

Cheatsheet Analysis 1

Nicolas Wehrli

August 2022

1 Reelle Zahlen

1.1 Definiton und Axiome

Die Menge \mathbb{R} ist mit zwei Operatoren versehen:
Addition $+$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow x + y$

Axiome der Addition

- A1 $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + (y + z) = (x + y) + z$
- A2 $\exists 0 \in \mathbb{R} : x + 0 = x, \forall x \in \mathbb{R}$
- A3 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$
- A4 $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$

Multiplikation \cdot : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow x \cdot y$

Axiome der Multiplikation

- A1 $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- A2 $\exists 1 \in \mathbb{R} : x \cdot 1 = x, \forall x \in \mathbb{R}$
- A3 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$
- A4 $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y \cdot x$

\mathbb{R} ist ein angeordneter Körper.

Ordnungsaxiome

- O1 $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x$
- O2 $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z$
- O3 $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y$
- O4 $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y$ oder $y \leq x$

Die Ordnung ist konsistent mit Addition und Multiplikation.

- K1: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \implies x + z \leq y + z$
- K2: $\forall x \in \mathbb{R}^+ \text{ und } \forall y \geq 0$

Ordnungsvollständigkeit

Seien A und B Teilmengen von \mathbb{R} , so dass

- (i) $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$
 - (ii) $\forall a \in A \text{ und } \forall b \in B \text{ gilt: } a \leq b$
- Dann gibt es (mindestens) ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $\forall a \in A : a \leq c$ und $\forall b \in B : c \leq b$

Archimedisches Prinzip

- (1) Sei $x \in \mathbb{R}, x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $y \leq n \cdot x$
- (2) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert genau ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x < n + 1$

Betragsrechenregeln

- (i) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- (ii) $|xy| = |x||y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- (iii) $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- (iv) $|x + y| \geq ||x| - |y|| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Young'sche Ungleichung

$\forall \varepsilon > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt $2 \cdot |x \cdot y| \leq \varepsilon \cdot x^2 + \frac{1}{\varepsilon} \cdot y^2$
Beweisidee: $(\sqrt{\varepsilon} \cdot |x| - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot |y|)^2 \geq 0$

Sei $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$:

- $c \in \mathbb{R}$ ist eine **obere (untere) Schranke** von A falls $\forall a \in A : a \leq (\geq) c$
- Ein Element $M \in \mathbb{R}$ ist ein **Maximum (Minimum)** von A falls $M \in A, \forall a \in A : a \leq (\geq) M$
- Sei A nach oben beschränkt. Die kleinste obere Schranke von A ist das **Supremum** von A .
- Sei A nach unten beschränkt. Die grösste untere Schranke von A ist das **Infimum** von A .
- $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$
- $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$
- $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup(A), c > 0$
- $\sup(c \cdot A) = c \cdot \inf(A), c < 0$

1.2 Euklidischer Raum

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad ||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \cdot ||y|| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

1.2.2

- 1. $||x|| \geq 0$ mit Gleichheit bei $x = 0$.
- 2. $||\alpha \cdot x|| = |\alpha| \cdot ||x|| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$
- 3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

1.3 Imaginäre Zahlen

$$i^2 = -1$$
$$z := x + iy \quad \bar{z} := x - iy$$
$$\operatorname{Re}(z) := x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{Im}(z) := y \in \mathbb{R}$$

1.24

- 1. $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}$
- 2. $\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- 3. $z \bar{z} = x^2 + y^2 = ||z||^2$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{||z||^2}$$

Polarform: $z = (\cos \phi + i \sin \phi)$, wobei $r = ||z||$ der *Absolutbetrag* und ϕ das *Argument* von z .

Fundamentalsatz Algebra

$n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ und

$$P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 \quad a_j \in \mathbb{C}$$

Dann gibt es z_1, \dots, z_n in \mathbb{C} , sodass

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

Eulersche Formel: $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$

2 Folgen

2.1 Konvergenz

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen L

$$\iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \forall n \geq N_\varepsilon : |a_n - L| < \varepsilon$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \text{ ist die Menge } n \in \mathbb{N} : a_n \notin]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\text{ endlich.}$$

Es gibt für eine konvergente Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ höchstens ein $L \in \mathbb{R}$, dass diese Bedingungen erfüllt.

Wir dürfen (o.B.d.A.) annehmen, dass ε durch eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ beschränkt ist. Es gilt ausserdem:

- konvergent \implies beschränkt, aber nicht umgekehrt
- (a_n) konvergent $\iff (a_n)$ beschränkt und $\liminf a_n = \limsup a_n$

Sei $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$ konvergente Folgen. mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ dann gilt:

- $(a_n \pm b_n)_{n \geq 1}$ konvergent, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $(a_n \cdot b_n)_{n \geq 1}$ konvergent, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $(a_n \div b_n)_{n \geq 1}$ konvergent, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \div b_n) = a \div b$ ($b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}, b \neq 0$)
- Falls $\exists K \geq 1$ mit $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq K$ folgt $a \leq b$

Limes superior & inferior

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{m \geq n} x_m \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{m \geq n} x_m \right)$$

Einschlusskriterium (Sandwich-Theorem)

Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$ und $a_n \leq c_n \leq b_n, \forall n \geq k$, dann $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$.

Weierstrass

Wenn a_n monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, dann konvergiert a_n mit Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$.
Wenn a_n monoton fallend und nach unten beschränkt ist, dann konvergiert a_n mit Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq 1\}$.

Tip: umschreiben $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln(f(x))}$ und Grenzwert im Exponent berechnen (l'Hopital).

Berechne $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin(x)}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(x^{\sin(x)})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin(x) \ln(x)}$$

$$e^x \text{ ist stetig } \implies \text{Limes in Exponent.}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin(x)}}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin^2(x)}{x \cos(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \stackrel{\frac{0}{1}}{\rightarrow} 0$$

$$\text{Daraus folgt: } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin(x) \ln(x)} = e^0 = 1$$

Bernoulli Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x \quad \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$$

Cauchy-Kriterium

Die Folge a_n ist genau dann konvergent, falls $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$ so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$.

2.1.1 Teilfolge

Eine Teilfolge von a_n ist eine Folge b_n wobei $b_n = a_{l(n)}$.

l ist eine Funktion mit $l(n) < l(n+1) \quad \forall n \geq 1$ (z.B. $l = 2n$ für jedes gerade Folgenglied).

Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Wenn 2 Teilfolgen nicht den gleichen Grenzwert haben, impliziert das Divergenz.

2.2 Strategie - Konvergenz von Folgen

- 1. Bei Brüchen: Grösste Potenz von n kürzen. Alle Brüche der Form $\frac{a}{n^a}$ streichen, da diese nach 0 gehen.
- 2. Bei Wurzeln in Summe im Nenner: Multiplizieren des Nenners und Zählers mit der Differenz der Summe im Nenner. (z.B. $(a + b)$ mit $(a - b)$ multiplizieren)
- 3. Bei rekursiven Folgen: Anwendung von Weierstrass zur monotonen Konvergenz
- 4. Einschliessungskriterium (Sandwich-Theorem) anwenden.
- 5. Mit bekannter Folge vergleichen.
- 6. Grenzwert durch einfaches Umformen ermitteln.
- 7. Limit per Definition der Konvergenz zeigen.
- 8. Anwendung des Cauchy-Kriteriums.
- 9. Suchen eines konvergenten Majoranten.
- 10. Weinen und die Aufgabe überspringen;)

2.3 Strategie - Divergenz von Folgen

- 1. Suchen einer divergenten Vergleichsfolge.
- 2. Alternierende Folgen: Zeige, dass Teilfolgen nicht gleich werden, also $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{p_1(n)} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} a_{p_2(n)}$ (mit z.B. gerade/ungerade als Teilfolgen).

2.4 Tricks für Grenzwerte

2.4.1 Binome

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+4} - \sqrt{x-2}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+4) - (x-2)}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-2}}$$

2.4.2 Substitution

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (1 - \cos(\frac{1}{x}))$$

Substituiere nun $u = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{2u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos(u)}{2} = \frac{1}{2}$$

2.4.3 Induktive Folgen (Induktionstrick)

- 1. Zeige monoton wachsend / fallend
- 2. Zeige beschränkt
- 3. Nutze Satz von Weierstrass, d.h. Folge muss gegen Grenzwert konvergieren
- 4. Verwende Induktionstrick (um den Grenzwert zu finden):

Wenn die Folge konvergiert, hat jede Teilfolge den gleichen Grenzwert. Betrachte die Teilfolge $l(n) = n + 1$ für $d_{n+1} = \sqrt{3d_n - 2}$:

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_{n+1} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} 3d_n - 2} = \sqrt{3d - 2}$$

Forme um zu $d^2 = 3d - 2 \rightarrow d \in \{1, 2\}$. Nun können wir $d = 2$ nehmen und die Beschränktheit mit $d = 2$ per Induktion zeigen.

