

BG Bài 4.4. Nội suy Spline bậc 3

Cho dữ liệu (các giá trị hàm số, các điểm trong mặt phẳng - xy)

$$(\mathbf{x}_0, \mathbf{f}_0), (\mathbf{x}_1, \mathbf{f}_1), \dots, (\mathbf{x}_n, \mathbf{f}_n)$$

có thể được nội suy bằng một đa thức của bậc n hoặc nhỏ hơn để đường cong $p_n(x)$ đi qua $(n+1)$ điểm (x_j, f_j) , ở đây $f_j = f(x_j)$, Xem Sec. 19.3.

Bây giờ nếu n lớn, có thể có vấn đề: có thể có sự dao động lớn với x ở giữa các điểm mốc. Do đó chúng ta gặp phải sự không ổn định của đa thức nội suy (Sec 19.1). Hình 434 cho thấy một ví dụ nổi tiếng của C. Runge, trong đó sai số tối đa có thể tăng lên rất cao (với các nút được giữ bằng nhau và số của chúng tăng lên).

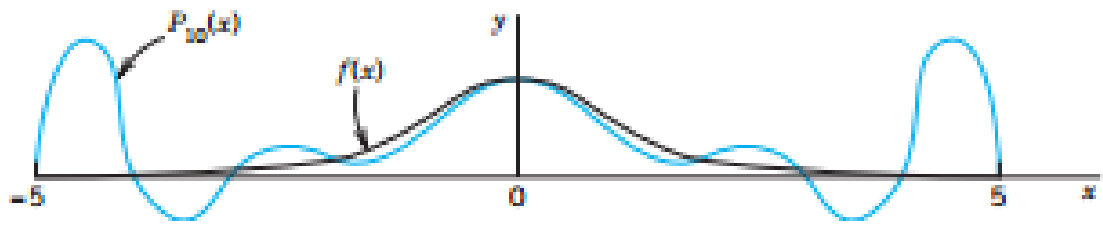


Fig. 434. Runge's example $f(x) = 1/(1 + x^2)$ and interpolating polynomial $P_{10}(x)$

Hình 435 cho thấy sự gia tăng của dao động theo n cho một số hàm là tuyến tính từng khúc.

Những dao động không mong muốn này được tránh bằng phương pháp spline do I. J. Schoenberg năm 1946 (Quarterly of Applied Mathematics 4, trang 45-99, 112-141). Phương pháp này được sử dụng rộng rãi trong thực tế. Nó cũng đặt nền móng cho nhiều CAD hiện đại (máy tính hỗ trợ thiết kế). Tên của nó được mượn từ spline của một nhà soạn thảo, đó là một thanh đàn uốn cong để đi

qua các điểm nhất định và giữ ở vị trí bằng trọng lượng.

Ý tưởng toán học của phương pháp là như sau:

Thay vì dùng một đa thức bậc cao trên toàn khoảng $a \leq x \leq b$, có giá trị trùng với giá trị hàm số tại các điểm nút:

$$(1) \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

Chúng ta dùng n đa thức bậc thấp, ví dụ như đa thức bậc 3: $q_0(x), q_1(x), \dots, q_{n-1}(x)$.

Mỗi một đa thức xác định trên 1 khoảng con nằm giữa 2 điểm mốc,

đa thức $q_0(x)$ xác định trên khoảng từ x_0 đến x_1 ,

đa thức $q_1(x)$ trên khoảng từ x_1 đến x_2 ,
...

và cứ tiếp tục như vậy,

đa thức $q_{n-1}(x)$ xác định trên khoảng từ x_{n-1} đến x_n .

Từ đó chúng ta tạo ra hàm nội suy được gọi là hàm spline $g(x)$ bằng cách ghép các đa thức này lại với nhau tạo thành hàm số liên tục duy nhất đi qua các điểm đã cho, nghĩa là

$$(2) \ g(x_0) = f(x_0)=f_0, \ g(x_1) = f(x_1)=f_1, \ ..., \\ g(x_n) = f(x_n)=f_n.$$

Chú ý rằng, $g(x) = q_0(x)$ trên $x_0 \leq x \leq x_1$, $g(x) = q_1(x)$ trên $x_1 \leq x \leq x_2$, ..., và tiếp tục như vậy, theo cách ta xây dựng $g(x)$.

Vì vậy, **nội suy spline là nội suy từng khúc.**

Đa thức bậc nhất là nội suy spline đơn giản nhất. Tuy nhiên, đa thức nội suy bậc nhất không trơn tại các điểm mốc, không phù hợp với toàn cục, ví như khi ta thiết kế thân tàu hỏa hoặc tàu thủy, ...

Chúng ta xét đa thức nội suy bậc ba, một trong những dạng nội suy quan trọng nhất trong ứng dụng.

Theo định nghĩa, spline bậc 3 $g(x)$ nội suy trên tập dữ liệu $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$ là **hàm liên tục trên khoảng $a=x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, có đạo hàm bậc nhất và bậc hai liên tục và thỏa mãn điều kiện (2)**; hơn nữa, giữa các điểm mốc $g(x)$ được cho bởi $q_j(x)$ đa thức bậc ba hoặc nhỏ hơn.

Chúng ta tuyên bố rằng có spline bậc 3 như vậy. Và nếu cộng với điều kiện (2), chúng ta còn yêu cầu:

$$(3) g'(x_0) = k_0, g'(x_n) = k_n.$$

(Cho hệ số góc của đường cong của $g(x)$ tại 2 đầu mút của khoảng $a \leq x \leq b$), khi đó chúng ta có nội suy bậc 3 duy nhất.

