Математическое моделирование

Лабораторная работа № 2

Гафоров Нурмухаммад

2026-02-21

Содержание (i)

1. 1. Вводная часть

Исследовать построение математической модели задачи преследования и определить стратегию движения, обеспечивающую перехват цели.

Ситуация формулируется следующим образом: катер береговой охраны движется в условиях ограниченной видимости и преследует лодку браконьеров. В момент кратковременного прояснения лодка фиксируется на расстоянии k км, после чего снова скрывается и продолжает прямолинейное движение в неизвестном направлении. Скорость катера превосходит скорость лодки в n раз. Требуется определить такую траекторию катера, которая приведёт к их встрече.

1. Выполнить аналитический вывод системы дифференциальных уравнений при условии $v_{\text{катера}} = n v_{\text{лодки}}$.

1. Выполнить аналитический вывод системы дифференциальных уравнений при условии $v_{\text{катера}} = n v_{\text{лодки}}$.
2. Построить траектории катера и лодки для двух вариантов начальных условий.

1. Выполнить аналитический вывод системы дифференциальных уравнений при условии $v_{\text{катера}} = n v_{\text{лодки}}$.
2. Построить траектории катера и лодки для двух вариантов начальных условий.
3. По графическому представлению определить точку пересечения траекторий.

2. 2. Теоретическая часть

2.1 Исходные обозначения

Положим $t_0 = 0$ – момент обнаружения лодки.

В этот момент:

- лодка располагается в точке $X_0 = 0$;

Переходим к полярной системе координат:

Положим $t_0 = 0$ – момент обнаружения лодки.

В этот момент:

- лодка располагается в точке $X_0 = 0$;
- катер находится на расстоянии k от неё.

Переходим к полярной системе координат:

Положим $t_0 = 0$ – момент обнаружения лодки.

В этот момент:

- лодка располагается в точке $X_0 = 0$;
- катер находится на расстоянии k от неё.

Переходим к полярной системе координат:

- полюс совпадает с точкой обнаружения лодки;

Положим $t_0 = 0$ – момент обнаружения лодки.

В этот момент:

- лодка располагается в точке $X_0 = 0$;
- катер находится на расстоянии k от неё.

Переходим к полярной системе координат:

- полюс совпадает с точкой обнаружения лодки;
- полярная ось направлена через положение катера.

2.2 Определение радиуса смены режима движения

Найдём расстояние x, при котором катер и лодка окажутся на одинаковом расстоянии от полюса.

За время t:

- лодка проходит путь x,

Из равенства времён движения получаем два варианта начального радиуса:

2.2 Определение радиуса смены режима движения

Найдём расстояние x, при котором катер и лодка окажутся на одинаковом расстоянии от полюса.

За время t:

- лодка проходит путь x,
- катер проходит путь $x - k$ либо $x + k$.

Из равенства времён движения получаем два варианта начального радиуса:

Найдём расстояние x, при котором катер и лодка окажутся на одинаковом расстоянии от полюса.

За время t:

- лодка проходит путь x,
- катер проходит путь $x - k$ либо $x + k$.

Из равенства времён движения получаем два варианта начального радиуса:

- case = plus

$$x_1 = \frac{k}{n+1}, \quad \theta_0 = 0$$

2.2 Определение радиуса смены режима движения

Найдём расстояние x, при котором катер и лодка окажутся на одинаковом расстоянии от полюса.

За время t:

- лодка проходит путь x,
- катер проходит путь $x - k$ либо $x + k$.

Из равенства времён движения получаем два варианта начального радиуса:

- **case = plus**

$$x_1 = \frac{k}{n+1}, \quad \theta_0 = 0$$

- **case = minus**

$$x_2 = \frac{k}{n-1}, \quad \theta_0 = -\pi$$

2.3 Разложение скорости и система уравнений

После достижения равного радиуса катер должен сохранять радиальную скорость лодки и одновременно изменять направление движения.

Разложим скорость катера:

- радиальная компонента

$$v_r = \frac{dr}{dt}$$

Поскольку полная скорость катера равна nv, а радиальная скорость должна совпадать со скоростью лодки v, имеем:

2.3 Разложение скорости и система уравнений

После достижения равного радиуса катер должен сохранять радиальную скорость лодки и одновременно изменять направление движения.