3 Reihen

| Cauchy-Kriterium für Reihen |
|---|
| Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$ ist genau dann konvergent, falls $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$ mit $ \sum_{k=n}^m a_k < \varepsilon, \forall m \geq n \geq N$. |
| Nullfolgenkriterium |
| Wenn für eine Folge $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ist, dann divergiert $\sum_{n=0}^\infty a_n$. |

3.1 Reihenarithmetik

Wenn $\sum_{k=1}^\infty a_k$ und $\sum_{k=1}^\infty b_k$ konvergent sind, dann gilt:

- $\sum_{k=1}^\infty (a_k + b_k)$ konvergent und $\sum_{k=1}^\infty (a_k + b_k) = (\sum_{k=1}^\infty a_k) + (\sum_{k=1}^\infty b_k)$
- $\sum_{k=1}^\infty \alpha a_k$ konvergent und $\sum_{k=1}^\infty \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^\infty a_k$

| Vergleichssatz |
|---|
| Wenn $\sum_{k=1}^\infty a_k$ und $\sum_{k=1}^\infty b_k$ Reihen mit $0 \leq a_k \leq b_k, \forall k \geq K \geq 1$ sind, so gilt: |
| $\sum_{k=1}^\infty b_k$ konvergent $\implies \sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergent |
| $\sum_{k=1}^\infty a_k$ divergent $\implies \sum_{k=1}^\infty b_k$ divergent |

Als Vergleichsreihe (Majorant / Minorant) eignet sich oft eine Reihe der folgenden Kategorien:

3.1.1 Geometrische Reihe

$\sum_{k=0}^\infty q^k$ divergiert für $|q| \geq 1$ und konvergiert zu $\frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$
(Beweis per Teleskopidee: $S_n - q \cdot S_n = (1-q) \cdot S_n = 1 - q^n$)

3.1.2 Zeta-Funktion

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ divergiert für $s \leq 1$ und konvergiert für $s > 1$.

3.1.3 Teleskop Reihe

Sei $S_n = \sum_{k=1}^n a_k - a_{k+1}$ eine Reihe. Dann gilt $S_n = a_1 - a_{n+1}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$

3.2 Absolute Konvergenz

$\sum_{k=1}^\infty a_k$ heisst **absolut konvergent**, wenn $\sum_{k=1}^\infty |a_k|$ konvergiert. Es gilt $|\sum_{k=1}^\infty a_k| \leq \sum_{k=1}^\infty |a_k|$. Falls eine Reihe absolut konvergiert, dann konvergiert jede Umordnung der Reihe mit dem selben Grenzwert.

Falls die Reihe hingegen nur konvergiert, so gibt es immer eine Anordnung, so dass $\sum_{k=1}^\infty a_{\phi(k)} = x, \forall x \in \mathbb{R}, \phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (Bijektion).

| Leibnizkriterium |
|---|
| Wenn $a_n \geq 0, \forall n \geq 1$ monoton fallend ist und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ gilt, dann konvergiert $S = \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1} a_k$ und $a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$. (Geht auch für monoton fallend $\forall n \geq N, N \in \mathbb{N}$, dann muss aber bei der Abschätzung alle Terme mit Index $k \leq N$ vorkommen) |

| Quotientenkriterium |
|--|
| Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \neq 0, \forall n \geq 1$. Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{ a_{n+1} }{ a_n } < 1 \implies \sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergiert absolut. Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{ a_{n+1} }{ a_n } > 1 \implies \sum_{n=1}^\infty a_n$ divergiert. |

| Wurzelkriterium |
|--|
| Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \neq 0, \forall n \geq 1$. Sei $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{ a_n }$. <ul style="list-style-type: none">• $q < 1 \implies \sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergiert absolut.• $q = 1 \implies$ keine Aussage.• $q > 1 \implies \sum_{n=1}^\infty a_n$ und $\sum_{n=1}^\infty a_n$ divergieren. |

3.3 Wichtige Reihen

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$
$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2$$
$$\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$$
$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

3.4 Cauchy-Produkt

| Definition Cauchy-Produkt |
|--|
| Das Cauchy-Produkt von zwei Reihen $\sum_{i=0}^\infty a_i$ und $\sum_{j=0}^\infty b_j$ ist definiert als |
| $\sum_{n=0}^\infty \sum_{j=0}^n (a_{n-j} \cdot b_j) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \dots$ |
| Es konvergiert, falls beide Reihen absolut konvergieren. |

3.5 Strategie - Konvergenz von Reihen

- 1. Ist Reihe ein bekannter Typ? (Teleskopieren, Geometrische/Harmonische Reihe, Zetafunktion, ...)
- 2. Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$? Wenn nein, divergent.
- 3. Quotientenkriterium & Wurzelkriterium anwenden
- 4. Vergleichssatz anwenden, Vergleichsreihen suchen
- 5. Leibnizkriterium anwenden
- 6. Integral-Test anwenden (Reihe zu Integral)

3.6 Funktionenfolge

Für jedes n , sei $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge. $(f_n)_{n \geq 1}$ ist eine Folge der Folgen. Wir nehmen an, dass

- 1. $f(j) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(j)$ existiert $\forall j \in \mathbb{N}$
- 2. Es gibt eine Funktion $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty]$, so dass
 - a) $|f_n(j)| \leq g(j), \forall j \geq 0, \forall n \geq 0$
 - b) $\sum_{j=0}^\infty g(j)$ konvergiert.

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

4 Funktionen

4.1 Stetigkeit

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d, x \mapsto f(x)$ eine Funktion in $D \subseteq \mathbb{R}^d$.

| Definition Stetigkeit |
|---|
| f ist in $x_0 \in D$ stetig, $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, s.d. $ x - x_0 < \delta \rightarrow f(x) - f(x_0) < \varepsilon$ f ist stetig, falls sie in jedem $x_0 \in D$ stetig ist. |

Äquivalente Definitionen:

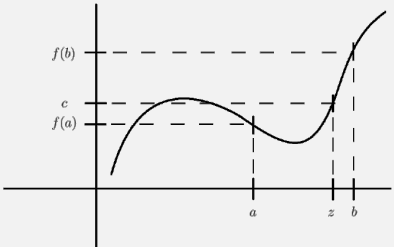
- $\forall (a_n)_{n \geq 1}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, f([x_0 - \delta, x_0 + \delta]) \subset]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$

Polynomielle Funktionen sind auf \mathbb{R} stetig.

- Falls f und g den gleichen Definitionsbereich haben und in x_0 stetig sind, dann sind auch
 $f+g, \lambda \cdot f, f \cdot g, \frac{f}{g}, |f|, \max(f, g), \min(f, g)$
stetig in x_0 .
- Seien P, Q zwei Polynomielle Funktionen auf \mathbb{R} mit x_1, \dots, x_m Nullstellen von Q . Dann ist $\frac{P}{Q}$ stetig $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$
- $D_1, D_2 \subset \mathbb{R} : D_1 \rightarrow D_2, g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit f, g stetig. Dann ist $g \circ f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in D_1$ stetig.

Zwischenwertsatz

Wenn $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $a, b \in I$ ist, dann gibt es für jedes c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $a \leq z \leq b$ mit $f(z) = c$.



Wird häufig verwendet um zu zeigen, dass eine Funktion einen gewissen Wert (z.B. Nullstelle) annimmt.

Daraus folgt, dass ein Polynom mit ungeradem Grad mindestens eine Nullstelle in \mathbb{R} besitzt.

4.1.1 Kompaktes Intervall

Ein Intervall $I \in \mathbb{R}$ ist kompakt, falls es von der Form $I = [a, b]$ mit $a \leq b$ ist. Dann ist Bild $f = f(I)$ ist auch ein kompaktes Intervall $J = [\min f, \max f]$.

Min-Max-Satz

Sei $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf einem kompakten Intervall I . Dann gibt es $u, v \in I$ mit $f(u) \leq f(x) \leq f(v), \forall x \in I$. Insbesondere ist f beschränkt.

Stetigkeit der Verknüpfung

Sei $f : D_1 \rightarrow D_2, g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D_1$. Falls f in x_0 und g in $f(x_0)$ stetig ist, dann ist $g \circ f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 stetig.

Satz über die Umkehrabbildung

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton und sei $J = f(I) \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist $f^{-1} : J \rightarrow I$ stetig und streng monoton.

Die reelle Exponentialfunktion

$\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv. Auch die Umkehrfunktion $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ hat diese Eigenschaften.

4.2 Funktionenfolgen

Eine Funktionenfolge ist eine Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \{f : D \rightarrow \mathbb{R}\}$.

Punktweise Konvergenz

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ falls für alle $x \in D$ gilt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

- $\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Gleichmässige Konvergenz

Die Folge (f_n) konvergiert gleichmässig in D gegen f falls gilt:

- $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$, so dass $\forall n \geq N, \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.
- $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$, so dass $\forall n, m \geq N$ und $\forall x \in D : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Die Funktionenfolge (g_n) ist gleichmässig konvergent, falls für alle $x \in D$ der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x)$ existiert und die Folge (g_n) gleichmässig gegen g konvergiert.

Sei eine Funktionsfolge $(f_n)_{n \geq 0}$ stetig, dann ist die dazugehörige Funktion f genau dann stetig, wenn f_n gleichmässig konvergiert. Punktweise Konvergenz ist nicht ausreichend.

Beispiel: $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f_n(x) = x^n$ konvergiert punktweise gegen $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 1 \\ 1 & \text{if } x = 1 \end{cases}$

$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig $\forall n \in \mathbb{N}$ aber die Grenzwertfunktion $f(x)$ ist nicht stetig. Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ konvergiert gleichmässig, falls die durch $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$ definierte Funktionenfolge gleichmässig konvergiert.

