Bài 20.2 Hệ phương trình tuyến tính: Phân tích LU và Ma trận nghịch đảo

Chúng ta tiếp tục thảo luận các phương pháp số giải hệ phương trình tuyến tính n phương trình, n ẩn:

(1) $$Ax=b$$

ở đây, ma trân $A=[a_{jk}]$ là ma trận vuông cấp nxn, véc tơ $x^T=[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, còn $b^T=[b_1, b_2, \ldots, b_n]$.

Chúng ta trình bày 3 phương pháp cải tiến từ phương pháp khử Gauss với số tính toán ít hơn Doolittle,Crout, và Cholesky.

Các phương pháp này đều sử dụng ý tưởng phân tích A thành nhân tử LU.

Một phân tích ma trận vuông A thành nhân tử LU là phân tích:

(2) A=LU

ở đây, L là ma trận tam giác dưới, U là ma trận tam giác trên.

Ví dụ

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 1. Phương pháp Detroittle

$$\mathbf{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix}:$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$a_{11} = 3 = 1 \cdot u_{11} = u_{11}$	$a_{12} = 5 = 1 \cdot u_{12} = u_{12}$	$a_{13} = 2 = 1 \cdot u_{13} = u_{13}$
$a_{21} = 0 = m_{21}u_{11}$ $m_{21} = 0$	$a_{22} = 8 = m_{21}u_{12} + u_{22}$ $u_{22} = 8$	$a_{23} = 2 = m_{21}u_{13} + u_{23}$ $u_{23} = 2$
$a_{31} = 6 = m_{31}u_{11}$ $= m_{31} \cdot 3$ $m_{31} = 2$	$a_{32} = 2 = m_{31}u_{12} + m_{32}u_{22}$ $= 2 \cdot 5 + m_{32} \cdot 8$ $m_{32} = -1$	$a_{33} = 8 = m_{31}u_{13} + m_{32}u_{23} + u_{33}$ $= 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 + u_{33}$ $u_{33} = 6$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ax=LUx=b, Đặt y=Ux, suy ra Ly=b, sau khi giải ra y, ta lại giải được ngay Ux=y.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 26 \end{bmatrix}. \qquad \text{Solution} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}. \qquad \text{Solution} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Our formulas in Example 1 suggest that for general n the entries of the matrices $\mathbf{L} = [m_{jk}]$ (with main diagonal $1, \cdots, 1$ and m_{jk} suggesting "multiplier") and $\mathbf{U} = [u_{jk}]$ in the **Doolittle method** are computed from

$$u_{1k} = a_{1k} \qquad k = 1, \cdots, n$$

$$m_{j1} = \frac{a_{j1}}{u_{11}} \qquad j = 2, \cdots, n$$

$$u_{jk} = a_{jk} - \sum_{s=1}^{j-1} m_{js} u_{sk} \qquad k = j, \cdots, n; \quad j \geqq 2 \tag{4}$$

$$m_{jk} = \frac{1}{u_{kk}} \left(a_{jk} - \sum_{s=1}^{k-1} m_{js} u_{sk} \right) \qquad j = k+1, \cdots, n; \quad k \geqq 2.$$

Phương pháp Cholesky

Cho A là ma trận đối xứng, xác định dương (nghĩa là $A=A^T$ và $xAx>0$ với mọi x khác 0). Chúng ta chọn $U = L^T$, $u_{jk} = m_{kj}$.

Ví dụ

$$(5)\qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 14 \\ 2 & 17 & -5 \\ 14 & -5 & 83 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{L}\mathbf{L}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 7 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

The popular method of solving $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ based on this factorization $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^{\mathsf{T}}$ is called **Cholesky's method**.[3] In terms of the entries of $\mathbf{L} = [l_{jk}]$ the formulas for the factorization are

$$(6)\qquad \begin{aligned} l_{11} &= \sqrt{a_{11}} && \\ l_{j1} &= \frac{a_{j1}}{l_{11}} && j = 2, \cdots, n \\ l_{jj} &= \sqrt{a_{jj} - \sum_{s=1}^{j-1} l_{js}^2} && j = 2, \cdots, n \\ l_{pj} &= \frac{1}{l_{jj}}\left(a_{pj} - \sum_{s=1}^{j-1} l_{js} l_{ps}\right) && p = j+1, \cdots, n; \quad j \geqq 2. \end{aligned}$$

If $\mathbf{A}$ is symmetric but not positive definite, this method could still be applied, but then leads to a *complex* matrix $\mathbf{L}$, so that the method becomes impractical.

Ví dụ phương pháp Cholesky

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 14x_3 &= 14 \\ 2x_1 + 17x_2 - 5x_3 &= -101 \\ 14x_1 - 5x_2 + 83x_3 &= 155. \end{aligned}$$

Giải

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 14 \\ 2 & 17 & -5 \\ 14 & -5 & 83 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

we compute, in the given order,

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 2 \qquad l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{2}{2} = 1 \qquad l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{14}{2} = 7$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{17 - 1} = 4$$

$$l_{32} = \frac{1}{l_{22}}(a_{32} - l_{31}l_{21}) = \frac{1}{4}(-5 - 7 \cdot 1) = -3$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{83 - 7^2 - (-3)^2} = 5.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 7 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -101 \\ 155 \end{bmatrix}. \quad \text{Solution} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 7 \\ -27 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -27 \\ 5 \end{bmatrix}. \quad \text{Solution} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp Gauss – Jordan

Bước 1. Viết ma trận cấp nx2n: [A|I]

Bước 2. Dùng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để đưa A về ma trận đơn vị I, khi đó, vế phải trở thành A^{-1}.

Gauss–Jordan Elimination. Matrix Inversion

Another variant of the Gauss elimination is the **Gauss–Jordan elimination**, introduced by W. Jordan in 1920, in which back substitution is avoided by additional computations that reduce the matrix to diagonal form, instead of the triangular form in the Gauss elimination. But this reduction from the Gauss triangular to the diagonal form requires more operations than back substitution does, so that the method is *disadvantageous* for solving systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. But it may be used for matrix inversion, where the situation is as follows.

The **inverse** of a nonsingular square matrix $\mathbf{A}$ may be determined in principle by solving the n systems

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_j \qquad (j = 1, \cdots, n) \tag{7}$$

where $\mathbf{b}_j$ is the jth column of the $n \times n$ unit matrix.

However, it is preferable to produce $\mathbf{A}^{-1}$ by operating on the unit matrix $\mathbf{I}$ in the same way as the Gauss–Jordan algorithm, reducing $\mathbf{A}$ to $\mathbf{I}$. A typical illustrative example of this method is given in Sec. 7.8.