

# Chương 1

## Giải gần đúng phương trình

### 1.1 Mở đầu

Sự tăng trưởng của dân số thường có thể được mô hình hóa trong khoảng thời gian ngắn bằng cách giả định rằng dân số tăng liên tục theo thời gian tỷ lệ thuận với con số hiện tại vào thời điểm đó. Giả sử  $N(t)$  biểu thị số lượng trong dân số tại thời điểm  $t$  và  $\lambda$  biểu thị tỷ lệ sinh không đổi của dân số. Khi đó dân số thỏa mãn phương trình vi phân:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t)$$

Nghiệm của phương trình là  $N(t) = N_0 e^{\lambda t}$ , ở đây  $N_0$  là dân số ban đầu.

Mô hình hàm mũ này chỉ có giá trị khi dân số bị cô lập, không có người nhập cư. Nếu nhập cư được phép ở tốc độ không đổi  $v$  thì phương trình vi phân trở thành:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) + v$$

Nghiệm của nó là:

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t} + \frac{v}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1)$$

Giả sử ban đầu có  $N(0) = 1\,000\,000$  người, và có tới 435 000 người nhập cư vào cộng đồng trong năm đầu tiên, vậy  $N(1) = 1\,564\,000$  người có mặt vào cuối năm đầu tiên. Để xác định tỷ lệ sinh của cộng đồng dân số này, chúng ta cần tìm  $\lambda$  trong phương trình:

$$1\,564\,000 = 1\,000\,000 e^{\lambda} + \frac{435\,000}{\lambda} (e^{\lambda} - 1)$$

Không thể giải một cách chính xác giá trị  $\lambda$  trong phương trình này, nhưng các phương pháp tính được thảo luận trong chương này có thể được sử dụng để

tính gần đúng nghiệm của các phương trình loại này với độ chính xác cao tùy ý. Giải pháp cho vấn đề cụ thể này được xem xét trong Bài tập 24 của Mục 3.3.

## 1.2 Phương pháp chia đôi

Giả sử  $f$  là hàm số xác định và liên tục trên khoảng  $[a, b]$ , với  $f(a)$  và  $f(b)$  trái dấu. Định lý giá trị trung gian nói rằng tồn tại một số  $p$  trong  $(a, b)$  với  $f(p) = 0$ .

Mặc dù có thể xảy ra nhiều hơn một nghiệm trong khoảng  $(a, b)$ , nhưng để thuận lợi trong việc nghiên cứu, chúng ta giả thiết chỉ có duy nhất một nghiệm trong khoảng này. Khi đó, ta có thể dùng phương pháp sau:

**Phương pháp.** Phương pháp chia đôi (Bisection method)

*Phương pháp này cho phép tìm nghiệm  $p$  của  $f(p) = 0$  trong khoảng  $[a, b]$ , với  $f(a)$  và  $f(b)$  trái dấu.*

*Để bắt đầu, ta đặt  $a_1 = a$  và  $b_1 = b$ , và đặt  $p_1$  là điểm giữa của  $[a, b]$ ; nghĩa là:*

$$p_1 = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

- Nếu  $f(p_1) = 0$  thì  $p = p_1$ .
- Nếu  $f(p_1) \neq 0$  thì  $f(p_1)$  cùng dấu với  $f(a_1)$  hoặc  $f(b_1)$ .
  - Nếu  $f(p_1)$  cùng dấu với  $f(a_1)$  thì  $p \in [p_1, b_1]$ . Đặt  $a_2 = p_1$ ,  $b_2 = b_1$ .
  - Nếu  $f(p_1)$  cùng dấu với  $f(b_1)$  thì  $p \in [a_1, p_1]$ . Đặt  $a_2 = a_1$ ,  $b_2 = p_1$ .

*sau đó làm tiếp phương pháp trên với khoảng  $[a_2, b_2]$ .*

Các cách dừng khác (còn gọi là *tiêu chí dừng*) có thể được áp dụng trong phương pháp trên hoặc trong bất kỳ các kỹ thuật lặp lại trong chương này. Ví dụ, chúng ta có thể chọn một dung sai  $\varepsilon > 0$  và tạo dãy  $p_1, \dots, p_N$  cho đến khi đáp ứng một trong các điều kiện sau:

$$|p_N - p_{N-1}| < \varepsilon, \quad (1.1)$$

$$\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} < \varepsilon, \quad p_N \neq 0 \text{ hoặc} \quad (1.2)$$

$$|f(p_N)| < \varepsilon \quad (1.3)$$

Không may, khó khăn có thể phát sinh với bất kỳ tiêu chí dừng nào. Ví dụ, có các chuỗi  $p_n$  mà hiệu  $p_n - p_{n-1}$  hội tụ về 0 trong khi dãy đó lại phân kỳ. Cũng có thể có  $f(p_n)$  gần bằng 0 trong khi  $p_n$  khác đáng kể so với  $p$ . Nếu không có kiến thức bổ sung về  $f$  hoặc  $p$ , bất đẳng thức 1.2 là tiêu chuẩn dừng tốt nhất để áp dụng vì nó sát nhất với sai số tương đối.