Sei f_n eine Folge stetiger Funktionen. Ausserdem ist $|f_n(x)| \leq c_n \forall x \in D$ und $\sum_{n=0}^\infty c_n$ konvergiert. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^\infty f_n(x)$ gleichmässig und deren Grenzwert ist eine in D stetige Funktion.

4.3 Potenzreihen

Definition Potenzreihe

Potenzreihen sind Reihen der Form $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$. Eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 wird als $\sum_{n=0}^\infty a_n (x - x_0)^n$ definiert.

Konvergenzradius

Der Konvergenzradius einer Potenzreihe um einen Entwicklungspunkt x_0 ist die grösste Zahl r , so dass die Potenzreihe für alle x mit $|x - x_0| < r$ konvergiert. Falls die Reihe für alle x konvergiert, ist der Konvergenzradius r unendlich. Sonst:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^\infty a_n x^n$ konvergiert absolut für alle $|x| < r$ und divergiert für alle $|x| > r$. **Der Fall $|x| = r$ ist unklar und muss geprüft werden.**

4.3.1 Definitionen per Potenzreihen

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!} \qquad r = \infty$$
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad r = \infty$$
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad r = \infty$$
$$\ln(x+1) = \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \qquad r = 1$$

Aus dem Leibnizkriterium und der Potenzreihenentwicklung von $\sin(x)$ folgt $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$ für $0 \leq x \leq \sqrt{6}$.

4.4 Grenzwerte von Funktionen

Häufungspunkt

$x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt der Menge D falls $\forall \delta > 0 : (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}) \cap D \neq \emptyset$.

Grenzwert - Funktionen

Wenn $f : D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D ist, dann ist $A \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $f(x)$ für $x \rightarrow x_0$ ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$), falls $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so dass $\forall x \in D \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}) : |f(x) - A| < \varepsilon$.

Eine Funktion f ist in x_0 stetig $\iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert und gleich $f(x_0)$.

Die Stetigkeit einer abschnittsweise definierten Funktion hängt auch vom Verhalten (links-/rechtsseitiger Grenzwert) an den Grenzen von Abschnittsintervallen ab.

Satz von L'Hôpital

Seien f, g stetig und differenzierbar auf $]a, b[$. Wenn $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ oder $\pm \infty$ und $g'(x) \neq 0 \forall x \in I \setminus \{c\}$, dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Grenzwerte der Form ∞^0 und 1^∞ können meist mit $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln(f(x))}$ und dann Bernoulli (nur Exponenten betrachten da e stetig) anwenden oder vereinfachen berechnet werden.

Sandwichsatz für Grenzwerte

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ Wir beweisen $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ per Sandwichsatz: Wir haben schon gesehen, dass für $0 \leq x \leq \sqrt{6}$ $x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin(x) \leq x$. Daraus folgt $1 - \frac{x^2}{3!} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1, \forall x \in]0, \sqrt{6}[$. Da $1 - \frac{x^2}{3!} \rightarrow 1$ für $x \rightarrow 0$ gilt per Sandwichsatz $\frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$.

4.5 Beweisideen

Injektivität

- Zeigen, dass f^{-1} surjektiv ist.
- Zeigen, dass gilt $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.
- Annehmen, dass es zwei Punkte $x_1 \neq x_2$ gibt, so dass $f(x_1) = f(x_2)$, dann Widerspruch herbeiführen.
- Zeigen, dass die Ableitung $\neq 0$ ist, die Funktion also streng monoton wachsend/fallend.

Surjektivität

- Zeigen, dass gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (oder ähnlich, aufpassen auf Definitionslücken dazwischen!)
- Zeigen, dass f^{-1} keine Lücken im Definitionsbereich hat.

4.5.1 Gerade/Ungerade

Für eine gerade Funktion gilt $f(x) = f(-x)$, sie ist symmetrisch zur Y-Achse. Eine ungerade Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung, es gilt also $f(-x) = -f(x)$.

4.6 Algebraische und Analytische Eigenschaften

- Jedes Vielfache einer geraden bzw. ungeraden Funktion ist wieder gerade bzw. ungerade.

- Die Summe zweier gerader Funktionen ist wieder gerade.
- Die Summe zweier ungerader Funktionen ist wieder ungerade.
- Das Produkt zweier gerader Funktionen ist wieder gerade.
- Das Produkt zweier ungerader Funktionen ist gerade.
- Das Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ist ungerade.
- Der Quotient zweier gerader Funktionen ist wieder gerade.
- Der Quotient zweier ungerader Funktionen ist gerade.
- Der Quotient einer geraden und einer ungeraden Funktion ist ungerade.
- Die Komposition einer beliebigen Funktion mit einer geraden Funktion ist gerade.
- Die Komposition einer ungeraden Funktion mit einer ungeraden Funktion ist ungerade.
- Die Ableitung einer geraden differenzierbaren Funktion ist ungerade, die Ableitung einer ungeraden differenzierbaren Funktion gerade.
- Das bestimmte Integral einer ungeraden stetigen Funktion ergibt 0, wenn die Integrationsgrenzen symmetrisch um den Nullpunkt liegen.

5 Ableitungen

5.1 Differenzierbarkeit

Differenzierbar

f ist in x_0 **differenzierbar**, falls der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Wenn dies der Fall ist, wird der Grenzwert mit $f'(x_0)$ oder $\frac{d}{dx} f(x_0)$ bezeichnet. f ist **differenzierbar**, falls f für jedes $x_0 \in D$ differenzierbar ist.

Differenzierbarkeit nach Weierstrass

f ist in x_0 differenzierbar \iff

- Es gibt $c \in \mathbb{R}$ und $r : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$ und $r(x_0) = 0$, r stetig in x_0 .
– Falls f differenzierbar ist, dann ist $c = f'(x_0)$ und $r(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ eindeutig bestimmt.
- Variation: Sei $\phi(x) = f'(x_0) + r(x)$. Dann gilt f in x_0 differenzierbar, falls $f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0)$, $\forall x \in D$ und ϕ in x_0 stetig ist. Dann gilt $\phi(x_0) = f'(x_0)$.

f differenzierbar $\implies f$ stetig

Dies folgt aus der Variation der Differenzierbarkeit nach Weierstrass.

Beweis: Sei $x_0 \in D$ beliebig und f differenzierbar. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0) + \phi(x)(x - x_0)) \stackrel{\phi(x) \text{ stetig}}{=} f(x_0) + \phi(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f(x_0)$.

Bmk: Es gibt stetige Funktionen auf \mathbb{R} die an keiner Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar sind.

Sei $g(x) = \langle x \rangle := \min\{|x - m| \mid m \in \mathbb{Z}\}$ und dann ist $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(10^n x)}{10^n}$ stetig auf \mathbb{R} doch in keinem Punkt differenzierbar.

Höhere Ableitungen

1. Für $n \geq 2$ ist f n -mal differenzierbar in D falls $f^{(n-1)}$ in D differenzierbar ist. Dann ist $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ die n -te Ableitung von f .
2. f ist n -mal stetig differenzierbar in D , falls sie n -mal differenzierbar und $f^{(n)}$ in D stetig ist.
3. f ist in D glatt, falls sie $\forall n \geq 1$ n -mal differenzierbar ist ("unendlich differenzierbar").

Glatte Funktionen: $\exp, \sin, \cos, \sinh, \cosh, \tanh, \ln, \arcsin, \arccos, \operatorname{arccot}, \arctan$ und alle Polynome. \tan ist auf $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi\}$, \cot auf $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ glatt.

Höhere Ableitungen: Regeln

Sei f, g n -mal differenzierbar. Dann sind

$$(f + g), f \cdot g, f \circ g, \frac{f}{g}$$

n -mal differenzierbar. ($g \neq 0$ für $\frac{f}{g}$)

$$\bullet (f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

5.2 Ableitungsregeln

- Linearität der Ableitung

$$(\alpha \cdot f(x) + g(x))' = \alpha \cdot f'(x) + g'(x)$$

- Produktregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

- Kettenregel

$$(f(g(x)))' = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

- Potenzregel

$$(c \cdot x^a)' = c \cdot a \cdot x^{a-1}$$

- Umkehrregel

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, f'(f^{-1}(x)) \neq 0$$

f muss bijektiv und differenzierbar sein. f^{-1} muss in x differenzierbar sein.

5.3 Implikationen der Ableitung

1. f besitzt ein lokales Minimum in x_0 , wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ oder falls das Vorzeichen von f' um x_0 von $-$ zu $+$ wechselt.
2. f besitzt ein lokales Maximum in x_0 , wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ oder falls das Vorzeichen von f' um x_0 von $+$ zu $-$ wechselt.
3. f besitzt ein lokales Extremum in x_0 , wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$.
Wenn man den Vorzeichenwechsel benutzen will, um auf ein Extremum zu schließen, dann muss f' stetig sein.
4. Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, ist x_0 nicht unbedingt ein Sattelpunkt.
Als Gegenbeispiel siehe $f(x) = x^4$, $f''(0) = 0$ aber $x = 0$ ist ein Minimum von f .
5. f besitzt einen Wendepunkt in x_0 , wenn $f''(x_0) = 0$.
6. f ist in x_0 konvex, wenn $f''(x_0) \geq 0$.
7. f ist in x_0 konkav, wenn $f''(x_0) \leq 0$.

