Chương III. Giải hệ phương trình

Chúng ta có 2 loại hệ phương trình:

1. Hệ phương trình tuyến tính
2. Hệ phương trình phi tuyến

   Chúng ta đã biết các phương pháp giải trực tiếp và gián tiếp Hệ phương trình tuyến tính:

- Các phương pháp giải trực tiếp:
  + Phương pháp Cramer
  + Phương pháp thế
  + Phương pháp sử dụng ma trận nghịch đảo
  + Phương pháp khử Gauss, Gauss – Jordan
- Các phương pháp giải gián tiếp
  + Phương pháp lặp đơn
  + Phương pháp lặp Seidel
- Các phương pháp tìm trị riêng và véc tơ riêng của ma trận

Bài 3.1 (20.1) Đặt bài toán và phương pháp giải

Hệ phương trình tuyến tính n phương trình, n ẩn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là tập n phương trình $E_1, E_2, \ldots, E_n$ dạng:

$$(1) \qquad \begin{cases} E_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ E_2 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ E_n : a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

với các hệ số a_{jk} và b_j đã biết. Hệ được gọi là thuần nhất nếu các b_j bằng 0, trong trường hợp ngược lại được gọi là hệ không thuần nhất.

Dùng cách biểu diễn ma trận, ta có thể viết hệ (1) dưới dạng:

(2) $$Ax = b;$$

ở đây, ma trận hệ số $A=[a_{jk}]$ là ma trận vuông cấp n, x và b là các véc tơ cột:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ ... & & & \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ma trận $\tilde{A}$ sau được gọi là ma trận mở rộng của hệ (1):

$$\tilde{A} = \left[Ab \right] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} & b_2 \\ ... & & & & \\ & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

Nghiệm của (1) là là bộ số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thỏa mãn tất cả phương trình của hệ, véc tơ nghiệm của (1) là véc tơ x mà các thành phần của nó lập thành 1 nghiệm của (1).

Hệ phương trình (1) có thể giải được bằng phương pháp trực tiếp (phương pháp khử Gauss, …) hoặc giải bằng phương pháp gián tiếp hay phương pháp lặp.

Chúng ta đã biết phương pháp sử dụng định thức để giải hệ phương trình (1), đó là phương pháp Cramer.

Ở đây ta xét phương pháp khử Gauss để giải hệ phương trình tuyến trính:

Phương pháp khử Gauss là phép giải trực tiếp được thực hiện bằng quá trình khử liên tiếp các ẩn để từng bước đưa ma trận hệ số về dạng bậc thang.

Quá trình thuận

Dùng các phép biến đổi sơ cấp về hàng

để đưa ma trận hệ số về dạng tam giác trên.

Các bước tiến hành như sau:

Bước 1, ta khử ẩn x_1 từ phương trình E_2 tới E_n bằng cách lấy E_2 trừ đi $(a_{21}/a_{11})E_1$, lấy E_3 trừ đi $(a_{31}/a_{11})E_1$, …Ở bước này, E_1 được gọi là phương trình chính, phần tử a_{11} được gọi là phần tử trục xoay.

Bước 2, ta lấy phương trình thứ 2 mới làm phương trình chính để khử x_2, và ta cứ tiếp tục như vậy cho đến khi phương trình thứ n chỉ còn hệ số của x_n có thể khác 0.

Quá trình ngược

Nếu ta đi đến dạng bậc thang, giải ra được x_n từ pt cuối cùng, x_{n-1} ở pt sát pt cuối cùng, … cứ thế, giải được x_2 ở pt 2, x_1 ở pt 1. Đôi khi ta phải đổi phần tử trục xoay khi nó bằng 0 hoặc có trị tuyệt đối quá nhỏ.

