

Projekt: Nichtlineare Gleichungen

Arbeitspunkt eines hydraulischen Systems

Markus Roos (roor@zhaw.ch)
editiert Simon Stingelin (stiw@zhaw.ch)

13. März 2023

Zusammenfassung

Dieses Projekt behandelt ein hydraulisches System, bestehend aus einer Pumpe und mehreren Rohrstücken, welche realistisch und damit nichtlineare Eigenschaften aufweisen. Im Rahmen der Projektbearbeitung sollen Sie den Arbeitspunkt dieses Systems numerisch bestimmen, wobei dieser von der eingestellten Pumpleistung abhängt.

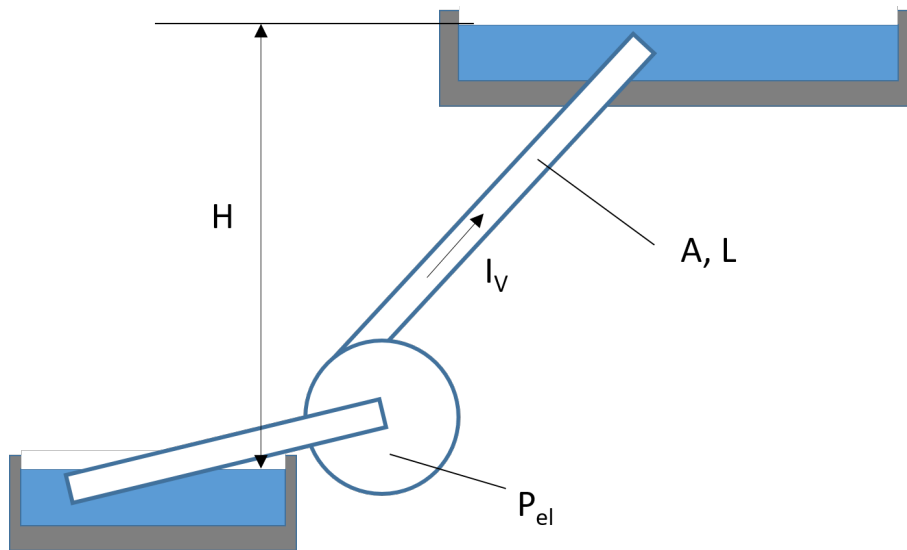
Inhaltsverzeichnis

1	Lerninhalt	2
2	Pumpe mit einzelner Rohrleitung	2
3	Hydraulisches Netzwerk mit mehreren Rohrzweigen	4
4	Abgabe	4

1 Lerninhalt

- Übertragen einer Aufgabenstellung in ein Set von nichtlinearen Gleichungen
- Entwickeln numerischer Methoden in `matlab` oder `python`
- Berechnung und Darstellung des Arbeitspunkts in Abhängigkeit eines Parameters
- Dokumentation von erarbeiteten Engineeringlösungen

2 Pumpe mit einzelner Rohrleitung



Eine Pumpe wird eingesetzt, um Wasser von einem See in ein um $H = 60m$ höher gelegenes Reservoir zu fördern. Diese Pumpe ist durch eine Pumpenkennlinie charakterisiert, welche die Fördermenge (Volumenstrom I_V in m^3/s) mit dem erreichbaren Pumpendruck p_{pumpe} und der applizierten elektrischen Leistung P_{el} verbindet

$$p_{pumpe} = p_{pumpe}(I_V, P_{el})$$

Dabei arbeitet die Pumpe gegen den hydrostatischen Druck $p_{stat} = \rho g \cdot H$ und den Strömungswiderstand im Förderrohr, ausgedrückt durch den Druckabfall $p_{res} = L \cdot \zeta \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2$, wobei ζ den Widerstandsbeiwert darstellt und $v = \frac{I_V}{A}$ die Strömungsgeschwindigkeit im Rohr ausdrückt.

Generell interessiert man sich in dieser Situation für den Arbeitspunkt der Anlage, d.h. diejenige Fördermenge I_V , welche sich bei gegebener Leistung P_{el} und fixen Anlagenparametern (L, H, A, ζ) einstellt. Die bestimmende Gleichung

$$p_{pumpe} = p_{stat} + p_{res}$$

ist nichtlinear, weshalb der Arbeitspunkt im allgemeinen nur mit numerischen Methoden gefunden werden kann.

Hinweis: Alle physikalischen Werte sind in SI-Grundeinheiten zu verwenden, d.h. Druck in Pa , Volumenstrom in m^3/s , Leistung in W , Länge in m , Fläche in m^2 , Dichte in kg/m^3 .

Aufgabe 1: Bestimmen Sie den Arbeitspunkt für das System gemäss dem Bild oben.