Đây là nội dung định lý tồn tại duy nhất nghiệm, sự chứng minh của nó sẽ chỉ ra cách xác định spline bậc 3. (Điều kiện (3) ta sẽ thảo luận sau khi chứng minh).

Định lý 1. Sự tồn tại và duy nhất đa thức nội suy bậc 3

Giả sử $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$, ở đây x_j và $f_j = f(x_j)$, $j=0, 1, \dots, n$ đã cho. Khi đó tồn tại một và chỉ một đa thức

nội suy spline bậc 3 thỏa mãn các điều kiện (1), (2) và (3).

Chứng minh

Theo định nghĩa, trên khoảng I_j :

$x_j \leq x \leq x_{j+1}$ spline $g(x)$ bằng $q_j(x)$ và thỏa mãn:

(4) $q_j(x_j) = f_j$, $q_j(x_{j+1}) = f_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots, n-1$
với đạo hàm của $q_j(x)$ thỏa mãn:

(5) $q'_j(x_j) = k_j$, $q'_j(x_{j+1}) = k_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots, n-1$

ở đây, k_0 và k_n đã biết, còn k_1, k_2, \dots, k_{n-1} được xác định sau.

Chú ý: Điều kiện (4) và (5) cho ta 4 phương trình để xác định $q_j(x)$.

$$(6^*) \quad c_j = \frac{1}{x_{j+1} - x_j}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

Chúng ta có thể kiểm tra đa thức bậc 3 duy nhất thỏa mãn (4) và (5) có công thức:

$$\begin{aligned}
 q_j(x) = & f_j c_j^2 (x - x_{j+1})^2 [1 + 2c_j (x - x_j)] \\
 & + f_{j+1} c_j^2 (x - x_j)^2 [1 - 2c_j (x - x_{j+1})] \\
 (6) \quad & + k_j c_j^2 (x - x_j)(x - x_{j+1})^2 + k_{j+1} c_j^2 (x - x_j)^2 (x - x_{j+1})
 \end{aligned}$$

Lấy đạo hàm hai lần hàm $q_j(x)$ ta nhận được:

$$\begin{aligned}
 q'_j(x) = & 2f_j c_j^2 (x - x_{j+1}) [1 + 2c_j (x - x_j)] + 2f_j c_j^3 (x - x_{j+1})^2 \\
 & + 2f_{j+1} c_j^2 (x - x_j) [1 - 2c_j (x - x_{j+1})] - 2f_{j+1} c_j^3 (x - x_j)^2 \\
 & + k_j c_j^2 (x - x_{j+1})^2 + 2k_j c_j^2 (x - x_j)(x - x_{j+1}) \\
 & + 2k_{j+1} c_j^2 (x - x_j)(x - x_{j+1}) + k_{j+1} c_j^2 (x - x_j)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q''_j(x) &= 2f_j c_j^2 [1 + 2c_j(x - x_j)] + 4f_j c_j^3(x - x_{j+1}) \\
&+ 4f_j c_j^3(x - x_{j+1}) \\
&+ 2f_{j+1} c_j^2 [1 - 2c_j(x - x_{j+1})] - 4f_{j+1} c_j^3(x - x_j) \\
&- 4f_{j+1} c_j^3(x - x_j) \\
&+ 2k_j c_j^2(x - x_{j+1}) \\
&+ 2k_j c_j^2(x - x_{j+1}) + 2k_j c_j^2(x - x_j) \\
&+ 2k_{j+1} c_j^2(x - x_{j+1}) + 2k_{j+1} c_j^2(x - x_j) \\
&+ 2k_{j+1} c_j^2(x - x_j)
\end{aligned}$$

Đặt $x=x_j$ và $x=x_{j+1}$ ta có:

$$\begin{aligned}
q''_j(x_j) &= 2f_j c_j^2 \left[1 + 2c_j(x_j - x_j) \right] + 4f_j c_j^3(x_j - x_{j+1}) \\
&+ 4f_j c_j^3(x_j - x_{j+1}) \\
&+ 2f_{j+1} c_j^2 \left[1 - 2c_j(x_j - x_{j+1}) \right] - 4f_{j+1} c_j^3(x_j - x_j) \\
&- 4f_{j+1} c_j^3(x_j - x_j) \\
&+ 2k_j c_j^2(x_j - x_{j+1}) \\
&+ 2k_j c_j^2(x_j - x_{j+1}) + 2k_j c_j^2(x_j - x_j) \\
&+ 2k_{j+1} c_j^2(x_j - x_{j+1}) + 2k_{j+1} c_j^2(x_j - x_j) \\
&+ 2k_{j+1} c_j^2(x_j - x_j) \\
&= 2f_j c_j^2 - 4f_j c_j^2 - 4f_j c_j^2 + 6f_{j+1} c_j^2 - 2k_j c_j - 2k_j c_j - 2k_{j+1} c_j \\
&= -6f_j c_j^2 + 6f_{j+1} c_j^2 - 4k_j c_j - 2k_{j+1} c_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q''_j(x_{j+1}) &= 2f_j c_j^2 [1 + 2c_j(x_{j+1} - x_j)] + 4f_j c_j^3(x_{j+1} - x_{j+1}) \\
&+ 4f_j c_j^3(x_{j+1} - x_{j+1}) \\
&+ 2f_{j+1} c_j^2 [1 - 2c_j(x_{j+1} - x_{j+1})] - 4f_{j+1} c_j^3(x_{j+1} - x_j) \\
&- 4f_{j+1} c_j^3(x_{j+1} - x_j) \\
&+ 2k_j c_j^2(x_{j+1} - x_{j+1}) \\
&+ 2k_j c_j^2(x_{j+1} - x_{j+1}) + 2k_j c_j^2(x_{j+1} - x_j) \\
&+ 2k_{j+1} c_j^2(x_{j+1} - x_{j+1}) + 2k_{j+1} c_j^2(x_{j+1} - x_j) \\
&+ 2k_{j+1} c_j^2(x_{j+1} - x_j) \\
&= 6f_j c_j^2 + 2f_{j+1} c_j^2 - 4f_{j+1} c_j^2 - 4f_{j+1} c_j^2 + 2k_j c_j + 2k_{j+1} c_j + 2k_{j+1} c_j \\
&= 6f_j c_j^2 - 6f_{j+1} c_j^2 + 2k_j c_j + 4k_{j+1} c_j
\end{aligned}$$

Vậy

$$(7) \quad q''_j(x_j) = -6f_j c_j^2 + 6f_{j+1} c_j^2 - 4k_j c_j - 2k_{j+1} c_j$$

$$(8) \quad q''_j(x_{j+1}) = 6f_j c_j^2 - 6f_{j+1} c_j^2 + 2k_j c_j + 4k_{j+1} c_j$$

Theo định nghĩa, hàm $g(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục, nên ta có điều kiện:

$$q''_{j-1}(x_j) = q''_j(x_j), j=1, 2, \dots, n-1$$

Trong (8) ta thay j bởi $j-1$ và sử dụng đẳng thức trên ta có:

$$\begin{aligned} q''_j(x_j) &= -6f_j c_j^2 + 6f_{j+1} c_j^2 - 4k_j c_j - 2k_{j+1} c_j \\ &= q''_{j-1}(x_j) = 6f_{j-1} c_{j-1}^2 - 6f_j c_{j-1}^2 + 2k_{j-1} c_{j-1} + 4k_j c_{j-1} \end{aligned}$$

Nghĩa là

$$\begin{aligned} &-6f_j c_j^2 + 6f_{j+1} c_j^2 - 4k_j c_j - 2k_{j+1} c_j \\ &= 6f_{j-1} c_{j-1}^2 - 6f_j c_{j-1}^2 + 2k_{j-1} c_{j-1} + 4k_j c_{j-1} \end{aligned}$$

Chia 2 vế cho 2 và chuyển sang bên trái các ẩn k_j , ta nhận được hệ n pht

$$(9) \begin{cases} k_{j-1}c_{j-1} + 2(c_{j-1} + c_j)k_j + k_{j+1} \\ = 3 \left[\nabla f_j c_{j-1}^2 + \nabla f_{j+1} c_j^2 \right] \end{cases}$$

Ở đây $\nabla f_j = f(x_j) - f(x_{j-1})$,

$\nabla f_{j+1} = f(x_{j+1}) - f(x_j)$ $j = 1, 2, \dots, n-1$.

Hệ $n - 1$ phương trình này có nghiệm duy nhất do ma trận hệ số có các phần tử nằm trên đường chéo chính có trị tuyệt đối lớn hơn hẳn trị tuyệt đối của các phần tử nằm ngoài đường chéo chính. Theo tính chất của ma trận như thế, thì định thức của nó phải khác 0. Bởi vậy, ta có thể xác định duy nhất các giá trị k_1, k_2, \dots, k_{n-1} , chính là các giá trị đạo hàm bậc nhất của $g(x)$ các các điểm

mốc. Điều này hoàn tất chứng minh định lý.

Storage and Time Demands in solving (9) are modest, since the matrix of (9) is sparse (has few nonzero entries) and tridiagonal (may have nonzero entries only on the diagonal and on the two adjacent “parallels” above and below it). Pivoting (Sec. 7.3) is not necessary because of that dominance. This makes splines efficient in solving large problems with thousands of nodes or more. For some literature and some critical comments, see *American Mathematical Monthly* 105 (1998), 929–941.

Yêu cầu về lưu trữ dữ liệu và thời gian giải hệ phương trình (9) là không nhiều, vì ma trận của (9) là thưa (có ít phần tử khác 0) và có dạng tam giác (có thể chỉ có các phần tử khác không trên đường chéo và trên hai đường “song song” liền kề ở trên và dưới đường chéo chính). Sử dụng phần tử trục xoay (Phần 7.3) là không cần thiết vì đặc điểm đó.

Điều này làm cho phương pháp nội suy splines hiệu quả trong việc giải các bài toán lớn với hàng nghìn nút trở lên.

Đối với một số tài liệu và một số bình luận phê bình, hãy xem tạp chí

hàng tháng của Toán học Hoa Kỳ
105 (1998), 929–941.

Điều kiện(3) bao hàm cả điều kiện đã
được công bố (10)

$$(9) \ g'(x_0)=k_0, \ g'(x_n)=k_n$$

chính là hệ số góc của tiếp tuyến tại hai
đầu mút đã được cho.

Còn điều kiện nữa ta cần quan tâm là giá
trị đạo hàm bậc hai của $g(x)$ tại hai đầu
mút.

Khi đó có 2 sự lựa chọn, hoặc ta điều
kiện tự do hoặc điều kiện **tự nhiên**:

$$(10) \ g''(x_0) = 0, \ g''(x_n) = 0.$$

(geometrically: zero curvature at the ends, as for the draftsman's spline), giving a natural spline. These names are motivated by Fig. 293 in Problem Set 12.3.

(về mặt hình học: độ cong bằng không ở các đầu, như đối với spline của người kéo), tạo ra một spline tự nhiên. Những cái tên này được gợi ý bởi Hình 293 trong phần bài tập của 12.3.

