Bài giảng Tính gần đúng tích phân

Trong các ứng dụng, người kỹ sư thường gặp các tích phân rất khó tính hoặc thậm chí không thể giải được bằng phương pháp giải tích.

Ví dụ, các hàm lỗi, tích phân Fresnel (xem Probs. 16-25 về các tích phân không cơ bản trong phần này), và những tích phân khác không thể tính được bởi các phương pháp bình thường của giải tích (xem App 3, (24) - (44) với các tích phân "Khó tính" như vậy). Do đó, chúng ta cần các phương pháp từ giải tích số để tính các tích phân này.

Chúng ta cũng cần tính các tích phân khi hàm dưới dấu tích phân là các hàm thực nghiệm, ở đó giá trị các hàm được ghi lại qua các thí nghiệm. Các phương pháp nhằm giải quyết các bài toán dạng này được gọi là phương pháp tích phân số.

Tích phân số nghĩa là tính bằng số tích phân:

$$J = \int_a^b f(x)dx$$

ở đây, a và b đã cho, f là hàm số được cho bởi công thức hay thực nghiệm.

Một cách hình học, J là diện tích hình thang cong nằm giữa a và b với trục hoàng. Nó đấu âm, nếu đường cong nằm dưới trục hoành, dấu dương, nếu đường cong nằm trên trục hoành.

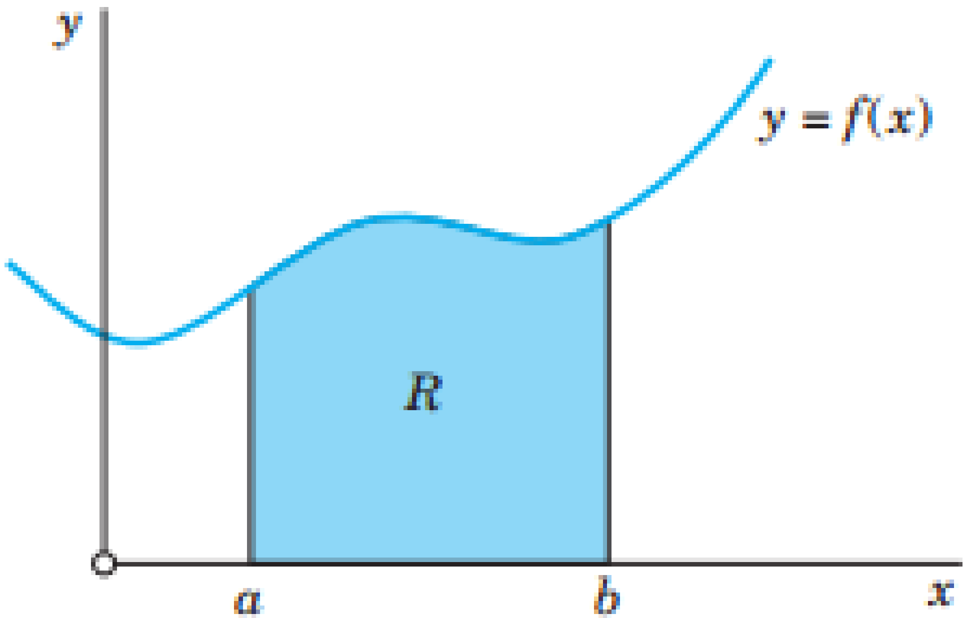

Fig. 440. Geometric interpretation of a definite integral

Chúng ta đã biết rằng, nếu tồn tại hàm F có đạo hàm bằng f, thì J có thể tính một cách trực tiếp:

$$J = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad [F'(x$$

Công thức hình chữ nhật

Phương pháp tích phân số nhận được bằng cách xấp xỉ hàm f bởi hàm dễ lấy tích phân.

