Chương 1

Giải hệ phương trình

Chúng ta có 2 loại hệ phương trình:

- Hệ phương trình tuyến tính
- Hệ phương trình phi tuyến

Chúng ta đã biết các phương pháp giải trực tiếp và gián tiếp Hệ phương trình tuyến tính:

- Các phương pháp giải trực tiếp:
  - Phương pháp Cramer
  - Phương pháp thế
  - Phương pháp sử dụng ma trận nghịch đảo
  - Phương pháp khử Gauss, Gauss-Jordan
- Các phương pháp giải gián tiếp
  - Phương pháp lặp đơn
  - Phương pháp lặp Seidel
- Các phương pháp tìm trị riêng và véc tơ riêng của ma trận

1.1 Đặt bài toán và phương pháp giải

Hệ phương trình tuyến tính n phương trình, n ẩn x_1, x_2, ..., x_n là tập n phương trình E_1, E_2, ..., E_n dạng

$$\begin{cases} E_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ E_2 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ E_n : a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

với các hệ số a_{jk} và b_j đã biết. Hệ được gọi là thuần nhất nếu các b_j bằng 0, trong trường hợp ngược lại được gọi là hệ không thuần nhất.

Dùng cách biểu diễn ma trận, ta có thể viết hệ (1.1) dưới dạng:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{1.1}$$

Ở đây, ma trận hệ số $A = [a_{jk}]$ là ma trận vuông cấp n, x và b là các véc tơ cột:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Ma trận $\tilde{\boldsymbol{A}}$ sau được gọi là ma trận mở rộng của hệ (1.1):

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Nghiệm của (1.1) là bộ số x_1, x_2, ..., x_n thỏa mãn tất cả phương trình của hệ.

Véc tơ nghiệm của (1.1) là $\boldsymbol{x}$ mà các thành phần của nó lập thành một nghiệm của (1.1).

Hệ phương trình (1.1) có thể giải được bằng

- *phương pháp trực tiếp* (phương pháp khử Gauss, ...), hoặc
- *phương pháp gián tiếp* hay phương pháp lặp.

Chúng ta đã biết phương pháp sử dụng định thức để giải hệ phương trình (1.1), đó là *phương pháp Cramer*. Ở đây ta xét *phương pháp khử Gauss* để giải hệ phương trình tuyến tính.

Phương pháp. Phương pháp khử Gauss (Gaussian elimination)

Phương pháp khử Gauss là phép giải trực tiếp được thực hiện bằng quá trình khử liên tiếp các ẩn để từng bước đưa ma trận mở rộng $\tilde{\boldsymbol{A}}$ về dạng tam giác trên (upper triangular matrix, hay dạng bậc thang).

Phương pháp này gồm hai phần thực hiện lần lượt như sau:

1. Quá trình thuận (forward elimination)*: Dùng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để đưa $\tilde{\boldsymbol{A}}$ về dạng tam giác trên:*

   (a) Khử x_1 từ $E_{\geq 2}$ bằng cách:

$$E_i \coloneqq E_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} E_1 \, \forall i \in [2, n]$$

a_{11} *gọi là* phần tử trục xoay (pivot), E_1 *gọi là phương trình chính (pivot equation).*

(b) *Khử x_i từ $E_{>i}$ bằng cách tương tự như trên, cuối cùng thu được dạng tam giác trên.*

2. Quá trình ngược (back substitution): *Giải $\boldsymbol{x}$ từ cuối lên:*

   (a) *Giải x_n từ E_n, giải tiếp được x_{n-1} do đã biết x_n.*

   (b) *Tương tự giải được đến x_1, cuối cùng thu được nghiệm $\boldsymbol{x}$.*

Ví dụ 1.1. *Hãy giải hệ phương trình:*

$$
\begin{aligned}
8x_2 + 2x_3 &= -7 &\quad (E_1)\\
3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 8 &\quad (E_2)\\
6x_1 + 2x_2 + 8x_3 &= 26 &\quad (E_3)
\end{aligned}
$$

Chúng ta xoay trục từ E_1 , nhưng do E_1 không có ẩn x_1, trong khi đó hệ số của x_1 trong phương trình E_3 là lớn nhất. Vì vậy ta đổi chỗ E_1 và E_3 cho nhau.

Tới đây ta có ma trận mở rộng như sau:

$$
\tilde{\boldsymbol{A}} = \left[\begin{array}{ccc:c} 6 & 2 & 8 & 26 \\ 3 & 5 & 2 & 8 \\ & 8 & 2 & -7 \end{array}\right]
$$

Khử x_1 được:

$$
\left[\begin{array}{ccc:c} 6 & 2 & 8 & 26 \\ & 4 & -2 & -5 \\ & 8 & 2 & -7 \end{array}\right]
$$

Khử x_2 được:

$$
\left[\begin{array}{ccc:c} 6 & 2 & 8 & 26 \\ & 4 & -2 & -5 \\ & & 6 & 3 \end{array}\right]
$$

Vậy ta giải được $x_3 = 0{,}5$, $x_2 = -1$, $x_1 = 4$.

Phương pháp Gauss còn có một số biến thể:

- Phương pháp Gauss-Jordan: đưa $\boldsymbol{A}$ về dạng đường chéo thay vì dạng tam giác trên.
- Phương pháp Doolittle, phương pháp Crout, phương pháp Cholesky đều dựa trên phân tích $\boldsymbol{LU}$ ($\boldsymbol{LU}$ factorization).