



## **B2. Factorization**

*Bổ sung thêm cho giáo trình*

2021

### **Nội dung bổ sung**



1. Matrix decomposition
2. Eigendecomposition
3. Singular Value Decomposition (SVD)



# 1. Matrix decomposition

□ Giải hệ phương trình  $A.X = B$ : dễ dàng hơn với **A** là ma trận  $\Delta$

- **Forward substitution**  $\rightarrow$  A là ma trận  $\Delta$  dưới,  $A_{ii} \neq 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ A_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & \dots & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1/A_{11} \\ x_2 &= (b_2 - A_{21}x_1)/A_{22} \\ x_3 &= (b_3 - A_{31}x_1 - A_{32}x_2)/A_{33} \\ &\vdots \\ x_n &= (b_n - A_{n1}x_1 - A_{n2}x_2 - \dots - A_{n,n-1}x_{n-1})/A_{nn} \end{aligned}$$

- **Backward substitution**  $\rightarrow$  A là ma trận  $\Delta$  trên,  $A_{ii} \neq 0$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ 0 & 0 & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_n &= b_n/A_{nn} \\ x_{n-1} &= (b_{n-1} - A_{n-1,n}x_n)/A_{n-1,n-1} \\ x_{n-2} &= (b_{n-2} - A_{n-2,n-1}x_{n-1} - A_{n-2,n}x_n)/A_{n-2,n-2} \\ &\vdots \\ x_1 &= (b_1 - A_{12}x_2 - A_{13}x_3 - \dots - A_{1n}x_n)/A_{11} \end{aligned}$$



B2. Factorization

Bổ sung thêm cho giáo trình

72



## 1.1 LU decomposition

□ Giải hệ phương trình  $A.X = B$

Áp dụng phân rã  $A = L.U$ :

$$A.X = B \quad (1) \Leftrightarrow L.U.X = B \Leftrightarrow \begin{cases} L.Y = B & (2) \\ U.X = Y & (3) \end{cases}$$

Thay vì giải hệ phương trình (1), ta lần lượt:

**B1.** Giải hệ phương trình (2), **tìm Y**, với L là ma trận  $\Delta$  dưới

**B2.** Giải hệ phương trình (3), **tìm X**, với U là ma trận  $\Delta$  trên

B2. Factorization

Bổ sung thêm cho giáo trình

73

## 1.1 LU decomposition (tt.)



□ **VD:** Giải hệ phương trình dựa trên phép phân rã LU

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**B1.** Giải  $L.Y = B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

**B2.** Giải  $U.X = Y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

## 1.1 LU decomposition (tt.)



□ **Lời giải, nếu có, của  $A = L.U$  là KHÔNG DUY NHẤT**

- có tổng cộng  $n^2$  phương trình với  $(n^2 + n)$  biến
- *Doolittle* factorization:  $\text{diag}(L) = 1$
- *Crout* factorization:  $\text{diag}(U) = 1$



## 1.1 LU decomposition (tt.)

### □ Bài tập: Áp dụng phép phân rã LU

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow L = ? \quad U = ?$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow L = ? \quad U = ?$$



## 1.1 LU decomposition (tt.)

### □ Có phải **mọi** $A \in M_n(\mathbb{R})$ đều có thể áp dụng phép phân rã LU ?

- **Leading principal submatrix**  $A_k$ : k dòng, k cột đầu tiên ( $k \leq n$ )
- **điều kiện áp dụng phân rã LU**: A khả nghịch,  $|A_k| \neq 0, \forall k \leq n$

VD:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  không thể áp dụng phân rã LU vì:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ có } |A_2| = (1 * 4) - (2 * 2) = 0$$

- hoán vị các dòng  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$  thì có thể áp dụng phân rã LU!



