1 Trường hè Bắc 2011

Bài tập 1.1. Giải hệ phương trình sau

$$(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1}) = 1$$
$$y+\frac{y}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{35}{12} = 0$$

Nhận xét 1.2. Giải tích, Lượng liên hợp, Phép thế (lượng giác/hyperbol)

Chứng minh. Khi có 1 biểu thức được lặp lại trong cùng 1 phương trình, ta nên phân tích nó! Đặt $f(x) = x+\sqrt{x^2+1}$, thì đạo hàm của f là

$$f'(x) = 1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Chừng nào thì $f' \geq 0$ (tương đương với việc f không giảm)? Đó là khi và chỉ khi

$$1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \geq 0$$
$$\sqrt{x^2+1}+x \geq 0$$
$$\sqrt{x^2+1} \geq -x$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$. Vậy là f luôn luôn tăng *nghiêm ngặc* trên tập số thực $\mathbb{R}$. Thêm nữa, với cùng lý luận như trên, ta có thể thấy $f(x) > 0$ với mọi x. Cuối cùng, lưu ý là $f(0) = 1$, cho nên $f(x) > f(0) = 1$ với $x > 0$, và $f(x) < 1$ với $x < 0$.

Ta viết lại phương trình đầu thành $f(x)f(y) = 1$, hoặc là $f(x) = f(y)^{-1}$. Như vậy nếu $f(x) > 1$ (tương đương với việc $x > 0$ thì $f(y)$ phải bắt buộc nhỏ hơn 1 (tương đương với việc $y < 0$, và ngược lại. Nói cách khác, x và y phải trái dấu nhau, cho nên $xy < 0$.

Điều kiện bất đẳng thức như thế thì vẫn không đủ để giải được phương trình 2 (lưu ý biểu thức không liên quan gì đến phương trình 1, cho dù có phần $\sqrt{x^2-1}$, nhưng vẫn khác với $\sqrt{x^2+1}$), cho nên mình phải tìm thêm tính chất nào đó ở phương trình 1. Lưu ý rằng

$$(x+\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+1}-x) = x^2+1-x^2 = 1$$

Cho nên $y = -x$ là 1 nghiệm của phương trình 1 (khi x được giữ nguyên). Tuy nhiên f luôn luôn tăng nghiêm ngặc (cụ thể là f đơn ánh), cho nên nghiệm này thật ra là nghiệm duy nhất của phương trình 1. Nói cách khác, phương trình 1 có nghiệm duy nhất là $y = -x$.

Thay vào phương trình 2, ta có

$$
\begin{aligned}
-x - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{35}{12} &= 0 \\
x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) &= \frac{35}{12} \\
x\left(\sqrt{x^2-1}+1\right) &= \frac{35}{12}\sqrt{x^2-1} \\
x^2\left(\sqrt{x^2-1}+1\right)^2 &= \frac{1225}{144}(x^2-1) \\
\left(t^2+1\right)(t+1)^2 &= \frac{1225}{144}t^2 \text{ (đặt } t = \sqrt{x^2-1}) \\
t^4 + 2t^3 - \frac{937}{144}t^2 + 2t + 1 = 0
\end{aligned}
$$

Phương trình bậc 4, tuy có thể giải được bằng công thức (hoặc thử nghiệm), nhưng ta sẽ không đi theo hướng rắc rối như vậy (thử nghiệm cũng nhiều vì $144 = 2^4 * 3^2$). Thay vào đó, khi nhìn thấy đại lượng $\sqrt{x^2-1}$, ta có thể gán s cho nó và được đẳng thức $x^2 - s^2 = 1$. Những ai quen với biểu thức này thì biết

$$x = \pm\frac{t+1/t}{2}, s = \frac{t-1/t}{2}$$

Nhưng x phải dương do $x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{35}{12}$, cho nên là $x = \frac{t+1/t}{2}$. Từ đó ta có

$$
\begin{aligned}
\frac{t+1/t}{2}\left(1+\frac{2}{t-1/t}\right) &= \frac{35}{12} \\
\left(t+\frac{1}{t}\right)\left(t-\frac{1}{t}+2\right) &= \frac{35}{6}\left(t-\frac{1}{t}\right) \\
\left(t^2+1\right)\left(t^2+2t-1\right) &= \frac{35}{6}\left(t^2-1\right) \\
t^4 - \frac{23}{6}t^3 + \frac{47}{6}t - 1 = 0
\end{aligned}
$$