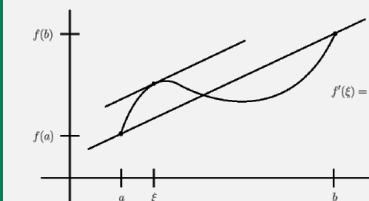
5.4 Sätze zur Ableitung

Satz von Rolle

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Wenn $f(a) = f(b)$, dann gibt es mindestens ein $\xi \in]a, b[$ mit $f'(\xi) = 0$.

Mittelwertsatz (Lagrange)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es (mindestens ein) $\xi \in]a, b[$ mit $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.



5.5 Taylorreihen

Taylorreihen sind ein Weg, glatte Funktionen als Potenzreihen anzunähern.

Definition: Taylor-Polynom

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ $(n+1)$ -mal differenzierbar. Das n -te Taylor-Polynom $T_n f(x; a)$ an einer Entwicklungsstelle a ist definiert als:

$$T_n f(x; a) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x - a)^k$$

$$= f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \frac{f''(a)}{2} \cdot (x - a)^2 + \dots$$

Da eine Abschätzung mit dem Taylor-Polynom im allgemeinen Fall einen gewissen Fehler hat, definieren wir das Restglied $R_n(f, x, a)$.

Für jedes $a < x < b$ gibt es ein $\xi \in]a, x[$ mit:

$$f(x) = T_n f(x; a) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$$

Wobei

$$R_n(f, x, a) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$$

Fehlerabschätzung des Taylor-Polynoms

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ der Fehler des Taylorpolynoms.

$$|\alpha| \leq \sup_{\xi \in [a, x]} |R_n(f, x, a)|$$

$$= \sup_{\xi \in [a, x]} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{(n+1)} \right|$$

Taylorreihe

Die unendliche Reihe

$$Tf(x; a) := T_\infty = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$$

wird Taylorreihe von f an Stelle a genannt. (Dafür muss die Funktion f glatt sein.)

Differenzierbarkeit von Potenzreihen

Funktionen die durch Potenzreihen gegeben sind, sind als Polynome gliedweise differenzierbar. Innerhalb ihres Konvergenzbereichs sind sie glatte Funktionen.

Sei $f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$ die Taylorreihe der Funktion f . Dann kann man die j -te Ableitung wie folgt ausdrücken:

$$f^{(j)}(x) = \sum_{n=j}^\infty \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot \frac{n!}{(n-j)!} \cdot (x-a)^{(n-j)}$$

Für eine allgemeine Potenzreihe gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^\infty c_k \cdot (x-x_0)^k$$

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^\infty c_k \frac{k!}{(k-j)!} (x-x_0)^{k-j}$$

Beispiele Taylorreihen ($a = 0$):

- $\sin(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$
- $e^{-x} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n!}$
- $\sinh(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cosh(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

5.6 Länge einer Kurve

Für eine Kurve $p(t) = (x(t), y(t))$ in der xy -Ebene gilt

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt$$

6 Integrale

6.1 Riemann-Integral

Definition: Partition

Eine Partition von $I = [a, b]$ ist eine endliche Teilmenge $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\} \subsetneq I$, wobei $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ und $\{a, b\} \subseteq P$. (“Aufteilung”)

Wir bezeichnen $\delta_i := x_i - x_{i-1}, \forall i \geq 1$ (Länge des Teilintervalls)

Die **Feinheit der Zerlegung** ist definiert als $\delta(P) := \max_{1 \leq i \leq n} \delta_i$.

Wir definieren $\mathcal{P}(I)$ als die Menge aller Partitionen von I .

$\mathcal{P}_\delta(I) := \{P \in \mathcal{P}(I) | \delta(P) \leq \delta\}$

Definition: Riemann-Summe

Sei $\xi_i \in I_i$ zwischen den Stützstellen: $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i, \xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$

$$S(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Ober- und Untersumme

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, d.h. $\exists M \geq 0$ mit $|f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$

Obersumme:

$$\overline{S}(f, P) := \sum_{i=1}^n \sup_{\xi_i \in I_i} f(\xi_i) \cdot \delta_i$$

Untersumme:

$$\underline{S}(f, P) := \sum_{i=1}^n \inf_{\xi_i \in I_i} f(\xi_i) \cdot \delta_i$$

Bmk:

$$-M \cdot (b-a) \leq \underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, P) \leq M \cdot (b-a)$$

Seien P, Q Partitionen des gleichen Intervalls.

- Eine Vereinigung von zwei Partitionen ist wieder eine Partition.
- Eine Partition P ist eine Verfeinerung einer Partition Q , falls $Q \subset P$.
- $P \cup Q$ ist immer eine Verfeinerung von P und Q .
- $P \subset Q \implies \underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, P)$

- Für P, Q beliebig gilt: $\underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, Q)$
- Insbesondere

$$\sup_{P \in \mathcal{P}(I)} \underline{S}(f, P) \leq \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} \overline{S}(f, P)$$

Riemann-integrierbar

Wir definieren das untere Riemann Integral

$$\underline{S}(f) := \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} \underline{S}(f, P)$$

und das obere Riemann Integral von f

$$\overline{S}(f) := \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} \overline{S}(f, P)$$

Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar, falls $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$. Dann ist

$$A := \int_a^b f(x) \, dx = \underline{S}(f) = \overline{S}(f), A \in \mathbb{R}$$

6.2 Integrierbarkeit zeigen

Integrierbarkeitskriterien

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und $A = \int_a^b f(x) dx$ falls f integrierbar

\iff

$\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathcal{P}(I)$ mit $\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$

\iff

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, so dass $\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon, \forall P \in \mathcal{P}_\delta(I)$

\iff

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, so dass $\forall P \in \mathcal{P}_\delta(I)$ und ξ_1, \dots, ξ_n mit $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$

$|A - S(f, P, \xi)| < \varepsilon$

\iff

$\lim_{\delta(P) \rightarrow 0} S(f, P, \xi)$ existiert. (Dann wäre $\lim_{\delta(P) \rightarrow 0} S(f, P, \xi) = A$)

Gleichmässige Stetigkeit

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist **gleichmässig stetig**, falls $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \, \forall x, y \in D :$

$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

(Das δ hängt nur vom ε ab)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ ist auf \mathbb{R} stetig aber nicht gleichmässig stetig.

Satz von Heine

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in dem **kompakten Intervall** $[a, b]$. Dann ist f in $[a, b]$ gleichmässig stetig.

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar.

- f stetig in $[a, b] \implies f$ integrierbar über $[a, b]$
- f monoton in $[a, b] \implies f$ integrierbar über $[a, b]$
- Wenn f, g beschränkt und integrierbar sind, dann sind

$$f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g, |f|, \max(f, g), \min(f, g), \frac{f}{g}$$

integrierbar

- Jedes Polynom ist integrierbar, auch $\frac{P(x)}{Q(x)}$ falls $P(x), Q(x)$ auf $[a, b]$ definiert sind und $Q(X)$ in $[a, b]$ keine Nullstellen besitzt

6.3 Sätze & Ungleichungen

- $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b] \implies \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$
- $\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$
- $\left| \int_a^b f(x)g(x) \, dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) \, dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x) \, dx}$

Mittelwertsatz

Wenn $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, dann gibt es $\xi \in [a, b]$ mit $\int_a^b f(x) \, dx = f(\xi)(b-a)$.

Daraus folgt auch, dass wenn $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wobei f stetig, g beschränkt und integrierbar mit $g(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ ist, dann gibt es $\xi \in [a, b]$ mit $\int_a^b f(x)g(x) \, dx = f(\xi) \int_a^b g(x) \, dx$.

6.4 Stammfunktionen

Definition: Stammfunktion

Eine Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heisst Stammfunktion von f , falls F (stetig) differenzierbar in $[a, b]$ ist und $F' = f$ in $[a, b]$ gilt.

“ f integrierbar” impliziert *nicht*, dass eine Stammfunktion existiert. Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq 0 \\ 1, & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

Sei $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt, \, a \leq x \leq b$$

ist in $[a, b]$ stetig differenzierbar und $F'(x) = f(x) \, \forall x \in [a, b]$.

Fundamentalsatz der Analysis

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine Stammfunktion F von f , die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist und es gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

6.5 Integrationsregeln

Erweiterung der Definition eines Integrals

Wir erweitern die Definition, so dass

$$\int_a^b f(x) dx := - \int_b^a f(x) dx$$

und

$$\int_a^a f(x) dx := 0$$

Linearität

$$\int u \cdot f(x) + v \cdot g(x) dx = u \int f(x) dx + v \int g(x) dx$$

Gebietsadditivität

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, c \in [a, b]$$

Partielle Integration

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

- Grundsätzlich gilt: Polynome ableiten ($g(x)$), wo das Integral periodisch ist (\sin, \cos, e^x, \dots) integrieren ($f'(x)$)
- Teils ist es nötig, mit 1 zu multiplizieren, um partielle Integration anwenden zu können (z.B. im Fall von $\int \log(x) dx$)
- Muss eventuell mehrmals angewendet werden

Substitution

Um $\int_a^b f(g(x)) dx$ zu berechnen: Ersetze $g(x)$ durch u und integriere $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \frac{du}{g'(x)}$.