## 1.1 LU decomposition (tt.)

□ Ma trận hoán vị (*permutation matrix*):  $P \in M_n(\mathbb{R})$

- mỗi dòng, mỗi cột có một hệ số = 1, tất cả các hệ số khác = 0
- hoán vị các dòng của I hay các cột chuẩn  $E_i$  (Gauss – Jordan)

$$P = (E_{k_1}, E_{k_2}, \dots, E_{k_n}), \quad p_{ij} = \begin{cases} 1, & j = k_i \\ 0, & j \neq k_i \end{cases}$$

□ Nhận xét:

- (i)  $|P| = \pm 1$
- (ii)  $P \cdot P^T = P^T \cdot P = I$
- (iii)  $P^{-1} = P^T$

□ Mọi ma trận vuông  $A \in M_n(\mathbb{R})$ :  $P \cdot A = L \cdot U$



## 1.1 LU decomposition (tt.)

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi_1: d_2 \leftrightarrow d_3} P_{\varphi_1}(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{P_{\varphi_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi_2: d_2 \rightarrow d_2 - d_1} P_{\varphi_2}(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{P_{\varphi_2} \cdot P_{\varphi_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi_3: d_3 \rightarrow d_3 - 2d_1} P_{\varphi_3}(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{P_{\varphi_3} \cdot P_{\varphi_2} \cdot P_{\varphi_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

**A** **U**

Ma trận hoán vị P:

$$P = P_{\varphi_1}$$

Ma trận tam giác dưới L:

$$L = [P_{\varphi_3} \cdot P_{\varphi_2}]^{-1}$$

$$P \cdot A = L \cdot U$$



## 1.1 LU decomposition (tt.)

□ Bài tập: Áp dụng phép phân rã  $PA = LU$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$



## 1.1 LU decomposition (tt.)

□ Hàm `scipy.linalg.lu(A)` trả về 3 kết quả

- ma trận hoán vị  $P^T$
- ma trận tam giác dưới L
- ma trận tam giác trên U



## 1.1 LU decomposition (tt.)

□ Hàm `scipy.linalg.lu_factor(A)` trả về 2 kết quả

- ma trận “kết hợp”:  $LU = U + (L - \text{diag}(L))$

$$LU = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$U = \text{triu}(LU) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L = LU - U + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$



## 1.1 LU decomposition (tt.)

□ Hàm `scipy.linalg.lu_factor(A)` trả về 2 kết quả

- mảng `pivot[n]` chứa chuỗi các phép hoán vị để tạo ma trận P

VD: `pivot = [3, 2, 3, 3]`

Khởi tạo  $P = I$

i = 0: `pivot[0] = 3`  $\Rightarrow$  hoán vị dòng 0 và dòng 3

$$P_0 = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



## 1.1 LU decomposition (tt.)

□ Hàm `scipy.linalg.lu_factor(A)` trả về 2 kết quả

- mảng `pivot[n]` chứa chuỗi các phép hoán vị để tạo ma trận P

i = 1: `pivot[1] = 2`  $\Rightarrow$  hoán vị dòng 1 và dòng 2

$$P_1 = P_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i = 2: `pivot[2] = 3`  $\Rightarrow$  hoán vị dòng 2 và dòng 3

$$P_2 = P_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B2. Factorization

Bổ sung thêm cho giáo trình

84



## 1.1 LU decomposition (tt.)

□ Hàm `scipy.linalg.lu_factor(A)` trả về 2 kết quả

- mảng `pivot[n]` chứa chuỗi các phép hoán vị để tạo ma trận P

i = 3: `pivot[3] = 3`  $\Rightarrow$  không thay đổi

Tóm lại, `pivot = [3, 2, 3, 3]` sẽ tạo ra ma trận hoán vị:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B2. Factorization

Bổ sung thêm cho giáo trình

85





## 1.1 LU decomposition (tt.)

□ Mở rộng cho ma trận  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  với  $m \neq n$

$$A_{m \times n} = P_{m \times m}^T \cdot L_{m \times n} \cdot U_{n \times n}$$



## 1.1 LU decomposition

□ Giải hệ phương trình  $A.X = B$

Áp dụng phân rã  $P.A = L.U$ :

$$A.X = B \quad (1) \Leftrightarrow P.A.X = L.U.X = P.B = B' \Leftrightarrow \begin{cases} L.Y = B' & (2) \\ U.X = Y & (3) \end{cases}$$

Thay vì giải hệ phương trình (1), ta lần lượt:

B1. Giải hệ phương trình (2), tìm  $Y$ , với  $L$  là ma trận  $\Delta$  dưới

B2. Giải hệ phương trình (3), tìm  $X$ , với  $U$  là ma trận  $\Delta$  trên





## 1.2 QR decomposition

□  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$$A = Q.R$$

- thừa số  $Q \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  (**Q-factor**): gồm các cột trực chuẩn (orthonormal columns):

$$Q^T.Q = I_n$$

- thừa số  $R \in M_n(\mathbb{R})$  (**R-factor**): ma trận  $\Delta$  trên,  $R_{ii} \neq 0$ , khả nghịch

Nếu ràng buộc  $R_{ii} > 0$  thì  $\exists! \langle Q, R \rangle$



## 1.2 QR decomposition (tt.)

### □ Thuật toán Gram-Schmidt

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Q_{m1} & Q_{m2} & \cdots & Q_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1n} \\ 0 & R_{22} & \cdots & R_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{nn} \end{pmatrix}$$


---


$$\begin{matrix} a_1^T & a_2^T & & a_n^T & & \\ q_1^T & q_2^T & & q_n^T & & \end{matrix}$$

- các cột  $q_1^T, \dots, q_n^T$ : trực chuẩn
- các hệ số  $R_{11}, \dots, R_{nn} > 0$



## 1.2 QR decomposition (tt.)

### □ Thuật toán Gram-Schmidt

$$\begin{aligned} R_{11} &= \|a_1^T\| \\ \tilde{q}_1^T &= a_1^T \\ q_1^T &= \frac{1}{R_{11}} \tilde{q}_1^T \end{aligned}$$

for  $k = 2$  to  $n$

$$\begin{aligned} R_{1k} &= q_1^T a_k^T \\ &\vdots \\ R_{k-1,k} &= q_{k-1}^T a_k^T \end{aligned}$$

$$\tilde{q}_k^T = a_k^T - (R_{1k} q_1^T + R_{2k} q_2^T + \cdots + R_{k-1,k} q_{k-1}^T)$$

$$R_{kk} = \|\tilde{q}_k^T\|$$

$$q_k^T = \frac{1}{R_{kk}} \tilde{q}_k^T$$



## 1.2 QR decomposition (tt.)

### □ Thuật toán Gram-Schmidt

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} = (a_1^T \quad a_2^T \quad a_3^T) = (q_1^T \quad q_2^T \quad q_3^T) \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ 0 & R_{22} & R_{23} \\ 0 & 0 & R_{33} \end{pmatrix}$$

- k = 1:

$$R_{11} = \|a_1^T\| = 2 \quad \tilde{q}_1^T = a_1^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad q_1^T = \frac{1}{R_{11}} \tilde{q}_1^T = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$



## 1.2 QR decomposition (tt.)

### □ Thuật toán Gram-Schmidt

- k = 2:

$$R_{12} = q_1 \cdot a_2^T = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 4$$

$$\tilde{q}_2^T = a_2^T - R_{12} \cdot q_1^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{22} = \|\tilde{q}_2^T\| = 2 \quad q_2^T = \frac{1}{R_{22}} \tilde{q}_2^T = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$



## 1.2 QR decomposition (tt.)

### □ Thuật toán Gram-Schmidt

- k = 3:

$$R_{13} = q_1 \cdot a_3^T = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 2 \quad R_{23} = q_2 \cdot a_3^T = 8$$

$$\tilde{q}_3^T = a_3^T - R_{13} \cdot q_1^T - R_{23} \cdot q_2^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} - 8 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$R_{33} = \|\tilde{q}_3^T\| = 4 \quad q_3^T = \frac{1}{R_{33}} \tilde{q}_3^T = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$



## 1.2 QR decomposition (tt.)

### □ Thuật toán Gram-Schmidt

Kết quả phân rã QR:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

### □ Một số cải biên

- Givens rotations
- Householder reflections



## 1.2 QR decomposition (tt.)

### □ Bài tập: Áp dụng phép phân rã QR

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$



## 1.2 QR decomposition (tt.)

### □ Giải hệ phương trình $A.X = B$

Áp dụng phân rã QR:

$$A.X = B \quad (1) \Leftrightarrow Q.R.X = B \Leftrightarrow \begin{cases} Q.Y = B & (2) \\ R.X = Y & (3) \end{cases}$$

