

Chương 1

Các phương pháp nội suy

1.1 Mở đầu & Cơ sở lý thuyết

Chúng ta được biết các giá trị của một hàm số ở những điểm khác nhau x_0, x_1, \dots, x_n . Chúng ta mong muốn tính được giá trị xấp xỉ của hàm tại các điểm x mới nằm giữa các điểm này mà các giá trị của hàm số được đưa ra. Quá trình này được gọi là *nội suy*.

Chúng ta nên chú ý đến phần này vì nội suy tạo thành nền móng cho cả hai phần tính gần đúng đạo hàm và tính gần đúng tích phân. Thật vậy, phép nội suy cho phép chúng ta phát triển các công thức cho tích phân và đạo hàm bằng số.

Với hàm $y = f(x)$, ta kí hiệu các giá trị đã biết của f như sau

$$f_k = f(x_k) \mid k \in [0, n]$$

hay một cách biểu diễn khác ở dạng cặp

$$(x_k, f_k)$$

Các giá trị hàm số này được lấy từ đâu?

- Nó có thể tính được từ một hàm “toán học”, chẳng hạn hàm logarithm hoặc hàm Bessel, hoặc
- Nó có thể là số liệu đo được hoặc tự động ghi lại trong một thí nghiệm nào đó, chẳng hạn chất lượng không khí của Hà Nội hoặc đo thành phần khí thải của ô tô hoặc xe máy khi đi với tốc độ khác nhau

Ý tưởng của nội suy là tìm đa thức $p_n(x)$ có bậc là n (hoặc nhỏ hơn) thỏa mãn:

$$p_n(x_k) = f_k \quad \forall k \in [0, n] \quad (1.1)$$

Chúng ta sẽ gọi p_n là *đa thức nội suy* và x_0, x_1, \dots, x_n là các điểm mốc. Nếu f là hàm toán học thì ta gọi $p_n(x)$ là *xấp xỉ* (hoặc là xấp xỉ đa thức) của hàm f . Chúng ta sẽ dùng p_n để tính giá trị của hàm f tại các điểm x khác điểm mốc nằm trong hoặc ngoài khoảng $[x_0, x_n]$.

Lý do đa thức rất thuận tiện để xấp xỉ vì chúng ta có thể dễ dàng lấy đạo hàm và tích phân chúng, và kết quả cũng là một đa thức. Hơn nữa, *đa thức có thể xấp xỉ hàm liên tục với bất kỳ độ chính xác tùy ý*. Kết quả này được gọi là *định lý xấp xỉ Weierstrass*.

Định lý 1.1: Định lý xấp xỉ Weierstrass

Với mọi hàm f xác định trên $J = [a, b]$ và một sai số $\beta > 0$ cho trước, luôn tồn tại đa thức $p_n(x)$ (có bậc n đủ cao) sao cho:

$$|f(x) - p_n(x)| < \beta \forall x \in J$$

Ta không đi vào chứng minh định lý trên. Ta chú ý đến hai tính chất quan trọng của các đa thức nội suy p_n :

- p_n tồn tại (đã được khẳng định bởi định lý Weierstrass)
- p_n duy nhất

Ta có thể chứng minh tính duy nhất của p_n như sau:

Chứng minh tính duy nhất của đa thức nội suy.

Thật vậy, giả sử có đa thức q_n khác cũng thỏa mãn:

$$\begin{aligned} q_n(x_k) &= x \forall k \in [0, n] \\ \iff r(x) &= p_n(x_k) - q_n(x_k) = 0 \forall k \in [0, n] \end{aligned}$$

Nói cách khác, r có đúng $n + 1$ nghiệm. Nhưng $r(x)$ là đa thức bậc tối đa là n , do đó nó có tối đa n nghiệm, dẫn đến mâu thuẫn.

Vậy ta kết luận đa thức nội suy p_n là duy nhất.

đpcm.

Sau đây, ta xem xét một số phương pháp tìm p_n . Theo như tính duy nhất đã chứng minh ở trên, với cùng một số liệu, các phương pháp khác nhau cần phải cho ra cùng một đa thức. Hơn nữa, các đa thức có thể được biểu diễn dưới các dạng khác nhau do các mục tiêu khác nhau.

1.2 Phương pháp nội suy Lagrange

1.2.1 Phương pháp nội suy Lagrange

Sau đây ta trình bày việc xây dựng p_n bằng *phương pháp nội suy Lagrange*.

Phương pháp 1.1: Phương pháp nội suy Lagrange

Phương pháp gồm hai bước:

1. Tạo các đa thức L_k với bậc tối đa là n theo công thức sau:

$$\begin{aligned} L_k(x) &= \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} \\ &= \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x-x_i}{x_k-x_i} \end{aligned}$$

Ý tưởng ở đây là:

- $L_k(x_k) = 1$
- $L_k(x_j) = 0 \forall j \neq k \in [0, n]$

2. Viết p_n :

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x) \cdot f_k$$

Ý tưởng ở đây là với mọi x_k , p_n rút gọn còn f_k , do cách xây dựng L_k ở trên.

p_n ở dạng này gọi là *đa thức nội suy Lagrange bậc n* .