Thử nghiệm, ta có thể thấy $t = 2$ và $t = 3$ là nghiệm của đa thức trên, cho nên

$$t^4 - \frac{23}{6}t^3 + \frac{47}{6}t - 1 = (t-2)(t-3)(t^2 + \frac{7}{6}t - \frac{1}{6})$$

Đa thức bậc 2 ở cuối cho ta thêm 2 nghiệm nữa là $t = \frac{-7\pm\sqrt{73}}{12}$. Thay t lại cho x, ta có $x \in \left\{\frac{5}{4}, \frac{5}{3}, \frac{35\pm7\sqrt{73}}{24}\right\}$. Thử từng nghiệm x vào phương trình gốc thứ 2, ta nhận 2 nghiệm $x = 5/4$ và $x = 5/3$ và loại 2 nghiệm còn lại $\square$

Cách giải khác. Ta giải phương trình 1 bằng việc nhân lượng liên hợp nhiều lần

$$x + \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2+1}} = \sqrt{y^2+1} - y$$
$$x + y = \sqrt{y^2+1} - \sqrt{x^2+1} = \frac{y^2 - x^2}{\sqrt{y^2+1} + \sqrt{x^2+1}}$$
$$(x+y)\left[1 + \frac{x-y}{\sqrt{y^2+1} + \sqrt{x^2+1}}\right] = 0$$
$$(x+y)\frac{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) + \left(\sqrt{y^2+1} - y\right)}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}} = 0$$

Để ý ở tử là $\sqrt{x^2+1} > |x| \geq -x$ và $\sqrt{y^2+1} > |y| \geq y$, cho nên tử luôn luôn dương. Mẫu cũng vậy, cho nên là $x + y = 0$, hay $x = -y$.

Với phương trình 2, thay $y = -x$ ta có

$$-x - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{35}{12} = 0$$
$$x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{35}{12} = 0$$

Để ý là $|x| > 1$, mà bên phải dương, cho nên x phải dương, suy ra $x > 1$. Từ đó, ta viết lại phương trình 2 thành

$$\frac{1}{1/x} + \frac{1}{\sqrt{1 - 1/x^2}} = \frac{35}{12}$$

Vì $x > 1$, nên $0 < 1/x < 1$, cho nên ta có thể đặt $1/x = \cos\theta$ và $\sqrt{1 - 1/x^2} = \sin\theta$, với $\theta \in [0, \pi/2]$. Phương trình trở thành

$$\frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta} = \frac{35}{12}$$
$$\cos\theta + \sin\theta = \frac{35}{12}\cos\theta\sin\theta$$
$$1 + 2\cos\theta\sin\theta = \frac{1225}{144}(\cos\theta\sin\theta)^2$$

Đặt $u = \cos\theta\sin\theta$ và giải phương trình bậc 2, ta có $u \in \left\{-\frac{12}{49}, \frac{12}{25}\right\}$. Vì $\theta \in [0, \pi/2]$, ta luôn có $u > 0$, suy ra $u = 12/25$. Thế lại vào phương trình trên, ta có $\cos\theta + \sin\theta = 35/12 \cdot 12/25 = 7/5$. Cùng với $u = \cos\theta\sin\theta = 12/25$, ta tính ra được $(\cos\theta, \sin\theta) \in \{(3/5, 4/5), (4/5, 3/5)\}$. Vì $1/x = \cos\theta$ và $y = -x$, từ đó ta suy ra được $(x, y) \in \{(3/5, -3/5), (4/5, -4/5)\}$. Thử lại vào hệ phương trình ta thấy 2 nghiệm đều thõa mãn. $\square$

Bài tập 1.3. Tìm tất cả các hàm nguyên $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ sao cho $f(1) > 0$ và

$$f(m^2 + 3n^2) = (f(m))^2 + 3(f(n))^2$$

Nhận xét 1.4. Thế số, Những số có dạng $m^2 + kn^2$.

Chứng minh.

1. Cho $m = n = 0$: $f(0) = 4(f(0))^2$. Nếu $f(0) \neq 0$, ta có $1 = 4f(0)$ (vô lý vì f nguyên). Cho nên $f(0) = 0$.

2. Cho $n = 0$: $f(m^2) = (f(m))^2$. Cho $m = 0$: $f(3n^2) = 3(f(n))^2 = 3f(n^2)$. Như vậy $f(3x) = 3f(x)$ với mọi số chính phương x.

3. Cho $m = n$: $f(4m^2) = 4(f(m))^2 = 4f(m^2)$. Tương tự, ta cũng thấy $f(4x) = 4f(x)$ với mọi số chính phương x.

Thử một vài số cụ thể để tìm giá trị của f

1. Cho $m = 1, n = 0$: $f(1) = (f(1))^2 + 3(f(0))^2 = (f(1))^2$. Vì $f(1) > 0$, ta phải có $f(1) = 1$.

2. Cho $m = 0, n = 3$: $f(3) = (f(0))^2 + 3(f(1))^2 = 3$.

3. Cho $m = 2, n = 0$: $f(4) = (f(2))^2$. Mặt khác, cho $m = n = 1$: $f(4) = 4(f(1))^2 = 4$. Cho nên $f(2) = 2$.

Để ý rằng $(3a + b)^2 + 3(a - b)^2 = 4(a^2 + 3b^2) = (3a - b)^2 + 3(a + b)^2$, cho nên nếu ta thế $m = 3a + b, n = a - b$ và $m = 3a - b, n = a + b$ thì

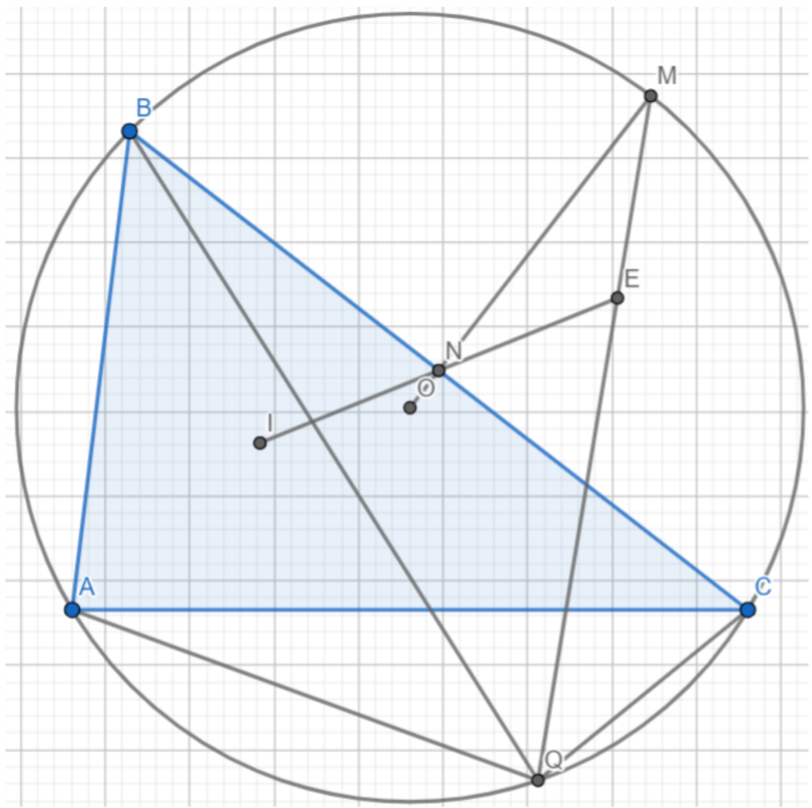
$$f(4a^2 + 12b^2) = (f(3a + b))^2 + 3(f(a - b))^2 = (f(3a - b))^2 + 3(f(a + b))^2$$

Với a, b không âm, $3a + b$ là số lớn nhất trong các số $3a + b, a - b, 3a - b, a + b$. Như vậy, nếu ta chứng minh được $f(n) = n$ với $n \in \{a - b, 3a - b, a + b\}$, thì $f(3a + b) = 3a + b$. Vì $f(n) = n$ cho $n < 4$, quy nạp theo n ta sẽ chứng minh được $f(n) = n$ với mọi n. $\square$