Разложим скорость катера:

- радиальная компонента

$$v_r = \frac{dr}{dt}$$

- тангенциальная компонента

$$v_\tau = r\frac{d\theta}{dt}$$

Поскольку полная скорость катера равна nv, а радиальная скорость должна совпадать со скоростью лодки v, имеем:

Исключая время t, приходим к уравнению:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Его решение задаёт логарифмическую спираль — характерную траекторию катера в полярных координатах.

3. 3. Численный эксперимент

Для расчётов принято:

- $k = 20$ км,

Необходимо построить траектории и определить точку перехвата.

Для расчётов принято:

- $k = 20$ км,
- $n = 5$.

Необходимо построить траектории и определить точку перехвата.

Базовый эксперимент (case=plus)
катер
лодка
90°
135°
45°
180°
0°
225°
315°
12
10
8
6
4
2
0


Базовый эксперимент (case=plus)
катер
лодка
90°
45°
0°
315°
225°
180°
135°
12
10
8
6
4
2
0


Базовый эксперимент (case=plus)
катер
лодка
90°
135°
45°
180°
0°
225°
315°
12
10
8
6
4
2
0

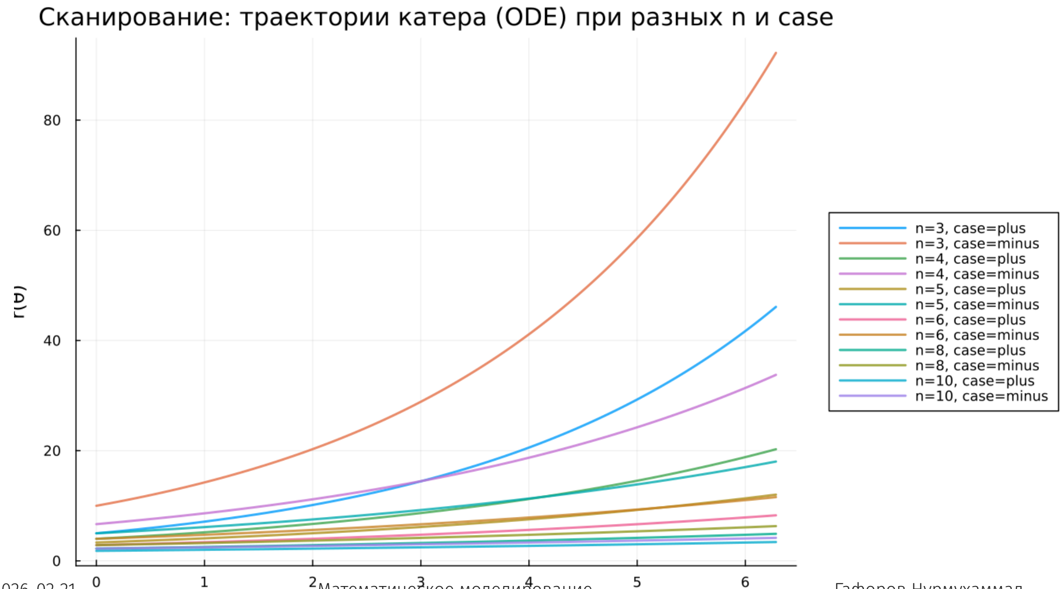

Базовый эксперимент (case=minus)
катер
лодка
90°
135°
45°
180°
0°
225°
315°
20
15
10
5
0

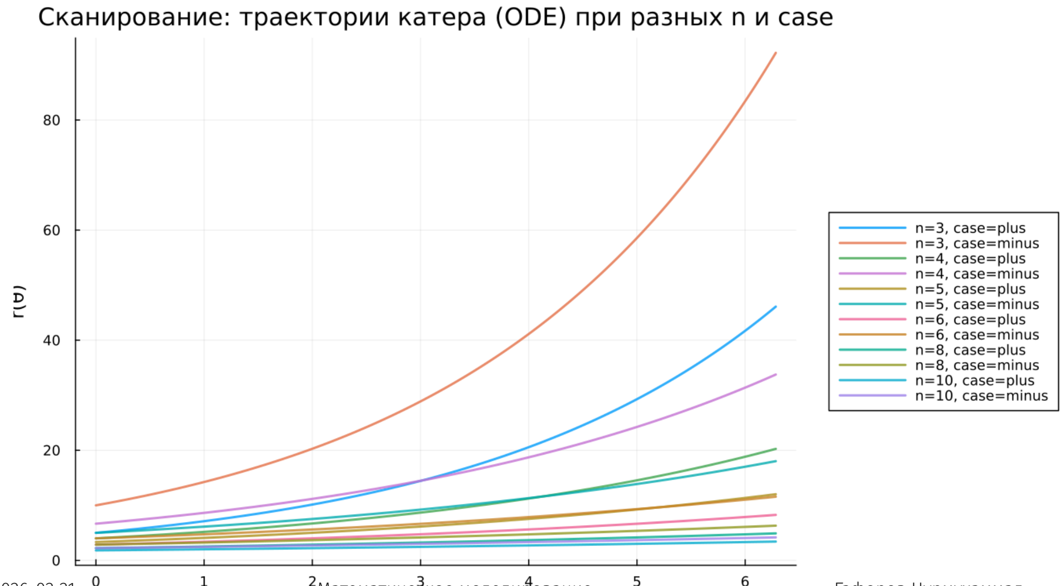

Базовый эксперимент (case=minus)
катер
лодка
90°
45°
0°
315°
225°
180°
135°
20
15
10
5
0

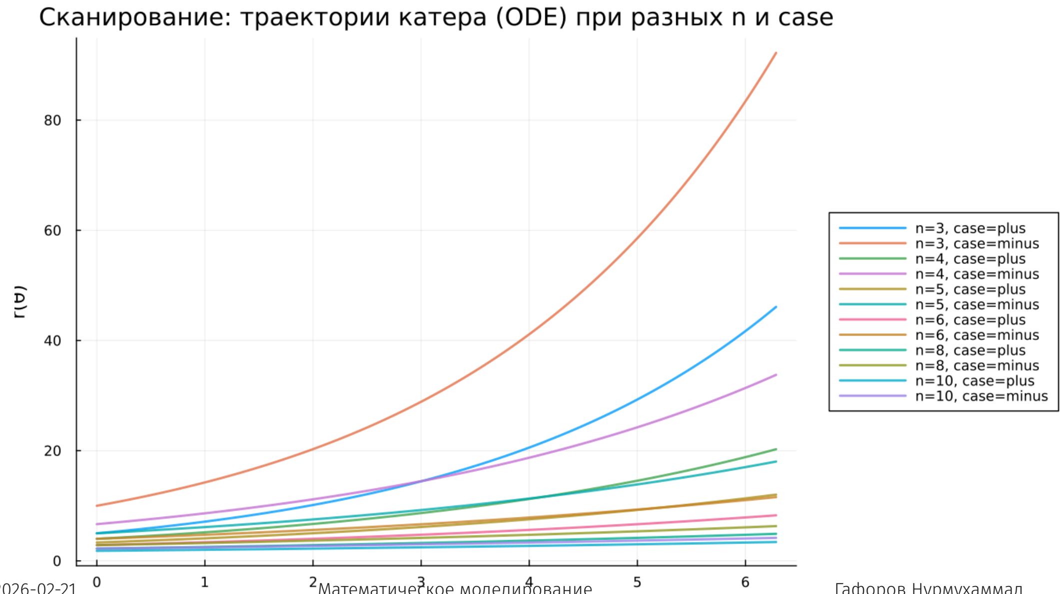

Базовый эксперимент (case=minus)
катер
лодка
90°
135°
45°
180°
0°
225°
315°
20
15
10
5
0

4. 4. Параметрический анализ

4.1 Исследование влияния параметра n




Сканирование: траектории катера (ODE) при разных n и case
r(θ)
80
60
40
20
0
0
1
2
3
4
5
6
n=3, case=plus
n=3, case=minus
n=4, case=plus
n=4, case=minus
n=5, case=plus
n=5, case=minus
n=6, case=plus
n=6, case=minus
n=8, case=plus
n=8, case=minus
n=10, case=plus
n=10, case=minus



Сканирование: траектории катера (ODE) при разных n и case
r(θ)
θ
0
20
40
60
80
0
1
2
3
4
5
6
n=3, case=plus
n=3, case=minus
n=4, case=plus
n=4, case=minus
n=5, case=plus
n=5, case=minus
n=6, case=plus
n=6, case=minus
n=8, case=plus
n=8, case=minus
n=10, case=plus
n=10, case=minus

Определим показатель:

$$\text{scale\_ratio} = \frac{r_{\text{final}}}{\max(r_{\text{boat}})}.$$

4.2 Метрика scale_ratio

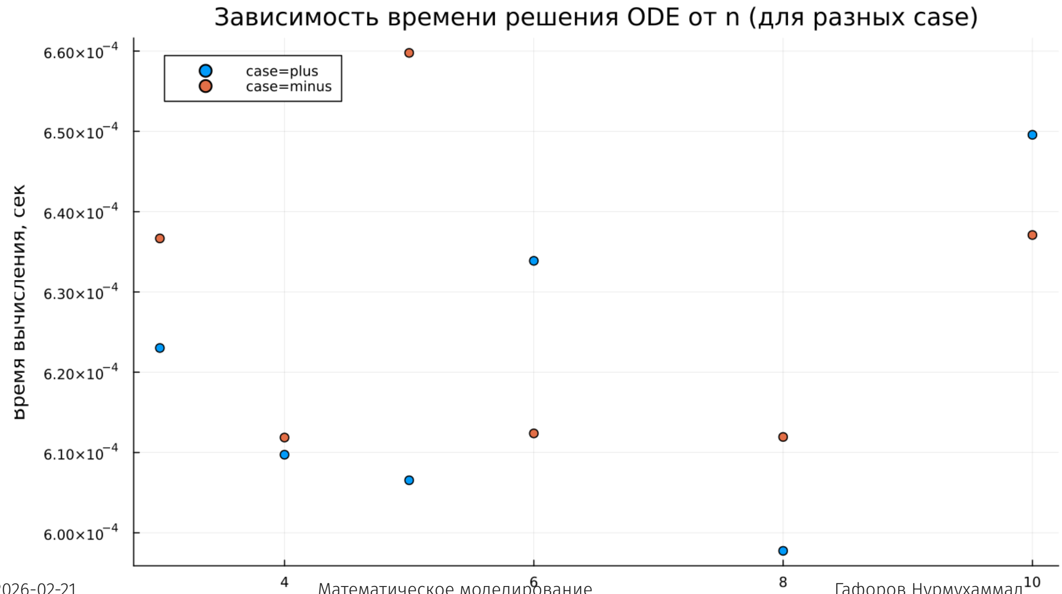
Определим показатель:

$$\text{scale\_ratio} = \frac{r_{\text{final}}}{\max(r_{\text{boat}})}.$$

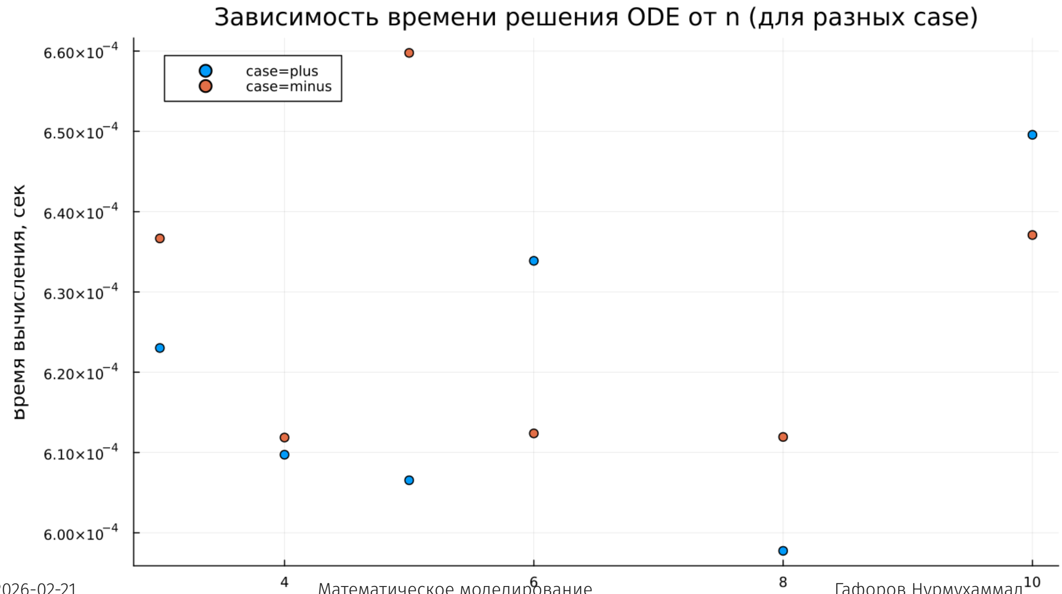
Зависимость scale_ratio от n (для разных case)