1.2.2 Đánh giá sai số

Ta có định lý sau về sai số của phương pháp nội suy Lagrange, hay nói cách khác, của *mọi* phương pháp nội suy đa thức:

Định lý 1.2: Sai số nội suy đa thức

Nếu f khả vi liên tục đến bậc $n+1$, thì sai số của mọi phương pháp nội suy đa thức xấp xỉ f được tính theo công thức sau:

$$\epsilon_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x-x_i) \quad (1.2)$$

trong đó, t là một số nào đó trong khoảng giữa x_k nhỏ nhất, x_k lớn nhất, và x .

Ý tưởng của công thức trên đến từ quan sát rằng nếu f cũng là đa thức, thì f chính là p_n , dẫn đến sai số bằng 0. Đồng thời, f lúc này lại có đạo hàm bậc $n+1$ bằng 0. Từ hai điều trên, ta kì vọng rằng sai số sẽ liên quan đến đạo hàm bậc $n+1$ của f .

1.3 Phương pháp nội suy Newton

Với bộ dữ liệu đã cho, ta đã chứng minh đa thức nội suy p_n là duy nhất. Tuy nhiên, với các yêu cầu khác nhau, ta có thể dùng $p_n(x)$ ở các dạng thức khác nhau. Đa thức nội suy dạng Lagrange thuận lợi cho việc tính gần đúng giá trị đạo hàm và tích phân số.

Một trường hợp riêng, nhưng rất quan trọng là *đa thức dạng Newton*, dạng thức này thuận lợi trong việc giải gần đúng phương trình vi phân với giá trị ban đầu.

Hơn nữa, xây dựng đa thức dạng Newton yêu cầu phải tính toán ít hơn đa thức dạng Lagrange, đặc biệt khi n tăng để đạt được độ chính xác cần thiết. Khi đó, đa thức dạng Newton sử dụng tất cả các kết quả tính toán từ trước đó và cộng thêm một số hạng khác có thể không được tính từ đa thức dạng Lagrange. Số hạng này nhận được từ việc ứng dụng Nguyên lý sai số (Được sử dụng trong Ví dụ 3 của đa thức dạng Lagrange).

Trong hai phần sau, ta sẽ từ từ xây dựng phương pháp nội suy Newton. Phần đầu là dạng tổng quát (tỉ sai phân), phần sau là một trường hợp đặc biệt hay dùng (sai phân tiến).

1.3.1 (

Công thức tỉ sai phân)

Giả sử $p_{n-1}(x)$ là đa thức Newton bậc $(n-1)$ (dạng của nó ta xác định sau). Khi đó:

$$p_{n-1}(x_k) = f_k \forall k \in [0, n-1]$$

Từ đó, ta có thể viết đa thức Newton bậc n như sau:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + g_n(x) \quad (1.3)$$

Do p_n cũng là một đa thức nội suy, ta có

$$p_n(x_k) = f_k \forall k \in [0, n]$$

từ đó ta có một số giá trị của g_n :

$$g_n(x_k) = 0 \forall k \in [0, n-1]$$

Theo (1.3), ta thấy hiển nhiên g_n có bậc n .

Từ hai điều trên, ta suy ra được dạng của g_n

$$g_n(x) = a_n \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$$

Phần việc còn lại là đi tìm a_n . Ta dễ dàng tính được a_n khi xét $x = x_n$:

$$a_n = \frac{f_n - p_{n-1}(x_n)}{\prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i)} \quad (1.4)$$

Tổng quát hóa, ta có công thức cho a_k như sau:

$$a_k = f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \quad \forall k > 0$$

với

$$a_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

Công thức đệ quy trên được gọi là *tỉ sai phân thứ k (k^{th} divided difference)*. Tổng hợp lại, ta có công thức tỉ sai phân của Newton:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f_0 + a_1 \prod_{i=0}^0 (x - x_i) + a_2 \prod_{i=0}^1 (x - x_i) + \dots + a_n \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) \\ &= f_0 + \sum_{j=1}^n \left[a_j \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i) \right] \end{aligned} \quad (1.5)$$

Khi làm bài tập, ta thường dùng công thức (1.4), như trình bày trong ví dụ sau:

1.3.2 Công thức sai phân tiến

Sai phân tiến (forward difference) là một trường hợp đặc biệt của công thức tỉ sai phân, trong đó các mốc nội suy cách đều. Ta sẽ thấy các công thức được đơn giản đi đáng kể.

Trước hết ta nêu ra dạng của x :

$$x_n = x_0 + nh$$

Ta định nghĩa công thức cho Δ^1 , tức *sai phân tiến thứ nhất (1^{st} forward difference)* của f tại x_j như sau:

$$\Delta^1 f_j = f_{j+1} - f_j$$

Ta tiếp tục có sai phân tiến thứ hai, cũng tại x_j :

$$\Delta^2 f_j = \Delta^1 f_{j+1} - \Delta^1 f_j$$

Tổng quát, công thức sai phân tiến thứ k tại x_j được định nghĩa đệ quy như sau:

$$\Delta^k f_j = f_{j+1} - f_j$$

Với cách định nghĩa sai phân tiến như trên, ta có thể chứng minh được, bằng quy nạp:

$$a_k = f[x_0, \dots, x_k] = \frac{1}{k!h^k} \Delta^k f_0$$

Áp dụng công thức trên vào (1.5), ta có:

$$p_n(x) = \sum_{s=0}^n \binom{r}{s} \Delta^s f_0$$

với $x = x_0 + rh$

Đồng thời, (1.2) cũng được đơn giản hóa:

$$\epsilon_n(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} r(r-1) \dots (r-n) f^{n+1}(t)$$