Determination of Splines. Let k_0 and k_n be given. Obtain k_1, k_2, \dots, k_{n-1} by solving the linear system (9). Recall that the spline $g(x)$ to be found consists of n

cubic polynomials q_0, q_1, \dots, q_{n-1} . We write these polynomials in the form

Xác định Splines. Cho k_0 và k_n được cho. Có được k_1, k_2, \dots, k_{n-1} bằng cách giải hệ phương trình tuyến tính (9). Nhớ lại rằng, spline $g(x)$ cần tìm bao gồm n đa thức bậc ba q_0, q_1, \dots, q_{n-1} . Chúng ta viết các đa thức này dưới dạng

$$(11) \quad q_j(x) = a_{j0} + a_{j1}(x - x_j) + a_{j2}(x - x_j)^2 + a_{j3}(x - x_j)^3$$

ở đây, $j=0, 1, \dots, n-1$.

Áp dụng khai triển Taylo, chúng ta nhận được:

$$(13) \begin{cases} a_{j0} = q_j(x_j) = f_j & \text{theo (2)} \\ a_{j1} = q_j'(x_j) = k_j & \text{theo (5)} \\ a_{j2} = \frac{1}{2} q_j''(x_j) = -3f_j c_j^2 + 3f_{j+1} c_j^2 - 2k_j c_j - k_{j+1} c_j & \text{theo (12)} \\ a_{j3} = q_j'''(x_j) / 6 = \frac{2}{h_j^3} (f_j - f_{j+1}) + \frac{1}{h_j^2} (k_{j+1} + k_j) \end{cases}$$

Với a_{j3} nhận được bằng cách tính $q_j''(x_{j+1})$ từ (12) và thay kết quả vào (8), nghĩa là:

$$q_j''(x_{j+1}) = 2a_{j2} + 6a_{j3}h_j = \frac{6}{h_j^2} (f_j - f_{j+1}) + \frac{2}{h_j} (k_j + 2k_{j+1})$$

và ta thế từ biểu thức này a_{j2} được cho trong (13) và rút gọn.

Trong trường hợp đặc biệt, khi các mốc cách đều, ta có hệ phương trình:

$$(14) \quad k_{j-1} + 4k_j + k_{j+1} = \frac{3}{h}(f_{j+1} - f_{j-1}), \quad j = 1, \dots, n$$

EXAMPLE 1 Spline Interpolation. Equidistant Nodes

Interpolate $f(x) = x^4$ on the interval $-1 \leq x \leq 1$ by the cubic spline $g(x)$ corresponding to the nodes $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ and satisfying the clamped conditions $g'(-1) = f'(-1)$, $g'(1) = f'(1)$.

Ví dụ 1.

Nội suy hàm $f(x)=x^4$, với các mốc cách đều $x_0= -1$, $x_1=0$, $x_2=1$, và thỏa mãn các điều kiện:

$$f(x_0)=f_0= 1, f(x_1)=f_1= 0, f(x_2)=f_2=1$$

$$g'(-1)=f'(-1)=-4, g'(1)=f'(1)=4$$

Hãy xây dựng đa thức nội suy Spline bậc 3 cho f trên đoạn $[-1, 1]$.

Giải

Theo điều kiện của đầu bài, ta có:

$k_0=-4$, $k_2=4$, với $h=1$ ta có:

$$k_0+4k_1+k_2=3(f_2-f_0) \rightarrow -4+4k_1+4=0 \rightarrow k_1=0$$

Đến đây ta đủ điều kiện để tìm $q_0(x)$ và $q_1(x)$.

Trước hết ta tìm $q_0(x)$:

$$a_{00}=f_0=1$$

$$a_{01}=k_0=-4$$

$$a_{j2} = \frac{1}{2} q''_j(x_j) = -3f_j c_j^2 + 3f_{j+1} c_j^2 - 2k_j c_j - k_{j+1} c_j$$

$$a_{02} = \frac{1}{2} q''_0(x_0) = -3f_0 c_0^2 + 3f_1 c_0^2 - 2k_0 c_0 - k_1 c_0$$

$$= -3+8=5$$

$$a_{j3} = \frac{1}{6} q'''_j(x_j) = 2f_j c_j^3 - 2f_{j+1} c_j^3 + k_j c_j^2 + k_{j+1} c_j^2$$

$$a_{03} = \frac{1}{6} q'''_0(x_0) = 2f_0c_0^3 - 2f_1c_0^3 + k_0c_0^2 + k_1c_0^2$$

$$= 2 - 4 = -2$$

Vậy: $q_0(x) = 1 - 4(x+1) + 5(x+1)^2 - 2(x+1)^3$

Tương tự, ta tìm $q_1(x)$:

$$a_{10} = f_1 = 0$$

$$a_{11} = k_1 = 0$$

$$a_{j2} = \frac{1}{2} q''_j(x_j) = -3f_jc_j^2 + 3f_{j+1}c_j^2 - 2k_jc_j - k_{j+1}c_j$$

$$a_{12} = \frac{1}{2} q''_1(x_1) = -3f_1c_1^2 + 3f_2c_1^2 - 2k_1c_1 - k_2c_1$$

$$= 3 - 4 = -1$$

$$a_{j3} = \frac{1}{6} q'''_j(x_j) = 2f_jc_j^3 - 2f_{j+1}c_j^3 + k_jc_j^2 + k_{j+1}c_j^2$$

$$a_{13} = \frac{1}{6} q'''_1(x_1) = 2f_1c_1^3 - 2f_2c_1^3 + k_1c_1^2 + k_2c_1^2$$