Công thức đơn giản nhất đó là công thức hình thang, nhận được bằng cách chia a≤x ≤b thành n khoảng con có độ dài bằng nhau h=(b – a)/n và trong mỗi khoảng con, ta xấp xỉ hàm f bởi hằng số $f(x_j*)$, giá trị của hàm f tại điểm giữa x_j* của khoảng thứ j (Hình 441). Khi đó, f là hàm bậc thang (hàm hằng trên từng khúc), n hình chữ nhật ở hình 441 có diện tích $f(x_1^*)h$, $f(x_2^*)h$, …, $f(x_n^*)h$, và công thức hình chữ nhật là:

(1)

$$J = \int_a^b f(x)dx = h\Big[f(x_1^*) + f(x_2^*) + \ldots + f(\ldots$$

$$h = \frac{b - \ldots}{n}$$

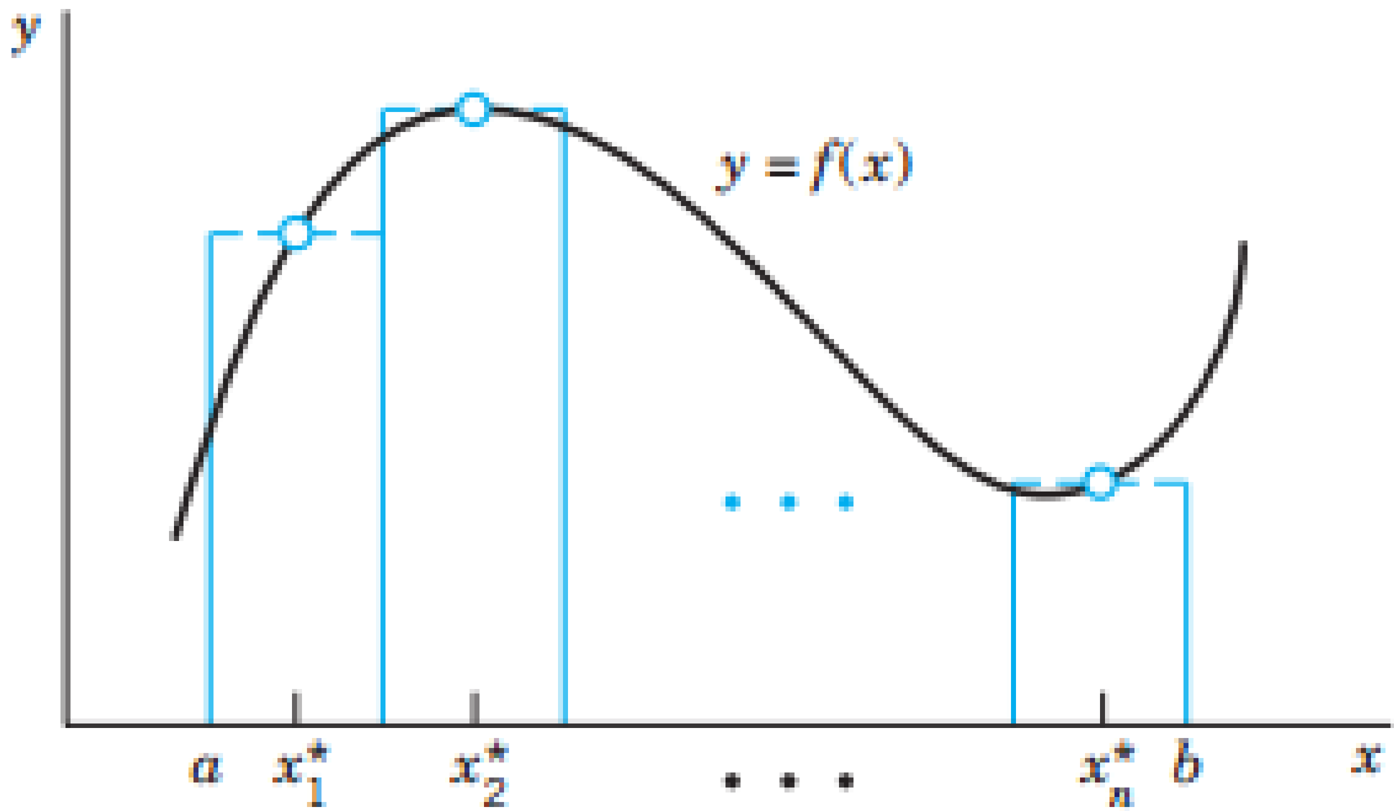

Fig. 441. Rectangular rule

Công thức hình thang

Công thức hình thang nói chung chính xác hơn. Chúng ta nhận được công thức hình thang bằng cách chia như trên, và trên mỗi đoạn ta xấp xỉ f bởi đường gấp khúc với các đầu mút: [a, f(a)], [x_1, f(x_1)],…, [b, f(b)], trên đường cong f (Hình 442).

