_0 * (1 + r_1) * (1 + r_2)$; …

$V_5 = V_0 * (1 + r_1) * (1 + r_2) * (1 + r_3) * (1 + r_4) * (1 + r_5) =$

$= 1{,}361{,}412{,}360$

Trong khi đó: $\bar{r} = (.02 + .05 + .07 + .08 + .10)/5$

$V_5^* = 10^9 * (1 + \bar{r})^5 = 1{,}363{,}666{,}440 \neq V_5$

# 2. Các đại lượng về trung tâm (tt.)

- **Đại lượng trung bình** (*mean*)**: trung tâm về mặt giá trị**

  Trung bình nhân (*geometric mean*): $x_i > 0$ (tỷ lệ %)

$$\mu_{Geometric} \to \bar{x} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \qquad \log \bar{x} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \log x_i\right)$$

VD:

Cách 1 (các mẫu riêng rẽ):

$$\bar{x}_1 = \left(\frac{20}{20} * \frac{10}{60} * \frac{60}{70}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0.52$$

Cách 2 (gộp chung các mẫu):

$$\bar{p} = (20*10*60)^{\frac{1}{3}} = 22.89 \qquad \bar{n} = (20*60*70)^{\frac{1}{3}} = 43.80$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\bar{p}}{\bar{n}} = \frac{22.89}{43.80} \approx 0.52 = \bar{x}_1$$

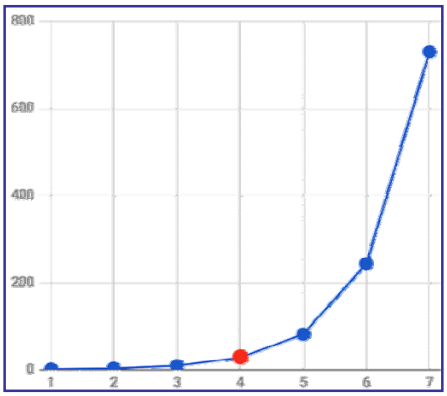


# 2. Các đại lượng về trung tâm (tt.)

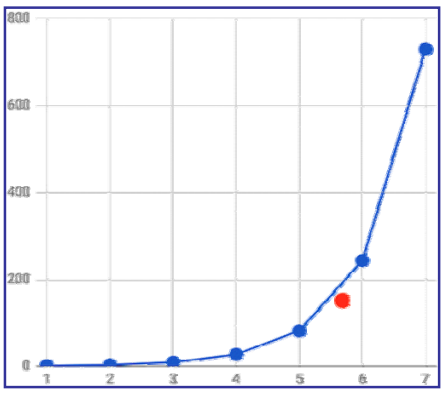
- **Đại lượng trung bình** (*mean*)**: trung tâm về mặt giá trị**

  Trung bình nhân (*geometric mean*):

VD: B = { 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 }




$\widetilde{B} = \overline{B}_{geo*}$




$\widetilde{B} << \overline{B}_{ari+}$

# 2. Các đại lượng về trung tâm (tt.)

- **Đại lượng trung bình** (*mean*)**: trung tâm về mặt giá tri**

  Trung bình nhân (*geometric mean*):

  VD: Vốn 1 tỷ với lãi suất các năm: 2%, 5%, 7%, 8%, 10%.

  Số tiền sau 5 năm ?

  $V_5$ = 1,361,412,360

  Ta có: $\bar{r}_{geo*} = (1.02*1.05*1.07*1.08*1.10)^{1/5}$

  $V_5^{**} = 10^9 * (\bar{r}_{geo*})^5 = 1{,}361{,}412{,}360 = V_5$



# 2. Các đại lượng về trung tâm (tt.)

- **Đại lượng trung bình** (*mean*)**: trung tâm về mặt giá tri**

  Trung bình nhân (*geometric mean*):

  - mức độ biến thiên lớn của dữ liệu:

  A = { 4, 4, 5, 5, 6, 6 }  B = { 2, 2, 4, 6, 8, 8 }

  $\bar{A}_{ari+} = \frac{1}{6}(4+4+5+5+6+6) = 5$  $\bar{B}_{ari+} = \frac{1}{6}(2+2+4+6+8+8) = 5$

  $\bar{A}_{geo*} = (4*4*5*5*6*6)^{\frac{1}{6}} \approx 4.93$  $\bar{B}_{geo*} = (2*2*4*6*8*8)^{\frac{1}{6}} \approx 4.28$

# 2. Các đại lượng về trung tâm (tt.)

❑ **Đại lượng trung bình** (*mean*)**: trung tâm về mặt giá trị**

Trung bình nhân (*geometric mean*):

- nhiều nguồn dữ liệu khác thang đo → không cần chuẩn hóa

$U_1$ (thang điểm 5): rating($U_1$, A) = 4.5; rating($U_1$, B) = 3.5

$U_2$ (thang điểm 100): rating($U_2$, A) = 70; rating($U_2$, B) = 80

Chuẩn hóa: $r_{1A} = 0.90 \quad r_{1B} = 0.70 \quad \Rightarrow \bar{A} = 0.80 \quad \bar{B} = 0.75$

