Bài 2.2 Phương pháp điểm bất động (Phương pháp lặp đơn)

Điểm bất động của một hàm là số mà tại đó giá trị của hàm số bằng đúng giá trị của đối số.

Định nghĩa 2.2 Số p được gọi là điểm bất động của hàm số g nếu, $g(p) = p$.

Trong phần này, chúng ta xét việc đưa bài toán tìm nghiệm về bài toán tìm điểm bất động và tìm sự liên hệ giữa chúng.

Các bài toán tìm nghiệm và các bài toán tìm điểm cố định là các lớp tương đương theo nghĩa sau đây:

- Từ bài toán tìm nghiệm của phương trình f(x)= 0, ta có thể xác định hàm g với điểm bất động tại p theo một số cách, ví dụ, g(x)=x – f(x), hoặc g(x) = x + 3f(x)
- Ngược lại, nếu hàm g có một điểm bất định tại p, thì hàm được xác định bởi: f(x) = x – g(x)

có nghiệm tại p,
Mặc dù các bài toán ta muốn giải quyết là dạng tìm nghiệm, nhưng dạng điểm bất động dễ thực hiện hơn và có một số lựa chọn điểm bất động dẫn tới kỹ thuật tìm nghiệm rất hiệu quả. Trước hết ta cần đi đến dạng bài toán mới này một cách thoải mái, và đưa ra quyết định khi nào hàm số có điểm bất động và điểm bất động được xấp xỉ với độ chính xác bao nhiêu.

Các điểm bất động xuất hiện trong nhiều lĩnh vực toán học khác nhau, và là công cụ chính của các nhà kinh tế dùng để chứng minh các quả liên quan đến tính cân bằng. Mặc dầu ý tưởng đằng sau kỹ thuật là cũ, nhưng thuật ngữ được sử dụng lần đầu bởi nhà toán học Hà Lan L. E. J. Brouwer (1882 – 1962) trong những năm đầu 1900.

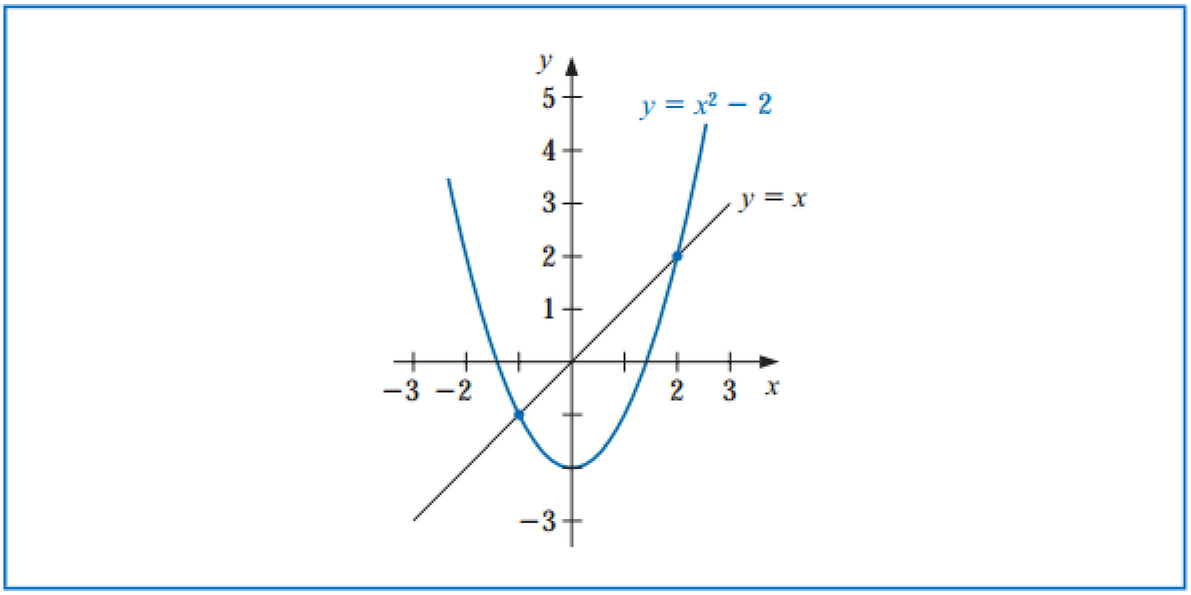
Ví dụ 1. Hãy xác định điểm bất động của hàm $g(x) = x^2 - 2$.