Thay vì giải hệ phương trình (1), ta lần lượt:

B1. Giải hệ phương trình (2), tìm  $Y = Q^T.B$  ( $Q^T.Q = I$ )

B2. Giải hệ phương trình (3), tìm  $X$ , với  $R$  là ma trận  $\Delta$  trên

### □ Định thức:

$$|A| = \prod_{i=1}^n R_{ii}$$

### □ Ma trận nghịch đảo:

$$A^{-1} = (Q.R)^{-1} = R^{-1}.Q^{-1}$$



## 1.3 Cholesky decomposition (tt.)

### □ Phân rã **Cholesky**: ma trận đối xứng, xác định dương

$$A = L.L^T = U^T.U$$

$L$ : ma trận tam giác DƯỚI khả nghịch,  $L_{ii} > 0$

$U$ : ma trận tam giác TRÊN khả nghịch,  $U_{ii} > 0$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1n} \\ 0 & L_{22} & \cdots & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_{ii} = \sum_{k=1}^i L_{ki}^2$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^i L_{ik} \cdot L_{kj} \quad (i \neq j)$$



## 1.3 Cholesky decomposition (tt.)

□ Phân rã Cholesky: ma trận đối xứng, xác định dương

$$\begin{aligned}
 \underline{i=1}: \quad L_{11} &= \sqrt{A_{11}} && \text{điều kiện: KHÔNG ÂM} \\
 \underline{i=2}: \quad L_{21} &= \frac{1}{L_{11}} A_{21} \\
 L_{22} &= \sqrt{A_{22} - L_{21}^2} && \text{điều kiện: KHÔNG ÂM} \\
 \underline{i \geq 3}: \quad L_{31} &= \frac{1}{L_{11}} A_{31} \\
 L_{ij} &= \frac{1}{L_{jj}} \left( A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} \cdot L_{jk} \right) \quad (2 \leq j < i) \\
 L_{ii} &= \sqrt{A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2} && \text{điều kiện: KHÔNG ÂM}
 \end{aligned}$$



## 1.3 Cholesky decomposition (tt.)

□ Phân rã Cholesky: ma trận đối xứng, xác định dương

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{pmatrix}$$

$$L_{11} = \sqrt{A_{11}} = \sqrt{6}$$

$$L_{21} = \frac{A_{21}}{L_{11}} = \frac{15}{\sqrt{6}} \quad L_{22} = \sqrt{A_{22} - L_{21}^2} = \sqrt{55 - \frac{225}{6}}$$

$$L_{31} = \frac{A_{31}}{L_{11}} = \frac{55}{\sqrt{6}} \quad L_{32} = \frac{A_{32} - (L_{31} \cdot L_{21})}{L_{22}} = \frac{55}{\sqrt{6}} \quad L_{33} = \sqrt{A_{33} - L_{31}^2 - L_{32}^2}$$





## 1.3 Cholesky decomposition (tt.)

### □ Giải hệ phương trình $A.X = B$

Áp dụng phân rã Cholesky:

$$A.X = B \quad (1) \Leftrightarrow U^T.U.X = B \Leftrightarrow \begin{cases} U^T.Y = B & (2) \\ U.X = Y & (3) \end{cases}$$

Thay vì giải hệ phương trình (1), ta lần lượt:

B1. Giải hệ phương trình (2), tìm Y, với  $U^T$  là ma trận  $\Delta$  dưới

B2. Giải hệ phương trình (3), tìm X, với U là ma trận  $\Delta$  trên



## Nội dung bổ sung

1. Matrix decomposition

2. Eigendecomposition

3. Singular Value Decomposition (SVD)





## 2. Eigendecomposition

□ Ma trận vuông cấp  $n$ :  $A \in M_n(\mathbb{C})$

- Đa thức đặc trưng (*characteristic polynomial*)

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda \cdot I_n| \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

- Phương trình đặc trưng (*characteristic equation*)

$$\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_1\lambda + b_0 = 0 \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

- Định lý Cayley – Hamilton

$$A^n + b_{n-1}A^{n-1} + \dots + b_1A + b_0 = 0$$

$A$  là nghiệm của phương trình đặc trưng của *chính nó*



## 2. Eigendecomposition (tt.)

□ Định lý Cayley – Hamilton

- Nếu  $b_0 \neq 0 \Rightarrow |A| = (-1)^n \cdot b_0 \Rightarrow A$  khả nghịch

$$A^{-1} = \frac{-1}{b_0} (A^{n-1} + b_{n-1}A^{n-2} + \dots + b_1I)$$



## 2. Eigendecomposition (tt.)

□ Ma trận vuông cấp  $n$ :  $A \in M_n(\mathbb{C})$

- Nghiệm  $\lambda_0$  của  $p_A(\lambda)$  gọi là [giá] trị riêng (*eigenvalue*) của  $A$
- Hệ phương trình thuần nhất (*homogeneous system*)

$$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot X = 0$$

có vô số nghiệm  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ , ứng với trị riêng  $\lambda$

- Nghiệm  $x \neq 0$  gọi là vector riêng (*eigenvector*) của  $A$  ứng với  $\lambda$

Định lý:

Các vector riêng ứng với các trị riêng khác nhau là độc lập tuyến tính



## 2. Eigendecomposition (tt.)

□ Giải phương trình đặc trưng để tìm giá trị riêng  $\lambda$  của  $A$

$$|A - \lambda \cdot I| = 0$$

□ Giải hệ phương trình thuần nhất để tìm các vector riêng  $\neq 0$

$$(A - \lambda \cdot I) \cdot X = 0$$

## 2. Eigendecomposition (tt.)



### □ Nhận xét

- $x$  là vector riêng ứng với trị riêng  $\lambda_0$  thì  $\alpha \cdot x$  cũng là vector riêng
- Chỉ có 1 trị riêng  $\lambda_x$  ứng với một vector riêng  $x$  cho trước

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

$$|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

- Nếu  $n$  giá trị riêng đều  $\neq 0$  thì  $A$  khả nghịch

## 2. Eigendecomposition (tt.)



### □ Nhận xét

- $A$  có  $n$  giá trị riêng (số thực và số phức)
- Nếu  $A$  là ma trận đối xứng thì các giá trị riêng đều là số thực
- Nếu  $A$  là ma trận đường chéo thì các hệ số trên đường chéo là các giá trị riêng
- $A$  xác định dương  $\Leftrightarrow n$  giá trị riêng đều là số thực dương





## 2. Eigendecomposition (tt.)

### ❑ Chéo hóa ma trận (*diagonalization*)

Với  $n$  vector riêng độc lập tuyến tính, ứng với các  $\lambda_i$  phân biệt

$\Lambda$  là ma trận đường chéo chứa các giá trị riêng  $\lambda_i$

$P$  (*modal matrix*) tạo thành từ  $n$  vector riêng  $X_i^T$ ;  $|P| \neq 0$

$$P = \begin{pmatrix} X_1^T & X_2^T & \dots & X_n^T \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda$$

$$A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1}$$

Khi đó,  $A$  gọi là *ma trận chéo hóa được* (*diagonalizable matrix*)



## 2. Eigendecomposition (tt.)

### ❑ Chéo hóa ma trận (*diagonalization*)

VD: Các ma trận không chéo hóa được:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$



## 2. Eigendecomposition (tt.)

□ Ma trận vuông cấp  $n$ :  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Tính  $A^k$ , với  $k \gg N$  !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad \text{Tính } A^{100}.$$



## 2. Eigendecomposition (tt.)

□ Ma trận “xác định dương” (*positive definite matrix*)

Ma trận vuông, đối xứng  $A \in M_n(\mathbb{R})$ :

$$\forall x \neq 0: \quad x.A.x^T > 0$$

VD: Ma trận  $I_2$  là xác định dương

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1^2 + x_2^2) > 0 \quad (x_1 \quad x_2) \neq 0$$

Kiểm tra  $A \in M_n(\mathbb{R})$  có phải ma trận xác định dương ?