$r_{2A} = 0.70 \quad r_{1B} = 0.80$

A tốt hơn B

Trung bình cộng: $\bar{A}_{ari+} = \frac{(4.5+70)}{2} = 37.25 \quad \bar{B}_{ari+} = \frac{(3.5+80)}{2} = 41.75$

**B tốt hơn A !?**

Trung bình nhân: $\bar{A}_{geo*} = \sqrt{(4.5*70)} \approx 17.75 \quad \bar{B}_{geo*} = \sqrt{(3.5*80)} \approx 16.73$



# 2. Các đại lượng về trung tâm (tt.)

❑ **Đại lượng trung bình** (*mean*)**: trung tâm về mặt giá trị**

Trung bình nhân (*geometric mean*):

- xử lý tín hiệu
- xử lý ảnh
- . . .

*https://en.wikipedia.org/wiki/Geometric_mean*

# 2. Các đại lượng về trung tâm (tt.)

- **Đại lượng trung bình** (*mean*)**: trung tâm về mặt <u>giá trị</u>**

  Trung bình điều hòa (*harmonic mean*): $x_i > 0$, là những tỷ số giữa 2 đại lượng khác đơn vị (vận tốc, gia tốc, …)

$$\mu_{Harmonic} \rightarrow \bar{x} = n.\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)^{-1}$$

  - nghịch đảo của trung bình cộng của tập dữ liệu: $\left\{\frac{1}{x_i}\right\}_{i=1}^{n}$
  - trung bình các tỷ số dựa trên cùng tử số, khác mẫu số

    <u>VD</u>: vận tốc TB (km/h) → { $x_i$ } gồm những vận tốc đo được trong những khoảng thời gian khác nhau



# 2. Các đại lượng về trung tâm (tt.)

- **Đại lượng trung bình** (*mean*)**: trung tâm về mặt <u>giá trị</u>**

  Trung bình điều hòa (*harmonic mean*):

  <u>VD</u>: Nhà $\xrightarrow{30km/h}$ Cơ quan $\xrightarrow{10km/h}$ Nhà. d = 5km. Vận tốc TB ?

$$\bar{v}_{ari+} = \frac{(30+10)}{2} = 20km/h$$

  Trong khi đó, thời gian đi ($t_1$) và về ($t_2$) không giống nhau:

$$t_1 = \frac{5km}{30km/h} = \frac{1}{6}h = 10\min \qquad t_2 = \frac{5km}{10km/h} = \frac{1}{2}h = 30\min$$

$$t = (t_1 + t_2) = 40\min$$

$$\bar{v}_{weighted\_mean} = \left(30.\frac{10}{40} + 10.\frac{30}{40}\right) = 15km/h$$

$$\bar{v}_{har/} = 2.\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{10}\right)^{-1} = 2.\frac{30}{4} = 15km/h$$

# 2. Các đại lượng về trung tâm (tt.)

- **Đại lượng trung bình** (*mean*)**: trung tâm về mặt giá trị**

  Trung bình điều hòa có trọng số (*weighted harmonic mean*):

$$\mu_{Weighted\_Harmonic} \rightarrow \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{x_i}}$$



# 2. Các đại lượng về trung tâm (tt.)

- **Đại lượng trung bình** (*mean*)**: trung tâm về mặt giá trị**

  VD: Ngôn ngữ Python

  Hàm: statistics.geometric_mean() # Python 3.8

  statistics.harmonic_mean()

  scipy.stats.gmean()

  scipy.stats.hmean()

# 2. Các đại lượng về trung tâm (tt.)

- **Đại lượng trung bình** (*mean*)**: trung tâm về mặt giá trị**

  Trung bình điều hòa có trọng số (*weighted harmonic mean*):

  - xử lý hợp kim
  - P/E (Price-Earning)
  - . . .

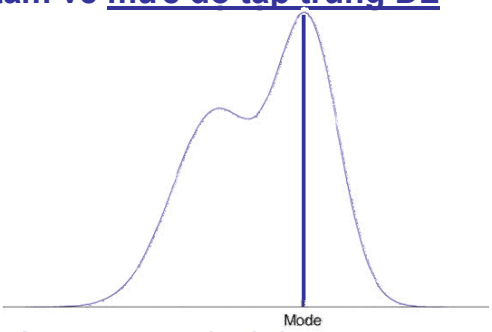
  *https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_mean*



# 2. Các đại lượng về trung tâm (tt.)

- **Đại lượng yếu vị** (*mode*): **trung tâm về mức độ tập trung DL**

$$\mu o \rightarrow \hat{x} = \arg\max_{x_i \in X} f(x_i)$$




  - có thể áp dụng cho numerical và non-numerical data
  - có thể nhiều modes cho 1 distribution (*bi-modal*, *multi-modal*)
  - dữ liệu phân phối đều ? dữ liệu liên tục ?
  - grouped data: mode của groups → mid point của group_mode