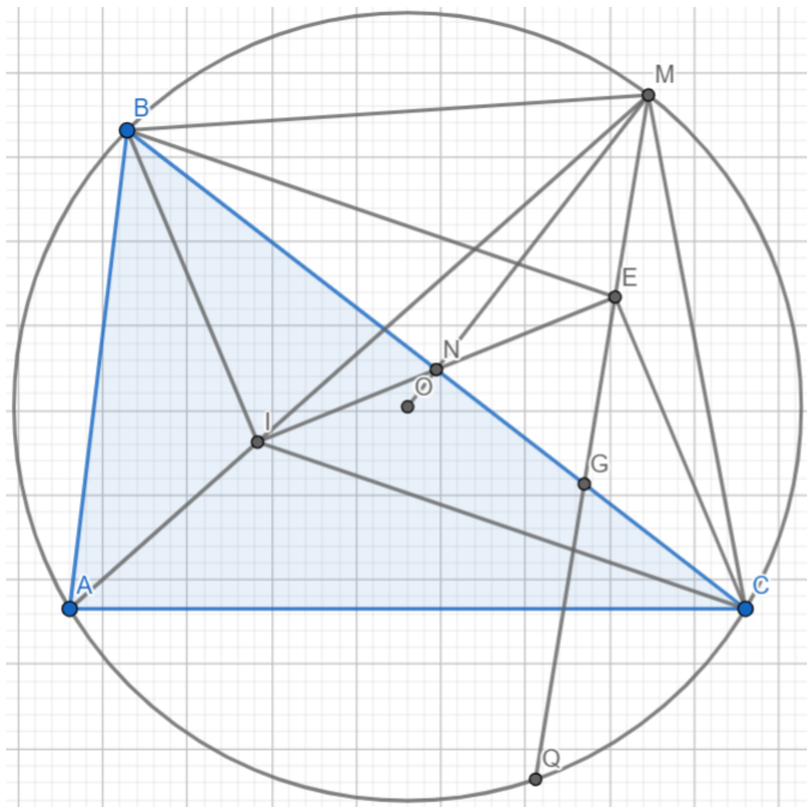
Bài tập 1.5. Cho tam giác nhọn ABC có các góc thỏa mãn $\hat{C} < \hat{B} < \hat{A}$, nội tiếp (O) và ngoại tiếp (I). M là điểm chính giữa cung nhỏ BC (của (O)), N là trung điểm BC. Điểm E đối xứng I qua N. Đường thẳng ME cắt (O) tại điểm thứ hai Q. Chứng minh rằng

1. Điểm Q thuộc cung nhỏ AC.

2. $BQ = AQ + CQ$.



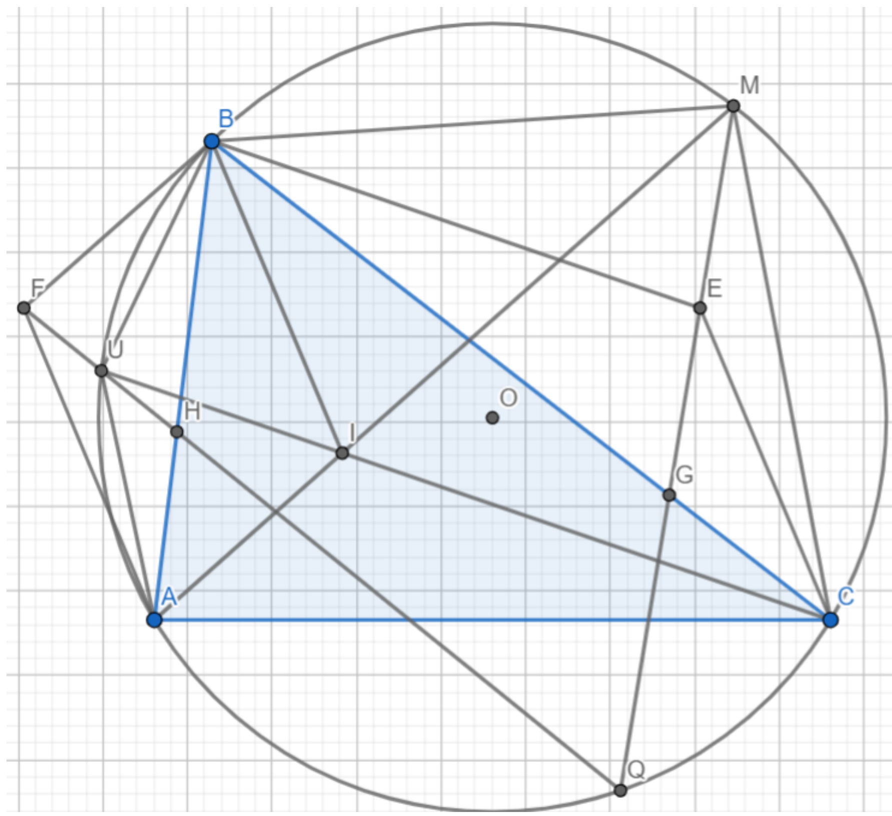
Chứng minh.
1/



I đối xứng với E qua N, nên N là trung điểm của IE. Nhưng N cũng là trung điểm của BC, nên $BECI$ là hình bình hành. Như vậy, ta có $BE//CI, CE//BI$, và $E\hat{B}C = B\hat{C}I = C/2, E\hat{C}B = C\hat{B}I = B/2$. Ta cũng có $B\hat{E}C = 180^o - E\hat{B}C - E\hat{C}B = 180 - B/2 - C/2$ và $B\hat{M}C = 180^o - A$. Nhưng $C < B < A$, nên $B/2 + C/2 < A/2 + A/2 = A$. Suy ra là $B\hat{M}C = 180^o - A < 180^o - B/2 - C/2 = B\hat{E}C$. Nói cách khác, E phải nằm trong tam giác BMC.