## 2. Eigendecomposition (tt.)

### □ Ma trận của dạng toàn phương (*quadratic form*)

A là ma trận đối xứng

$$Q(x) = x.A.x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$Q(x) = xAx^T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_{ij} x_i x_j$$

VD:

$$Q(x) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$$



## 2. Eigendecomposition (tt.)

### □ Ma trận của dạng toàn phương (*quadratic form*)

- Dạng toàn phương chính tắc:

$$Q(x) = x.A.x^T = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2$$

⇒ A là ma trận đường chéo



## 2. Eigendecomposition (tt.)

### □ Ma trận của dạng toàn phương (quadratic form)

- Đưa về dạng chính tắc bằng phương pháp biến đổi trực giao

A có n giá trị riêng phân biệt:  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \Rightarrow A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1}$

Đặt:  $y = x \cdot P \quad x = y \cdot P^T$

Ta có:

$$x A x^T = (y P^T)(P \Lambda P^T)(P y^T) = y \Lambda y^T$$

$$Q(y) = y \Lambda y^T = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$



## 2. Eigendecomposition (tt.)

### □ Ma trận của dạng toàn phương (quadratic form)

VD:  $Q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$a_{13}/2$   
 $a_{23}/2$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\lambda_3 = 4$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$Q(y) = y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2 \quad y = x \cdot P$$



## 2. Eigendecomposition (tt.)

### □ Ma trận “xác định dương” (*positive definite matrix*)

- Định lý:

$Q(x)$  xác định dương khi và chỉ khi có đúng  $n$  hệ số dương trong dạng chính tắc.

- Định lý **Sylvester**:

$A$  là ma trận của dạng toàn phương  $Q(x)$

(i)  $Q(x)$  xác định DƯƠNG  $\Leftrightarrow |A_k| > 0, \forall k$

(ii)  $Q(x)$  xác định ÂM  $\Leftrightarrow |A_1| < 0$  và các  $|A_k|$  đan dấu kể từ  $k > 1$



## Nội dung bổ sung

### 1. Matrix decomposition

### 2. Eigendecomposition

### 3. Singular Value Decomposition (SVD)





### 3. Singular Value Decomposition

- ❑ Ma trận U trực giao (*orthogonal matrix*)

$$U \cdot U^T = U^T \cdot U = I$$

- ❑ Singular Value Decomposition

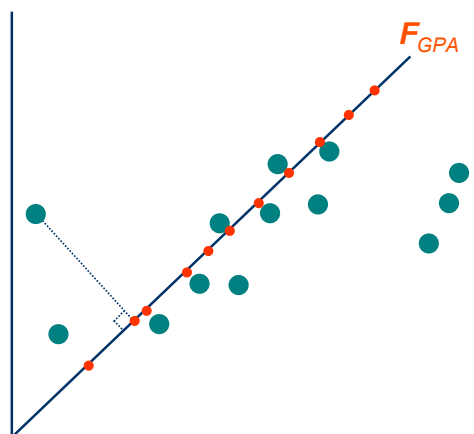
$$A = U \cdot S \cdot V^T$$

- S: ma trận đường chéo, các hệ số không âm (*singular values*)  $\sqrt{\lambda_i}$  sắp xếp giảm dần
- V: ma trận trực giao (chuẩn), các cột (*right-singular vectors*) chính là các vector riêng
- U: ma trận trực giao (chuẩn), các cột (*left-singular vectors*)



### 3. Singular Value Decomposition (tt.)

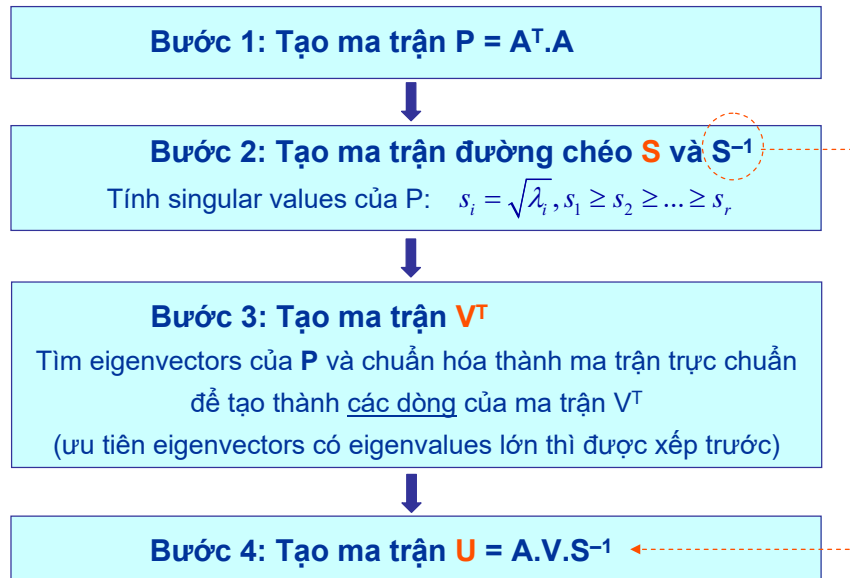
- ❑ Tìm không gian đặc trưng mới  $F'$  tạo phân hoạch trên items tốt hơn không gian đặc trưng ban đầu  $F$