Khi dùng máy tính để tính xấp xỉ, nên thiết lập một giới hạn trên về số lần lặp lại. Điều này giúp tránh vòng lặp vô hạn, một tình huống có thể phát sinh khi chuỗi  $p_n$  phân kỳ (và cả khi chương trình sai).

Ta có nhận xét:

**Ví dụ 1.1.** Chứng minh rằng  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$  có nghiệm trong khoảng  $[1, 2]$ , và dùng phương pháp chia đôi để xác định nghiệm đúng đến  $10^{-4}$ .

Vì  $f(1) = -5$  và  $f(2) = 14$ ,  $f(x) = 0$  chắc chắn có nghiệm trong khoảng  $[1, 2]$ .

Ta có bảng sau:

$n$	$a_n$	$b_n$	$p_n$	$f(p_n)$
1	1,0	2,0	1,5	2,375
2	1,0	1,5	1,25	-1,796 87
3	1,25	1,5	1,375	0,162 11
4	1,25	1,375	1,3125	-0,848 39
5	1,3125	1,375	1,343 75	-0,350 98
6	1,343 75	1,375	1,359 375	-0,096 41
7	1,359 375	1,375	1,367 187 5	0,032 36
8	1,359 375	1,367 187 5	1,363 281 25	-0,032 15
9	1,363 281 25	1,367 187 5	1,365 234 375	0,000 072
10	1,363 281 25	1,365 234 375	1,364 257 813	-0,016 05
11	1,364 257 813	1,365 234 375	1,364 746 094	-0,007 99
12	1,364 746 094	1,365 234 375	1,364 990 234	-0,003 96
13	1,364 990 234	1,365 234 375	1,365 112 305	-0,001 94

Sau 13 lần lặp,  $p_{13} = 1,365 112 305$  xấp xỉ nghiệm  $p$  với sai số:

$$|p - p_{13}| < |b_{14} - a_{14}| = |1,365 234 375 - 1,365 112 305| = 0,000 122 070$$

Do  $|a_{14}| < |p|$  (khoảng đang xét dương), ta có:

$$\frac{|p - p_{13}|}{|p|} < \frac{|b_{14} - a_{14}|}{|a_{14}|} \leq 9 \times 10^{-5}$$

Cần chú ý rằng,  $p_9$  thực sự gần với  $p$  hơn kết quả cuối cùng  $p_{13}$ , tuy nhiên khi thực hiện thuật toán ta không thể biết điều này. Hơn nữa,  $|f(p_9)| < |f(p_{13})|$  cũng không liên quan đến việc  $p_9$  sát với  $p$  hơn.

Phương pháp chia đôi có hai điểm yếu lớn:

- Cần số vòng lặp  $N$  lớn
- Vô tình bỏ qua các xấp xỉ tốt

Dù vậy, phương pháp này lại có một ưu điểm lớn là đảm bảo dãy  $p_N$  hội tụ đến một nghiệm. Do ưu điểm này, phương pháp chia đôi thường được dùng để tìm điểm bắt đầu cho các phương pháp khác hiệu quả hơn mà sẽ được giới thiệu sau.

**Định lí 1.1.** Cho hàm  $f \in [a, b]$  và  $f(a)f(b) < 0$ . Phương pháp chia đôi tạo ra một chuỗi  $p_n$  xấp xỉ nghiệm  $p$  của  $f$  với sai số như sau:

$$|p_n - p| \leq \frac{b - a}{2^n}, n \geq 1$$

*Chứng minh.* Với mọi  $n \geq 1$ , ta có:

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b - a) \text{ và } p \in (a_n, b_n)$$

Do

$$p_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

ta suy ra được

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(a_n + b_n) - b_n \leq p_n - p \leq \frac{1}{2}(a_n + b_n) - a_n \\ \iff & \frac{1}{2}(a_n - b_n) \leq p_n - p \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) \\ \iff & |p_n - p| \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{b - a}{2^n} \end{aligned}$$

đpcm.