Giải

Điểm bất động p của g có tính chất: $p= g(p) \rightarrow p = p^2 – 2$, suy ra $p^2 – p – 2 =(p +1)(p – 2)=0$

Điểm bất động xảy ra đúng khi khi đồ thị của hàm số $y= g(x)$ cắt đồ thị hàm số $y = x$, vì vậy g có 2 điểm bất động là $(– 1)$ và 2. Điều này được minh họa bởi hình 2.3:

Hình 2.3



Định lý sau cho điều kiện đủ để hàm số tồn tai và duy nhất điểm bất động.

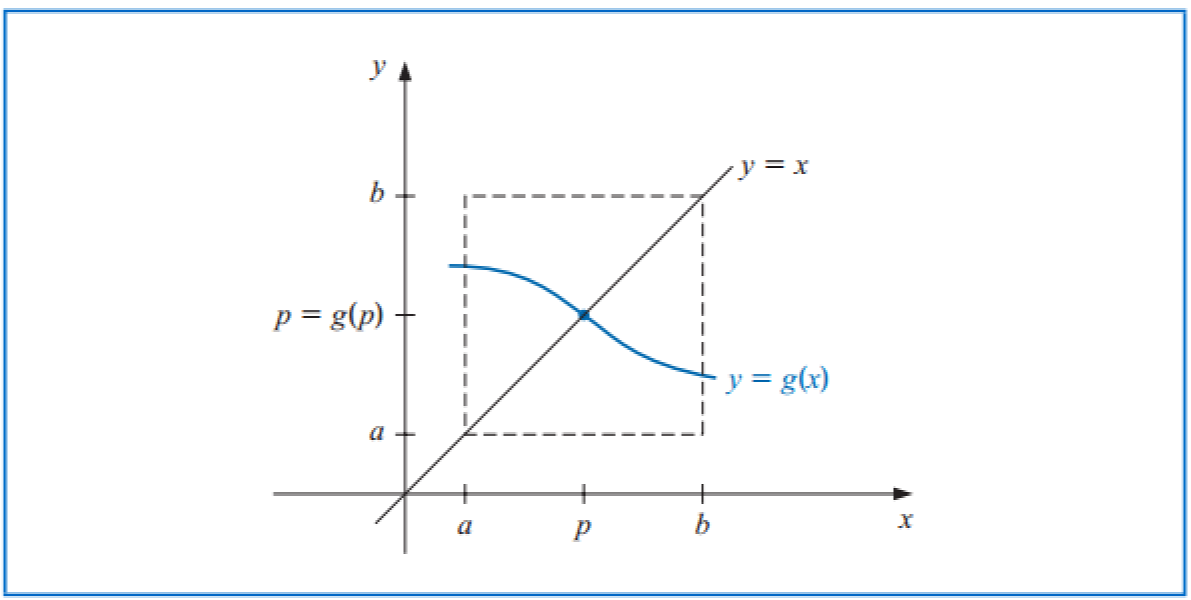
Định lý 2.3 (i) Nếu $g \in C[a,b]$ và $g(x) \in [a,b], \forall x \in [a,b]$, khi đó g có ít nhất một điểm bất động trên $[a,b]$.

(ii) Hơn nữa, nếu $g'(x)$ tồn tại trên (a,b) và tồn tại hằng số dương k < 1 thỏa

$$|g'(x)| \le k, \quad \forall x \in [a,b]$$

Khi đó, tồn tại đúng một nghiệm trên $[a,b]$. (Xem hình 2.4)

Hình 2.4



Ví dụ 2. Chứng minh rằng hàm số g(x)= $(x^2 - 1)/3$ có duy nhất điểm bất đông trên khoản $\left[-1,1\right]$.