- $g'(x)$ muss sich irgendwie herauskürzen, sonst nutzlos.
- Grenzen substituieren nicht vergessen.

- Alternativ kann auch das unbestimmte Integral berechnet werden und dann u wieder durch x substituiert werden.

Partialbruchzerlegung

Seien $p(x), q(x)$ zwei Polynome. $\frac{p(x)}{q(x)}$ wird wie folgend berechnet:

1. Falls $\deg(p) \geq \deg(q)$, führe eine Polynomdivision durch. Dies führt zum Integral $\int a(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$.
2. Berechne die Nullstellen von $q(x)$.
3. Pro Nullstelle: Einen Partialbruch erstellen.
 - Einfach, reell: $x_1 \rightarrow \frac{A}{x-x_1}$
 - n -fach, reell: $x_1 \rightarrow \frac{A_1}{x-x_1} + \dots + \frac{A_r}{(x-x_1)^r}$
 - Einfach, komplex: $x^2 + px + q \rightarrow \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$
 - n -fach, komplex: $x^2 + px + q \rightarrow \frac{A_1 x + b_1}{x^2+px+q} + \dots$
4. Parameter A_1, \dots, A_n (bzw. B_1, \dots, B_n) bestimmen. (x jeweils gleich Nullstelle setzen, umformen und lösen).

6.6 Integration konvergenter Reihen

Funktionsfolge integrieren

Sei $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von beschränkten, integrierbaren Funktionen, die gleichmäßig gegen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f beschränkt und integrierbar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx$$

(ohne gleichmäßige Konvergenz dürfte man den \lim und das Integral nicht tauschen!) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ auf $[a, b]$ gleichmäßig konvergent. Dann gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx$$

Integration von Potenzreihen

Sei $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist f auf $[-r, r]$ integrierbar $\forall r \in [0, \rho[$ und es gilt: $\int_a^b f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \forall x \in]-\rho, \rho[$

Bmk: Im Allg. kann man Potenzreihen in ihrem Konvergenzbereich termweise differenzieren und integrieren.

6.7 Euler-McLaurin-Formel

Die Formel hilft Summen wie $1^l + 2^l + 3^l + \dots + n^l$ abzuschätzen. Für die Formel brauchen wir die Bernoulli-Polynome $B_n(x)$, sowie die Bernoulli-Zahlen $B_n(0)$. Wir brauchen dafür Polynome, welche durch die folgenden Eigenschaften bestimmt sind:

1. $P'_k = P_{k-1}, k > 1$
2. $\int_0^1 P_k(x) dx = 0, \forall k \geq 1$

Für das k -te Bernoulli-Polynom gilt: $B_k(x) = k!P_k(x)$. Wir definieren weiter $B_0 = 1$ und alle anderen Bernoulli-Zahlen rekursiv: $B_{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} B_i = 0$. Somit erhalten wir für das Bernoulli-Polynom folgende Definition:

$$B_k(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B_i x^{k-i}$$

Hier ein paar Bernoulli-Polynome: $B_0(x) = 1, B_1(x) = x - \frac{1}{2}, B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$. Nun definieren wir noch:

$$\tilde{B}_k(x) = \begin{cases} B_k(x) & \forall x : 0 \leq x < 1 \\ B_k(x-n) & \forall x : n \leq x < n+1 \end{cases}$$

Euler-McLaurin-Summationsformel

Sei $f : [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$ k -mal stetig differenzierbar. Dann gilt:
Für $k = 1$:

$$\sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2} (f(n) - f(0)) + \int_0^n \tilde{B}_1(x) f'(x) dx$$

Für $k > 1$:

$$\sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2} (f(n) - f(0)) + \sum_{j=2}^k \frac{(-1)^j B_j}{j!} (f^{(j-1)}(n) + f^{(j-1)}(0)) + \tilde{R}_k$$

wobei

$$\tilde{R}_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^n \tilde{B}_k(x) f^{(k)}(x) dx$$

Beispiel für Euler-McLaurin

$$1^l + 2^l + 3^l + \dots + n^l \text{ wobei } l \geq 1, l \in \mathbb{N}$$

Angewandt auf $f(x) = x^l$ und $k = l+1$ folgt für alle $l \geq 1$:

$$1^l + 2^l + 3^l + \dots + n^l = \frac{1}{l+1} \sum_{j=0}^l (-1)^j B_j \binom{l+1}{j} n^{l+1-j}$$

6.8 Gamma-Funktion

Die Gamma-Funktion wird gebraucht, um die Funktion $n \mapsto (n-1)!$ zu interpolieren. Für $s > 0$ definieren wir:

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx = (s-1)!$$

Die Gamma-Funktion konvergiert für alle $s > 0$ und hat folgende weitere Eigenschaften:

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$
3. Γ ist logarithmisch konvex, d.h.:

$$\Gamma(\lambda x + (2-\lambda)y) \leq \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}$$

für alle $x, y > 0$ und $0 \leq \lambda \leq 1$

Die Gamma-Funktion ist die einzige Funktion $]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$, die (1), (2) und (3) erfüllt. Zudem gilt:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} \quad \forall x > 0$$

6.9 Stirling'sche Formel

Die Stirling'sche Formel ist eine Abschätzung der Fakultät. Mit der Euler-McLaurin-Formel kombiniert folgt

$$n! = \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n}{e^n} \cdot \exp\left(\frac{1}{12n} + R_3(n)\right)$$

wobei $|R_3(n)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216} \cdot \frac{1}{n^2} \quad \forall n \geq 1$

6.10 Uneigentliche Integrale

Definition: Uneigentliches Integral

Sei $f(x) : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$ mit $\forall b > a$. Falls $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ existiert, ist $\int_a^{\infty} f(x) dx$ der Grenzwert und f ist auf $[a, \infty[$ integrierbar.

Diese Definition gilt auch für $f(x) :]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ dann $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$ ist.

Falls $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ auf $]a, b[$ nicht beschränkt ist, aber auf jedem Intervall $[a + \varepsilon, b]$, $\varepsilon > 0$, beschränkt und integrierbar ist, ist f auf $]a, b[$ integrierbar falls $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$ existiert; in diesem Fall wird dieser Grenzwert mit $\int_a^b f(x) dx$ bezeichnet.

Majoranten-/ Minorantenkriterium

Sei $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar auf $[a, b]$, $\forall b > a$.

- $|f(x)| \leq g(x)$, $\forall x \geq a$ und g auf $[a, \infty[$ integrierbar
 $\implies f$ auf $[a, \infty[$ integrierbar
- $0 \leq g(x) \leq f(x)$ und $\int_a^\infty g(x) dx$ divergiert
 $\implies \int_a^\infty f(x) dx$ divergiert

McLaurin-Satz (Integraltest für Reihen)

Sei $f : [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ monoton fallend. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ genau, wenn $\int_1^\infty f(x) dx$ konvergiert. In diesem Fall gilt: $0 \leq \sum_{n=1}^\infty f(n) - \int_1^\infty f(x) dx \leq f(1)$

6.11 Unbestimmte Integrale

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert. Wenn f stetig ist, gibt es eine Stammfunktion F . Wir schreiben dann

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Das unbestimmte Integral ist die Umkehroperation der Ableitung.

7 Trigonometrie

Die Kreiszahl $\pi := \inf\{t > 0 \mid \sin t = 0\}$. Beweisidee: $\sin x > 0, \forall x \in]0, 2[$ und $\sin 4 < 0$. Da $\sin x$ stetig ist, gibt es per Zwischenwertsatz mindestens ein $x \in]2, 4[$ so dass $\sin x = 0$.

7.1 Hyperbelfunktionen

- $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty]$
- $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- $\tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

7.2 Regeln

7.2.1 Periodizität

- $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha) \quad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$
- $\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha) \quad \cot(\alpha + \pi) = \cot(\alpha)$

7.2.2 Parität

- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
- $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha) \quad \cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$

7.2.3 Ergänzung

- $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha) \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha) \quad \cot(\pi - \alpha) = -\cot(\alpha)$

7.2.4 Komplemente

- $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha) \quad \cos(\pi/2 - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\tan(\pi/2 - \alpha) = -\cot(\alpha) \quad \cot(\pi/2 - \alpha) = \tan(\alpha)$

7.2.5 Doppelwinkel

- $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2 \sin^2(\alpha)$
- $\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$

7.2.6 Addition

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$
- $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \tan(\beta)}$

7.2.7 Subtraktion

- $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta)$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta)$
- $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) \tan(\beta)}$

7.2.8 Multiplikation

- $\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{2}$
- $\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$
- $\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$

7.2.9 Potenzen

- $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$
- $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$
- $\tan^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)}$

7.2.10 Diverse

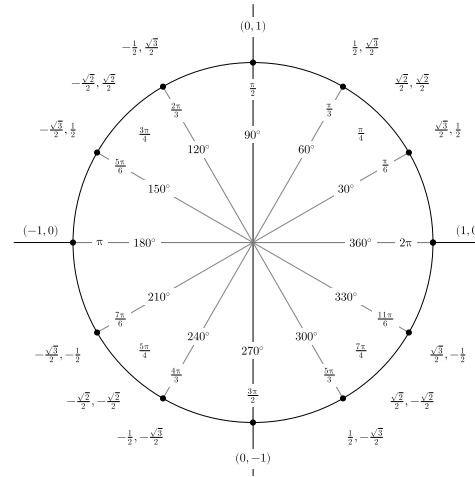
- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
- $\cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) = 1$
- $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ und $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