Ví dụ 1. Phương pháp khử Gauss và xoay trục từng phần

Hãy giải hệ phương trình

$$
\begin{aligned}
E_1: &\qquad\qquad 8x_2 + 2x_3 = -7 \\
E_2: &\quad 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8 \\
E_3: &\quad 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 26.
\end{aligned}
$$

Giải

Chúng ta xoay trục từ E_1 , nhưng do E_1 không có ẩn x_1, trong khi đó hệ số của x_1 trong phương trình E_3 là lớn nhất. Vì vậy ta đổi chỗ E_1 và E_3 cho nhau.

$$6x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 26$$
$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8$$
$$8x_2 + 2x_3 = -7.$$

Bước 1. Khử ẩn x_1

$$\text{Pivot 6} \longrightarrow 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 26$$
$$\text{Eliminate} \longrightarrow \boxed{3x_1} + 5x_2 + 2x_3 = 8$$
$$8x_2 + 2x_3 = -7$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 8 & 26 \\ 3 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 2 & -7 \end{array}\right].$$

Để khử x_1 ở pt2, ta lấy pt 2 trừ đi (3/6) lần phương trình 1 và đi đến:

$$6x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 26$$
$$4x_2 - 2x_3 = -5$$
$$8x_2 + 2x_3 = -7$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 8 & 26 \\ 0 & 4 & -2 & -5 \\ 0 & 8 & 2 & -7 \end{array}\right].$$

Bước 2. Khử x_2

Để khử x_2 ta lấy pt3 trừ đi (8/4) lần pt3 và đi đến:

$$6x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 26$$

$$8x_2 + 2x_3 = -7$$

$$-3x_3 = -\frac{3}{2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 8 & 26 \\ 0 & 8 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{3}{2} \end{array}\right].$$

Quá trình ngược

Từ pt3 ta giải được $x_3 = 1/2$;

thay giá trị x_3 vào pt2, ta được $x_2 = -1$;

thay giá trị x_3 và x_2 vào pt1 ta được $x_1=4$

Table 20.1 Gauss Elimination

ALGORITHM GAUSS ($\tilde{\mathbf{A}} = [a_{jk}] = [\mathbf{A} \quad \mathbf{b}]$)

This algorithm computes a unique solution $\mathbf{x} = [x_j]$ of the system (1) or indicates that (1) has no unique solution.

INPUT: Augmented $n \times (n + 1)$ matrix $\tilde{\mathbf{A}} = [a_{jk}]$, where $a_{j,n+1} = b_j$

OUTPUT: Solution $\mathbf{x} = [x_j]$ of (1) or message that the system (1) has no unique solution

For $k = 1, \cdots, n - 1$, do:

1 $m = k$

For $j = k + 1, \cdots, n$, do:

If ($|a_{mk}| < |a_{jk}|$) then $m = j$

End

If $a_{mk} = 0$ then OUTPUT "No unique solution exists"

Stop

[*Procedure completed unsuccessfully*]

2 Else exchange row k and row m

3 If $a_{nn} = 0$ then OUTPUT "No unique solution exists."

Stop

Else

4 For $j = k + 1, \cdots, n$, do:

$$m_{jk} := \frac{a_{jk}}{a_{kk}}$$

5 For $p = k + 1, \cdots, n + 1$, do:

$$a_{jp} := a_{jp} - m_{jk}a_{kp}$$

End

End

End

6 $$x_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}}$$ [*Start back substitution*]

For $i = n - 1, \cdots, 1$, do:

7 $$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right)$$

End

OUTPUT $\mathbf{x} = [x_j]$. Stop

End GAUSS

Các phương pháp Doolittle, Crout và Cholesky được trình bày ở 20.2, là các biến thể của phương pháp khử Gauss. Họ phân tích A=LU (L – ma trận tam giác dưới, U – ma trận tam giác trên) và giải Ax=LUx=b bằng cách giải Ly=b, sau đó Ux=y.

Trong phép lặp Gauss – Seidel chúng ta đưa các phần tử nằm trên đường chéo trình bằng 1:

Ax=b với A=[a_{jk}] , được viết dưới dạng: