Số học giải tích

Mục lục

1 Phương pháp tiệm cận (growth rate analysis)

Định lý 1.1. Cho một đa thức hệ số thực $P(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ (với $a_d \neq 0$). Chứng minh rằng

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{x^d} = \lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{x^d} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{|P(x)|}{|x|^d} = a_d$. Nói cách khác, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $M > 0$, sao cho $(1-\varepsilon)a_d|x|^d < |P(x)| < (1+\varepsilon)a_d|x|^d$ với mọi $|x| \geq M$.
2. Tồn tại $M > 0$ sao cho $|P(x)| > |P(y)|$ với mọi $|x| > |y| \geq M$. Nói cách khác, $|P(x)|$ tăng nghiêm ngặt khi x đủ lớn, hoặc x đủ nhỏ (với $x < 0$).
3. Với mọi $0 < C_1 < |a_d| < C_2$, tồn tại $M > 0$ (dựa trên C_1, C_2) sao cho $C_1|x|^d < |P(x)| < C_2|x|^d$ với mọi $|x| \geq M$.
4. Nếu $Q(x)$ là một đa thức với bậc nhỏ hơn bậc của $P(x)$, tồn tại $M > 0$ sao cho $|P(x)| > |Q(x)|$ với mọi $|x| \geq M$. Nói cách khác, $|P(x)| > |Q(x)|$ khi x đủ lớn.

Nhận xét 1.2. Nếu $p(x)$ là một đa thức đơn khởi bậc d, và (x_n) là dãy số được cho bởi $x_0 = x, x_{n+1} = p(x_n)$ $(n \geq 0)$, ta có $x_n \sim x^{d^n}$.

Bài toán 1.3.
$p(x)$ là đa thức hệ số nguyên sao cho $p(n) > n$ với mọi số tự nhiên n. (x_k) là dãy số sao cho $x_1 = 1, x_{i+1} = p(x_i)$, và với mỗi số nguyên N khác không, có một x_i chia hết cho N. Chứng minh $p(x) = x + 1$.

Bài toán 1.4. Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số nguyên sao cho, với mọi số nguyên dương n, phương trình $P(x) = 2^n$ có nghiệm nguyên.

Bài toán 1.5.
Cho đa thức đơn khởi, bậc chẵn, hệ số nguyên $P(x)$ sao cho với vô số số nguyên n, $P(n)$ là một số chính phương. Chứng minh rằng tồn tại một đa thức hệ số nguyên khác $Q(x)$ sao cho $P(x) = Q(x)^2$.

Bài toán 1.6.
Tìm tất cả các đa thức $P(x), Q(x)$ hệ số nguyên thỏa mãn điều sau: nếu (x_n) là dãy số được định nghĩa bởi

$$x_0 = 2014, x_{2n+1} = P(x_{2n}), x_{2n+2} = Q(x_{2n+1}) \qquad n \geq 0$$

Mỗi số nguyên dương m là ước của một phần tử x_n khác không trong dãy.

Bài toán 1.7.
Cho $P(x)$ là một đa thức hệ số nguyên khác hằng, và n là một số tự nhiên. Gọi $(a_n)_{n\geq 0}$ là một dãy số sao cho $a_0 = n, a_k = P(a_{k-1})$.

Giả sử với mỗi số tự nhiên b, có một phần tử trong dãy là lũy thừa với số mũ b và thừa số lớn hơn 1 (hay nói cách khác, tồn tại a_i sao cho $\sqrt[b]{a_i}$ là một số nguyên dương khác 1).

Chứng minh rằng bậc của $P(x)$ là 1.

Bài toán 1.8.
Tìm số thực α lớn nhất sao cho tồn tại một dãy số nguyên (a_n) thỏa mãn các điều sau

1. $a_n > 1997^n$ với mọi $n \geq 1$.
2. Với mỗi $n \geq 2$, $U_n \geq a_n^{\alpha}$, với $U_n = \gcd\{a_i + a_k \mid i + k = n\}$.

Bài toán 1.9.
Tìm tất cả đa thức hệ số nguyên sao cho với mọi số thực s và t, nếu $P(s)$ và $P(t)$ nguyên, ta có $P(st)$ cũng nguyên.

Bài toán 1.10.
Cho các lớp đồng dư $\{a_1 \bmod m_1, a_2 \bmod m_2, \ldots, a_k \bmod m_k\}$ (với $m_1, m_2, \ldots, m_k \geq 2$). Ta gọi hệ này là

1. Hệ thặng dư *đầy đủ* nếu mỗi số nguyên thuộc ít nhất một lớp đồng dư $a_i \bmod m_i$. Hay nói cách khác, với mỗi số nguyên n, tồn tại $1 \leq i \leq k$ sao cho $n \equiv a_i \pmod{m_i}$.
2. Hệ thặng dư *chính xác* nếu mỗi số nguyên thuộc nhiều nhất một lớp đồng dư $a_i \bmod m_i$. Hay nói cách khác, không tồn tại số nguyên n, và $i \neq j$ sao cho $n \equiv a_i \pmod{m_i}$ và $n \equiv a_j \pmod{m_j}$.

Ví dụ, $\{1 \bmod 2, 2 \bmod 4, 4 \bmod 8, 0 \bmod 8\}$ là một hệ thặng dư đầy đủ và chính xác, tuy nhiên có 2 lớp đồng dư có chung một modulo. $\{0 \bmod 2, 0 \bmod 3, 1 \bmod 4, 5 \bmod 6, 7 \bmod 12\}$ là một hệ thặng dư đầy đủ khác với các lớp đồng dư có modulo đôi một khác nhau, nhưng không chính xác.

Liệu có tồn tại hay không một hệ thặng dư đầy đủ và chính xác, với modulo của các lớp đồng dư đôi một khác nhau?

2 Phương pháp dãy số nguyên

Định lý 2.1. Nếu (x_n) là một dãy số nguyên hội tụ, x_n phải là hằng số với n đủ lớn. Nói cách khác, tồn tại một số nguyên a và số tự nhiên N sao cho $x_n = a$ với mọi $n \geq N$.

Bài toán 2.2. Giả sử $f(x), g(x)$ là các đa thức hệ số nguyên khác hằng sao cho $f(n) \mid g(n)$ với vô hạn số nguyên n. Chứng minh tồn tại một đa thức *hữu tỷ* $q(x)$ sao cho $g(x) = f(x)q(x)$.

Bài toán 2.3.
Cho a, b, c là các số nguyên với $a \neq 0$, sao cho $an^2 + bn + c$ là một số chính phương với mọi $n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng tồn tại 2 số nguyên x, y sao cho $a = x^2, b = 2xy, c = y^2$.

Bài toán 2.4.
Cho a, b là 2 số nguyên sao cho $a \cdot 2^n + b$ luôn là một số chính phương với mọi số nguyên dương n. Chứng minh rằng $a = 0$.

Bài toán 2.5.
Cho $a_1, a_2, \ldots, a_k$ là các số thực sao cho có ít nhất một số không phải là số nguyên. Chứng minh tồn tại vô hạn số nguyên n sao cho n và $\lfloor a_1 n \rfloor + \lfloor a_2 n \rfloor + \cdots + \lfloor a_k n \rfloor$ nguyên tố cùng nhau.

Bài toán 2.6.
Tìm tất cả đa thức hệ số nguyên $P(x)$ sao cho $P(\mathbb{Z}) = \{p(a) : a \in \mathbb{Z}\}$ có chứa một cấp số nhân vô hạn (với công bội khác $0, \pm 1$).

Hay nói cách khác, tìm tất cả các đa thức hệ số nguyên $P(x)$ sao cho tồn tại một số thực $r \notin \{0, \pm 1\}$ và một dãy số nguyên $(a_n)_{n \geq 0}$ thỏa mãn $P(a_{n+1}) = rP(a_n)$ với mọi $n \geq 0$.

Bài toán 2.7.
Tìm tất cả đa thức hệ số thực $f(x)$ sao cho nếu n là một số nguyên chứa toàn chữ số 1 (trong hệ cơ số 10), $f(n)$ cũng là một số nguyên chứa toàn chữ số 1.

Bài toán 2.8.
Giải phương trình đa thức hệ số nguyên

$$p(x)^2 = (x^2 + 6x + 10)q(x)^2 - 1$$

Bài toán 2.9.
Tìm tất cả các cấp số cộng $(a_n)_{n \geq 1}$ sao cho $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ là số chính phương với mọi $n \geq 1$.

Bài toán 2.10.
Cho $p(x)$ là một đa thức hệ số nguyên sao cho tồn tại một dãy số nguyên $(a_n)_{n \geq 1}$ đôi một khác nhau sao cho $p(a_1) = 0, p(a_2) = a_1, p(a_3) = a_2, \cdots$. Tìm bậc của đa thức $p(x)$.

Bài toán 2.11.
Tìm tất cả số nguyên a, b, c sao cho $a \cdot 4^n + b \cdot 6^n + c \cdot 9^n$ là một số chính phương khi n đủ lớn.

Bài toán 2.12.
Cho b là một số nguyên lớn hơn 5 và

$$x_n = \underbrace{11\cdots1}_{n-1}\underbrace{22\cdots2}_{n}5$$

là biểu diễn của x_n trong hệ cơ số b. Chứng minh x_n là số chính phương với mọi n đủ lớn khi và chỉ khi $b = 10$.

Bài toán 2.13.
Cho $f(x), g(x)$ là 2 đa thức hệ số thực sao cho $\{f(x) : x \in \mathbb{Q}\} = \{g(x) : x \in \mathbb{Q}\}$. Chứng minh tồn tại 2 số hữu tỷ a, b sao cho $f(x) = g(ax + b)$.

Bài toán 2.14.
Giả sử a là một số thực sao cho $1^a, 2^a, 3^a, \cdots$ là các số nguyên. Chứng minh rằng a nguyên.

3 Phương pháp sàng lọc (sieve method)

Phương pháp sàng lọc sử dụng ý tưởng từ sàng Eratosthenes để loại ra những số có ước không thỏa mãn một hay nhiều điều kiện nào đó. Nó cũng có thể sử dụng để chứng minh chặn cho nhiều hàm số học.

Gọi $\pi(x)$ là số các số nguyên tố $\leq x$

Bài toán 3.1 (Eratosthenes sieve)**.**
Chứng minh rằng

$$\pi(x) - \pi(\sqrt{x}) + 1 = \sum_{d} \mu(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor$$

với tổng chạy cho các số nguyên dương d sao cho nếu p là ước nguyên tố của d, ta có $p \leq \sqrt{x}$.

Bài toán 3.2 (Euclid sieve)**.** Chứng minh $\pi(x) \geq \log_2 \log_2 x$ với mọi $x \geq 2$.

Bài toán 3.3 (Square sieve)**.** Chứng minh $\pi(x) \geq \frac{\log_2 x}{2}$ với mọi $x \geq 2$.

Bài toán 3.4. Chứng minh tổng nghịch đảo các số nguyên tố phân kỳ.

Tuy nhiên để chặn $\pi(x)$ sao cho $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0$ (hay $\pi(x) = o(x)$), ta giới thiệu một hàm mới

Bài toán 3.5 (Binomial sieve)**.**
Gọi $\vartheta(x) = \sum_{p\leq x} \ln p$ (p nguyên tố), ta có $\theta(x) < (4\ln 2)x$ với mọi $x \geq 1$.

Hệ quả 3.6 (Chebyshev)**.**
Tồn tại một hằng số $C > 0$ sao cho $\pi(x) < \frac{Cx}{\ln x}$ với mọi $x \geq 2$.

Bài toán 3.7 (Chebyshev)**.**
Tồn tại một hằng số $C > 0$ sao cho $\pi(x) > \frac{Cx}{\ln x}$ với mọi $x \geq 2$.

Bài toán 3.8 (Bertrand Postulate)**.**
Với mọi số nguyên $n \geq 2$, tồn tại một số nguyên tố p sao cho $n < p < 2n$.

Bài toán 3.9.
Giả sử n, k là các số nguyên dương sao cho

$$1 = \varphi(\varphi(\cdots\varphi(n)\cdots))$$

với hàm phi Euler φ áp dụng k lần lên n ($\varphi(n)$ là số các số $1 \leq k \leq n$ nguyên tố cùng nhau với n). Chứng minh rằng $n \leq 3^k$.