    X = { (lần chạy thứ i, t.gian chạy $t_i$) } ⇒ phụ thuộc phân nhóm

## 2. Các đại lượng về trung tâm (tt.)

- **Ví dụ: Thu thập dữ liệu nhiệt độ (12g00) mỗi ngày**
  - *mean*: sự thay đổi nhiệt độ giữa các tháng trong năm
  - *mode*: phương án thích nghi
  - *median*: những nơi có thay đổi đột biến, bất thường về nhiệt độ



## Nội dung bổ sung

1. Thống kê mô tả
2. Các đại lượng về trung tâm
3. **Các đại lượng về độ phân tán**
4. Các đại lượng về hình dáng phân phối

# 3. Các đại lượng về độ phân tán

- **Đánh giá 2 tập dữ liệu có cùng mean, median, mode**
  - mức độ biến thiên (variability) của dữ liệu
  - mức độ phân tán, dàn trải (spread) của dữ liệu
  - xu thế phân tán khỏi giá trị trung tâm (điển hình)
  - *range, percentile, quartile, interquartile range, variance, standard deviation*



# 3. Các đại lượng về độ phân tán (tt.)

- **Khoảng biến thiên** (*range*)**: ước lượng ban đầu về độ phân tán**

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

  - độ lệch giữa max và min (KHÔNG phải các giá trị max và min)
  - "độ rộng" (độ dàn trải) của tập dữ liệu
  - khi có outliers ở 2 đầu mút ?
  - tập dữ liệu bất đối xứng (bị "lệch") ?

# 3. Các đại lượng về độ phân tán (tt.)

- **[Bách] phân vị** (*percentile*): **p ∈ (0, 100) → ngưỡng giá trị $v_p$**
  - có ít nhất p% các quan sát có giá trị ≤ $v_p$
  - có ít nhất (100 – p)% các quan sát có giá trị ≥ $v_p$



# 3. Các đại lượng về độ phân tán (tt.)

- **[Bách] phân vị** (*percentile*): **p ∈ (0, 100) → ngưỡng giá trị $v_p$**

Các bước tính giá trị ($v_p$) của phân vị thứ p

**B1.** Sắp xếp n quan sát theo thứ tự tăng dần.

**B2.** Tính chỉ số i:

$$i = \frac{p * n}{100}$$

**B3.** Nếu chỉ số i KHÔNG phải là số nguyên thì làm tròn chỉ số i thành số nguyên tiếp theo và sẽ là vị trí của phân vị thứ p

Nếu chỉ số i LÀ số nguyên thì giá trị $v_p$ sẽ là trung bình cộng của hai giá trị ở vị trí thứ i và (i + 1)

# 3. Các đại lượng về độ phân tán (tt.)

- **[Bách] phân vị** (*percentile*): **p ∈ (0, 100) → ngưỡng giá trị $v_p$**

  VD: Cho mẫu dữ liệu

  { 3310, 3355, 3450, 3480, 3480, 3490, 3520, 3540, 3550, 3650, 3730, 3925 }

  Phân vị thứ 85: i = (85 * 12) / 100 = 10.2

  Vì i không phải số nguyên nên làm tròn 11

  P85 = D[11] = 3730

  Phân vị thứ 50: i = (50 * 12) / 100 = 6

  Vì i là số nguyên nên lấy trung bình D[6], D[7]

  P50 = (3490 + 3520) / 2 = 3505 (= median !)



# 3. Các đại lượng về độ phân tán (tt.)

- **[Bách] phân vị** (*percentile*): **p ∈ (0, 100) → ngưỡng giá trị $v_p$**

  VD: Cho mẫu dữ liệu

  D = { 27, 25, 20, 15, 30, 34, 28, 25 }

  S = { 15, 20, 25, 25, 27, 28, 30, 34 }

  P20 =

  P25 =

  P65 =

  P75 =

# 3. Các đại lượng về độ phân tán (tt.)

- **[Bách] phân vị** (*percentile*): **p ∈ (0, 100) → ngưỡng giá trị $v_p$**

  VD:

  Dữ liệu: D = { 8, 9, 12, 14.5, 15.5, 17, 18 }

  P35 ?

  - Excel: PERCENTILE(D, .35) = 12.25
  - R: QUANTILE(D, c(.35)) = 12.25



# 3. Các đại lượng về độ phân tán (tt.)

- **[Bách] phân vị** (*percentile*): **p ∈ (0, 100) → ngưỡng giá trị $v_p$**

  VD: Ngôn ngữ Python

  Hàm: numpy.percentile()

  - chỉ số:

$$i = \frac{p(n-1)}{100} + 1$$

  - nội suy (*interpolation*): linear, lower, upper, midpoint, nearest

# 3. Các đại lượng về độ phân tán (tt.)

- **Tứ phân vị** (*quartile*)
  - |Q1| = |Q2| = |Q3| = |Q4| = 25%

    Q1 = P25

    Q2 = P50 (median)

    Q3 = P75
  - hạn chế tác động của những outliers ở 2 đầu mút



# 3. Các đại lượng về độ phân tán (tt.)

- **Tứ phân vị** (*quartile*)

  VD: Danh sách độ tuổi nhân viên của công ty

  D = { 18, 20, 25, 25, 25, 26, 27, 27, 28, 33, 36, 37, 40, 40, 42, 45, 46, 48, 53, 54 }

  a. Tính mean và mode.

  mean = 695 / 20 = 34.75; mode = 25

  b. Tính Q1 và Q3.

  Q1 = (S[5] + S[6]) / 2 = 25.5; Q3 = (S[15] + S[16]) / 2 = 43.5

  c. Giải thích ý nghĩa của P32.

# 3. Các đại lượng về độ phân tán (tt.)

- **Khoảng trải giữa** (*InterQuartile Range – IQR*)

  IQR = (Q3 – Q1)

  - độ biến thiên của 50% quan sát ở giữa
  - hữu dụng khi so sánh 2 tập dữ liệu (~ means, ~ medians)



# 3. Các đại lượng về độ phân tán (tt.)

- **Phương sai** (*variance*) **và độ lệch chuẩn** (*standard deviation*)

Quần thể: $$Var(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i^{\,2} - \mu^2 = \sigma^2$$

Mẫu: $$s^2 = \frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2} - \frac{n}{(n-1)}\bar{x}^2$$

  - sự phân bố của các quan sát xung quanh giá trị trung bình
  - phân phối chuẩn (normal distribution) >> skewed distribution
  - tác động của outliers → gia tăng kích thước tập dữ liệu

# 3. Các đại lượng về độ phân tán (tt.)

- **VD: Cho mẫu gồm các giá trị**

  D = { 27, 25, 20, 15, 30, 34, 28, 25 }

  S =

  a. Khoảng biến thiên:

  b. Khoảng trải giữa:

  c. Phương sai:



# 3. Các đại lượng về độ phân tán (tt.)

- **VD: Mẫu dữ liệu về thời gian chữa trị Covid-19:**

  10-14 ngày: 4

  15-19 ngày: 8

  20-24 ngày: 5

  25-29 ngày: 2

  30-34 ngày: 1

Tính trung bình và phương sai của thời gian chữa trị Covid-19.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i M_i = \frac{380}{20} = 19 \qquad s^2 = \frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n} f_i (M_i - \bar{x})^2 = \frac{570}{19} = 30$$

# 3. Các đại lượng về độ phân tán (tt.)

❑ **Phương sai** (*variance*) **và độ lệch chuẩn** (*standard deviation*)

- Nếu tập dữ liệu có tính đối xứng:

$$s = \frac{(x_{\max} - x_{\min})}{\sqrt{n}} \qquad n < 12$$

$$s = \frac{(x_{\max} - x_{\min})}{4} \qquad 20 < n < 40$$

$$s = \frac{(x_{\max} - x_{\min})}{5} \qquad n \approx 100$$

$$s = \frac{(x_{\max} - x_{\min})}{6} \qquad 400 < n$$



# 3. Các đại lượng về độ phân tán (tt.)

❑ **Hệ số biến thiên** (*coefficient of variation*)

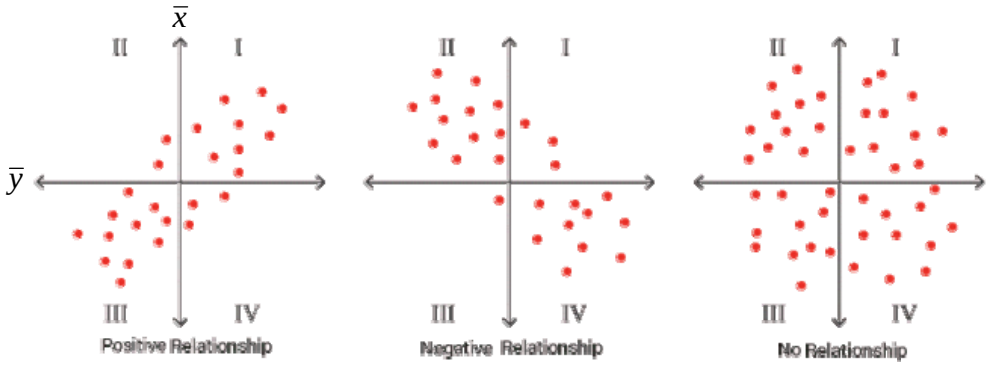
$$CV = \frac{\sigma}{\mu}$$

- so sánh mức độ phân tán của các quần thể (hay là các mẫu) có sự khác nhau về trung bình và phương sai

# 3. Các đại lượng về độ phân tán (tt.)

❑ **Hiệp phương sai** (*covariance*)

- mối quan hệ giữa 2 yếu tố (biến): $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$
- dữ liệu định lượng (hạn chế với rating scales)