- Bestimmen Sie explizit die Gleichung für den Arbeitspunkt, wenn die Pumpenkennlinie die folgende Form hat

$$p_{pumpe}(I_V, P_{el}) = p_0 - a \cdot I_V^2 - b \cdot I_V^3$$

mit

$$p_0 = 10^6, \quad a = 4/27 \cdot p_0^3 / (P_{el} - 10^5)^2, \quad b = p_0/2$$

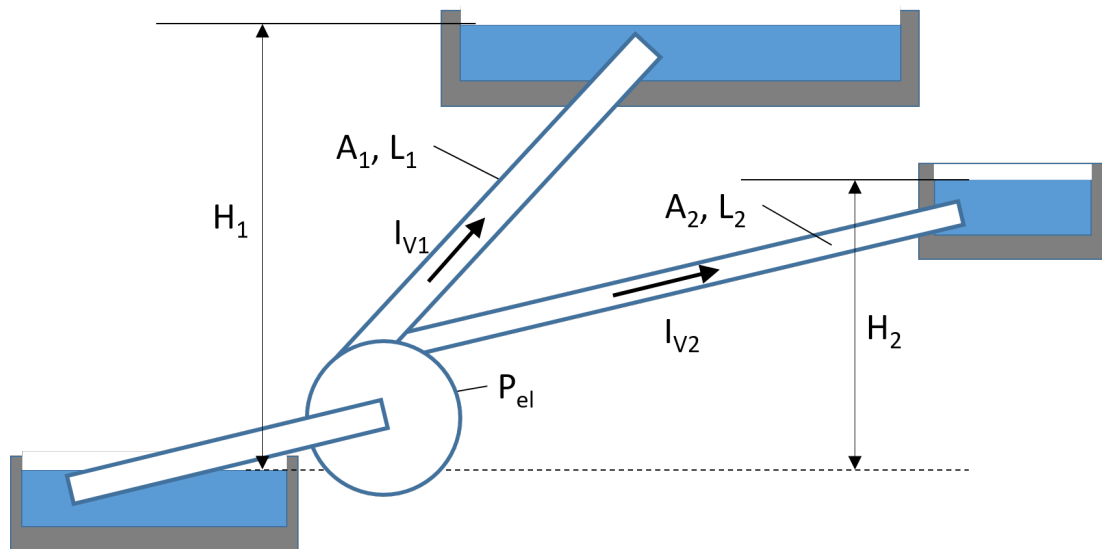
- Stellen Sie die Pumpencharakteristik für $P_{el} = 200, 400, \dots, 1000 \text{ kW}$ graphisch dar.
- Erstellen Sie ein Skript zur Berechnung der Fördermenge in Abhängigkeit der Pumpenleistung, wenn folgende Parameterwerte vorgegeben sind:

$$A = 0.050 \text{ m}^2, \quad L = 500 \text{ m}, \quad P_{el} = 400000 \text{ W}, \quad H = 60 \text{ m}, \quad \rho = 1000 \text{ kg/m}^3, \quad \zeta = 0.002$$

- Erweitern Sie Ihr Skript, damit die Förderleistung als Funktion der Pumpenleistung P_{el} im Intervall $[200 - 1000 \text{ kW}]$ bestimmt werden kann. Stellen Sie die Resultate graphisch dar, wobei Sie insbesondere auch den Wirkungsgrad der Anlage bestimmen und darstellen (Wirkungsgrad $\eta = p_{stat} \cdot I_V / P_{el}$).

3 Hydraulisches Netzwerk mit mehreren Rohrzweigen

Im zweiten Teil wird das Rohrnetzwerk ausgebaut, es führen zwei Rohre von der Pumpe zu verschiedenen Reservoirs. Dabei unterscheiden sich die Förderhöhen ebenso wie die Rohrlängen und -querschnitte. Die Aufgabe bleibt grundsätzlich gleich, man möchte die Förderleistung in Abhängigkeit der eingesetzten Pumpenleistung bestimmen. Wegen den zusätzlichen Freiheitsgraden entsteht nun jedoch ein *System* von nichtlinearen Gleichungen!



Aufgabe 2: Bestimmen Sie wiederum den Arbeitspunkt für das Netzwerk mit zwei Reservoiren.

- Stellen Sie das nichtlineare Gleichungssystem für das neue, komplexere Netzwerk auf. Die Pumpenkennlinie bleibt dieselbe, die Systemparameter lauten nun

$$A_1 = 0.050 \text{ m}^2, L_1 = 500 \text{ m}, H_1 = 60 \text{ m}, A_2 = 0.03 \text{ m}^2, L_2 = 2500 \text{ m}, H_2 = 45 \text{ m}$$

(Dichte und der Widerstandsbeiwert bleiben unverändert)

- Erweitern Sie Ihr Skript zur Bestimmung der Förderleistung als Funktion der Pumpenleistung P_{el} für das Intervall $[200 - 1000 \text{ kW}]$. Stellen Sie die Resultate graphisch dar und diskutieren Sie die Ergebnisse.
- Optimieren Sie die Wahl der Startwerte bei der Berechnung einer ganzen Schar von Lösungen. Dokumentieren Sie die Konvergenz und die Anzahl notwendiger Iterationen (über die Berechnung der gesamten Lösungsschar).

4 Abgabe

Dokumentieren Sie Ihre Arbeit in Form eines Kurzberichts und kommentierten `python/matlab` Skripts. Die Bewertung erfolgt im Rahmen der auf moodle kommunizierten Bewertungsschema.