In der Serie 8 wurde gezeigt, dass:

- $\sin x - \sin y = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$
- $\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$

Wichtige Werte

| deg | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 180° |
|-----|----|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|-------|
| rad | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | π |
| cos | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 |
| sin | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 |
| tan | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $+\infty$ | 0 |



8 Tabellen

8.1 Grenzwerte

| | |
|---|--|
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{\frac{1}{x}} = 1$ | $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{x})^{\frac{1}{x}} = e$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^b = 1$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ |
| $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x})^x = \frac{1}{e}$ |
| $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{k}{x})^{mx} = e^{km}$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x}{x+k})^x = \frac{1}{e^k}$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$, $\forall a > 0$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a q^x = 0$, $\forall 0 \leq q < 1$ |

| | |
|---|---|
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log 1 - x}{x} = -1$ | $\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = 0$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arctan x} = 1$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x - 1} = a$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ |
| $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^a} = 0$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{2^x} = 0$ |

8.2 Ableitungen

| F(x) | f(x) | f'(x) |
|---|-----------------------|--|
| $\frac{x^{-a+1}}{-a+1}$ | $\frac{1}{x^a}$ | $-\frac{a}{x^{a+1}}$ |
| $\frac{x^a+1}{a+1}$ | x^a ($a \neq -1$) | $a \cdot x^{a-1}$ |
| $\frac{1}{k \ln(a)} a^{kx}$ | a^{kx} | $k a^{kx} \ln(a)$ |
| $\ln x $ | $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ |
| $\frac{2}{3} x^{3/2}$ | \sqrt{x} | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $-\cos(x)$ | $\sin(x)$ | $\cos(x)$ |
| $\sin(x)$ | $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ |
| $\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2} \sin(2x))$ | $\sin^2(x)$ | $2 \sin(x) \cos(x)$ |
| $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2} \sin(2x))$ | $\cos^2(x)$ | $-2 \sin(x) \cos(x)$ |
| $-\ln \cos(x) $ | $\tan(x)$ | $\frac{1}{\cos^2(x)}$ $1 + \tan^2(x)$ |
| $\cosh(x)$ | $\sinh(x)$ | $\cosh(x)$ |
| $\log(\cosh(x))$ | $\tanh(x)$ | $\frac{1}{\cosh^2(x)}$ |
| $\ln \sin(x) $ | $\cot(x)$ | $-\frac{1}{\sin^2(x)}$ |
| $\frac{1}{c} \cdot e^{cx}$ | e^{cx} | $c \cdot e^{cx}$ |
| $x \ln x - 1$ | $\ln x $ | $\frac{1}{x}$ |
| $\frac{1}{2}(\ln(x))^2$ | $\frac{\ln(x)}{x}$ | $\frac{1 - \ln(x)}{x^2}$ |
| $\frac{x}{\ln(a)} (\ln x - 1)$ | $\log_a x $ | $\frac{1}{\ln(a)x}$ |

8.3 Weitere Ableitungen

| F(x) | f(x) |
|-------------------|---------------------------|
| $\arcsin(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arccos(x)$ | $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arctan(x)$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| x^x ($x > 0$) | $x^x \cdot (1 + \ln x)$ |

8.4 Integrale

| $f(x)$ | $F(x)$ |
|---------------------------------------|--|
| $\int f'(x)f(x) dx$ | $\frac{1}{2}(f(x))^2$ |
| $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ | $\ln f(x) $ |
| $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ | $\sqrt{\pi}$ |
| $\int (ax+b)^n dx$ | $\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}$ |
| $\int x(ax+b)^n dx$ | $\frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}$ |
| $\int (ax^p+b)^n x^{p-1} dx$ | $\frac{(ax^p+b)^{n+1}}{ap(n+1)}$ |
| $\int (ax^p+b)^{-1} x^{p-1} dx$ | $\frac{1}{ap} \ln ax^p+b $ |
| $\int \frac{ax+b}{cx+d} dx$ | $\frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \ln cx+d $ |
| $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx$ | $\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$ |
| $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx$ | $\frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right $ |
| $\int \sqrt{a^2+x^2} dx$ | $\frac{x}{2} f(x) + \frac{a^2}{2} \ln(x + f(x))$ |

Integralformel

$$\int_a^b \frac{f(x)}{f(a+b-x)+f(x)} dx = \frac{b-a}{2}$$

Beweis: $\int_a^b \frac{f(x)}{f(a+b-x)+f(x)} dx = I$
 Substitution: $u = a+b-x, du = -dx$

$$I = \int_b^a \frac{f(a+b-u)}{f(u)+f(a+b-u)} (-du)$$

$$= \int_a^b \frac{f(a+b-u)}{f(u)+f(a+b-u)} du$$

$$2 \cdot I = \int_a^b \frac{f(x)+f(a+b-x)}{f(a+b-x)+f(x)} dx$$

$$2I = \int_a^b 1 dx = b-a \implies I = \frac{b-a}{2}$$

9 Aufgaben

9.1 Tipps Für Multiple-Choice

- **Richtig lesen!!!**
- (Gegen-)Beispiele suchen.
- Monotonieverhalten bei verketteten/miteinander verrechneten Funktionen bleibt nicht unbedingt erhalten.
 - Sei $g: X \rightarrow Y$ streng monoton wachsend
 - * $f: Y \rightarrow Z$ (streng) monoton wachsend $\implies f(g(x))$ (streng) monoton wachsend.
 - * $f: Y \rightarrow Z$ (streng) monoton fallend $\implies f(g(x))$ (streng) monoton fallend.

- Sei $g: X \rightarrow Y$ monoton wachsend
 - * $f: Y \rightarrow Z$ (streng) monoton wachsend $\implies f(g(x))$ monoton wachsend.
 - * $f: Y \rightarrow Z$ (streng) monoton fallend $\implies f(g(x))$ monoton fallend.
- Die Inverse einer monoton wachsenden Funktion ist monoton wachsend. (Beweis mit Umkehrregel)
- Die Multiplikation oder Division zweier monotonen Funktionen können monoton wachsend/fallend bleiben oder ihre Monotonie verlieren.
- Monoton wachsende Funktion konvex(konkav) \implies Inverse konkav(konvex).
- Monoton fallende Funktion konvex(konkav) \implies Inverse konvex(konkav).

• Verkettete Funktionen:

- Falls äussere beschränkt \implies Verkettung beschränkt.
- Verkettung stetiger Funktionen ist stetig.
- Verkettung (streng) konvexer Funktionen, muss nicht konvex sein.

- Schauen ob Funktionsfolge f_n gleichmässig und nicht nur punktweise gegen f konvergiert. \implies Gewisse Eigenschaften (Stetigkeit) nur dann gültig.
- $f''(x_0) = 0 \not\Rightarrow x_0$ ist ein Sattelpunkt von f .
- f stetig $\not\Rightarrow f'$ stetig.
- Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion. $\implies f^{(i)}(0) = 0$ für i gerade.
- $X, Y, Z \subset \mathbb{R}, f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$, sodass $g \circ f: X \rightarrow Z$ bijektiv. $\implies f$ injektiv, g surjektiv
- Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ mit $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$. Falls f^2 und f^3 in $]a, b[$ differenzierbar und $f(x) \neq 0 \forall x \in]a, b[\implies f$ in $]a, b[$ differenzierbar. (Da wir f^3 durch f^2 teilen).
- Im Allg. muss eine Grenzfunktion f nicht differenzierbar sein, und wenn sie es ist muss f' nicht gleich $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$ sein.
- $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton $\not\Rightarrow f$ beschränkt. Der Logarithmus $\ln: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ist monoton, aber nicht beschränkt.
- $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ ist beschränkt.
- $f(x) = |x| \cdot \text{sign}(x)$ ist stetig, da $|x| \cdot \text{sign}(x) = x$ und $g(x) = x$ stetig.

9.2 Multiple Choice

Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, n \geq 1$ so dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 1}$ auf $[a, b]$ gleichmässig gegen f konvergiert. Geben Sie für jede folgender Aussagen an ob sie wahr oder falsch ist.

- Sei $x_0 \in]a, b[$. Falls f_n für alle $n \geq 1$ in x_0 differenzierbar ist, so ist f in x_0 differenzierbar.
 (A) wahr.
(B) falsch.
 Stetigkeit $\not\Rightarrow$ Differenzierbarkeit
- Falls f_n für alle $n \geq 1$ auf $[a, b]$ beschränkt ist dann folgt, dass für jede Partition P von $[a, b]$ der Grenzwert der Untersumme $\lim_{n \rightarrow \infty} s(f_n, P)$ existiert und $\lim_{n \rightarrow \infty} s(f_n, P) = s(f, P)$.
(A) wahr.
 (B) falsch. Sei $P = \{x_0, \dots, x_m\}$ eine Partition von $[a, b]$ mit $x_0 < \dots < x_m$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(f_n, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f_n(x) \delta_i = \sum_{i=1}^m \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x)) \delta_i = \sum_{i=1}^m \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \delta_i = \sum_{i=1}^m f_i \delta_i = s(f, P)$$
- Falls f_n für alle $n \geq 1$ stetig ist, so ist f gleichmässig stetig.
(A) wahr.
 (B) falsch.
 gleichmässige Konvergenz \implies Stetigkeit von $f \implies$ gleichmässige Stetigkeit da kompaktes Intervall
- Falls f_n für alle $n \geq 1$ konvex ist, so ist f konvex.
(A) wahr.
 (B) falsch.