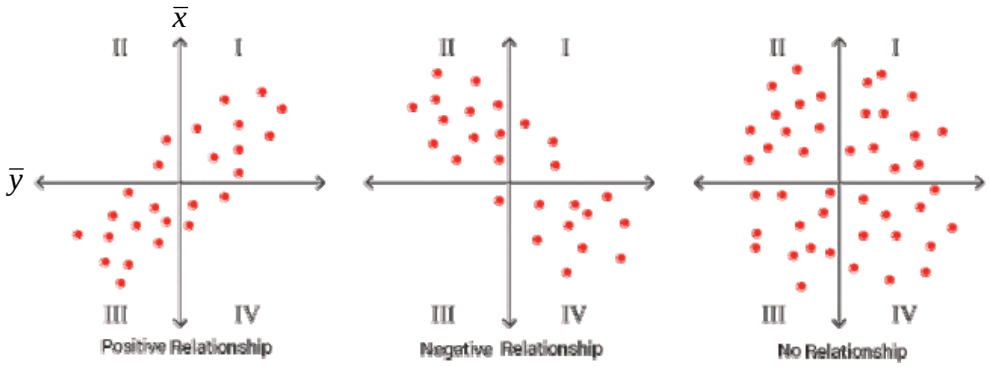

# 3. Các đại lượng về độ phân tán (tt.)

❑ **Hiệp phương sai** (*covariance*)

$$s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)$$

$$s_{xy} = \frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$



# 3. Các đại lượng về độ phân tán (tt.)

❑ **Hiệp phương sai** (*covariance*)

- hạn chế khi dùng để đo cường độ của mối quan hệ

  Mối quan hệ giữa chiều cao (cm) và cân nặng (kg)

  $H_{cm}$ = { 162, 165, 168 }  $W_{kg}$ = { 50, 56, 60 }

  covariance($H_{cm}$, $W_{kg}$ ) = 15.00

  Thay đổi đơn vị: chiều cao (inch) và cân nặng (lb)

  $H_{inch} = H_{cm} / 2.54$  $W_{lb} = W_{kg} \times 2.20$

  covariance($H_{inch}$, $W_{ib}$ ) = 12.99

  $\Rightarrow$ cường độ bị thay đổi nhưng thực tế mối quan hệ không đổi

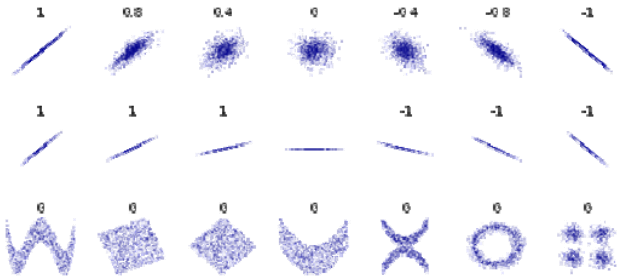


# 3. Các đại lượng về độ phân tán (tt.)

❑ **Hệ số tương quan** (*Pearson correlation*)

$$correlation(x,y) = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}).(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.(y_i - \bar{y})^2}}$$

- x, y độc lập $\Rightarrow$ correlation(x, y) = 0; điều ngược lại không đúng




*www.wikipedia.org* (09/2019)

# 3. Các đại lượng về độ phân tán (tt.)

- **Hệ số tương quan** (*Pearson correlation*)

$H_{cm}$ = { 162, 165, 168 } $W_{kg}$ = { 50, 56, 60 }

correlation($H_{cm}$, $W_{kg}$ ) = 0.9933

Thay đổi đơn vị: chiều cao (inch) và cân nặng (lb)

$H_{inch} = H_{cm} / 2.54$ $W_{lb} = W_{kg} \times 2.20$

correlation($H_{inch}$, $W_{lb}$ ) = 0.9933



# 3. Các đại lượng về độ phân tán (tt.)

- **Hệ số tương quan** (*Pearson correlation*)

VD: Cho mẫu gồm các quan sát ($x_i$, $y_i$)

{ (6, 6), (11, 9), (15, 6), (21, 17), (27, 12) }

a. Hiệp phương sai mẫu:

b. Mối quan hệ giữa x và y:

c. Hệ số tương quan mẫu:

# 3. Các đại lượng về độ phân tán (tt.)

❑ **So sánh covariance và correlation**

$$correlation(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{s_x . s_y}$$

- cov(x, y) ∈ } : đơn vị tính bằng tích của hai đơn vị tính x và y
- cov(x, y) càng lớn ⇒ mối quan hệ càng chặt nhưng đơn vị tính của x và y khác nhau cho nên cov(x, y) không thể hiện đúng mức độ phụ thuộc giữa x và y
- correlation(x, y) ∈ [–1, 1]: giá trị đã được chuẩn hóa
- correlation(x, y) thể hiện mức độ phụ thuộc giữa x và y



# 3. Các đại lượng về độ phân tán (tt.)

❑ **Phân tích dữ liệu**

VD: Mẫu dữ liệu về số ngày giao hàng của 2 công ty:

A = { 11, 10, 9, 10, 11, 11, 10, 11, 10, 10 }

B = { 8, 10, 13, 7, 10, 11, 10, 7, 15, 12 }

Phân tích thời gian giao hàng của 2 công ty (tùy mục tiêu).

