

# Математическое моделирование

## Лабораторная работа № 1

---

Гафоров Нурмухаммад

2026-02-10

# Содержание (i)

1. Вводная часть
2. Теория: модель
3. Эксперимент: базовый
4. Эксперимент: параметрическое исследование
5. Итоги

## 1. 1. Вводная часть



## 1.1 Цель работы

- Освоить модель экспоненциального роста и её математическую формулировку

## 1.1 Цель работы

- Освоить модель экспоненциального роста и её математическую формулировку
- Найти аналитическое решение дифференциального уравнения

## 1.1 Цель работы

- Освоить модель экспоненциального роста и её математическую формулировку
- Найти аналитическое решение дифференциального уравнения
- Выполнить параметрическое исследование влияния коэффициента роста  $\alpha$

## 1.1 Цель работы

- Освоить модель экспоненциального роста и её математическую формулировку
- Найти аналитическое решение дифференциального уравнения
- Выполнить параметрическое исследование влияния коэффициента роста  $\alpha$
- Изучить:

## 1.1 Цель работы

- Освоить модель экспоненциального роста и её математическую формулировку
- Найти аналитическое решение дифференциального уравнения
- Выполнить параметрическое исследование влияния коэффициента роста  $\alpha$
- Изучить:
  - ▶ поведение функции  $u(t)$

## 1.1 Цель работы

- Освоить модель экспоненциального роста и её математическую формулировку
- Найти аналитическое решение дифференциального уравнения
- Выполнить параметрическое исследование влияния коэффициента роста  $\alpha$
- Изучить:
  - ▶ поведение функции  $u(t)$
  - ▶ зависимость времени удвоения  $T_2$

## 1.1 Цель работы

- Освоить модель экспоненциального роста и её математическую формулировку
- Найти аналитическое решение дифференциального уравнения
- Выполнить параметрическое исследование влияния коэффициента роста  $\alpha$
- Изучить:
  - ▶ поведение функции  $u(t)$
  - ▶ зависимость времени удвоения  $T_2$
  - ▶ вычислительные особенности моделирования

## 1.2 Задание

- Рассмотреть модель экспоненциального роста как базовый пример

## 1.2 Задание

- Рассмотреть модель экспоненциального роста как базовый пример
- Проанализировать её математическое описание

## 1.2 Задание

- Рассмотреть модель экспоненциального роста как базовый пример
- Проанализировать её математическое описание
- Провести вычислительные эксперименты при различных значениях  $\alpha$

## 1.2 Задание

- Рассмотреть модель экспоненциального роста как базовый пример
- Проанализировать её математическое описание
- Провести вычислительные эксперименты при различных значениях  $\alpha$
- Представить результаты в графическом виде

## 2. 2. Теория: модель



## 2.1 Дифференциальное уравнение

Экспоненциальное изменение величины описывается уравнением:

$$\frac{du}{dt} = \alpha u$$

Где:

- $u$  — текущее значение величины (например, численность, капитал)

## 2.1 Дифференциальное уравнение

Экспоненциальное изменение величины описывается уравнением:

$$\frac{du}{dt} = \alpha u$$

Где:

- $u$  – текущее значение величины (например, численность, капитал)
- $t$  – время

## 2.1 Дифференциальное уравнение

Экспоненциальное изменение величины описывается уравнением:

$$\frac{du}{dt} = \alpha u$$

Где:

- $u$  – текущее значение величины (например, численность, капитал)
- $t$  – время
- $\alpha$  – коэффициент роста

## 2.1 Дифференциальное уравнение

Экспоненциальное изменение величины описывается уравнением:

$$\frac{du}{dt} = \alpha u$$

Где:

- $u$  – текущее значение величины (например, численность, капитал)
- $t$  – время
- $\alpha$  – коэффициент роста
  - ▶  $\alpha > 0$  – наблюдается увеличение

## 2.1 Дифференциальное уравнение

Экспоненциальное изменение величины описывается уравнением:

$$\frac{du}{dt} = \alpha u$$

Где:

- $u$  – текущее значение величины (например, численность, капитал)
- $t$  – время
- $\alpha$  – коэффициент роста
  - ▶  $\alpha > 0$  – наблюдается увеличение
  - ▶  $\alpha < 0$  – происходит затухание

## 2.2 Решение и характеристики

Аналитическое решение:

$$u(t) = u_0 e^{\alpha t}$$

Формула для времени удвоения:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\alpha} \approx \frac{0.693}{\alpha}$$