Sei $(q_n)_{n \geq 1}$ eine Folge rationaler Zahlen, sodass $|q_n - q_{n+1}| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.
 Dann ist $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

Falsch: Sei $q_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Dann ist $q_n \in \mathbb{Q}$ und es gilt $|q_n - q_{n+1}| = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, aber $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist keine Cauchy-Folge, denn

$$q_{2n} - q_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine konvergente Folge, und σ eine Permutation von $\{1, 2, 3, \dots\}$ (d.h. eine Bijektion der Menge $\{1, 2, 3, \dots\}$ auf sich selbst). Dann konvergiert auch die Folge $b_n = a_{\sigma(n)}, \forall n \geq 1$.
Richtig. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \geq 1}$. Es gilt $\forall \varepsilon < 0, \exists N_\varepsilon: |\alpha - a_n| < \varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon$. Wir definieren $m_\varepsilon = \max\{k: \sigma(k) \leq n_\varepsilon\}$. Es gilt $m_\varepsilon < \infty$, da $n_\varepsilon < \infty$ und σ eine Bijektion. Dann gilt:

$$|\alpha - b_n| = |\alpha - a_{\sigma(n)}| < \varepsilon, \forall n \geq m_\varepsilon$$

Somit folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$.

Sei $\phi: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ eine Abbildung, $\sum_{n=0}^\infty a_n$ eine Reihe und $b_n = a_{\phi(n)}$.

- $\sum_{n=0}^\infty a_n$ ist konvergent und ϕ surjektiv $\implies \sum_{n=0}^\infty b_n$ ist konvergent.

Falsch. Gegenbeispiel:

$$\sum_{n=0}^\infty a_n = 1 + (-1) + \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \dots$$

konvergiert, aber

$$\sum_{n=0}^\infty b_n = 1 + 1 + (-1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) + \dots$$

konvergiert nicht.

- $\sum_{n=0}^\infty a_n$ ist konvergent und ϕ injektiv $\implies \sum_{n=0}^\infty b_n$ ist konvergent.

Falsch. Gegenbeispiel:

$$\sum_{n=0}^\infty a_n = 1 + (-1) + \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \dots$$

konvergiert, aber

$$\sum_{n=0}^\infty b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

konvergiert nicht.

- $\sum_{n=0}^\infty a_n$ ist absolut konvergent und ϕ surjektiv $\implies \sum_{n=0}^\infty b_n$ ist konvergent.

Falsch. Gegenbeispiel:

$$\sum_{n=0}^\infty a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

konvergiert, aber

$$\sum_{n=0}^\infty b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$$

konvergiert nicht.

- $\sum_{n=0}^\infty a_n$ ist absolut konvergent und ϕ injektiv $\implies \sum_{n=0}^\infty b_n$ ist konvergent.

Richtig. Eine Teilfolge oder eine Umordnung der absolut konvergenten Reihe ist auch absolut konvergent.

Sei $\sum_{k=1}^\infty a_k$ absolut konvergent und $\sum_{k=1}^\infty b_k$ konvergent.

- Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty |a_k|^2$ konvergiert immer absolut.
- Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k b_k$ konvergiert immer absolut.
- Beweis: (a_k) und (b_k) sind beschränkt. Dann $\exists C > 0, |a_k| < C$ und $|a_k|^2 < C|a_k|, |a_k b_k| < C|a_k|$.

Sei I ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion:

- I kompakt $\implies f(I)$ kompakt.
- $f(I)$ kompakt $\not\Rightarrow I$ kompakt.
 Gegenbeispiel: Sei $I = (-\pi, \pi)$ und $f(x) = \sin x$. Dann ist $f(I) = [-1, 1]$ kompakt, aber $(-\pi, \pi)$ ist nicht kompakt.

Wir betrachten die Funktionenfolge (f_n) mit

$$f_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x^{\frac{1}{2}} + n^{-1})^2$$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
- Die Funktionenfolge konvergiert gleichmässig.

Falsch: Aus $|f_n(x) - x| = 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n^2}$ folgt, dass für $x > n^2$, $|f_n(x) - x| > 2$. Folglich kann (f_n) nicht gleichmässig konvergieren.

- Für alle $M > 0$ gilt, dass $f_n|_{[0, M]} : [0, M] \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmässig konvergiert.

Richtig: Es gilt $|f_n(x) - x| = 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n^2} \leq M^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n^2}, \forall x \in [0, M]$.

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2M^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n^2}\right) = 0$, konvergiert $(f_n|_{[0, M]})$ gleichmässig.

Falls f_n eine Funktionenfolge ist, wobei f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ einmal stetig differenzierbar ist und falls sowohl (f_n) als auch (f'_n) gleichmässig konvergieren, mit $f_n \rightarrow f$ und $f'_n \rightarrow g$, dann ist f stetig differenzierbar mit $f' = g$.

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen nicht richtig?

1. f hat eine Taylorreihe bei $x_0 = 0$
2. Der Konvergenzradius der Taylorreihe ist ≥ 0 , aber nicht notwendig > 0
3. Dort, wo die Taylorreihe konvergiert, stellt sie die Funktion f dar.
4. Wenn f durch eine Potenzreihe gegeben ist, so ist diese gleich der Taylorreihe.

Lösung: (3) ist falsch. Gegenbeispiel:

Sei f eine Funktion mit $f(0) = 0$ und $f(x) = e^{-1/x^2}$ für $x \neq 0$.

Diese ist beliebig oft stetig differenzierbar, aber ihre Taylorreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ist immer gleich 0 und weicht daher von der Funktion f für $x \neq 0$ ab.

Seien $f, g : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ nicht negative, zweimal differenzierbare Funktionen. Die Funktion h sei definiert durch $h(x) := g(f(x))$ für alle $x \geq 0$.

1. h ist zweimal differenzierbar.
Wahr: $h''(x) = g''(f(x)) \cdot f'(x)^2 + g'(f(x)) \cdot f''(x)$
2. Wenn f und g streng konvex sind, ist h konvex.
Falsch: Gegenbeispiel mit $f(x) = g(x) = (x-1)^2$
3. Wenn $\int_0^\infty f(x) dx$ und $\int_0^\infty g(x) dx$ konvergieren, konvergiert $\int_0^\infty h(x) dx$.
Falsch: Gegenbeispiel $f(x) = g(x) = e^{-x}$.

Dann gilt $\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^\infty g(x) dx = 1$.
Da aber

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(-e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{e^x}}} = 1$$

divergiert $\int_0^\infty h(x) dx$.

9.3 Versch. Aufgaben

Zeigen sie, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^n = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Reihenentwicklung: $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)$ und $\ln(1+x) = x + \mathcal{O}(x^2)$.

$$\begin{aligned} \cos \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n &= \exp \left(n \log \left(\cos \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right) \right) \\ &= \exp \left(n \log \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \right) \\ &= \exp \left(n \left(-\frac{t^2}{2n} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \right) \\ &= \exp \left(-\frac{t^2}{2} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n} \right) \right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) = e^{-\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

Berechne $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x) \exp(-x^2) dx$

Wir wissen $\sin(x)$ ungerade und $\exp(-x^2)$ gerade. Das Produkt einer ungeraden und geraden Funktion ist eine ungerade Funktion. Für ungerade Funktionen gilt

$$\int_{-a}^{+a} f(x) dx = 0$$

Daraus folgt: $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x) \exp(-x^2) dx = 0$

Sei x und θ reelle Zahlen mit $x + \frac{1}{x} = 2 \cos(\theta)$. Zu zeigen: Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos(n\theta)$$

IA

$$\begin{aligned} n = 2 : x^2 + \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2 \\ &= 4 \cos^2(\theta) - 2 = 2 \left(2 \cos^2(\theta) - 1 \right) \\ &= 2 \left(\cos^2(\theta) - \left(1 - \cos^2(\theta) \right) \right) \\ &= 2 \left(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \right) = 2 \cos(2\theta) \end{aligned}$$

IH

gilt für $n = k$ und $n = k + 1$

IS

$$x^{k+2} + \frac{1}{x^{k+2}} = \left(x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} \right) \left(x + \frac{1}{x} \right)$$

$$- \left(x^k + \frac{1}{x^k} \right) = 4 \cos((n+1)\theta) \cos(\theta)$$

$$-2 \cos(n\theta) \stackrel{(*)}{=} 4 \cos((n+1)\theta) \cos(\theta)$$

$$-2 (\cos((n+1)\theta) \cos(-\theta) - \sin((n+1)\theta) \sin(-\theta))$$

$$= 2 \cos((n+1)\theta) \cos(\theta) - 2 \sin((n+1)\theta) \sin(\theta)$$

$$\stackrel{\text{Add.T.}}{=} 2 \cos((n+2)\theta)$$

Der Schritt $(*)$ lässt sich folgendermassen berechnen:

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) &= \cos(n\theta + \theta - \theta) \\ &= \cos(n\theta + \theta) \cos(-\theta) - \sin(n\theta + \theta) \sin(-\theta) \end{aligned}$$

Manipulation für $f(x) = \sin(\arctan(x))$ (funktioniert ähnlich für $\cos(\arctan(x))$):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin(\arctan(x))}{\sqrt{\sin^2(\arctan(x)) + \cos^2(\arctan(x))}} \\ &= \frac{\frac{\sin(\arctan(x))}{\cos(\arctan(x))}}{\sqrt{\frac{\sin^2(\arctan(x))}{\cos^2(\arctan(x))} + 1}} \\ &= \frac{\tan(\arctan(x))}{\sqrt{\tan^2(\arctan(x)) + 1}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

Manipulation für $f(x) = \tan(\arcsin(x))$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \tan(\arcsin(x)) \\ &= \frac{\sin(\arcsin(x))}{\cos(\arcsin(x))} \\ &= \frac{\sin(\arcsin(x))}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

$$\int x \arcsin(x) dx$$

Substitution mit $x = \sin(u)$:

$$\begin{aligned} &= \int \sin(u) \cos(u) u du \\ &= \int \frac{1}{2} \sin(2u) u du \\ &= \frac{1}{2} \int \sin(2u) u du \end{aligned}$$

Partielle Integration (u ableiten, $\sin(2u)$ integrieren):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int u \sin(2u) du \\ &= \frac{1}{2} \left[u \cos(2u) \left(-\frac{1}{2} \right) - \int \left(-\frac{1}{2} \right) \cos(2u) du \right] \\ &= -\frac{1}{4} u \cos(2u) + \frac{1}{4} \int \cos(2u) du \\ &= -\frac{1}{4} u \cos(2u) + \frac{1}{8} \sin(2u) + C \end{aligned}$$

$u = \arcsin(x)$ einsetzen liefert:

$$= -\frac{1}{4} \arcsin(x) \cos(2 \arcsin(x)) + \frac{1}{8} \sin(2 \arcsin(x)) + C$$

Let us take $k_0 \in \mathbb{N}$ large enough so that $\sqrt{|t|} < k_0$. Then there is $1 + t/k^2 > 0$ for all $k \geq k_0$. It is now sufficient to show that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=k_0}^n \left(1 + \frac{t}{k^2} \right)$$

exists because if it does, the original limit is this limit times

$$\prod_{k=1}^{k_0-1} \left(1 + \frac{t}{k^2} \right),$$

which is a finite product (and thus a finite constant). Since e^x and $\ln(x)$ are continuous, showing that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=k_0}^n \left(1 + \frac{t}{k^2} \right)$$

exists is equivalent to showing that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\prod_{k=k_0}^n \left(1 + \frac{t}{k^2} \right) \right)$$

exists. Note that the \ln here is well defined because the product is a product of positive numbers and thus positive itself. We have

$$\ln \left(\prod_{k=k_0}^n \left(1 + \frac{t}{k^2} \right) \right) = \sum_{k=k_0}^n \ln \left(1 + \frac{t}{k^2} \right),$$

so we just need to show that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=k_0}^n \ln \left(1 + \frac{t}{k^2} \right)$$

exists – in other words, that

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{t}{k^2} \right)$$

converges.

We can approximate $\ln \left(1 + \frac{t}{k^2} \right) \approx \frac{t}{k^2}$. More precisely,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{t}{k^2}}{\ln \left(1 + \frac{t}{k^2} \right)} = \lim_{\ell \rightarrow 0^+} \frac{t\ell}{\ln(1+t\ell)} = \lim_{\ell \rightarrow 0^+} \frac{t}{\frac{t}{1+t\ell}} = \frac{t}{t} = 1.$$

Therefore, $\sum_{k=k_0}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{t}{k^2} \right)$ converges if and only if $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{t}{k^2}$ converges. However, we actually know that

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{t}{k^2} = t \left(\zeta(2) - \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{1}{k^2} \right) = t \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{1}{k^2} \right)$$

does converge.

Berechnen Sie die Integral $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ per Definition.

Lösung: Sei $f(x) = \frac{1}{x^2}$,

$P_n = \{x_k := 1 + \frac{k}{n} \mid k \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$,

$\xi = \{\xi_k := \sqrt{x_k \cdot x_{k+1}} \mid k \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$

Dann gilt

$$\begin{aligned} S(f, P_n, \xi) &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k \cdot x_{k+1}} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^2}{(k+n)(k+n+1)} \cdot \frac{1}{n} \\ &= n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+n)(k+n+1)} \\ &= n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+n} - \frac{1}{k+n+1} \right) \\ &= n \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n, \xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Zeige $\int_1^{n+1} \frac{\sin(\pi x)}{[x]} dx = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

Sei

$$\int_1^{n+1} \frac{\sin(\pi x)}{[x]} dx = \sum_{k=1}^n I_k$$

mit

$$I_k = \int_k^{k+1} \frac{\sin(\pi x)}{[x]} dx$$

$$\begin{aligned} I_k &= \int_k^{k+1} \frac{\sin(\pi x)}{k} dx = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot (-\cos(\pi x)) \Big|_k^{k+1} \\ &= \frac{\cos(k\pi) - \cos((k+1)\pi)}{k\pi} = \frac{2(-1)^k}{k\pi} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\int_1^{n+1} \frac{\sin(\pi x)}{[x]} dx = \sum_{k=1}^n \frac{2(-1)^k}{k\pi} = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Beweise die Konvergenz von $\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^{3/2}} dx$

Mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} \int_a^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^{3/2}} dx &= \int_a^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} \cdot \sqrt{x} dx \\ &= \cos \left(\frac{1}{x} \right) \cdot \sqrt{x} \Big|_a^1 - \int_a^1 \cos \left(\frac{1}{x} \right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ &= \cos(1) - \sqrt{a} \cos \left(\frac{1}{a} \right) - \frac{1}{2} \int_a^1 \frac{\cos \left(\frac{1}{x} \right)}{\sqrt{x}} dx \end{aligned}$$

Es gilt $\lim_{a \rightarrow 0} \cos 1 - \sqrt{a} \cos \frac{1}{a} = \cos 1$. Also müssen

wir nur noch die Konvergenz von $\int_a^1 \frac{\cos \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$ zei-

gen. Da $\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{\cos \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ und $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ konvergiert, konvergiert dieses Integral.

Untersuche die Konvergenz von $\int_1^{+\infty} \sin \left(\frac{1}{x} \right) dx$.

Substitution: $t = \frac{1}{u}$, $dx = \frac{1}{u^2} du$

Mittels Taylorentwicklung gilt: $\sin u = u - \frac{u^3}{6} \cos \tau$ für ein $\tau \in [0, u]$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin u}{u^2} du &= \int_0^1 \frac{1}{u} - \frac{\cos \tau}{6} u du = \ln u - \frac{\cos(\tau) u^2}{12} \Big|_0^1 \\ &= \ln 1 - \frac{\cos(\tau) 1^2}{12} - \lim_{a \rightarrow 0} \left(\ln a - \frac{\cos(\tau) a^2}{12} \right) \\ &= 0 - \frac{\cos(\tau)}{12} - \lim_{a \rightarrow 0} (\ln a) + 0 \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Demzufolge ist $\int_1^{+\infty} \sin \left(\frac{1}{x} \right) dx$ divergent.

Bestimmen Sie mit Hilfe des linearen Taylorpolynoms um $t_0 = 8$ eine Näherung an $\sqrt[3]{7}$.

Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler dieser Näherung an.

Für $f(t) = \sqrt[3]{t}$ ist $f'(t) = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}}$.

\Rightarrow

$$T_1(f, t, 8) = f(8) + f'(8)(t-8) = 2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot (t-8)$$

Näherung für $\sqrt[3]{7} = T_1(f, 7, 8) = 2 - \frac{1}{12} = \frac{23}{12}$

Fehlerabschätzung:

$$R_1(f, t, t_0) = \frac{f''(\xi)}{2!} (t-t_0)^2 = \frac{f''(\xi)}{2!} (7-8)^2 = \frac{f''(\xi)}{2}$$

für ein $\xi \in [7, 8]$. Da $f''(t) = -\frac{2}{9} t^{-\frac{5}{3}}$ gilt:

$$|\text{Fehler}| \leq \frac{1}{2} \sup_{\xi \in [7, 8]} |f''(\xi)| = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{7^{5/3}} = \frac{1}{9 \cdot 7^{5/3}}.$$

10 Quellen

Diese Cheatsheet wurde von verschiedenen schon vorhandenen Zusammenfassungen inspiriert (Julian Steinmann, Danny Camenisch, Andrej Scheuer etc.).

Lösungen sind entweder meine eigenen, offizielle Lösungen (Assignments und Prüfungen) oder veröffentlichte Lösungen auf der VIS Comsol. Vielen Dank an alle Beteiligten!

Die Definitionen sind meistens dem Skript “Analysis 1” von Marc Burger und den Vorlesungsnotizen von Analysis 1 im Frühlingssemester 2022 entnommen.

Ich wünsche allen viel Erfolg!