Mặt khác, cho EH vuông góc với BC tại H (H thuộc đoạn thẳng BC vì ta đã chứng minh E nằm trong tam giác BMC). Vì $E\hat{B}C = C/2 < B/2 = E\hat{C}B$, ta có $BH > CH$, suy ra H thuộc đoạn thẳng CN. Như vậy E nằm trong tam giác nhỏ hơn CMN. Khi đó, tia ME nằm giữa tia MC và tia MN. Ta chứng minh tia MN lại nằm giữa tia MA và MC, từ đó suy ra được tia ME nằm giữa tia MA và MC, và ta sẽ có ME cắt (O) tại cung nhỏ AC. Thật vậy, ta có thể tính 2 góc $C\hat{M}N = C\hat{M}B/2 = 90^o - A/2$ và $C\hat{M}A = B$. Đặt $x = A/2 + B, y = A/2 + C$, ta thấy $x + y = A + B + C = 180^o$ và $x > y$ (vì $B > C$), cho nên x phải lớn hơn 90^o. Nói cách khác, $A/2 + B > 90^o$, cho nên $C\hat{M}A > 90^o - A/2 = C\hat{M}N$, tức là tia MN nằm giữa tia MC và MA. Ta kết luận Q nằm trên cung nhỏ AC.

2/



Cho F đối xứng với I qua trung điểm của AB (hay nói cách khác, $BFAI$ là hình bình hành), và U là điểm chính giữa của cung AB nhỏ (trên (O)). Ta chứng minh F, U, Q thẳng hàng trước. Cho FU cắt ME tại P (không nhất thiết $P \in (O)$).

1. Ta có $F\hat{B}U = F\hat{B}A - U\hat{B}A = B\hat{A}I - (90 - B\hat{U}A/2) = A/2 - [90 - (90 - C/2)] = A/2 - C/2$. Tương tự, ta cũng có $M\hat{B}E = M\hat{B}C - C\hat{B}E = 90 - B\hat{M}C/2 - C/2 = 90 - (90 - A/2) - C/2 = A/2 - C/2$, nên $F\hat{B}U = M\hat{B}E$.

2. Mặt khác, CI là phân giác góc C nên CI cắt cung nhỏ AB tại điểm chính giữa, tức là U. Tương tự, ta cũng có AI cắt cung nhỏ BC tại điểm chính giữa M. Như vậy, 2 tam giác AUI và CMI đồng dạng , cho nên $\frac{AU}{CM} = \frac{AI}{CI}$. Nhưng $UA = UB, MC = MB, AI = BF, CI = BE$, ta suy ra được $\frac{BU}{BM} = \frac{BF}{BE}$.

Gộp 2 điều trên, ta có tam giác FBU đồng dạng tam giác EBM. Khi đó $180^o - B\hat{U}P = B\hat{U}F = B\hat{M}E = B\hat{M}P$, hay nói cách khác, tứ giác $BMPU$ nội tiếp (O) (vì BMU đã nội tiếp (O)). Vì ME cắt (O) tại Q, ta thấy $P \equiv Q$. Như vậy, F, U, Q thẳng hàng.

Dùng công thức sin trong tam giác QBA và QBC, ta có:

$$\frac{QA}{QB} = \frac{\sin ABQ}{\sin BAQ} = \frac{\sin AUQ}{\sin BUQ}$$
$$\frac{QC}{QB} = \frac{\sin CBQ}{\sin BCQ} = \frac{\sin CMQ}{\sin BMQ}$$

Vì $B\hat{U}Q = 180^o - B\hat{M}Q = \beta$, ta có $\sin BUQ = \sin BMQ$. Để chứng minh $QB = QA + QC$, hay $1 = \frac{QA}{QB} + \frac{QC}{QB} = \frac{\sin AUQ}{\sin \beta} + \frac{\sin CMQ}{\sin \beta}$, ta có thể chứng minh $\sin AUQ + \sin CMQ = \sin \beta$. Dùng định lý Céva sin cho tam giác UAB với AF, BF, UQ đồng quy tại F, ta có (để ý $U\hat{A}F = B\hat{A}F - B\hat{A}U = B/2 - C/2$

$$\frac{\sin AUF}{\sin BUF} \cdot \frac{\sin UBF}{\sin ABF} \cdot \frac{\sin BAF}{\sin UAF} = 1$$
$$\frac{\sin AUQ}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin \frac{A-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{B-C}{2}} = 1$$
$$\frac{\sin AUQ}{\sin \beta} = \frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{A-C}{2}}$$