Giải

Do g'(x)=2x/3, nên g(x) liên tục và khả vi trên khoảng $\left[-1,1\right]$. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của g đạt được tại x= -1, hoặc x = 0, hoặc x = 1.

Với x= -1 và x = 1, g(x) = 0, g(0) = - 1/3, nên giá trị lớn nhất của g trên $\left[-1,1\right]$ là 0 và nhỏ nhất là -1/3. Ta có g(x) tbhoar mãn điều kiện (i) của ĐL 2.3,

Sau đó |g'(x)''| ≤ 2/3 < 1, nên điều kiện (ii) của định lý 2.3.

Vậy g(x) có điểm bất định duy nhất trên $\left[-1,1\right]$.

Thuật toán của phương pháp điểm bất động

Fixed-Point Iteration

To find a solution to $p = g(p)$ given an initial approximation p_0:

INPUT initial approximation p_0; tolerance TOL; maximum number of iterations N_0.

OUTPUT approximate solution p or message of failure.

Step 1 Set $i = 1$.

Step 2 While $i \leq N_0$ do Steps 3–6.

Step 3 Set $p = g(p_0)$. (*Compute p_i.*)

Step 4 If $|p - p_0| < TOL$ then
OUTPUT (p); (*The procedure was successful.*)
STOP.

Step 5 Set $i = i + 1$.

Step 6 Set $p_0 = p$. (*Update p_0.*)

Step 7 OUTPUT ('The method failed after N_0 iterations, $N_0 =$', N_0);
(*The procedure was unsuccessful.*)
STOP. ■

Bài tập

1. Use algebraic manipulation to show that each of the following functions has a fixed point at p precisely when $f(p) = 0$, where $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$.

a. $g_1(x) = \left(3 + x - 2x^2\right)^{1/4}$

b. $g_2(x) = \left(\dfrac{x + 3 - x^4}{2}\right)^{1/2}$

c. $g_3(x) = \left(\dfrac{x + 3}{x^2 + 2}\right)^{1/2}$

d. $g_4(x) = \dfrac{3x^4 + 2x^2 + 3}{4x^3 + 4x - 1}$

2. **a.** Perform four iterations, if possible, on each of the functions g defined in Exercise 1. Let $p_0 = 1$ and $p_{n+1} = g(p_n)$, for $n = 0, 1, 2, 3$.

b. Which function do you think gives the best approximation to the solution?

3. The following four methods are proposed to compute $21^{1/3}$. Rank them in order, based on their apparent speed of convergence, assuming $p_0 = 1$.

a. $p_n = \dfrac{20p_{n-1} + 21/p_{n-1}^2}{21}$

b. $p_n = p_{n-1} - \dfrac{p_{n-1}^3 - 21}{3p_{n-1}^2}$

c. $p_n = p_{n-1} - \dfrac{p_{n-1}^4 - 21p_{n-1}}{p_{n-1}^2 - 21}$

d. $p_n = \left(\dfrac{21}{p_{n-1}}\right)^{1/2}$

4. The following four methods are proposed to compute $7^{1/5}$. Rank them in order, based on their apparent speed of convergence, assuming $p_0 = 1$.

a. $p_n = p_{n-1}\left(1 + \dfrac{7 - p_{n-1}^5}{p_{n-1}^2}\right)^3$

b. $p_n = p_{n-1} - \dfrac{p_{n-1}^5 - 7}{p_{n-1}^2}$

c. $p_n = p_{n-1} - \dfrac{p_{n-1}^5 - 7}{5p_{n-1}^4}$

d. $p_n = p_{n-1} - \dfrac{p_{n-1}^5 - 7}{12}$

5. Use a fixed-point iteration method to determine a solution accurate to within 10^{-2} for $x^4 - 3x^2 - 3 = 0$ on $[1, 2]$. Use $p_0 = 1$.