Bài toán 3.10.
Chứng minh tồn tại vô hạn số nguyên n sao cho $n^2 + 1$ không có ước chính phương.

Bài toán 3.11.
$\pi(n)$ là số các số nguyên tố không lớn hơn n. Với $n = 2, 3, 4, 6, 8, 33, \ldots$, ta có $\pi(n) \mid n$. Liệu có tồn tại vô hạn số nguyên dương n sao cho $\pi(n) \mid n$?

Bài toán 3.12.
Cho dãy số nguyên dương (a_n) tăng nghiệm ngặt, và gọi u_n là bội chung nhỏ nhất của n phần tử đầu tiên trong dãy. Chứng minh rằng $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ hội tụ.

Bài toán 3.13.
Với mỗi $n \geq 2$ nguyên, chọn một đa thức $f(x)$ ngẫu nhiên từ tập hợp các đa thức đơn khởi, bậc n, với các hệ số nguyên từ tập $\{1, 2, \ldots, n!\}$. $f(x)$ được gọi là một đa thức *đặc biệt* nếu với mọi $k > 1$, có vô hạn số trong dãy $f(1), f(2), \ldots$ nguyên tố cùng nhau với k.

1. Tìm xác suất để $f(x)$ là một đa thức đặc biệt.
2. Chứng minh xác suất để $f(x)$ đặc biệt nhỏ hơn $0,75$.
3. Chứng minh xác suất để $f(x)$ đặc biệt lớn hơn $0,71$.

4 Tổng nghịch đảo

Bổ đề 4.1. Cho $p_1, p_2, \ldots, p_k$ là các số nguyên tố, chứng minh rằng với mọi $s > 1$, ta có

$$\sum_n \frac{1}{n^s} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^s}}$$

Với tổng bên trái là tổng các số tự nhiên n có dạng $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \geq 0)$.

Hệ quả 4.2. Chứng minh tổng nghịch đảo các số nguyên tố phân kỳ.

Bài toán 4.3. Gọi $p_1, p_2, \ldots, p_k$ là tất cả số nguyên tố nhỏ hơn m, chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} > \ln \ln m$$

Bài toán 4.4. Gọi p_n là số nguyên tố thứ n và ν là một số thực lớn hơn 1. Chứng minh rằng dãy $\lfloor p_n \nu \rfloor$ có vô hạn ước nguyên tố.

Bài toán 4.5.
Giả sử f là một đa thức hệ số nguyên, và (a_n) là một dãy nguyên dương tăng nghiêm ngặt sao cho $a_n \leq f(n)$. Chứng minh có vô hạn số nguyên tố p sao cho p là ước của một phần tử a_n.

Bài toán 4.6.
Cho $(a_n)_{n \geq 1}$ là một hoán vị của tập các số nguyên dương. Chứng minh rằng với mọi $\gamma > \frac{3}{4}$, tồn tại vô hạn số i sao cho $\gcd(a_i, a_{i+1}) \leq \gamma i$.

Bài toán 4.7.
Cho $a_1, a_2, \ldots$ là các số nguyên dương đôi một khác nhau, và $0 < c < \frac{3}{2}$. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương k sao cho $\operatorname{lcm}(a_k, a_{k+1}) > ck$.

Bài toán 4.8.
Giả sử α là một số thực dương và $(a_n)_{n \geq 1}$ là một dãy tự nhiên tăng nghiệm ngặt sao cho $a_n \leq n^\alpha$ với mọi $n \geq 1$. Gọi một số nguyên tố q *vàng* nếu có một phần tử a_m chia hết cho q. Gọi $(q_n)_{n \geq 1}$ là dãy các số nguyên tố vàng theo thứ tự tăng dần.

1. Chứng minh rằng nếu $\alpha = 1.5$, ta có $q_n \leq 1390^n$. Có chặn trên nào tốt hơn cho q_n không?

2. Chứng minh rằng nếu $\alpha = 2.4$, ta có $q_n \leq 1390^{2n}$. Có chặn trên nào tốt hơn cho q_n không?