Tương tự, áp dụng định lý Céva sin cho tam giác CMB với CE, BE, MQ đồng quy tại E, ta có

$$\frac{\sin CMQ}{\sin \beta} = \frac{\sin \frac{C}{2} \sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{A-C}{2}}$$

Nhưng

$$\begin{aligned}
\sin \frac{C}{2} \sin \frac{A-B}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B-C}{2} &= \sin \frac{C}{2} \left(\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \right) \\
&\quad + \sin \frac{A}{2} \left(\sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) \\
&= - \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \\
&= \sin \frac{B}{2} \left(\sin \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \right) \\
&= \sin \frac{B}{2} \sin \frac{A-C}{2}
\end{aligned}$$

Cho nên gộp $\frac{\sin AUQ}{\sin \beta}$ và $\frac{\sin CMQ}{\sin \beta}$ lại, ta sẽ có

$$\frac{\sin AUQ + \sin CMQ}{\sin \beta} = \frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B-C}{2} + \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{A-C}{2}} = 1$$
$$\sin AUQ + \sin CMQ = \sin \beta = \sin BUQ = \sin BMQ$$

Ta kết luận $BQ = AQ + CQ$. $\square$

Bài tập 1.6. Tìm tất cả số tự nhiên n sao cho $7^n + 147$ là số chính phương.

Nhận xét 1.7. Đưa về tích, lũy thừa, thử modulô.

Chứng minh. Ta sẽ đi tìm nghiệm nguyên (n, x) của phương trình $7^n + 147 = x^2$. Nếu n chẵn, $n = 2k$ (với $k \geq 0$), ta có $3 \cdot 7^2 = 147 = x^2 - 7^{2k} = (x - 7^k)(x + 7^k)$. Để ý $x + 7^k > x - 7^k$, cho nên ta có thể xét những trường hợp sau

1. Nếu $x - 7^k = 1, x + 7^k = 147$: ta có $2 \cdot 7^k = 146$, hay $7^k = 73$ (vô nghiệm).

2. Nếu $x - 7^k = 3, x + 7^k = 49$: ta có $2 \cdot 7^k = 46$, hay $7^k = 23$ (vô nghiệm).

3. Nếu $x - 7^k = 7, x + 7^k = 21$: ta có $2 \cdot 7^k = 14$, hay $k = 1$. Thử $n = 2k = 2$, ta có $7^2 + 147 = 196 = 14^2$ là số chính phương, cho nên $n = 2$ là một nghiệm của bài.

Nếu n lẻ, $n = 2k + 1$ (với $k \geq 0$), ta có $x^2 = 7^{2k+1} + 147 = 7(7^{2k} + 21)$. Như vậy, x chia hết cho 7. Đặt $x = 7y, y \geq 0$ và thế lại vào phương trình, ta có $49y^2 = 7(7^{2k} + 21)$, hay $y^2 = 7^{2k-1} + 3$ (như vậy $k \geq 1$ để vế phải là số nguyên). Lấy modulo 4, ta thấy

$$y^2 = 7^{2k-1} + 3 \equiv (-1)^{2k-1} + 3 = 2 \pmod 4$$

Như vậy y^2 chia hết cho 2, nhưng lại không chia hết cho 4 (vô lý). Ta kết luận $n = 2$ là nghiệm duy nhất của bài sao cho $7^n + 147$ là số chính phương. □

Bài tập 1.8. Một hội nghị Toán học quốc tế có 2011 nhà toán học tham dự. Biết rằng 1 nhà toán học bất kì trong số đó quen biết ít nhất với 1509 nhà toán học khác. Hỏi có thể lập ra 1 tiểu ban gồm 5 nhà toán học mà người bất kì nào trong 5 người đó đều quen biết những người còn lại của tiểu ban đó?

Nhận xét 1.9. Định lý Turán: có thể chứng minh bằng quy nạp (chia đồ thị ra), cực trị.
Cách khác: bỏ đỉnh và quy nạp.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp rằng nếu có $n \geq 5$ nhà toán học sao cho mỗi người quen ít nhất $\lfloor 3n/4 \rfloor + 1$ người khác (hoặc $> 3n/4$), ta có thể lập một tiểu ban như trên. Xét các bước cơ sở sau

1. $n = 5$: mỗi người quen ít nhất $\lfloor 3 \cdot 5/4 \rfloor + 1 = 4$ người khác. Nhưng hội nghị chỉ có 5 người, cho nên mọi người quen nhau. Chọn 5 người đó làm tiểu ban.