6. Use a fixed-point iteration method to determine a solution accurate to within 10^{-2} for $x^3 - x - 1 = 0$ on $[1, 2]$. Use $p_0 = 1$.

7. Use Theorem 2.3 to show that $g(x) = \pi + 0.5\sin(x/2)$ has a unique fixed point on $[0, 2\pi]$. Use fixed-point iteration to find an approximation to the fixed point that is accurate to within 10^{-2}. Use Corollary 2.5 to estimate the number of iterations required to achieve 10^{-2} accuracy, and compare this theoretical estimate to the number actually needed.

8. Use Theorem 2.3 to show that $g(x) = 2^{-x}$ has a unique fixed point on $[\frac{1}{3}, 1]$. Use fixed-point iteration to find an approximation to the fixed point accurate to within 10^{-4}. Use Corollary 2.5 to estimate the number of iterations required to achieve 10^{-4} accuracy, and compare this theoretical estimate to the number actually needed.

9. Use a fixed-point iteration method to find an approximation to $\sqrt{3}$ that is accurate to within 10^{-4}. Compare your result and the number of iterations required with the answer obtained in Exercise 12 of Section 2.1.

10. Use a fixed-point iteration method to find an approximation to $\sqrt[3]{25}$ that is accurate to within 10^{-4}. Compare your result and the number of iterations required with the answer obtained in Exercise 13 of Section 2.1.

11. For each of the following equations, determine an interval $[a, b]$ on which fixed-point iteration will converge. Estimate the number of iterations necessary to obtain approximations accurate to within 10^{-5}, and perform the calculations.

    a. $x = \dfrac{2 - e^x + x^2}{3}$ **b.** $x = \dfrac{5}{x^2} + 2$

    c. $x = (e^x/3)^{1/2}$ **d.** $x = 5^{-x}$

    e. $x = 6^{-x}$ **f.** $x = 0.5(\sin x + \cos x)$

12. For each of the following equations, use the given interval or determine an interval $[a, b]$ on which fixed-point iteration will converge. Estimate the number of iterations necessary to obtain approximations accurate to within 10^{-5}, and perform the calculations.

    a. $2 + \sin x - x = 0$ use $[2, 3]$ **b.** $x^3 - 2x - 5 = 0$ use $[2, 3]$

    c. $3x^2 - e^x = 0$ **d.** $x - \cos x = 0$

13. Find all the zeros of $f(x) = x^2 + 10\cos x$ by using the fixed-point iteration method for an appropriate iteration function g. Find the zeros accurate to within 10^{-4}.

14. Use a fixed-point iteration method to determine a solution accurate to within 10^{-4} for $x = \tan x$, for x in $[4, 5]$.

15. Use a fixed-point iteration method to determine a solution accurate to within 10^{-2} for $2\sin \pi x + x = 0$ on $[1, 2]$. Use $p_0 = 1$.

16. Let A be a given positive constant and $g(x) = 2x - Ax^2$.

    a. Show that if fixed-point iteration converges to a nonzero limit, then the limit is $p = 1/A$, so the inverse of a number can be found using only multiplications and subtractions.

    b. Find an interval about $1/A$ for which fixed-point iteration converges, provided p_0 is in that interval.

17. Find a function g defined on $[0, 1]$ that satisfies none of the hypotheses of Theorem 2.3 but still has a unique fixed point on $[0, 1]$.

18. **a.** Show that Theorem 2.2 is true if the inequality $|g'(x)| \le k$ is replaced by $g'(x) \le k$, for all $x \in (a, b)$. [*Hint:* Only uniqueness is in question.]

    b. Show that Theorem 2.3 may not hold if inequality $|g'(x)| \le k$ is replaced by $g'(x) \le k$. [*Hint:* Show that $g(x) = 1 - x^2$, for x in $[0, 1]$, provides a counterexample.]

