BG Bài 4.2. Phương pháp nội suy Lagrange

Đặt bài toán

Với n+1 bộ giá trị (x_0, f_0), (x_1, f_1) và, …, (x_n, f_n) ta xây dựng đa thức $p_n(x)$ có bậc n hoặc nhỏ hơn làm đa thức nội suy cho hàm f(x) trên đoạn $[x_0, x_n]$ thỏa mãn:

$$p_n(x_k) = f_k,\ k=0, 1, \ldots n$$

Cơ sở Lý thuyết:

1. Sự tồn tại đa thức $p_n(x)$

Đa thức rất thuận tiện vì chúng ta có thể dễ dàng lấy đạo hàm và tích phân chúng, và kết quả cũng là 1 đa thức. Hơn nữa, chúng có thể xấp xỉ hàm liên tục với bất kỳ độ chính xác tùy ý. Nghĩa là, đối với bất kỳ hàm liên tục f(x) nào đó trên khoảng J: $a \le x \le b$ và sai số $\beta > 0$, tồn tại đa thức $p_n(x)$ (có bậc n đủ cao) sao cho:

$$|f(x) - p_n(x)| < \beta \quad \text{for all } x \text{ on } J.$$

Đây là định lý xấp xỉ Weierstrass.

2. Sự tồn tại duy nhất $p_n(x)$:

Chú ý rằng đa thức nội suy p_n thỏa mãn (1) với các số liệu đã cho là tồn tại và công thức của nó sẽ được cho ở dưới. Hơn nữa, p_n là **duy nhất.** Thật vậy, nếu có đa thức q_n khác cũng thỏa mãn $q_n(x_0) = f_0, \ldots, q_n(x_n) = f_n$,khi đó $p_n(x) - q_n(x) = 0$ tại $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nhưng bậc của đa thức $p_n - q_n$ bằng n (hoặc nhỏ hơn) với n+1 không điểm phải đồng nhất bằng 0, như chúng ta đã biết trong đại số; như vậy,

$p_n(x) = q_n(x)$ với tất cả mọi x, nghĩa là $p_n(x)$ là duy nhất.

3. Cách xây dựng $p_n(x)$:

Bước 1. Tạo ra các đa thức $L_k(x)$, với k=0, 1, …, n có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n và có giá bằng 1 tại điểm mốc x_k và bằng 0 tại các điểm mốc khác theo công thức:

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$

với k=0, 1, 2, …, n. Cụ thể:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)}$$

…

$$L_k(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)}$$

…

$$L_n(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)...(x_n-x_{n-1})}$$

Nếu đặt

$$l_k(x)=(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)$$

với k= 0, 1, …, n ta có:

$$l_0(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$$

$$l_1(x)=(x-x_0)(x-x_2)...(x-x_n)$$

…

$$l_k(x)=(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)$$

…

$$l_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})$$

ta có thể viết

$$L_k(x) = \frac{l_k(x)}{l_k(x_k)}$$, k= 0, 1, …, n.

Bước 2. Lập tổ hợp tt

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_K(x) * f_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{l_k(x)}{l_k(x_k)} * f_k$$

Bước 3. Sử dụng $p_n(x)$ để tính xấp xỉ giá trị hàm số f(x) lại các điểm khác điểm mốc.

Bước 4. Đánh giá sai số

Công thức sai số

$\varepsilon_n(x)=f(x) - p_n(x)$

$=(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)f^{(n+1)}(t)/((n+1)!)$

$$\epsilon_n(x) = f(x) - p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)\,\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}\,. \tag{5}$$

Thus $|\epsilon_n(x)|$ is 0 at the nodes and small near them, because of continuity. The product $(x - x_0)\cdots(x - x_n)$ is large for x away from the nodes. This makes extrapolation risky. And interpolation at an x will be best if we choose nodes on both sides of that x. Also, we get error bounds by taking the smallest and the largest value of $f^{(n+1)}(t)$ in (5) on the interval $x_0 \leqq t \leqq x_n$ (or on the interval also containing x if we *extra*polate).

Most importantly, since p_n is unique, as we have shown, we have

THEOREM 1

Error of Interpolation

Formula (5) *gives the error for* ***any*** *polynomial interpolation method if* $f(x)$ *has a continuous* $(n+1)$*st derivative.*

Practical error estimate. If the derivative in (5) is difficult or impossible to obtain, apply the Error Principle (Sec. 19.1), that is, take another node and the Lagrange polynomial $p_{n+1}(x)$ and regard $p_{n+1}(x) - p_n(x)$ as a (crude) error estimate for $p_n(x)$.