Основные свойства модели:

- увеличение  $\alpha$  приводит к более быстрому росту

## 2.2 Решение и характеристики

Аналитическое решение:

$$u(t) = u_0 e^{\alpha t}$$

Формула для времени удвоения:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\alpha} \approx \frac{0.693}{\alpha}$$

Основные свойства модели:

- увеличение  $\alpha$  приводит к более быстрому росту
- при росте  $\alpha$  время удвоения уменьшается

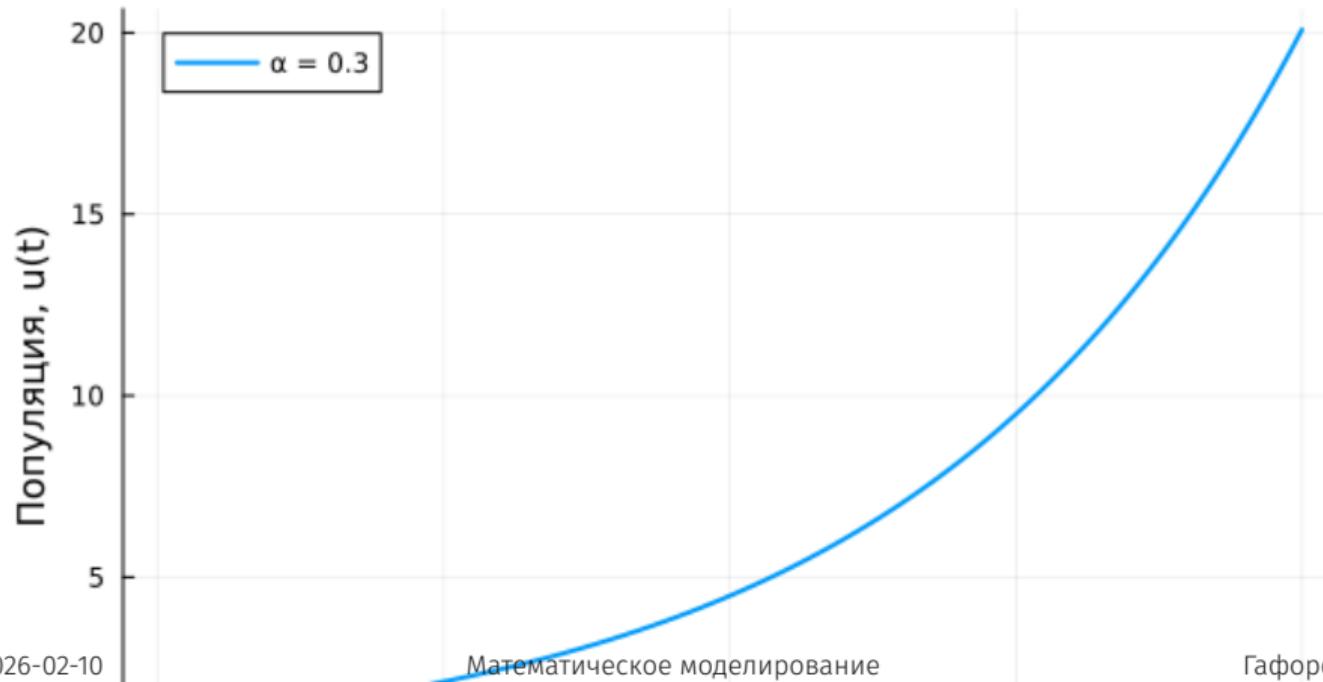
### 3. 3. Эксперимент: базовый



### 3.1 Базовый эксперимент ( $\alpha = 0.3$ )

- Исследовано поведение функции  $u(t)$  на заданном промежутке времени

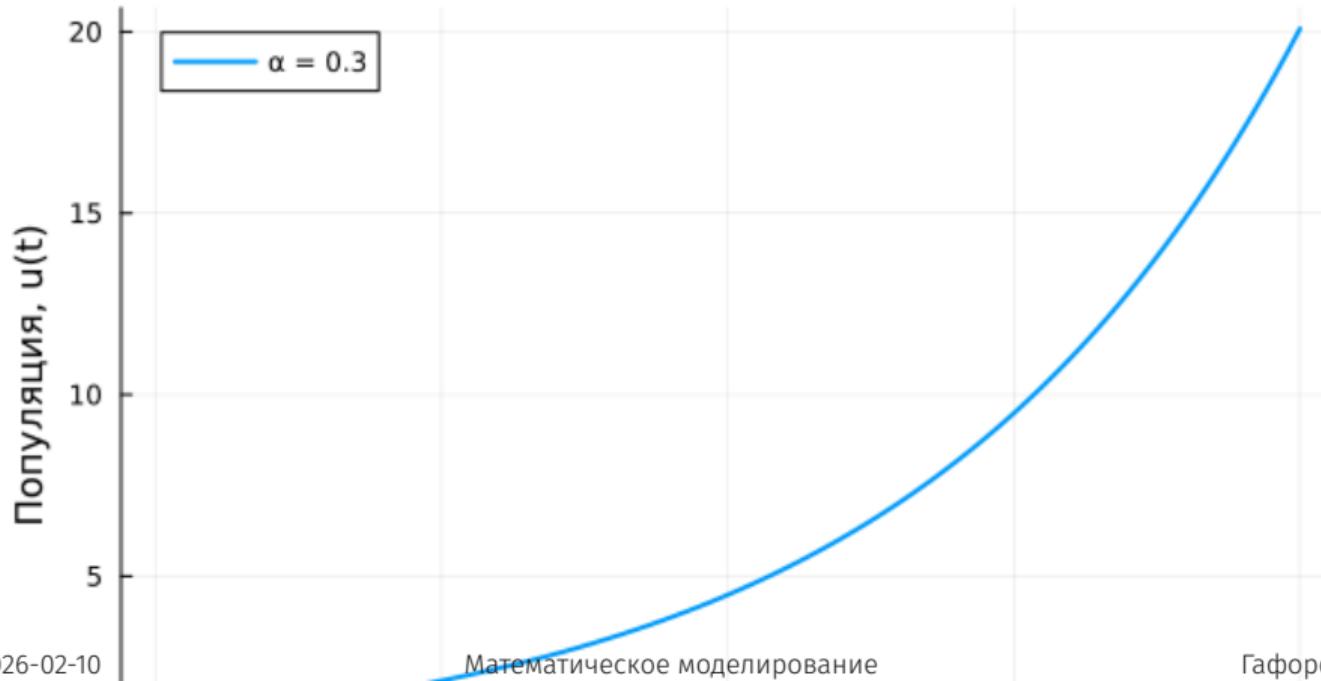
#### Экспоненциальный рост (базовый эксперимент)



### 3.1 Базовый эксперимент ( $\alpha = 0.3$ )

- Исследовано поведение функции  $u(t)$  на заданном промежутке времени
- График демонстрирует типичную экспоненциальную динамику

#### Экспоненциальный рост (базовый эксперимент)



#### 4. 4. Эксперимент: параметрическое исследование

---

## 4.1 Влияние $\alpha$ на рост

- Проведены расчёты для значений:



## 4.1 Влияние $\alpha$ на рост

- Проведены расчёты для значений:
    - $\alpha = 0.1, 0.3, 0.5, 0.8, 1.0$



## 4.1 Влияние $\alpha$ на рост

- Проведены расчёты для значений:
  - $\alpha = 0.1, 0.3, 0.5, 0.8, 1.0$
- При увеличении параметра система начинает расти значительно быстрее

Параметрическое исследование: влияние  $\alpha$  на рост



## 4.2 Время удвоения

Теоретическая формула:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\alpha}$$

- Результаты вычислений согласуются с теоретической зависимостью

### Зависимость времени удвоения от $\alpha$



## 4.2 Время удвоения

Теоретическая формула:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\alpha}$$