Определим показатель:

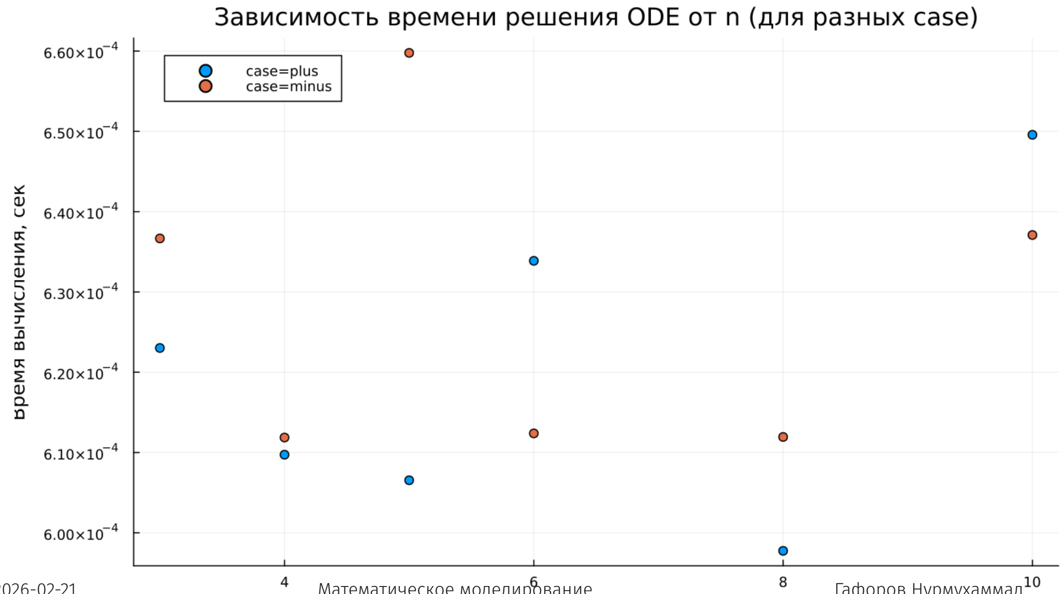
$$\text{scale\_ratio} = \frac{r_{\text{final}}}{\max(r_{\text{boat}})}.$$


Зависимость времени решения ODE от n (для разных case)
case=plus
case=minus
Время вычисления, сек
6.60×10⁻⁴
6.50×10⁻⁴
6.40×10⁻⁴
6.30×10⁻⁴
6.20×10⁻⁴
6.10×10⁻⁴
6.00×10⁻⁴
4
6
8
10

4.3 Время вычислений



4.3 Время вычислений



5. 5. Итоги

5.1 Выводы

1. Траектория катера описывается логарифмической спиралью.

5.1 Выводы

1. Траектория катера описывается логарифмической спиралью.
2. Параметр n определяет скорость радиального роста.

1. Траектория катера описывается логарифмической спиралью.
2. Параметр n определяет скорость радиального роста.
3. Начальное условие влияет на масштаб, но не изменяет форму кривой.

5.1 Выводы

1. Траектория катера описывается логарифмической спиралью.
2. Параметр n определяет скорость радиального роста.
3. Начальное условие влияет на масштаб, но не изменяет форму кривой.
4. Численный метод демонстрирует устойчивость и низкие вычислительные затраты.