# 3. Các đại lượng về độ phân tán (tt.)

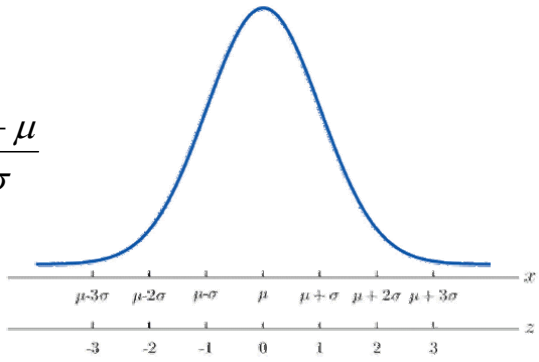
- **Giá trị bất thường** (*outliers*): **quá xa giá trị trung tâm**
  - lỗi thu thập, xử lý dữ liệu
  - hiện tượng bất thường: quan tâm hay không quan tâm ?



# 3. Các đại lượng về độ phân tán (tt.)

- **Giá trị z** (*z-score*, *z-value*, *standard score*, *normal score*,)

$$z_{score} = \frac{x - \bar{x}}{s} \qquad z_{score} = \frac{x - \mu}{\sigma}$$




  - vị trí tương đối của các giá trị trong tập dữ liệu (so với mean)
  - độ lệch (chuẩn hóa) bao nhiêu lần so với độ lệch chuẩn
  - xác định một giá trị có phải là outlier hay không

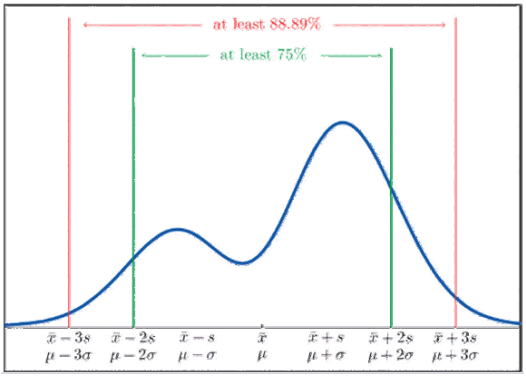
# 3. Các đại lượng về độ phân tán (tt.)

- **Bất đẳng thức Chebyshev**

$$P(z\sigma \le (|X-\mu|) \le \frac{1}{z^2}$$

- **Định lý Chebyshev**

∀z > 1, có tối thiểu $\left(1-\frac{1}{z^2}\right)$ quan sát nằm trong [μ – zσ, μ + zσ],




z = 3: chứa hầu hết các quan sát

Loại bỏ các quan sát có |z| > 3



# 3. Các đại lượng về độ phân tán (tt.)

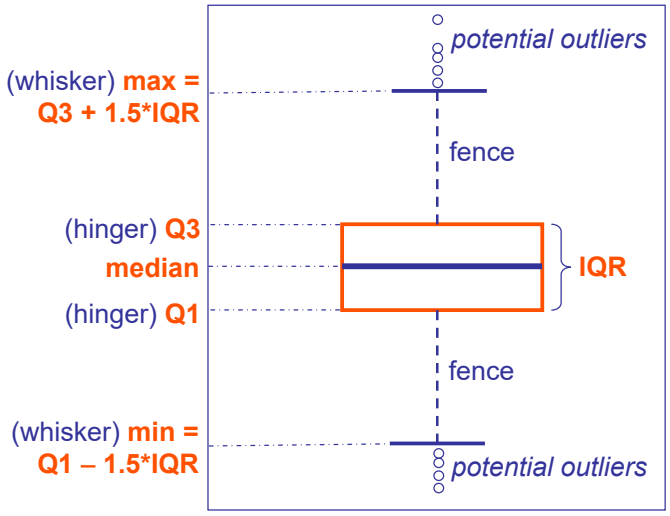
- **VD: Cho mẫu dữ liệu có mean = 30, s = 5. Áp dụng định lý Chebyshev để xác định tỷ lệ % (tối thiểu) các quan sát nằm trong khoảng giá trị:**

a. [15, 45]

b. [15, 40]

# 3. Các đại lượng về độ phân tán (tt.)

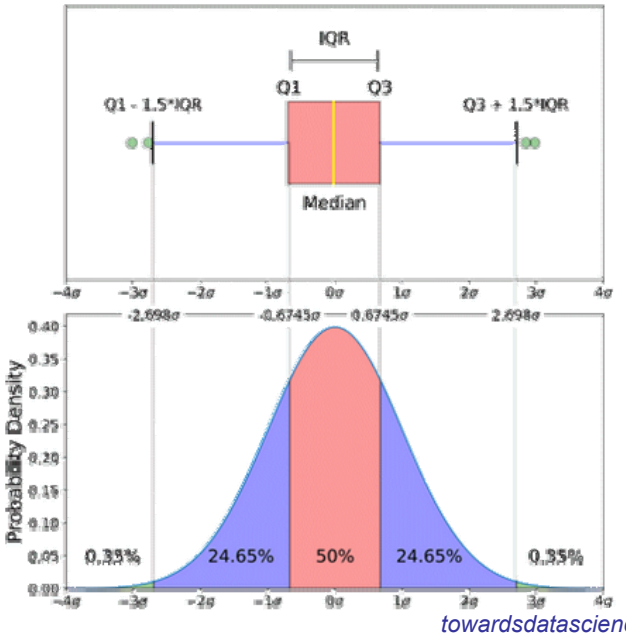
❑ **Mô tả dữ liệu liên tục bằng box plot** (Tukey, 1977)