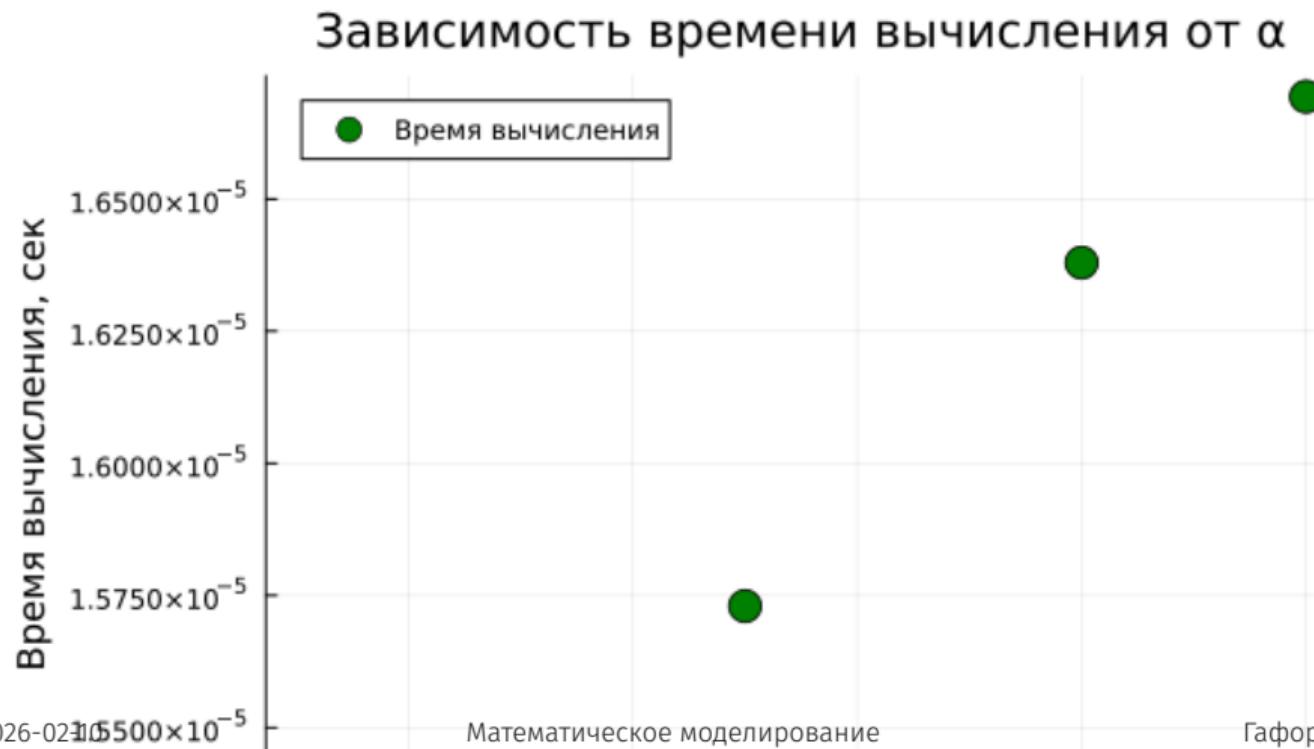
- Результаты вычислений согласуются с теоретической зависимостью
- С ростом  $\alpha$  время удвоения уменьшается

Зависимость времени удвоения от  $\alpha$



## 4.3 Время вычислений

- Исследована зависимость времени расчёта от значения  $\alpha$



## 4.3 Время вычислений

- Исследована зависимость времени расчёта от значения  $\alpha$
- Изменения времени выполнения остаются незначительными

Зависимость времени вычисления от  $\alpha$



## 5. 5. Итоги



## 5.1 Выводы

- Экспоненциальная динамика описывается уравнением:

$$\frac{du}{dt} = \alpha u$$

## 5.2 Выводы

- Его аналитическое решение имеет вид:

$$u(t) = u_0 e^{\alpha t}$$

## 5.2 Выводы

- Его аналитическое решение имеет вид:

$$u(t) = u_0 e^{\alpha t}$$

- Коэффициент  $\alpha$  определяет интенсивность роста системы

## 5.3 Выводы

- Время удвоения выражается формулой:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\alpha}$$

## 5.4 Выводы

- Численные эксперименты подтвердили теоретические зависимости

## 5.4 Выводы

- Численные эксперименты подтвердили теоретические зависимости
- При увеличении  $\alpha$  наблюдается:

## 5.4 Выводы

- Численные эксперименты подтвердили теоретические зависимости
- При увеличении  $\alpha$  наблюдается:
  - ▶ ускорение роста

## 5.4 Выводы

- Численные эксперименты подтвердили теоретические зависимости
- При увеличении  $\alpha$  наблюдается:
  - ▶ ускорение роста
  - ▶ уменьшение времени удвоения

## 5.4 Выводы

- Численные эксперименты подтвердили теоретические зависимости
- При увеличении  $\alpha$  наблюдается:
  - ▶ ускорение роста
  - ▶ уменьшение времени удвоения
  - ▶ незначительное увеличение вычислительных затрат