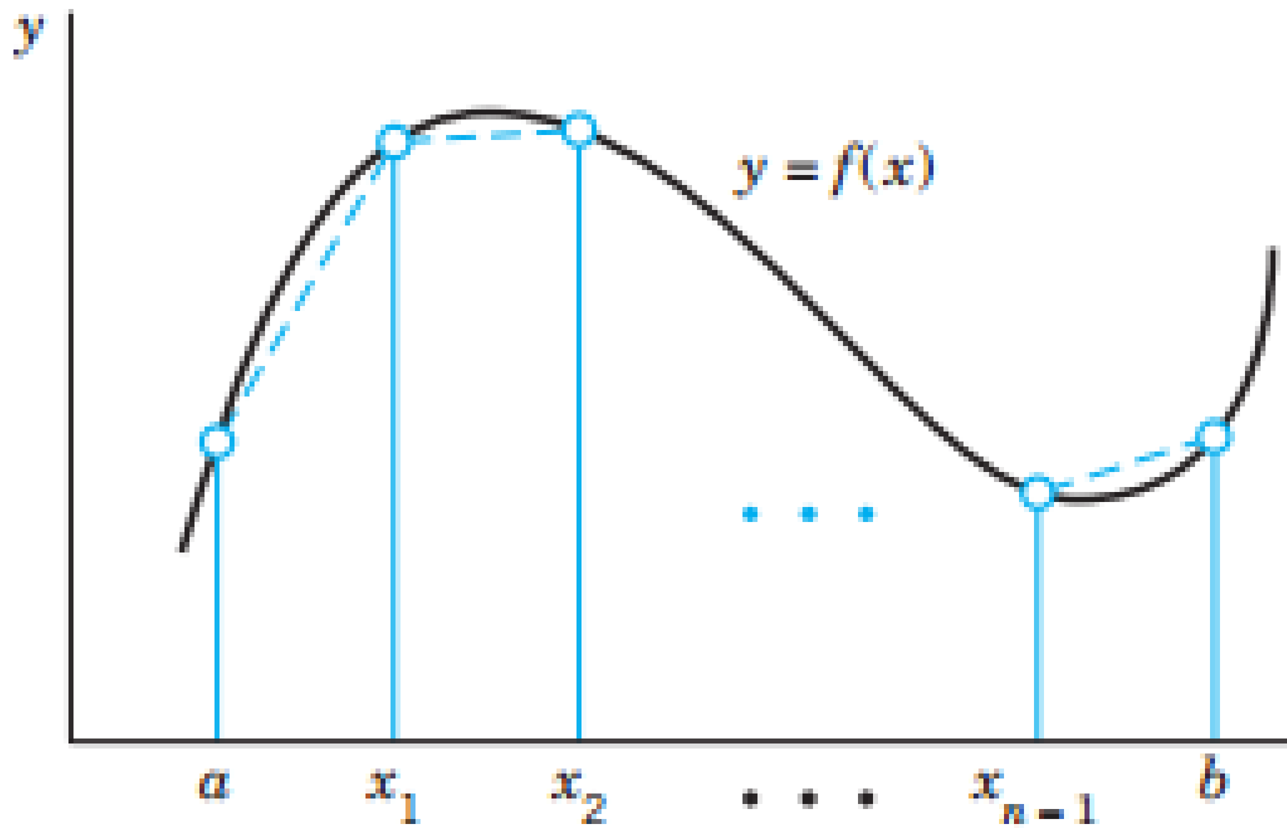

Fig. 442. Trapezoidal rule

Khi đó, diện tích nằm dưới đường cong f giữa a và b được xấp xỉ bởi tổng diện tích của n hình thang:

$$\frac{1}{2}\left[f(a)+f(x_1)\right]h,\ \frac{1}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]h,\dots,\frac{1}{2}\left[f(x_{n-1})+\right.$$