2. $n = 6$: mỗi người quen ít nhất $\lfloor 3 \cdot 6/4 \rfloor + 1 = 5$ người khác. Tương tự như trên, ta thấy họ phải quen nhau hết. Chọn 5 người bất kỳ làm tiểu ban

3. $n = 7$: tương tự như $n = 6$ (vì mỗi người quen ít nhất $\lfloor 3 \cdot 7/4 \rfloor + 1 = 6$ người khác).

4. $n = 8$: tương tự như $n = 6$ (vì mỗi người quen ít nhất $\lfloor 3 \cdot 8/4 \rfloor + 1 = 7$ người khác).

Bước quy nạp: chọn nhóm người $H = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ quen biết lẫn nhau nhiều nhất có thể. Nếu $k \geq 5$ thì ta chọn 5 người bất kỳ trong nhóm làm thành 1 tiểu ban. Còn không, nếu $k \leq 4$, ta sẽ chứng minh điều vô lý. Bởi tính cực trị của H, những người ngoài nhóm H không thể nào quen tất cả những người trong nhóm H. Nếu ta đặt $d_{p/H}$ cho số người trong nhóm H mà một người $p \notin H$ ngoài nhóm quen, thì ta luôn có $d_{p/H} \leq k - 1$.

1. Nếu $k = 4$: loại nhóm H ra, ta còn lại $n - 4$ người. Mỗi người còn lại p phải quen $> 3n/4 - d_{p/H} \geq 3n/4 - 3 = 3(n-4)/4$ người khác. Theo quy nạp cho $n - 4$, tồn tại 5 người sao cho họ quen nhau, trái với giả sử cực trị trên H.

2. Nếu $k = 3$: loại nhóm H ra, ta còn lại $n - 3$ người. Mỗi người còn lại p phải quen $> 3n/4 - d_{p/H} \geq 3n/4 - 2 = (3n-8)/4 > 3(n-3)/4$. Tương tự như trường hợp trên $k = 4$, ta có điều vô lý.

3. Nếu $k = 2$: tương tự như $k = 3$.

Cho $n = 2011$, ta cần mỗi nhà toán học quen ít nhất $\lfloor 3n/4 \rfloor + 1 = 1509$ người khác. Nhưng đó là giả thuyết ta có, cho nên luôn lập được một tiểu ban như đề bài yêu cầu.

Lưu ý: khi bỏ đỉnh, ta bỏ nhiều nhất 4 đỉnh, mỗi đỉnh còn lại kề nhiều nhất 3 đỉnh trong nhóm đỉnh bị bỏ (vì đồ thị không chứa K_5). Cho nên, bậc của mỗi đỉnh giảm đi 3 là nhiều nhất. Ta chọn $3n/4 < n$ vì khi trừ đi 3, ta thấy n giảm đi 4, trùng với số đỉnh bị bỏ đi! $\square$

2 Chuẩn bị VMO 2011

Bài tập 2.1. Định nghĩa dãy x_n bởi

$$\begin{cases} x_0 &= -2 \\ x_n &= \frac{1-\sqrt{1-4x_{n-1}}}{2} \end{cases}$$

Cho $u_n = nx_n$ và $v_n = \prod_{i=0}^{n}(1+x_i^2)$, chứng minh rằng u_n, v_n hội tụ.

Nhận xét 2.2. Sai phân, bất đẳng thức (cho v_n)

$$1 + \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \leq e^{\sum_{k=1}^{n} a_k}$$

Chứng minh. Quan sát

1. $(1-2x_n)^2 = 1 - 4x_{n-1}$
2. x_n là nghiệm (âm) của phương trình $x^2 - x + x_{n-1} = 0$. Nói cách khác, $x_{n-1} = x_n(1-x_n)$.

Ta chứng minh x_n âm với mọi n. Thật vậy, nếu $x_{n-1} < 0$, ta có $\sqrt{1-4x_{n-1}} > 1$, cho nên $x_n = \frac{1-\sqrt{1-4x_n}}{2} < 0$ và $u_n = nx_n < 0$. Ta cũng có $x_{n-1} = x_n(1-x_n) < x_n$ $(1 - x_n > 1)$, cho nên dãy x_n tăng. Cùng với việc x_n chặn trên bởi 0, ta có x_n hội tụ. Đặt $X = \lim_{n\to\infty} x_n \leq 0$, ta lấy giới hạn 2 vế của $x_{n-1} = x_n(1-x_n)$ để được $X = X(1-X)$. Giải phương trình, ta được $\lim_{n\to\infty} x_n = X = 0$.

