Phương pháp tính MAT1099

Lê Phê Đô
dolp@vnu.edu.vn

07/09/2020

1 Giới thiệu về phép tính gần đúng

1.1 Một số ví dụ về tính toán khoa học và phương pháp tính

1.1.1 Lý do nghiên cứu Phương pháp tính

- Làm viêc với các số gần đúng.
- Giải gần đúng các phương trình và hê phương trình.
- Xấp xỉ hàm số: Phương pháp nội suy, phương pháp xấp xỉ hàm số, chuỗi Taylor hoặc chuỗi Maclaurin.
- Số học IEEE.

1.1.2 Các nhiệm vụ

- Tìm hiểu và ứng dụng các thuật toán.
- Thể hiện các thuật toán bằng các chương trình.
- Tìm các bài toán thực tiễn.

Trong thực tế chúng ta thường phải xử lý, tính toán với các đại lượng gần đúng như các số đo vật lý, các dữ liệu ban đầu, các số làm tròn...với sai số nào đó, tức là các số gần đúng. Việc ước lượng sai số hợp lý cho phép ta đánh giá được chất lượng của quá trình tính toán, quyết định số chữ số giữ lại trong các phép tính trung gian và trong kết quả. Vì vậy, trước tiên ta cần nghiên cứu về các phép tính gần đúng và sai số.

2 Số gần đúng, sai số tuyệt đối và tương đối

2.1 Sai số tuyệt đối và sai số tương đối

2.1.1 Sai số tuyệt đối

Nếu số gần đúng a có giá trị đúng là a_0 thì ta nói a xấp xỉ a_0 hay a là số gần đúng của a_0. Khi đó sai số của a là:

$$E_a = a - a_0 \tag{1}$$

Nhưng giá trị này nói chúng ta không biết được mà chỉ ước lượng được cận trên của trị tuyệt đối của nó.

Định nghĩa 2.1 *Giá trị ước lượng* Δa *sao cho*

$$|a - a_0| \leq \Delta a \tag{2}$$

được gọi là sai số tuyệt đối *của số gần đúng* a*.*

Sai số tuyệt đối nhỏ nhất có thể biết được gọi là sai số tuyệt đối giới hạn của a. Thông thường ước lượng sai số tuyệt đối giới hạn là khó và nhiều khi không cần thiết nên người ta chỉ cần ước lượng sai số tuyệt đối đủ nhỏ và dùng từ 1 đến 3 chữ số có nghĩa (là số chữ số bắt đầu từ chữ số khác không đầu tiên từ trái sang phải - xem mục 2.1) để biểu diễn sai số tuyệt đối của số gần đúng.

Thay cho 2 người ta còn dùng cách biểu diễn sau để chỉ sai số tuyệt đối của a:

$$a_0 = a \pm \Delta a \tag{3}$$

Trong thực tế thì sai số E_a không thể biết được nên khi không có sự hiểu lầm người ta còn dùng từ *sai số* để chỉ sai số tuyệt đối E_a.

Ví dụ 1 *Căn phòng có chiều dài* $d = 5.45\,\mathrm{m}$ *và chiều rộng* $r = 3.94\,\mathrm{m}$ *với sai số* $1\,\mathrm{cm}$.

Khi đó ta hiểu là:

$$\Delta d = 0.01\,\mathrm{m} \text{ hay } d = 5{,}45 \pm 0.01\,\mathrm{m}$$
$$\Delta r = 0.01\,\mathrm{m} \text{ hay } r = 3{,}97 \pm 0.01\,\mathrm{m}$$

Như vậy diện tích của phòng được ước lượng bởi:

$$S = d \cdot r = 5{,}45 \cdot 3{,}94 = 21.473\,\mathrm{m}^2$$

với cận trên và cận dưới của S là:

$$(5{,}45 - 0{,}01)(3{,}94 - 0{,}01) = 21{,}3792 \leq S \leq (5{,}45 + 0{,}01)(3{,}94 + 0{,}01) = 21{,}567$$

Vậy ta có ước lượng sai số tuyệt đối của S là:

$$|S - S_0| \leq 0.094\,\mathrm{m}^2$$

2.1.2 Sai số tương đối

Hai số gần đúng có cùng sai số tuyệt đối sẽ có *"mức độ chính xác"* khác nhau nếu độ lớn của chúng khác nhau, số bé hơn sẽ có độ chính xác kém hơn. Để biểu diễn độ chính xác này người ta dùng sai số sai số tương đối.

Định nghĩa 2.2 Sai số tương đối *của số gần đúng a là tỷ số giữa sai số tuyệt đối và giá trị tuyệt đối của nó, được ký hiệu là δa.*

$$\delta a = \frac{\delta a}{|a|} \tag{4}$$

Thường sai số tương đối được biểu diễn dưới dạng phần trăm với 2 hoặc 3 chữ số.

Từ 4 ta thấy nếu biết δa thì:

$$\Delta a = |a|\delta a \tag{5}$$

nên ta chỉ cần biết một trong hai loại sai số của nó là được.

Ví dụ 2 *Nếu* $a = 57$ *và* $\Delta a = 0{,}5$ *thì* $\delta a = 0{,}0087719$ *hoặc* $0{,}88\%$ *(gọn hơn là* $0{,}9\%$*).*

2.1.3 Các loại sai số khác

Để hình dung các loại sai số khác ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 3 *Một vật thể rơi từ độ cao H_0 với vận tốc ban đầu v_0 (được đo nhờ thiết bị nào đó). Tính độ cao $H(t)$ của vật thể sau thời gian t. Bài toán có thể giải như sau:*

Nếu gọi ngoại lực tác động vào vật thể là $F(t)$ (gồm lực hút trọng trường và lực cản), khối lượng vật thể là m thì $H(t)$ là nghiệm của phương trình vi phân cấp hai

$$H''(x) = \frac{-F(t)}{m} \tag{6}$$

với điều kiện ban đầu $H(0) = H_0$ và $H'(0) = -v_0$.

Ta chọn một phương pháp gần đúng để giải phương trình này, chẳng hạn nếu giả thiết $\frac{F(t)}{m}$ không đổi thì

$$H(t) = H_0 - g\frac{t^2}{2} - v_0 t$$

Qua ví dụ trên ta thấy sai số của kết quả nhận được chịu ảnh hưởng của:

- các số đoH_0, v_0
- cách lập luận để xác định $F(t)$
- phương pháp giải phương trình 6
- và các yếu tố ngẫu nhiên khác

Theo các yếu tố ảnh hưởng tới kết quả tính toán ta phân ra các loại sai số sau:

- *Sai số dữ liệu*: Còn gọi là sai số của số liệu ban đầu. Trong thí dụ trên là sai số khi đo H_0 và v_0.
- *Sai số giả thiết*: Sai số này gặp phải khi ta đơn giản hoá bài toán thực tiễn để thiết lập mô hình toán học có thể giải được. Trong thí dụ trên có thể giả thiết ngoại lực chỉ là trọng lực.
- *Sai số phương pháp*: Là sai số của phương pháp giải gần đúng bài toán theo mô hình được lập. Trong thí dụ trên là phương pháp giải phương trình vi phân 6.
- *Sai số tính toán*: Là sai số tích luỹ trong quá trình tính toán theo phương pháp được chọn.
- *Sai số làm tròn*: Khi tính toán ta thường phải làm tròn các số nên ảnh hưởng tới kết quả nhiều khi rất đáng kể.
- *Sai số ngẫu nhiên*: Là sai số chịu các quy luật chi phối ngẫu nhiên không tránh được.

Về sau ta quan tâm tới sai số tính toán và sai số phương pháp.