Bài 4.1. Mở đầu

Chúng ta được biết các giá trị của một hàm số ở những điểm khác nhau x_0, x_1, …, x_n. Chúng ta mong muốn tính được giá trị xấp xỉ của hàm tại các điểm x mới nằm giữa các điểm này mà các giá trị của hàm số được đưa ra. Quá trình này được gọi là nội suy.

Chúng ta nên chú ý đến phần này vì nội suy tạo thành nền móng cho cả hai phần tính gần đúng đạo hàm và tính gần đúng tích phân.

Thật vậy, phép nội suy cho phép chúng ta phát triển các công thức cho tích phân và đạo hàm bằng số.

Chúng ta viết các giá trị đã biết của hàm y=f(x) như sau:

$$f_0 = f(x_0), \qquad f_1 = f(x_1), \qquad \cdots, \qquad f_n = f(x_n)$$

hay dưới dạng cặp giá trị có thứ tự:

$$(x_0, f_0), \qquad (x_1, f_1), \qquad \cdots, \quad (x_n, f_n).$$

Hoặc

x	x_0	x_1		x_i		x_n
f	f_0	f_1	…	f_i	…	f_n

Các giá trị hàm số này được lấy từ đâu? Nó có thể tính được từ một hàm "toán học", chẳng hạn hàm logarithm hoặc hàm Bessel. Thường xuyên hơn, chúng có thể đo được hoặc tự động ghi lại trong một thí nghiệm nào đó, chẳng hạn chất lượng không khí của Hà Nội hoặc đo thành phần khí thải của ô tô hoặc xe máy đi với tốc độ khác nhau.

Các ví dụ khác về các hàm "thực nghiệm" là công suất của quá trình hoá học ở nhiệt độ khác nhau hoặc dân số của Hoa Kỳ hoặc các nước xuất hiện từ các cuộc Tổng điều tra được thực hiện khoảng 10 năm/lần.

Ý tưởng của BT nội suy là tìm đa thức $p_n(x)$ có bậc là n (hoặc nhỏ hơn) thỏa mãn :

$$p_n(x_0) = f_0, p_n(x_1) = f_1, ..., p_n(x_n) = f_n \quad (1)$$

Chúng ta sẽ gọi p_n là đa thức nội suy và x_0, x_1, …, x_n là các điểm mốc. Nếu f là hàm toán học thì ta gọi $p_n(x)$ là xấp xỉ (hoặc là xấp xỉ đa thức) của hàm f. Chúng ta sẽ dùng p_n để tính giá trị của hàm f tại các điểm x khác điểm mốc nằm trong hoặc ngoài khoảng $[x_0, x_n]$.

Lý do. Đa thức rất thuận tiện vì chúng ta có thể dễ dàng lấy đạo hàm và tích phân chúng, và kết quả cũng là 1 đa thức. ***Hơn nữa, chúng có thể xấp xỉ hàm liên tục với bất kỳ độ chính xác tùy ý.***

Nghĩa là, đối với bất kỳ hàm liên tục f(x) nào đó trên khoảng J: $a \le x \le b$ và sai số $\beta>0$, tồn tại đa thức $p_n(x)$ (có bậc n đủ cao) sao cho:

$$\left| f(x) - p_n(x) \right| < \beta, \forall x \in J$$

Đây là định lý xấp xỉ Weierstrass.

Sự tồn tại và duy nhất

Chú ý rằng đa thức nội suy p_n thỏa mãn (1) với các số liệu đã cho là tồn tại và công thức của nó sẽ được cho ở dưới. Hơn nữa, p_n là **duy nhất.**

Thật vậy, nếu có đa thức q_n khác cũng thỏa mãn $q_n(x_0) = f_0, \ldots, q_n(x_n) = f_n$,khi đó $p_n(x) - q_n(x) = 0$ tại $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nhưng bậc của đa thức $p_n - q_n$ bằng n (hoặc nhỏ hơn) với n+1 không điểm phải đồng nhất bằng 0, như chúng ta đã biết trong đại số; như vậy, $p_n(x) = q_n(x)$ với tất cả mọi x, nghĩa là $p_n(x)$ là duy nhất.

Tìm p_n bằng cách nào? Chúng ta sẽ đưa ra vài phương pháp tìm p_n.

Do tính duy nhất đã được chứng minh ở trên, chúng ta biết rằng, với các số liệu đã cho, các phương pháp khác nhau cần phải cho ra cùng một đa thức. Hơn nữa, các đa thức có thể được biểu diễn dưới các dạng khác nhau do các mục tiêu khác nhau.