19. **a.** Use Theorem 2.4 to show that the sequence defined by

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}, \quad \text{for } n \geq 1,$$

converges to $\sqrt{2}$ whenever $x_0 > \sqrt{2}$.

b. Use the fact that $0 < (x_0 - \sqrt{2})^2$ whenever $x_0 \neq \sqrt{2}$ to show that if $0 < x_0 < \sqrt{2}$, then $x_1 > \sqrt{2}$.

c. Use the results of parts (a) and (b) to show that the sequence in (a) converges to $\sqrt{2}$ whenever $x_0 > 0$.

20. **a.** Show that if A is any positive number, then the sequence defined by

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{A}{2x_{n-1}}, \quad \text{for } n \geq 1,$$

converges to $\sqrt{A}$ whenever $x_0 > 0$.

b. What happens if $x_0 < 0$?

21. Replace the assumption in Theorem 2.4 that "a positive number $k < 1$ exists with $|g'(x)| \leq k$" with "g satisfies a Lipschitz condition on the interval $[a, b]$ with Lipschitz constant $L < 1$." (See Exercise 27, Section 1.1.) Show that the conclusions of this theorem are still valid.

22. Suppose that g is continuously differentiable on some interval (c, d) that contains the fixed point p of g. Show that if $|g'(p)| < 1$, then there exists a $\delta > 0$ such that if $|p_0 - p| \leq \delta$, then the fixed-point iteration converges.

23. An object falling vertically through the air is subjected to viscous resistance as well as to the force of gravity. Assume that an object with mass m is dropped from a height s_0 and that the height of the object after t seconds is

$$s(t) = s_0 - \frac{mg}{k}t + \frac{m^2 g}{k^2}(1 - e^{-kt/m}),$$

where $g = 32.17$ ft/s^2 and k represents the coefficient of air resistance in lb-s/ft. Suppose $s_0 = 300$ ft, $m = 0.25$ lb, and $k = 0.1$ lb-s/ft. Find, to within 0.01 s, the time it takes this quarter-pounder to hit the ground.

24. Let $g \in C^1[a, b]$ and p be in (a, b) with $g(p) = p$ and $|g'(p)| > 1$. Show that there exists a $\delta > 0$ such that if $0 < |p_0 - p| < \delta$, then $|p_0 - p| < |p_1 - p|$. Thus, no matter how close the initial approximation p_0 is to p, the next iterate p_1 is farther away, so the fixed-point iteration does not converge if $p_0 \neq p$.

Theorem 2.4 **(Fixed-Point Theorem)**

Let $g \in C[a, b]$ be such that $g(x) \in [a, b]$, for all x in $[a, b]$. Suppose, in addition, that g' exists on (a, b) and that a constant $0 < k < 1$ exists with

$$|g'(x)| \leq k, \quad \text{for all } x \in (a, b).$$

Then for any number p_0 in $[a, b]$, the sequence defined by

$$p_n = g(p_{n-1}), \quad n \geq 1,$$

converges to the unique fixed point p in $[a, b]$. ■

Proof Theorem 2.3 implies that a unique point p exists in $[a, b]$ with $g(p) = p$. Since g maps $[a, b]$ into itself, the sequence $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ is defined for all $n \geq 0$, and $p_n \in [a, b]$ for all n. Using the fact that $|g'(x)| \leq k$ and the Mean Value Theorem 1.8, we have, for each n,

$$|p_n - p| = |g(p_{n-1}) - g(p)| = |g'(\xi_n)||p_{n-1} - p| \leq k|p_{n-1} - p|,$$

where $\xi_n \in (a, b)$. Applying this inequality inductively gives

$$|p_n - p| \leq k|p_{n-1} - p| \leq k^2|p_{n-2} - p| \leq \cdots \leq k^n|p_0 - p|. \tag{2.4}$$

Since $0 < k < 1$, we have $\lim_{n\to\infty} k^n = 0$ and

$$\lim_{n\to\infty} |p_n - p| \leq \lim_{n\to\infty} k^n|p_0 - p| = 0.$$

Hence $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ converges to p. ■ ■ ■