*Để chứng minh v_n hội tụ, ta nhớ lại bất đẳng thức $1 + x \leq e^x$ với mọi $x \geq 0$. Áp dụng cho v_n, ta có

$$v_n = \prod_{i=0}^{n}(1+x_i^2) \leq e^{\sum_{i=0}^{n} x_i^2}$$

Mặt khác, $x_{n-1} = x_n(1-x_n)$, cho nên $x_n^2 = x_n - x_{n-1}$. Cộng lại, ta có $\sum_{i=0}^{n} x_i^2 = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_1 - x_0) + x_0^2 = x_n + 6$. Với bất đẳng thức trên, ta được

$$v_n \leq e^{x_n+6} \leq e^{x_0+6} = e^4$$

Như vậy v_n có chặn trên, và v_n tăng (bởi vì $v_n = v_{n-1}(1+x_n^2) \geq v_{n-1}$), cho nên v_n hội tụ.

*Để chứng minh u_n hội tụ, lưu ý x_n tăng nhưng luôn luôn âm, nên x_n^2 giảm. Dùng đẳng thức $x_n^2 = x_n - x_{n-1}$ như ta đã làm với v_n, ta có [???] □

Bài tập 2.3. Cho A là một tập con hữu hạn của số thực dương, đặt $B = \{x/y : x, y \in A\}$ và $C = \{xy : x, y \in A\}$. Chứng minh rằng $|A| \cdot |B| \leq |C|^2$.

Chứng minh.

$$\begin{aligned}
f : A^3 &\to C^2 \\
(\lambda, x, y) &\mapsto (\lambda x, \lambda y) \\
f(\lambda, x, y) = f(\kappa, z, w) &\Rightarrow \exists b \in B : b = \frac{x}{y} = \frac{z}{w}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g : K(f) &\to B \\
[(\lambda, x, y)]_f &\mapsto \frac{x}{y} \\
h_{x_0,y_0} : A &\hookrightarrow K(f) \\
\lambda &\mapsto [(\lambda, x_0, y_0)]_f \\
h_{x_0,y_0}(A) \subseteq \ker_{x_0/y_0} g &= \{[(\lambda, x, y)]_f : \frac{x}{y} = \frac{x_0}{y_0}\} \\
[(\lambda, x, y)]_f \notin h_{x_0,y_0}(A) &\Leftrightarrow \forall \kappa \in A : f(\lambda, x, y) \neq f(\kappa, x_0, y_0) \\
&\Leftrightarrow \neg[\exists \kappa \in A : (\lambda x, \lambda y) = (\kappa x_0, \kappa y_0)] \\
&\Leftrightarrow \neg[\exists \kappa \in A : \lambda x = \kappa x_0 \wedge \lambda y = \kappa y_0] \\
&\Leftrightarrow \neg[\exists \kappa \in A : \kappa = \frac{\lambda x}{x_0} = \frac{\lambda y}{y_0}] \\
&\Leftrightarrow \frac{\lambda x}{x_0} \notin A \vee \frac{\lambda y}{y_0} \notin A
\end{aligned}$$

$\square$

3 Chuẩn bị VMO 2012

Bài tập 3.1. Cho $a, b, c > 0$ sao cho $abc = 1$, chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3+6 \geq (a+b+c)^2$

Nhận xét 3.2. Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Chứng minh. Áp dụng Cauchy-Schwarz, ta có

$$a^3 + a^3 + 1 \geq 3a^2$$
$$b^3 + b^3 + 1 \geq 3b^2$$
$$c^3 + c^3 + 1 \geq 3c^2$$
$$a^3 + b^3 + 1 \geq 3ab$$
$$b^3 + c^3 + 1 \geq 3bc$$
$$c^3 + a^3 + 1 \geq 3ca$$

Cộng 3 biểu thức đầu, với 2 lần của 3 biểu thức sau ta được.

$$(2a^3 + 2b^3 + 2c^3 + 3) + 2(2a^3 + 2b^3 + 2c^3 + 3) \geq (3a^2 + 3b^2 + 3c^2) + 2(3ab + 3bc + 3ca)$$
$$6a^3 + 6b^3 + 6c^3 + 9$$

$\square$