$$=-2+4=2$$

$$\text{Vậy: } q_1(x) = -x^2 + 2x^3$$

Solution. In our standard notation the given data are $f_0 = f(-1) = 1, f_1 = f(0) = 0, f_2 = f(1) = 1$. We have $h = 1$ and $n = 2$, so that our spline consists of $n = 2$ polynomials

$$q_0(x) = a_{00} + a_{01}(x + 1) + a_{02}(x + 1)^2 + a_{03}(x + 1)^3 \quad (-1 \leq x \leq 0),$$

$$q_1(x) = a_{10} + a_{11}x + a_{12}x^2 + a_{13}x^3 \quad (0 \leq x \leq 1).$$

We determine the k_j from (14) (equidistance!) and then the coefficients of the spline from (13). Since $n = 2$, the system (14) is a single equation (with $j = 1$ and $h = 1$)

$$k_0 + 4k_1 + k_2 = 3(f_2 - f_0).$$

Here $f_0 = f_2 = 1$ (the value of x^4 at the ends) and $k_0 = -4, k_2 = 4$, the values of the derivative $4x^3$ at the ends -1 and 1 . Hence

$$-4 + 4k_1 + 4 = 3(1 - 1) = 0, \quad k_1 = 0.$$

From (13) we can now obtain the coefficients of q_0 , namely, $a_{00} = f_0 = 1, a_{01} = k_0 = -4$, and

$$a_{02} = \frac{3}{1^2}(f_1 - f_0) - \frac{1}{1}(k_1 + 2k_0) = 3(0 - 1) - (0 - 8) = 5$$

$$a_{03} = \frac{2}{1^3}(f_0 - f_1) + \frac{1}{1^2}(k_1 + k_0) = 2(1 - 0) + (0 - 4) = -2.$$


Similarly, for the coefficients of q_1 we obtain from (13) the values $a_{10} = f_1 = 0, a_{11} = k_1 = 0$, and

$$a_{12} = 3(f_2 - f_1) - (k_2 + 2k_1) = 3(1 - 0) - (4 + 0) = -1$$

$$a_{13} = 2(f_1 - f_2) + (k_2 + k_1) = 2(0 - 1) + (4 + 0) = 2.$$

This gives the polynomials of which the spline $g(x)$ consists, namely,

$$g(x) = \begin{cases} q_0(x) = 1 - 4(x + 1) + 5(x + 1)^2 - 2(x + 1)^3 = -x^2 - 2x^3 & \text{if } -1 \leq x \leq 0 \\ q_1(x) = -x^2 + 2x^3 & \text{if } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Figure 436 shows $f(x)$ and this spline. Do you see that we could have saved over half of our work by using symmetry? 

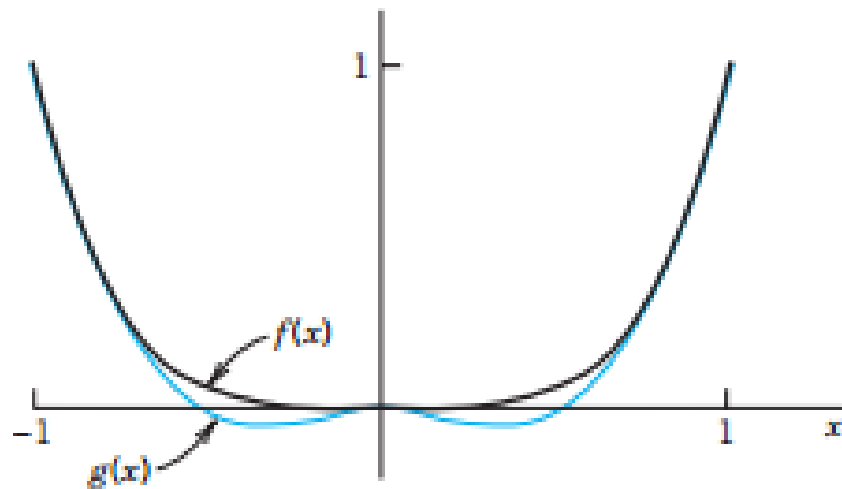


Fig. 436. Function $f(x) = x^4$ and cubic spline $g(x)$ in Example 1

EXAMPLE 2 Natural Spline. Arbitrarily Spaced Nodes

Find a spline approximation and a polynomial approximation for the curve of the cross section of the circular-shaped Shrine of the Book in Jerusalem shown in Fig. 437.

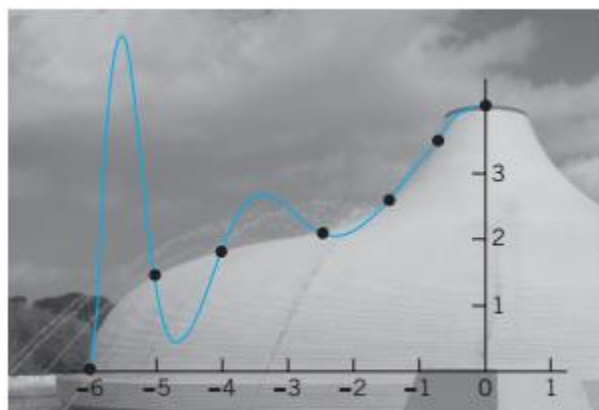


Fig. 437. Shrine of the Book in Jerusalem (Architects F. Kissler and A. M. Bartus)

Solution. Thirteen points, about equally distributed along the contour (not along the x -axis!), give these data:

x_j	-5.8	-5.0	-4.0	-2.5	-1.5	-0.8	0	0.8	1.5	2.5	4.0	5.0	5.8
f_j	0	1.5	1.8	2.2	2.7	3.5	3.9	3.5	2.7	2.2	1.8	1.5	0