Bằng việc lấy tổng của chúng ta nhận được:

(2)

$$J=\int_a^b f(x)dx=h\left[\frac{f(a)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_{n-1})\right.$$

ở đây, h=(b – a)/n, x_j và a, b được gọi là các điểm mốc,

Ví dụ 1. Hãy tính $J=\int_0^1 e^{-x^2}dx$ theo công thức 2 với n=10.

Giải Theo bảng 19.3 ta có

$$J = 0.1*(0.5*1.367879+6.778167)$$

$$=0.746211$$

Table 19.3 Computations in Example 1

j	x_j	x_j^2	$e^{-x_j^2}$
0	0	0	1.000000
1	0.1	0.01	
2	0.2	0.04	
3	0.3	0.09	
4	0.4	0.16	
5	0.5	0.25	
6	0.6	0.36	
7	0.7	0.49	
8	0.8	0.64	
9	0.9	0.81	
10	1.0	1.00	0.367879
Sums			1.367879

Đánh giá sai số của công thức hình thang:

Theo công thức đánh giá sai số của công thức nội suy Lagrange (công thức (5) bài 19.3) ta có:

$$f(x) - p_1(x) = (x - x_0)(x - x_1$$

với t phù hợp và phụ thuộc vào x, nằm giữa x_0 và x_1. Tích phân theo x từ $a=x_0$ đến $x_1=x_0+h$ ta được:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx - \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] = \int_{x_0}^{x_0+h} (x - x_0)(x - x_0 - h)$$

Đặt $x - x_0 = v$ và ứng dụng định lý giá trị trung bình trong tích phân xác định, mà ta có thể ứng dụng vì $(x - x_0)(x - x_0 - h)$ không đổi dấu, và vế phải tính được:

$$\int_0^h v(v-h)\frac{f''(\tilde{t})}{2}dv = \left(\frac{h^3}{3}-\frac{h^3}{2}\right)\frac{f''(\tilde{t})}{2} = -\frac{h}{1}$$

Ở đây $\tilde{t}$ là giá trị phù hợp năm giữa x_0 và x_1. Đây là sai số của công thức hình thang với n = 1, gọi là sai số địa phương.

Vì thế, sai số ở công thức (2) với n bất kỳ bằng tổng các sai số ở các khoảng con, do $h=(b-a)/n$, $nh^3 = n(b-a)^3/n^3$ và $(b-a)^2 = n^2h^2$, chúng ta đi đến:

(3)

$$\varepsilon = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\hat{t}) = -\frac{b-a}{12} h^2 f$$

với $\hat{t}$ phù hợp, chưa biết, nằm giữa a và b.

Do (3) công thức (2) có thể viết

(2*)

$$J = \int_a^b f(x)dx = h\left[\frac{f(a)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(b)}{2}\right] -$$

Cận của sai số

Cận của sai số nhận được bằng cách lấy giá trị lớn nhất của f’’, ký hiệu là M_2 và gía trị nhỏ nhất, ký hiệu là M_2^* , trong khoảng lấy tích phân. Khi đó, từ (3) ta có (chú ý K là số âm):

(4) $M_2K \le \varepsilon \le M_2^*K$, ở đây

$$K = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} = -\frac{(b-a)}{12}h^2 .$$

Ví dụ 2. Tính sai số trong ví dụ 1 theo công thức 4 và 5.

EXAMPLE 2 Error Estimation for the Trapezoidal Rule by (4) and (5)

Estimate the error of the approximate value in Example 1 by (4) and (5).