# 3. Các đại lượng về độ phân tán (tt.)

❑ **Đối sánh boxplot và phân phối chuẩn**




*towardsdatascience.com* (09/2019)

# Nội dung bổ sung

1. Thống kê mô tả
2. Các đại lượng về trung tâm
3. Các đại lượng về độ phân tán
4. **Các đại lượng về hình dáng phân phối**

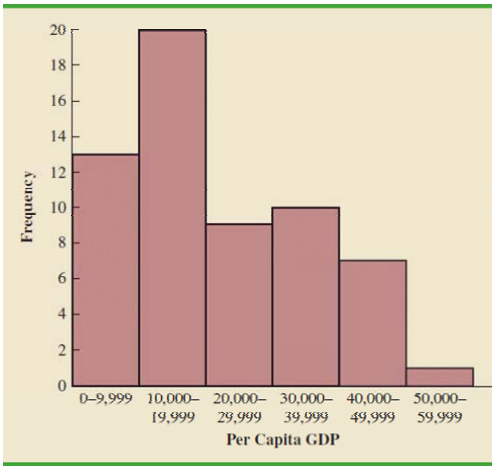


# 4. Các đại lượng về hình dáng PP

- **Kiểu dáng của phân phối (Bài 6)**
  - skewness
  - kurtosis

# 4. Các đại lượng về hình dáng PP (tt.)

- **Biểu đồ phân phối** (*histogram*)
  - thể hiện tần số (số lần xuất hiện) của mỗi giá trị
  - không có ngăn cách giữa các nhóm như biểu đồ thanh (bar)




[*Anderson+*]



# 4. Các đại lượng về hình dáng PP (tt.)

- **Hệ số bất đối xứng, độ nghiêng** (*skewness*)

$$S_{Pearson\_1} = \frac{(\bar{x} - \hat{x})}{s} \qquad S_{Pearson\_2} = \frac{3(\bar{x} - \tilde{x})}{s} \qquad S_{Bowley} = \frac{(Q_3 + Q_1 - 2Q_2)}{(Q_3 - Q_1)}$$

$$S_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - \bar{x})^3}{s^3} \qquad S_k = \frac{n}{(n-1)(n-2)}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - \bar{x})^3}{s^3}$$

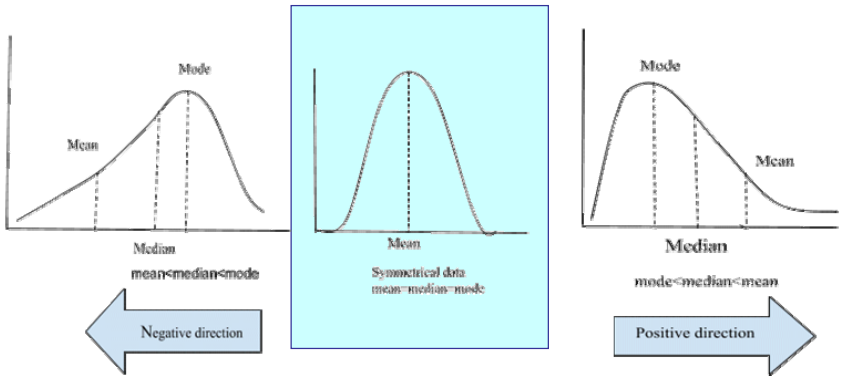
$$S_{above} = \left|\sum_{x_i > \bar{x}}(x_i - \bar{x})^3\right| \qquad S_{below} = \left|\sum_{x_i < \bar{x}}(x_i - \bar{x})^3\right| \qquad S_k = \frac{1}{ns^3}(S_{above} - S_{below})$$

  - mức độ đối xứng, bất đối xứng của một phân phối
  - tỉ lệ giữa 2 "đuôi" ở 2 phía
  - mối quan hệ giữa mean, median và mode: (min, max) outliers đẩy mean (mode) lệch khỏi median đi về 1 phía

# 4. Các đại lượng về hình dáng PP (tt.)

❑ **Hệ số bất đối xứng, độ nghiêng** (*skewness*)