The figure shows the corresponding interpolation polynomial of 12th degree, which is useless because of its oscillation. (Because of roundoff your software will also give you small error terms involving odd powers of x .) The polynomial is

$$P_{12}(x) = 3.9000 - 0.65083x^2 + 0.033858x^4 + 0.011041x^6 - 0.0014010x^8 \\ + 0.000055595x^{10} - 0.00000071867x^{12}.$$

The spline follows practically the contour of the roof, with a small error near the nodes -0.8 and 0.8 . The spline is symmetric. Its six polynomials corresponding to positive x have the following coefficients of their representations (12). (Note well that (12) is in terms of powers of $x - x_j$, not x !)

j	x -interval	a_{j0}	a_{j1}	a_{j2}	a_{j3}
0	0.0...0.8	3.9	0.00	-0.61	-0.015
1	0.8...1.5	3.5	-1.01	-0.65	0.66
2	1.5...2.5	2.7	-0.95	0.73	-0.27
3	2.5...4.0	2.2	-0.32	-0.091	0.084
4	4.0...5.0	1.8	-0.027	0.29	-0.56
5	5.0...5.8	1.5	-1.13	-1.39	0.58

Ví dụ 2.

Natural Spline. Arbitrarily Spaced Nodes

Find a spline approximation and a polynomial approximation for the curve of the cross section of the circularshaped Shrine of the Book in Jerusalem shown in Fig. 437.

Spline tự nhiên. Các điểm mốc có khoảng cách tùy ý

Tìm một phép xấp xỉ spline và một đa thức xấp xỉ cho đường cong của mặt cắt ngang của Đền thờ Sách ở Jerusalem được thể hiện trong Hình 437.

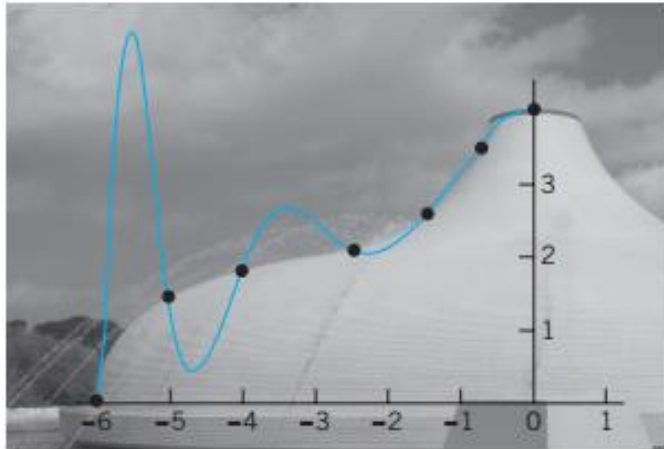


Fig. 437. Shrine of the Book in Jerusalem (Architects F. Kissler and A. M. Bartus)

Giải

Thirteen points, about equally distributed along the contour (not along the x-axis!), give these data:

Mười ba điểm mốc, được phân bổ đều dọc theo đường bao (không dọc theo trục Ox), ta nhận được các dữ liệu sau:

x_j	-5.8	-5.0	-4.0	-2.5	-1.5	-0.8	0	0.8	1.5	2.5	4.0	5.0	5.8
f_j	0	1.5	1.8	2.2	2.7	3.5	3.9	3.5	2.7	2.2	1.8	1.5	0

The figure shows the corresponding interpolation polynomial of 12th degree, which is useless because of its oscillation. (Because of roundoff your software will also give you small error terms involving odd powers of x .)

The polynomial is

Hình vẽ cho thấy đa thức nội suy tương ứng bậc 12, ta thấy là không phù hợp vì dao động của nó. (Vì làm tròn phần mềm của bạn cũng sẽ đưa đến cho bạn các sai số nhỏ với các từ có lũy thừa lẻ theo x .)

Đa thức là:

$$P_{12}(x) = 3.9000 - 0.65083x^2 + 0.033858x^4 + 0.011041x^6 - 0.0014010x^8 \\ + 0.000055595x^{10} - 0.00000071867x^{12}.$$

The spline follows practically the contour of the roof, with a small error near the nodes -0.8 and 0.8. The spline is symmetric. Its six polynomials corresponding to positive x have the following coefficients of their representations (12). (Note well that (12) is in terms of powers of $x - x_j$, not x!)

Spline thực tế theo đường viền của mái, với sai số nhỏ gần các nút -0.8 và 0,8.

Spline là đối xứng. Sáu đa thức của nó tương ứng với x dương có các hệ số biểu diễn (12). (Lưu ý rằng (12) là biểu diễn theo lũy thừa của $x - x_j$, không phải x!)

j	x -interval	a_{j0}	a_{j1}	a_{j2}	a_{j3}
0	0.0...0.8	3.9	0.00	-0.61	-0.015
1	0.8...1.5	3.5	-1.01	-0.65	0.66
2	1.5...2.5	2.7	-0.95	0.73	-0.27
3	2.5...4.0	2.2	-0.32	-0.091	0.084
4	4.0...5.0	1.8	-0.027	0.29	-0.56
5	5.0...5.8	1.5	-1.13	-1.39	0.58

Theorem 3.13 Let $f \in C^4[a, b]$ with $\max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| = M$. If S is the unique clamped interpolant to f with respect to the nodes $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, then

$$|f(x) - S(x)| \leq \frac{5M}{384} \max_{0 \leq j \leq n-1} (x_{j+1} - x_j)^4.$$

A fourth-order error-bound result also holds in the case of natural boundary conditions, but it is more difficult to express. (See [BD], pp. 827–835.)