Ví dụ, Cụ thể, trước hết, ta xét Nội suy tuyến tính

Giả sử ta biết giá trị hàm số tại 2 điểm x_0 và x_1

x	x_0	x_1
f	f_0	f_1

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \qquad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

$p_1(x) = f_0 * L_0(x) + f_1 * L_1(x) \quad (2)$

This gives the linear Lagrange polynomial

$$(2) \qquad p_1(x) = L_0(x) f_0 + L_1(x) f_1 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot f_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot f_1 .$$

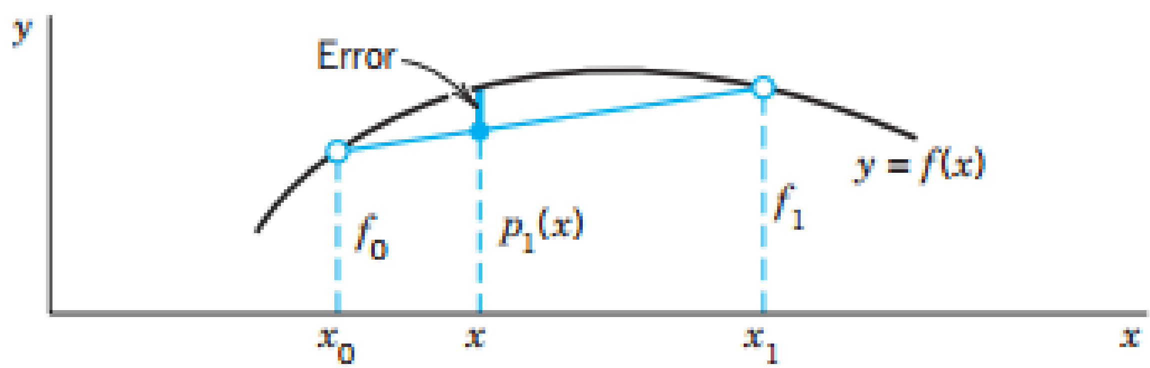

Fig. 431. Linear Interpolation

EXAMPLE 1 **Linear Lagrange Interpolation**

Ví dụ 1.

x	9.0	9.5
f=lnx	2.1972	2.2513

Tính ln9.2 đến 4D

Compute a 4D-value of ln 9.2 from ln 9.0 = 2.1972, ln 9.5 = 2.2513 by linear Lagrange interpolation and determine the error, using ln 9.2 = 2.2192 (4D).

Solution. $x_0 = 9.0, x_1 = 9.5, f_0 = \ln 9.0, f_1 = \ln 9.5$. Ln (2) we need

$$L_0(x) = \frac{x - 9.5}{-0.5} = -2.0(x - 9.5), \qquad L_0(9.2) = -2.0(-0.3) = 0.6$$

$$L_1(x) = \frac{x - 9.0}{0.5} = 2.0(x - 9.0), \qquad L_1(9.2) = 2 \cdot 0.2 = 0.4$$

$p_1(x)=f_0*L_0(x) + f_1*L_1(x)$

$= 0.1082x + 1.2234$

$\rightarrow p_1(9.2) = 2.1972*0.6+2.2513*0.4$

$= 2.2188$

ln9.2=2.2192

Sai số tuyệt đối là $0.4*10^{-3}$.

Đánh giá cận sai số:

$\varepsilon_n(x)=f(x) - p_n(x)$

$=(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)f^{(n+1)}(t)/((n+1)!)$

(see Fig. 432) and obtain the answer

$$\ln 9.2 \approx p_1(9.2) = L_0(9.2)f_0 + L_1(9.2)f_1 = 0.6 \cdot 2.1972 + 0.4 \cdot 2.2513 = 2.2188.$$

The error is $\epsilon = a - \tilde{a} = 2.2192 - 2.2188 = 0.0004$. Hence linear interpolation is not sufficient here to get 4D accuracy; it would suffice for 3D accuracy.

$\ln 9.2 \approx 2.2188$

$\ln 9.2 = 2.2192$

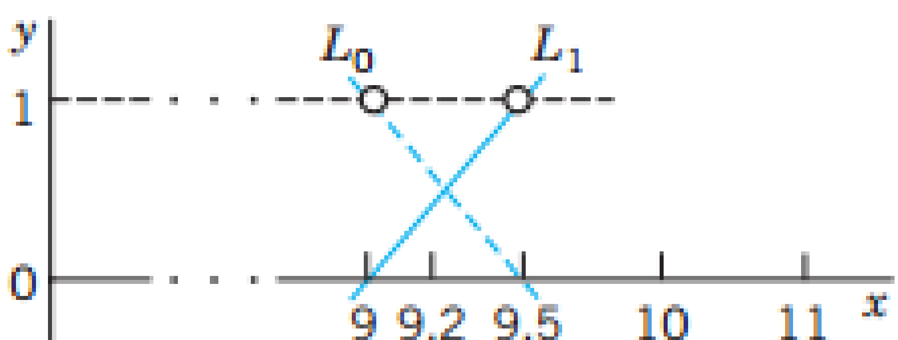

Fig. 432. L_0 and L_1 in Example 1

Tiếp theo, ta xét Nội suy bậc 2

Nội suy bậc 2 là nội suy được xây dựng trên các điểm (x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2) được một đa thức bậc 2 $p_2(x)$, theo pp Lagrange:

(3a) $p_2(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2$

$$L_0(x) = \frac{l_0(x)}{l_0(x_0)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

(3b) $$L_1(x) = \frac{l_1(x)}{l_1(x_1)} = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{l_2(x)}{l_2(x_2)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Quadratic interpolation is interpolation of given (x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2) by a second-degree polynomial $p_2(x)$, which by Lagrange's idea is

(3a) $$p_2(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2$$

with $L_0(x_0) = 1$, $L_1(x_1) = 1$, $L_2(x_2) = 1$, and $L_0(x_1) = L_0(x_2) = 0$, etc. We claim that

X	x_0	x_1	x_2
F	f_1	f_2	f_3

$$L_0(x) = \frac{l_0(x)}{l_0(x_0)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

(3b) $$L_1(x) = \frac{l_1(x)}{l_1(x_1)} = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{l_2(x)}{l_2(x_2)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

How did we get this? Well, the numerator makes $L_k(x_j) = 0$ if $j \neq k$. And the denominator makes $L_k(x_k) = 1$ because it equals the numerator at $x = x_k$.

EXAMPLE 2 Quadratic Lagrange Interpolation

Compute ln 9.2 by (3) from the data in Example 1 and the additional third value ln 11.0 = 2.3979.

Solution. In (3),

Ví dụ 2

x	9.0	9.5	11
f=lnx	2.1972	2.2513	2.3979

$$p_2(x)=f_0*L_0(x) + f_1*L_1(x)+ f_2*L_2(x)$$

$p_2(9.2)=2.2192$

$\ln 9.2=2.2192$

$$L_0(x) = \frac{(x-9.5)(x-11.0)}{(9.0-9.5)(9.0-11.0)} = x^2 - 20.5x + 104.5, \qquad L_0(9.2) = 0.5400,$$

$$L_1(x) = \frac{(x-9.0)(x-11.0)}{(9.5-9.0)(9.5-11.0)} = -\frac{1}{0.75}(x^2 - 20x + 99), \qquad L_1(9.2) = 0.4800,$$

$$L_2(x) = \frac{(x-9.0)(x-9.5)}{(11.0-9.0)(11.0-9.5)} = \frac{1}{3}(x^2 - 18.5x + 85.5), \qquad L_2(9.2) = -0.0200,$$

(see Fig. 433), so that (3a) gives, exact to 4D,

$$\ln 9.2 \approx p_2(9.2) = 0.5400 \cdot 2.1972 + 0.4800 \cdot 2.2513 - 0.0200 \cdot 2.3979 = 2.2192.$$

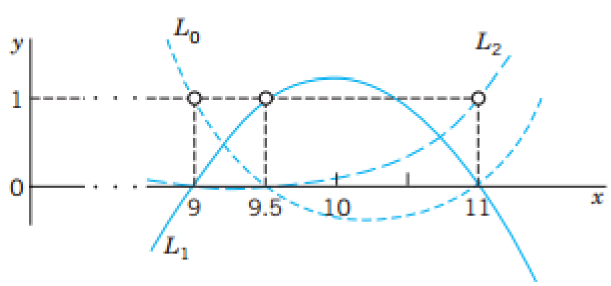

Fig. 433. L_0, L_1, L_2 in Example 2

General Lagrange Interpolation Polynomial. For general n we obtain

$$\varepsilon_2(x)=f(x) - p_2(x)$$
$$=(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f^{(3)}(t)/(3!)$$

Ví dụ 2’: Tính đến 8D giá trị ln9.2 theo đa thức nội suy bậc 3 với 4 điểm mốc

$x_0=9.0$, $x_1=9.5$, $x_2=11$, $x_3=12$

Bảng giá trị

X	9	9.5	11	12
Lnx	2.19722458	2.25129180	2.39789527	2.48490665

$$l_0(x) = (x - 9.5)(x - 11)(x - 12)$$

$$l_1(x) = (x - 9)(x - 11)(x - 12)$$

$$l_2(x) = (x - 9)(x - 9.5)(x - 12)$$

$l_3(x) = (x - 9)(x - 9.5)(x - 11)$

$\ln 9.2 \approx 2.21919618$

$\ln 9.2 = 2.21920348$

Error Estimate. If f is itself a polynomial of degree n (or less), it must coincide with p_n because the $n + 1$ data $(x_0, f_0), \cdots, (x_n, f_n)$ determine a polynomial uniquely, so the error is zero. Now the special f has its $(n + 1)$st derivative identically zero. This makes it plausible that for a *general* f its $(n + 1)$st derivative $f^{(n+1)}$ should measure the error

$$\epsilon_n(x) = f(x) - p_n(x).$$

It can be shown that this is true if $f^{(n+1)}$ exists and is continuous. Then, with a suitable t between x_0 and x_n (or between x_0, x_n, and x if we extrapolate),

The difference $p_2(9.2) - p_1(9.2) = 0.00031$ is the approximate error of $p_1(9.2)$ that we wanted to obtain; this is an approximation of the actual error 0.00035 given above. ■