- skewness = 0 (*symetrical*): mean = median = mode

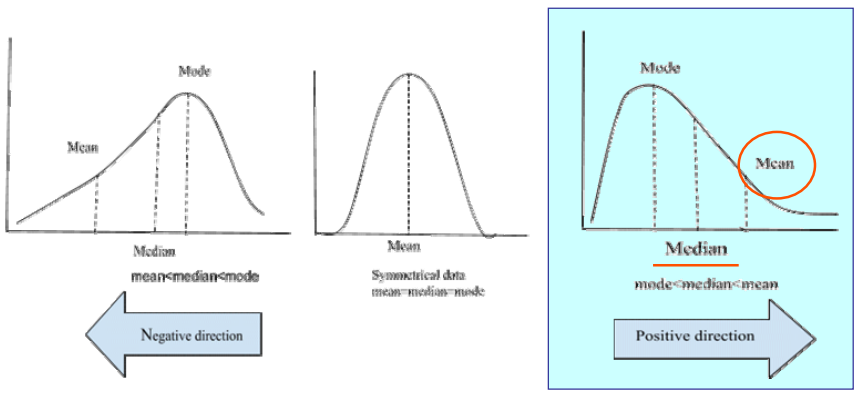





# 4. Các đại lượng về hình dáng PP (tt.)

❑ **Hệ số bất đối xứng, độ nghiêng** (*skewness*)

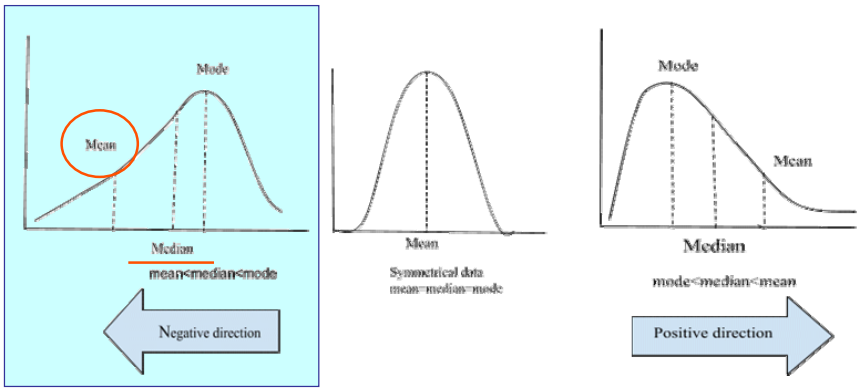
- mean > median (*positive skewness*): đuôi bên PHẢI dài hơn đuôi bên trái; giá trị LỚN (outliers) đẩy mean về phía CUỐI (VD: thu nhập cá nhân → chỉ 1 số ít người thu nhập quá cao)



# 4. Các đại lượng về hình dáng PP (tt.)

❑ **Hệ số bất đối xứng, độ nghiêng** (*skewness*)

- mean < median (*negative skewness*): đuôi bên TRÁI dài hơn đuôi bên phải; giá trị NHỎ (outliers) đẩy mean về phía ĐẦU






# 4. Các đại lượng về hình dáng PP (tt.)

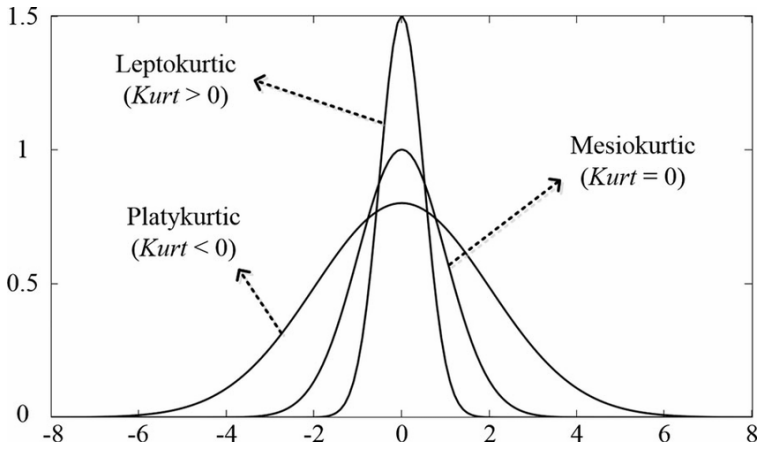
❑ **Độ nhọn** (*kurtosis*)

$$kurtosis = \frac{1}{|X|}\sum_{x_i \in X}\frac{(x_i - \bar{x})^4}{s^4}$$

- độ cao phần "trung tâm" hay độ "dầy" phần đuôi của phân phối
- thường được so sánh với phân phối chuẩn (kurtosis = 3)
  → đại lượng *excess kurtosis*: Kurt = (kurtosis – 3)

# 4. Các đại lượng về hình dáng PP (tt.)

❑ **Độ nhọn** (*kurtosis*)






# Tài liệu tham khảo

Anderson et al., *Statistics for Business and Economics*, Cengage, 2016.

Nguyễn Đình Thúc và các tác giả, *Thống kê máy tính*, NXB Khoa học và kỹ thuật, 2010.

Illowsky et al., *Introductory Statistics*, OpenStax, 2017.

Pishro-Nik H., *Introduction to Probability, Statistics, and Random Processes*, Kappa Research LLC, 2014.

Schmitz Andy, *Introductory Statistics*, Saylor Academy, (https://saylordotorg.github.io/text_introductory-statistics/index.html, 09/2019).