The natural boundary conditions will generally give less accurate results than the clamped conditions near the ends of the interval $[x_0, x_n]$ unless the function f happens

to nearly satisfy $f''(x_0) = f''(x_n) = 0$. An alternative to the natural boundary condition that does not require knowledge of the derivative of f is the *not-a-knot* condition, (see [Deb2], pp. 55–56). This condition requires that $S'''(x)$ be continuous at x_1 and at x_{n-1} .

PROBLEM SET 19.4

1. **WRITING PROJECT. Splines.** In your own words, and using as few formulas as possible, write a short report on spline interpolation, its motivation, a comparison with polynomial interpolation, and its applications.

2–9

VERIFICATIONS. DERIVATIONS. COMPARISONS

2. **Individual polynomial q_j .** Show that $q_j(x)$ in (6) satisfies the interpolation condition (4) as well as the derivative condition (5).
3. Verify the differentiations that give (7) and (8) from (6).
4. **System for derivatives.** Derive the basic linear system (9) for k_1, \dots, k_{n-1} as indicated in the text.
5. **Equidistant nodes.** Derive (14) from (9).
6. **Coefficients.** Give the details of the derivation of a_{j2} and a_{j3} in (13).
7. Verify the computations in Example 1.

- 8. Comparison.** Compare the spline g in Example 1 with the quadratic interpolation polynomial over the whole interval. Find the maximum deviations of g and p_2 from f . Comment.
- 9. Natural spline condition.** Using the given coefficients, verify that the spline in Example 2 satisfies $g''(x) = 0$ at the ends.

10–16

DETERMINATION OF SPLINES

Find the cubic spline $g(x)$ for the given data with k_0 and k_n as given.

10. $f(-2) = f(-1) = f(1) = f(2) = 0, \quad f(0) = 1,$
 $k_0 = k_4 = 0$

Sử dụng hệ pt (14):

$$(14) \quad k_{j-1} + 4k_j + k_{j+1} = \frac{3}{h}(f_{j+1} - f_{j-1}), \quad j = 1, \dots, n-1$$

with a_{j3} obtained by calculating $q_j''(x_{j+1})$ from (12) and equating the result to (8), that is,

$$q_j''(x_{j+1}) = 2a_{j2} + 6a_{j3}h_j = \frac{6}{h_j^2} (f_j - f_{j+1}) + \frac{2}{h_j} (k_j + 2k_{j+1}),$$

and now subtracting from this $2a_{j2}$ as given in (13) and simplifying.

Note that for *equidistant nodes* of distance $h_j = h$ we can write $c_j = c = 1/h$ in (6*) and have from (9) simply

$$(14) \quad k_{j-1} + 4k_j + k_{j+1} = \frac{3}{h} (f_{j+1} - f_{j-1}) \quad (j = 1, \dots, n-1).$$

where $j = 0, \dots, n-1$. Using Taylor's formula, we obtain

$$(13) \quad \begin{aligned} a_{j0} &= q_j(x_j) = f_j && \text{by (2),} \\ a_{j1} &= q_j'(x_j) = k_j && \text{by (5),} \\ a_{j2} &= \frac{1}{2} q_j''(x_j) = \frac{3}{h_j^2} (f_{j+1} - f_j) - \frac{1}{h_j} (k_{j+1} + 2k_j) && \text{by (7),} \\ a_{j3} &= \frac{1}{6} q_j'''(x_j) = \frac{2}{h_j^3} (f_j - f_{j+1}) + \frac{1}{h_j^2} (k_{j+1} + k_j) \end{aligned}$$

- 11.** If we started from the piecewise linear function in Fig. 438, we would obtain $g(x)$ in Prob. 10 as the spline satisfying $g'(-2) = f'(-2) = 0$, $g'(2) = f'(2) = 0$. Find and sketch or graph the corresponding interpolation polynomial of 4th degree and compare it with the spline. Comment.

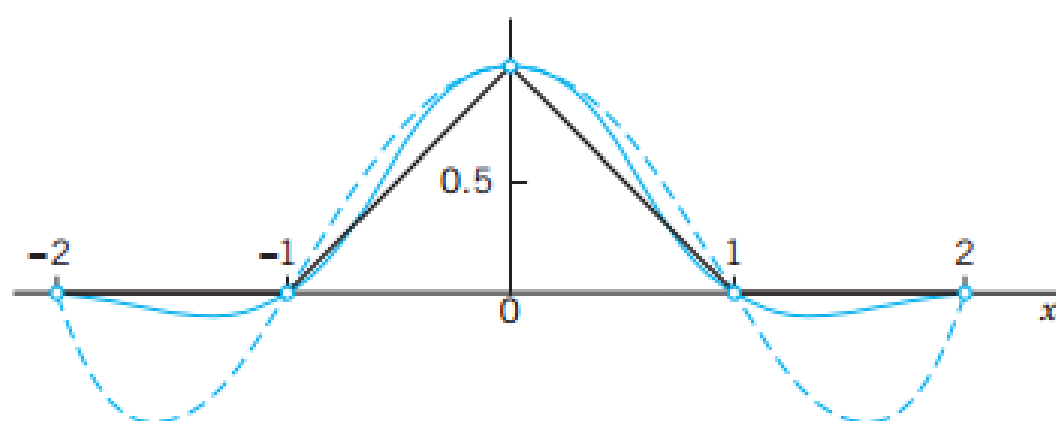


Fig. 438. Spline and interpolation polynomial in Probs. 10 and 11

12. $f_0 = f(0) = 1$, $f_1 = f(2) = 9$, $f_2 = f(4) = 41$,
 $f_3 = f(6) = 41$, $k_0 = 0$, $k_3 = -12$
13. $f_0 = f(0) = 1$, $f_1 = f(1) = 0$, $f_2 = f(2) = -1$,
 $f_3 = f(3) = 0$, $k_0 = 0$, $k_3 = -6$
14. $f_0 = f(0) = 2$, $f_1 = f(1) = 3$, $f_2 = f(2) = 8$,
 $f_3 = f(3) = 12$, $k_0 = k_3 = 0$
15. $f_0 = f(0) = 4$, $f_1 = f(2) = 0$, $f_2 = f(4) = 4$,
 $f_3 = f(6) = 80$, $k_0 = k_3 = 0$
16. $f_0 = f(0) = 2$, $f_1 = f(2) = -2$, $f_2 = f(4) = 2$,
 $f_3 = f(6) = 78$, $k_0 = k_3 = 0$. Can you obtain the
 answer from that of Prob. 15?