Solution. **(A)** ***Error bounds by*** **(4).** By differentiation, $f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$. Also, $f'''(x) > 0$ if $0 < x < 1$, so that the minimum and maximum occur at the ends of the interval. We compute $M_2 = f''(1) = 0.735759$ and $M_2^* = f''(0) = -2$. Furthermore, $K = -1/1200$, and (4) gives

$$-0.000614 \leqq \epsilon \leqq 0.001667.$$

Hence the exact value of J must lie between

$$0.746211 - 0.000614 = 0.745597 \qquad \text{and} \qquad 0.746211 + 0.001667 = 0.747878.$$

Actually, $J = 0.746824$, exact to 6D.

(B) ***Error estimate by*** **(5).** $J_h = 0.746211$ in Example 1. Also,

$$J_{h/2} = 0.05\left[\sum_{j=1}^{19} e^{-(j/20)^2} + \frac{1}{2}(1 + 0.367879)\right] = 0.746671.$$

Hence $\epsilon_{h/2} = \frac{1}{3}(J_{h/2} - J_h) = 0.000153$ and $J_{h/2} + \epsilon_{h/2} = 0.746824$, exact to 6D.

Công thức Simpson

Xấp xỉ bởi hàm hằng từng khúc ta nhận được công thức hình chữ nhật.

Xấp xỉ bởi hàm tuyến tính từng khúc ta nhận được công thức hình thang.

Xấp xỉ bởi hàm bậc 2 từng khúc, ta nhận được công thức Simpson, công thức quan trọng trong thực tiễn do có độ chính xác cao và đơn giản.

Để có được công thức Simpson ta chia đoạn lấy tích phân ra làm n=2m đoạn con có độ dài bằng nhau, bằng h=(b-a)/2m với các đầu mút: x_0 (=a), x_1, …, x_{2m-1}, x_{2m} (=b); xem hình 443

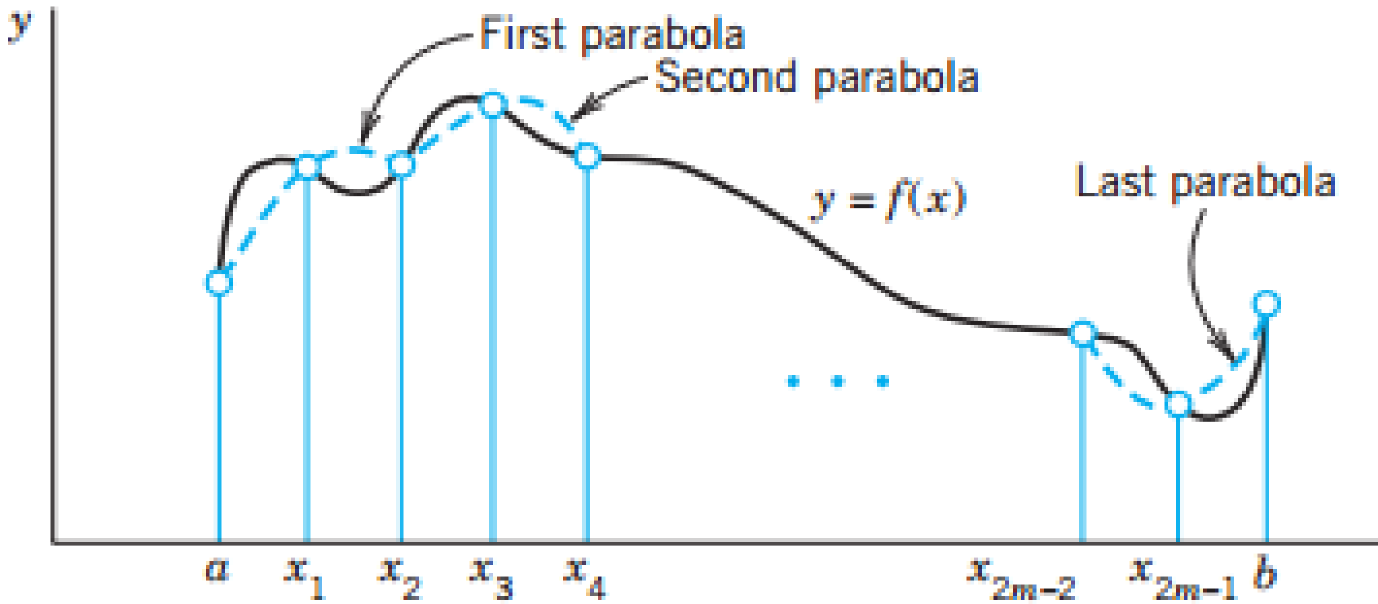

Fig. 443. Simpson's rule

Bây giờ, trước tiên ta lấy 2 đoạn con và xấp xỉ f(x) trên đoạn $x_0 \leq x \leq x_0 + 2h$ bởi đa thức Lagrange $p_2(x)$ qua các điểm (x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2):