### 3. Singular Value Decomposition (tt.)



#### □ Các bước thực hiện



### 3. Singular Value Decomposition (tt.)



#### □ Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

#### Bước 1: Tạo ma trận $P = A^T.A$

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P = A^T.A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

### 3. Singular Value Decomposition (tt.)



**Bước 2: Tạo ma trận đường chéo S và S<sup>-1</sup>**

a. Tìm eigenvalues của P

$$P \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \Rightarrow \begin{vmatrix} 10-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 10-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-10)(\lambda-12) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 12 \\ \lambda_2 = 10 \end{cases}$$

b. Sắp xếp giảm dần các eigenvalues

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \quad \text{rank} = 2$$

### 3. Singular Value Decomposition (tt.)



**Bước 3: Tạo V<sup>T</sup>**

• Với  $\lambda_1 = 12$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_3 = 1 \quad x_2 = 2 \Rightarrow \|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

• Với  $\lambda_2 = 10$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 = 0 \quad x_1 = -2 = -2x_2 \Rightarrow \|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = \left( \frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0 \right) \Rightarrow V^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}$$

### 3. Singular Value Decomposition (tt.)



Bước 4: Tạo ma trận  $U = A.V.S^{-1}$

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Kiểm chứng kết quả:

$$U.S.V^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A$$



### 3. Singular Value Decomposition (tt.)



□ Giả sử  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ , với  $(m < n)$

$P = A^T.A \in M_n(\mathbb{R}) \Rightarrow$  tính định thức cấp  $n$  để tìm  $\lambda$ :  $|P - \lambda.I_n| = 0$

Xét  $B = A^T \in M_{n,m}(\mathbb{R})$

Ta có:  $Q = B^T.B = (A^T)^T.A^T = A.A^T \in M_m(\mathbb{R})$

Chỉ cần tính định thức cấp  $m$  để tìm  $\lambda$ :  $|Q - \lambda.I_m| = 0$

$$A = B^T = (U_B.S_B.V_B^T)^T = V_B.S_B.U_B^T$$

Nhận xét: Vai trò của  $U_A$  và  $V_B$  hoán đổi cho nhau

### 3. Singular Value Decomposition (tt.)



□ Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

**Bước 1: Tạo ma trận  $Q = A.A^T$**

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = A.A^T = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$$

### 3. Singular Value Decomposition (tt.)



**Bước 2: Tạo ma trận đường chéo  $S$  và  $S^{-1}$**

a. Tìm eigenvalues của  $Q$

$$Q.\vec{x} = \lambda.\vec{x} \Rightarrow \begin{vmatrix} 11-\lambda & 1 \\ 1 & 11-\lambda \end{vmatrix} = (11-\lambda)^2 - 1 = (\lambda-12)(\lambda-10) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 12 \\ \lambda_2 = 10 \end{cases}$$

b. Sắp xếp giảm dần các eigenvalues

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \quad \text{rank} = 2$$

### 3. Singular Value Decomposition (tt.)



#### Bước 3: Tạo U

- Với  $\lambda_2 = 12$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 = 1 \Rightarrow \|(x_1, x_2)\| = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \vec{u}_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

- Với  $\lambda_2 = 10$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = -1 = -x_2 \Rightarrow \|(x_1, x_2)\| = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \vec{u}_2 = \left( \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