17. If a cubic spline is three times continuously differentiable (that is, it has continuous first, second, and third derivatives), show that it must be a single polynomial.
18. **CAS EXPERIMENT. Spline versus Polynomial.** If your CAS gives natural splines, find the natural splines when x is integer from $-m$ to m , and $y(0) = 1$ and all other y equal to 0. Graph each such spline along with the interpolation polynomial p_{2m} . Do this for $m = 2$ to 10 (or more). What happens with increasing m ?
19. **Natural conditions.** Explain the remark after (11).
20. **TEAM PROJECT. Hermite Interpolation and Bezier Curves.** In **Hermite interpolation** we are looking for a polynomial $p(x)$ (of degree $2n + 1$ or less) such that $p(x)$ and its derivative $p'(x)$ have given values at $n + 1$ nodes. (More generally, $p(x), p'(x), p''(x), \dots$ may be required to have given values at the nodes.)
- (a) **Curves with given endpoints and tangents.** Let C be a curve in the xy -plane parametrically represented by $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t)]$, $0 \leq t \leq 1$ (see Sec. 9.5). Show that for given initial and terminal points of a curve and given initial and terminal tangents, say,

$$\begin{aligned} A: \quad \mathbf{r}_0 &= [x(0), y(0)] \\ &= [x_0, y_0], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B: \quad \mathbf{r}_1 &= [x(1), y(1)] \\ &= [x_1, y_1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &= [x'(0), y'(0)] \\ &= [x'_0, y'_0], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= [x'(1), y'(1)] \\ &= [x'_1, y'_1] \end{aligned}$$

we can find a curve C , namely,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}(t) = & \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t \\
 (15) \quad & + (3(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) - (2\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1))t^2 \\
 & + (2(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1) + \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1)t^3;
 \end{aligned}$$

in components,

$$\begin{aligned}
 x(t) = & x_0 + x'_0 t + (3(x_1 - x_0) - (2x'_0 + x'_1))t^2 \\
 & + (2(x_0 - x_1) + x'_0 + x'_1)t^3 \\
 y(t) = & y_0 + y'_0 t + (3(y_1 - y_0) - (2y'_0 + y'_1))t^2 \\
 & + (2(y_0 - y_1) + y'_0 + y'_1)t^3.
 \end{aligned}$$

Note that this is a cubic Hermite interpolation polynomial, and $n = 1$ because we have two nodes (the endpoints of C). (This has nothing to do with the Hermite polynomials in Sec. 5.8.) The two points

$$\begin{aligned}
 G_A: \mathbf{g}_0 &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 \\
 &= [x_0 + x'_0, y_0 + y'_0]
 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
 G_B: \mathbf{g}_1 &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{v}_1 \\
 &= [x_1 - x'_1, y_1 - y'_1]
 \end{aligned}$$

are called **guidepoints** because the segments AG_A and BG_B specify the tangents graphically. A , B , G_A , G_B determine C , and C can be changed quickly by moving the points. A curve consisting of such Hermite interpolation polynomials is called a **Bezier curve**, after the French engineer P. Bezier of the Renault

Automobile Company, who introduced them in the early 1960s in designing car bodies. Bezier curves (and surfaces) are used in computer-aided design (CAD) and computer-aided manufacturing (CAM). (For more details, see Ref. [E21] in App. 1.)

(b) Find and graph the Bezier curve and its guidepoints if $A: [0, 0]$, $B: [1, 0]$, $\mathbf{v}_0 = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $\mathbf{v}_1 = [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\sqrt{3}]$.

(c) **Changing guidepoints** changes C . Moving guidepoints farther away results in C “staying near the tangents for a longer time.” Confirm this by changing \mathbf{v}_0 and \mathbf{v}_1 in (b) to $2\mathbf{v}_0$ and $2\mathbf{v}_1$ (see Fig. 439).

(d) Make experiments of your own. What happens if you change \mathbf{v}_1 in (b) to $-\mathbf{v}_1$. If you rotate the tangents? If you multiply \mathbf{v}_0 and \mathbf{v}_1 by positive factors less than 1?

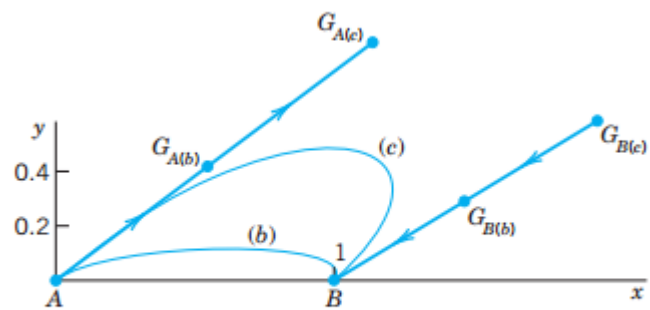


Fig. 439. Team Project 20(b) and (c): Bezier curves