$$(6) \quad p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f_2.$$

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0$$

$$(6) \qquad + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f_2$$

Ta nhận thấy mẫu số trong (6) bằng $2h^2$, $-h^2$ và $2h^2$ một cách tương ứng. Đặt $s=(x - x_1)/h$ ta có:

$x - x_1 = sh$,

$x - x_0 = x - x_1 + (x_1 - x_0) = (s + 1)h$.

$x - x_2 = x - x_1 - (x_2 - x_1)=(s - 1)h$

và ta nhận được:

$p_2(x)=(1/2)s(s-1)f_0 - (s+1)(s-1)f_1$

$+ (1/2)s(s+1)f_2$.

Bây giờ, ta lấy tích phân theo x từ x_0 đến $x_2 = x_0 + 2h$, tương ứng s chạy từ -1 đến +1:

$$(7^*) \qquad \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)\,dx = h\left(\frac{1}{3}\,f_0 + \right.$$

Công thức tương tự ta nhận được với hai đoạn con tiếp theo từ x_2 đến x_4, và tiếp tục như vậy. Lấy tổng m công thức như vậy, ta nhận được công thức Simpson:

$$\textbf{(7)} \qquad \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\,(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 2f_{2m-2}$$

Table 19.4 **Simpson's Rule of Integration**

ALGORITHM SIMPSON ($a, b, m, f_0, f_1, \cdots, f_{2m}$)

This algorithm computes the integral $J = \int_a^b f(x)\,dx$ from given values $f_j = f(x_j)$ at equidistant $x_0 = a, x_1 = x_0 + h, \cdots, x_{2m} = x_0 + 2mh = b$ by Simpson's rule (7), where $h = (b - a)/(2m)$.

INPUT: $a, b, m, f_0, \cdots, f_{2m}$

OUTPUT: Approximate value $\tilde{J}$ of J

Compute $s_0 = f_0 + f_{2m}$

$s_1 = f_1 + f_3 + \cdots + f_{2m-1}$

$s_2 = f_2 + f_4 + \cdots + f_{2m-2}$

$h = (b - a)/2m$

$$\tilde{J} = \frac{h}{3}(s_0 + 4s_1 + 2s_2)$$

OUTPUT $\tilde{J}$. Stop.

End SIMPSON

Sai số của công thức Simpson (7):

Nếu đạo hàm cấp 4 $f^{(4)}$ tồn tại và liên tục trên đoạn $a \leq x \leq b$, sai số của công thức Simpson (7) sẽ là:

(8) $$\epsilon_S = -\frac{(b-a)^5}{180(2m)^4} f^{(4)}(\hat{t}) = -\frac{b}{1}$$

ở đây $\hat{t}$ giá trị phù hợp chưa biết, nằm giữa a và b. Điều này tương tự với (3).

(8) $$\epsilon_S = -\frac{(b-a)^5}{180(2m)^4} f^{(4)}(\hat{t}) = -\frac{b-a}{180}$$

Và ta có thể viết (7) dưới dạng

(7**) $$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + \cdots + f_{2m}\right) - \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\hat{t}).$$

Đánh giá cận của sai số

Bằng việc xét $f^{(4)}$ trong (8), ký hiệu M_4 là giá trị lớn nhất, M_4^* là giá trị nhỏ nhất của $f^{(4)}$ trong đoạn [a, b], ta có

(9) $$CM_4 \leqq \epsilon_S \leqq CM_4^*$$

where $$C = -\frac{(b-a)^5}{180(2m)^4} = -\frac{b-a}{180}$$