### 3. Singular Value Decomposition (tt.)



#### Bước 4: Tạo ma trận $V^T$ ( $V^T = S^{-1} \cdot U^{-1} \cdot A = S^{-1} \cdot U^T \cdot A$ )

$$V^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}$$

Kiểm chứng kết quả:

$$U \cdot S \cdot V^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A$$



### 3. Singular Value Decomposition (tt.)



#### □ Compact SVD

$$r = \text{rank}(A)$$

$$A = U_r \Sigma_r (V_r)^T$$

#### □ Truncated SVD (*Low-rank approximation*)

Chọn  $r = k \ll \text{MIN}(m, n)$

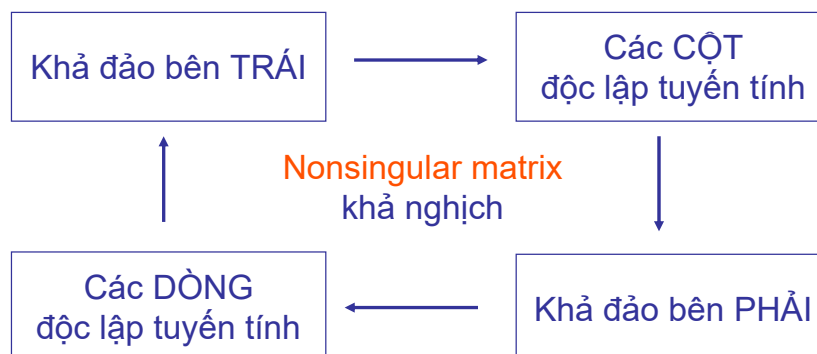


### 3. Singular Value Decomposition (tt.)



#### □ Giả sử $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

- Ma trận nghịch đảo TRÁI (*left inverse*):  $X.A = I$
- Ma trận nghịch đảo PHẢI (*right inverse*):  $A.X = I$
- Với ma trận vuông  $A \in M_n(\mathbb{R})$



### 3. Singular Value Decomposition (tt.)



#### □ Ma trận giả nghịch đảo (*pseudo-inverse* – Moore-Penrose)

Giả sử  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

- Nếu ( $m \geq n$ ) và các CỘT của  $A$  độc lập tuyến tính

Khi đó, ma trận  $(A^T.A)$  khả nghịch

Ma trận **nghịch đảo TRÁI** của  $A$ :  $A^\dagger = (A^T.A)^{-1}.A^T$

$$A^\dagger.A = (A^T.A)^{-1}.A^T.A = I$$

- Nếu ( $m \leq n$ ) và các DÒNG của  $A$  độc lập tuyến tính

Khi đó, ma trận  $(A.A^T)$  khả nghịch

Ma trận **nghịch đảo PHẢI** của  $A$ :  $A^\dagger = A^T.(A.A^T)^{-1}$

$$A.A^\dagger = A.A^T.(A.A^T)^{-1} = I$$

### 3. Singular Value Decomposition (tt.)



#### □ Các ma trận trực giao $U$ , $V$ và ma trận đường chéo $S$

$$A = U.S.V^T \quad A^T = (U.S.V^T)^T = V.S.U^T$$

$$(A^T.A) = (V.S.U^T).U.S.V^T = V.S.(U^T.U).S.V^T = V.S^2.V^T$$

Ma trận nghịch đảo trái:

$$A^\dagger = (A^T.A)^{-1}.A^T = (V.S^2.V^T)^{-1}.(V.S.U^T) = (V^T)^{-1}.(S^2)^{-1}.V^{-1}.V.S.U^T$$

$$A^\dagger = (V^T)^{-1}.S^{-1}.S^{-1}.S.U^T = (V^T)^{-1}.S^{-1}.U^T$$

Vì  $V$  là ma trận trực giao nên:

$$A^\dagger = V.S^{-1}.U^T$$





# Tài liệu tham khảo

---



Boyd S. & Vandenberghe L., *Introduction to Applied Linear Algebra. Vectors, Matrices, and Least Squares*, Cambridge University Press, 2018.

Đậu Thế Cấp, *Đại số tuyến tính*, NXB Giáo dục, 2008.

Lê Văn Hợp, *Bài giảng môn Toán Đại số B1* (Đại số tuyến tính).

Nguyễn Duy Thuận và các tác giả, *Đại số tuyến tính*, NXB ĐH Sư phạm, 2003.